

微分方程式の数値解法と
Liapunov 函数について

大阪府大 工 子本 浩
同志社大 工 井村英夫

§ 1. 緒言

1965年秋の数学会で、常微分方程式の数値解法における種々の問題が提起された。(清水辰次郎:「常微分方程式の数値解法における数学的諸問題」) その中で、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0$$

という微分方程式の数値解法において、項の間に著しい大小の差があるときの刻み巾が問題にされた。特に

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \kappa(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x &= 0 \\ t=0 \text{ のとき } x=2, \quad \frac{dx}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

という van der Pol の方程式の解は $x=2$ より $x=1$ (又は $x=-2$ より $x=-1$) までの水平部分では約 $\kappa(\frac{3}{2} - \log 2)$ 变化し、 $x=1$ から $x=-2$ (又は $x=-1$ から $x=2$) までの垂直部分では変化は殆んど 0 である。したがつて、数値解法において、刻み巾を十分小にしないと垂直部分の計算は失

束厚い。しかし、垂直部分の計算に必要なだけ刻み巾を十分小さくすれば、 $\delta t = 100$ というような大きな場合、水平部分の計算に時間がかかりすぎる。したがって、刻み巾を場所により変えねばならぬのは零が生ずるところを指摘された。

この刻み巾を変化させる必要は $2 \frac{dx}{dt} = x^3$, $t=0$ のとき, $x=1$ とか, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x}$, $t=0$ のとき $x=1$ でも生ずる。これらの方程式の真の解はそれぞれ $x = (1-t)^{-\frac{1}{2}}$, $x = (1-t)^{\frac{1}{2}}$ であるが、刻み巾によつては t の 1 より大きな値に対しても計算は続行される。そこで、この刻み巾を場所により変える必要性の原因は方程式の特異点によるものではなく、方程式の非線形性によるものであるから、あらかじめ、どこで刻み巾を変えるべきかは知ることは出来ない。

刻み巾を変える方法と 1 つ、

(1) 刻み巾を h とし、 t_n における値より t_{n+1} における値を計算し、 $t_{n+\frac{1}{2}}$, $t_{n+1}-\frac{h}{2}$ のおのおのにおける値に差が生ずるか否かを検討して、刻み巾を変える。(清水辰次郎：前記の講演の予稿集)

(2) 反復型の公式で、打ち切り誤差の程度を修正値より予測値を差引いた値によつて判定し、刻み巾を半分又は倍にする。
(高田勝：「van der Pol の式の数值積分」、森口繁一他：「常微分方程式の数值解法における難問対策へのある試み」共に

第8回 プログラミニグ - シニボジウム報告集 (1967)

が考えられ、共に解が得られていく。

ここで、刻み巾を変更する一つの方法として、Liapunov の second method を利用することを考える。

§2. Liapunov の second method

A. M. Liapunov は微分方程式の解の安定性の問題の研究において、いわゆる Liapunov の second method とよばれる方法を用いた。これは今日では安定性問題のみならず、微分方程式の解の諸性質の研究において重要な方法になつている。

Liapunov は連立微分方程式の解、すなわち Vector 函数の性質をしきべるに際し、Liapunov 函数とよばれる実数値をとる一つの函数の性質を利用した。そこで、解のどのような性質をしきべるかに応じて、Liapunov 函数に種々の性質が假定される。

連立微分方程式を

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (2.1)$$

とする。ここで、 x は n -vector であり、 $f(t, x)$ は (t, x) 空間で連続な n -vector 函数とする。この方程式に対し、ある開集合 S で定義された一つの連続函数 $V(t, x)$ を考へ、 $V(t, x)$ は x に関して局所的に Lipschitz の条件をみたすものとする。この $V(t, x)$ に対し、函数 $\dot{V}(t, x)$ を次の

式で定義する。

$$\dot{V}(t, x) = \overline{\lim_{h \rightarrow 0^+}} \frac{1}{h} \{ V(t+h, x+hf(t, x)) - V(t, x) \}$$

$V(t, x)$ が t と x とに関し、連続な偏導函数をもつとき、

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x)$$

である。 $\equiv \ddot{v}$, \cdot は scalar 積を示す。

$x(t)$ を S の中にある (2.1) の解とする。そのとき、 $V(t, x(t))$ は尤に関し微分可能で

$$\frac{d}{dt} V(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \cdot f(t, x(t)) \quad (2.2)$$

である。微分方程式の解の諸性質をしらべるのに $V(t, x)$, $\dot{V}(t, x)$ の性質よりしらべるのが Liapunov's second method であり、その函数 $V(t, x)$ を Liapunov 函数という。

3.3 数値解法と Liapunov 函数

連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (3.1)$$

の $t = t_0$ のとき $x = x_0$ とすう初期条件の下での数値解法を考える。 $\equiv \ddot{x}$, x は vector, $f(x)$ は 連続な vector 函数とする。

刻み巾を決定する問題を考えているのであるから、数値解法のために使う公式の精度、収束とか丸めの誤差の問題にはかれないことにする。すなわち、 $t = t_n$ に対する x の値は真の値として求められたとし、次の $t = t_{n+1}$ に対する x の値を

考へてはいる精度以上の近似値と 1 で求めるための刻み巾の決定について考へる。

x_n を $t=t_n$ に対し求まつた眞の値とすれば

$$x = x_n + f(x_n)(t-t_n)$$

は (t_n, x_n) を通る直線を示し、一つの正数 h に対し、

$$\overline{x_{n+1}} = x_n + f(x_n)h$$

は $t_{n+1} = t_n + h$ に対する x_{n+1} (眞の値) の近似値である。

ここで、 $V(x)$ を一つの開集合 S で定義された連続函数とし、局所的に Lipschitz 条件をみたすとする。考へてはいる初期条件の下での (3.1) の解 $x(t)$ が S に止まつてはいるとして、小さな正の数 h に対し、 $\bar{U} \subset S$, $x_{n+1} \in \bar{U}$ 且つ $\overline{x_{n+1}} \in \bar{U}$ であるような x_n の近傍 U が存在する。

そのとき、

$$V(x_{n+1}) - V(\overline{x_{n+1}}) \leq L \|x_{n+1} - \overline{x_{n+1}}\| \quad (3.2)$$

である。ここで、 L は x に関する \bar{U} における $V(x)$ の Lipschitz の定数を示し、 $\|\cdot\|$ は Euclid norm を示す。

いま、数值解法を考えているのであるから、 $f(x)$, $V(x)$ の微分可能性を必要なだけ假定しておけば、 $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$, $\frac{d^3V}{dt^3}$ 等が (2.2) の関係式を用ひて、計算出来る。

一方、 $x(t)$ に関する $t=t_n$ の近傍で

$$V(x) = V(x_n) + \frac{dV}{dt}(x_n)(t-t_n) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dt^2}(x_n)(t-t_n)^2$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{d^3V}{dt^3}(x(t_n + \theta h))(t - t_n)^3 \quad (0 < \theta < 1)$$

である。

したがって、

$$V(x_{n+1}) = V(x_n) + \frac{dV}{dt}(x_n)h + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dt^2}(x_n)h^2 + O(h^3)$$

が成立するから、 $t = t_n$ における x_n により、

$$V(x_{n+1}) - V(\bar{x}_{n+1})$$

は h^2 の項まで計算可能である。

(3.2) より、 $|V(x_{n+1}) - V(\bar{x}_{n+1})|$ が大きければ、 $\|x_{n+1} - \bar{x}_{n+1}\|$ は大きくなる。したがって、 \bar{x}_{n+1} が眞の値に近い値にあるためには

$$V(x_{n+1}) - V(\bar{x}_{n+1})$$

が十分小さであることが希望しい。この値が大きくなるときは、 \bar{x}_{n+1} に大きな誤差が入り、眞の解より遠ざかってしまう。

したがって、刻み幅 h を定める判定の不等式として、

$$|V(x_{n+1}) - V(\bar{x}_{n+1})| \leq \varepsilon_L \quad (3.3)$$

をうる。ここで、 ε_L は L と必要とする解の精度に關係する小さな正数である。

一旦、 h が (3.3) を満たすように定まつた後は、 x_{n+1} を求めるためには必ずしも Euler 法による必要ではなく、Runge-kutta 法等他の適当な公式に依つてもよい。すなわち、今問題にしているのは x_n と解つていい方程式の形により、 h を

定める = ことであり、次の x_{n+1} を数值解として何によつて求め
るかは別問題である。

§4. van der Pol の方程式の数值解法

van der Pol の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

を初期条件 $t=0$ のとき、 $x=2$, $\frac{dx}{dt}=0$ で考える。

これは

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - \kappa(\frac{x^3}{3} - x) \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (4.1)$$

$$t=0 \text{ のとき}, \quad x=2, \quad y=-\frac{2}{3}\kappa$$

と同値である。

これを対し、

$$\begin{cases} \overline{x}_{n+1} = x_n - \{y_n + \kappa(\frac{x_n^3}{3} - x_n)\} h \\ \overline{y}_{n+1} = y_n + x_n h \end{cases}$$

である。

$=$ τ , (4.1) に対し, $V(x, y)$ を次の如く定義する。

$$V(x, y) = x + y \quad (4.2)$$

のとき, (4.1), (4.2) に対し, (2.2) より

$$\frac{dV}{dt} = -y - \kappa(\frac{x^3}{3} - x) + x$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -x + \{\kappa(x^2 - 1) - 1\} \{y + \kappa(\frac{x^3}{3} - x)\}$$

をうる。

一方,

$$V(\overline{x_{n+1}}, \overline{y_{n+1}}) = x_n - \left\{ y_n + \frac{h}{3} \left(\frac{x_n^3}{3} - x_n \right) \right\} h + y_n + x_n h$$

であるから,

$$V(x_{n+1}, y_{n+1}) - V(\overline{x_{n+1}}, \overline{y_{n+1}})$$

$$= \frac{1}{2} \left[-x_n + \left\{ \frac{h}{3} (x_n^2 - 1) - 1 \right\} \left\{ y_n + \frac{h}{3} \left(\frac{x_n^3}{3} - x_n \right) \right\} \right] h^2 + O(h^3),$$

である。

考えてくる $V(x+y)$ に対する Lipschitz の定数は 1 であるから、刻み幅を定める判定の不等式と 1 , 2 ,

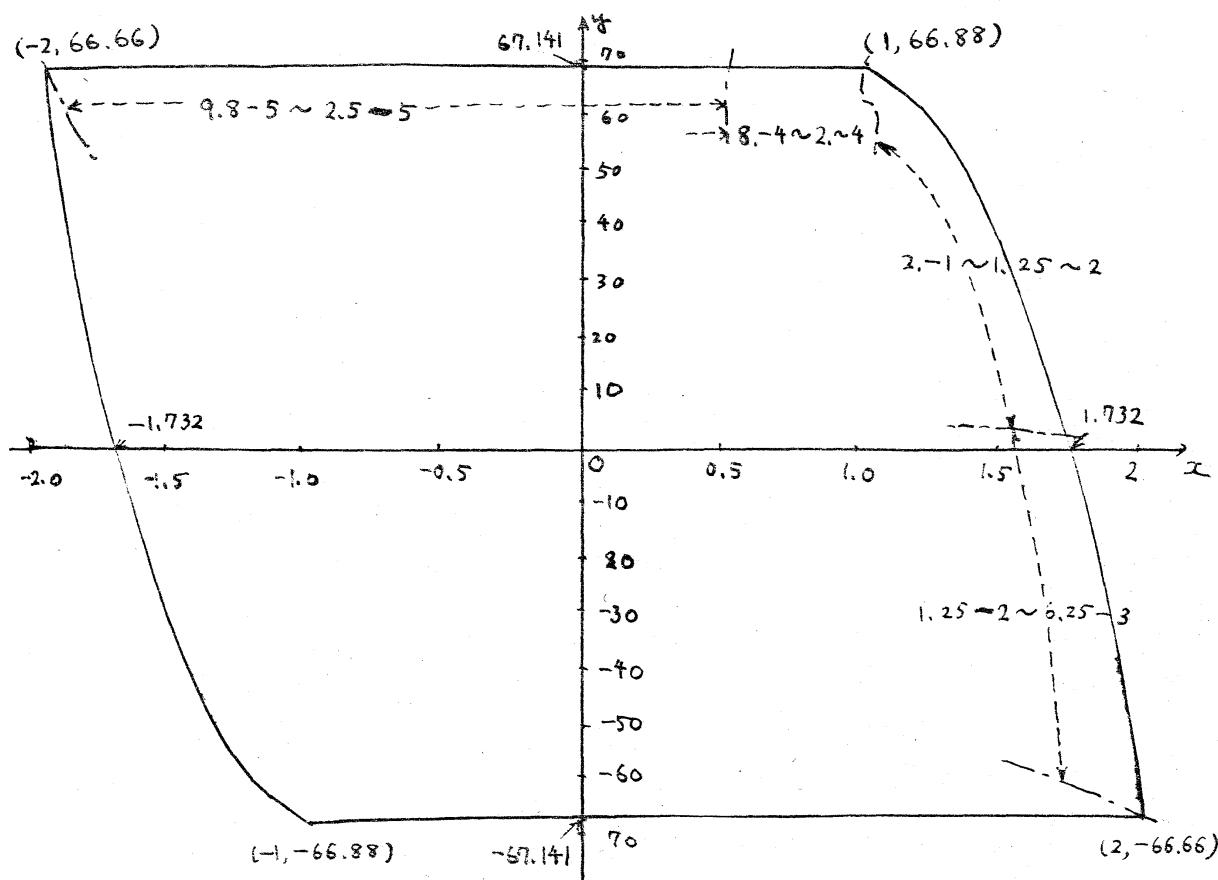
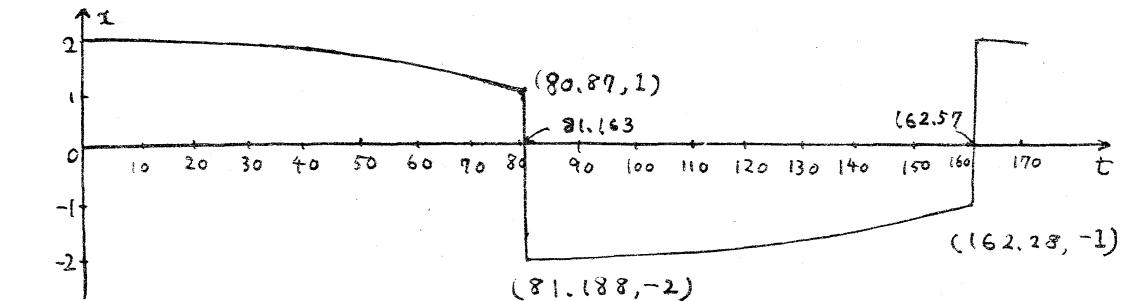
$$\left| \frac{1}{2} \left[-x_n + \left\{ \frac{h}{3} (x_n^2 - 1) - 1 \right\} \left\{ y_n + \frac{h}{3} \left(\frac{x_n^3}{3} - x_n \right) \right\} \right] h^2 \right| < \varepsilon \quad (4.3)$$

である。ここで、 ε は求めてくる解の精度によって決定する定数で、Lipschitz の定数には関係しない。

実際に計算するときは、 $t = 0$ のとき、 $x = 2$, $y = -\frac{2}{3}$ をとし、 $h = 0.1$ より考えて、(4.3) をみたさないときは h をみたすまで半減してゆき、みたすんに対し、適当な数値解法の公式を利用して、次の x , y の値を出し、その後 h を 2 倍にし、同じ操作を行な次々に x , y の値を求めていく。そして、 $2 \frac{dx}{dt} = x^3$ のような方程式も考慮しておくために、 h がある値より小さくなつたときは計算機と止めるようにプログラムを作つておく。

この方針の下で、 $\frac{h}{3} = 100$, $\varepsilon = 0.00001$ に対し、HICON で行つた実験結果を次の図で示す。出力は

直前の印刷値に対し、エグ 0.01 、オガ 1 変化のいずれかの時に行なわせた。印刷時間を含め1周期の計算に要した時間は1時間2分である。尚、数值解法にはEuler法を用いた。



図で直線間の数はんの大きさを示している。ただし、 $2.5-5$ 等は 2.5×10^{-5} を表わすものとする。

§ 5. 他の例

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x^3$, $t=0$ のとき $x=1$ に対し, $V(x) = x$ とすれば, h を定める式は

$$\frac{3}{8}|x^5|h^2 < \varepsilon$$

である。 $\varepsilon = 0.00001$ とし, 数値解法に対しては Runge-Kutta 法を用いて計算すれば, 最初は $h=0.00312$ で計算を始め, $t=0.99999$ に対し, $x=1.00000$ に対し, $h=5 \times 10^{-8}$ で $x=100.027$ をうる。(=のとき解は $x=\sqrt{1-t}$ であるから, $t=0.99999$ に対しては $x=100$ である。) その後 h は減少してゆき, 計算機はんの制限以下になつた所で停止した。

又, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x}$, $t=0$ のとき $x=1$ に対しても, $V(x)=x$ とすれば, h を定める式は

$$\frac{1}{8}|\frac{1}{x^3}|h^2 < \varepsilon$$

である。 ε , 数値解法の公式は前例と同じに 12, 計算すれば, 最初は $h=0.00625$ で計算を始めてゆき, $t=0.999902$ に対し, $h=6.1 \times 10^{-6}$ で $x=0.00988$ をうる。(=のとき解は $x=\sqrt{1-t}$ であるから, $t=0.999902$ に対し, $x=0.00988$ である。) その後, h の制限のため, 計算機は停止する。

尚, いづれの場合も h が 10^{-10} より小になれば, 計算機を停止せるようにアロログラムを組んだ。