

Recurrent Markov chain の構成 について

静岡大 理 近藤亮司

§1 序

S を可算無限集合、 B を S で定義された実数値有界函数全体の空間とする。又 μ を S 上の σ -有限で正の測度とすると、有限集合 E に対し、 $\langle \mu, f \rangle = \sum_{x \in S} \mu(x) f(x) = 0$ をみたすような f の全体を $N(\mu)$ で表わす。 $N(\mu)$ から B への線型写像 R が

(S. C. M) 任意の $f \in N(\mu)$ に対し、もし集合 $\{f > 0\}$ 上で $Rf \leq m$ (m は実定数) が成り立つならば、 S の σ -有限で $Rf \leq m$

をみたすならば、半完全最大値原理 (semi-complete maximum principle) をみたすことを示すことができる。もし

R が連続な recurrent semi-group の weak potential operator であるならば、不変測度 μ に対し、上記最大値原理をみたすことが知られている [4] [5]。逆に、ある測度 μ に対し、 $N(\mu)$ から B への線型写像 R が (S. C. M) をみたすとき、 μ を不変測度としてもつ。

$R \in$ weak potential operator とあるような μ の Markov semi-group が構成されることか出来るか? という問題について考える。これは完全最大値の原理をみたす核が与えられたとき、 μ が potential 核とある semi-group が構成される Hunt の定理の recurrent な場合への移行である。

μ が有界測度の場合には、このことは肯定的に解決出来る。得られた semi-group は必ず recurrent となる。このことを見るに於いて述べる。しかし、 μ が有界でない場合には、semi-group が決して対応しない場合や、構成出来る場合でも transient になったりして事情は可成り複雑である。このような例は §4 に於いて与える。 μ が有界でない場合 (μ が有界のときのようには) のごまかし形で問題が解決されるための自然で適切な条件は未だ得られていない。

最大値の原理の形を少し変えると、discrete parameter の Markov chain に対する同種の問題となる。このことを見るに於いて述べる。この結果は後で利用する。

§2 強められた半完全最大値原理

最初に以後用いられる記号をまとめておく。 S の空でない有限部分集合全体を \mathcal{E} で表わし、各 $E \in \mathcal{E}$ に対応し、

$f|_E$ 函数 f の E 上への制限

γ_E 測度 γ の E 上への制限

B_E f_E 全体の空間

N^E $f \in N(\mu)$ から $\text{supp } f \subseteq E$ なる f の全体

(但し, $\text{supp } f$ は f の台)

という記号を用いる。又 f^+ , f^- は $\pm f$ であり $\sup(f, 0)$, $\sup(-f, 0)$, χ_E は E の indicator とある。

$N(\mu)$ から B への線型写像 G があって、 $\pm f$ が

(R.S.C.M) 任意の $f \in N(\mu)$ に対し, $m \in \{f > 0\}$ 上で

$Gf \leq m$ (m は実定数) が成り立つならば, S 上で

$Gf \leq m - f^-$.

$\pm f$ なるとき, G は強められた完全最大値原理 (reinforced semi-complete maximum principle) と呼ばれる。

これは $\text{discrete parameter の recurrent Markov chain の weak inverse (Crey [6])}$ はこの最大値原理

と一致する。これは容易に証明されることとなる。以下 (R.S.C.M)

と一致する G が与えられるとして, この性質を調べる。

補題 1 G は次の意味で non-singular である。即ち

$f \in N(\mu)$ が恒等的に 0 に等しくなければ, Gf は f の台の上で定数に等しくなる。 (従って特に, $Gf = \text{定数}$ なる

$f = 0$ から定数 = 0 である)

証明 $f \in N(\mu)$, $f \neq 0$, $Gf = m$ が $\{f \neq 0\}$ で
 成立したとある。このとき (R.S.C.M) より S 上で
 $Gf \leq m - f^-$ が成立するので特に $\{f \neq 0\}$ 上では
 $m = Gf \leq m - f^- \leq m$ 。従って $f^- = 0$ を得る。
 同様にして S 上で $G(-f) \leq -m - (-f)^- = -m - f^+$
 なることから $f^+ = 0$ を得るので $f = 0$ となり仮定に反あ
 る。

補題 2 次の性質をもつ S 上の (有符号) 測度の族 $(\lambda^E)_{E \in \mathcal{E}}$
 が存在する。即ち (i) $\text{supp } \lambda^E \subseteq E$, (ii) $\langle \lambda^E, 1 \rangle = 1$
 (iii) 全ての $f \in N^E$ に対し $\langle \lambda^E, Gf \rangle = 0$ 。

このように $(\lambda^E)_{E \in \mathcal{E}}$ は G から unique に定まる。

証明 最初は $E \in \mathcal{E}$ を固定し、 N^E から $B_E \wedge$ の線型
 写像 G^E を

$$G^E f = (Gf)_E \quad (f \in N^E)$$

により定義する。補題 1 より $G^E f = 0$ ならば $f = 0$ であるから G^E は N^E から $B_E \wedge$ の injection である。一方 E が有限集合であることに注意すると、 $\dim N^E = (\dim B_E^{\mathbb{R}}) - 1$ 。従って $\dim G^E(N^E) = \dim N^E = (\dim B_E^{\mathbb{R}}) - 1$ を得る。又再び補題 1 を用いると、 $1_E \notin G^E(N^E)$ であ

ることも分る。($1_E =$ 函数 1 の E 上 \wedge の制限)。従っ

て 1_{B_E} 上の linear functional $l^E \in (1_{B^E})^*$ で

$$l_E(g_E) = 0 \iff g_E = G^E f \quad (f \in N^E)$$

$$l_E(1_E) = 1$$

とみたものは唯一存在する。こゝで

$$\lambda^E(j) = \begin{cases} l_E((\chi_{\{j\}})_E) & j \in E \\ 0 & j \notin E \end{cases}$$

と定めれば $(\lambda^E)_E \in \mathcal{R}$ が成り立つものである。又上記証明

より unique であることも分る。

$$E \in \mathcal{R}, g \in 1_B \text{ とする。このとき } \theta_E = (g - \langle \lambda^E, g \rangle)_E$$

とすれば

$$l_E(\theta_E) = \langle \lambda^E, g \rangle - \langle \lambda^E, g \rangle = 0$$

であるから $f^E \in N^E$ が唯一存在して

$$\theta_E = (g - \langle \lambda^E, g \rangle)_E = G^E f^E$$

とかける。こゝで $H^E g, \pi^E g \in \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}$

$$H^E g = G f^E + \langle \lambda^E, g \rangle$$

$$\pi^E g = G f^E - f^E + \langle \lambda^E, g \rangle = H^E g - f^E$$

により定義する。定義より H^E, π^E は 1_B から $1_B \wedge$ の

線型写像で E 上では $g = H^E g, \mathcal{R} \wedge E$ 上では

$H^E g = \pi^E g$ であることは容易に確かめられるが、更に

補題 3 (i) $t \in E$ 上で $g \geq 0$ ならば $H^E g \geq 0$, $\pi^E g \geq 0$ が S 上で成立す。 (ii) $H^E 1 = 1$, $\pi^E 1 = 1$, (iii) $E \subseteq F$ ならば $H^F H^E g = H^E g$, $\pi^F H^E g = \pi^E g$ が成立す。

証明 (i) E 上で $g \geq 0$ とする。定義により $H^E g = Gf^E + \langle \lambda^E, g \rangle$ ($f^E \in N^E$) とおくと、 f^E の台の上で

$$\begin{aligned} Gf^E &= -\langle \lambda^E, g \rangle + H^E g \\ &= -\langle \lambda^E, g \rangle + g \geq -\langle \lambda^E, g \rangle \end{aligned}$$

が成立する。従って (R.S.C.M) より

$$Gf^E \geq -\langle \lambda^E, g \rangle + (f^E)^+$$

が S 上で成立する。故に

$$H^E g = Gf^E + \langle \lambda^E, g \rangle \geq (f^E)^+ \geq 0$$

から

$$\begin{aligned} \pi^E g &= Gf^E + \langle \lambda^E, g \rangle - f^E \\ &\geq Gf^E + \langle \lambda^E, g \rangle - (f^E)^+ \geq 0 \end{aligned}$$

が S 上で成立する。

(ii) $H^E 1 = Gf^E + \langle \lambda^E, 1 \rangle$ とする。このとき $E \supseteq \text{supp } f^E$ 上で $Gf^E = 0$ であるから補題 1 を用いる。

$f^E = 0$. 従って $H^E 1 = \langle \lambda^E, 1 \rangle = 1$. $\pi^E 1 = H^E 1 - f^E$
 $= H^E 1 = 1$ と示す。

(iii) $E \subseteq F$ の場合

$$h = H^E g = G f^E + \langle \lambda^E, g \rangle \quad f^E \in N^E$$

$$H^F h = G f^F + \langle \lambda^F, h \rangle \quad f^F \in N^F$$

と示す。 F 上で $H^F h = h$ であることから、 F 上で

$$G f^F + \langle \lambda^F, h \rangle = G f^E + \langle \lambda^E, g \rangle$$

を得る。従って $f^F - f^E$ の場合 ($\subseteq F$) 上で

$$G(f^F - f^E) = \langle \lambda^E, g \rangle - \langle \lambda^F, h \rangle = \text{定数}$$

と示すのである。 $f^F = f^E$ 且 $\langle \lambda^E, g \rangle = \langle \lambda^F, h \rangle$ を得る。故に

$$H^F h = H^F H^E g = H^E g$$

及び

$$\pi^F h = \pi^F H^E g = h - f^E = \pi^E g$$

と示す。

この補題より、 H^E, π^E は S 上の Markov kernel であり、
 測度 $H^E(x, \cdot), \pi^E(x, \cdot)$ の場合は E に含まれると分かる。

補題 4 $E \subseteq F$ とし、 $g \geq 0$ の場合 E に含まれる
 ならば $\pi^E g \geq \pi^F g$ が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned}
 & \pi^E g(x) \\
 &= \pi^F H^E g(x) \\
 &= \sum_{j \in E} \pi^F(x, j) g(j) + \sum_{j \in S \setminus E} \pi^F(x, j) H^E g(j) \\
 &\geq \sum_{j \in E} \pi^F(x, j) g(j) \\
 &= \pi^F g(x).
 \end{aligned}$$

定理 1 $\mu \in S$ 上の正な有界測度、 $G \in \mathcal{L}(C(S))$ は半完全最大値原理をみたす $N(\mu)$ から $B \wedge$ の線型写像とある。このとき S 上の kernel P で

$$(1.1) \text{ (Markov kernel)} \quad P \geq 0, P1 = 1$$

$$(1.2) \text{ (invariant measure)} \quad \mu P = \mu$$

$$(1.3) \text{ (weak inverse)} \quad (I - P)Gf = f \quad (\forall f \in N(\mu))$$

をみたすものが存在し、しかも unique である。

更に P は

$$(1.4) \text{ (recurrent)} \quad \sum_n P^n(x, j) = \infty \quad (\forall x, j \in S)$$

である。

注意 μ が有界であつてもなくても、(1.3) をみたす

P は unique である。このことは、Markov kernel

定理の証明をみれば分る。又この事情は、後で述べる

補題及び定理2によつても同様である。

証明. $E_n \in \mathcal{F}$, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$, $\bigcup_{n \geq 1} E_n = S$
 とする。任意の $x, j \in S$ に対し, n を充分大とす
 べし $j \in E_n$ とするので: 補題 4 によし

$$\pi^{E_n}(x, j) \geq \pi^{E_{n+1}}(x, j) \geq \dots \geq 0$$

である。従って, $\forall x, j \in S$ に対し

$$P(x, j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{E_n}(x, j)$$

が存在する。明らかに $P \geq 0$, $P1 \leq 1$ 即ち

P は sub-Markov kernel である。最初 (1.2)

$$H^{E_n} g = Gf^{E_n} + \langle \lambda^{E_n}, g \rangle$$

($f^{E_n} \in \mathcal{N}^{E_n}$) とする。 μ が有界であること

$$\chi_{E_n} \pi^{E_n} \rightarrow P \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{及び}$$

$$\langle \mu, \chi_{E_n} \pi^{E_n} g \rangle$$

$$= \langle \mu, \chi_{E_n} H^{E_n} g \rangle - \langle \mu, \chi_{E_n} f^{E_n} \rangle$$

$$= \langle \mu, \chi_{E_n} g \rangle$$

であることを用いると

$$\langle \mu P, g \rangle = \langle \mu, P g \rangle$$

$$= \langle \mu, \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{E_n} \pi^{E_n} g \rangle$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mu, \chi_{E_n} \pi^{E_n} g \rangle$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mu, \chi_{E_n} g \rangle = \langle \mu, g \rangle$$

を得る。 $g \in \mathcal{B}$ は任意であるから $\mu P = \mu$ とする。

次に (1.1) を示す。(1.2) より $\langle \mu P, 1 \rangle = \langle \mu, 1 \rangle$ であるが $P1 \leq 1$ であるから μ -測度 $0 \leq P$ を除き $P1 = 1$ が成立する。所が μ は S 上の所正測度。 S 上で $P1 = 1$ 。即ち P は Markov kernel である。

(1.3) の証明。 $f \in N_1(\mu)$, $g = Gf + \|Gf\|$ とおく。但し $\|Gf\| = \sup_x |Gf(x)|$ 。 $E_n \in \mathcal{F}$, $E_n \uparrow S$ とおくと。充分大きい n に対して $\text{supp}(f) \subseteq E_n$ となる。従って

$$\begin{aligned} \pi^{E_n} g(x) &= \pi^{E_n} Gf(x) + \|Gf\| \\ &= Gf(x) - f(x) + \|Gf\| \end{aligned}$$

が S 上の $x \in S$ に対して成立する。 $g \geq 0$ に注意すると、Fatou の不等式から

$$\begin{aligned} P g(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \pi^{E_n} g(x) \\ &= Gf(x) - f(x) + \|Gf\| \end{aligned}$$

を得るが、このことは $P1 = 1$ より

$$P Gf \leq Gf - f$$

を意味している。 f の代りに $-f$ を考えれば

$$P G(-f) \leq G(-f) - (-f)$$

即ち

$$P Gf \geq Gf - f$$

を得るので、結局 $PGf = Gf - f$ と $\bar{P} > 2$. (1.3) の等式が成立する。

uniqueness 部分の $\bar{P} > 1$ まで得られる。今、 $P, \bar{P} \in$ (1.3) を満たす S の Markov kernel とある。 $g \in B$, $E_n \in \mathcal{F}$, $E_n \uparrow S$ とあると、 $\|H^{E_n} g\| \leq \|g\|$ から $H^{E_n} g \rightarrow g$ ($n \rightarrow \infty$) (各点収束) であるから、Lebesgue の定理で

$$\begin{aligned} Pg &= \lim_{n \rightarrow \infty} P H^{E_n} g \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(Gf^{E_n} + \langle \lambda^{E_n}, g \rangle) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Gf^{E_n} - f^{E_n} + \langle \lambda^{E_n}, g \rangle) \\ &= \bar{P}g \end{aligned}$$

を得る。従って $P = \bar{P}$ と \bar{P} の uniqueness が $\bar{P} > 1$ 。

最後に (1.4) を示す。 P は S 上の正値有界な不変測度をもつので、 S の各点は Markov chain P による再帰的:

$$\sum_{n \geq 0} P^n(x, x) = \infty$$

である。従って (1.4) を示すには P が irreducible であることが示せばよい。もしある $x, j \in S$, $x \neq j$ があるとして、 \mathbb{N} の $n \geq 0$ に対して $P^n(x, j) = 0$ と仮定する。このとき $N(\mu)$ に属する函数 e_j は

$$e_j(z) = \begin{cases} 1 & z = x \\ -\mu(x)/\mu(y) & z = y \\ 0 & z \text{ の他} \end{cases}$$

と定義する。

$\{e_j < 0\} = \{y\}$ 上 $G e_j = G e_j(y)$ であるから
 $(R.S.C.M)$ を用いて $G e_j \geq G e_j(y)$ を得る。
 従って、任意の $n \geq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n P^k(x, x) \\ &= \sum_{k=0}^n P^k e_j(x) \\ &= G e_j(x) - P^{n+1} G e_j(x) \\ &= [G e_j(x) - G e_j(y)] - P^{n+1} [G e_j - G e_j(y)](x) \\ &\leq G e_j(x) - G e_j(y) < \infty \end{aligned}$$

を得る。このことから $\sum_{n \geq 0} P^n(x, x) = \infty$ と示す
 ことができ、 P は *irreducible* である。従って (1.4) が
 証明された。

(1.4)

上記証明で (1.1), (1.2) を証明するのは μ が有界である
 こと本質的に用いている。実際 μ が有界でないとき、
 (1.1), (1.2), (1.3) は成り立たないが (1.4) は成り立つ。例、
 (1.1), (1.3) は成り立たないが (1.2), (1.4) は成り立つ。例

がある。

系3. 半完全最大値原理

この系では最初から μ は有限測度とし、 R は $N(\mu)$ から $B \wedge$ の線型写像で、半完全最大値原理 (S, C, M) をみたすものとする。 $\alpha > 0$ に対して、 $G_\alpha = I + \alpha R$ とおくと G_α は $N(\mu)$ から $B \wedge$ の線型写像である。

補題5 G_α は強められた半完全最大値原理をみたす。

証明 $f \in N(\mu)$ とし、 $\{f > 0\}$ 上で $G_\alpha f \leq m$ とする。このとき $\{f > 0\}$ 上では

$$m \geq G_\alpha f = f + \alpha Rf \geq \alpha Rf$$
 が成り立つので、 (S, C, M) より S 上で $m \geq \alpha Rf$ とする。特に $\{f \leq 0\}$ 上では

$$\begin{aligned} G_\alpha f &= f + \alpha Rf \\ &= -f^- + \alpha Rf \leq m - f^- \end{aligned}$$

となり、 $\{f > 0\}$ 上では $f^- = 0$ であるから、結局 S 上で

$$G_\alpha f \leq m - f^-$$

と示す。

G_α は (R, S, C, M) を満たすので: §1 定理 1
 より (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) を満たす S の
 kernel Q_α が存在する。よって $R_\alpha = Q_\alpha / \alpha$
 とおくと。

補題 6 $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ は次の条件を満たす。

(2.1) (Markov kernel) $\alpha R_\alpha \geq 0, \alpha R_\alpha 1 = 1$

(2.2) (invariant measure) $\alpha \mu R_\alpha = \mu$

(2.3) (resolvent equation)

$$R_\alpha - R_\beta + (\alpha - \beta) R_\alpha R_\beta = 0$$

(2.4) (weak potential operator)

$$(I - \alpha R_\alpha) R f = R_\alpha f \quad \forall f \in N^1(\mu)$$

このように $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ は unique である。更に

(2.5) (recurrent)

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} R_\alpha(x, y) = \infty \quad \forall x, y \in S$$

が成立する。

証明 (2.1), (2.2), (2.4) 及び uniqueness は
 定理 1 を用いる (1.1), (1.2), (1.3) のように $\alpha \mu R_\alpha = \mu$
 となるので。(2.3), (2.5) の証明は付いて述べる。

G_α に対して補題 2 で定まる測度の族 $(\lambda_\alpha^E)_{E \in \mathcal{E}}$,
 Markov kernel の族 $(H_\alpha^E)_{E \in \mathcal{E}}$ とおくと。

† $g \in B$, $H_\beta^E g = G_\beta f^E + \langle \lambda_\beta^E, g \rangle$ とおくと.

$$H_\beta^E g = G_\alpha f^E + (\beta - \alpha) R f^E + \langle \lambda_\beta^E, g \rangle$$

$$R_\alpha H_\beta^E g = R f^E + (\beta - \alpha) R_\alpha R f^E + \langle \lambda_\beta^E, g \rangle / \alpha$$

を得る. 故て.

$$R_\beta H_\beta^E g = R f^E + \langle \lambda_\beta^E, g \rangle / \beta$$

であるから.

$$\begin{aligned} & R_\alpha H_\beta^E g - R_\beta H_\beta^E g \\ &= (\beta - \alpha) [R_\alpha R f^E + \langle \lambda_\beta^E, g \rangle / \alpha \beta] \end{aligned}$$

とある. 一方

$$\begin{aligned} & R_\alpha R_\beta H_\beta^E g \times (\beta - \alpha) \\ &= (\beta - \alpha) [R_\alpha R f^E + \langle \lambda_\beta^E, g \rangle / \alpha \beta] \end{aligned}$$

である. 二つの容易に分るのて.

$$\begin{aligned} & R_\alpha H_\beta^E g - R_\beta H_\beta^E g \\ &= (\beta - \alpha) R_\alpha R_\beta H_\beta^E g \end{aligned}$$

とある. 二つを $E_n \in \mathcal{R}$, $E_n \uparrow S$ とおくと容易

に (2.3) が成る. (2.5) を示すには. 最初に不等式

$$R_\alpha(x, T) \leq R_\alpha(y, T)$$

に注意する. 二つは $I + \beta R_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta R_{\alpha+\beta})^n$

とみてみれば分る通り. $I + \beta R_\alpha$ が完全最大値原理

ε に対して α の ε $I(x, j) + \beta R_\alpha(x, j) \leq I(j, j) + \beta R_\alpha(j, j)$
 とあり、両辺を β で割って $\beta \uparrow \infty$ とする = $\varepsilon = \delta$ 得ら
 れる。

従って $\varepsilon \leq \delta$. ある $j \in S$ について $\lim_{\alpha \downarrow 0} R_\alpha(j, j) < \infty$
 であるならば、ある α の $x \in S$ について、

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha R_\alpha(x, j) = 0$$

とある。故に (2.2) より

$$\mu(j) = \mu(\lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha R_\alpha)(j) = 0$$

とあり矛盾ある。このことは (2.5) が $x = j$ について
 成り立つことを示す。一般の x, j について

$$1 = \lim_{\alpha \downarrow 0} R_\alpha(x, j) / R_\alpha(j, j)$$

より、(2.5) が成立する。この等式を示すには、例

$$\gamma(x) = \liminf_{\alpha \downarrow 0} R_\alpha(x, j) / R_\alpha(j, j) \text{ とおくと}$$

γ が (discrete parameter) の recurrent Markov
 chain $Q_\alpha = \alpha R_\alpha$ の excessive function であることは
 示すことができる。

Reuter [7] によって、 $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ が (2.1), (2.3)
 を満たすならば、 S 上の kernel の族 $(P_t)_{t > 0}$
 があって、

$$(2.6) \text{ (Markov kernel) } P_t \geq 0, P_t 1 = 1.$$

$$(2.7) \text{ (semi-group) } P_t P_s = P_{t+s}$$

$$(2.8) \text{ (continuity on } (0, \infty))$$

各 $x, y \in S$ に対し、函数 $t \rightarrow P_t(x, y)$ は $(0, \infty)$ 上で連続

$$(2.9) \quad R_\alpha(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t(x, y) dt$$

とみえることが知られている。又、このよう $T_0 (P_t)_{t>0}$ は unique である。従って任意の $f \in \mathcal{B}$ に対し、 $t \rightarrow P_t f(x)$ が $(0, \infty)$ 上で連続、 $t \rightarrow \mu P_t(y)$ が $(0, \infty)$ 上で連続、逆 Laplace 変換の一意的により、次の定理を得る。

定理 2 μ は有限測度、 R は半完全最大値原理をみたす $\mathcal{N}(\mu)$ から \mathcal{B} への線型写像とする。このとき $t > 0$ で連続な Markov semi-group $(P_t)_{t>0}$ である。

$$(2.10) \quad \mu P_t = \mu \quad \forall t > 0$$

$$(2.11) \quad (I - P_t) R f = \int_0^t P_s f ds \quad \forall t > 0, f \in \mathcal{N}(\mu)$$

とみえるものが存在して unique である。又 $(P_t)_{t>0}$ は

$$(2.12) \quad \int_0^\infty P_t(x, y) dt = \infty \quad \forall x, y \in S$$

とみえるという意味で recurrent である。

次に $(P_t)_{t>0}$ の $t=0$ における連続性を調べる。
このことを示すには次の定理が成り立つ。

定理 3. $(P_t)_{t>0}$ が

(2.13) (continuity at $t=0$)

$$\lim_{t \downarrow 0} P_t(x, \gamma) = I(x, \gamma)$$

をみたすための必要充分条件は R が (補題 1
の意味で) non-singular $\Gamma = \Gamma$ である。

証明 まず $(P_t)_{t>0}$ が $t=0$ で連続と仮定する。更に

$Rf = m$ が f の台の上で成り立つとすると、

(S. C. M) により S 上で $Rf = m$ である。従って

2.11) により

$$\int_0^t P_s f \, ds = (I - P_t)Rf = 0$$

が任意の $t > 0$ に成り立つ。 $(P_t)_{t>0}$ の $t=0$ に

よける連続性は $\lim_{t \downarrow 0} P_t f(x) = f(x)$ を意味するので

$$f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t P_s f(x) \, ds = 0 \quad \forall x \in S$$

と取り $f = 0$ と取る。従って R は non-singular
である。

次に $R \in \text{non-singular}$ としよる。

一般に $t > 0$ の連続 T_0 Markov semi-group $(P_t)_{t > 0}$ に対して S は X の σ -field S である。

$$W(x, S) = \lim_{t \downarrow 0} P_t(x, S)$$

が存在し、 W は $W^2 = W$ を満たす sub-Markov kernel であることが知られている []。従って、 R が non-singular のとき $W = I$ であることは示すこともできる。既に R が non-singular のときは補題 2 の条件 (i) (ii) (iii) を満たす $(\lambda^E)_{E \in \mathcal{R}}$ が R に対して定まり、これを用いて任意の $g \in B$ に対して

$$H^E g = R f^E + \langle \lambda^E, g \rangle \quad f^E \in N^E$$

が定義されることを示す。又 (R, C, M) を用いて $\|H^E g\| \leq \|g\|$ であることも示し得る。今 $E_n \in \mathcal{R}$, $E_n \uparrow S$ とおくと

$$\begin{aligned} P_t H^{E_n} g &= P_t R f^{E_n} + \langle \lambda^{E_n}, g \rangle \\ &= R f^{E_n} - \int_0^t P_s f^{E_n} ds + \langle \lambda^{E_n}, g \rangle \\ &= H^{E_n} g - \int_0^t P_s f^{E_n} ds \end{aligned}$$

と成る。特に $g = \chi_{\{x\}}$ とおくと、Fatou の不等式により

$$W H^{E_n} g(x) \leq \liminf [H^{E_n} g(x) - \int_0^t P_s f^{E_n}(x) ds]$$

$$= H^{E_n} g(x)$$

とあるが $0 \leq H^{E_n} g \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} H^{E_n} g = \chi_{\{y \mid g(y) > 0\}}$
 であることは注意して Lebesgue の定理を用いる。

$$W(x, y) \leq I(x, y)$$

とある。このように W は sub-Markov kernel である。

$$W(x, y) = w(x) I(x, y) \quad (0 \leq w(x) \leq 1)$$

の形であることは $W^2 = W$ より、 $w(x) = 0$ 又は 1 である。
 $P_t \rightarrow W \quad (t \rightarrow 0)$ は Lebesgue の定理を用いると、

$$w(y) \mu(y) = \lim_{t \downarrow 0} \mu P_t(y) = \mu(y)$$

とあるから $w(x) = 1 \quad (\forall x \in S)$ となり、 $(P_t)_{t > 0}$
 の $t = 0$ での連続性が保たれる。

§4 例

この節では有界な測度上の作用素の例として半完全最大値原理 (R. S. C. M) を満たす作用素の例をあげる。(R. S. C. M) は半完全最大値原理 (R. C. M) を意味するので、(R. C. M) を満たす non-singular な作用素の例も挙げてみる。

例 1. S は整数全体の集合、 $\mu(x) = 1 \quad (\forall x \in S)$ とする。

このとき

$$(3.1) \quad Gf(x) = - \sum_{y \in S} |x-y| f(y) \quad f \in N(\mu)$$

と定義する。簡単計算で

$$(3.2) \quad Gf(x) = Gf(x+1) + 2 \sum_{y \leq x} f(y)$$

$$(3.3) \quad Gf(x) = Gf(x-1) + 2 \sum_{y \geq x} f(y)$$

$$(3.4) \quad Gf(x) = \frac{1}{2} [Gf(x+1) + Gf(x-1)] + f(x)$$

であることが分る。もし f の台が $\{a, a+1, \dots, b\}$ を含まずるといふと (3.2) より $Gf(x) = Gf(a)$ ($x \leq a$)

(3.3) より $Gf(x) = Gf(b)$ ($x \geq b$) であるから、 G

は $N(\mu) \subseteq B$ 上では可逆である。又 $Gf \leq m$ なる $\{f > 0\}$

$= \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ 上で成り立つ。 $x < a$ の場合、

(3.2) より $Gf(x) \leq Gf(x+1) + f(x)$ 及び $Gf(x+1)$

$\leq Gf(a_1)$ を得るので $Gf(x) \leq Gf(a_1) + f(x)$

$\leq m - f^-(x)$ と得る。同様に (3.3) を用いよす。

$x \geq b$ には $x \geq b$ として $Gf(x) \leq m - f^-(x)$ と得る。更に (3.4)

より $a_k < x < a_{k+1}$ ($k=1, \dots, p-1$) のときは

$$Gf(x) = \sup [Gf(a_k), Gf(a_{k+1})] + f(x)$$

$$\leq m - f^-(x)$$

と得る。結局 G は (R.S.C.M) である。又 Markov

kernel $P \in P(x, y) = \frac{1}{2}$ ($y = x \pm 1$), $P(x, y) = 0$

(その他の γ) により定義される μ が不変測度で:

$$(*) \quad (I - P)Gf = f \quad (\Leftrightarrow (3.4))$$

であること及び P が irreducible recurrent であることが分る。従って、この場合 μ が有界で $\mu < \infty$ とも定理 1 が成立する。又同様に

$$P_t = e^{t(I-P)} = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tP)^n}{n!}$$

とあること $(P_t)_{t>0}$ は定理 2 の条件を満たすこと及び $t=0$ で連続である。このように場合には μ が有界で $\mu < \infty$ とも各々の問題はよく解ける。

例 2. さて μ は例 1 と同じである。 $G \in$

$$(3.5) \quad Gf(x) = \sum_{\gamma \leq x} f(\gamma)$$

により定義すると G は $N(\mu) \in \mathcal{B}$ に属し (R.S.C.M) をみたすことが示される。このとき Markov kernel $P \in$

$$P(x, \gamma) = \begin{cases} 1 & \gamma = x+1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とあること μ は P の不変測度で、関係式 (*) が成立することを確認する。すなわち、

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, \gamma) = \begin{cases} 1 & \gamma \geq x+1 \\ 0 & \gamma < x \end{cases}$$

と仮定する。このとき P は irreducible recurrent である。

同様に $P_t = e^{t(I-P)}$ を考えれば $(P_t)_{t>0}$ は μ に不変測度として持つ。 G は $(P_t)_{t>0}$ の weak potential operator であるか。

$$\int_0^{\infty} P_t(x, y) dt = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, y) < \infty$$

と仮定する。このとき irreducible recurrent である。

例 3. $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mu(x) = 1$ ($x \in S$) とし。

$$3.6) \quad Gf(x) = \sum_{0 \leq j \leq x} f(j)$$

と仮定する。 G は (R. S. C. M) をみたすことは容易に分る。

P は

$$P(x, j) = \begin{cases} 1 & j = x+1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と仮定する。 P は Markov kernel であり (*) をみたす。 (*) をみたす Markov kernel は一意的である。したがって以外にはないことは明らかである。ゆえに

$$1 = \mu(0) > \sum_{x \in S} \mu(x) P(x, 0) = 0$$

と仮定する。このとき μ は不変測度である。従って、この場合 μ は不変測度とし、(*) をみたす Markov kernel は存在しない。 $P_t = e^{t(I-P)}$ について考えよう。

continuous parameter のときも同様である。

参考文献

- [1] K. L. Chung: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer-Verlag, 1960.
- [2] G. A. Hunt: Markov processes and potentials II. Illinois J. Math. 1 (1957), 316-396.
- [3] J. G. Kemeny and J. L. Snell: Potentials for denumerable Markov chains, J. of Math. Appl. 3 (1961), 196-260
- [4] R. Kondō: On weak potential operators for recurrent Markov chains with continuous parameters, Osaka J. Math. 4 (1967), 327-344
- [5] 近藤亮司: 再帰 Markov 連鎖の弱 potential 作用素について, 数理研究録「最大値の原理と半群の生数」(1968)
- [6] S. Orey: Potential kernels for recurrent Markov chains, J. Math. Anal. Appl. 8 (1964), 104-132
- [7] G. E. H. Reuter: Note on resolvents of denumerable sub-markovian processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9 (1967), 16-19.