

Full-harmonic structure と マルコフ過程

静岡大理 郡 敏昭

§0 序

ポテンシャル論の公理的な 取り扱いが Brelot Bauer によりおこなわれたが その後 Meyer Hansen Boboc Constantinescu Cornea により 「非負 優調和函数全体と Excessive function 全体とが一致する Semigroup を構成しその Semigroup が連続な path を持った 強マルコフ過程の semigroup of transitions となるようにすること」という問題が あつかわれてきた。これは境界条件を自由にしたマルコフ過程であると考えられる (State space は locally compact, not compact)。一方 F.Y. Maeda は倉持による full superharmonic function を公理的にあつかうため Full harmonic structure を

導入した。もし Maeda による *full superharmonic function* 全体で非負なもの *Excessive function* 全体とが一致する十分に良いマルコフ過程ができるなら *Full harmonic structure* を一つ与えることがいくつかの境界条件をひとまとめに与えることに相当していると考えられる。この論文では与えられた *Full harmonic structure* よりマルコフ過程を構成する問題をあつかう。

§1 準備

• Brelot の Axiom

S : *locally compact separable Hausdorff space*
not compact , *connected*

S の開集合 U に対して $C(U) = \{ \text{finite continuous function on } U \}$ の *linear subspace* $\mathcal{H}(U)$ が与えられ $\mathcal{H} = \{ \mathcal{H}(U) ; U \text{ 開集合全体} \}$ が *sheaf* をつくっているとする。 G を相対 *compact* な開集合とするとき G が *regular* であるとは、すべての ∂G 上の連続函数 f が \bar{G} 上の一意的連続な拡張 H_f^G をもち、その G への制限が $\mathcal{H}(G)$ に属し $f \geq 0$ on $\partial G \Rightarrow H_f^G \geq 0$ on \bar{G} をみたすこととする。

Axiom T. Regular domain 全体は S の base にな
 っている。

Axiom H. 任意の domain G に対し $h_n \in \mathcal{H}(G)$
 $h_n \uparrow \Rightarrow \sup h_n \equiv +\infty$ or $\sup h_n \in \mathcal{H}(G)$

• Maeda の Axiom

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} D \text{ domain, not relatively compact} \\ \text{or } \partial D \text{ compact} \end{array} \right\}$$

$D \in \mathcal{D}$ に対し $\mathcal{H}(D)$ の linear subspace $\tilde{\mathcal{H}}(D)$
 が与えられたとする。

$$\mathcal{G} = \{ G \text{ open set } \partial G \text{ compact} \}.$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(G) = \{ u \in \mathcal{H}(G); \text{ 任意の } G \text{ の component} \\ \text{で } \mathcal{D} \text{ に属す集合 } D \text{ に対し } \text{Rest}_{\cdot D} u \in \tilde{\mathcal{H}}(D) \}.$$

$D \in \mathcal{D}$ が regular とは 2頁の regular の定義
 で $G \rightarrow D; \mathcal{H}(G) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(D), H_f^G \rightarrow \tilde{H}_f^D$
 とおきかえて定義されるものとする。 $G \in \mathcal{G}$ は そのす
 べての component が 2頁の意味もしくは上に定義
 された意味で regular なとき regular という。

Axiom S. $D \in \mathcal{D}$ (i) $u \in \tilde{\mathcal{H}}(D)$ $D' \subset D$

$$D' \in \mathcal{D} \Rightarrow \text{Rest}_{\cdot D'} u \in \tilde{\mathcal{H}}(D')$$

(ii) if $u \in \mathcal{H}(D)$, $\exists K$ compact set $\partial D \subset K$
 and $\text{Rest}_{D-K} u \in \tilde{\mathcal{H}}(D-K)$ then $u \in \tilde{\mathcal{H}}(D)$

Axiom \tilde{T} . 任意の compact set K に対し $K' \supset K$,
 $S-K'$ regular となるような compact set K' が
 存在する. superharmonic function を

$$\mathcal{S}(G) \equiv \left\{ \begin{array}{l} u : \text{lower semicontinuous function} \\ \text{on } G \\ u > -\infty \text{ \& } u \neq +\infty \text{ on any} \\ \text{component of } G \\ \forall f \in C(\partial G), f \leq u \Rightarrow H_f^G \leq u \end{array} \right\}$$

と, full superharmonic function を

$$\tilde{\mathcal{S}}(G) \equiv \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{S}(G), \text{ 任意の } D \in \mathcal{D}, \text{ regular} \\ \dot{D} \subset G \text{ に対し} \\ \forall f \in C(\partial D) f \leq u \Rightarrow \tilde{H}_f^D \leq u \end{array} \right\}$$

と定義する。

以下 $S \supset S_0 \in \mathcal{D}$: S_0 regular を一固定し
 て話す。ことわらないかぎり 函数は S_0 上で定義さ
 れた函数とする。

$$\mathcal{P} \equiv \left\{ \begin{array}{l} p \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0) \\ \text{if } \exists u \in \tilde{\mathcal{S}}(S_0), p+u \geq 0 \text{ then } u \geq 0 \end{array} \right\}$$

と定義する

仮定

○ $1 \in \tilde{\mathcal{S}}(S_0)$

○ For $\forall x \in S_0$ $\exists p \in \mathcal{P}$ such that $0 < p(x) < \infty$

定義. $P, Q \in \mathcal{P}$ $P > Q \Leftrightarrow P - Q \in \mathcal{P}$

次の 1.1 ~ 1.5 は Maeda により証明されている。

1.1 (定義) $P \in \mathcal{P}$, $W \in \mathcal{G}$ $\bar{W} \subset S_0$ に対して

$$\mathcal{B}_W(P) \equiv \left\{ u \in \mathcal{P}; \exists s \in \mathcal{F}(W) \right. \\ \left. u = P + s \text{ on } W \right\}$$

$$P_W(x) \equiv \inf \{ u(x), u \in \mathcal{B}_W(P) \}$$

1.2. $P_W \in \mathcal{P} \cap \mathcal{F}(S_0 - \bar{W})$

$$P_W < P$$

$$\exists u \in \mathcal{P} \cap \tilde{\mathcal{F}}(W) \quad P = P_W + u$$

1.3. $\mathcal{P}_+ \equiv \mathcal{P} \cap \mathcal{F}(S_0)$ とおくと

$$BP(x) \equiv \sup \{ u(x), u \in \mathcal{P}_+, u < P \}$$

は以下を満足する。

$$BP \in \mathcal{P}_+, \quad BP < P$$

$$BP = \text{INF.} \{ u \in \mathcal{P}_+, u < P \} \quad \text{ここに INF は}$$

order $<$ による inf とする。

1.4. $P, Q \in \mathcal{P} \Rightarrow B(P+Q) = P+Q$

1.5. $BP(x) = \inf \left\{ P_{S_0-K}(x); \begin{array}{l} K \text{ compact } \subset S_0 \\ S_0-K \text{ regular} \end{array} \right\}$

1.6. $P_W = \text{SUP} \{ u \in \mathcal{P} \mid u < v \quad \forall v \in \mathcal{B}_W(P) \}$

1.7. $P_K \equiv P - P_{S_0-K}$ と定義すると

$$P_K = \text{SUP} \{ u \in \mathcal{P} \mid u < P \quad u \in \tilde{\mathcal{F}}(S_0-K) \}$$

1.6, 1.7 の SUP は order $<$ に \exists 。

1.8. (i) $W_1, W_2 \in \mathcal{G}$ $W_1 \subset W_2 \subset S_0 \Rightarrow P_{W_1} < P_{W_2}$

(ii) K_1, K_2 compact $K_1 \subset K_2 \Rightarrow P_{K_1} < P_{K_2}$

(iii) K compact $W \in \mathcal{G}$ $K \subset W \Rightarrow P_K < P_W$

(iv) $W \in \mathcal{G}$ K compact $W \subset K \Rightarrow P_W < P_K$

1.9. $P_K = (P_W)_K$ K compact $W \in \mathcal{G}$

1.10. $P_K = \inf(P_{K_n} ; K_n \downarrow \text{compact } K = \bigcap_n K_n)$

$P_W = \sup(P_K ; K \subset W \in \mathcal{G})$

$P_K = \inf(P_W ; K \subset W \text{ relatively compact } \left. \begin{array}{l} \text{open} \\ \text{open} \end{array} \right\}$

1.11. $(P_{K_1})_{K_2} = P_{K_1 \cap K_2}$, $(P_{W_1})_{W_2} = P_{W_1 \cap W_2}$

1.12. $P_{K_1 \cup K_2} + P_{K_1 \cap K_2} = P_{K_1} + P_{K_2}$

Minimum Principle

$G \in \mathcal{G}$ $\bar{G} \subset S_0$ $u \in \mathcal{J}(G)$ $\exists \exists$

$\exists \exists \exists \liminf_{G \ni x \rightarrow \bar{G}} u(x) \geq 0 \quad \forall \bar{G} \in \partial G$

$\exists P \in \mathcal{P} \quad u + P \geq 0 \text{ on } G$

かつ $\exists \tau \in \Sigma$ $\exists \tau_i \rightarrow \tau$ $u \geq 0$

1.13. if $P \in \mathcal{P} \cap \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ for some compact K

then $BP = 0$

1.14. $\alpha \geq 0, P, P_1, P_2 \in \mathcal{P} \quad P = P_1 + P_2,$

$\Rightarrow P_K = (P_1)_K + (P_2)_K \quad (\alpha P)_K = \alpha P_K$

1.15. $u \in \tilde{\mathcal{H}}(G)$ ($G \in \mathcal{G}$) かつ $\forall U \in \mathcal{G}$ regular
 $\bar{U} \subset G$ に対し $\tilde{H}_{u|_U}^U(x) \leq u(x)$ ($\forall x \in U$)
 なるとき u を strict に full superharmonic と
 いう。 $P \in \mathcal{P}$ かつ $W \in \mathcal{G}$ 上で strict に full
 superharmonic なら $\forall U \in \mathcal{G}$ $\bar{U} \subset W$ に対し
 P_U は U 上で strict に full superharmonic とす
 る。

§2 Complete maximum principle をみたす kernel

Theorem 2.1. 任意の $P \in \mathcal{P} \cap C(S_0)^{(1)}$ に対し 次の
 条件をみたす positive proper kernel V^P が一意的
 に存在する。

- a) $\forall g \in \mathcal{B}_f(S_0)^{(1)}$ $g \geq 0$ に対し $V^P g \in \mathcal{P} \cap C(S_0)$
 且 $g \in \mathcal{B}_K(S_0)^{(1)}$ なら $V^P g \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - \overline{\{g > 0\}})$
 b) $V^P 1(x) = p(x) - Bp(x) \quad \forall x \in S_0$

(1) $C(S_0)$ は S_0 上の連続関数全体。 $\mathcal{B}(S_0)$ は
 Borel measurable function 全体。 下添字 f は
 bounded を下添字 K は compact support の
 関数を示す。 $\mathcal{B}_K(S_0)$ は bounded Borel
 measurable で compact support をもつ関数全体。

証明は Meyer [2] とまったく同様におこなわれる。すなわち $\forall x \in S_0$ を固定し $K \xrightarrow{w} P_K(x)$ が 1.8, 1.10, 1.12 より S_0 の任意の集合に対し Outer Capacity として拡張できる。その Borel set \wedge の制限 $V_x^P(dy)$ は (nonnegative) measure。 $V_{1_K}^P(x) = P_K(x)$ は lower semicontinuous だから $\forall g \in \mathcal{B}_f(S_0)$ に対し $V^P g \in \mathcal{B}(S_0)$ かつ V^P は kernel。 $V^P g \in \mathcal{P}$, $V^P g < P$ ($\forall g \in \mathcal{B}_f(S_0)$) もすぐわかる。これより Meyer が示したように $V^P g(x)$ の連続性かしたかう。 $V^P 1_K(x) = P_K(x)$ は 1.2 より $\in \tilde{\mathcal{F}}(S_0 - K)$ 。これと 「 $h_n \in \tilde{\mathcal{F}}(W)$ $h_n \uparrow \Rightarrow \sup h_n \equiv +\infty$ or $\sup h_n \in \tilde{\mathcal{F}}(W)$ 」 が任意の $W \in \mathcal{O}$ に対し成り立つことより, $V^P g \in \tilde{\mathcal{F}}(S_0 - \overline{\{g > 0\}})$ が任意の $g \in \mathcal{B}_K(S_0)$ $g \geq 0$ に対ししたかう。一意性も Meyer と同様である。

Theorem 2.2. $P \in C_f(S_0) \cap \mathcal{P}$ に対し Theorem 2.1 に基づく kernel を $V^P(x, dy)$ とする。このとき

- $V^P; \mathcal{B}_f(S_0) \xrightarrow{w} C_f(S_0)$
- V^P は complete maximum principle をみたす。
- if $\exists K$ compact $P \in \tilde{\mathcal{F}}(S_0 - K)$ then $V^P \in \mathcal{P}$

$$\in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K) \quad (\forall f \in \mathcal{B}_\#(S_0))$$

d) c) と同じ仮定で x を固定して measure $V^P(x, dy)$ の Support は K にふくまれる。

e) $\forall \varepsilon > 0$ に対して compact set K が存在して $\sup_{x \in H} V^P(x, S_0 - K) < \varepsilon$ とできる。ここに H は任意の compact set。

証明 (4) Meyer [3] p204 の Remark より

$$a \geq 0, \quad f, g \in C_K^+(S_0) \text{ に対して } a + V^P f(x) \geq V^P g(x) \text{ on } \{x, g(x) > 0\} \text{ から } a + V^P f(x) \geq V^P g(x) \text{ everywhere かつたかうことを言え}$$

はよい。 $P \in \mathcal{P}_\#$ の場合 $P = BP$ だから $V^P f \equiv 0$ ($\forall f \in \mathcal{B}_\#(S_0)$) このときは c.m.p は成

りたっている。一般の場合 $F = \overline{\{g(x) > 0\}}$ とおくと Theorem 2.1. a) より $V^P g \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - F)$

(F compact より $S_0 - F \in \mathcal{G}$ に注意)。また

仮定より constant a は full superharmonic.

よって $a + V^P f - V^P g \in \mathcal{J}(S_0 - F)$ 。 $V^P f$,

$V^P g$ は連続だから $\lim_{S_0 - F \ni x \rightarrow \bar{z}} (a + V^P f(x) - V^P g(x))$

$$= a + V^P f(\bar{z}) - V^P g(\bar{z}) \geq 0 \quad (\forall \bar{z} \in \partial(S_0 - F))$$

$\subset F$)。 Minimum Principle より $a + V^P f -$

$V^p q \geq 0$ on $S_0 - F$.

(c) $0 \leq f \leq 1$ としてよい. $-V^p f = -P + BP + V^p(1-f) = -P + V^p(1-f)$ かつ $P \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ と 1.13 よりしたから したがって $P \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ より $-V^p f \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ かつ $V^p f \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}(S_0 - K)$ ためから $V^p f \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$.

(d) $-P \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ より $0 \in \mathcal{B}_{S_0 - K}(P)$ (定義 1.1) より $P_{S_0 - K} = 0$ $P = P_K$ また 1.13 より $BP = 0$. ゆえに $V^p(x, S_0) = V^p 1(x) = P(x) - BP(x) = P(x) = P_K(x) = V^p 1_K(x) = V^p(x, K)$.

(e) Axiom \tilde{T} と 1.5 より $P_{S_0 - K_n}(x) \downarrow BP(x)$ かつ 任意の compact exhaustion (K_n) に対して言える. $V^p(x, S_0 - K_n) = P(x) - BP(x) - P_{K_n}(x) = P_{S_0 - K_n}(x) - BP(x) \downarrow 0$ ($n \uparrow \infty$). Dini の定理より この収束は compact set 上で一様.

Corollary 2.3

$\exists (V_\lambda^p)_{\lambda > 0}$ submarkov resolvent kernel such that $V^p - V_\lambda^p = \lambda V^p V_\lambda^p = \lambda V_\lambda^p V^p$

Lemma 2.4.

$$P, Q \in \mathcal{P} \cap C_k(S_0) \quad P > Q$$

$$\Rightarrow V^P = V^Q + V^{P-Q}$$

(\because 1.14 より)

Proposition 2.5. $P \in \mathcal{P} \cap C_k(S_0)$ V^P
 (V_λ^P) を Theorem 2.1, Corollary 2.3 のそれぞれと
 する。このとき任意の $S \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0)$ に対
 し $\lambda V_\lambda^P S \leq S$.

証明 Meyer [3] IX T.70 より, $f, g \in C_k^+$
 $(S + V^P f - V^P g)(x) > 0$ なる x_0 が存在すると
 せ $(S + V^P f - V^P g)(x) \geq 0$ on $\{x, g(x) > 0\}$
 から $S + V^P f - V^P g \geq 0$ everywhere が成りた
 る。を言えは"より"が"これは Theorem 2.2
 (b) と同じ"ように Minimum Principle から
 成りた"る。

Proposition 2.6.

- a) P strictly full superharmonic on $W \in \mathcal{G}$
 $\Rightarrow P_W$ strictly full superharmonic on W
 b) P strictly full superharmonic on $\overset{\circ}{K}$ (K is
 compact set)
 $\Rightarrow P_K$ is strictly full superharmonic on $\overset{\circ}{K}$
 $\Rightarrow V^P(x, A) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{K} \quad \forall A \subset \overset{\circ}{K}$

§ 3 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_{\lambda}^p f(x)$ について。及び
Excessive functions.

Full superharmonic function の理論においても superharmonic function の理論の場合と同じように 各点 x での \mathcal{P} の positive な element の存在 (§1 の仮定) より 次のことがわかる (方法は Bauer [4] §2.4 ~ §2.7 におけると同様である)

Theorem 3.1. 次の条件 a) も) をみたす可算個の $(P_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{P} \cap C_b(S_0)$ が存在する

a) $\forall K$ compact subset of S_0 に対して部分列 (n_j) が存在し (P_{n_j}) は $C(K)$ で total: すなわち $\forall \mu: \text{Radon measure on } K$ に対し $\mu(P_{n_j}) = 0 \forall P_{n_j} \Rightarrow \mu(f) = 0 \forall f \in C(K)$.
さらに 各 P_{n_j} は $\tilde{\mathcal{P}}(S_0 - K)$ に属するよ
うにえられる。

も) $r_N = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{P_n}{\|P_n\|} \in \mathcal{P} \cap C_b(S_0)$ for $\forall N \geq 1$.

今後 任意の $f \in \mathcal{P} \cap C_b(S_0)$ を \rightarrow 固定して

$$P \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{P_n}{\|P_n\|} + \rho \quad \text{とおく。}$$

Lemma 3.2.

μ を bounded Radon measure on S_0 とする

$$\mu(S) \leq S(x) \quad \forall S \in \mathcal{F}_+(S_0)$$

$$\Rightarrow \mu(P) < P(x) \quad \text{if } \mu \neq \varepsilon_x$$

(言証) 仮定より $\mu(P_n) \leq P_n(x)$ かつ $\mu(P)$

$$= P(x) \quad \text{ならば } \forall n \text{ に } \mu(P_n) = P_n(x).$$

したがって $\nu = \mu - \varepsilon_x$ とおくと x を含む任意

の compact set K に $\nu(f) = 0 \quad \forall f \in$

$C(K)$ かつ Theorem 3.1 (a) より $\nu = 0$ である。

$$\mu = \varepsilon_x.$$

Corollary 3.3. P は strictly full super harmonic.

Corollary 3.4. K compact subset of S_0 .

$x \in K$. $\mu \in C^*(K)$ とする このとき

$$\mu(S) \leq S(x) \quad \forall S \in \mathcal{F}_+(S_0) \quad \text{ならば}$$

$$\mu(P_K) < P_K(x) \quad \text{又は } \mu = \varepsilon_x.$$

(言証) Theorem 3.1 a) の後半より $\exists (P_{n_j}) \subset C_c(S_0)$

$$\cap \mathcal{P} \cap \tilde{\mathcal{F}}(S_0 - K) \quad \text{かつ } P_{n_j} < 2^{n_j} \|P_{n_j}\| P =$$

$$C_{n_j} P. \quad P_{n_j} \in \tilde{\mathcal{F}}(S_0 - K) \quad \text{から } (P_{n_j})_{S_0 - K} = 0,$$

$$(P_{n_j})_K = P_{n_j} \quad \text{かつ } \text{2.14} \Rightarrow (P_{n_j})_K <$$

$C_{n_j} \cdot P_K$ より $C_{n_j} \cdot P_K - P_{n_j} \in \mathcal{P}$ であるから
 $\mu(C_{n_j} P_K - P_{n_j}) \leq C_{n_j} P_K(x) - P_{n_j}(x)$
 かつ $\mu(P_{n_j}) \leq P_{n_j}(x)$. したがってもし
 $\mu(P_K) = P_K(x)$ ならば $\mu(P_{n_j}) = P_{n_j}(x) \Rightarrow$
 $\mu(f) = f(x) \quad \forall f \in C(K) \Rightarrow \mu = \varepsilon_x$.

Lemma 3.5. $\lambda V_\lambda^{P_K} f(x) \rightarrow f(x) \quad (\forall f \in C(K) \quad \forall x \in K)$

証明: Theorem 2.2.(d) より $V^{P_K}(x, \cdot)$ の Support は K に含まれるから $V_\lambda^{P_K}(x, \cdot)$ の Support も K に含まれる. $\mu_x^{K, \lambda} : f \mapsto \lambda V_\lambda^{P_K} f(x)$ により $\mu_x^{K, \lambda} \in C^*(K)$ を define すると $\mu_x^{K, \lambda}$ の Support は K に含まれ $\|\mu_x^{K, \lambda}\| \leq 1$ であるから部分列 $(\lambda_j) \uparrow \infty$ があるから μ_x^{K, λ_j} はある $\mu_x^K \in C^*(K)$ に weak* で収束する. Proposition 2.5 より $\mu_x^K(s) \leq s(x) \quad (\forall s \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0))$ かつ $\mu_x^K(P_K) < P_K(x)$ ならば $\mu = \varepsilon_x$. ところで Resolvent equation より $\lambda V_\lambda^{P_K}(P_K)(x) = \lambda V_\lambda^{P_K} V^{P_K} 1(x) \rightarrow V^{P_K} 1(x) = P_K(x) - B P_K(x) = P_K(x)$. (最後の等式は 1.13. より) .

Proposition 3.6. $\forall P \in \mathcal{P} \cap C_t(S_0)$ に對し

$$L \geq V_\lambda^P S \geq V_\lambda^{P_k} S \quad (\forall S \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0))$$
 言証明. $V_\lambda^P S = V^P(S - \lambda V_\lambda^P S)$, $V_\lambda^{P_k} S = V^{P_k}(S - \lambda V_\lambda^{P_k} S)$, $S \geq \lambda V_\lambda^P S$, $S \geq \lambda V_\lambda^{P_k} S$ に注意しよう. 又 $V^P(1_k f) \in \mathcal{P} \cap C_t(S_0) \cap \tilde{\mathcal{F}}(S_0 - \overline{\{f > 0\}})$, $V^P(1_k \cdot 1) \neq P_k(x) = P_k(x) - B P_k(x) = V^{P_k} 1(x)$ と Theorem 2.1 の一般性より kernel $V^P(x, A \cap K)$ と kernel $V^{P_k}(x, A)$ は一致するから $V^P(1_{S_0-K} g) = V^P g - V^P(1_k g) = V^P g - V^{P_k} g = V^{P-P_k} g$ ($\forall g \in \mathcal{B}_t(S_0)$) となる. さて $t = V_\lambda^P S - V_\lambda^{P_k} S$ とおくと $t = (V^P S - V^{P_k} S) - \lambda V t - \lambda V V_\lambda^{P_k} S + \lambda V^{P_k} V_\lambda^{P_k} S$ 以上の注意よりわかる. 存在する $(I + \lambda V)t = V^{P-P_k} S - V^{P-P_k}(\lambda V_\lambda^{P_k} S) = V^{P-P_k}(S - \lambda V_\lambda^{P_k} S)$. $h \equiv S - \lambda V_\lambda^{P_k} S \geq 0$ とおくと上の注意より $(I + \lambda V)t = V^P(1_{S_0-K} \cdot h)$. 今 $V^P(1_{S_0-K} \cdot h)(y) = t(y) + \lambda V^P t(y) \geq \lambda V^P t(y)$ for $y \in \{ \lambda t(y) > 0 \}$, $0 \geq V^P(\lambda t - 1_{S_0-K} \cdot h)(y)$ on $\{ \lambda t - 1_{S_0-K} h > 0 \}$ 従って complete maximum principle より $0 \geq V^P(\lambda t - 1_{S_0-K} \cdot h)$ everywhere. 従って $t + \lambda V^P t = V^P(1_{S_0-K} h) \geq \lambda V^P t$ 従って $t \geq 0$.

Proposition 3.7. $\lambda V_\lambda^P f(x) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) \cap C(S_0) \quad \forall x \in S_0$

(証明) Proposition 2.5 と Proposition 3.6 より

$$0 \leq f(x) - \lambda V_\lambda^P f(x) \leq f(x) - \lambda V_\lambda^{P_K} f(x) \\ = (1_K f)(x) - \lambda V_\lambda^{P_K} (1_K f)(x) \quad \text{加任意の } x$$

を含む compact set K に対し成り立つ $1_K f \in C(K)$ ため Lemma 3.5 より 右辺 $\rightarrow 0$

Lemma 3.8. (Maeda)

$S_n \in \tilde{\mathcal{F}}(S_0) \quad S_n \uparrow \Rightarrow \sup S_n \equiv +\infty$ 又は $\sup S_n \in \tilde{\mathcal{F}}(S_0)$

Proposition 3.9

$\tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) = \{ \text{finite excessive function for } (V_\lambda^P) \} \equiv \mathcal{E}_f$

証明. $t \in \mathcal{E}_f. \quad \lambda V_\lambda^P t(x) \uparrow t(x)$

$$\lambda V_\lambda^P t(x) = \lambda V^P (t - \lambda V_\lambda^P t)(x) \in \mathcal{P} \cap C(S_0)$$

Lemma 3.8 より $t \in \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) \therefore \mathcal{E}_f \subset \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0)$

- $\bar{\mathcal{P}}$ Proposition 3.7 より $\tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) \cap C(S_0) \subset \mathcal{E}_f$

とこより $\forall S \in \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0)$ に対し $\exists (P_n) \subset \mathcal{P} \cap$

$C(S_0) \quad P_n(x) \uparrow S(x)$ 加 $\frac{1}{n}$ えるから $P_n \in \mathcal{P}$

$\cap C(S_0) \subset \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) \cap C(S_0) \subset \mathcal{E}_f$ ためから $S \in \mathcal{E}_f$

すなわち $\tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) \subset \mathcal{E}_f$

Proposition 3.7, Theorem 3.1. より $\forall x \in S_0$
 $\forall f \in C_X(S_0)$ に對して $\lambda V_\lambda f(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} f(x)$
 が したがる。

$\mathcal{X} \equiv B_b(S_0)$ は sup norm で Banach space,

$\mathcal{X}_0 \equiv \overline{V(\mathcal{X})} \subset C_b(S_0)$,

T_t strongly continuous semigroup on \mathcal{X}_0 ,
 such that

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt \quad \begin{array}{l} \forall f \in \mathcal{X}_0 \\ \forall \lambda \geq 0, \end{array}$$

$\mathcal{L} \equiv \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) \cap \mathcal{X}$, $\mathcal{L}' \equiv \mathcal{D} \cap \mathcal{X}$

とする。

\mathcal{L} から \mathcal{L} への map Q_t を 次のように定義する。

$$Q_t S(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \uparrow T_t(\lambda V_\lambda S)(x)$$

次の定理は Boboc, Constantinescu Cornea

[5] に証明されている。(\mathcal{L} を \mathcal{L}' に制

限しても $Q_t: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}'$ map で その他

も成り立つことはあきらか)

Theorem 3.10

- (1) $Q_t S \leq Q_t S'$ ($S, S' \in \mathcal{L}$ $S \leq S'$)
 $Q_t(S + S') = Q_t S + Q_t S'$
 $Q_t(\alpha S) = \alpha Q_t S$ ($\alpha > 0$)
- (2) $Q_t S(x) \leq S(x)$
- (3) $S_n \in \mathcal{L}$ $S_n \uparrow S \in \mathcal{L}$
 $\Rightarrow Q_t S_n \uparrow Q_t S$
- (4) $Q_t S_n(x)$ は t の右連続函数.
- (5) $Q_t Q_u = Q_{t+u}$ on \mathcal{L}
- (6) $\forall S(x) = \int_0^\infty Q_t S(x) dt$ ($S \in \mathcal{L}$)
- (7) $\forall t > 0$ $S \in \mathcal{L}$ に対し $\exists (f_n) \subset C_c^+(S_0)$
 $\forall f_n(x) \uparrow Q_t S(x)$

Theorem 3.1 Theorem 3.10 より

$\exists P_t(x, dy)$ kernel on $S_0 \times \mathcal{B}(S_0)$
such that $P_t(p-f)(x) = Q_t p(x) - Q_t f(x)$
($p-f \in (\mathcal{L} - \mathcal{L}) \cap C_K(S_0)$)

となることはわかる (Bourbaki Integration
Chap 4, §2) しかし $P_t p = Q_t p$ $p \in \mathcal{L}$
は一般には成立しないし また $Q_t p - Q_t f$

$\in C_K(S_0)$ から $1-f \in C_K(S_0)$ からしたかう
 とはかきらないので Kernel P_t が Semigroup
 になるかどうかはわからない。

§4. S_0 のコンパクト化とその上の Transition Semigroup

Theorem 3.1 の $(P_n)_{n \geq 1}$ は $\lambda V_{\lambda+1} P_n \leq P_n$ をみたすの
 で Kunita-Watanabe [6] の方法で S_0 をコンパクト
 化し その上の V_λ の拡張 \hat{V}_λ ,
 対応する Transition Semigroup $\hat{P}_t(x, dy)$ ($x \in \hat{S}$, $dy \in \mathcal{B}(\hat{S})$) とする。

$x \in S_0$ に対しては

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \hat{P}_t \hat{f}(x) dt = \widehat{V_\lambda f}(x) = V_\lambda f(x) \\
 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f(x) dt$$

で $\hat{P}_t \hat{f}(x)$, $Q_t f(x)$ は t の右連続函数た
 から $\hat{P}_t \hat{f} = Q_t f$. ここに $f \in \tilde{\mathcal{F}}(S_0)$ で f
 は \hat{S} のその拡張. \hat{P}_t に対応するマルコフ
 過程の S_0 の Set の Hitting probability と
 full harmonic measure $\tilde{H}^G(x, dy)$ の関係, \hat{S}
 の Branching Point 等については別のところに述べ

1. 3.

References

1. F. Y. Maeda ; Axiomatic Treatment of full-superharmonic functions, J. Sci. Hiroshima Univ. 30 (1966) 197-215
2. P. A. Meyer ; Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, Ann. Inst. Fourier 13/2, 357-372 (1963)
3. P. A. Meyer ; Probabilités et potentiel.
4. H. Bauer ; Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie
5. N. Bdoc, C. Constantinescu, A. Cornea ; Semigroups of transitions on harmonic spaces, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. (1967)
6. H. Kunita, T. Watanabe ; Some Theorems Concerning Resolvents over Locally Compact Spaces, Proc. 5-th. Berkeley Symp. 131-164