数理解析研究所講究録
74巻 1969年 124-129

Banach空間に値をとるマルチンゲールの収束

九州大 工 渡辺寿夫

(本尾宏記)

parametre space は普通の linear set で, state space が Banach 空間であるようなマルチンゲールについて述べる。

§1. Introduction.

確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$上の, Banach空間$\mathfrak{X}$に値をとる, 確率変数$x(\omega)$の条件附平均値に関し次の結果が成立する。

「定理」 $x(\omega)$を強可測, Bochner 可積分とする。$\mathcal{F}$を$\mathcal{B}$の sub-σ-field とすると, 次の性質をもつ確率変数$\mathcal{E}^s(x|\mathcal{F})$が(同値を除いて)一意に存在する。

(1) $\mathcal{E}^s(x|\mathcal{F})$は$\mathcal{F}$-強可測.

(2) $\mathcal{E}^s(x|\mathcal{F})$は Bochner 可積分.

(3) 全ての$\Lambda \in \mathcal{F}$に対して $\int_\Lambda x(\omega)dP = \int_\Lambda \mathcal{E}^s(x|\mathcal{F})dP$ が成立する。

T を linear set とし $\{x_t(\omega)\}_{t\in T}$ を $\mathfrak{X}$-valued な確率過程 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ を t について単調増加な $\mathcal{B}$ の sub-σ-field の系とする。$x_t(\omega)$ が $\mathcal{F}_t$-強可測, Bochner 可積分な確率過程であって,

$$P(\mathcal{E}^s(x_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = x_\sigma) = 1 \qquad (\sigma \leq \tau)$$

が成立するとき, $\{x_t\}_{t\in T}$ をマルチンゲールという。

セミマルチンゲールを定義するためには, $\mathfrak{X}$ に半順序が定義されている必要がある。$\mathcal{Y}$ を positive cone R を有する Banach 空間とするとき, 次の条件をみたす $(y_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ をセミマルチンゲールという。

(1) y_t は $\mathcal{F}_t$-強可測,

(2) y_t は Bochner 可積分

(3) $P(\mathcal{E}^s(y_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) \geqq y_\sigma) = 1 \qquad (\sigma \leq \tau)$

但し $x \geqq y$ は $x - y \in R$ を意味する。

§2. Convergence theorem

$\{x_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ を $\mathfrak{X}$-valued マルチンゲールとする。

「定理」(Scalora [1])

$\mathfrak{X}$ が reflexive のとき, 強可測な確率変数 $x_\infty(\omega)$ が存在し, 全ての $f \in \mathfrak{X}^*$ に対して

$$P(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty)) = 1$$

が成立する。

これより更に強く，次の結果が知られている。

「定理」（A. and C. Ionescu Tulcea [2]）

前定理と同じ条件の下で，$\mathcal{F}_\infty = \bigvee \mathcal{F}_n$ ー強可測な確率変数 $x_\infty(\omega)$ が存在し　$P(\|x_n(\omega) - x_\infty(\omega)\| \to 0 \ (n \to \infty)) = 1$ が成立する。

$\mathcal{X}$ が reflexive という条件は外せない。$\mathcal{X}$ が reflexive でないとき上の定理が成立しない反例は Chatterji [3] に與えられている。$\mathcal{X}$ が reflexive でないときも次の形の収束定理が成立する。

「定理」（Neveu [4]）　Z を強可測，且つ Bochner 可積分とする。$\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ を増大（又は減少）する $\mathcal{B}$ の sub-σ-field とし　$\mathcal{F}_\infty = \bigvee \mathcal{F}_n$　（又は $\mathcal{F}_\infty = \bigcap \mathcal{F}_n$）とおく。

$x_n = \mathcal{E}^s(Z \mid \mathcal{F}_n)$　$x_\infty = \mathcal{E}^s(Z \mid \mathcal{F}_\infty)$　とすると

(1) $\int \|Z(\omega)\| dP < \infty$ のとき

$$\int \|x_n - x_\infty\| dP \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$P(\|x_n - x_\infty\| \to 0 \ (n \to \infty)) = 1$$

(2) $\int \|Z(\omega)\|^p dP < \infty \quad (1 \leq p < \infty)$ のとき

$$\int \|x_n - x_\infty\|^p dP \to 0 \quad (n \to \infty)$$

§3 Application

以下，J.B. Walsh [4] による。I を compact metrizable な空間とし，$C(I)$ を I 上の連続函数からなる Banach 空間とする。この時 $C(I)$-valued 確率変数 $x(\omega) \equiv x_{\cdot}(\omega)$ $t \in I$, $\omega \in \Omega$ は $x(t,\omega)$ が t を止めると可測のとき，$x(\omega)$ 自身強可測になる。

「定理」 $\{x_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ を $C(I)$-valued 強可測確率変数列（即ち I 上の連続な確率過程の列）とする。$x_n(\omega)$ は互に独立で $\int \|x_n(\omega)\| dP < \infty$ ，$\int x_n(\omega) dP = 0$ とする。このとき次の二つの条件は同値である。

(1) $\int \|x(\omega)\| dP < \infty$ であるような強可測確率変数 $x(\omega)$ が存在し $P(\lim_{n \to \infty} \|S_n(\omega) - x(\omega)\| = 0) = 1$.

(2) (1) と同じ条件の $x(\omega) \equiv x(t,\omega)$ が存在し

$$P(\lim S_n(t,\omega) = x(t,\omega) \quad \forall t \in I_0) = 1$$

が I の可算 dense subset I_0 に対して成立する.

但し $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k(\omega)$ である。

この定理は前節の最後の定理から容易に証明できる。この定理を用いると次の結果が得られる.

「例1」 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots$ を平均値0分散1の独立な確率変数列とする。$\{\varphi_j(u)\}_{j \geq 1}$ $(u \in [0,a])$ を $L^2([0,a]\, du)$ の

完全正規直交系として $\Phi_j(t)=\int_0^t \varphi_j(u)du$ とおくと

$$(*)\quad B(t)=\sum \eta_j \Phi_j(t) \qquad t\in[0,a]$$

は Brown 運動である。(*)の右辺は各 t 毎に極収束してをり、

$B(t)\in C[0,a]$, $E(\|B(t)\|)<\infty$ はわかってゐるから

$$P\left(\sup_{0\le t\le a}\left|\sum_{j=1}^{N}\Phi_j(t)\eta_j(\omega)-B(t,\omega)\right|\to 0\ (n\to\infty)\right)=1$$

がわかる。

「例 2」 Brown 運動 $B(t)$ に対して

$$\mathcal{F}_n=\sigma\{B(0),B(\tfrac{1}{2^n}),\cdots,B(\tfrac{k}{2^n}),\cdots,B(1)\}$$

とおく。$f_n(t)=E(B(t)\mid\mathcal{F}_n)$ は Brown 運動の折れ線による近似である。前節の最後の定理を用いると

$$P\left(\sup_{0\le t\le 1}|f_n(t)-B(t)|\to 0\ (n\to\infty)\right)=1$$

がわかる。

文献

[1] Scalora : Abstract martingale convergence theorem ; Pacific Jour. of Math 11. (1961)

[2] A. and I. Ionescu Tulcea : Abstract ergodic theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963)

[3] J. Neveu : Relations entre la théorie des martingales et la théorie ergodique, Ann. Inst. Fourier 15 (1965)

[4] J. B. Walsh : A note on uniform convergence of stochastic processes, Proc. Amer. Math. Soc. (1967)