数理解析研究所講究録
74巻 1969年 103-105

Wiener 過程に絶対連続な Gaussian process の表現

名古屋工大　　櫃田倍之

平均0の Gaussian process Y_t が Brown運動 B_t に関して可測な表現ができるか？ という問題が Martingale theory の応用として解決できる。tの動く区間が $[0, T]$ に固定されているときの表現としては，Shepp 及び H. Sato によって既に与えられているが，$[0, T]$ の white noise に関する確率積分を使うために，各 t 毎に $\mathbb{B}_t = [\sigma(B_s ; s \leq t)$ の completion$]$ 可測に表現できるかどうかは，未解決であった。

正確には，次のように定式化される：

「確率空間 $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ 上に平均0で Brown運動 (Wiener 過程) と絶対連続な Gaussian process Y_t があったときに，Brown運動 B_t を構成して，

$$Y_t = B_t + \int_0^t \left(\int_0^s k(s,u)\, dB_u \right) ds$$

と表現できる。但し，$k(s,u) \in L^2([0,T]^2)$ 。」

ただし，

<u>Def.</u> $(Y_t, \mathbb{B}, P)$ が Brown運動に<u>絶対連続</u> $\Longleftrightarrow$

$\exists\ \psi(\omega)$ such that $E(\psi) = 1$, $\psi \geq 0$ and $(Y_t, \mathbb{B}, \psi(\omega) P(d\omega))$

が Brown運動になる。

証明の概略をのべると，$\mathbb{Y}_t = [\sigma\{Y_s ; s \leq t\}$ の P に関する completion$]$

とし，$E(\psi(\omega) \mid \mathbb{Y}_T) = \tilde{\psi}(\omega)$ とおけば，

$(Y_t, \mathbb{Y}_T, \tilde{\psi}(\omega) P(d\omega))$

もやはり Brown 運動である．以後 $\tilde{\varphi}(\omega)\,P(d\omega)=\tilde{P}(d\omega)$ とかくことにする．(Y_t, P), $(Y_t, \tilde{P})$ がいずれも gaussian process であるから，$\tilde{\varphi}(\omega)>0$ (a.e P)．これは 2つの gaussian process は，互に絶対連続（別名 equivalent）か singular かのどちらかであるとする主張 である Hajek-Feldman の定理による．

$$M_t \equiv \tilde{E}(\tilde{\varphi}(\omega)^{-1} \mid Y_t)$$

とすれば，$(M_t, Y_t, \tilde{P})$ は martingale をなす。一方 $(Y_t, \tilde{P})$ という Brown 運動に関する martingale は dY_t による確率積分で決定される（Kunita-S. Watanabe）ことと，Ito の変換公式を使えば，

$$M_t = \exp\left\{-\int_0^t f(s,\omega)\,dY_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s,\omega)\,ds\right\}$$

とかける．但し $f(s,\omega)$ は各 s に対し Y_s 可測で，$\int_0^T f^2(s,\omega)\,ds<\infty$ となるものである．$\tilde{E}(M_t)=1$, $0\leq t\leq T$ であることから，Girsanov の定理により，

$$B_t = Y_t + \int_0^t f(s,\omega)\,ds$$

とおけば，(B_t, Y_t, P) は Brown 運動になる．さきの Hajek-Feldman の定理の証明の経過から，

$$E\left(\int_0^T f^2(s,\omega)\,ds\right) < \infty$$

が導びかれるが，これによって B_t, Y_t は 'jointly' に gaussian system をなすことがわかる（この議論の詳細はめんどうであるが，基本的には，Meyer の regular potential の分解と同じやり方

である). 従って, B_t は Y_t の linear functional となることがわかり, f の形が決定されて, $l \in L^2([0,T]^2)$ とし,

$$B_t = Y_t + \int_0^t \left(\int_0^s l(s,u)\, dY_u \right) ds$$

とかける. (右辺 $\int l(s,u)\, dY_u$ の意味は, $\tilde{P}$ における Wiener 積分と考えればよい). $l(s,u)$ の解核を $k(s,u)$ とすれば, 求める表現がえられる. なお解核 k の存在は, $l(s,u)=0$, $s<u$ と考えて l を Volterra 型の核と見ればよい.