数理解析研究所講究録
74巻 1969年 83-88

(Free talking)

不連続なマルチンゲールについて

東工大 理　土岩 正明

§1. 序

これは、フリートーキングで、話したことに、少々付け加えたものである。

2乗可積分、右連続なマルチンゲールの作る空間$\mathfrak{M}^2$に留意して、その不連続な部分空間$\mathfrak{M}_d$の構造が、S. Watanabe [4] (additive functionalの場合)；H. Kunita & S. Watanabe [1] (Hunt processの上の$\mathfrak{M}_d$の場合)において、明らかにされ、種々の応用が、そこでなされている。

最近、P. A. Meyerが[2]において、マルチンゲールの確率積分の拡張をしている。

それが、どの位の拡張になっているかということが、$\mathfrak{M}_d$の表現と関連して与えることが出来る。(Theorem 1)

これは最初、本尾氏が予想されたことである。

これをadditive functionalの場合にみてみると、もう少し、具体的な形で与えられる(Theorem 3)。

そこで、渡辺信三氏の結果[4]の $\mathfrak{M}_d(A)$ の表現に類似の表現が得られる。その間の関係もある程度分る。

しかし、Theorem 3 の表現を得るとき、[4]の結果を使用しないと、今のところ証明出来ない。

§2. マルチンゲールの場合.

notation, definition については詳しくは、P.A. Meyer [2] を参照のこと。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$; complete separable probability space.

$(\mathcal{F}_t)$; increasing family of sub σ-fields of $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \equiv \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

$\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の null set をすべて含む.

更に、$(\mathcal{F}_t)$ は不連続時間をもたないことを仮定する。

i.e. $\forall T_n \uparrow T$ (stopping time の列), $\mathcal{F}_T = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$

考える process は、すべて $(\mathcal{F}_t)$-well adapted として、マルチンゲール等はすべて、$(\mathcal{F}_t)$ に関して考える。

∘ process $\{X_t\}$ が very well measurable (well measurable) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(t, \omega) \rightsquigarrow X_t(\omega)$ は、左連続(右連続), 右極限(左極限)をもつ process を可測にする $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の最小の σ-field に関して、可測となる。

$\mathfrak{M} \equiv \{$2乗可積分、右連続なマルチンゲール$\}$

$\mathfrak{A}^+ \equiv \{$右連続 increasing process (A_t) ; $A_0 = 0$, $E(A_t) < +\infty \ \forall t \geq 0\}$

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^+ - \mathfrak{A}^+ \equiv \{A = A^1 - A^2 \ ; \ A^i \in \mathfrak{A}^+ \quad i = 1, 2, \}$

$\mathfrak{M}_c \equiv \{\mathfrak{M}$の元で連続なもの$\}$

$\mathfrak{A}^+_c$, $\mathfrak{A}_c$ も同様に定義する.

知られていることを以下にあげる. $\mathfrak{M} \ni X$. $X_0 = 0$ としておく.

◎ $\forall X, Y \in \mathfrak{M}$ に対し, $\exists_1 \langle X, Y \rangle \in \mathfrak{A}_c$;

$$X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t = \text{martingale}.$$

$\langle X, Y \rangle = 0$ のとき, X と Y は直交するという.

$\mathfrak{M}_d \equiv \{X \in \mathfrak{M} \ ; \ \forall Y \in \mathfrak{M}_c, \ \langle X, Y \rangle = 0\}$

◎ $X^n, X \in \mathfrak{M}$.

$$X^n \to X \ (\text{in } \mathfrak{M}) \ \text{as } n \to \infty$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ E\{(X^n_t - X_t)^2\} \to 0 \ (n \to \infty) \qquad \forall t \geq 0.$$

$\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{M}_d$, $\mathfrak{M}$ は上の limit の意味で閉じている.

◎ $X \in \mathfrak{M}$ は, $X = X^c + X^d \qquad X^c \in \mathfrak{M}_c$, $X^d \in \mathfrak{M}_d$

と一意に分解出来る.

$X, Y \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$[X, Y]_t \equiv \langle X^c, Y^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s \in \mathfrak{A}$$

$[X, X]_t \equiv [X]_t$ 　　但し. $\Delta X_s \equiv X_s - X_{s-}$.

とおく.

$X \in \mathfrak{M}$ に対し

$$L^2(X) \equiv \left\{ H = H_s(\omega) \ ; \ H \text{ は well measurable}, \ E\left[\int_0^t H_s^2 \, d[X]_s\right] < +\infty. \ \forall t \geq 0 \right\}$$

<u>Theorem 0</u> (P. A. Meyer [2])

$\forall X \in \mathfrak{M}$, $\forall H \in L^2(X)$

$\Rightarrow \exists_1 Y \in \mathfrak{M}$, $[Y, M]_t = \int_0^t H_s \, d[X, M]_s$ for $\forall M \in \mathfrak{M}$

上の Y を $\int H_s \, dX_s$ とかき、拡張された確率積分という。

とくに、$X \in \mathfrak{M}_d \Rightarrow \int H_s \, dX_s \in \mathfrak{M}_d$.

<u>Theorem 1</u>

$\exists M \in \mathfrak{M}_d$; $\mathfrak{M}_d = S[M] \equiv \left\{ \int H_s \, dM_s \; ; H \in L^2(M) \right\}$

(証略)

<u>Remark 1</u>

上の M は一意でない

- T ; accessible $\Longleftrightarrow P(M_T = M_{T-} \; ; T<\infty) = P(T<\infty)$
- T ; totally inaccessible $\Longleftrightarrow P(M_T \neq M_{T-} \; ; T<\infty) = P(T<\infty)$

<u>Remark 2</u>

$A \in \mathfrak{A}^+$, quasi-left continuous & purely discontinuous

$A \prec [M]$

$\Rightarrow \tilde{A} \prec \langle M \rangle$ $\quad (\tilde{A} \in \mathfrak{A}^+_c, \; A - \tilde{A} = \text{martingale})$

§3 Additive functional の場合

notation, definition については [1], [4] 参照.

$(X_t, \mathcal{F}_t, \zeta, P_x, x \in E)$; Hunt process

Meyer の (L) を仮定する.

$\mathfrak{M}(A) \equiv \{$平均0, 2乗可積分, additive functional$\}$

$\mathfrak{M}_c(A) \equiv \{\mathfrak{M}(A)$の元で continuous なもの$\}$

$\mathfrak{M}_d(A) \equiv \{\mathfrak{M}(A)$の元で $\mathfrak{M}_c(A)$ と直交するもの$\}$

$X \in \mathfrak{M}(A)$

$$L^2(X) \equiv \left\{ f = f(x, y) \; ; \; \begin{array}{l} f \text{ は } \mathbb{B}(E \times E) \text{ - 可測} \\ E_x\left[\int_0^t f^2(X_{s-}, X_s)\, d[X]_s\right] < +\infty \;\; \forall t \geq 0, \forall x \end{array} \right\}$$

$\mathbb{B}(E \times E)$; $E \times E$ 上の有界な Borel function 全体.

<u>Theorem 2</u>

$X \in \mathfrak{M}(A)$, $f \in L^2(X)$

$\Rightarrow \exists_1 \, Y \in \mathfrak{M}(A)$,

$$[Y, M]_t = \int_0^t f(X_{s-}, X_s)\, d[X, M]_s \quad \text{for } \forall M \in \mathfrak{M}(A)$$

$Y = \int f(X_{s-}, X_s)\, dX_s$ (確率積分) とかく.

$X \in \mathfrak{M}_d(A) \Rightarrow Y \in \mathfrak{M}_d(A)$

(証略)

<u>Theorem 3</u>

$\exists M \in \mathfrak{M}_d(A)$;

$$\mathfrak{M}_d(A) = S[M] = \left\{ \int f(x_{s-}, x_s)\, dM_s \ ; \ f \in L^2(M) \right\}$$

(省略)

Remark 3

上のMはpath x_t から具体的に与えることが出来る.

その時, $n(x, dy)$; kernel が存在して

$$\left\langle \int f(x_{s-}, x_s)\, dM_s \right\rangle_t = \int_0^t \int_E f^2(x_{s-}, y)\, n(x_{s-}, dy)\, d\langle M \rangle_s$$

となることも, 予想される。

文献

[1] H. Kunita & S. Watanabe ; On square integrable martingales. Nagoya Math. Jour. vol.30. (1967.)

[2]. P.A. Meyer ; Integrales Stochastiques I. II. III. IV. Seminaire de Probabilités. Univ. de Strasbourg (1966)

[3]. M. Motoo & S. Watanabe ; On a class of additive functionals of Markov Processes. Jour. of Math. of Kyoto. Univ. vol. 4. No. 3 (1965)

[4] S. Watanabe ; On discontinuous additive functionals and Levy measures of Markov process. Jap. Jour. of Math vol XXXIV (1964)