

Fine topology を同じにする連続な
Markov 過程についての 2, 3 の問題

名古屋大 教養 神田 護

§ 0. 序

極端ないい方をすれば Markov 過程^(*)の研究は、一般の Markov 過程- α の class について調べるか、Brown 運動 + α の class (たとえば滑かな係数を持った 2 階の楕円形微分作用素を generator とする diffusion) について調べるかの 2 つに分れるといつてもよいのではないかと思います。しかし具体的に解析する場合前者は広すぎる場合があるし、後者は解析的(定量的)といつた方がよいか?) 前提と、Markov 過程の定性的前提とがいろいろあっていて原理がはっきり掴めないといふ事もある。Markov 過程論が数学の一分野として自立する事を望むとしたら、向ふ物足りない感じはしないでもありません。この事は “Markov 過程の局所構造の決定” あるいは “Markov 過

(*) ここで Markov 過程という時は、適当に正則な条件をみたす強 Markov 過程を示すことにします。例えば Hunt process, etc.

程の分類”とかいった大問題につながりますが、ここでは
 そういう事に直接触れないで、自分の研究途上にでてきた正
 則集の問題に関連してかいてみました。これは *fine topology*
 と密接に関連し、ある意味では Brown 運動を含む特殊な class
 を定めるのに役立つと思うからです。図式でかけば

強 Markov 性 \Rightarrow 定性? \Rightarrow Brown 運動

なる定性? をみよけるのが目的といってもよいかも知れません。
 残念ながらここでは何の解決も与える事ができませんでした。
 自分が興味をもった事についての予想とか未解決の問題につ
 いて書きならべただけに終わってしまつて、靴の上からかゆい
 所をかいていり感じがしてなりません。

以下で考察の対象とするのは d -次元ユークリッド空間 R^d ,
 あるいはその中の領域 Ω での Markov 過程です。定理を述べ、そ
 れをキチンと証明するといつた形式でないのて 粗かな条件, その
 他は一切省略します。

なお、集 X が ある compact set K の正則集であるとい
 うのは $P_x(\sigma_K = 0) = 1$, σ_K : K への first hitting time, という事
 です。2つの Markov 過程が与えられた時, ~~それ~~どの compact
 set の正則集も process によつてあわらはない時, 正則集が到る
所で同じ といつた表現を便宜上します。

§1. 2階楕円形微分作用素と正則臭

ユークリッド空間 R^d の領域 Ω での次の微分作用素を考
えよう.

$$\mathcal{D} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\mathcal{D}_1 = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$$

ここで, a_{ij}, b_i は有界可測, $a_{ij} = a_{ji}$ かつ楕円型 即ち
 $\sum_{i,j=1}^d \xi_i \xi_j \geq 0$ となる $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,d}$ に対して $\lambda \sum_{i,j=1}^d \xi_i \xi_j \geq \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda^{-1} \sum_{i,j=1}^d \xi_i \xi_j$
とする. 一般にこのような作用素を generator とする Markov
過程の存在は知られていない. 特に \mathcal{D} の type で係数を有界可
測とした場合の Markov 過程の存在証明 あるいは反例を与える
事は興味深い事である. 今の所存在を示す方法として羊群の
理論にもちこむ方法と確率微分方程式を解く方法があるが,
前者は \mathcal{D} の性質がよく分っていないことにより, 又後者は
楕円性が反映しない事等より, 今のところ未解決である.
従って, ここでは連続な Markov 過程の存在が分っている場合
について正則臭がどうなるか調べてみよう. まず, 存在につ
いて.

[1.1] 連続な Markov 過程の存在については, \mathcal{D} の type
については, H. Tanaka [16] によつて a_{ij} が有界連続の
場合に示された. \mathcal{D}_1 については ある意味では係数が

有界可測の場合にでも連続な Markov 過程が対応する事が分っているが (M. Kanda [5] 参照), 確率過程論的な意味づけが不完全である。後でも述べるように \mathcal{D}_Δ については, Markov 過程の randomness を反映している additive functional と generator の関連がつかない。又, \mathcal{D}_Δ という作用素についても, 定義の仕方によって Dirichlet 問題の解の一意性がこわれる場合もあって (J. Serinin [4] 参照), 問題が多く残っているように思われる。たとえば M. Itô [3] が試みているように Stampaccia [7] 等の結果をできるだけ抽象化して Dirichlet space の概念を広げていく方向も興味深いがまだ注目すべき結果はでていないようである。例えば Markov 過程が与えられた時 Dirichlet space を構成し, Dirichlet 内積の表現を与えた時, 特に C^2 を domain に含める場合に 一種の base として表われてくる量が base とされるなら, それが additive functional の base と同じ役割を果し, 正則臭の問題についても役立つだろうと思うのだが筆者にはまだよく分らない。

1.2 \mathcal{D} については 係数が Dini-連続^(*) の場合, \mathcal{D}_Δ については有界可測の場合に, Brown 運動と正則臭が到る所

(*) ここでは, 係数が Dini-連続とは, Ω 内の任意の compact set K に対して $\omega(\alpha, h) = \sup_{i,j, |h|<h} |a_{ij}(x+h) - a_{ij}(x)|, \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0, x \in K} \int_0^\varepsilon h^{-1} \omega(x, h) dh = 0$ とある事を意味することにする。

同じである事が分っている。(例えば, M. Kanda [5], [6] 参照,
 \mathcal{D} について Hölder 連続の場合に, \mathcal{D}_Δ については有界可測の場合にそれぞれ
 ポテンシャル論, 微分方程式論の立場から既に示されている文献に
 ついては [5] 参照, [6] の結果については, 後の § で少しのべる。)
 その事の証明では, 対角線を除いて連続な Green 函数 $G(x, y)$
 が存在して compact set 上で

$$(*) \quad C_1 \frac{1}{|x-y|^{d-2}} \geq G(x, y) \geq C_2 \frac{1}{|x-y|^{d-2}}, \quad C_1, C_2 > 0, \quad d \geq 3$$

$$\left(C_1 \log \frac{1}{|x-y|} \geq G(x, y) \geq C_2 \log \frac{1}{|x-y|} \right), \quad d=2$$

となる事が基本的である。そこで $G(x, y)$ がどうなるか, \mathcal{D}
 の場合について結果をならべてみよう。まず

Kylov [7]; a_{ij} が Dini' 連続ならば (*) が成り立つ。
 ことが分っているが a_{ij} を有界連続とした時には, $x+y$ で
 の滑らかさ之を要求しなければ $G(x, y)$ の存在は分らない (
 例えは Kylov [7], 又 Levy operator のついでの場合も含めて, M. Bony
 の結果がある。); その singularity については一般には最早 (*) は成り立た
 ない。連続係数の場合に, $d=2$ の時, J. Serrin [13] の
 例を用いて 1 是がそれ自身に好して正則英となる事を示し
 た (M. Kanda [5] 参照)。 $d \geq 3$ の場合, \mathcal{D} の形の微分作用素
 に対応する process について Brown 運動と異なる例を示すことが
 できないが, 例えは J. Serrin [13] があげた次の例がそうな

るだろ う事はほぼ確定だろ う。 $d \geq 3$ の時

$$u(r) = - \int^r \left[\exp \left(\int^r \frac{1-d}{1+g(\rho)} \frac{d\rho}{\rho} \right) \right] d\rho$$

$$g(\rho) = \frac{-1}{1+(d-1)\log \rho}, \quad \rho > 0, \quad g(0) = 0$$

とおいた時, $u(|x|)$ が, 強楕円形作用素

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^d \left(\delta_{ij} + g(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

の $\Omega - \{0\}$ (但し, $\Omega = \{x; 0 \leq |x| \leq e^{-1}\}$) の解がある事を示せて

$$u(|x|) = \frac{|x|^{2-d}}{\log \frac{1}{|x|}} (1 + \varepsilon(|x|)), \quad \varepsilon(|x|) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow 0$$

が分る。更に不連続係数の場合は, 奇妙な状態になる事が分っている。ここで注意しておきたい事は, ある点で発散する singularity をもつ正の local solution があつたとしても, Green 函数のそこの singularity の発散の程度が同じかどうかは例えは Holder 連続の (係数に依る) 仮定が無いと一般には分らない事 ~~である~~ である。これも問題の一つである。

次の予想がとければよい。Brown 運動と到る所で正則点 が同じ, Markov 過程は 適当に正則な条件の下で (*) が成り立つ。 この事は, $G(x, y) = C(x, y) \varphi(|x-y|)$ (φ は $\varphi(0) = +\infty$ とするある函数の class, 詳しい事は与らぬ) なる Green 函数を持つ class

の間では正しい。

後でものべるように Green 函数の singularity に条件を与えて、そこから出発する方向もあるが、Green 函数の singularity は一般にそれぞれの場合に具体的に計算する事によって求められるので、当面の目標；定性？の Brown 運動 とする定性？を捕えることからみれば、あまりよいとはいえない。そこで Green 函数の singularity ~~は Brown~~ について、(☆) になりたつ場合にその背後にあるものを眺めてみると、Harnack の不等式が大きな役割を果している事が分る。これポテンシャル論でも harmonic space の公理の一つとしていれてあって、少しづつ形が異なっているが、ここでは J. Serrin によって得られた、 \mathbb{D} の場合の結果を、2次元についてのべよう。

定理 [2]. $u(x)$ を $\mathbb{D}u=0$ の domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ での正の C_2 -解とせよ。 $\tilde{\Omega}$ を Ω の closed subdomain とする。その時、 $\lambda, M, \Omega, \tilde{\Omega}$ (λ ; ellipticity constant, $|a| < M, |b| < M$) のみに depend する定数 $K > 0$ が存在して、任意の $x, y \in \tilde{\Omega}$ に対して

$$u(x) \geq K u(y)$$

がなりたつ。

ここで注意することは、係数が有界可測のみでよい事である。 $d \geq 3$ の時は一般にはなりたない。さて、Harnack の不等式と Green 函数の singularity について考えてみよう。

上の定理がなりたつ場合, ある正の函数 $\varphi_y(r)$ ($r > 0$) が存在して

$$C_2 \varphi_y(|x-y|) \leq G(x, y) \leq C_1 \varphi_y(|x-y|) \quad C_1, C_2 > 0$$

となる事が分る。その事を, 簡単のため, $b_i = 0$ で $y = 0$ の時に示そう。 $G(x, 0) = u(x)$ とおくと $u(x)$ は $x \neq 0$ で $\Delta u = 0$ だから, $|x|=1$ を定理の $\tilde{\Omega}$ とすれば, ある $K > 0$ があって

$$\max_{|x|=1} u(x) \leq K \inf_{|x|=1} u(x)$$

となる。 $|x|=r$ なる点 x に対して, $\tilde{a}_{ij}(x) \equiv a_{ij}(\frac{x}{r})$, $\tilde{u}(x) = u(\frac{x}{r})$ とおけば $\tilde{u}(x)$ は $\tilde{\mathcal{D}} = \sum \tilde{a}_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ とした時の, $|x|=1$ での解だから

$$\max_{|x|=1} \tilde{u}(x) \leq K \inf_{|x|=1} \tilde{u}(x)$$

即ち

$$\max_{|x|=r} u(x) \leq K \inf_{|x|=r} u(x)$$

このことから, たとえば $\varphi(r) = \max_{|x|=r} u(x)$ とおくことにより

$$C_2 \varphi(|x|) \leq G(x, 0) \leq C_1 \varphi(|x|)$$

を示せる。次に $\varphi_y(|x-y|)$ が independent に $\varphi(|x-y|)$ とおけるための条件は何だろうか, 例えは係数が連続の時はどうか。

又, 各点 x が trap でないならば, $\varphi(|x-y|) = \log \frac{1}{|x-y|}$ となるのではないか? もし そうでないとしたら, 強精円形の微分作用素に対応する process で Brown 運動と到る所で正則点異なる

process があることになって興味深い。又連続係数の場合に予想が正しいとすれば 2次元の場合はある又は trap となる場合か、Brown 運動と到る所で正則性が同じ場合か) どうかになる。そのような事はないと思うが証明はできない。3次元以上の場合に、 $\varphi(x-y)$ が与えられたとして、 $\varphi(x-y) = \frac{1}{|x-y|^{d-2}}$ となる事を示そうと試みたが (M. Kanda [6]) 荒い結果しか得られなかった。(§3参照)

いざにしろ Harnack の不等式を Markov 過程の言葉で捕える事は重要であると思う。これはまだ分っていない。§2 で少し触れる。

§2. 連続な Markov 過程の generator について

§1 とは逆に 連続な Markov 過程が与えられた時、どのような条件の下で、その generator が 強楕円形微分作用素になるのかみてみよう。

まず、generator A が C_0^2 (compact support をもつ C^2 函数) を B (有界可測函数) にうつす (local) operator で 最大値原理^(*)をみたすものとしよう。その時 A は

$$A = \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

(*) $f \in C^2$ に対して f が正の relative maximum をとる時点で常に $Af(x) \leq 0$ となる時 A は最大値の原理をみたすという。この時 A は local である

の形で表現される。更に C (連続函数の空間) へ写す時は、係
 数が連続になる事が分る。しかし 擬楕円性 (i.e. $\sum a_{ij}x_j^2 \geq 0$)
 は容易に導かれるが、強楕円性を導くには最大値原理を認め
 ねばならない。 A の domain に C^2 が入るといふ事は Markov
 過程の立場からは余り好ましくないと思ふし、前にのべた意
 味での最大値原理は Markov 過程の generator なら必然的にみた
 らた、それを強める事は、 A を制限する事になつて面白くな
 い。今の場合、harmonic function に、Harnack の不等式に相当す
 る Brodat の公理を可たすといふ条件を加えても、例へば係数の
 連続ならば 2次元の時は強楕円性が導かれるが、3次元以上に
 なる最早分らない。しかし(強)楕円性は、微分方程式の立場
 から便宜上導入されたともいえるので、それに代る Markov
 過程の特性をつかめばよい、即ち Markov 過程における(強)
 楕円性に相当する概念は何か? といふ問題が生じる。 \rightarrow は ^{の方向}
Harnack の不等式に類似の特性をみつけることである。 (Harnack
 の不等式にこだわり過ぎるきらいがあるが、 $\mathcal{D}_0^{\downarrow}$ も \mathcal{D}_0^{\uparrow} も共通に成立
 する性質 (正則性に連して) は、これ以外あまりないからである)。もう一
 つは \mathcal{D}_0 との関連がまたつかならぬことはふせておいて、additive
 functional の base に関する Skorohod の rank ^[5] の概念を明確にし、
 精密にすることである。 たゞ之は前者については Girsanov
 が [2] で導入した扶養の強 Feller 性が、弱り形 \mathcal{D}_0 の Harnack

の不等式?、— Bauer の公理 — と関連する。一般に Harnack の不等式及びそれを弱めた種々のポテンシャル論における公理は, harmonic function の subclass の ~~同値~~ 連続性の主張にあきかえり事ができる。例えは Bauer の公理は, subclass として一様有界な harmonic function をとったものである。Girsanov のいう狭義強 Feller 性とは, $\forall x, y \rightarrow x \quad |P(t, x, P) - P(t, y, P)| \rightarrow 0$ といふ事であるから $\{T_t f, |f| < M\}$ なる class は同等連続となる事は明らかである。従つてある場合は Bauer の公理を意味することになる。後者の方向については harmonic coordinate と関連し, Markov 過程の局所構造をしらべるといふ立場より, N. Ikeda [4], M. Motoo-S. Watanabe [10], H. Kunita-S. Watanabe [8] 等により調べられたが, 前途に困難が多くなる様である。この線にとつて筆者が考へてゐる事を記すのであろう。作用素論的な興味として \mathcal{D}_Ω を含んでとり扱うには次の設定も考えられる。generator A は C_K^∞ を \mathcal{D}' (distribution の空間) になつた local linear operator とする。それと最大値の原理をみたすものとする。最大値原理をみたすとは、例えば次の性質をもつこととしてよいだろう。“ $u \in C_K^\infty$ かつ $u \geq 0$ かつ $u(x) = 0$ ならば $\forall \varepsilon > 0$ に対して x の近傍 U があつて U 内に support をもつ任意の正の函数 $f \in C_K^\infty$ に対して

$$(Au)f \leq \varepsilon \int_{\Omega} f(x) dx \quad ”$$

その時の A の表現をみつける事 (A が C^2 を C にうつした時と同じように 最大値の原理をみたすなら A は連続となるか), 又逆 operator A^{-1} の存在, 強積円性に類似の事となりたための条件等 問題はあまるがまだ誰にもなされていなりようである。

§3. Green 函数の singularity について

今までみてきたように, 正則点に到る所同じ class を決定するには, 強積円性に相当する特性及び \mathcal{D} の type に対応する過程の時は係数が滑らかではないものを除外し, 更に \mathcal{D}_0 及び \mathcal{D} の係数が滑らかな場合を更に含むような特性を捕えねばならない。そのために Harnack の不等式に (\mathcal{D}_1 に対応する harmonic function に対しても P7 と同じ形での定理がなりたつことは (不連続係数の時でも) 知られている。例えは Moser [9] 参照) 注目してきたが ほかばかりの結果がでない。そこで “正則点に到る所同じ” という事を出発点として与える事も考えられる。だがこの事からどのような結果がでるのか, あるいは知っているのか筆者には分らない。

この § では, 正則点の事に捕われぬに, Green 函数の singularity に関連した問題を少しのべてみよう。

1) Skorohod は [15] で rank の概念を導入したが process を解析するには弱すぎるし, 又 harmonic coordinate

[例えば Dynkin [1]) は、そこから出発すべき条件というより、それが存在するための条件をみつけるのが問題となる性質だろう。それは非常に困難である。筆者は、中途的ではあるが次の設定の下で考えている。(まだ結果が全然でないので簡単にのべる)。“ n 個の harmonic function の組 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ があって、 $\Psi_K = \{y; y = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)), x \in K, \text{compact } C \cap \mathbb{R}^d\}$ とすれば、 $\tilde{\Omega} \subset \bar{\Omega} \subset \Omega$ なる domain $\tilde{\Omega}$ での harmonic function u は常に $\Psi_{\tilde{\Omega}}$ を含む open set $\subset \mathbb{R}^n$ 上の C^2 -function \tilde{u} によつて $u(x) = \tilde{u}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ と表現される。”

考えている process には、十分正則な条件、例えば、harmonic function を連続にするような strong Feller 性とか、対角線を除いて連続な Green 函数の存在とか harmonic function の全体は Ω の 2 点を分離する^(*)とかいふ条件、を付けておく。問題は base として送んだ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ の性質から、process を規定したいのである。この時、条件 (*) 等を使うと \tilde{u} は

$$(**) \quad \Delta u(x) = \sum_{i,j=1}^n \tilde{b}_{ij}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = 0$$

をみたす事になり、i), $n > d$ ii) $n = d$ iii) $n < d$ の場合にわけ、それぞれ可又 \tilde{b}_{ij} が強楕円形の時とそうでない時とに分けていく。たとえば強楕円形 $n > n > d$ はありえないだろうという予想ができる。それは Green 函数は \mathbb{R}^d での process のそれであることから (従つて \mathbb{R}^d で完全最大値の原理

をみたす) から singularity の order に制限が付き (この事は予想であって今の所後でやるように非常に強い制限の下で弱い結果しか得られていない), 又 (**) の微分作用素の一員を除いた所での解とも関連するからやはり singularity に制限が付き (この事もまだ証明ができてない。たとえば次元以上の時 $\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ の Ω -上の ^{発散する} positive solution は係数が連続の場合 $\frac{u(x)}{u(x)} = 0 (|x|^{2-n+\delta})$ as $|x| \rightarrow 0$, $\forall \delta > 0$ と ~~成~~ 事 ^{なす(21)} は示せるが (J. Serin [13]), $u(x) = 0 (|x|^{2-n-\delta})$ となるかどうかは分らないのである。), 結局は, $n > d$ が強積月性となる事はないと思う。又, $n = d$ の時は Brown 運動と正則関数が到る所で同じに成る class をとく事はできず, それは普通の2階の微分作用素とは違うものもあるから面白いと思う。 $n < d$ の時は, Yarnack の不等式に関連した事柄がなりたたなくはなすである。例えは適当な正則条件の下で $d=2$ の時はなりたたたり事が示せる。

2) 1) に少し関連するが, harmonic function の base についての次の結果がある。domain Ω での $\Delta u = 0$ の解 u の全体は nuclear 空間 (次の semi-norm により; $\|u\|_K = \sup \{ |u(x)|, x \in K \}$, K compact $\subset \Omega$) となる事が知られている。(A. Pietsch [1])
 従って, Ω での解 u は, 任意の compact set K 上,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, a_i \rangle u_i(x)$$

(ここで a_i は linear form, u_i は K で $\sum_0^d u_i = 0$ とする.) とかける。又, Brodat の harmonic function の公理系をみたすものも (ここで公理 (iii) が, Harnack の不等式のポテンシャル論的表現) nuclear space となる事が Grothendieck の定理より分る。従って harmonic function が nuclear space となるといふ事は, 何か深い事の反映だと思ふのだが筆者にはよく分らない。誰か御存知の方があつたらしく教えて下さい。

3) ここで kernel $G(x, y) = C(x, y) \varphi(|x-y|)$ についての結果そのまゝ。ここで $G(x, y)$ は x, y で連続で, $Gf(x) = \int G(x, y) f(y) dy$ は compact support を持つ有界可測函数を無限遠で vanish する連続函数にうつすものとする。(考へてゐる空間は R^d あるいはそこの domain Ω である。次元は $d \geq 3$), $C(x, y)$ は有界で, $\varphi(t)$ は正の連続単調減少函数で $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = +\infty$, $\int_0^\infty t^{d-1} \varphi(t) dt < +\infty$, かゝる整数 $0 < p < d$ があつて $t^p \varphi(t)$ は十分小さい t に対して単調増加で $\lim_{t \rightarrow 0} t^p \varphi(t) = 0$ とする。その時

1) $M_1 > \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d-1}{2})^{-1}$ とする定数 M_1 があつて

$$(*) \quad \varphi(r) > \frac{M_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \varphi(2r \sin \frac{\theta}{2}) r^{d-2} \theta d\theta$$

ならば, $G(x, y)$ は完全最大値原理をみたさない。

但し, $C(x, y)$ は連続という仮定の下での結果である。

2). $G_1(x, y) = C_1(x, y) \varphi_1(|x-y|)$, $G_2(x, y) = C_2(x, y) \varphi_2(|x-y|)$ とし
 これらが完全最大値原理をみたすものとする。更に, $\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$
 が単調増加とする。その時, G_1 おび G_2 を Green 函数とする
 Feller process X_1, X_2 が存在して, X_1 の正則集は X_2 の正則集で
 もある。特に $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = 0$ ならば X_2 に対しては正則集が
 X_1 に対しては正則集とならない場合が生じる。

3). $M_2 < P(\frac{d_1}{2}) P(\frac{d_2}{2})^{-1}$ に対して 1) の \star の不等号を逆に
 したものがなりたつなら, もしそれを Green 函数としても
 process が \star あるならば それは連続ではない。($C(x, y)$ が連続
 という仮定の下で)

4). Green 函数の singularity が, 有限なポテンシャルを
 さめる measure の support に関係し, 従って正の additive functional
 の support にも関係する。逆も真である。従って additive functional
 の base の構造から, Green 函数の singularity についての結果が
 導かれるか?

References.

- [1] Dynkin, E. B, Markov process, Springer-Verlag, Berlin.
- [2] Girsanov, I. V, Strongly-Feller process. I. Th. of Prob. and
 Appl. Vol. 5, No 1, (1960).
- [3] ^M~~S~~ Ito, A note on extended regular functional space.
 Proc. of Japan Academy, Vol 43, No 6 (1967)

- [4]. N. Ikeda, 2次元拡散過程の分類, 1964年4月23日
準備資料
- [5] M. Kanda, Regular points and Green functions in Markov processes, *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 19, No 1, (1967)
- [6]. M. Kanda, On the singularity of the Green functions in Markov processes, to appear
- [7] Krylov, N. V., On the green function for the Dirichlet problem, *Uspehi. Mat. Nauk*, Tom 22, No 2 (134) (1967)
- [8] H. Kunita - S. Watanabe, On square-integrable Martingale, *Nagoya Math. Journal*, Vol 30, 1967
- [9] Moser, J. A new proof of de Giorgi's Theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure and Applied Math*, Vol. XIII (1960)
- [10] M. Motoo - S. Watanabe, On a class of additive functionals of Markov processes, *Jor. of Math. Kyoto Univ.* Vol. 4, No 3, 1965.
- [11] Pietsch, A, Nukleare Funktionenräume,
- [12] Serrin, J., On the Harnack inequality for linear elliptic equations, *J. Analyse Math*, 4 (1954-1955), 1
- [13]. Serrin, J. and Gilbarg, D., On isolated singularities of solutions of second order, 同上

[14] Serrin, J., Pathological solutions of elliptic differential equations,

[15] Skorohod, A.V., On the local structure of continuous Markov processes, *Th. of Prob. and Appl.* vol. No 3 (1966).

[16] H. Tanaka, Existence of diffusion with continuous coefficients, *Mem. Fac. Sci. Hyogo Univ. Ser. A*, 18 (1964).

[17] Stampacchia, G., Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 15, 1. (1965)