

補間空間の理論と応用の若干

東大 理 吉川 敦

§ 0. はじめに

この話にあたりては、二つの Banach 空間の実補間空間の理論の概略を説明し、その応用としていくつかの埋込み定理を取り扱ってみたい。まず本質的な内容をつきの簡単な例によつて示そう。

$B_p^{s,r}(R)$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$, $s > 0$, $i = s$, すて, $L^p(R)$ の意味で
[s]階微分可能 ($[s]$ は s より小さい, 最大自然数) な函数 f であつて, かつ, $(\frac{d}{dx})^{[s]} f(x)$ が

$$\left[\int_0^{+\infty} t^{-(s-[s])r-1} \left\{ \int_R |(\frac{d}{dx})^{[s]} f(x) - (\frac{d}{dx})^{[s]} f(x+t)|^p dx \right\}^{\frac{r}{p}} dt \right]^{\frac{1}{r}} < \infty$$

をみたすような f の全体からなる Banach 空間をあらわそう。

(s が整数のとき, および s または $r = \infty$ のときや修正をする). 二のとき, つまづきの埋込み関係が知られてゐる:

$$(0,1) \quad B_p^{s,r}(R) \subseteq B_q^{t,r}(R), \quad 1 \leq r \leq \infty, \quad t = s - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0, \quad s > 0, \quad 1 \leq p < q \leq \infty.$$

これに, たとえば Nikol'skii の著書 [6] に見るように, 整函数近

似の理論に基いて導くことができる。しかし、われわれは、
そのような立場をとらずに、空間 $B_p^{s,r}(R)$ が実補間空間の理論
によって得られる二とに着目して出発する。詳しくは以下に
述べること、またけで引用文献[2][4][5][10]によるべきであるが
 $B_p^{s,r}(R)$ は実補間空間として、 $L^p(R)$ と $L^q(R)$ に定義された平行移動
(半)群の生成作用素 $A_p = \frac{d}{dx}$ の m 乗 ($m > s$) の定義域 $D(A_p^m)$ の間の
平均空間

$$(0.2) \quad B_p^{s,r}(R) = (L^p(R), D(A_p^m))_{\frac{s}{m}, r}$$

として得られる。一方、平行移動(半)群の生成作用素のレギル
ヴィントについては

$$(\lambda - A)^{-1} f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x+t) dt, \quad \lambda > 0,$$

に基いて、簡単な計算により、 $(\lambda - A)^{-1}$ は $L^p(R)$ から $L^q(R)$
 $p < q$, λ の有界作用素であって、かつ、ノルムは

$$(0.3) \quad \|(\lambda - A)^{-1}\|_{L_p \rightarrow L_q} \leq L \lambda^{\sigma-1}, \quad \lambda > 0,$$

$$\sigma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \quad L = (1-\sigma)^{1-\sigma}, \quad \text{をみたすことがわかる。}$$

さて、(0.2)において本質的なのは A_p が半群の生成作用素である
ことであるとして、これを (0.3) 型の語彙を合せれば、
(0.2) 型の定義で得られる補間空間の間に (0.1) 型の埋込み関原
が成立するこことを述べるのが、この話の内容と言える。

一方、たとえば、 $L^p(R)$ における Gauss 核:

$$G(t) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_R e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y) dy, \quad t > 0,$$

を参考してみると、 $G(t)$ は $L^p(\mathbb{R})$ から $L^q(\mathbb{R})$, $p < q$, \wedge の有界作用素
であるとして、 $\frac{1}{t}$ のルールには

$$(0.4) \quad \|G(t)\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq C t^{-\sigma}, \quad t > 0, \sigma > 0,$$

$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$, $C = (2\pi)^{-\sigma} (1-\sigma)^{\frac{1}{2}-\sigma}$, ただし t が十分
な。 (0.4) 型の許容から (0.3) 型の許容を得るにはとができるので
この場合にも $L^p(\mathbb{R})$ と $G(t)$ の生成作用素 $A_p = -\frac{d^2}{dx^2} \in m$ 中の定義
域 $D(A_p^m)$ との平均空間を参考すれば、二つとの間にも埋込み関係
が成立する：

$$(0.2') \quad \Pi(s, p, r; \mathbb{R}) = (L^p(\mathbb{R}), D(A_p^m))_{\frac{s}{2m}, r}, \quad s > 0, 1 \leq p, r \leq \infty, \quad s < 2m.$$

$$(0.1') \quad \Pi(s, p, r; \mathbb{R}) \subseteq \Pi(s - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, q, r; \mathbb{R}), \quad 1 \leq p < q \leq \infty.$$

この空間 $\Pi(s, p, r; \mathbb{R})$ は Taibleson [8] によって取扱われた Lipschitz
空間である。

なお、上の場合 $G(t)$ は解析的半群であるが (0.4) 型の許容
は $G(t)$ が解析的ではなくても成立する。たとえば“

$$(0.5) \quad G(t)f(x) = e^{itx^4 - tx^2} f(x), \quad t \geq 0,$$

を参考すれば

$$(0.4') \quad \|G(t)f(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq (\pi\sigma)^{\frac{\sigma}{2}} t^{-\frac{\sigma}{2}} \|f(x)\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad \sigma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \quad p < q$$

がわかる。 (0.5) のような半群は、牛島氏 [9] によって取扱われ
ている。

もう3つ、われわれの立場に立てば (0.3) または (0.4) 型の許
容が得られればよいので、境界条件が付いていてもかまわぬ

例として後に半空間にあける Δ (= Dirichlet 条件または Neumann 条件の付いた場合) を考察しよう。この場合には、 L^p における Δ の実現の分數の定義域と L^q における分數の定義域の間に埋込み関係を得ることもできる。

§ 1. 実補間空間の理論

1.1. E, F を二つの Banach 空間とする。分離公理をみたす線型位相空間とがありて、 $E \subseteq X, F \subseteq Y$ がなりたつとする⁽¹⁾。このとき Lions-Peetre 両氏[5] に従って、 E, F の平均空間

(1.1) $S(r, \theta, E; r, \theta-1, F) = S(r, \theta, E; r, \theta-1, F) = (E, F)_{\theta, r}, 0 < \theta < 1, 1 \leq r \leq \infty$, をつきのように定義することができる。定義をする前に必要な記号を導入する: X は Banach 空間とするとき $L_*^r(X), 1 \leq r \leq \infty$, をもって正実軸 \mathbb{R}^+ で定義され値を X にとる強可測な函数 $f(t)$ でつきの条件(I.2)をみたすものの全体からなる Banach 空間をあらわそう:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \left[\int_0^\infty \|f(t)\|_X^r \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{r}} < \infty, & 1 \leq r < \infty, \\ \sup_{t \rightarrow 0} \|f(t)\|_X < \infty, & r = \infty \end{cases}$$

空間 $S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)$ の定義: $u(t)$ を E に値をとる函数で

$$(1.3) \quad t^\theta u(t) \in L_*^r(E), \quad t^{\theta-1} u(t) \in L_*^r(F)$$

⁽¹⁾ 二つの位相空間 X, Y について、 $X \subseteq Y$ と書くときは、 X が Y の集合として含まれ、かつ $X \ni x \mapsto x \in Y$ が連続であることを意味する。

をみたすものとする。このとき

$$(1.4) \quad a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$$

の張る空間を $S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)$ とあらわす。これは、(1.4)

$$(1.5) \quad \|u\|_{S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)} = \inf \left\{ \max \left\{ \|t^\theta u(t)\|_{L^r(E)}, \|t^{\theta-1} u(t)\|_{L^r(F)} \right\} \right\}$$

によると Banach 空間となる。 $E = E''$ し、 \inf は (1.3)(1.4) をみたす $u(t)$ 全体にわたってとる。

空間 $S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)$ の定義 $v(t), w(t)$ は E に値をとる函数で

$$(1.6) \quad t^\theta v(t) \in L^r(E), \quad t^{\theta-1} w(t) \in L^r(F)$$

をみたすものとする。このとき

$$(1.7) \quad a = v(t) + w(t), \quad a.e. \quad t > 0$$

の張る空間を $S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)$ とあらわす。これは (1.4)

$$(1.8) \quad \|a\|_{S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)} = \inf \max \left\{ \|t^\theta v(t)\|_{L^r(E)}, \|t^{\theta-1} w(t)\|_{L^r(F)} \right\}$$

によると Banach 空間となる。 $E = E''$ し、 \inf は (1.7) が成立するような、 v, w が (1.6) をみたすものの全体にわたってとる。

命題 1.1. $1 \leq r \leq \infty, 0 < \theta < 1$ に対し、Banach 空間 S と

$$(1.9) \quad S(r, \theta, E; r, \theta-1, F) = S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)$$

がなり E は、この空間を、以下、 $(E, F)_{\theta, r}$ とあらわし、 E, F の平均空間という。

注意 1.1. 上記の定義は各個の Banach 空間の場合に拡張することができる。しかし、その場合命題 1.1 にあたることには、 $n \geq 3$ のときは一般には成立しない。

注意 1.2. 平均空間と同値な空間を与えるものは Lions のトレース空間といふのがある。これはつきの定義から明らかにようじは境界値の集合であるので、境界値問題を考える際には、この定義に基づく方がわかりやすい。

トレース空間 $T(r, \theta - \frac{1}{r}, E; r, \theta - \frac{1}{r}, F)$, $1 \leq r \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, の定義: $u(t)$ を \mathcal{E} の値を持つ \mathbb{R}^d 定義された函数で

$$(1.9) \quad t^\theta u(t) \in L_*^r(E), \quad t^\theta \frac{d}{dt} u(t) \in L_*^r(F)$$

をみたすものとする。このとき

$$(1.10) \quad a = u(0)$$

の張り空間を $T(r, \theta - \frac{1}{r}, E; r, \theta - \frac{1}{r}, F)$ であらわす。これは (1.6.4)

$$\|a\|_{T(r, \theta - \frac{1}{r}, E; r, \theta - \frac{1}{r}, F)} = \inf \max \left\{ \|t^\theta u(t)\|_{L_*^r(E)}, \|t^\theta \frac{d}{dt} u(t)\|_{L_*^r(F)} \right\}$$

$t = \pm \infty$ で Banach 空間 $E = T_a$ とし、 $E = T_a''$ (\inf は (1.9) (1.10) をみたす)

u 全体に対してとする。Banach 空間 T と

$$(1.11) \quad T(r, \theta - \frac{1}{r}, E; r, \theta - \frac{1}{r}, F) = (E, F)_{\theta, r}$$

がいえる。

1.2. 後に必要になる平均空間の性質を以下に述べる。

命題 1.2. Banach 空間 E, F, E_1, F_1 を考える。分離公理をみたす線型位相空間 $\mathcal{E}, \mathcal{E}_1$ がありて、 $E, F \subseteq \mathcal{E}, E_1, F_1 \subseteq \mathcal{E}_1$ をみたしていようとしよう。 L を \mathcal{E} から \mathcal{E}_1 への線型作用素とする。 L が E から E_1, F から F_1 へのそれともループ A, B の有界作用素であるならば、 L は $(E, F)_{\theta, r}$ から $(E_1, F_1)_{\theta, r}$ への有界作用素であって

より, $A \in \text{const. } A^{1-\theta}B^\theta$ である。

命題 1.3. $1 \leq r \leq r_1 \leq \infty$ ならば,

$$(E, F)_{\theta, r} \subseteq (E, F)_{\theta, r_1}, \quad 0 < \theta < 1$$

が成立する。

命題 1.4. つきのことがなり立つ:

$$(E, F)_{\lambda, r} = ((E, F)_{\theta_0, r}, (E, F)_{\theta_1, r})_{\theta, r}, \quad \lambda = (1-\theta)\theta + \theta_1\theta, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1. \quad \text{なら} \quad (E, F)_{\theta, r} = E, \quad (E, F)_{1, r} = F \text{ と} \quad \text{立} \quad \text{る}.$$

命題 1.5. $E \subseteq F$ ならば

$$(E, F)_{\theta_0, r} \subseteq (E, F)_{\theta_1, r}, \quad 0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$$

である。

注意 1.3 命題 1.4, 1.5 は $(E, F)_{\theta_i, r}$ の代りに

$$(E, F)_{\theta_i, 1} \subseteq X_i \subseteq (E, F)_{\theta_i, \infty}, \quad i=0, 1$$

をみたす Banach 空間 X_i に対しても成立する。

§ 2 ある種の閉作用素と平均空間

E を Banach 空間とする。 $A \in E$ を定義された閉作用素でつきの条件をみたすものとする。すなわち A は non-negative:

$$(2.1) \quad \lambda > 0 \text{ は } -A \text{ のリバースメント集合 } \subset \lambda^{-1}$$

$$\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\| \leq M$$

がなり立つ。すなわち M は定数。すなは A の定義域 $D(A)$ は E において稠密であると (たう)。なら $G(t), t \geq 0$, は E に

付子有界作用素 $\phi(C_0)$ -半群とし、その生成作用素を $-A$ とする。
 A は non-negative である。

自然数 m に対して A の m 次を A^m 、その定義域を $D(A^m)$ と書く、このとき、以下の二ことがなり得る。

命題2.1 空間 $(E, D(A^m))_{\theta, r}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq r \leq \infty$, は

$$t^{\theta m} (A(t+A)^{-1})^m x \in L_*^r(E)$$

且つ $t = T$ $x \in E$ の全体である。すなはち $x \in D(A^m)$

$$\|x\|_{(E, D(A^m))_{\theta, r}} = \|x\|_E + \|t^{\theta m} (A(t+A)^{-1})^m x\|_{L_*^r(E)}$$

である。

注意2.1

$$(2.2) \quad u(t) = c_m t^m A^m (t+A)^{-2m} x, \quad t > 0, \quad c_m = \Gamma(2m)/\Gamma(m)^2$$

とおく。 $c_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} \cdot \dots \cdot \frac{1}{(m-1)!}$

$$(2.3) \quad t^{m\theta} u(t) \in L_*^r(E), \quad t^{m\theta-m} u(t) \in L_*^r(D(A^m))$$

$$(2.4) \quad x = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$$

が成立り $t = 5$, $5 \leq 1$, Grisvard 定理 $t = 5 + 1$

$$(2.5) \quad \max \left\{ \|t^{m\theta} u(t)\|_{L_*^r(E)}, \|t^{m\theta-m} u(t)\|_{L_*^r(D(A^m))} \right\} \leq C \|x\|_{(E, D(A^m))_{\theta, r}}$$

が成立立つ。

命題2.2 $m, n > 0$ を自然数, $0 < \theta, \varphi < 1$ とする。 $m\theta = n\varphi$ ならば

$$(2.6) \quad (E, D(A^m))_{\theta, r} = (E, D(A^n))_{n\varphi, r}$$

が成立する。

命題2.3 $m, n > 0$ は自然数とする。 $0 < \theta - \frac{n}{m} < \theta < 1$ とする。

このとき、つきの二条件(2.7), (2.8) は同値である。

$$(2.7) \quad x \in (E, D(A^m))_{\theta, r}$$

$$(2.8) \quad x \in D(A^n) \text{ かつ } A^n x \in (E, D(A^m))_{\theta - \frac{n}{m}, r}.$$

注意2.2 命題2.2, 2.3 における $m, n > 0$ は実数である。

とくに、 $-A$ が (C_0) 半群 $G(t)$, $t \geq 0$, の生成作用素であるとき(2.7)の命題がなり立つ。

命題2.4 空間 $(E, D(A^m))_{\theta, r}$ は

$$(2.9) \quad t^{-m\theta} (I - G(t))^m x \in L_*^r(E)$$

を満たす, すなはち $x \in E$ からなる Banach 空間である。この

ことを示す。

$$\|x\|_E + \|t^{-m\theta} (I - G(t))^m x\|_{L_*^r(E)}$$

で定義する。

命題2.5 $G(t)$ がとくに解析的半群とす。このとき $(E, D(A^m))_{\theta, r}$

$$(2.10) \quad t^{m-m\theta} A^m G(t)x \in L_*^r(E)$$

をみたす, すなはち $x \in E$ からなる Banach 空間である。このこと

を示す。

$$\|x\|_E + \|t^{m-m\theta} A^m G(t)x\|_{L_*^r(E)}$$

で定義する。

注意2.3 命題2.5 はおもて, m が正の実数である。

論理的順序はやや狂うが, $\alpha > 0$, に文で, つきのことから

ゆうつ。

命題2.6. $m > \alpha$ とき

$$(E, D(A^m))_{\frac{\alpha}{m}, 1} \subseteq D(A^\alpha) \subseteq (E, D(A^m))_{\frac{\alpha}{m}, \infty}.$$

§3 嵌込み定理

$E, F, \Sigma \in \mathcal{S}$ のようになると。 $A \in \Sigma$ の線型作用素で $\lambda + A$, $\lambda > 0$, $\sigma^2 - \text{対称} - \text{有界}$ とされる。 すなはち, $A \in E$, $t = \text{制限}(T)$ 作用素を A_E とする。 すなはち

$$(3.1) \quad D(A_E) = \{x \in E; Ax \in E\}.$$

$$A_E x = Ax, \quad x \in D(A_E).$$

A_F についても同様。 A_E, A_F は明確に σ は開作用素である。 つまりの仮定を取く:

$$(3.2) \quad A_E, A_F \text{ is non-negative,}$$

$D(A_E), D(A_F)$ が σ で E, F は σ にて稠密。

($T = \sigma^2$, $\tau \in \mathbb{R}$ は基として $(E, D(A_E^m))_{\theta, r}$, $(F, D(A_F^m))_{\theta, r}$ を計算できる。 このとき, Grisvard $\Delta_U = \sigma + i\tau$,

命題3.1. Banach空間上にて

$$\left((E, D(A_E^m))_{\theta, r}, (F, D(A_F^m))_{\theta, r} \right)_{t, r} = (X, D(A_X^m))_{\theta, r}$$

$$E = T^{-1}L, \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \leq r \leq \infty, \quad 0 < t < 1, \quad X = (E, F)_{t, r}, \quad A_X \text{ is } A$$

$$\in X \text{ は制限 }(T) \text{ 作用素である}.$$

定義3.1 $A \in (\sigma, E, F)$, $\sigma > 0$, すなはち $\lambda > 0$ は対称, $(\lambda + A)^{-1}$ が

E かつ F の作用素として有効であるて、かつ

$$(3.3) \quad \|(\lambda+A)^{-1}\|_{E \rightarrow F} \leq L \lambda^{\sigma-1}, \quad L: \text{定数} > 0,$$

がなりたつ作用素 A を“う。

また、別の場合として、 $G(t)$, $t \geq 0$, が Σ に有効な作用素の半群とし、 $G(t)$ は E , F に制限して作用素族 $(G_E(t), G_F(t))$ とみなす。 E , F に有効な (C_0) 半群 $=$ Γ 、 $t \geq 0$ の場合を参考えよう。

定義3.2 $G(t) \in S(\sigma, E, F)$, $\sigma > 0$, とき $t > 0 \in \mathbb{R} \setminus \cup_i \theta_i$, $G(t)$ が E かつ F の作用素として有効であるて、かつ

$$(3.4) \quad \|G(t)\|_{E \rightarrow F} \leq K t^{-\sigma}, \quad K > 0,$$

がなりたつ $G(t)$ を“う。

命題3.2 および命題3.1によると E , F の間に空間の鎖 $(E, F)_{\theta_i, r}$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{N-1} < \theta_N = 1$, $1 \leq r_i \leq \infty$, は、はめこむて“想えん”は“う”の τ 、以下の議論で、定義3.1, 3.2 の σ を

$$(3.5) \quad 0 < \sigma < 1$$

と仮定して差しえない。このとき、つぎうことがいえる。

命題3.2 $G(t)$ の生成作用素を $-A$ とする。 $G(t) \in S(\sigma, E, F)$ ならば $A \in (\sigma, E, F)$ である。

命題3.3 $A \in (\sigma, E, F)$ とする。このとき、つぎの埋込み定理がある。 $T_2 \neq T_1$ 。 T_1 たゞ $\cup_i \theta_i$, $0 < \theta < \theta + \frac{\sigma}{m} < 1$, $1 \leq r \leq \infty$:

$$(E, D(A_E^m))_{\theta + \frac{\sigma}{m}, r} \subseteq (F, D(A_F^m))_{\theta, r}.$$

§4 命題3.2 および 3.2の証明

これら の 証明では 必要に応じて補間定理を用いればよ

から、 $0 < \sigma < 1$ と して おいて、一般性を失わぬ。

命題3.2は、次の公式から直ちに 従う：

$$(\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) dt, \quad \lambda > 0.$$

命題3.3を証明する。 $a \in (E, D(A_E^m))_{\theta+\frac{\sigma}{m}, r}$ とする。

$$U_k(t) = \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)^2} t^k A_E^k (t+A_E)^{-2k} a$$

$$= \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)^2} t^k A^k (t+A)^{-2k} a$$

とおく。 $t=t''$ 、 $k \geq m$ 、 $t > 0$ 。命題2.1と5の注意2.1と4

$$(4.1) \quad \begin{cases} t^{m\theta+\sigma} U_k(t) \in L_*^r(E) \\ t^{m\theta+\sigma-k} A^k U_k(t) \in L_*^r(E) \end{cases}$$

$$(4.2) \quad a = \int_0^\infty U_k(t) \frac{dt}{t}$$

とする。一方、仮定から、

$$\|U_{m+1}(t)\|_F \leq \text{const. } t^\sigma \|U_m(t)\|_E$$

$$\|A^m U_{m+1}(t)\|_F \leq \text{const. } t^\sigma \|A^m U_m(t)\|_E$$

とするから、(4.1) は

$$(4.3) \quad \begin{cases} t^{m\theta} U_{m+1}(t) \in L_*^r(F) \\ t^{m\theta-m} A^m U_{m+1} \in L_*^r(F) \end{cases}$$

これが τ で、 $f = \int_0^\infty U_{m+1}(t) \frac{dt}{t}$ は F で 收束 (τ , $f \in (F, D(A_F^m))_{\theta/m, r}$)

(が 3 は、 ε で τ は $a = f$ であるから、 $a \in (F, D(A_F^m))_{\theta/m, r}$)

開ゲラフ定理から

$$\|a\|_{(F, D(A_F^m))_{\frac{m}{m}, r}} \leq \text{const.} \|a\|_{(E, D(A_E^m))_{\frac{m}{m} + \sigma, r}}$$

§5. 分数巾の定義域と埋込み関係

定義5.1 $A^{-1}, A_E^{-1}, A_F^{-1}$ は有界とする。 $A \in \Sigma(\sigma, E, F)$, $\sigma > 0$, とは, A_E, A_F が "non-negative" あって, かつ, $A^{-\sigma}$ が E から F への作用素として有界であることをいう。

命題5.1 $-A$ は (C_0) 半群 $G(t)$ の生成作用素とする。 $G(t)$ が 解析的であるとき, $A \in \Sigma(\sigma, E, F)$ ならば $G(t) \in S(\sigma, E, F)$ である。

実際 $G(t) = A^{-\sigma} A^\sigma G(t) = A^\sigma G(t) A^{-\sigma}$ であるから

$$\|G(t)\|_{E \rightarrow F} \leq \|A^\sigma G(t)\|_{F \rightarrow F} \|A^{-\sigma}\|_{E \rightarrow F} \leq \text{const. } t^{-\sigma}$$

が得られる。

命題5.2 $0 < \sigma < 1$ とする。次の三条件は同値である:

$$(5.1) \quad D(A_E) \subset D(A_F^{1-\sigma}),$$

$$(5.2) \quad D(A_E^{\alpha+\sigma}) \subset D(A_F^\alpha), \quad \forall \alpha > 0,$$

$$(5.3) \quad A \in \Sigma(\sigma, E, F)$$

証明には、分数巾の定義(小松[4])と、命題5.1、命題3.3、命題2.6 を用いれば、容易である。

命題5.1の逆は一般に成立せず、反例として、

$$(G(t)f)(x) = e^{-t(1+x^2)} f(x), \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \quad 1 < p < \infty$$

がある。実際、これは、解析的半群を各 $L^p(R)$ でなし、

$$G(t) \in S\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^q(R), L^p(R)\right), \quad 1 \leq p < q < \infty$$

をみたすが、その生成作用素 $-A$ は ≥ 0 では、

$$A \in \Sigma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^q(R), L^p(R)\right)$$

は、 $p, q, 1 \leq p < q < \infty$ をどう選んでも成立する。

二、三の特別な場合を考察する。

命題5.3 $F \subset E$ とする。 A_E^{-1} が E から F の作用素として有界であるための必要十分条件は、 $D(A_E) \subset F$ である。

これを用いると、函数論的補間空間 (Calderon [12]) が、

命題5.4 $F \subset E$ とする。このとき、ある Banach 空間 X があって $D(A_E) \subset X$ かつ $F = [E, X]_\theta$ がある $\theta \in]0, 1[$ に対して成立するとする。このとき、 $[E, D(A_E)]_\theta \subset F$ である。たとえば $[Y, Z]_\theta$ は、Banach 空間 Y と Z の函数論的な補間空間をあらわす。すなはち、 $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ で定義され、値を $Y + Z$ にとる連続函数 $f(z)$ で、 $0 < \operatorname{Re} z < 1$ において正則、かつ、

$$\|f(iz)\|_Y, \|f(1+iy)\|_Z \quad (y \in \mathbb{R}) \rightarrow 0, |y| \rightarrow \infty,$$

をみたすものの全体を記しておくとき、

$$[Y, Z]_\theta = \{f(\theta), f \in \mathcal{H}\}$$

である。したがって、

$$\|\alpha\|_{[Y, Z]_\theta} = \inf_{\substack{f(\theta)=\alpha \\ f \in \mathcal{H}}} \left\{ \max \left[\sup_{y \in \mathbb{R}} \|f(iz)\|_Y, \sup_{y \in \mathbb{R}} \|f(1+iy)\|_Z \right] \right\}$$

これより、

命題5.5 命題5.4と同じ仮定のもとで考える。もし、

$$[E, D(A_E)]_\theta = D(A_E^\theta) \text{ ならば}, A \in \Sigma(\theta, E, F) \text{ である}.$$

分數巾の定義域が上記の場合のように5つされたためには

$$\|A^{ik}\| \leq \text{Const } e^{\omega k}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \omega = \text{定数}$$

が成立すればよい。これについては、藤原氏、高倉氏の研究がある他、 E が Hilbert 空間、 A が自己共役の場合には、明らかである。

第二の特別な場合として、つきのような場合を考える。

E, F を今までのような Banach 空間とし、さらに、 E_1, F_1 という Banach 空間と、 $E_1, F_1 \subseteq \Sigma_1$ なる分離公理をみたす線型位相空間が存在するとしよう。 Σ_1 から、および Σ_1 から Σ_1 の像 L, R がそれそれ存在して、これらが、

$$E_1 \xrightarrow{L} E \xrightarrow{R} E_1,$$

$$F_1 \xrightarrow{L} F \xrightarrow{R} F_1,$$

の写像として連続であり、かつ、 $RL = 1$ を満足するとする。また、 $P = LR$ とすれば、 P は、 $E \rightarrow E, F \rightarrow F$ の写像として有界であって、 $P^2 = P$ をみたすことわかる。

命題5.6 $\lambda > 0$ に対し、 $(\lambda + A_E)^{-1}P = P(\lambda + A_E)^{-1}$,

$(\lambda + A_F)^{-1}P = P(\lambda + A_F)^{-1}$ とする。このとき、 $A \in (\sigma, E, F)$ ならば、 $RAL \in (\sigma, E_1, F_1)$ 、 $G(t) \in S(\sigma, E, F)$ ならば

$RG(t)L \in S(\mathcal{O}, E, F)$, すなはち, $A \in \Sigma(\mathcal{O}, E, F)$ ならば $RA L \in \Sigma(\mathcal{O}, E, F)$ である。

§ 6 例

例 6.1. $L^p(\mathbb{R}), C(\mathbb{R})$ における平行移動(半)群の生成作用素は $-A$ である。このとき,

$$(6.1) \quad A \in (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, L^p(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R})), \quad 1 \leq p < q < \infty,$$

$$(6.2) \quad A \in (\frac{1}{p}, L^p(\mathbb{R}), C(\mathbb{R})), \quad 1 \leq p < \infty$$

が成り立つ。

証明: 本質的に Hausdorff-Young の不等式を用いて行う。

例 6.2. $L^p(\mathbb{R}^n), C(\mathbb{R}^n)$ における Gauss 核から得られる半群 $G(t)$ である:

$$(G(t)f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} f(y) dy, & t > 0 \\ f(x) & , \quad t = 0. \end{cases}$$

このとき,

$$(6.3) \quad G(t) \in S\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)\right), \quad 1 \leq p < q < \infty.$$

$$(6.4) \quad G(t) \in S\left(\frac{n}{2p}, L^p(\mathbb{R}), C(\mathbb{R}^n)\right), \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$(6.5) \quad 1 - \Delta \in S\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)\right), \quad 1 < p < q < \infty$$

が成り立つ。

(6.5) は Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式 ([3], [7]) より、直

すに従う。

例 6.3. $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ に式ける $-\Delta$ の Dirichlet 条件を E は Neumann 条件のもとでの実現を $-A$ とする。このとき、

$$(6.6) \quad -A \in \Sigma \left(\frac{n}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right), L^p(\mathbb{R}_+^n), L^q(\mathbb{R}_+^n) \right), \quad 1 < p < q < \infty$$

がなりたつ。

(6.5) と命題 5.6 を用いれば、Dirichlet 条件の場合には $E_1 = L^p(\mathbb{R}_+^n)$, $F_1 = L^q(\mathbb{R}_+^n)$, $E = L^p(\mathbb{R}^n)$, $F = L^q(\mathbb{R}^n)$ となる。

$$(Lf)(x) = \begin{cases} f(x) & x_n > 0 \\ -f(x'_1, -x_n) & x_n < 0, \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases} \quad f \in E_1$$

$(f \in E_1)$

$$(Rg)(x) = \frac{1}{2} [g(x'_1, x_n) - g(x'_1, -x_n)] \Big|_{\mathbb{R}^n}, \quad g \in E_1$$

とされよう。Neumann 条件の場合には、偶函数に拡張する。これは藤原氏の技巧である。

例 6.4. A を 2 階の精円型作用素とする。 C^α 係数とし、主部の係数は実数値とする。 Ω を \mathbb{R}^n の有界領域とし境界は滑らかとする。 $L^p(\Omega)$ に作用素 A_p を、

$$A_p u = Au, \quad u \in D(A_p)$$

$$D(A_p) = \{ u; u \in W^{2,p}(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \}$$

たる $T = C$, $Bu = u$ また $Bu = \frac{\partial}{\partial n} u$ (n : 外法線) とする。

このとき A_2 が accretive であると見てよし。

$$(6.7) \quad A \in \Sigma \left(\frac{n}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right), L^p(\Omega), L^q(\Omega) \right), \quad 1 < p < q < \infty$$

がなりたつ。

これは、上記の場合 A の純虚数巾が有界に図るにとかねられていうからである(藤原(c)).

例6.4 A を $2m$ 階の椭円型作用素とする。 Ω を \mathbb{R}^n の有界領域、 $\partial\Omega$ は Ω の境界で滑らかとする。 A の係数は Ω で滑らかとする。 B_1, \dots, B_m を境界作用素とする。作用素 A_p を $L^p(\Omega)$ 上、つきのように定義する。

$$A_p u = Au, \quad u \in D(A_p)$$

$$D(A_p) = \{u \in W^{p,m}(\Omega); B_j u = 0 \quad j=1, \dots, m\}$$

すなはち A_2 の正定値は自己共役作用素である。

$$(6.8) \quad A \in \Sigma\left(\frac{n}{2m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right), \quad 1 < p \leq 2 \leq q < \infty$$

かつ T は Γ に Γ で Γ

$$(6.9) \quad A \in \left(\frac{n}{2m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right), \quad p < q < \infty$$

かつ T は Γ で Γ

証明は命題5.5と補間定理による。 (6.8) が $p \leq 2 \leq q$ の制限なしに成立するかどうかについては筆者はまだ何ともいえない。

§ 30 文獻.

1. Fujiwara Daisuke (a) Concrete characterization of the domains of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order, Proc JAPAN ACADE 43 (1967) 82-86; (b) L^p -theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space, J. FAC. SCI. UNIV. TOKYO, SEC. I. 15 (1968), 169-177
2. Grisvard, Pierre, 『偏微分論文』, 199 大字, 1965.
3. Hardy-Littlewood-Polya, Inequalities, CAMBRIDGE UNIV. PRESS.
4. Komatsu Hikosaburo (a) Fractional powers of operators, PACIFIC J. MATH. 19 (1966), 285-346, (b) Fractional powers of operators II, Interpolation spaces, Ibidem. 21 (1967), 89-111, (c) Fractional powers of operators III, Negative powers, J. MATH. SOC. JAPAN, 21 (1969) 205-220, (d) Fractional powers of operators IV, potential operators, Ibidem. 21 (1969) 221-228.
5. Lions & Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Pub. MATH. I.H.E.S. 19 (1964), 5-68.
6. Nikol'skii, S.M., Приближение функций многих переменных и теорема вложения, Изд. Наука, 1977, 1969.
7. Sobolev, S.L., Об одной теореме функционального анализа, Mat. сб. 4 (46), 1938, 471-494.
8. Taibleson, M.H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions

- on Euclidean n -space I, Principal properties. J. MATH. MECH. 13 (1964), 407-479.
9. Ushijima Teruo, 線型作用素の半群の滑らかさと α -癡展系の数値解法予稿, 東大数解研, 1969.
10. YOSHIKAWA, A. Remarks on the theory of interpolation spaces, J. FAC. SCI. UNIV. TOKYO, SEC. 1, 15 (1968), 209-251.
11. YOSIDA, Kôsaku, Functional Analysis, Springer-V., 1965.

§ 00+1 文献追加

- 1^{bis} Fujiwara, D. (c) On the asymptotic behaviour of the Green operators for elliptic boundary problems and pure imaginary powers of some second order operators, J. Math. Soc. JAPAN, 21, (1969), p. 481-522.
12. Calderon, A.P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math., 24 (1964), 113-190.
13. Shimakura, Norio, (a) Problèmes aux limites variationnels du type elliptique, Ann. E.N.S., Ser. 4, 2, (1969), 255-310,
 (b) 東京大学理学部数学教室, 解析火曜セミナー講演,
 1969年12月9日.
14. Agmon, Shmuel, On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., 15 (1962), 119-147.