

Pseudo-differential Operators  
on Sobolev Space  $H^{s,p}$ ,  $-\infty < s < \infty, 1 < p < \infty$

阪大. 理 熊, 郷 準

§0. 序

Singular integral operators, 'SIO<sub>p</sub>', の理論が常に  $L^p$ -空間,  $1 < p < \infty$ , 上で議論されて来たのに対し, Pseudo-differential operators, 'PsDO<sub>p</sub>', の理論は主に  $L^2$ -空間上で議論され,  $L^p$ -空間上での一般論はまだ出来ていないようである. この理由としては, PsDO<sub>p</sub> の理論は Fourier 変換と Plancherel の公式が土台となっており,  $L^p$ -空間上,  $p \neq 2$ , ではこれが最早通用しないこと, 今一つは PsDO<sub>p</sub> の algebra と考えると登場する '正則化作用素 (smoothing operators)' は  $H^{s,2}$  空間固有のもので,  $H^{s,p}$  空間,  $p \neq 2$ , では一般に  $L^p$  からそれ自身の有界作用素とさえなり得ない事実 (Hörmander [1], p. 106) に基づくと思われる.

筆者は最近の論文[4]に於て, Hörmander [2] の  $S_{\rho, \delta}^m$ -class,  $0 < \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \delta < 1$ , の  $P_s D O_p$  が急減少函数族  $\mathcal{S}$  をそれ自身へ写す作用素として exact な (modulo class の現れな...) algebra を作っていることと証明した. 一方 Kagan [3] は  $\rho = 1$  に対する  $S_{1, \delta}^0$ -class の  $P_s D O_p$  は  $L^p$ -空間,  $1 < p \leq 2$ , からそれ自身への有界作用素になっていることを証明している.

ここでは筆者[4]と Kagan [3]の結果を基にして,  $H^{s, p}$ -空間,  $1 < p < \infty$ , 上で,  $S_{1, \delta}^m$ -class の  $P_s D O_p$  の基礎的理論を展開したい. §1 では  $P_s D O_p$  の定義および本稿で必要とされる筆者[4]の結果を, ここで使いやすい形にして述べ, §2 では Kagan [3]の定理の証明(原論文では完全な形で与えられていない)と Hörmander [1]の方針に沿って行なう. §3 では本稿の主題である  $H^{s, p}$ -理論を Kumano-go-Nagase [5]をもとに解説する. この節の定理 3.2 の系として Hörmander の問題( [2], p.163) が典型的な  $\rho = 1$  の場合には肯定的に解ける. しかし一般の  $0 < \rho < 1$  の場合には表象 (symbol) が  $x$  に depend しない場合でも之も未解決のようである.

§1. P.S.D.O.<sub>p</sub> の基本公式.  $\mathcal{D}$  と  $\mathbb{R}^n$  で定義された  $C^\infty$ -関数でそのすべての微係数が有界となる関数族とし,  $\mathcal{D}'$  はその部分集合ですべての微係数が急減少するもの, 全体とする.  $\mathcal{D}'$  は  $\mathcal{D}$  の共役空間を表わす.

$\mathcal{D}$  の元  $u(x)$  に対し, その Fourier 変換  $\hat{u}(\xi)$  と

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$$

で定義すると, その逆変換  $\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x)$  は

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) = \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi$$

で定義される,  $\Rightarrow$  で:

$$x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, \quad d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi, \quad i = \sqrt{-1}.$$

以下 次のような記号を用いる.

非負整数を元とする多重指標  $\alpha$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n), \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

とし,

$$\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_{\xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad D_{x_j} = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_{\xi_j} = -i \frac{\partial}{\partial \xi_j},$$

( $j = 1, \dots, n$ )

$$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}, \quad \partial_\xi^\beta = \partial_{\xi_1}^{\beta_1} \dots \partial_{\xi_n}^{\beta_n}, \quad D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}, \quad D_\xi^\beta = D_{\xi_1}^{\beta_1} \dots D_{\xi_n}^{\beta_n}$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \xi^\beta = \xi_1^{\beta_1} \dots \xi_n^{\beta_n}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$\alpha \geq \alpha'$  は  $\alpha_j \geq \alpha'_j, j = 1, \dots, n$ , と意味し  
 のとき  $\binom{\alpha}{\alpha'} = \binom{\alpha_1}{\alpha'_1} \dots \binom{\alpha_n}{\alpha'_n}, \quad \binom{\alpha_j}{\alpha'_j} = \frac{\alpha_j!}{\alpha'_j! (\alpha_j - \alpha'_j)!}, \quad j = 1, \dots, n$

さて,  $u \in \mathcal{S}$  と実数  $s$  に対して  $\langle D_x \rangle^s u$  を

$$\langle D_x \rangle^s u(x) = \int e^{ix \cdot \xi} \langle \xi \rangle^s \hat{u}(\xi) d\xi$$

で定義し, norm  $\|u\|_{s,p}$  を

$$\|u\|_{s,p} = \left\{ \int |\langle D_x \rangle^s u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

で定義する. 明らかにも  $\langle D_x \rangle^s : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  は連続, 従って

$$\langle \langle D_x \rangle^s u, v \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \langle u, \langle D_x \rangle^s v \rangle, \quad u \in \mathcal{S}', v \in \mathcal{S}$$

によつて,  $\langle D_x \rangle^s : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  は一意的に拡張出来る. 特に  $s = 2l, l = 1, 2, \dots$  のときは

$$\langle D_x \rangle^{2l} = (1 - \Delta_x)^l, \quad \Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2.$$

Sobolev 空間  $H^{s,p}, 1 < p < \infty, \varepsilon$

$$\begin{aligned} H^{s,p} &= \{u \in \mathcal{S}' ; \langle D_x \rangle^s u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} \\ &= \{u \in \mathcal{S}' ; u = \langle D_x \rangle^{-s} u_0 \text{ for some } u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)\} \end{aligned}$$

で定義する.

$$u \in H^{s,p}, v \in H^{-s,p'}, \quad p^{-1} + p'^{-1} = 1, \quad 1 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

その内積  $(u, v)$  を

$$(u, v) = \int \langle D_x \rangle^s u(x) \cdot \overline{\langle D_x \rangle^{-s} v(x)} dx$$

で定義すると,  $H^{s,p}$  と  $H^{-s,p'}$  は 2 の内積によつて 次の意味で互いに共役な関係にある:

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{s,p} \|v\|_{-s,p'}$$

かつ

$$\|u\|_{s,p} = \sup_{0 \neq v \in H^{-s,p'}} \left\{ \frac{|(u, v)|}{\|v\|_{-s,p'}} \right\} = \sup_{0 \neq v \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{|(u, v)|}{\|v\|_{-s,p'}} \right\}.$$

$$H^{-\infty, p} = \bigcup_s H^{s,p}, \quad H^{\infty, p} = \bigcap_s H^{s,p}$$

とおく.

定義 1.1.  $R_x^n \times R_\xi^n$  で定義された  $C^\infty$  函数  $g(x, \xi)$  が 次の条件を満たすとき,  $g(x, \xi) \in S_{p,\delta}^m$  - class,  $0 < p \leq 1$ ,  $0 \leq \delta < 1$ , の表象であるという: 任意の  $\alpha, \beta$  に対し定数  $C_{\alpha,\beta}$  が存在して

$$(1.1) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m + \delta|\alpha| - p|\beta|}$$

を満たす.

表象  $g(x, \xi) \in S_{p,\delta}^m$  を持つ  $P_s D O_p$   $g(x, D_x): \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  を

$$(1.2) \quad g(x, D_x)u(x) = \int e^{ix \cdot \xi} g(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

で定義し  $g(x, D_x) \in S_{p,\delta}^m$  と書く.

$$S^{-\infty} = \bigcap_m S_{1,0}^m (= \bigcap_m S_{p,\delta}^m), \quad S_{p,\delta}^\infty = \bigcup_m S_{p,\delta}^m$$

とおき, 対応する  $P_s D O_p$  の class を, それぞれ

$$S^{-\infty}, \quad S_{p,\delta}^\infty \quad \text{で表わす.}$$

それぞれは,  $S_{\rho, \delta}^0$ -class の  $P_s D O_p$  が  $L^p$  を  $L^p$  へ有界に写すことを要求するが, 二のため Hörmander [2], p.163, の注意から  $S_{1, \delta}^m$ -class 即ち  $\rho = 1$  の場合のみを対象とする.

補題 1.1. (Hörmander).  $\psi_0(\xi) \geq 0$  を,  $\{\xi; \psi_0(\xi) > 0\}$  の測度が零でない有界可測函数とする. 二のとき,  $1 < p < \infty$ ,  $p \neq 2$  なる任意の  $p$  に対して,  $|\psi_p(\xi)| \leq \psi_0(\xi)$  なる可測函数  $\psi_p(\xi)$  が存在して,  $\widehat{\Psi_p u}(\xi) = \psi_p(\xi) \widehat{u}(\xi)$ ,  $u \in \mathcal{S}$ , で定義される作用素  $\Psi_p$  は  $L^p$  からそれ自身への有界作用素に拡張出来ない.

今任意に  $R^n$  の点  $\xi_0$  を固定し,  $\xi_0$  を中心とした半径  $d > 0$  の球の特性函数を  $\psi_0(\xi)$  とすると, 対応する  $\psi_p(\xi)$  の台はこの球に含まれかつ  $|\psi_p(\xi)| \leq 1$ . 従って Plancherel の定理を用いれば  $\Psi_p$  は  $H^{-\infty, 2}$  から  $H^{s, 2}$  へ写すことがわかり  $\Psi_p$  は  $H^{s, 2}$  に於ける正則化作用素となる. このことは通常  $P_s D O_p$  の algebra で現れる正則化作用素は  $H^{s, 2}$ -空間固有のもので一般の  $H^{s, p}$  では  $L^p$  と  $L^p$  へ有界に写さぬことも起こり得ることを示す.

補題 1.2 (Hörmander [1]).  $\psi(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  が定数

$B_1$  に対して

$$(1.3) \int_{\frac{t}{2} \leq |\xi| \leq 2t} |t^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \psi(\xi)|^2 d\xi / t^n \leq B_1^2, \quad 0 < t < \infty, |\alpha| \leq \kappa$$

( $\kappa > n/2$ , 整数)

をみたすとするとき,  $\widehat{\Psi u}(\xi) = \psi(\xi) \widehat{u}(\xi)$  で定義される  $\Psi$  は, 有界作用素  $\Psi: L^p \rightarrow L^p, 1 < p < \infty$ , に拡張される.

系 1°.  $S_{\pm, 0}^0 \ni g(\xi)$  ならば  $g(D_x)$  は条件 (1.3) をみたす. 従って  $g(D_x): L^p \rightarrow L^p, 1 < p < \infty$ , は有界.

系 2°.  $s \leq s'$  ならば  $H^{s', p} \supset H^{s, p}$  かつ ある定数  $C_{s, s'}$  に対して

$$(1.4) \|u\|_{s, p} \leq C_{s, s'} \|u\|_{s', p}, \quad u \in H^{s', p}.$$

注.  $p=2$  の場合は Plancherel の定理より  $C_{s, s'} = 1$ .

(証明)  $u \in H^{s', p}$  のとき,  $\langle D_x \rangle^s u = \langle D_x \rangle^{-(s'-s)} (\langle D_x \rangle^{s'} u)$  と書けば,  $\langle \xi \rangle^{-(s'-s)} \in S_{\pm, 0}^{-(s'-s)} \subset S_{\pm, 0}^0$ . 従って系 1° より  $\|\langle D_x \rangle^s u\|_{L^p} \leq C_{s, s'} \|\langle D_x \rangle^{s'} u\|_{L^p} < \infty$ .

補題 1.3 (Kumano-go [4]). i)  $g_j(x, \xi) \in S_{1, \delta}^{m_j}, j=1, 2,$

に対して

$$g(x, \xi) = \int \langle D_\xi \rangle^{n_0} g_1(x, \xi + \zeta) \left( \int e^{-i\zeta \cdot \xi} \langle \zeta \rangle^{-n_0} g_2(x + \zeta, \xi) d\zeta \right) d\xi$$

( $n_0 \geq n+1$ , 偶数)

とおくと,

$$f(x, \xi) \in S_{1, \delta}^{m_1+m_2} \quad \text{かつ} \quad f(x, D_x) = f_1(x, D_x) f_2(x, D_x).$$

また 任意の  $N \in \mathbb{Z}$  に対して,  $R_N(x, \xi) \in S_{1, \delta}^{m_1+m_2-(1-\delta)N}$

が存在して,

$$f(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha f_1(x, \xi) (-i\partial_x)^\alpha f_2(x, \xi) + R_N(x, \xi)$$

と書ける.

ii)  $f(x, \xi) \in S_{1, \delta}^m \quad \text{に対して},$

$$f^*(x, \xi) = \int \left( \int e^{-iz \cdot \xi} \langle z \rangle^{-n_0} \langle D_z \rangle^{n_0} \overline{f(x+z, \xi+\xi)} dz \right) d\xi$$

とおくと,  $f^*(x, \xi) \in S_{1, \delta}^m \quad \text{かつ}$

$$(f(x, D_x)u, v) = (u, f^*(x, D_x)v), \quad u, v \in \mathcal{S}.$$

また 任意の  $N \in \mathbb{Z}$  に対して,  $R_N^*(x, \xi) \in S_{1, \delta}^{m-(1-\delta)N}$

が存在して

$$f^*(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} (-i\partial_x)^\alpha \partial_\xi^\alpha \overline{f(x, \xi)} + R_N^*(x, \xi)$$

と書ける.

補題 1.4 (Kumano-go [4]).  $f(x, \xi) \in S_{1, \delta}^m \quad \text{に対して},$

定数  $C, C'$  が存在して.

$$(1.5) \quad \|f(x, D_x)u\|_{s, 2} \leq C \|u\|_{s+m, 2}, \quad u \in H_{s+m, 2}^{s+m, 2}$$

より詳しく

$$(1.6) \quad \|f(x, D_x)u\|_{s, 2} \leq \sup_{x, \xi} \{ |f(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{-m} \} \|u\|_{s+m, 2} \\ + C' \|u\|_{s+m-(1-\delta)/2, 2}, \quad u \in H_{s+m, 2}^{s+m, 2},$$

$\Rightarrow$  で定数  $C, C'$  は十分大きな  $\delta \in \mathbb{R}$  固定して

$$\|f\|_{l,m} = \text{Max}_{|\alpha+\beta|\leq l} \sup_{x,\xi} \{ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x,\xi)| \langle \xi \rangle^{-(m+\delta|\alpha|-|\beta|)} \} < \infty$$

にのみ関係する.

次に  $C^\infty$  変換  $x(y) : \mathbb{R}_y^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$  を考える.

$x(y)$  の Jacobian matrix を  $\partial_y x(y) = (\partial_{y_j} x_k(y))$ ,  
その行列式を  $\det(\partial_y x(y))$  で表わす.

今変換  $x(y)$  が ある定数  $C > 0$  に対して  
条件:

$$(1.7) \quad \partial_{y_j} x_k(y) \in \mathcal{B}, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad C^{-1} \leq |\det(\partial_y x(y))| \leq C$$

をみたすとする, 次の補題が成り立つ.

補題 1.5 (Kumano-go [4]).  $f(x, \xi) \in S_{1, \delta}^m$  に対して,  
 $h(y, \zeta) \in S_{1, \delta}^m$  が存在して,

$$(1.8) \quad h(y, D_y) w(y) = (f(x, D_x) u)(x(y)), \\ w(y) = u(x(y)) \in \mathcal{S}.$$

## §2. Kagan の定理.

補題 2.1.  $f(x, \xi) \in S^{-\infty}$  ならば

$$K(x, z) = \int e^{iz \cdot \xi} f(x, \xi) d\xi$$

とあると,

i) 任意の  $l, \alpha, \beta$  ならば

$$(2.1) \quad \sup_{x, z} \{ \langle z \rangle^{2l} |\partial_x^\alpha \partial_z^\beta K(x, z)| \} < \infty$$

となり

$$(2.2) \quad g(x, D_x) u(x) = \int K(x, x-x') u(x') dx', \quad u \in \mathcal{S}$$

と書ける. 逆に  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_z^n$  での  $C^\infty$ -函数  $K(x, z)$

が任意の  $l, \alpha, \beta$  ならば (2.1) を満たすと

すると

$$f(x, \xi) = \int e^{-iz \cdot \xi} K(x, z) dz$$

とすれば,  $f(x, \xi) \in S^{-\infty}$  となり (2.2) が成り

立つ.

ii) 任意の  $1 < p < \infty$ , 実数  $s_1, s_2$  ならば, 定数

$C_{p, s_1, s_2}$  が存在して,

$$(2.3) \quad \|g(x, D_x) u\|_{s_1, p} \leq C_{p, s_1, s_2} \|u\|_{s_2, p}, \quad u \in H^{s_2, p},$$

が成り立ち,  $g(x, D_x)$  は  $H^{s_1, p}$ ,  $1 < p < \infty$ , 上の

正則化作用素 ' $g(x, D_x): H^{-\infty, p} \rightarrow H^{\infty, p}$ ' となる.

(証明) i) (2.1) は  $\langle z \rangle^{2l} e^{iz \cdot \xi} = \langle D_\xi \rangle^{2l} e^{iz \cdot \xi}$  と書いて

$\xi$  について部分積分すれば,

$$\begin{aligned} & \langle z \rangle^{2l} (\partial_x^\alpha \partial_z^\beta K(x, z)) \\ &= \int e^{iz \cdot \xi} \langle D_\xi \rangle^{2l} \{ (i\xi)^\beta \partial_x^\alpha g(x, \xi) \} d\xi \end{aligned}$$

となることよりわかる。(2.2) は  $\hat{u}(\xi) \in u(x')$  と直接書くと積分順序を交換すればよい。逆は

$$\begin{aligned} & \langle \xi \rangle^{2l} \{ \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g(x, \xi) \} \\ &= \int e^{-iz \cdot \xi} \langle D_x \rangle^{2l} \{ (-iz)^\beta \partial_x^\alpha K(x, z) \} dz \end{aligned}$$

なることに注意すればよい。

ii)  $2l \geq \max\{s_1, s_2\}$  なる正整数  $l$  を固定し,  $u \in \mathcal{S}$

に對して (2.2) を用いて

$$\langle D_x \rangle^{2l} g(x, D_x) u(x) = \int \langle D_x \rangle^{2l} \langle D_{x'} \rangle^{2l} K(x, x-x') \langle D_{x'} \rangle^{-2l} u(x') dx'$$

と書けば, (2.1) より

$$|\langle D_x \rangle^{2l} g(x, D_x) u(x)| \leq C_l \int \langle x-x' \rangle^{-(n+1)} |\langle D_{x'} \rangle^{-2l} u(x')| dx'$$

を得る。  $\Rightarrow$  Hausdorff-Young の不等式より

$$\|g(x, D_x) u\|_{2l, p} \leq C'_l \|u\|_{-2l, p}, \quad u \in \mathcal{S},$$

が出る。  $\mathcal{S}$  が  $H^{-2l, p}$  で dense なることに注意すれば, 二れと補題 1.2 の系 2° より (2.3) を得る。

定理 2.1 (Kagan [3]).  $g(x, \xi) \in S_{1, s}^0$  に對して, 定数  $C_p, 1 < p \leq 2$ , が存在して

(2.4)  $\|g(x, D_x)u\|_{0,p} \leq C_p \|u\|_{0,p}$ ,  $u \in \mathcal{S}$   
 が成り立つ.

(証明) 方針は weak-type の  $L^1$ -評価を出し,  
 $(L^1, L^2)$  で Marcinkiewicz の補間定理 [8] を  
 用いる. 今  $C_0^\infty$ -函数  $\psi(\xi)$  を  $\psi(\xi) = 1$  for  
 $|\xi| \leq 1$ ,  $\psi(\xi) = 0$  for  $|\xi| \geq 2$  とするよう  
 に取ると,  $g(x, \xi)\psi(\xi) \in S^{-\infty}$ . 従って補題 2.1 より  
 $g(x, D_x)\psi(D_x)$  に対しては, 勿論 (2.4) が  
 成立する.  $g(x, \xi)(1-\psi(\xi)) \in S_{\pm, \delta}^0$  かつ  $= 0$   
 for  $|\xi| \leq 1$  なる  $\Rightarrow$   $g(x, \xi) = g(x, \xi)\psi(\xi)$   
 $+ g(x, \xi)(1-\psi(\xi))$  と書けることから, 一般性  
 を失うことなく

$$(2.5) \quad g(x, \xi) = 0 \quad \text{for } |\xi| \leq 1$$

なる  $g(x, \xi) \in S_{\pm, \delta}^0$  について, (2.4) をいえる.  
 I) Hörmander [1], p. 121, で構成された  $C_0^\infty$ -  
 函数  $\varphi(\xi)$ :

$$(2.6) \quad \text{supp } \varphi \subset \{\xi; 2^{-1} < |\xi| < 2\}, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad (\xi \neq 0)$$

を取ると, (2.5) より

$$g(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} (g(x, \xi)\varphi(2^{-j}\xi)).$$

$$(2.7) \quad f_j(x, z) = \int e^{ix \cdot \xi} g(x, \xi) \varphi(2^{-j}\xi) d\xi, \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

とあくと,  $x^\alpha e^{ix \cdot \xi} = (-i\partial_\xi)^\alpha e^{ix \cdot \xi}$  と書いて部分積分すると,

$$\begin{aligned} & (2^j x)^\alpha f_j(x+x^0, x) \\ &= 2^{j|\alpha|} \sum_{\alpha' \leq \alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \int e^{ix \cdot \xi} ((i\partial_\xi)^{\alpha'} g(x+x^0, \xi) \cdot |\xi|^{|\alpha'|}) \\ & \quad \cdot ((i\partial_\xi)^{\alpha-\alpha'} \varphi(2^{-j}\xi) \cdot |\xi|^{-|\alpha'|}) d\xi. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  で (2.5) に注意すると

$$g_{\alpha'}(x, \xi) = (i\partial_\xi)^{\alpha'} g(x, \xi) \cdot |\xi|^{|\alpha'|} \in S_{\pm, \delta}^0.$$

従って  $s=m=0$  に對する (1.5) と Plancherel の定理より

$$\begin{aligned} \|(2^j x)^\alpha f_j(x+x^0, x)\|_{L^2}^2 &\leq C_\alpha 2^{2j|\alpha|} \sum_{\alpha' \leq \alpha} \|(i\partial_\xi)^{\alpha-\alpha'} \varphi(2^{-j}\xi) \cdot |\xi|^{-|\alpha'|}\|_{L^2}^{-|\alpha|} \\ &\leq C'_\alpha 2^{n_j}, \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  で 定数  $C_\alpha, C'_\alpha$  は  $x^0$  に depend しない.

$\kappa \in \mathbb{Z}$   $> n/2$  なる整数とすると,

$$\begin{aligned} (2.8) \quad & \int |f_j(x+x^0, x)| dx \\ & \leq \left( \int (1+2^{2j}|x|^2)^{-\kappa} dx \right)^{1/2} \left( \int (1+2^{2j}|x|^2)^\kappa |f_j(x+x^0, x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq C_1, \end{aligned}$$

特に  $t > 0$  に對しては

$$\int_{|x| \geq t} (1+2^{2j}|x|^2)^{-\kappa} dx \geq 2^{-2j\kappa} \int_{|x| \geq t} |x|^{-2\kappa} dx = C'_1 2^{-2j\kappa} t^{-\kappa+n},$$

従って

$$(2.9) \int_{|x| \geq t} |f_j(x+x^0, x)| dx \leq C_2 (2^j t)^{\frac{n}{2}-\kappa}$$

を得る。これより

$$(2.10) \int_{|x| \geq 2t} |f_j(x+x^0, x-x') - f_j(x+x^0, x)| dx \leq 2C_2 (2^j t)^{\frac{n}{2}-\kappa} \quad (|x'| \leq t).$$

次に  $|x'| \leq t$ ,  $2^j t \leq 1$  とする。と、

$$|e^{-ix' \cdot \xi} - 1| \leq |x'| |\xi| \leq 2t 2^j \quad \text{on } \text{supp } \mathcal{F}(2^{-j} \xi),$$

$$|\partial_\xi^{\alpha'} (e^{-ix' \cdot \xi} - 1)| = |\partial_\xi^{\alpha'} e^{-ix' \cdot \xi}| \leq |x'|^{|\alpha'|} \leq t^{|\alpha'|}$$

$$= t \cdot t^{|\alpha'|-1} \leq t 2^j 2^{-j|\alpha'|} \quad \text{for } \alpha' \neq 0,$$

従って (2.8) に  $\alpha \leq \alpha'$ ,  $f_j(x+x^0, x)$  の代りに

$$(f_j(x+x^0, x-x') - f_j(x+x^0, x))$$

$$(2.11) \int |f_j(x+x^0, x-x') - f_j(x+x^0, x)| dx \leq C_3 2^j t \quad (|x'| \leq t, 2^j t \leq 1)$$

を得る。

$$F_N(x, x) = \sum_{j=0}^N f_j(x, x) \quad \text{と おく。と、 (2.10) と}$$

(2.11) より

$$(2.12) \int_{|x| \geq 2t} |F_N(x+x^0, x-x') - F_N(x+x^0, x)| dx \leq C_4 \sum_{j=0}^{\infty} \min\{(2^j t)^{\frac{n}{2}-\kappa}, 2^j t\} \leq C_4' \quad (|x'| \leq t)$$

を得る。

II)  $u \in L^1$  で その台がコンパクトとする。

$$g_N(x, \xi) = \sum_{j=0}^N (g(x, \xi) \varphi(2^{-j} \xi)) \quad (\in S^{-\infty} \subset S_{1, \delta}^0)$$

とあけは、 $F_N(x, z)$  の定義より

$$(2.13) \quad g_N(x, D_x) u(x) = \int F_N(x, x-x') u(x') dx'$$

と書ける。

今注意の  $s > 0$  に対し, Calderón-Zygmund の分解 ([1], p. 115):

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = v + \sum_{k=1}^{\infty} w_k, \quad \text{supp } v, \text{ supp } w_k \subset K \\ \|v\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|w_k\|_{L^1} \leq 3 \|u\|_{L^1}, \\ |v(x)| \leq 2^n s, \quad \text{a.e.}, \\ \text{ある disjoint な cubes } I_k \text{ に対して} \\ \int_{I_k} w_k dx = 0, \quad w_k(x) = 0 \text{ if } x \notin I_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \leq s^{-1} \|u\|_{L^1} \end{array} \right.$$

を行なう,  $\Rightarrow$   $K$  は  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト集合,  $m(I_k)$  は  $I_k$  の (Lebesgue) 測度を表わす。

このとき

$$\hat{u}(\xi) = \hat{v}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{w}_k(\xi), \quad |\hat{v}(\xi)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{w}_k(\xi)| \leq 3 \|u\|_{L^1}$$

となり, 従って

$$(2.15) \quad g_N(x, D_x) u(x) = g_N(x, D_x) v(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_N(x, D_x) w_k(x)$$

と書ける。  $x^{(k)}$  を各  $I_k$  の中点とし,  $I_k^*$  を

$$I_k^* = \{x; x - x^{(k)} = 2\sqrt{m}(x' - x^{(k)}), x' \in I_k\}$$

とあると, ある  $t_k > 0$  に対し,

$$(2.16) \begin{cases} I_k \subset \{x; |x - x^{(k)}| \leq t_k\}, \\ I_k^c \subset \{x; |x - x^{(k)}| \geq 2t_k\} \end{cases}$$

となり

$$(2.17) \quad m(I_k^*) / m(I_k) = \gamma (= (2\sqrt{n})^n).$$

さて,  $\int_{I_k} w_k dx = 0$  に注意すると, (2.13) より

$$g_N(x, D_x) w_k(x) = \int_{I_k} (F_N(x, x-x') - F_N(x, x-x^{(k)})) w_k(x') dx'$$

と書ける.  $\therefore$   $x - x^{(k)} = y, x' - x^{(k)} = y'$  と

おくと, (2.12) と (2.16) より

$$(2.18) \quad \int_{I_k^c} |g_N(x, D_x) w_k(x)| dx \leq \int_{|y| \geq 2t_k} |g_N(x, D_x) w_k(y+x^{(k)})| dy \\ \leq \int_{|y| \geq 2t_k} \int_{|y'| \leq t_k} |F_N(y+x^{(k)}, y-y') - F_N(y+x^{(k)}, y)|$$

$$\cdot |w_k(y'+x^{(k)})| dy' dy \leq C'_4 \|w_k\|_{L^1}.$$

今  $O^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^*$  とおくと, (2.14) と (2.17) より

$$(2.19) \quad m(O^*) \leq \gamma s^{-1} \|u\|_{L^1}.$$

また,  $w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$  とおくと (2.18) より

$$(2.20) \quad \int_{O^*c} |g_N(x, D_x) w(x)| dx \leq 3 C'_4 \|u\|_{L^1}.$$

一方  $v$  は台がコンパクトかつ有界関数で

あることより  $v \in L^2$ . このとき (1.5) と (2.14)

$$\begin{aligned} \text{より} \\ (2.21) \quad \|g_N(x, D_x)v\|_{L^2}^2 &\leq C_5 \left\| \left( \sum_{j=0}^N g(2^{-j}\xi) \right) \widehat{v}(\xi) \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_5 2^n s \int |v| dx \leq 3 \cdot 2^n C_5 s \|u\|_{L^1}, \end{aligned}$$

$\Rightarrow$   $C_5$  は  $N = \text{depend } i$  なる定数.

III)  $m\{x; |g_N(x, D_x)u(x)| > s\}$  を考える.

(2.20) より

$$(2.22) \quad \frac{s}{2} m\{x \in O^c; |g_N(x, D_x)w(x)| > \frac{s}{2}\} \leq 3 C_4 \|u\|_{L^1},$$

また (2.21) より

$$(2.23) \quad \left(\frac{s}{2}\right)^2 m\{x; |g_N(x, D_x)v(x)| > \frac{s}{2}\} \leq 3 \cdot 2^n C_5 s \|u\|_{L^1}.$$

もし  $|g_N(x, D_x)u(x)| > s$  ならば  $|g_N(x, D_x)w(x)| > s/2$

か  $|g_N(x, D_x)v(x)| > s/2$  とあることに注意す

れば, (2.19), (2.22), (2.23) より

$$(2.24) \quad m\{x; |g_N(x, D_x)u(x)| > s\} \leq C_6 s^{-1} \|u\|_{L^1},$$

$\Rightarrow$   $C_6$  は  $N = \text{depend } i$  なる定数.

一方 (1.5) より

$$(2.25) \quad \|g_N(x, D_x)u\|_{L^2} \leq C_7 \left\| \left( \sum_{j=0}^N g(2^{-j}\xi) \right) \widehat{u}(\xi) \right\|_{L^2} \leq C_7 \|u\|_{L^2}.$$

従って Marcinkiewicz の補間定理より,  $N =$

$\text{depend } i$  なる定数  $C_p, 1 < p < 2$ , が存在して

$$\|g_N(x, D_x)u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p}, \quad u \in L^p.$$

$u \in \mathcal{S}$  とするに,  $\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x, D_x)u(x) = g(x, D_x)u(x)$  より (2.4) を得る.

§3.  $H^{s,p}$ -理論. 先ず一般化された Poincaré の不等式を証明する.

定理 3.1. 実数  $s > 0$  と  $1 < p < \infty$  に対して, 定数  $C_{s,p}$  が存在して

$$(3.1) \quad \|u\|_{s,p} \leq C_{s,p} d^s \|u\|_{0,p}, \quad u \in C_0^\infty(|x| < d), d > 0.$$

(証明)  $d \geq 1$  のときは補題 1.2 の系 2° より明らか. 故に  $0 < d < 1$  とする.

$C_0^\infty$ -函数  $\psi(\xi)$ :

(3.2)  $\psi(\xi) = 1$  for  $|\xi| \leq 1$ ,  $= 0$  for  $|\xi| \geq 2$  を取り,  $\psi_{\varepsilon,d}(\xi) = \psi(\varepsilon^{-1}d\xi)$ ,  $\varepsilon > 0$ , とおく.

明らか  $\psi_{\varepsilon,d}(\xi) \in S^{-\infty}$ ,  $(1 - \psi_{\varepsilon,d}(\xi)) \in S_{+,0}^0$ , かつ

$$(3.3) \quad u(x) = \psi_{\varepsilon,d}(D_x)u(x) + (1 - \psi_{\varepsilon,d}(D_x))u(x).$$

このとき

$$\begin{aligned} |\psi_{\varepsilon,d}(D_x)u(x)|^p &= \left| \int_{|x'| < d} \widehat{\psi}_{\varepsilon,d}(x'-x) u(x') dx' \right|^p \\ &\leq \left( \int_{|x'| < d} |\widehat{\psi}_{\varepsilon,d}(x'-x)| dx' \right)^{p/p'} \left( \int_{|x'| < d} |\widehat{\psi}_{\varepsilon,d}(x'-x)| |u(x')|^p dx' \right) \\ &\quad (p^{-1} + p'^{-1} = 1). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau; \quad |\widehat{\psi}_{\varepsilon,d}(z)| = (\varepsilon d^{-1})^n |\widehat{\psi}(\varepsilon d^{-1}z)| \leq (\varepsilon d^{-1})^n C,$$

$$\|\widehat{\psi}_{\varepsilon,d}\|_{\perp} = \|\widehat{\psi}\|_{\perp} < \infty$$

なることは注意すれば

$$\|\psi_{\varepsilon,d}(D_x)u\|_{0,p} \leq C_p' \varepsilon^{np'} \|u\|_{0,p}.$$

従って  $C' \varepsilon_0^{n/p'} \leq 2^{-1}$  なる  $\varepsilon_0 > 0$  を固定して

$$(3.4) \quad \|\psi_{\varepsilon_0, d}(D_x)u\|_{0,p} \leq \frac{1}{2} \|u\|_{0,p}$$

を得る. 以下に  $\varepsilon_0$  に対して

$$g_d(\xi) = d^{-s} \langle \xi \rangle^{-s} (1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(\xi))$$

を考える.

$$\begin{aligned} \partial_{\xi}^{\alpha} g_d(\xi) &= d^{-s} \partial_{\xi}^{\alpha} \langle \xi \rangle^{-s} \cdot (1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(\xi)) \\ &\quad + d^{-s} \sum_{\substack{(\alpha') \\ 0 \neq \alpha' \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\alpha'} d^{\alpha - \alpha'} \langle \xi \rangle^{-s} \cdot \partial_{\xi}^{\alpha'} (-\psi_{\varepsilon_0, d}(\xi)) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{cases} \varepsilon_0^{-1} d |\xi| \geq 1 & \text{on } \text{supp}(1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(\xi)), \\ 2 \geq \varepsilon_0^{-1} d |\xi| \geq 1 & \text{on } \text{supp}(\partial_{\xi}^{\alpha'} (-\psi_{\varepsilon_0, d}(\xi))) \\ & (\alpha' \neq 0), \\ |\partial_{\xi}^{\alpha'} (-\psi_{\varepsilon_0, d}(\xi))| \leq C_{\alpha'} (\varepsilon_0^{-1} d)^{|\alpha'|} \end{cases}$$

に注意すると,  $g_d(\xi)$  を  $S_{1,0}^0$  の元と考えて

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} g_d(\xi)| \leq C_{\alpha} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \quad \text{を得る, 従って } C_{\alpha} \text{ は}$$

$0 < d < 1$  に depend しない定数. 従って補題 1.2 の系 1° より

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \|(1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(D_x))u\|_{0,p} &= d^s \|g_d(D_x) \langle D_x \rangle^s u\|_{0,p} \\ &\leq C_{p, \varepsilon_0} \|u\|_{s,p} \end{aligned}$$

を得る. (3.3) - (3.5) より (3.1) を得る.

定理 3.2.  $g(x, \xi) \in S_{1, \delta}^m$  とすると, 任意の実数  $s$  と  $1 < p < \infty$  に対して, 定数

$C_{s,p}$  が存在して

$$(3.6) \quad \|g(x, D_x)u\|_{s,p} \leq C_{s,p} \|u\|_{s+m,p}, \quad u \in H^{s+m,p},$$

が成り立つ。

系.  $g_0(x, \xi) \in S_{\pm, \delta}^{\circ}$  とするに、任意の  $1 < p \leq q < \infty$  に対し、 $s_0 = n(1/p - 1/q)$  とおくと、定数  $C_{p,q}$  に対して

$$(3.7) \quad \|g_0(x, D_x)u\|_{-s_0, q} \leq C_{p,q} \|u\|_{0,p}, \quad u \in H^{0,p},$$

が成り立つ。

注. これは Hörmander の問題頁 ([2], p. 163) が  $\rho = 1$  の場合には肯定的であることを示す (系の証明).  $\psi(\xi)$  を条件 (3.2) を満たす  $C_0^\infty$  函数として、

$$\begin{aligned} \|g_0(x, D_x)u\|_{-s_0, q} &= \|\langle D_x \rangle^{-s_0} g_0(x, D_x)u\|_{0, q} \\ &\leq \|\psi(D_x) \langle D_x \rangle^{-s_0} g_0(x, D_x)u\|_{0, q} + \|\langle D_x \rangle^{-s_0} (1 - \psi(D_x)) \langle D_x \rangle^{s_0} \\ &\quad \cdot g_0(x, D_x)u\|_{0, q} \equiv I_1 + I_2 \end{aligned}$$

を得る,  $\Rightarrow$  で  $|D_x|$  は  $\widehat{|D_x|u}(\xi) = |\xi|\widehat{u}(\xi)$  で定義される.

$\psi(\xi)\langle \xi \rangle^{-s_0} \in S^{-\infty}$  であるから 補題 1.3 の

i) より  $g_\infty(x, \xi) \in S^{-\infty}$  が存在して、

$$g_\infty(x, D_x) = \psi(D_x) \langle D_x \rangle^{-s_0} g_0(x, D_x).$$

補題 2.1 によつて、 $g_\infty(x, \xi)$  に対応する

核を  $K_\infty(x, z)$  とおけば、

(3.8)  $I_1 = \|g_\infty(x, D_x)u\|_{0, q} \leq C_T \|u\|_{0, p}$ ,  
 $\Rightarrow$  て,  $C_T$  は  $\Gamma^{-1} = 1 + q^{-1} - p^{-1}$  なる  $\Gamma$   
 に 対し

$\text{Max} \left\{ \sup_x \int |K_\infty(x, z)|^r dx, \sup_x \int |K_\infty(x, x-y)|^r dx \right\} \leq C_T^r$   
 $\varepsilon$  対し 定数. 一対  $|\xi|^{s_0} (1 - \psi(\xi)) \langle \xi \rangle^{-s_0} \in S_{\perp, 0}^0 \subset S_{\perp, \delta}^0$   
 であるから再び補題 1.3 の i) より  $g_1(x, \xi) \in$   
 $S_{\perp, \delta}^0$  が存在して

$$g_1(x, D_x) = |D_x|^{s_0} (1 - \psi(D_x)) \langle D_x \rangle^{-s_0} g_0(x, D_x).$$

$\Rightarrow$  て Hardy - Littlewood - Sobolev の Potential  
 評価式 ([7], p. 99 & 348 参照) と定理 3.2  
 $\varepsilon$  用いて

$$(3.9) \quad I_2 = \| |D_x|^{-s_0} g_1(x, D_x) u \|_{0, q} \\
\leq C'_{p, q} \|g_1(x, D_x) u\|_{0, p} \leq C''_{p, q} \|u\|_{0, p}$$

を得, (3.8), (3.9) より (3.7) を得る.

(定理 3.2 の証明). I)  $1 < p < 2$  のとき.

$\|g(x, D_x)u\|_{s, p} = \| \langle D_x \rangle^s g(x, D_x) \langle D_x \rangle^{-(s+m)} (\langle D_x \rangle^{s+m} u) \|_{0, p}$ .  
 $\langle \xi \rangle^s \in S_{\perp, 0}^s \subset S_{\perp, \delta}^s$ ,  $\rho(x, \xi) \langle \xi \rangle^{-(s+m)} \in S_{\perp, \delta}^{-s}$  対し,  
 補題 1.3 の i) が適用出来て, ある  $g_0(x, \xi)$   
 $\in S_{\perp, \delta}^0$  に 対し

$$g_0(x, D_x) = \langle D_x \rangle^s g(x, D_x) \langle D_x \rangle^{-(s+m)}.$$

従って定理 2.1 より (3.6) を得る.

II)  $2 < p < \infty$  のとき.  $p^{-1} + p'^{-1} = 1$  なる  $p'$  をとると,  $1 < p' < 2$ . 補題 3.1 の ii) より

$g^*(x, \varepsilon) \in S_{1, \delta}^m$  が存在して,

$$(g(x, D_x)u, v) = (u, g^*(x, D_x)v), \quad u, v \in \mathcal{S}.$$

$p^*(x, D_x) \quad 1 < p' < 2$  に対する (3.6) を用いて

$$\begin{aligned} |(g(x, D_x)u, v)| &\leq \|u\|_{s+m, p} \|g^*(x, D_x)v\|_{-(s+m), p'} \\ &\leq \|u\|_{s+m, p} C_{s, p'} \|v\|_{-s, p'}. \end{aligned}$$

このことは,  $\|g(x, D_x)u\|_{s, p} \leq C_{s, p'} \|u\|_{s+m, p}$  を意味する.  $\mathcal{S}$  は  $H^{s+m, p}$  で dense であるから  $2 < p < \infty$  によって (3.6) を得る.

定理 3.3.  $g(x, \varepsilon) \in S_{1, \delta}^m$  に對し, 正の定数  $C_0$  によって,  $\langle \varepsilon \rangle^m \leq C_0 |g(x, \varepsilon)|$  が成り立つとすると, 定数  $C_{s, p}, C'_{s, p}$  が存在して

$$(3.10) \quad \|u\|_{s+m, p} \leq C_{s, p} \|g(x, D_x)u\|_{s, p} + C'_{s, p} \|u\|_{s+m-(1-\delta), p}$$

が成り立つ.

註. (1.6) を用いて,  $\lim_{p \rightarrow 2} C_{s, p} = C_0$  となるよう定数  $C_{s, p}$  を取ることも出来る ([5] 参照).

(証明).  $g_{-1}(x, \varepsilon) = g(x, \varepsilon)^{-1} (\in S_{1, \delta}^{-m})$  とおいて,

$$\begin{aligned} \|u\|_{s+m,p} &\leq \|(\mathcal{G}_{-1}(x, D_x) \langle D_x \rangle^{s+m}) \mathcal{G}(x, D_x) u\|_{0,p} \\ &+ \|\mathcal{G}_{-1}(x, D_x) \{ \mathcal{G}(x, D_x) \langle D_x \rangle^{s+m} - \langle D_x \rangle^{s+m} \mathcal{G}(x, D_x) \} u\|_{0,p} \\ &+ \|\{(1 - \mathcal{G}_{-1}(x, D_x) \mathcal{G}(x, D_x)) \langle D_x \rangle^{s+m}\} u\|_{0,p}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  で 第 1 項 には 定理 3.2 を 適用し,  
 第 2, 第 3 項 には 補題 1.3 の i) の 展開  
 定理 を  $N=1$  で 用いて 次数 を  $(1-\delta)$  下げ,  
 その後で 定理 3.2 を 適用して (3.10) を 得る.

定理 3.4.  $\alpha(y) : \mathbb{R}_y^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$  を 条件 (1.7) を  
 みたす 変換 とする. このとき  $g(x, \xi) \in S_{1,0}^{-s}$ ,  
 $h(y, \eta) \in S_{1,0}^{-s}$  が 存在して,

$$\begin{aligned} (3.11) \quad &\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u = \langle D_x \rangle^{-s} u_0 \text{ for } u_0 \in L_x^p \\ \Rightarrow w = h(y, D_y) w_0 \text{ for } w_0(y) = u_0(\alpha(y)), \\ \text{ii) } w = \langle D_y \rangle^{-s} w_0 \text{ for } w_0 \in L_y^p \\ \Rightarrow u = \mathcal{G}(x, D_x) u_0 \text{ for } u_0(x) = w_0(y(x)), \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  で,  $w(y) = u(\alpha(y))$ . 従って 空間  $H^{s,p}$  は  
 $u \in H^{s,p} \iff w \in H^{s,p}$  の意味で 座標変換  
 に関して 不変である.

証明は 補題 1.5 より 明らか. Lions-Magenes [6]  
 では より一般な形で 述べられているが,  $\Rightarrow$  で  
 は  $P_s D_0^p$  で 対応関係を 具体的に示している.

## References

- [1] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in  $L^p$  spaces, Acta Math., 104 (1960), 93-140.
- [2] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Proc. Symposium on Singular Integrals, Amer. Math. Soc., 10 (1968), 138-183.
- [3] V. M. Kagan, Boundedness of pseudodifferential operators in  $L_p$ , Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika, no.6 (73)(1968), 35-44 (in Russian).
- [4] H. Kumano-go, Algebras of pseudo-differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 17 (1970), to appear.
- [5] H. Kumano-go and M. Nagase,  $L^p$ -theory of pseudo-differential operators, Proc. Japan Acad., 46 (1970), to appear.
- [6] J. L. Lions and E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei (III), Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Ser. 3, 15 (1961), 41-103.
- [7] S. Mizohata, Theory of partial differential equations, Iwanami, Tokyo (1965) (in Japanese).
- [8] A. Zygmund, Trigonometrical series II, Cambridge (1959).