キリスト教と近代的知　「近代／ポスト近代とキリスト教」研究会
2010 年 3 月　21～26 頁

特集

希望の神学と位相幾何

落合　仁司

１　神の受苦とアレクサンドロフのコンパクト化

数理神学という組織神学の一つの方法がある。聖書に根拠を持つ神学的な命題を、数学分けても位相空間論や位相幾何学の言葉に翻訳し、その妥当性を弁明する試みである。

たとえば聖書は、神が十字架に付けられ苦しみを受けることによって人間は救われるという命題を主張していると解釈することができる。神の受苦による人間の救済である。

人間は自らの苦しみを他者もまた共に苦しむ時、苦しむことそれ自体に何の変化もないとしても、苦しみからの何らかの救いを得るのではないか。ある者の苦しみを他者もまた共に苦しむ、これこそその者に対する他者の愛に他ならない。すなわち人間は自らの苦しみを共に苦しむ他者の愛によって救いを得るのではないか。神が人間の苦しみを共に受けることの一つの理解の仕方がここにある。

しかし神は全能すなわち無限の力を有する者ではなかったか。無限の力を有する者が苦しみを受けることなどありうるか。何故なら苦しみとは、何らかの力の限界、たとえば身体の限界としての病気、富の限界としての貧困、社会的影響力の限界としての無視などによってもたらされる。したがって無限の力を有する神は力の限界によって苦しむ筈もない。神は受苦不能である。これが古代ギリシャ哲学を方法とする中世カトリック神学の結論であった。

神は苦しむことができない。したがって神は人間の苦しみを共に苦しむこともできない。それゆえ神は人間を愛することもできない。これではキリスト教は成り立たない。近代プロテスタント神学は、ここでギリシャ哲学を方法とすることを断念し、神は自ら苦しむことを選択すると考えた。神は自らの意志によって無限の力を放棄し力の限界に苦しむことを引き受けると考えたのである。

なるほど無限の力を放棄した神は、私たち人間同様、力の限界に苦しむことはできる。神は人間となった。それでは無限の力を有する者は何処にいるのか。無限の力を有する者が何処かにいなければ、不断に連続している筈の世界の創造は維持されない。神が人間となって苦しみを受けている間、無限の力を有する者は不在なのか。それでは十字架に付けられて苦しみを受けた神は、どうして復活できるのか。キリスト教は結局この問いに問われざるをえない。無限の力を有する神が、どのように力の限界に苦しむ人間でありうるか。

神が自らの意志によって無限の力を放棄したと考えるだけでは矛盾は解決しない。それでは力の限界に苦しむ人間がもう一人増えただけである。神は無限の力を有すると同時に

力の限界に苦しむことが可能であらねばならない。神は神でありながら同時に人間の苦しみを受けられねばならないのである。この要請は神の力は無限であると同時に有限であると言っているように聞こえる。これは無限であるものが有限であると言う端的な論理矛盾に見える。

そこで数理神学である。神を位相空間に喩えてみよう。位相空間とは、無限であるものが同時に限界を有することが矛盾でない空間である。たとえば私たちの左右前後上下に広がる３次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$を考えてみよう。３次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$は、実数$\mathbf{R}$が無限に大きくなるように、無限に広がっている。すなわち$\mathbf{R}^3$は無限である。これはしばしば錯覚されることだが、私たちの生きているこの宇宙空間は３次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$ではない。何故ならこの宇宙空間は無限に広がってはいないと考えられ、何らかの限界を有すると考えられる。したがって$\mathbf{R}^3$は現実の空間ではありえない。私たちは$\mathbf{R}^3$によって現実には存在しない無限の空間を考えているのである。

神は無限である。したがって神のモデルとしてユークリッド空間を考えることに問題はない筈である。しかしおそらくかなり抵抗感をもたれる方もおられよう。しばらくの猶予を頂きたい。あるもののモデルの成否はそれを考察することによって得られる結論がそのものをよりよく理解しうるか否かにかかっている。神のモデルの場合も例外ではない。神を位相空間に喩える、神のモデルとしてユークリッド空間から出発することの成否は結論を見てから判断しても遅くない。

さて３次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$は無限である。ところがこの$\mathbf{R}^3$にその外部の一点を加えると、無限の$\mathbf{R}^3$をその内部に含む限界を有する空間を作ることができる。この操作をアレクサンドロフのコンパクト化あるいは一点コンパクト化と呼び、付け加える外部の一点を無限遠点と呼ぶ。無限の$\mathbf{R}^3$をその内部に含む限界を有する空間とは、３次元球面$\mathbf{S}^3$である。(球面という言葉は日常的には２次元球面$\mathbf{S}^2$を意味する。ちなみに１次元球面$\mathbf{S}^1$は円周である。３次元球面$\mathbf{S}^3$は日常的には想像しえない)。すなわち無限の空間$\mathbf{R}^3$は、外部の一点、無限遠点を付け加えるアレクサンドロフのコンパクト化により、限界を有するコンパクトな空間$\mathbf{S}^3$となるのである。

コンパクトという言葉は、基本的で重要な言葉なのであるが、そう簡単な言葉ではない。ある空間あるいは球面が無限個のブロックで埋め尽くされているあるいは覆い尽くされていると考えよう。このブロックの中の有限個のブロックによってもなおその空間あるいは球面が覆い尽くされる時、その空間あるいは球面はコンパクトであると言う。たとえば３次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$は無限の広さを有するのであるから、無限個のブロックで埋め尽くすことができるとしても、その中の有限個では埋め尽くすことのできない場合があり、コンパクトではない。これに対して３次元球面$\mathbf{S}^3$は、どこにも境界はないとしても、無限遠点と対応する点を内部に有するという意味において限界を有するので、無限個のブロックで覆い尽くすことができれば、その中の有限個でも覆い尽くすことができ、コンパクトである[1]。

ユークリッド空間のコンパクト化としての球面は、単に無限の空間を有限の球面に切り縮めたのではない点が本質的である。ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$の全ての点は、球面$\mathbf{S}^3$の点と一対一に対応する。すなわち無限の空間はコンパクトな球面に全て埋め込まれる。$\mathbf{S}^3$ の点で$\mathbf{R}^3$ の点に対応しないのは無限遠点に対応する一点のみである。(このことを３次元球面$\mathbf{S}^3$は３次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$に無限遠点を加えた空間と位相同型であるという)[2]。したがってユークリッド空間のコンパクト化としての球面は、無限であるものが同時に限界を有することのモデルとなるのである。

私たちの神は、無限であると同時に限界を有さねばならなかった。それでこそ私たちの神は神であると同時に私たちの苦しみを共に苦しみうるのであった。私たちの神のモデルとしてコンパクト化されたユークリッド空間すなわち球面を考えるならば、私たちの神に課せられた無限であると同時に限界を有するという一見矛盾した要請を充たす神の無矛盾なモデルが得られることになる。

ブルバキの「死亡通知」にあるように「神はユークリッド空間のアレクサンドロフ・コンパクト化である」[3]。言い換えれば神は球面という位相空間に喩えられる。ここまでが拙著『数理神学を学ぶ人のために』(世界思想社　２００９年)及び拙論「十字架の神学と一般位相」『宗教哲学研究』(第２７号　２０１０年)において筆者が到達した地点である。

２　神の到来とストーン・チェックのコンパクト化

聖書は、神の受苦による人間の救済と共に、神の来臨、神の到来による人間の救済をも主張してやまない。「主よ、来てください。」(一コリ 16.22)は、新約聖書全編に響き渡る通奏低音である。キリスト教は、神がこの世界に到来して人間を救済するという終末を待望する希望の宗教である。希望とは何ものかが到来することを待ち望むことの他ではない。

しかし果たして神は来るのか。死がそうであるように終末は当事者本人には経験し得ないがゆえに、無限に遅延し続けるのではないか。すでに聖書の中でさえ、遅延する終末への苛立ちが見え隠れする。無限に遅延する終末に限界は有るか。無限に持続する待望は神の到来によって成就するか。

無限の将来に限界は有るか。このいかにも矛盾に聞こえる問いは、前節で問うた無限の力に限界は有るかという問いと相同な問いである。すなわちこの問いは無限の将来はコンパクト化しうるかという問いに変換しうる。したがってこの問いに前節と同様、アレクサンドロフの一点コンパクト化をもって答えることもできよう。たとえば無限の将来のモデルとして１次元ユークリッド空間すなわち実数直線$\mathbf{R}^1$を考え、それに無限遠点を加えたコンパクト化空間として１次元球面すなわち円周$\mathbf{S}^1$を考えるのである。

これは無限の将来に終末が有るとすれば、無限の将来を含む時間は直線ではなく円環として表象されることを意味する。いわゆる俗流文明論において、キリスト教的西洋の時間は直線として表象され、汎神論的東洋の時間は円環として表象されるがゆえに、西洋文明は直線的に成長する環境破壊的文明であり、東洋文明は円環的に循環する環境共存的文明

であるなどという短絡的な比較が語られるが、このような比較がいかに無根拠であるかは一目瞭然であろう。キリスト教の終末論は直線的時間ではなくむしろ円環的時間をこそ帰結するのである。

それはさておき、終末の無限の遅延に限界が有るか否かは、１次元モデルだけでは充分に理解しえない。何故ならキリスト教の終末論は、神はイエス・キリストにおいて一度到来し、十字架に付けられ苦しみ死んで、復活し高挙した後、終末において再び到来すると考えるからである。すなわち神の到来は終末の一度だけでなく、イエス・キリストの時を含めて少なくとも二度起こるのである。

アレクサンドロフのコンパクト化は無限遠点一点によるコンパクト化であって、無限の空間が一挙にコンパクトな球面に埋め込まれる、一回限りの出来事である。しかしコンパクト化はアレクサンドロフのそれに限られるわけではない。アレクサンドロフのコンパクト化は実は「最小」のコンパクト化である。コンパクト化にはストーン・チェックのコンパクト化と呼ばれる「最大」のコンパクト化が存在する。

いま３次元実射影空間$\mathbf{RP}^3$を考えよう。３次元実射影空間$\mathbf{RP}^3$とは、４次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^4$から原点$\{0\}$を除いた空間$\mathbf{R}^4-\{0\}$の点$\mathbf{x}$とその実数λ倍である点$\lambda\mathbf{x}$を同値とする同値類によって、空間$\mathbf{R}^4-\{0\}$を類別した商空間である。言い換えれば３次元実射影空間$\mathbf{RP}^3$とは、空間$\mathbf{R}^4-\{0\}$の点$\mathbf{x}=(x_0, x_1, x_2, x_3)$の比$(x_0:x_1:x_2:x_3)$の空間である。(ちなみに$\lambda(x_0:x_1:x_2:x_3)=(\lambda x_0:\lambda x_1:\lambda x_2:\lambda x_3)=(x_0:x_1:x_2:x_3)$である)。この$\mathbf{RP}^3$は大変興味深い性質を持っている。

３次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$は前節で述べたように無限の空間である。この$\mathbf{R}^3$に２次元実射影空間$\mathbf{RP}^2$を加えた空間が３次元実射影空間$\mathbf{RP}^3$となり、しかもコンパクトとなる。すなわち３次元実射影空間$\mathbf{RP}^3$は３次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$のコンパクト化となるのである。このとき$\mathbf{R}^3$に加えられる２次元実射影空間言い換えれば実射影平面$\mathbf{RP}^2$を無限遠超平面と呼ぶ。無限遠超平面によるコンパクト化の場合、付け加えられるのは無限遠点一点ではなく、１次元低い実射影空間それ自体なのである。

３次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$の全ての点$\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$は３次元実射影空間$\mathbf{RP}^3$の点$(1:x_1:x_2:x_3)$に対応するので、無限の空間$\mathbf{R}^3$はコンパクトな空間$\mathbf{RP}^3$の中に埋め込まれる。また$\mathbf{RP}^3$の点の中で$\mathbf{R}^3$ の点に対応しない点は$(0:x_1:x_2:x_3)$となる。この$(0:x_1:x_2:x_3)$は３次元実射影空間$\mathbf{RP}^3$に埋め込まれた２次元実射影空間すなわち実射影平面$\mathbf{RP}^2$であり、$\mathbf{R}^3$から見ればその無限遠超平面である。したがって無限遠超平面によるコンパクト化とは、ユークリッド空間にその無限遠超平面を付け加えることによって無限の空間をコンパクトな空間に埋め込むコンパクト化であり、そのとき付け加えられる無限遠超平面が、コンパクト化された空間より１次元低い実射影空間であるコンパクト化なのである。この無限遠超平面によるコンパクト化こそストーン・チェックのコンパクト化の典型に他ならない[4]。

ここで注目したいことは、１次元低い実射影空間もまた１次元低いユークリッド空間をその無限遠超平面(２次元の場合は無限遠直線)を付け加えることによってコンパクト化し

た空間であるということである。すなわちｎ次元ユークリッド空間のコンパクト化としてのｎ次元実射影空間は、ｎ－１次元ユークリッド空間のコンパクト化としてのｎ－１次元実射影空間を前提として始めてコンパクト空間となるのである。

このことは、無限の将来に神が到来することすなわち無限の将来がコンパクト化されることが、過去の時空において神が到来したことすなわち過去の時空がコンパクト化されたことを根拠としているということの隠喩とみなしうる。この隠喩から見出されることは、イエス・キリストにおいて神が到来したことが確実ならば、将来に終末が有り神が到来することもまた確実であるということである。イエス・キリストにおいて神が到来したそのこと自体が、将来に終末が有り神が再び到来することの根拠となっているのである。いずれにせよ無限の将来に終末が有り神が到来することを、無限の将来という時空間のコンパクト化に喩えることが許されるならば、そのようなコンパクト化は次元を一つ遡った時空間のコンパクト化を根拠とするのである。

３　位相幾何神学

神の受苦は、無限のユークリッド空間に無限遠点を加えることによってコンパクト化した球面をモデルとし、神の到来は、無限の空間に無限遠超平面を加えることによってコンパクト化した射影空間をモデルとする。神が無限であり人間が有限である以上、神が人間に関わって来るためには、無限を無限であるがままにあたかも有限であるかのように限界付けるコンパクト化は避けて通れないのである。

神の受苦といい神の到来といい、無限の神が有限の人間に関わって来る事態に変わりはない。しかし受苦は人間の苦しみを他者である神が共に苦しむという意味において人格的、人称的な関わり方であり、到来は人間の将来が神の到来であるという意味において時間的、時称的な関わり方である。受苦と到来は無限のコンパクト化という点において相同であるとしても、そのコンパクト化の様相は人称的関係と時称的関係の差異に相応しい相違を示す。ユークリッド空間の無限をコンパクト化する様相の差異、それがアレクサンドロフのコンパクト化とストーン・チェックのコンパクト化の差異、すなわち球面と射影空間の差異に他ならない。

ユークリッド空間や球面や射影空間をその典型とする位相空間とは何か。そのコンパクト化とはいかなる事態か。コンパクト化された位相空間はどのように差異化され分類されるのか。位相空間を分類する適切な方法は何か。これらの問いに答える数学が位相幾何学、トポロジーと呼ばれる数学である。神学が無限の神の有限の人間に関わる関わり方を対象とする学問である限り、無限の空間とその限界付けであるコンパクト化、さらにはコンパクト化された無限の類型分けとその方法を対象とする位相幾何学を自らの方法とすることはむしろ当然であろう。数理神学は位相幾何神学であらざるをえない。

位相幾何学は、位相空間を分類する方法として２０世紀の前半にホモロジーと呼ばれる代数を開発した。ホモロジーとは、位相空間の圏から加群の圏への関手である[5](5)。たとえ

ば球面と射影空間の差異はそれらのホモロジーを見れば一目瞭然となる。したがってホモロジーは、無限の神と有限の人間との関係を分類する上で極めて有効な方法を与えうる。すなわち神学が対象とする神と人間との受苦や到来を含む多様な関係は、それらのホモロジーによって適切に類型分けされるのである。私たちは位相幾何神学というしばらくは枯渇しそうにない神学の大鉱脈を掘り当てた。

〈註〉

[1] コンパクト空間の定義については、矢野公一『距離空間と位相構造』(共立出版　１９９７)、１２３頁を参照。

[2] ユークリッド空間のアレクサンドロフ・コンパクト化としての球面については、矢野公一上喝、１５８－１６１頁を参照。

[3] Maurice Mashaal　BOURBAKI　Éditions Pour la Science, 2002. 高橋礼司訳『ブルバキ』(シュプリンガー・ジャパン　２００２)、１８５頁。

[4] ユークリッド空間のストーン・チェック・コンパクト化としての実射影空間については、矢野公一上喝、９８頁、１５６－１５７頁及び１６１－１６２頁を参照。

[5] 位相幾何学分けてもホモロジー論についての極めて見通しの良い説明は、佐藤肇『位相幾何』(岩波書店　２００６)。

おちあい・ひとし（同志社大学経済学部・教授）