場の量子論の数学的解析

江沢 洋

最初、坂東さんから頂いた題が「素粒子論の系譜」でした。そういう話は、とても皆さんの前でお話するようなことはできないと思いまして、題を変えさせて頂きました。

と言っても、与えられた時間の中で、数学の話をするというのは、大変な話でありますけれども、頂いたチャレンジであるということで、やってみますけれども、数学にはならないと思います。

[slide 1] 歴史の話をするわけですけれども、だいたい数学的な話が始まったという一つのきっかけは、1950 年代に Friedrichs、それから 1952 年には van Hove ですね。正準交換関係の表現に非同値なものがあるということを指摘したのですね。それが一つの大きな動機になっていると思うのですけれども、正準交換関係の非同値表現があるということですね。

1950 Friedrichs, 1952 van Hove:

正準交換関係の **非同値表現**

1. 場の理論の公理 (~ 1950)

(1) **相対論的量子力学**である

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$:状態はベクトル(射線) $\Phi \in \mathcal{H}$

非斉次ローレンツ変換: 連続ユニタリー規約表現 $U(a,\Lambda)$

$U(a,1) = \exp[iP^{\mu}a_{\mu}]$, P^{μ} : 4 元運動量

真空の存在（一意的） Ω : $U(a,\Lambda)\Omega = \Omega$

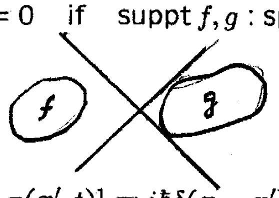
(2) **場の演算子** $\varphi(f)$, $f \in \mathcal{S}$

domain D: linear space, dense in $\mathcal{H}$, s.t.

$U(a,\Lambda)D \subset D$, $\varphi(f)D \subset D$, $\varphi(f)^{*}D \subset D$.

(3) **局所可換性**

$[\varphi(f), \varphi(g)] = 0$ if $\mathrm{suppt}\, f, g$: space-like.



注意 $[\varphi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{x}',t)] = i\hbar\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$
は sharp-time field の存在を仮定。

[Slide 1]

そういうことを受けて、アメリカ、それからヨーロッパ、日本ではあまりなかったですけれども、場の理論の公理論的なアプローチというものが始まったわけです。公理論と言いますけれども、これこれの公理があって、それから場の理論がすべて導かれるという意味の公理では、全然ないのです。場の理論としては、当然、こういう性質を持たなければいけないと思うという。思うといっても、人によって違うわけで、非局所なんて考えは、この公理論のなかにはないわけです。局所場の範囲で、こういう性質は当然持つべきだというものを、いくつか挙げてみて、それから一体何が出てくるか、そういうものが一般的な関心であったわけです。

どういう公理があったかと言いますと、一つは相対論的な量子力学であると言うことです。量子力学だというのは、Hilbert 空間というのがあって、そしてその上のオブザーバブルと言いますか、演算子があるということです。

それから相対性理論というのは、非斉次ローレンツ変換、ポアンカレ変換の連続ユニタリー既約表現の U というのがあって、これが時空の translation の generator ですけれども、そういうものを通して、4 元運動量の operator というものがあると。

それから真空が存在すると。そういうのを、一意的に存在して、そしてこの非斉次ローレンツ変換に関して invariant である、というわけです。

これはさっきちょっと言いましたけれども、場の演算子というのがあると。この $\varphi(f)$ と書いたのは、本来はローカルな field で、$\varphi(x)$ と、x の、時空の座標の関数なわけですけれども、個々の点を取りますと、それは operator にならないということが、いろいろな経験から分かっていまして、f

という、何回でも微分できて、それからゼロでないところが有限か、あるいは遠くで非常に早く減少するというような関数ができて、「ならす」というのですが、$\varphi(x)$ と $f(x)$ とをかけて、積分すると、formal にはそういうことですけれども、ならした operator というのを考えるということです。それの operator の domain があってという話があります。

局所可換性というものを仮定すると。f と g というのがありまして、f と g の support が、互いに space-like であるという具合には、$\varphi(f)$ という演算子と $\varphi(g)$ という演算子が交換するということですね。

伝統的な場の理論で言いますと、むしろ正準交換関係というのを仮定したいわけですけれども、そうしますとこれは、時間を等しくした演算子の交換関係ということが言えるわけです。そうしますと、これは sharp-time の、時間のちゃんと決まった場を考えなくちゃいけない。そういうものは、どうも operator になりそうもないということがありまして、場の理論の法理としては、局所可換性というのを仮定するということです。

ただ、後で構成的場の理論という話をいたしますが、公理系を満たすような場の example が実際にあるのかという問題も、起こってきたわけで、そういう問題をやるときは、ある意味で正準交換関係が、また入ってきますけれども。そういうことです。

Wightman 関数

$\mathcal{W}[f_1, \cdots, f_n] = \langle \Omega, \varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n)\Omega \rangle$

場の演算子の性質は、$\{W_n\}$ の性質に焼きなおされる。

場の公理：　Wightman 関数で言い表わされる。

再構成定理

しかるべき性質をもつ $\{W_n\}$ から、

ヒルベルト空間、場の演算子　が再構成できる。

場の理論をつくる戦略：

空間の cut-off (V)、運動量の cut-off (κ) をして自由度を有限にする。

交換関係の　非同値性　の問題はない。

Wightman 関数　$W_n^{V,\kappa}$ をつくる。

極限 $V \to \infty$, $\kappa \to \infty$ を調べる。

[Slide 2]

[slide 2] この場の理論の公理論をやるときに重要な役割を担うのが、真空期待値というもので、$\varphi(f)$ というのは field operator ですね。field operator の任意個の積の真空期待値というものが、W 汎関数になるわけですけれども、この汎関数の言葉に、先ほど要求した場の理論の公理というのを焼き直すことができるということです。詳しいことは言いません。

しかも、再構成定理というのがありまして、汎関数のことを Wightman 関数とか、Wightman 汎関数とか言うわけですけれども、Wightman 関数のセットを与えますと、それからその元になった Hilbert 空間と、それから場の演算子というのを、再構成することができると言う、再構成定理というのがあります。ですから、場の理論の性質を調べるのには、Wightman 汎関数の性質を調べればよろしいということになるわけです。

これは後で、構成的な場の理論の話をするときに使うのですけれども、そういう場の理論の example を作るときに、どうすれば良いかというと、まず空間の cut-off をすると、有限の空間に場を閉じ込めてしまうと。それから運動量の cut-off をすると。そういうようなことをして、場の自由度を有限にする。

有限にしますと、最初に言った正準交換関係の非同値表現という問題は、実はなくなりまして、von Neumann の定理というものによって、すべての表現は unitary equivalent であると。大雑把に言うと、そういうことになりますので、どんな表現を使って、cut-off をした理論の Wightman 関数というものを、作っても良いなと。そういうものをまず作りまして、そしてその上で、体積を無限大にしたり、運動量の cut-off を無限大にしたりする極限があるということを調べると。

Wightman 関数の持つべき性質を、大抵持つのですけれども、持つかどうかというのは、もちろん

確かめる必要があるということです。そういう場の理論をつくる戦略が一つあるということになりまして、ここに書いておきました。

[slide 3] 場の公理論から何が出るかという話も、本当はしないといけないのですけれども、例えばこういうことがありまして、場の演算子ですね、ならした場の演算子というのを真空にかけます。そしていろいろな個数を掛けるとか、いろいろいろな関数 f を持ってくるとか、そういうものを全体を取ってきますと、Hilbert 空間をはれると、こういうものは基本的な要請として加えるわけです。

2.　公理から導かれること：例

Reeh - Schlieder の定理

$\varphi(f_1)\varphi(f_2)\cdots\varphi(f_j)\Omega$ の全体は $\mathcal{H}$ を張る。ただし、$\mathcal{O}$ は与えられたものとして

f_k, j を動かす。 $\mathrm{suppt}\, f_k \subset \mathcal{O}$.

Haag の定理

$\varphi_1(x)$ ：質量 $m > 0$ の自由場．真空 Ω_1,

$\varphi_2(x)$ ：非斉次ローレンツ共変な局所場、真空 Ω_2

ある一時刻 t に、ユニタリー変換 V があって

$$V\varphi_1(f,t)V^{-1} = \varphi_2(f,t), \quad V\Omega_1 = \Omega_2$$

となれば、$\varphi_2(x)$ も自由場である。

- sharp-time field $\varphi(f,t)$ の存在を仮定。
- 相互作用表示、使えない。

[Slide 3]

Ruelle の散乱理論

公理の追加

○ P^μ のスペクトラム： 真空、1-粒子状態、連続スペクトル

○ 行列要素

$h(\lambda)$:

$\tilde{B}(p) = \tilde{A}(p)h\Big((p,p)\Big)$ に対して

$\langle\Omega, B(x)B(y)\Omega\rangle = \Delta_+(x-y;m)$

定義： $B_f(t) = i\int_{x^0=t} f(x)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}}B(x)d^3x$

$f(x)$: pos. freq. sol'n of Klein-Gordon eq.

このとき

$$\Phi(t) = B_{f_1}(t)B_{f_2}(t)\cdots B_{f_n}(t)\Omega$$
converges as $t \to \pm\infty$.

この極限で **自由場** が定まる．

[Slide 4]

実は、その公理論を使ってみますと、f の support、f がゼロでない空間の範囲というものを、勝手に小さくとっても、そういうものに固定して f を考えても、Hilbert 空間全体をはれるという、ある意味で大変意外な結果ですけれども、そういうものが公理論から導かれるわけです。

公理論から導かれることの例だけをお話するわけですけれども、Haag の定理というものがありまして、２つの field を考えると。$\varphi_1(x)$ というのは、質量がゼロでない、自由場を考える。真空も Ω_1 というのがあったとします。

もしもう１つ、$\varphi_2(x)$ というのがあって、真空を Ω_2、一応違っていても良いのですけれども、そういうものがありまして、それがある一時刻 t に、$\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$、ユニタリー変換があるということを仮定しますと、そういうものがありますと、Ω_2、一応違っていても良いのですけれども、そういうものがありまして、それがある一時刻 t に、$\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$、２番目のほうも、やっぱり自由場になってしまうという、Haag の定理というものが出てきてしまうわけです。この場合、t については、ならしていなくて、空間についてだけならしているという意味で、最初の一般的な公理から離れているわけです。

このことは、t を sharp にしたというところを除いては、本当なのですけれども、本当でありますと、いわゆる相互作用表示するのはだめだということになります。相互作用表示というのは、free field と、それから interactive field がユニタリー変換に結ばれるということですから。そうすると interactive と言いますけれども、実はそれは、free field になってしまうという implication があるわけですけれども。そういうことが出てきます。

[slide 4] それからもう１つ、Ruelle の散乱理論というものが、また一般的に出てくるわけですけれども、それを細かく話していると、時間がなさそうなので、大雑把にどういうことかと言います

と、Wightman 関数というものを与えると場の理論が決まるということがあるのですけれども、このWightman 関数で、例えばこれはいくつか、積になっていますけれども、あるところでこれをちょん切って、こっちのほうの時間といいますか、この f の support は、時間でマイナス無限大のほうに極限を取ると、残りのほうはプラス無限大のほうに極限を取るというふうにしますと、これで S-matrix が決まる訳ですね。決まるわけですけれども、そういう、時間のこっちをマイナス無限大にして、こっちをプラス無限大にするという極限があるかという問題は、当然、起こるわけで、いくつかの手続きが必要ですけれども、そういう極限があります、作れますということです。

ですから散乱理論がこの Wightman の枠組みの中で、確かに作ることができるというのが、先ほど言った Ruelle の散乱理論というものです。そういうものも、公理論から導かれるわけですね。

[slide 5] 今はほんの一例を述べたわけですけれども、もっといろいろな性質が導かれます。案外、公理というのはきつくて、いろいろな結論が出てくるのです。

3.　構成的な場の理論

演算子論的なアプローチ

統計力学的なアプローチ、Wick 回転、

O-S 公理系

$P(\phi)_2$ **模型**：　発散は真空のエネルギーのみ

Osterwalder-Schrader の公理系をみたすこと

真空状態：　局所的にはフォック的

エネルギー・スペクトル：　真空、1-粒子状態、

$2m$ との間にスペクトルなし

摂動論との関係：　グリーン関数、発散、漸近級数

ボレル総和可能、正しいグリーン関数を与える

$$\sum_n a_n := \int_0^\infty \left(\sum_n \frac{a_n}{n!}\sigma^n\right) e^{-\sigma} d\sigma$$

[Slide 5]

そういう動きがありまして、さっき、散乱理論ができると言いましたけれども、それは極限があるという話であって、それで作った S-matrix が本当に「1」と違うか、散乱が入っているかどうかということは全然言わないわけです。そういうものはありますということを言っているだけ。

それから、そもそも公理を満たすようなモデルが 1 つでもあるのかと、自由場は満たすわけですけれども、自由場ではつまらないわけで、相互作用があるようなモデルがあるのかという問題、これは公理系の話とは関係なくて、そういう問題があるわけです。

それをやろうという話が、1960 年ぐらいから始まりまして、1 つは演算子論的なアプローチということで、先ほど言いましたように、空間を cut-off して、運動量を cut-off して作って、その cut-off を無限大にする極限が取れるかと。極限が Wightman の性質を持っているかというアプローチがありまして、これを現実の 4 次元空間のモデルでやるのは、ちょっとなかなか手に負えないというわけで、最初になされたのは、空間 1 次元、時間 1 次元、しかも scalar field のモデルなのです。それは割と成功しまして、場の理論として望ましい性質がいろいろと証明されたわけですけれども、それをさらに高次元の空間にするというのは、なかなか難しいわけですけども。

そこで統計力学的なアプローチ、素粒子論の言葉で言うと、Wick rotation というものをやって、時間を imaginary にする訳ですね。そうしますと、Wightman 関数の計算というので、実は場の積の一種の統計力学的な平均を計算すると、しかもそれは、古典統計力学で良いのだということになりまして、理論が近づきやすくなったわけですね。それでいろいろな性質が導かれたわけです。

Wightman 関数というのは、場の理論の公理を、Wightman 関数の言葉で翻訳すると、こうなるということがあったわけですけれども、Wightman 関数の性質を、今度は Wick rotation して、imaginary time にするとどうなるかと、それは Osterwalder-Schrader の公理系というのがあります。

ですからWick rotationした後の場の理論というのでいきますと、Wightman関数に相当するものは、Schwinger関数といわれるものになるわけですけれども、Schwinger関数のシステムを作って、それが実際、Osterwalder-Schraderの公理系を満たすかどうかと、そういう問題になったわけです。

空間1次元、時間1次元というモデルは、もちろんそういうやり方でもできたということです。いろいろな性質が導かれたということです。しかも摂動論との関係というのがありまして、Schwinger関数というのをcoupling constant λに関して、展開したときにどうなるかというと、これは発散するということです。発散するのですけれども、しかしそれは漸近級数として意味があって、しかもBorel総和が可能であると。これは説明がいるかどうかは知らないのですけれども、Borel変換というものがあって、そうすると、級数が収束して、その収束した級数の和を取って、そのBorel変換をやると、もとの関数が出てくるわけです。だから、いわば発散級数に意味を持たせる一つの方法なのですけれども、そういうものをやりますと、それが正しいSchwinger関数を与えるということが証明されました。

[slide 6] さらにそれを3次元の空間に移すと。3次元の空間では、さっき言いましたOsterwalder-Schraderの公理系を満たすようなモデルが作れると。しかもそれはnon-trivialで、散乱現象があるということも、証明されています。それから、Borel変換が有限な収束半径を持つということも証明されています。

$(\phi^4)_3$ 模型：

O-S 公理系をみたす（回転不変性を別として）

non-trivial

Schwinger 関数、摂動級数は発散、

Borel 変換は有限な収束半径

$(\phi^4)_\nu$ 模型：

$\nu = 4 + \varepsilon$: **triviality** (1981).

$\nu = 4$: Schwinger 関数の摂動級数は Borel 総和可能 (1994).

[Slide 6]

ただ、言わなかったのですけれども、時間1次元、空間1次元という、いわば2次元のモデルでは発散はあるのですけれども、発散は真空のエネルギーだけの発散で、ハミルトニアンか何か引き算をしておけば有限になると。時空3次元のモデルでは、真空のエネルギーとmassが発散する。質量の繰り込みをしなきゃいけないという、発散するdiagramは1つしかないという簡単なモデルはできましたということです。

さらに高次元、現実の4次元にいったらどうなるかというところまで、来たわけですけれども、そうしますと、次元が$4+\varepsilon$であると、ε正です、そういうときは、これはtrivialな理論しかないと、trivialityの問題になっている。つまり散乱行列が「1」になってしまうということです。それはperturbationに依らず厳密に証明された。1981年。

$\nu = 4$のときにどうなるかということは、最近、実はあまり勉強していないので、もしかしたら証明されているかもしれないのですけれども、証明はないですね。

4のときは、分からないけれども、いろいろな状況証拠から考えると、どうもtrivialらしいということです。$\nu = 4$のときに、Schwinger関数の摂動級数というものは、Borel変換すると、有限な収束半径を持つという証明もあるのですね。

だから、ちょっと良く分からないのですけれども、可能性としては、場の理論というのは、大変微妙なobjectで、構成の仕方によってtrivialになったり何になったりするという可能性は、最初に言いました交換関係の非同値表現ということから考えると、否定はできないわけです。何かのある作り方があって、trivialでないというものがあるかも知れないのです。

trivialityという話が出てから、急に場の理論の論文の数が減ってしまったと思うのですけれども。Borel変換が意味を持つという話は。。。

4. 非相対論的な QED

輻射場と非相対論的な原子の相互作用

ハミルトニアンのスペクトル解析

在来の初等量子力学：

まず輻射はないとして原子の準位をきめる

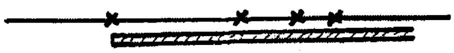
次に輻射との相互作用を入れて遷移確率を

計算（状態の時間発展）

Wigner-Weisskopf の摂動論

スペクトル解析に徹すれば、埋蔵固有値に対する摂動、不安定状態

$\mathcal{H}_{\mathrm{atom}} + \mathcal{H}_{\mathrm{rad}}$ のスペクトル



[Slide 7]

[slide 7] その後、どうなったかというわけですけれども、非相対論的な QED という話は、過去、復活しまして、これは radiation field は量子化するけれども、atom との相互作用を考えるのですけれども、atom は普通の Schrödeinger 方程式を使うということなのです。

何が問題かと言いますと、普通の初等量子力学でやりますと、輻射場をまず考えませんと。そして原子の量子力学というのをやると、こういう discrete spectrum が出てきます。あるところから連続するということになりますけれども、discrete spectrum になります。そこから今度は time-dependent な摂動だというので、radiation を入れて、トランジションパウリ値を計算するというやり方を進めているわけです。

Wigner-Weisskopf の摂動論というものがありまして、それは transition まで入れて、複素固有値の問題になるわけです。

この問題を摂動によらないでやろうとすると、どうなるかと言いますと、これはいわゆる埋蔵固有値がある場合の摂動論ということになるわけで、こういう atom のハミルトニアンだけで言いますと、discrete spectrum があった。だけどそこに radiation を入れると、continuous spectrum がかぶってくるわけですね。ですから励起状態というものが連続固有値のなかに埋まっていることになるわけで、そういう場合のハミルトニアンに、さらに相互作用を加えるときに、spectrum がどう変わるかと、これは簡単な話ではないのですね。そういう研究が今も続いていると言っても良いと思います。もちろん、その場合は、atom が非相対論的ですから、これだけでは充分ではないのですけれども、この問題がまだ未解決の問題が残っているということです。そういうふうな状況であります。

しかし、先ほど言ったように、最近、問題から離れてしまっていますので、もっと新しい発展が起こっていないとは言えないのですけれども、多分ないと思います。

討論

大貫：ありがとうございました。ご質問はございませんか。さっきの momentum や volume をカットして有限にして、正準交換関係を表現ユニークにしますね。カットをだんだん大きくしていったときに、真空はどこに落ち着くわけですか。

江沢：それは時空２次元の場合しか分かっていないのですよ。真空の実際の性質が。

大貫：６次元とか５次元、４次元空間はわからない。

江沢：分かりません。

大貫：つまり真空はいろいろとあるわけですよね。縮退して。

江沢：縮退しているということは分かります。相互作用の格好に依りますけれども。

大貫：coupling が決めるわけ。

江沢：φ^4 にしたら縮退しないのですけれども、$\varphi^4 - \varphi^2$ とか、そういうふうにすると、縮退があっ

て、かつ、broken symmetry になるということはあります。だけど真空の細かい性質は、というか、具体的なイメージはできない。

２次元時空の場合には、locally Fock というのですけれども、無限大にしてしまった時空全体で考えると Fock 表現ではないと。だけれども、コンパクトな、有限な空間部分だけで考えると、それは Fock 表現で済むということが分かっています。しかし、次元が高いときには分かっていないのです。

江口：大体、例えばフェルミオンが入った系というのは、取り扱うのは非常に難しいわけですか。

江沢：相互作用によるのですけれども、湯川相互作用の理論というのは、時空３次元までできています。

江口：符号のいやらしさとか、その辺はあまり関係がないのでしょうか。

江沢：符号というのは。

江口：フェルミオンの。つまり理論の解析で。その作用に。

江沢：それは大丈夫です。

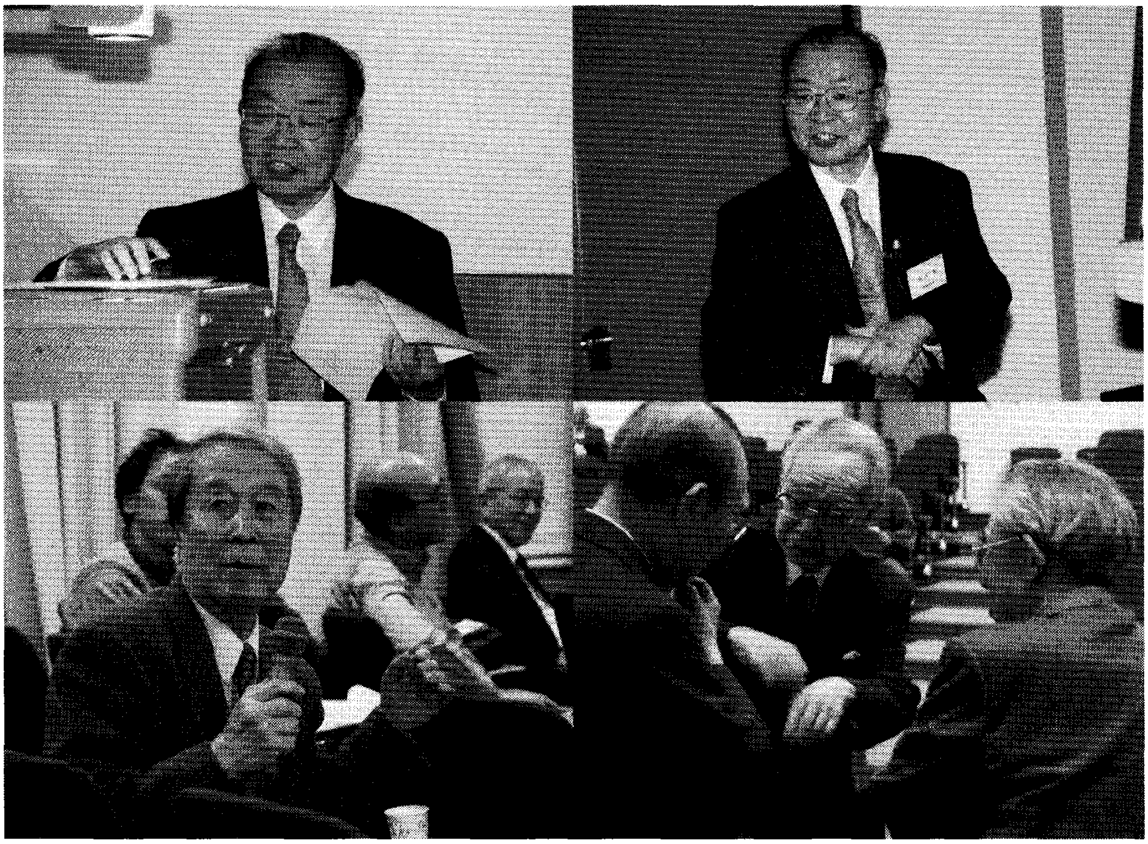
江口：例えば supersymmetric な例もあるのですけれども、どうでしょうか。

江沢：そちらはないですね。

大貫：よろしいですか。もう少し。

江口：良いと思います。

大貫：何かほかに、ご質問はあるでしょうか。それでは時間もオーバーしましたので、どうもありがとうございました。



ph12　　江沢, 南部, 巽, 大貫