

## ヒット現象の数理モデルの構築

a 鳥取大工、b デジタルハリウッド大、c テクノラティージャパン  
石井晃<sup>a</sup>、吉田就彦<sup>b</sup>、新垣久史<sup>b</sup>、山崎富美<sup>c</sup>

経済現象の中で特にエンタテインメント産業と呼ばれる分野を数理的に扱うモデルを構築して、『大ヒット曲』などが生まれるヒット現象[1]を数理的な側面から捉えてこれを実験検証することを目的とする。

まず、最も単純な場合から考えていく。ある商品が店頭で並んでいるとする。今考えている社会の人口がN人であるとして、それらの人で1日にその店に行く人の割合を  $R_{shop}$ 、さらに店に入った人の中でその商品を実際に購入する人の割合を店へ訪れるごとに  $R_p$  とし、一人が一つ商品を購入したとすると、1日に商品が売れる数は

$$R_p R_{shop} N \tag{1}$$

である。時間の単位が1日であるとすれば、 $\Delta t$ の時間で商品が売れる数  $\Delta I$ は

$$\Delta I = R_p R_{shop} N \Delta t \tag{2}$$

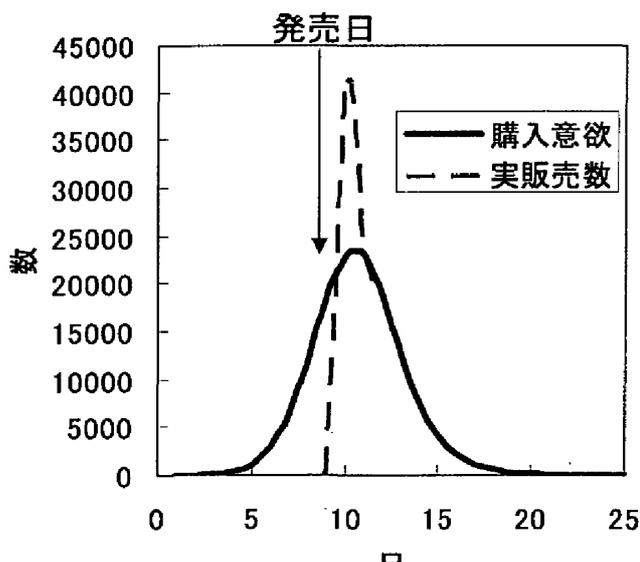


図1 購入意欲と実販売数

となる。直接購入された商品の数ではなく、“購入意欲”という量を考える。発売初日の販売数が発売日までの購入意欲の総和と考え、発売日以降は購入意欲がそのまま実販売数と仮定したのが図1であり、このように発売初日に販売数が集中する場合も購入意欲としては発売日以前から少しずつ盛り上がっていく連続量と考える。

インターネット経由の場合店に行く必要がない。着目するWebへのアクセス数は

以前にそこを見ていたアクセス数に比例すると考え、前日のアクセス数のC倍だけ翌日にアクセスがあると考えると

$$\Delta I_i(t) = C_i I_i(t) \Delta t \tag{3}$$

がインターネットアクセスでの基本的な購入意欲の増加項であろう。

消費者に商品の購入やWebへのアクセスを誘う場合、TV、雑誌、街頭などを利用した宣伝行為は、数理的に見ればいわば外場を加える働きをすることである。商品の販売であれば、ある宣伝で1日あたり確実にA個売れるとすると、その宣伝による時間 $\Delta t$ あたりの販売数は

$$\Delta I = A \Delta t \quad (4)$$

である。個人の視点であれば、この  $\Delta I$  は小数であり、これが累積して1になった時に購入すると考えれば同じモデルが適用できる。

商品の購入、あるいはWebアクセスの増加は、口コミや評価記事等さまざまな媒体でのポジティブな評判が消費者に届き、それが購入を促す働きをする。そして、そのような購入を促がす働きが各エージェント相互に働き合うことで、商品の購入が加速する。つまり、そのような『評判』の効果を採り入れるのが、ヒット現象のような爆発的な購入現象のメカニズムを解明するには不可欠なのである。前節で導入した個人視点でモデル化した方程式は、このような評判をモデル化して方程式に採り入れるのに好都合な形式になっている。

評判の効果は大きく3つに大別できると考えられる。それは以下の3つである。

1. 購入した人本人から聞いた情報で買う
2. 購入した人同士のコミュニケーションを参考にして買う
3. 売れているという評判で買う

この3つのそれぞれが、時間  $\Delta t$  あたりにどのような効果を購入意欲に与えるかをモデル化する必要がある。

まず、購入した人からの情報は、当然ながらそれまでに購入した数に比例する。 $i$  番目の人が  $j$  番目の人から情報を聞いて購入する気になる確率を  $D_{ij}$  と定義すると、購入した人自身からの情報によって  $i$  番目の人が購入する割合は

$$\sum_{j \neq i}^N D_{ij} I_j(t) \quad (5)$$

である。

次に、購入した人同士の情報は購入した人で作る対の数に比例する。購入した人同士の情報交換は、口コミの場合もあれば、ブログやネットの掲示板への書き込みなどでなされると思われ、その情報量の総数が問題となる。そこで、その購入した人同士の情報交換によって影響されて購入する確率は

$$\sum_j \sum_k P_{jk} I_j(t) I_k(t) \quad (6)$$

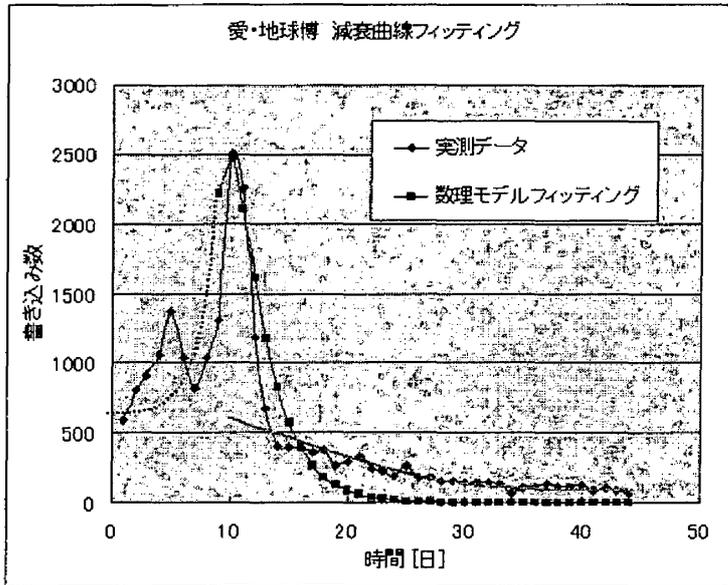
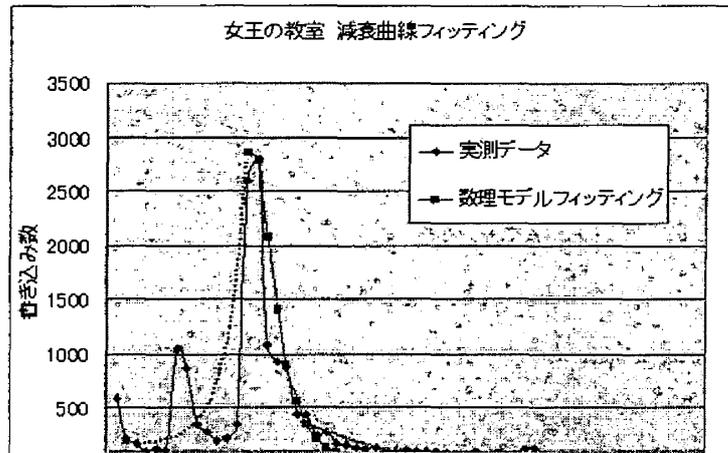
で定義できるであろう。ここで  $j, k$  は  $i$  を含まない。係数  $P_{jk}$  はその商品に対する評価であり、購入した人に評判がいいほど、この係数は大きな値となる。逆に購入した人に評判が悪い場合、この係数は負となる。

噂・評判の項は2次の項で与えられている。この項の意味は、 $i$  の人と  $j$  の人がブログ上で噂のやりとりをする様子を第三者が影響を受けることである。ここで、第三者が影響を受けるのは現時点での書き込みだけではなく、過去に遡っての書き込み全てであるはずである。そこで、過去の書き込み(噂)にも影響されているとすると、次のような積分形で表されるはずである。

$$\int_{-t}^0 I_i(t+\tau) I_j(t+\tau) d\tau \quad (7)$$

しかし、この形のままでは、遠くの過去に遡ればどのどん項の値が大きくなってしまふ。しかし、実際に

は遠くの過去に遡れば遡るほど影響が薄れていくと考えられ、これを指数関数型の減衰で考えると、



$$\frac{1}{t} \int_t^{\infty} I_i(t+\tau) I_j(t+\tau) e^{\alpha\tau} d\tau \quad (8)$$

であろう。ここで規格化は  $\frac{1}{t}$  で与えているが、実際は指数関数的減衰で、無限の過去からの寄与はない。そこで規格化定数を決めるため、

$$\int_t^{\infty} e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

(9)

と計算すれば、規格化定数はだいたい  $\alpha$  でいいだろう。従って、過去の噂まで遡って影響をうける様子は次のように表現できる。

$$\alpha \int_t^{\infty} I_i(t+\tau) I_j(t+\tau) e^{\alpha\tau} d\tau$$

(10)

さらに、その噂の元が時刻  $t=0$  で始まっているとすると、ここから時刻が経過するごとに影響は薄れていくと考えられ、その分でやはり指数関数型の減衰因子を考えるのが自然であろう。

そこで、この因子を  $e^{-\alpha t}$  として、噂による影響は

$$\alpha e^{-\alpha t} \int_t^{\infty} I_i(t+\tau) I_j(t+\tau) e^{\alpha\tau} d\tau \quad (11)$$

という項になると考えられる。

この項の時間的変化を見積もるため、簡単に  $I_i(t) = I_j(t) = I_0$  と定数に置いてしまうと、ここで考えている噂の効果の時間的減衰に影響された時間的変動だけが抽出できて、

$$\alpha I_0^2 e^{-\alpha t} \int_t^{\infty} e^{\alpha\tau} d\tau = I_0^2 e^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (12)$$

この式を検証し減衰定数  $\alpha$  を決めるため、ブログ検索エンジンを開発した米国テクノラティ社の日本法人テクノラティジャパンの協力で時系列で日本中のブログの書き込みの9割以上を対象に平成17年9月に閉幕した「愛・地球博」と平成17年7月～9月期に話題となったTVドラマ「女王の教室」という言葉をキーワードに書き込みの時間的変化を追った。その結果を図に示す。「愛・地球博」で実測データのピークが閉幕日に相当し、その前にあるピークは閉幕の前の週の週末に対応する。また、

「女王の教室」の実測データのピークは最終回の放送日であり、その前にあるピークは前の週の放送日である。ブログ検索による実測データは式とよく一致し、噂・評判の減衰時間定数  $\alpha=0.5$ 、つまり2日間で噂や評判はほぼ減衰することがわかった。

以上から噂・評判の時間的な減衰を扱う項では基本的に減衰因子は、時間の単位を1日として

$$e^{-0.5t}$$

を採用することにする。

これら3つの評判の項を含めると、一人一人の個人による商品の購入量の時間変化を表す微分方程式は次のようになると考えられる。

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = R_{\beta} R_{shop} + A(t) + \sum_{j \neq i}^N D_{ij} I_j(t) + \sum_j \sum_k P_{jk} I_j(t) I_k(t) \quad (13)$$

Webアクセス数の時間変化を表す微分方程式もほぼ同様なフィードバック項を付け加える形で導くことが出来る。

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = C_i(t) I_i(t) + A(t) + \sum_{j \neq i}^N D_{ij} I_j(t) + \sum_j \sum_k P_{jk} I_j(t) I_k(t) \quad (14)$$

すべての人間が均等な購入意欲を持つと近似し、平均された一人の購入意欲を  $I(t)$  と表そう。

$$I(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_j(t) \quad (15)$$

さらに係数  $D_{ij}$ 、 $P_{ij}$  も一人一人の個人に依存せず全て同じ値  $D$ 、 $P$  を持つと近似すれば、

$$\sum_{j=1}^N D_{ij} I_j = D \sum_{j=1}^N I_j(t) = (N-1)DI(t) = C_d I(t) \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N P_{jk} I_j(t) I_k(t) = P \sum_{j=1}^N I_j(t) \sum_{k=1}^N I_k(t) = (N-1)(N-2)PI^2(t) = C_p I^2(t) \quad (17)$$

と簡単化できる。この均等近似においてCD販売、Web販売は次のように近似することが出来る。

$$\frac{dI(t)}{dt} = R_{\beta} R_{shop} + A(t) + C_d I(t) + C_p I^2(t) \quad (18)$$

また、Webアクセス数の場合(20)も均等近似すれば、次のようになる。

$$\frac{dI(t)}{dt} = C(t)I(t) + A(t) + C_d I(t) + C_p I^2(t) \quad (19)$$

全ての人と同じ動向をすると仮定しているので、かなり粗い近似ではあるが、モデルとして宣伝の効果や評判の効果がどのような働きをするのかを具体的に見ていくには十分であろう。この方程式を用いたいくつかの計算例については文献[2]を見られたい。また、図1はこの(18)式の数値解を用いて説明している。

#### 参考文献

- [1] 吉田就彦「ヒット学～コンテンツ・ビジネスに学ぶ6つのヒット法則」(ダイヤモンド社、2005)  
 [2] 石井晃、吉田就彦、鳥取大学工学部研究報告 36 (2005) 71