物理学って何だろう―時間の対称性の破れをテーマにして

Tomio Yamakoshi Petrosky

Center for Complex Quantum Systems, The University of Texas at Austin, USA

petrosky@physics.utexas.edu

2006 年8月1日～8 月5日、物性若手夏の学校
愛知県蒲郡

「物理学」という言葉を三省堂の新明解国語辞典[1]で引くと、「物質の性質や構造、運動・熱・光・音・電磁気などの状態や作用について研究する学問」と出ている。またウエッブサイトの国語辞典、大辞泉でひくともっと丁寧に「物質の構造・性質を明らかにし、それによる自然現象の普遍的な法則を研究する自然科学の一部門。運動・熱・光・電磁気・音などの諸現象をはじめ、素粒子・核・宇宙線・量子エレクトロニクスなど対象は広く、精密な実験によって量的な把握を行い、数学を応用して表すことに特徴がある」と出ている。わたしが高校でこの学問を初めて学んだとき、先生がこの辞書のようなことを言っており、その説明で何となく分かったような気がしていたことを覚えている。もっと後で哲学の本を読むようになって、ある本を広げたら「哲学とは、それが何を意味するかが分かるようになったとき、分かる学問である」と狐に摘まれたようなことが書いてあった。その点、物理学はもっとすっきりした学問なのだと天狗になっていたこともあった。しかし、よく考えてみると上の物理学の説明はよく分からなくなる。特に物性物理学がそうだ。いま流行りのナノデバイスの物性など、なぜ理学部の物理学科のみならず工学部の電子工学科等でも研究されているのか。また、応用数学は数学の一分野であり、物理学ではない。それが理論物理学とはどう違うのか。どうやら「物理学も、それが何を意味するかが分かるようになったとき、分かる学問である」ようである。物性物理学に興味ある皆さんも、実は物理学に興味を持っているのだと思う。実験器具や数式の見事なジャングルのなかの多様な一つひとつの樹の性質や美しさに恍惚としていられるうちは良いが、皆さんのこれからの長い研究生活で、自分がジャングルの何処にいるのかが分からなくなって不安になるときが必ずあるものである。今回の講義では「時間の対称性の破れ」という、物理学の基本問題の一つをテーマにして、物理学とは何だろうかを考えてみよう。

本資料は、別冊数理科学「時間論の諸パラダイム」(サイエンス社、2004 年)のなかの「時間の対称性の破れと古典および量子力学の拡張:タイムマシンは作れるか？」を基にして、それに手を加えたものである。この別冊には一線で活躍している研究者達による、時間の問題を様々な側面から捉えた議論が網羅されているので、一読をお勧めする。この資料では、この問題の数学的定式化が要約されている。講義ではその部分を詳述し、またその定式化の応用として、非平衡統計物理学での輸送係数(拡散係数や熱伝導係数や粘性係数など)を与えるグリーン・久保公式を比較的濃密度期待について分析し、そこでの長距離相関による非マルコフ効果、すなわち記憶効果とその赤外線発散の問題を論じる。また、半導体よりなる低次元量子ナノ超格子に付着した不純物内(ドーナー)の励起電子が超格子内のエネルギー・ミニバンドに遷移する

[1] 「物理学」の項は味も素っ気もなかったが、この辞書は独断と偏見に富んだ楽しい読み物として定評がある。例えば「俗人」や「女」の項をひくと面白いことが書いてある。

場合の異常減衰等についても論じる。紙面の都合上、これらの応用例に関する資料をここに載せる余裕がない。ここの脚注にその情報を載せておくので、それらを参考にされたい[2]。

この資料のために筆者の既出の論文の一部を使うことを許可してくれたサイエンス社に厚く感謝の意を表する。

1.　　はじめに

物理学の大きな問題の一つに、時間のパラドックスの解明がある。それは、自然界ではあらゆる階層で時間と共に発展するパターンを見いだす事ができるにも拘わらず、物理学の基本法則が「時間の向き」に対して対称であると言う矛盾である。伝統的な物理学ではこの時間の対称性の破れの便宜上の答えとして、多体力学系での巨視的な特性に由来した、「我々」の導入した「粗視化」やその他の近似にその責任を負わせている。エントロピー増大の法則とも呼ばれる熱力学第二法則が現象論的な亜法則として、それがただ単に未来への秩序の崩壊や滅亡を記述しているとの悲観的な認識としてしかその意義を理解されていなかった時代には、「時間の向きはこの宇宙の本性とは関わりのない、我々の造り出した二義的性質である」として物理学の第一原理から外しておこうと言う心持ちも理解できない訳ではない。しかし、プリゴジン(I.Prigogine)による「散逸構造」の発見により (文献1)、不可逆性が我々生物を含めた複雑な構造を可能にする根拠に成っていると言う、この第二法則の重要な建設的役割を一度理解してしまうと、「我々」の自然操作や認識の限界に基づく、上で述べた便宜上の答えは到底受け入れられるものではない。我々の存在は不可逆性の結果であって、その原因ではない。従って、時間のパラドックスを解明するには、時間の対称性の破れを含む自然法則を構築することにある。

この目標は、散逸構造の発見後、二つのクラスの力学系、即ち、「カオス的不連続写像系」と「大きなポアンカレ系」(Large Poincaré Systems)と呼ばれるハミルトニアン系に対して既に実現されている。ここで大きなポアンカレ系とは、発展の演算子が連続なスペクトルを持った非可積分な保存力学系のことである。実際のところ統計力学で取り扱う全ての系はこのクラスに属する。ここでは、この大きなポアンカレ系に対する我々のグループの仕事について要約する(文献2~4)。

古典力学でも量子力学でも、与えられた系の運動を物理学で記述する場合、軌跡とか波動関数という個々のレベルで記述することができる。しかしまた、リュウビル=フォンノイマン演算子(以下、単にリュウビル演算子と呼ぶ)を使って統計的な古典分布関数や量子密度行列のレベルでも記述できる(文献5)。可積分系を雛形にして発展して来た物理学では、伝統的にはこの二つの記述法は等価であると仮定されて来た。しかし、このことは決定論的カオスやポアンカレの非可積分系のような不安定な力学系では、もはや成り立たない。

カオス的写像は不安定な力学系の中でも特に簡単な系であり、そのような例にベルヌーイ写像やパイこね変換がある。これらの系での時間の対称性の破れに関しては、長谷川博や田崎秀一などの日本人を含めた、プリゴジンに率いられた我々のグループによって解明されており、その内容はDean Driebeの本に詳しく解説されている(文献6)。そこで説明されている様に、カオス的写像ではペロン・フロベニウス演算子と呼ばれる発展演算子をヒルベルト空間の外側に拡張することにより、複素不既約スペクトル表示が得られる。ここで、複素とは、発展演算子の固有値が、それぞれ二つの時間の向き(過去と未来)に付随した半群に対応する虚数部分を持っていることを意味する。さらに不既約とは、一般に分布関数による記述を軌跡による記述に帰着できないことを表している。軌跡の不安定性を表すために導入されたリヤプノフ指数はここでは

---

[2] グリーン・久保公式の赤外線発散については、T. Petrosky, *Foundations of Physics*, **29** (1999) 1417; **29** (1999) 1581を、また低次元量子ナノ超格子に関しては、S. Tanaka, S. Garmon, and T. Petrosky, *Phys. Rev. B*, **73** 115340 (2006) をそれぞれ参照。

スペクトルの中に現れている。ここで新しいことは、拡張されたヒルベルト空間の中に、平衡状態への接近を記述する統計的なレベルでの新しい解が現れて来ることである。

この拡張されたヒルベルト空間は、内積で定義されるノルム（長さの概念の拡張されたもの）を持たないデルタ関数やその微分のような、「汎関数」をその要素として含む。読者もご存じのように汎関数の世界ではそれ自身の積が定義できないなど、我々に馴染みの関数とは大変違った、意表をついた性質を多く持っている。不可逆性は、この拡張された関数空間での、不安定力学系に対する以下で説明するあるクラスの分布関数に対する厳密な性質であり、「我々」の導入した近似の結果ではない。

この様に、時間のパラドックスの解明には、汎関数等の「関数解析」の数学的知識が要求される。このことには、複素関数論程度の知識しか持ち合わせていない著者には意外な結論であった。ちょうど、量子力学を理解するには「行列」の概念が不可欠であり、一般相対論を理解するには「非ユークリッド幾何学」の概念が不可欠であるように、ここでも、新しい力学の枠組みを理解するには、新しい数学が要求されている。

さて、上で述べたカオス的写像に対する状況は、古典力学や量子力学での大きなポアンカレ系でも同様である。この系での問題を解く基本的第一歩は、例えば運動量表示で以下に説明する特徴的な特異性を持っている分布関数や密度行列のあるクラスに対して，リュウビル演算子に対する固有値問題の解を探すというところにある。このクラスに属する関数は、例えば、ハミルトニアン自身やその関数である熱平衡分布がその代表的なものである。従って、このクラスに属する関数は統計力学では重要な役割を演じる。

ここでいう特異性とは、分布関数が座標の全空間にわたって非局所的に分布した物理的状況を表していることに起因するものとして現れてくる。実際、熱力学や統計力学で対象とされる系内で起こる粒子間の相互作用はいつまでも持続する。これは例えば衝突前と衝突後がはっきり定義できるような、普通のＳ行列理論によって記述される「一過性」の散乱状況とは著しい違いを示している（文献7）。この非局所性の結果数学的には分布関数のフーリエ変換の座標に共役な波数空間や、密度行列の運動量空間での表示にデルタ関数等の汎関数で表される特異性が現れて来る。従って、不可逆性が予測される系でのリュウビル演算子の固有値問題を解く場合、必然的に汎関数をも含んだヒルベルト空間を拡張した関数空間でそれを解かなくては成らない。

もう一つ重要なことは、たとえ初期条件の分布関数が非局所性による特異性を持っていたとしても、例えば理想気体のように、必ずしも時間の対称性を破る解があるとは限らないことである。実際、もし正準変数を適当に選ぶことに因って各自由度の間の相互作用を消去できるとすると、その系は決して熱平衡状態には近づかない。ここに、ポアンカレの意味での非可積分性が重要な役割をすることになる。

我々は有名なポアンカレの定理によって、どのような正準変数を選んでもハミルトニアンの中から相互作用を消去できない系が存在することを知っている（文献5、8、9）。ポアンカレは天体力学の三体問題を、二体系に第三の天体系が摂動として加わった場合として取り扱い、相互作用を消去するような正準変数を摂動展開によって形式的に作ろうとした。二体系は既にニュートンによって積分可能な系であることが知られている。そしてポアンカレは、その三体問題の正準変数の表現の中に各自由度の振動数の線形結合で表される分母が現れ、かつ、その分母がゼロに成って発散するためにその正準変数を定義することが不可能であることを示した。このことから、この発散のことをポアンカレの共鳴特異性とも呼ばれている。これが非可積分系の存在の歴史的に最初の認識であった。その後、任意に与えられた可積分系に自由度間の相互作用を摂動として加えると、非線形相互作用を含んだ圧倒的多数の相互作用に対してその新たな結合系がポアンカレの意味で非可積分系になることが分かるようになった。このポアンカレによる非可積分性の発見は後の力学系のカオスの問題へと導いた。

ポアンカレは非可積分性の現象面での意義は軌跡の大変複雑な振る舞いを導くことにあり、そしてまた、初期条件の僅かな違いでその後の運動が全く違ってしまうため、系の長時間的な予測が不可能になる事にあることを既に100年も前に指摘している(文献9)。「予測不可能性」とは至って悲観的な表現であるが、今でもカオスの本を読むと、著者にはこの負の側面が強調され過ぎているように思われる。

我々が「大きなポアンカレ系」と特に限定しているのは実はこの非可積分性の役割の意義に関係している。「大きな系」とは字面では自由度が無限大の系という意味であるが、その深い心では、リュウビル演算子の固有スペクトルが連続の値を取ることを意味している。リュウビル演算子の物理的次元は振動数と同じ次元である。従って、自由度が無限大の系では無摂動系の振動数も連続の値を取るようになる。

ところで、汎関数の理論では連続変数がゼロと成り得る場合、その変数で割った表現はデルタ関数として、その変数の積分下で数学的に完全に合法的な意味を持つ。従って、ポアンカレの共鳴特異性は取り扱い可能な、それ故、その効果の予測可能な現象へと導くはずである。大きなポアンカレ系では、実は、共鳴特異性を表すこのデルタ関数部分が時間の対称性を破る項として現れてくるのである。例えば、量子力学系では現象論的不可逆方程式として有名なパウリのマスター方程式が知られている(文献5)。相互作用が小さい場合、その方程式の散逸項は、しばしばフェルミの黄金律を使った遷移確率から計算されるが、この黄金律では振動数のデルタ関数を含んでいる。これが衝突の前後で無摂動系の粒子のエネルギーの保存を保証するのである。と同時に、この項が時間の対称性をも破っている。我々の複素スペクトル表示の理論では、正にこの共鳴特異性がパウリのマスター方程式の散逸項を導き出していることを現象論ではなくて、力学の第一原理から示すことができる。不可逆性を論じるためには、上に述べた分布関数の非局所性による汎関数とは独立に、ここでも共鳴特異性による汎関数をも含めた関数解析の数学的言葉を使わざるを得ない。

上述したように、不可逆性は散逸構造を自発的に作り出すことを可能にしている。従って、ポアンカレの非可積分性の意義は、カオスの理論で強調されているような予測不可能性という悲観的な所にその本質が有るのではなくて、我々をも含んだ複雑系の構造を作り出す所にその本質がある。このように、非可積分性は我々を取り巻く自然を豊かで多様なものとする建設的な役割を演じているのである。

ところで、もし系が可積分であるか、又は、物理系が局所的であったら、上で述べた共鳴特異項は消えてしまい、時間の対称性が破れない。従って、そのような系では我々の理論は個々の軌跡や波動関数に基づいた記述法に帰着する。この意味で、我々の理論は今までの力学の拡張に成っている。

不可逆性を論じる場合のもう一つの重要な側面は、非決定論的な世界観と関係している。物理学を教わったことの無い方々にとっては、この世の中に時間に向きが在ることが問題になることが既に理解し難いことだろう。例えば、ある学徒がそのライフワークとして深窓に籠り、アルキメデスの逸話のように、ある日突然裸で飛び出して来て「ついに分かった、時間には向きがある、我々が歳をとることは力学と何ら矛盾していない」と叫んだら、きっと癲狂院ものだろう。お互いに無矛盾で緻密な論理体系を構築するというのも学問の重要な役割であり、また、技術的応用を目指すという工学的興味もあろうが、自然哲学としての物理学には不可逆性を論じる動機として何か他の説得力のあるものが欲しい所だ。そのことがこれから述べる「決定論」と「非決定論」に関係している。

ニュートンの古典力学、アインシュタインの相対性理論、シュレーディンガーとハイゼンベルグの量子力学等、物理学の基本法則に共通した大きな特徴は、それら全てが「決定論的」な微分方程式で表わされているという所にある。微分方程式の特徴はある時刻の状態が与えられていると、全未来と全過去の状態が決まってしまうということにある。したがって、全ての未来の現象

はこの現在の瞬間に内在していることになる。例えば、モーツアルトの音楽はモーツアルトの誕生以前から存在していたことになる。そのような世界では創造的活動は意味を成さず、いわば無時間の世界であり、過去、現在、未来という時間の区別は大した意味を持たない。物理学の描く世の中は、なんだかやおよろずの神の日本人にとっては得体の知れない、全未来をお見通しの一神教の神の世界のようにも思えて来る。

一方に於いて、ボルツマン方程式、パウリのマスター方程式、拡散方程式、あるいはブラウン運動のランジュバン方程式など、統計力学で扱う重要な方程式は時間の対称性が破れているのみならず、全て確率論的な方程式であり、初期条件が与えられていても後の現象が一意には決まらない非決定論的方程式である。従って、時間の対称性の破れを説明する理論では、時間の向きの存在の正当性ばかりでなく、この非決定性がどのように力学原理と折り合いが付くかをも明らかにするものでなくては成らない。

これから、上で述べたことを数学を使って説明して行くが、誌面の都合上その要点を示しただけである。もっと詳しい計算については終わりに列挙した文献（2ー4）を見てもらいたい。

2. デルタ関数特異性

体積$L^3=(2\pi)^3\Omega$の大きな箱に入ったN個の粒子が、短距離斥力でお互いに相互作用をしているガス系を考えよう。系のハミルトニアンは次の形をしているものとする、

$$H(p,q)=H_0+\lambda V=\sum_{i=1}^{N}\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}+\lambda\sum_{i>j}^{N}V(|\vec{q}_i-\vec{q}_j|) \tag{2.1}$$

ここで、λは無次元の結合定数であり、$\vec{p}_i$と$\vec{q}_i$は夫々i番目の粒子の運動量と位置の三次元ベクトル、そして、pとqは$3N$成分を持ったベクトルである。

統計的な記述は次のリウビル＝フォンノイマン方程式によって定式化される、

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t}=L_H\rho \tag{2.2}$$

ここで、リウビル演算子は古典力学ではハミルトニアンとのポアソン括弧式$L_H\rho\equiv i\{H,\rho\}$であり、量子力学では交換子$L_H\rho\equiv[H,\rho]/\hbar$である。(2.1)に対応して$L_H=L_0+\lambda L_V$と分解できる。古典論では分布関数のフーリエ変換されたもの、

$$\rho(p,q)=\frac{1}{L^{3N}}\sum_k e^{ik\cdot q}\tilde{\rho}_k(p) \tag{2.3}$$

を考える。この小論文では主に古典力学で例示することにするが、量子力学に対しては$\tilde{\rho}_k(p)\equiv\langle p+\hbar k/2\,|\,\rho\,|\,p-\hbar k/2\rangle$として$\rho(p,q)$をウィグナー分布関数と考えれば良い。

古典力学では、位相空間内での軌跡はデルタ関数を使って$\rho(p,q)=\prod_{i=1}^{N}\delta(\vec{p}_i-\vec{p}_i^{\,0})\delta(\vec{q}_i-\vec{q}_i^{\,0})$のように表される。簡単な計算で分かるように、軌跡の場合、全てのフーリエ成分$\tilde{\rho}_k(p)$は系の体積L^3が無限大になる極限で、体積依存性を持たない。したがって、全てのフーリエ成分は、ある意味で同等であり、ある特別な成分に特異性が現れることはない。

しかし、位相関数がハミルトニアン(2.1)で、それをフーリエ展開で書くと、

$$H(p,q)=\frac{1}{\Omega}\sum_{\vec{l}}\sum_{i=1}^{N}[\frac{\vec{p}_i^2}{2m}\delta_\Omega(\vec{l})+\lambda\sum_{j(>i)}^{N}V_l e^{-i\vec{l}\cdot\vec{q}_j}]\,e^{i\vec{l}\cdot\vec{q}_i} \tag{2.4}$$

のように、波数について$\vec{l}=0$のところでデルタ関数特異性をもった関数を考えることも重要である。ここで、$V(|\vec{r}|)=\Omega^{-1}\sum_{\vec{l}}V_l e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}}$であり、クロネッカーのデルタ$\delta_{\vec{l},0}$を使って$\delta_\Omega(\vec{l})\equiv\Omega\delta_{\vec{l},0}$を定義した。周期的境界条件を持った箱での規格化では、波数は整数$\vec{n}$ベクトルを使って不連続な値$\vec{l}=2\pi\vec{n}/L$を持つ。大きな箱の極限$\Omega\to\infty$では波数は連続スペクトルをもち、$\Omega^{-1}\sum_{\vec{l}}$は積分$\int d\vec{l}$に、また、$\delta_\Omega(\vec{l})$はディラックのデルタ関数$\delta(\vec{l})$になる。(2.4)で運動エネルギーの部分は座標によらない非局所的な関数であり、したがって、フーリエ変換が波数ベクトルのデルタ関数で表される特異性を持っているのである。その結果、ハミルトニアンの任意の関数(例えば、正準熱平衡状態$\rho_{eq}\propto e^{-\beta H}$)もまた、そのフーリエ成分の中にデルタ関数特異性を持つことになる。

熱平衡に近づく場合の状況を分析する統計力学では、分布関数のクラスとして、この熱平衡状態と同じデルタ関数特異性を持つものに限定すことが自然である。そこで、非平衡状態をも含めた分布関数のクラスとして次のようにフーリエ展開されるものを考えることにする、(文献2ー5)

$$\rho=L^{-3N}[\rho_0+\Omega^{-1}\sum_{\vec{k}}{}'\sum_j\rho(j_{\vec{k}})e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}_j}+\Omega^{-1}\sum_{\vec{k}}{}'\sum_{jl}\rho(j_{\vec{k}},l_{-\vec{k}})e^{i\vec{k}\cdot(\vec{q}_j-\vec{q}_l)}$$
$$+\Omega^{-2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}{}'\sum_{jl}\rho(j_{\vec{k}},l_{\vec{k}'})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{q}_j+\vec{k}'\cdot\vec{q}_l)}+\Omega^{-2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}{}'\sum_{jlr}\rho(j_{\vec{k}},l_{\vec{k}'},r_{-\vec{k}-\vec{k}'})e^{i[\vec{k}\cdot\vec{q}_j+\vec{k}'\cdot\vec{q}_l-(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{q}_r]}$$
$$+\ldots] \tag{2.5}$$

ここで$\rho(j_{\vec{k}},l_{\vec{k}'},r_{\vec{k}''})$は粒子$j$が波数ベクトル$\vec{k}$を持ち、粒子$l$が波数ベクトル$\vec{k}'$を持ち、粒子$r$が波数ベクトル$\vec{k}''$を持ち、残りの全ての粒子の波数ベクトルがゼロであるフーリエ成分を表している。また、波数ベクトルの和の記号の上のダッシュは、$\vec{k}=0$の部分を外して和を取ることを意味している。また、各フーリエ成分の中の運動量は書かずに省略した。大きな箱の極限$\Omega\to\infty$では各成分の$\rho(j_{\vec{k}},\ldots)$は体積に依存しないものとする。

この展開は一見複雑であるが、ここでの要点は、各成分が正準熱平衡状態と同じ体積依存性を持っていることを理解しておけば充分である。このクラスの分布関数の著しい特徴は、分布関数が運動量分布関数((2.5)の第一項、「相関の真空」とも呼ばれる)、不均一成分(第二項)、二体相関成分(第三と四項)、三体相関成分、等々に分解できる事である。そして、統計力学で重要な「熱力学的極限」、即ち、粒子密度$c=N/L^3$を有限に保ちつつ$N\to\infty$と$L\to\infty$の極限を取った場合、このクラスの分布関数はデルタ関数特異性を持っている。この様に展開できるということは、単位自由度当たりの物理量、即ち「示強変数」と呼ばれる、温度、粒子密度、粘性係数、等々が熱力学的極限で存在する物理系を取り扱っている事を意味する。ところで、デルタ関数特異性のために、このクラスの分布関数に対して内積で表現されるノルムが定義できない。従って、その発展をヒルベルト空間の中で議論ができなくなる。

ここでの主要な問題は、(2.5)のような特異性を持つ関数のクラスに対して、リウビル演算子の固有値問題を研究することである。そのためには、固有値問題をヒルベルト・ノルムを持たない関数空間に拡張する必要がある。その結果、自己共役なリウビル演算子でも複素固有値を持て

るようになり、このような特異な関数のクラスに対して、厳密に時間の対称性を破る解を得ることができるようになる。そこで、リウビル演算子の固有値問題について詳しく考えてみる。

3.　固有値問題

我々の考えている系では、無摂動リウビル演算子は古典系では微分演算子で $L_0 = -iv \cdot \partial/\partial q$ と書かれる。但し、$v \equiv p/m$、即ち、速度ベクトルである。ウィグナー表示を使うと、この形は量子系でも同じである。従って、L_0 の固有状態は

$$L_0 \,|\, k,p\rangle\rangle = (k \cdot v) \,|\, k,p\rangle\rangle \tag{3.1}$$

で表される。ここで、

$$\langle\langle q,p' \,|\, k,p\rangle\rangle = L^{-3N/2} e^{ik\cdot q} \delta(p-p') \tag{3.2}$$

である。ここでは、量子力学の状態を表すケット・ベクトルと区別するために、リウビル演算子の固有状態を二重ケット・ベクトルで表した。これで見るように、固有関数は波数ベクトル k をフーリエ指数とした平面波であり、フーリエ展開可能な関数のクラスで直行完備した基底を成している。そして、箱による規格化のため、波数ベクトルに関してはクロネッカーのデルタで規格化されている。このように、無摂動系ではフーリエ展開の基底が、その運動を論じるのに自然な道具建てを提供している。

無摂動系では、k に対する遷移行列は対角的である。従って、相互作用が無い場合、(2.5)の各相関成分は独立に時間発展する。一方、摂動に対応する部分は非対角的で、相互作用によって波数ベクトルのある組から他の組への遷移、言い換えれば、ある相関の成分から他の相関成分への遷移を起こす。相互作用の行列要素は、例の如く、

$$\langle\langle k',p' \,|\, L_V \,|\, k,p\rangle\rangle = \frac{1}{L^{3N}} \iint dq dq' e^{-ik'\cdot q'} \langle\langle q',p' \,|\, L_V \,|\, q,p\rangle\rangle e^{ik\cdot q} \tag{3.3}$$

と定義される。(3.3)の具体的な形はここでの議論では重要ではない。

デルタ関数特異性を持った、我々のクラス(2.5)での固有値問題を考えるのに、以下の射影演算子を導入すると便利である、

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= \int dp \,|\, 0,p\rangle\rangle\langle\langle 0,p \,|, \\ P^{(j_i)} &= \int dp \,|\, \vec{k},\{0\}^{N-1},p\rangle\rangle\langle\langle \vec{k},\{0\}^{N-1},p \,|, \end{aligned} \tag{3.4}$$

等々。ここで、$P^{(0)}$ は(2,5)の第一項を, $P^{(j_i)}$ は第二項を抜き出す射影演算子であり、等々、また、$\{0\}^{N-1}$ は j 番目の粒子以外の残り $N-1$ の粒子の波数ベクトルがゼロであることを示している。この定義で、$P^{(\mu)}$ の指数 μ はゼロでない波数に対応した粒子の名の組とその波数ベクトルの値を示している。射影演算子は L_0 の固有演算子、即ち、$L_0 P^{(\mu)} = P^{(\mu)} L_0 = (k \cdot v) P^{(\mu)}$ であり、また、直行完備性、即ち、$P^{(\mu)} P^{(\nu)} = P^{(\mu)} \delta_{\mu,\nu}$、かつ, $\sum_\mu P^{(\mu)} = 1$ を満たす。

さて、いよいよ、L_H の固有値問題という我々の主要問題を考えよう。相互作用をしている非可積分系では、リウビル演算子の固有値問題の解は、ヒルベルト空間の中では一般には知られていない。それにも拘わらず、デルタ関数特異性を持った関数のクラスに対して、L_H の固有値問題の解を与えることができる。次の固有値問題を考える、

$$L_H \,|\, F_\alpha^{(\mu)}(\lambda)\rangle\rangle = Z_\alpha^{(\mu)} \,|\, F_\alpha^{(\mu)}(\lambda)\rangle\rangle \tag{3.5}$$

αはμと共に、固有関数を特徴づけるパラメーターである。$\lambda = 0$での境界条件は$\lambda \to 0$に対して$|F_\alpha^{(\mu)}(\lambda)\rangle\rangle \to P^{(\mu)} \,|\, F_\alpha^{(\mu)}(0)\rangle\rangle$で与えられるものとする。即ち、摂動が小さくなる極限で、L_Hの固有関数はL_0の固有関数に連続的に移行するものとする。ここで$P^{(\mu)}$に直行する相補的な射影演算子$Q^{(\mu)} \equiv 1 - P^{(\mu)}$を導入する。それは$Q^{(\mu)}P^{(\mu)} = P^{(\mu)}Q^{(\mu)} = 0$と$\left(Q^{(\mu)}\right)^2 = Q^{(\mu)}$の関係を満たす。それによって、(3.5)は$P^{(\mu)} \,|\, F_\alpha^{(\mu)}\rangle\rangle$と$Q^{(\mu)} \,|\, F_\alpha^{(\mu)}\rangle\rangle$に対する二つの方程式に分解される。ところで、以下の議論では共通の指数μが至る所に付いて回って少々五月蝿いので、これからの議論では、その必要が無い限り指数を落として、例えば、$P \,|\, F_\alpha\rangle\rangle$や$Z_\alpha$等の簡略化された記法を使う事にする。そこで、この分解された二つの方程式は次のように表される

$$\begin{aligned} PL_H(P+Q) \,|\, F_\alpha\rangle\rangle &= Z_\alpha P \,|\, F_\alpha\rangle\rangle \\ QL_H(P+Q) \,|\, F_\alpha\rangle\rangle &= Z_\alpha Q \,|\, F_\alpha\rangle\rangle \end{aligned} \tag{3.6}$$

この下の式を$Q \,|\, F_\alpha\rangle\rangle$について解いたものを上の式に代入すると、簡単な計算で

$$Q \,|\, F_\alpha\rangle\rangle = C^{(\mu)}(Z_\alpha) P \,|\, F_\alpha\rangle\rangle \tag{3.7a}$$

$$\psi^{(\mu)}(Z_\alpha) P \,|\, F_\alpha\rangle\rangle = Z_\alpha P \,|\, F_\alpha\rangle\rangle \tag{3.7b}$$

が得られる。但し、次の様な演算子、$C^{(\mu)}(z) \equiv [QL_HQ - z]^{-1} QL_HP$及び、$\psi^{(\mu)}(z) \equiv PL_HP + PL_HQC^{(\mu)}(z)$を導入し、また、混乱を避けるために、ここでは指数$\mu$をあからさまに表示した。(3.7b)は$P \,|\, F_\alpha\rangle\rangle$について閉じているため、この方程式が$P \,|\, F_\alpha\rangle\rangle$と$Z_\alpha$について解けたら、(3.7a)を使って$Q \,|\, F_\alpha\rangle\rangle$が求まり、従って、$L_H$の固有値問題が解けて、$|F_\alpha\rangle\rangle$が完全に求まったことになる。そこで(3.7b)を解くことが重要な問題となる。

さて、ここで我々の固有値問題についての、幾つかの重要な点を指摘しよう。先ず、$\psi^{(\mu)}(z)$は衝突演算子と呼ばれていて、不可逆現象を語る場合の中心的な演算子である（文献2ー5）。この演算子は非平衡統計力学での運動論的方程式の衝突項を計算する際に現れてくるのでこの名が付いている。次の節で簡単場合の具体的な形を示す。(3.7)によると、衝突演算子の固有値問題が解けると、リウビル演算子の固有値問題が解けたことになる。但し、衝突演算子自信が固有値$Z_\alpha^{(\mu)}$の関数になっているために、衝突演算子の固有値問題が言わば非線形な固有値問題となってることが(3.7b)から見て取れる。

次に重要なのは、衝突演算子の固有値はリウビル演算子の固有値と同じものだと言う事である。後の例でも示されるが、衝突演算子は一般に自己共役演算子ではない。従って、その固有値は一般に複素数である。その結果として、リウビル演算子がヒルベルト空間では自己共役演算子であったにも拘わらず、デルタ関数特異性を持った固有関数に対して、その固有値も複素数と成れるのである。その結果、大きなポアンカレ系での時間発展は、二つの半群に分解される。$t > 0$に対応した半群に対して$\mathrm{Im}(Z_\alpha^{(\mu)}) \le 0$を持った固有値に対応した固有状態があり、それは我々の未来に対して平衡状態に近づく。$Z_\alpha^{(\mu)}$の複素共役に対応した固有値では、我々の過去に対して平衡状態に近づく。この様に、お互いに複素共役の解が存在する根拠は、リウビ

ル演算子がヒルベルト空間では自己共役演算子であったことに由来している。我々の経験では、全ての非可逆過程は同じ時間方向性をもっている。この経験と矛盾しないように未来に向う半群を選ぶ必要がある。

ところで、上の議論のどこでデルタ関数特異性の特徴が使われているか、一見明らかではない。そこで、その、陰に隠れたものを表に引っ張り出してみよう。上で述べたように射影演算子 $P^{(\mu)}$ はそれに対応した、相関関数を抜き出す演算子である。そして、相関の程度（二体相関か、三体相関か、等々）は N 粒子の中で幾つの粒子がゼロでない波数ベクトルを持っているかで決まる。逆に言えば、波数ベクトルがゼロになる一点で、より低位の相関の寄与が計算されるように成っている。ところで、熱力学的極限では波数ベクトルは連続の値を持っている。したがって、もし、扱っている関数が特異性を持っていなかったならば、波数に関する積分下では、その波数の値がゼロになるただ一点からの寄与は無視できてしまう。従って、リウビル演算子の元の固有値問題の式(3.5)を射影演算子を使って(3.6)のように分解する事に意味が無くなる。ここにデルタ関数特異性の役割があったのである。この特異性のお陰で、リウビル演算子の固有関数の $P^{(\mu)}$ 成分が $Q^{(\mu)}$ 成分と同程度の重みを持つようになり、従って、自己共役でない衝突演算子の固有値問題の解が時間の発展で役割を演じるように成ったのである。

さて、複素固有値 $Z_\alpha^{(\mu)}$ に対して、L_H の左固有状態は一般に右固有状態のエルミート共役とは成っていない。そこで、同じ固有値 $Z_\alpha^{(\mu)}$ をもつ左固有状態を $\langle\langle \tilde{F}_\alpha^{(\mu)} |$ と書くことにする、

$$\langle\langle \tilde{F}_\alpha^{(\mu)} | L_H = Z_\alpha^{(\mu)} \langle\langle \tilde{F}_\alpha^{(\mu)} | \tag{3.8}$$

ここでは、ジョルダン・ブロックへと導くような、もっと一般的な場合を考えないことにして、次の双直交、双完備関係を仮定する、

$$\langle\langle \tilde{F}_\alpha^{(\mu)} | F_\beta^{(\nu)} \rangle\rangle = \delta_{\mu,\nu}\delta_{\alpha,\beta}, \quad \sum_{\mu,\alpha} | F_\alpha^{(\mu)} \rangle\rangle\langle\langle \tilde{F}_\alpha^{(\mu)} | = 1 \tag{3.9}$$

この仮定が正しいかどうかは、問題毎に確かめなくては成らない。この場合にはリウビル・フォンノイマン方程式(2.2)の解が発展演算子のスペクトル分解を使って、

$$| \rho(t) \rangle\rangle = e^{-iL_H t} \; | \rho(0) \rangle\rangle \; = \; \sum_{\mu,\alpha} | F_\alpha^{(\mu)} \rangle\rangle e^{-iZ_\alpha^{(\mu)} t} \; \langle\langle \tilde{F}_\alpha^{(\mu)} | \rho(0) \rangle\rangle \tag{3.10}$$

と書ける。この両辺に例えば射影演算子 $P^{(\nu)}$ を作用して、それを時間で微分すると、与えられた相関成分の運動論的方程式が得られることになる。

次の節に移る前に、もう一つ、不可逆性を理解する要となるもについて触れておこう。それは、リウビル演算子の縮退の問題である。量子力学のハミルトニアンの固有値問題でも、その縮退が問題になることがしばしばある。しかし、その縮退は取り扱っている系に依った系毎に異なる特徴であり、我々の世界を統一的に捕えるための本質的性質ではない。これに対してリウビル演算子の縮退は不可逆性を理解するための本質的な性質に成っている。実際、(3.1)の所で述べたように我々の古典系の例では、自由運動をしている粒子の無摂動系のリウビル演算子 L_0 が座標の微分演算子であったことを思い出してほしい。従って、座標に依存しない全ての分布関数は L_0 のゼロ固有値に属しており、その固有関数は無限に縮退している。

このことは、量子論でも同じである。上で述べたように、量子系でのリウビル演算子はハミルトニアンの交換関係で定義されている。そこで、もしハミルトニアンの固有関数が知られている場合には、リウビル演算子の固有関数はハミルトニアンの固有関数で作られるダイアッド行列（外

積の一種)であり、また、その固有値はハミルトニアンの固有値の差に成っている。従って、差の値の同じダイアッドは、全て同じ固有値に属し、無限自由度系では、ここでも無限に縮退していることになる。これは、リウビリアン・ダイナミックスの持っている、系に依らない重要な性質である。

もし、リウビル演算子にこの縮退の性質がなかったなら、上で導入した衝突演算子は単なる数となる。従って、わざわざ、その衝突演算子の固有値問題を解かなくてもリウビル演算子の固有値問題が解けたことになり、自然を理解するために我々の強いられる数学の計算の努力は、至って少ないもので済んだであろう。しかし、そのような世界はまた、至って退屈な世界でもある。幸運な事にリウビル演算子のこの縮退は現実であり、そのことが、我々をも含めた多様な存在を力学原理に矛盾すること無くこの宇宙内に許す根拠の一つに成っているものと筆者は考えている。

4.　具体例

複素スペクトル表示の応用として、上で考えているガス系で相互作用が小さい場合、即ち、$\lambda << 1$の場合の一粒子運動量分布関数の従う運動論的方程式を導いてみよう。この小論文では導出法の要点だけを示す。無摂動系では運動量が運動の恒量であるために、運動量分布関数は(2.5)の第一項に対応する射影空間$P^{(0)}$に属している。そこで、$P^{(0)}$を(3.10)の両辺に左から作用してから時間で微分する。そして、(3.7)及びそこで定義した衝突演算子や$C^{(\mu)}$演算子の性質を使い、λの最低次の寄与を残すと、

$$i\frac{\partial\rho_0(\vec{p}_1,\dots\vec{p}_N,t)}{\partial t} = \lambda^2\psi_2^{(0)}(+i\varepsilon)\rho_0(\vec{p}_1,\dots\vec{p}_N,t) \tag{4.1}$$

が得られる(文献2ー4)。ここで、$\lambda^2\psi_2^{(0)}(z) \equiv \lambda^2 P^{(0)}L_V Q^{(0)}[L_0 - z]^{-1}Q^{(0)}L_V P^{(0)}$は$\lambda$に関して最低次の衝突演算子であり、$\varepsilon$は正の無限小を表す。

今までのところ、λが小さいと言うことと、リウビル演算子に関する力学の結果を使っただけで、まだ、統計的な数学処理は行われていない。ここで、次の統計的な仮定を導入する。初めに述べたようにここでは短距離力を考えているので、もし、各粒子間の距離が十分に離れている場合には、粒子はお互いに統計的に独立であると考えるのが自然である。そこで、この場合、N粒子の運動量分布関数ρ_0は一粒子の運動量分布関数φの積で書けている。ところで当たり前のことだが、運動量分布関数は粒子の位置には依らない。それ故、ある粒子間の距離がたまたま小さい場合でも、やはり、積で書けることになる。そこで、ある時刻、例えば$t=0$で、$\rho_0(\vec{p}_1,\dots\vec{p}_N,0) = \prod_{i=1}^{N}\varphi(\vec{p}_i,0)$と因数分解されているものと仮定する。この統計的独立性はその後の、粒子間の相互作用で一般には乱されるはずである。しかしながら、運動方程式の解(3.10)を使ってその乱しの項の大きさを計算してみると、それが、熱力学的極限では高々$1/N$比例していることが示せる。従って、その極限下では乱しの項が無視出来て、その後の全ての時刻で上の因数分解が成り立っていることを示すことができる。このことはまた、もし有限自由度のカオス系を考えると、この因数分解が成り立たない事も同時に示している。

このように、不可逆性への我々のアプローチでは統計的な仮定とその数学的処理は初期条件の中でのみ行われ、その後の力学原理に基づく時間発展内での力学レベルでの近似(例えば、λが小さいことから来る近似等)とは完全に区別されている。そのことは、解のレベルではなくて、リウビル方程式自身を縮約して得られるi粒子分布関数($i=1,2,\dots$)に対する所謂 BBGKY ハイラルキー(文献9)と呼ばれる方程式のレベルの中で統計的近似処理を実行することによっ

て不可逆方程式を導き出すような普通の教科書でよく見かける方法とは際立った違いを示している。実際、統計的近似処理を方程式のレベルで実行してしまうと、果たして不可逆性が力学の結果として現れて来たのか、それとも平均を取ったりする所謂「我々」の行った「粗視化」の結果として現れて来たのかが分からなく成ってしまう。その点、解のレベルで論じる我々のアプローチは、不可逆性の因って来たる所を明かにするのに一日の長がある。

さて、上の因数分解の性質を(4.1)で使って、例えば粒子1を除いた残りの粒子の運動量で積分し、さらに相互作用のリウビル演算子の具体的な形を使うと、熱力学的極限で次のフォッカー・プランク方程式と呼ばれる良く知られた不可逆な運動論的方程式が得られる、

$$\frac{\partial\varphi(\vec{p}_1,t)}{\partial t}=\frac{\lambda^2}{L^3}\sum_{j=2}^{N}\int d\vec{l}\int d\vec{p}_j\,|V_l|^2\,\vec{l}\cdot\partial_{1j}\pi\delta(\vec{l}\cdot\vec{g}_{1j})\vec{l}\cdot\partial_{1j}\varphi(\vec{p}_1,t)\varphi(\vec{p}_j,t) \tag{4.2}$$

ここで$\partial_{1j}\equiv\partial/\partial\vec{p}_1-\partial/\partial\vec{p}_j$であり、また、$\vec{g}_{1j}\equiv(\vec{p}_1-\vec{p}_j)/m$ である。この方程式の右辺の衝突項は自己共役演算子ではなく、さらに、この方程式に従う$\varphi(\vec{p}_1,t)$は任意の初期状態に対して、$t\to+\infty$で熱平衡状態に近づくことを示す事ができる。

ここでも不可逆性に付いての重要な点に触れてみよう。先ず、右辺の衝突項が速度に関するデルタ関数に比例していることである。これは、衝突演算子が上で見たように$1/(L_0-i\varepsilon)$という分数に比例していることから来る結果である。(3.1)で述べたようにL_0の固有値は$k\cdot v$で与えられる。熱力学的極限では波数ベクトルが連続な値を取るために、$k\cdot v$がゼロになる点でこの分数の虚数部はデルタ関数$i\pi\delta(k\cdot v)$で表される共鳴特異性を持つようになる。もし、この極限を取らなかったら波数ベクトルは不連続であり、この分数は形式的には実数の値$1/k\cdot v$を持つ速度の奇関数になっているが、それはまた、$k\cdot v=0$のところで発散する、意味の無い表現になっていたはずである。これが前に述べた、非可積分性の原因である。しかし、熱力学的極限ではこの特異性は上のように、デルタ関数として数学的に正当な意味を持つようになる。さらに、デルタ関数が偶関数であることから、速度の反転に対して、波数ベクトルが不連続の場合には有り得なかった新しい対称性に関する性質が現れて来る。このように、共鳴特異性が、時間の対称性を破るにおいて本質的は役割を演じているのである。

もう一つの重要な点は、衝突項に粒子jに関する和が現れていることである。それ故、全ての粒子が同種で同じ役割を演じる場合には、$L^{-3}\sum_j^N$ は熱力学的極限で粒子密度cで置き換えることが出来る。ところでもし、粒子の数Nは有限だが、体積L^3が無限大となるような散乱問題に特有な状況を考えると、この時間の対称性を破る衝突項は消えしまう。このように、共鳴特異性に因る系の非可積分性だけでは時間の対称性を破ることは出来ない。それに加えて、各自由度に付随した衝突項を拡大する様な、別な特異性が必要である。その例として、ここでは、前に述べた熱力学的極限に起因した、フーリエ空間でのデルタ関数特異性が必要となったのである。

5. 確率の根拠

おしまいに、もう一つの大きな問題として、自然界の現象の把握に当たって、確率論的な記述(即ち、非決定論的な記述)がどういう根拠で正当化されるのかという問題を論じよう。この宇宙を、一神教の世界でのように始めから決定論的な世界であると捉え、古典力学の軌跡や量子力学の波動関数をその最も原理的な記述言語であるとしている物理学の伝統的な主張を認めてしまうと、確率や非決定論的概念は、神の身ならぬ「我々」の不完全性にその根拠を求めなくてはならなく成ってしまうようである。実際、多くの物理学の教科書では、確率の概念の導入の

根拠として「十の二十三乗個もの粒子の初期条件を完全に決めることも、また、それだけの自由度の組の連立方程式を解く事も『我々』には出来ない。たとえ、それが出来たとしても、それだけの数の情報を手に入れた所で『我々』にはそれを処理するだけの能力が無い」という主張を挙げている(文献11)。その結果、我々は、物理量の平均的記述で満足する以外に手が無いとして、分布関数の導入による確率的記述を已むなく受け入れているのだとする。そして、時間の向きは厳密な物理的原理の中にあるのではなくて、この確率論的記述の中に現れて来る二義的性質であると考えようとしている。また、最近のカオスの力学の進歩によって、たとえそれが少数自由度系であっても、初期条件に対する僅かな誤差がその後の運動を完全に変えてしまうことが明かになっているので、この誤差を「我々」が完全に制御できないことが確率的記述の根拠になっているとすることが、カオスの力学を扱う教科書の今様な説明でもあるようである。

「我々」に限界があることを認めるのに筆者は吝かではない。が、果たしてこの「我々」の限界がこの世界を非決定論的な世界に見えてしまうものとし、かつ又、時間に向きがあるものと錯覚させてしまうものなのか。全てのものが、ゆく河の流れの如く変化するものであるという諸行無常の世界観の中で生い育った筆者には、統計力学を生業にした今になってもまだ、このような説明を納得することが出来ないで居る。上でも述べたように「時間の向きの存在」が「我々」をも含めた複雑系の存在を可能にしているというのが散逸構造の理論の結論であり、その逆ではないようである。

そこで、以下で、筆者が気が付いた、「我々」の限界に基づかずに確率の概念を導入する論拠を説明しよう(文献4)。結論から言うと、「示強変数」とか「示量変数」という熱力学的極限で意味を成す量によって合理的に説明される現象が、この宇宙のある物理的側面を特徴づける現象として存在していることに、その根拠があるという事である。ここではこの事を、N個の質量mの同じ粒子からなる一次元古典調和振動格子という簡単な例を使って説明しよう。

粒子が運動している場合のn番目の粒子の平衡な静止位置からのずれをu_nで表す。この平衡な静止位置での粒子間の距離をaとする。$u_{n+N}=u_n$という境界条件を付す。そこで、波数kに付随した標準座標q_kを使うとu_nは

$$u_n=\sum_k q_k e^{ikna}=\sqrt{\frac{2}{Nm}}\sum_k e^{ikna}\sqrt{\frac{J_k}{\omega_k}}e^{i\alpha_k} \tag{5.1}$$

と書ける(文献5)。ここで、α_kとJ_kは、夫々、波数kに付随した角度変数と作用変数であり、ω_kは振動数である。ここでの議論では、$\omega_k=\omega_{-k}$を満たす事と、ω_kがkに滑らかに依存した関数であるということ以外には具体的な形は重要ではない。波数は$k=2\pi j/Na$で与えられ、jは$-N/2$から$N/2$の間のN個の整数の値を取る。作用変数を使って、系の全エネルギーは簡単に$E=\sum_k \omega_k J_k$と書ける。有限なaに対して、$N\to\infty$で$(2\pi/Na)\sum_k \;\to\int dk$となる。

さてここで、次の様な状況を考えよう。先ず、Nが大きく成る極限で系の全エネルギーが系の大きさNに比例するものとする。言い換えると、全エネルギーが示量変数に成っているということである。そこで、もしJ_kの値がkに滑らかに依存しいると仮定すると、和から積分への上で示した移行の仕方からいってJ_kはこの極限でNには依らない示強変数となっていることになる。

次ぎに重要な仮定として、この状況が(5.1)の粒子の位置の変位u_nが全てのnに渡って有限な場合に対して成り立っているものとする。この条件を満たすためには、$N\to\infty$の極限で(5.1)の右辺の因子$1/\sqrt{N}$をちょうど消去するように

$$\sum_k e^{i\alpha_k}\sim\sqrt{N} \tag{5.2}$$

となっていなくてはならない事が(5.1)の形から見て取れる。それ故、角度変数は所謂「大数の法則」が適用できる「乱雑変数」でなければ成らない。ここで、「乱雑」という意味は(5.2)を満たす角度変数の値の列$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}\ldots$を書くアルゴリズムが圧縮不可能(incompressible)だという事である（文献12）。

一般に列$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}\ldots$を変えると(5.2)の左辺の値は激しく変わる。ここで重要なのは、位相空間の中での殆ど全ての点が(5.2)を満たしている事である。したがって、大きなNでは、軌跡の初期条件の圧倒的な場合について(5.2)が満されている。このような激しく変わる物理量を扱う場合、分布関数を使っての汎関数による取り扱いが自然な道具立てと成る事は言うまでもない。このように、確率分布関数を必要とする根拠は、熱力学的極限で無理なく取り扱われる状況がこの自然界に存在することにあるとする方が、「我々」の測定能力の不完全性に基づいた人間中心主義的説明よりも、筆者には分かりが良いのだが、如何なものか。

上で述べたN粒子ガス系でも、この調和振動格子と同じような根拠で確率分布関数に依る記述が必要に成って来る事については、文献4で詳しく論じてある。

この節を終わる前に、もう一つ指摘しておきたい事は、振動格子系で扱う汎関数は、(5.2)で見られるようなNの半整数ベキで表されるようなものであり、上述のガス系の例のようにNやΩの整数ベキで表されるデルタ関数特異性として表現できるとは限らない事である。

6. おわりに

この論文では、相互作用が小さい極限の場合を例示した。そのような極限や粒子密度が小さい極限などの場合には、わざわざリウビル演算子の複素スペクトル表示を使って力学の第一原理に戻らなくても、BBGKY ハイラルキーなどの現象論を使っても同じ運動論的方程式が得られる。我々の複素スペクトル表示の威力が発揮するのは、相互作用や粒子密度が比較的大きく成って、λ展開や密度展開の最低次項だけでは近似が出来なく成った場合である。そのことについて、我々の理論を使えば高密度系の二次元ガスでの良く知られた衝突項の発散を取り除くことができることや、その発散の問題とグリーン＝久保の線形応答理論との関係などが既に論じられてある（文献13）。

また、我々の理論を量子力学の場と荷電粒子の相互作用系に適用して、量子力学で残されている良く知られた問題、即ち、量子力学での不安定粒子を如何に同定するか、また、それと、時間とエネルギーの間の不確定性関係がどう関係しているのか、という問題に一つの回答を与えた。量子力学では波動関数空間の中での時間を表す演算子が存在せず、従って、エネルギーと時間の交換関係が存在しない。それ故、時間とエネルギーの間の不確定性の意味は、位置と運動量の間のそれとは全然違ったものであり、その意味を明かにするのは大事な問題である。これらの問題や、古典場の理論で有名な輻射減衰の問題、観測の理論に関係した量子デコヒーレンスの問題、また、ある簡単な系での白色雑音を持ったランジュバン方程式の厳密な導出など、多くの問題が複素スペクトル表示を使って既に論じられているので、それらについては文献 14ー20 を参照されたい。

筆者は、プリゴジン教授の直接の指導の下で多大な思想的影響を被るという幸運に巡り会えた。教授の「時間の哲学」については日本語に翻訳された彼の著書（文献 21ー24）で直接読むことができるので、それらを是非合わせ読まれる事をお薦めする。

参考文献

1)グランスドルフ／プリゴジン:「構造、安定性、ゆらぎ」(みすず書房、1977)
2)T. Petrosky and I. Prigogine, *Chose, Solitons and Fractals* **7**, 411 (1996)
3)T. Petrosky and I. Prigogine, *Advances in Chemical Physics* **99**, 1 (1997)
4)T. Petrosky and I. Prigogine, *Computers Math. Applic.* **34**, 1 (1997)
5)I. Prigogine, "Nonequilibrium Statistical Mechanics," Wiley, New York (1962)
6)D. J. Driebe, "Fully chaotic maps and broken time symmetry," Kluwer, The Netherlands (1999)
7)T. Petrosky, G. Ordonez and T. Miyasaka, *Physical Review A* **53**, 4075 (1996)
8)E. Whittaker, "A Treatise on Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies," Cambridge Univ. Press, London (1964)
9)H. Poincarè, "New Methods of Celestial Mechanics," English translation, NASA Technical Translation F-450, 451, 452 (1957)
10)R. Balescu, "Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics ," Krieger Publishing Company, Malabar, Florida (1991)
11)ランダウ／リフシッツ:「統計物理学」(岩波書店、1969)
12)G.J. Chaitin, "Information, Randomness and Incompleteness," World Scientific, Singapore (1987)
13)T. Petrosky, *Foundation of Physics* **29**, 1417 (1999); **29**, 1581(1999)
14)T. Petrosky and G. Ordonez, *Physical Review A* **56**, 3507, (1997)
15)G. Ordonez, T. Petrosky and I. Prigogine, *Physical Review A* **63,** 052106 (2001)
16)T. Petrosky, G. Ordonez and I. Prigogine, *Physical Review A* **64,** 062101 (2001)
17)T. Petrosky, G. Ordonez and I. Prigogine, *Physical Review A* **68,** 022107 (2003)
18)T. Petrosky, *International Journal of Quantum Chemistry* **98**, 103 (2004)
19)T. Petrosky and V. Barsegov, *Physical Review E* **65,** 046102 (2002)
20)S. Kim and G. Ordonez, *Physical Review E* **67,** 056117 (2003)
21)プリゴジン:「存在から発展へ」(みすず書房、1984)
22)プリゴジン／スタンジェール:「混沌からの秩序」(みすず書房、1987)
23)プリゴジン:パリティ、**10**、No. 01、No. 02(1995)
24)プリゴジン:「確実性の終焉」(みすず書房、1997)