【課程博士用】

学 位 審 査 報 告 書

（ ふ り が な ） 氏 名	さの よしお 佐野 良夫
学位（専攻分野）	博 士 （ 理 学 ）
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻

（学位論文題目）

Matroids on convex geometries:
Subclasses, operations, and optimization
（凸幾何上のマトロイド：部分クラス、作用、最適化）

論 文 調 査 委 員	（主査） 藤 重 悟 教授 岩 田 覚 教授 向 井 茂 教授

理 学 研 究 科

（ 続紙 １ ）

京都大学	博士（理学）	氏名	佐野　良夫
論文題目	Matroids on convex geometries: Subclasses, operations, and optimization （凸幾何上のマトロイド:部分クラス、作用、最適化）		

（論文内容の要旨）

H. Whitney らによって 1930 年代に導入されたマトロイドの概念は、離散最適化において、効率的なアルゴリズムを支える組合せ的数理構造としてきわめて重要な役割を果たしており、その離散構造の研究が 1960 年以降、精力的に進められてきている。マトロイドは与えられた有限集合のべき集合上に定義されるが、実際的な問題ではそのすべての部分集合は必ずしも意味を持たないことも多い。そこで、有限集合上の半順序集合のイデアルの集合の全体を考えた一般化が 1980 年代後半から展開され、さらに、半順序集合の一般化であり組合せ的にも有用な凸幾何上への一般化の可能性が注目されたが、凸幾何上にマトロイド構造を適切な形でどのように定義できるかが未解決であった。この問題は、2007 年の S. Fujishige, G. A. Koshevoy, Y. Sano の論文[Matroids on convex geometries (cg-matroids), Discrete Mathematics, Vol.307 (2007) p.p.1936-1950]によってひとつの解決に至った。本学位論文は、上記論文に引き続き凸幾何マトロイドに関する詳細な研究を行ったものである。

まず第１節で凸幾何マトロイドに至る研究展開の背景を述べ、第２節では凸幾何に関連する諸定義や準備を行う。そして第３節において、凸幾何マトロイドの定義およびその組合せ構造について論じる。ここでは新たに、凸幾何マトロイドの独立集合族の増加公理よりも見かけ上弱い増加公理によっても凸幾何マトロイドの独立集合族が特徴づけられることを示すとともに、凸幾何マトロイドの全域集合族の公理系による特徴づけを与えた。

さらに第４節では、凸幾何マトロイドの部分クラスに関して考察している。凸幾何マトロイドの独立集合族についての増加公理を強めた公理を考えることにより、凸幾何マトロイドの部分クラスである「狭義凸幾何マトロイド」が定義されるが、このことと同様に、凸幾何マトロイドの全域集合族についての減少公理を強めた公理を考えることにより、「余狭義凸幾何マトロイド」が定義され、それに関する特徴づけを与えるなど、詳細な構造を明らかにしている。

第５節では、制限や縮約などの凸幾何マトロイドに対する作用について論じている。これらの作用は、前節で論じた凸幾何マトロイドの部分クラスと非常に深い関係がある。一般に、凸幾何マトロイドの制限や縮約が凸幾何マトロイドになるとは限らないのであるが、狭義凸幾何マトロイドの制限は常に狭義凸幾何マトロイドであり、余狭義凸幾何マトロイドの縮約は常に余狭義凸幾何マトロイドであることが示されている。

第６節では、凸幾何マトロイドにおける最適化問題として、最大独立集合問題（最大基問題）を考察している。その結果、凸幾何マトロイドに対して、それが狭義凸幾何マトロイドであることと、ある「自然な」重み関数に対して貪欲アルゴリズムが最適解を与えることとが同値であることが示されている。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

H. Whitney らによって 1930 年代に導入されたマトロイドの概念は、離散最適化において、効率的なアルゴリズムを支える組合せ的数理構造としてきわめて重要な役割を果たしており、その離散構造の研究が 1960 年以降、精力的に進められてきている。マトロイドは与えられた有限集合のべき集合上に定義されるが、実際的な問題ではそのすべての部分集合は必ずしも意味を持たないことも多い。そこで、有限な半順序集合のイデアルの集合の全体を考えた一般化が 1980 年代後半から展開され、さらに、半順序集合の一般化であり組合せ的にも有用な凸幾何上への一般化の可能性が注目されたが、凸幾何上にマトロイド構造を適切な形でどのように定義できるかが未解決であった。この問題に対して、佐野氏は、藤重・Koshevoy との共著論文（2007）において、凸幾何上のマトロイド(cg-マトロイド)を定義し、その構造を吟味し、凸幾何マトロイドが数理的に興味ある離散構造を有することを明らかにした。さらに引き続き、佐野氏は、狭義凸幾何マトロイド(strict cg-matroid)というクラスの凸幾何マトロイドについて、その階数関数の特徴づけを与えるとともに、制限や縮約などの幾つかの作用に基づく凸幾何マトロイドの部分クラスの分類と特徴づけを行っている。

マトロイドに対して知られている５つの同値な独立集合族の増加公理を考えて、そのうち 3 つが狭義凸幾何マトロイドを特徴づけ、残りの 2 つが凸幾何マトロイドを特徴付けることを示した。また、凸幾何マトロイドの、全域集合族の公理系による特徴づけを与えた。さらに、マトロイドの全域集合族による同値な 5 つの減少公理を用いて凸幾何マトロイドを分類することによって、凸幾何マトロイドの新たな部分クラスである余狭義凸幾何マトロイド(co-strict cg-matroid)を得て、その特徴づけを与えた。

制限や縮約などの凸幾何マトロイドに対する作用について論じ、これらの作用は、上記で論じた凸幾何マトロイドの部分クラスと非常に深い関係があるが、一般に、凸幾何マトロイドの制限や縮約が凸幾何マトロイドになるとは限らない。狭義凸幾何マトロイドの制限は常に狭義凸幾何マトロイドであり、余狭義凸幾何マトロイドの縮約は常に余狭義凸幾何マトロイドであることが示されている。

最後に、凸幾何マトロイドにおける最適化問題として、最大独立集合問題（最大基問題）を考察し、貪欲アルゴリズムと凸幾何マトロイドの関係を明らかにした。すなわち、凸幾何マトロイドに対して、それが狭義凸幾何マトロイドであることと、ある「自然な」重み関数に対して貪欲アルゴリズムが最適解を与えることとが同値であることを示した。

以上のように、佐野氏は、未解決であった凸幾何上へのマトロイド構造の導入を実現し、その詳細な離散構造を解明した。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。また、平成 22 年 1 月 25 日に論文内容とそれに関連した事項について口頭試問を行った。その結果、合格と認めた。