

砂の力学モデルとしての多重せん断モデル
の大変形解析の定式化およびその適用性に
関する研究

上田 恭平

砂の力学モデルとしての多重せん断モデル
の大変形解析の定式化およびその適用性に
関する研究

上田 恭平

砂の力学モデルとしての多重せん断モデルの大変形解析の定式化 およびその適用性に関する研究

目次

第1章 序論	1
1.1 はじめに.....	1
1.2 既往の研究.....	2
1.3 研究の目的.....	4
1.4 本論文の構成.....	4
第2章 ひずみ空間多重せん断モデルにおけるストレス-ダイレイタンスー関係.....	6
2.1 概要.....	6
2.2 ひずみ空間における多重せん断モデル.....	6
2.3 多重せん断モデルの一般形への拡張.....	9
2.4 ダイレイタンスーの定式化.....	12
2.5 モデルパラメータ.....	17
2.6 まとめ.....	30
第3章 大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式の定式化.....	32
3.1 概要.....	32
3.2 大変形理論における応力・ひずみ.....	32
3.3 物質表示での積分形構成式（基本形）.....	36
3.4 物質表示での増分形構成式（基本形）.....	39
3.5 空間表示での積分形構成式（基本形）.....	45
3.6 空間表示での増分形構成式（基本形）.....	47
3.7 空間表示でのダイレイタンスーの定式化.....	49
3.8 物質表示でのダイレイタンスーの定式化.....	53
3.9 2次元解析での物質表示による積分形構成式.....	53
3.10 2次元解析での物質表示による増分形構成式.....	56
3.11 2次元解析での空間表示による積分形構成式.....	61
3.12 2次元解析での空間表示による増分形構成式.....	64
3.13 モデルパラメータ.....	66
3.14 まとめ.....	71
第4章 大変形理論に基づく多孔質体の支配方程式の定式化.....	73

4.1	概要.....	73
4.2	空間表示での支配方程式.....	73
4.3	物質表示での支配方程式.....	81
4.4	Total Lagrangian 法による解析手法の概要.....	86
4.5	Updated Lagrangian 法による解析手法の概要.....	112
4.6	Shear Locking 現象の回避.....	126
4.7	まとめ.....	128
第5章 多重せん断モデル型線形弾性体の定式化およびその適用性.....		130
5.1	概要.....	130
5.2	多重せん断モデル型線形弾性体の定式化.....	130
5.3	大変形解析における弾性体の基本方程式.....	136
5.4	要素シミュレーション.....	139
5.5	まとめ.....	143
第6章 大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式を用いた要素シミュレーション...145		
6.1	概要.....	145
6.2	非排水単調せん断試験.....	145
6.3	非排水繰り返しせん断試験.....	171
6.4	非排水平面ひずみ圧縮試験.....	187
6.5	まとめ.....	207
第7章 大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式の地震応答解析における適用性...210		
7.1	概要.....	210
7.2	解析結果に影響を及ぼす諸要因.....	210
7.3	盛土遠心模型実験に対する検討.....	211
7.4	後志利別川堤防に対する検討.....	234
7.5	神戸港 RF3 岸壁に対する検討.....	246
7.6	神戸港第7防波堤に対する検討.....	272
7.7	まとめ.....	289
第8章 結論.....		292
参考文献.....		296
謝辞.....		302

第 1 章 序論

1.1 はじめに

1995 年 1 月 17 日に発生した兵庫県南部地震では数多くの犠牲者を出すとともに、各種ライフラインや橋梁、護岸、岸壁などの社会基盤施設に大きな被害が発生した。このことを受けて、土木学会は地震動レベルを 2 段階に分類するとした新たな耐震設計に関する提言を発表した（土木学会，1996）。ここでは、レベル 1 地震動は「施設の供用期間中に発生する確率が高い地震動（再現期間 75 年程度）」を表すものとし、それに対してレベル 2 地震動は「施設の供用期間中に発生する確率は低い、大きな強度を有する地震動（再現期間数百年程度）」として定義されている。ただし、直下型地震を想定する場合には、その発生確率が極めて低い場合であってもレベル 2 地震動として考慮される。新たな耐震設計においては、地震時に構造物が果たすべき役割（すなわち重要度）に応じ、これらの想定地震動に対して構造物が満たすべき耐震性能を明確に設定する必要がある。例えば、レベル 1 地震動に対しては構造物の機能が維持される必要があるが、レベル 2 地震動に対しては施設が健全性を損なわず所定の機能を保持することを目標として耐震設計を行う。1995 年兵庫県南部地震を契機に主流となりつつある性能規定型の耐震設計では、レベル 1 およびレベル 2 の 2 段階の想定地震動を考慮し、それぞれの地震動レベルに応じて許容される構造物の被害程度を適切に設定することにより、構造物の耐震性能を総合的かつ合理的に規定する。

我が国のみならず世界的にも、1989 年米国ロサンゼルス地震や 1994 年米国ノースリッジ地震など、大都市を襲った大地震とそれに伴う甚大な被害から、耐震設計において性能設計の必要性が認識されるようになった。それまでは仕様規定型の耐震設計法を用いるのが主流であり、そこでは構造形式や構造材料、設計手法などの仕様は設計基準類により規定されていた。このように、仕様規定では具体的に使用材料や形状、寸法などが規定されているため、誰にでも理解しやすいことに加え、設計および基準に対する適合性の照査が容易に行えるというメリットがある。しかし、規定された以外の材料や構造モデルを扱う場合には対応が難しく、目標性能としても不明瞭なものとなることが予想される。これに対して性能設計では、構造物の仕様を直接に規定する代わりに、対象とする構造物の目的および期待される性能を明確にし、それらを規定することで設計を行う。このように、性能設計では実現すべき目標性能、およびそれを規定するための照査項目や照査方法に重きが置かれ、これまで仕様規定により定められていた部材寸法や形状などは設計者に委ねられる形となる。これは、性能設計がより自由度が高い柔軟な設計法であることを意味するが、その反面、規定した性能に対する適合性の検証が困難であり、設計に高い技術が必要とされる。また、設計する構造物が性能目標として掲げた状態を満足できるかどうかを評価す

るには、種々のレベルの地震動のもとでどの程度の被害が生じるかについて、精度よく予測できることが求められる。

我が国は世界でも有数の地震国であり、1995年の兵庫県南部地震以降もマグニチュード7.0クラスの大地震が複数発生している。例えば、2003年十勝沖地震（M8.0）、2004年新潟県中越地震（M6.8）、2005年福岡県西方沖地震（M7.0）、2007年能登半島地震（M6.9）および同年新潟県中越沖地震（M6.8）などがその代表例である。また、今後発生が予想される地震も数多く存在し、活断層で発生するタイプとしては、琵琶湖西岸断層帯（M7.8程度）、上町断層帯（M7.5程度）、中央構造線断層帯（M8.0程度）などによる地震が挙げられる（地震調査研究推進本部地震調査委員会、2009）。これらの断層帯は再現期間が非常に長いことから、発生確率は極めて低く設定されているが、海溝型の地震である東南海地震（M8.1前後）では今後30年以内に約60～70%、南海地震（M8.4前後）では50～60%程度の発生確率が予想されている。東南海地震および南海地震が同時発生した場合には、マグニチュード8.5を超える巨大地震に見舞われる可能性も否定できない。このようなことを考えれば、今後さらに性能設計の重要性は増すものと思われる。

今後発生が予想される大地震に対する危惧から、河川堤防や道路・鉄道盛土、ダムといった土構造物に対しても、1995年兵庫県南部地震以降において、すべりに対する安全性のみならず沈下量や変形量も要求性能の対象として耐震設計が行われるようになってきている。このような傾向はケーソン式岸壁などの港湾構造物に関しても同様である。これらの各種構造物に対して性能照査型の耐震設計を行おうとする場合、先にも述べたとおり変形の照査が非常に重要となる。震度法が耐震設計の主流であった時代においては、材料非線形性を考慮できる動的解析はその信頼性が乏しいこともあり、実設計で用いられることはほとんどなかった。しかし、1995年兵庫県南部地震などの大地震を契機として、想定地震動レベルに応じた地盤・構造物系の被害程度を数値解析により推定しようとする研究が盛んになり、近年ではある程度の精度により地震時の被害程度を予測することが可能となってきている。このような被害予測手法のうち、地盤・構造物間の動的相互作用や砂質土の液状化現象の扱いに優れているものとして有限要素法による動的有効応力解析法が挙げられる。しかし、偏に有効応力解析法と言っても、そこで用いられている構成モデルなどには種々のものが存在し、得られた結果にも解析法によるばらつきが見られる状況である。現状での有効応力解析法における推定精度に関してはまだ発展途上の段階であると言え、来るべき大地震に対してより信頼しうるレベルで性能設計を行うためには、有効応力解析法による地震時の被害推定の精度向上が必要不可欠なものと思われる。

1.2 既往の研究

有効応力解析法には採用されている構成モデルの違いなどにより種々のものが存在する。繰り返し載荷時の砂の挙動を表す構成モデルとしては、負荷曲面や硬化関数、流れ則など

の概念を用いる弾塑性構成則が数多く存在するが、土の力学モデルはこのような弾塑性型の構成モデルに限られたものではなく、これらとは異なった視点から土の挙動を表現している構成モデルも提案されている。ここでは各種提案されている有効応力解析手法の中から、土の挙動の再現性に優れている方法として、多重せん断機構に基づく砂の力学モデル (Iai ら, 1990a) を用いた有効応力解析法を取り上げる。この多重せん断モデルを用いた有効応力解析法では、せん断応力-せん断ひずみ関係を Towhata ら (1985) により提案された多重せん断ばねモデルにより表現し、過剰間隙水圧モデルとしては Iai ら (1990b) により提案されたモデルを用いている。

この多重せん断機構モデルを用いた有限要素解析により、過去の地震時の被災事例に対する再現解析が数多く実施されており、その適用性の検討がなされている。それらの解析において対象とした代表的な被災事例としては、1983 年日本海中部地震における秋田港の矢板式岸壁 (Iai ら, 1993)、1993 年釧路沖地震の際の釧路港の水平成層地盤における非線形応答 (Iai ら, 1995)、同年北海道南西沖地震により被災した後志利別川の河川堤防 (井合ら, 2001; Ozutsumi ら, 2002)、1995 年兵庫県南部地震の際に被害を受けた神戸港六甲アイランドのケーソン式岸壁 (一井ら, 1997)、神戸港の防波堤 (井合, 1996) および直杭式棧橋 (南ら, 1997)、神戸市中心部とポートアイランドを結ぶ神戸大橋のニューマチックケーソン基礎のような深い基礎 (Liu ら, 1997)、淀川下流域の河川堤防 (井合ら, 2001) などが挙げられる。また、各種構造物を対象とした遠心力場での模型振動実験に対しても再現解析が実施されている。例えば、浅い基礎を有する地盤・地上構造物系 (Iai ら, 1993) や盛土構造物 (井合, 1989)、地中構造物 (Iai ら, 1992) などがその代表例である。

これらの解析によると、液状化地盤上に構築された盛土や矢板式岸壁の地震時の変形挙動が過大評価されるという問題があったため、小堤 (2003) は、過剰間隙水圧モデルにおける応力空間での変相線から破壊線へと至る領域でのダイレイタンスの評価法を検討し、新たな修正モデルを提案した。この修正モデルでは、変相線と破壊線の間に第 2 変相線を設け、第 2 変相線を越えた応力空間においてなされる塑性せん断仕事は負のダイレイタンスに寄与しないものとしている。また、非線形性の著しい地震応答解析において、応答加速度時速歴に不自然なスパイク上のピークが多発する現象が見られたため、小堤 (2003) はこれを改善するために、過剰間隙水圧の変化に伴う応力-ひずみ関係の変動を正確に追跡しつつ非線形反復計算を行う方法 (改良型非線形反復計算法) を提案している。小堤はこの他にも、地震応答解析の際に数値解析的な安定性のために用いられる剛性比例型のレーレー減衰行列に対する剛性比例係数の設定方法や、2 次元平面ひずみ条件下において杭-地盤系の相互作用における 3 次元効果を適切に考慮する方法などを提案している。

Towhata ら (1985) により提案された多重せん断ばねモデルは、当初は 2 次元平面ひずみ条件のみを対象とするものであったが、井合 (1991) により 3 次元空間に適用できるように拡張され、さらに Iai & Ozutsumi (2005) により種々の破壊規準を織り込む形で定式化が行われている。

1.3 研究の目的

前節において多重せん断機構モデルに対する既往の研究内容について示したが、そこで用いられていた構成関係は、いずれも微小変形理論に基づき構築されたものであった。そのため、変形が小さい現象に対しては適用が可能であるものの、大変形現象を取り扱うにあたっては、ある程度の誤差を承知の上で解析を行うことを余儀なくされていた。1995年兵庫県南部地震などの過去の大地震では、河川堤防などの盛土構造物やケーソン式岸壁に代表される港湾構造物などにおいて、数メートル単位での沈下や変形が生じた事例が報告されている。今後想定される大地震においても、液状化対策が施されていない地盤上の地盤・構造物系では、同程度もしくはそれ以上の変形を生じうる可能性は否定できない。このような事実を考慮すると、従来の微小変形解析をそのまま適用した場合、対象とするモデルによっては工学上無視できないような問題が生じることが考えられる。したがって、地震時における液状化地盤上の地盤・構造物系の被害をより高い精度で推定するためには、より厳密な大変形理論に基づき構築された構成モデルの適用が望まれる。本研究では、大変形理論に基づき、砂のような粒状体の力学モデルとしてのひずみ空間における多重せん断モデル (Iai & Ozutsumi, 2005) の拡張を行うとともに、それを用いた地震応答解析を実施することによりその適用性を検証することを目的とする。

1.4 本論文の構成

本論文は全8章から構成されており、各章における検討内容を以下に簡潔に示す。なお、第1章は序論であり、本章に示すとおりである。

第2章では、微小変形理論に基づき、砂のような粒状体の力学モデルとしてのひずみ空間における多重せん断モデル (Iai & Ozutsumi, 2005) に対し、新たなストレス-ダイレイタンスー関係を組み込んだ形での定式化を行う。まず、ダイレイタンスーの影響を考慮しない基本形としての多重せん断モデルについて、応力とひずみとの直接的な構成関係（これ以降、積分形と称す）、および、応力増分とひずみ増分との関係を表す増分形の両者における定式化の流れを示した後、膨張的および収縮的成分からなるダイレイタンスーの効果を取り入れることで、積分形および増分形での一般化された多重せん断モデル構成式を与える。

第3章では、第2章で示した新たなストレス-ダイレイタンスー関係に基づく多重せん断モデルを、幾何学的非線形性を考慮できるよう大変形理論を用いて拡張する。大変形理論で用いられる応力やひずみなどについて簡潔に述べた後、物質表示および空間表示の双方において多重せん断モデル構成式の定式化を示す。構成式は微小変形解析の場合と同様に、積分形および増分形の両者により与えるものとする。ダイレイタンスー成分に関しても、物質表示および空間表示の双方において定式化を行うものとし、2次元平面ひずみ条件での

適用を考え、積分形、増分形ともにベクトル・マトリクス表示により構成関係を与える。

第 4 章では、間隙水で満たされた多孔質体の支配方程式を大変形理論に基づき与えることとし、有限要素法への導入のため、物質表示および空間表示により表された支配方程式の離散化を行う。あわせて、物質表示による Total Lagrangian 法、および、空間表示による Updated Lagrangian 法を用いた解析手法の概要について述べる。

第 5 章では、第 3 章で示した多重せん断モデル構成式を参考にし、大変形理論に基づく新たな線形弾性体構成式を提案する。この多重せん断モデル型の線形弾性体構成式を有限要素法に導入するため、第 4 章にならない、大変形理論に基づき弾性体の支配方程式の定式化を行う。これらの定式化を基にして要素シミュレーションを実施し、多重せん断モデル型の線形弾性体構成式の適用性を検討する。

第 6 章では、第 3 章で述べた大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式を用いて、各種の要素シミュレーションを実施する。対象とするモデルは、非排水単調せん断試験、非排水繰返しせん断試験、非排水平面ひずみ圧縮試験の各種である。

第 7 章では、地震時の地盤・構造物系の被災事例に対する地震応答解析を実施し、第 3 章で述べた大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式の適用性を検討する。対象とする事例は、土木研究所で実施された盛土遠心模型実験、1993 年北海道南西沖地震の際に被災した後志利別川堤防、1995 年兵庫県南部地震の際に被災した神戸港 RF3 岸壁および第 7 防波堤の各種である。

第 8 章は結論であり、本研究で得られた知見をまとめて示す。

第2章 ひずみ空間多重せん断モデルにおけるストレス-ダイレイタ ンシー関係

2.1 概要

本章では、砂のような粒状体の力学モデルとしてのひずみ空間における多重せん断モデル (Iai & Ozutsumi, 2005) に対し、新たなストレス-ダイレイタンシー関係を組み込んだ形での定式化を行う。ここで用いるストレス-ダイレイタンシー関係は、ダイレイタンシーによる体積ひずみ成分が、仕事をしないせん断機構として表現される膨張的成分と、累積塑性せん断ひずみに比例する収縮的成分の和として与えられるという仮定に基づくものである。

2.2 ひずみ空間における多重せん断モデル

大変形解析での構成式の定式化に先立ち、まず、微小変形解析における構成式に関して述べる。なお、構成式の表記に関しては、Holzapfel (2000) に準じた表記法を用いることとし、ギリシャ文字 (例えば, ω, Ω) および小文字のラテン文字 (例えば, p, q) はスカラーを、小文字のボールド体のラテン文字 (例えば, \mathbf{t}, \mathbf{n}) はベクトルを、ボールド体のギリシャ文字 (例えば, $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$) および大文字のボールド体のラテン文字 (例えば, \mathbf{E}, \mathbf{S}) は 2 階のテンソルを、白抜きのラテン文字 (例えば, \mathbb{C}, \mathbb{N}) は 4 階のテンソルを表わすものとする。ただし、場合によっては、小文字のボールド体のラテン文字 (例えば, \mathbf{b} (式(3.6)参照) や \mathbf{e} (式(3.5)参照)) により 2 階のテンソルを表わすこともある。また、ベクトル \mathbf{u} と \mathbf{v} のスカラー積 (内積) は $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ で、ベクトル積 (外積) は $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ で、テンソル積 (直積, dyad) は $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ で与える。さらに、テンソル \mathbf{A} と \mathbf{B} のスカラー積 (二重縮合, double contraction) は $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ で表わすものとする。また、テンソル \mathbf{A} の転置および逆は、それぞれ \mathbf{A}^T , \mathbf{A}^{-1} と表記する。

2.2.1 積分形での構成式 (基本形)

ひずみ空間における多重せん断モデルでは、有効応力 (引張りを正とする) は、粒状体を構成している粒子構造を特徴づける branch vector と、それに直交する tangential vector との dyad 積を基にして、以下のように与えられる (Iai, 1993a ; Iai & Ozutsumi, 2005)。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (2.1)$$

$$\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle = \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} + \mathbf{n}^{(ij)} \otimes \mathbf{t}^{(ij)} \quad (2.2)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}'$ は有効応力テンソル、 p は平均有効応力（圧縮を正とする）、 \mathbf{I} は2階の単位テンソル、 $q^{(ij)}$ は多重せん断モデルにおける仮想単純せん断応力、 $\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle$ は仮想単純せん断機構を表す2階の fabric tensor（fabric tensor の定義については、Oda ら（1982）を参照のこと）である。ここでの仮想単純せん断 $\langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle$ は、概念的には図 2.1(a)に示すように表される。一方、軸差せん断成分 $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$ は図 2.1(b)のように表されるが、これは、応力の作用面を $\pi/4$ だけ傾ければ、図 2.1(a)に示す単純せん断成分と等価である。このことより、仮想単純せん断機構を表す2階の fabric tensor では、単純せん断と同様に軸差せん断の影響も考慮することができる。

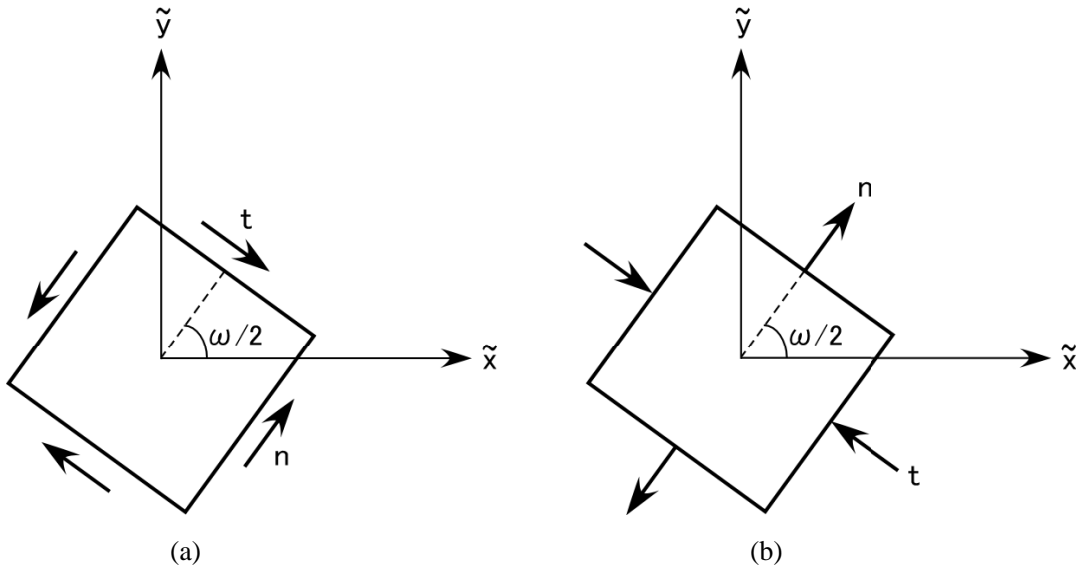


図 2.1 2次元平面での仮想単純せん断機構の概念：

(a)単純せん断 $\langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle = \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{t}$ ；(b)軸差せん断 $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$

また、 $\Delta\omega$ は多重せん断モデルにおける多重せん断バネ間隔であり、1/2 円におけるバネ本数を I とすると、

$$\Delta\omega = \pi / I \quad (2.3)$$

と表される。一方、 $\Delta\Omega^{(j)}$ は立体角であり、3次元モデルを構成する J 個のサブプレーンに対して定義される。なお、それぞれのサブプレーン上で仮想平面ひずみ条件が成立し、2次元平面ひずみ条件下における多重せん断モデルが適用できるものとする。式(2.1)の導出に際しては、巨視的な意味での有効効力が、微視的構造における粒子間の接触力の体積平均と

して表されるとする概念が用いられている (Iai, 1993b)。

積分形の構成式では、式(2.1)に示すように、巨視的な有効応力 $\boldsymbol{\sigma}'$ は巨視的なひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ の関数として与えられる。この直接的な応力・ひずみ関係を導くため、まずは以下に示す体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ (引張りを正とする)、および、仮想単純せん断ひずみ $\gamma^{(ij)}$ を求める必要がある。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

$$\gamma^{(ij)} = \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

次に、ダイレイタンスーの影響による体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_d$ を考慮するため、以下に示すような有効体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}'$ を導入する (Iai, 1993c)。

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d \quad (2.6)$$

ダイレイタンスーによる体積ひずみは、後述する2階の projection tensor \mathbf{I}_d を用いて、以下のような増分形で与えられるものとする。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = \mathbf{I}_d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.7)$$

式(2.1)における等方圧力 p および仮想単純せん断応力 $q^{(ij)}$ は、それぞれ有効体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}'$ および仮想単純せん断ひずみ $\gamma^{(ij)}$ の関数として、以下のように与えられる。

$$p = p(\boldsymbol{\varepsilon}') \quad (2.8)$$

$$q^{(ij)} = q^{(ij)}(\gamma^{(ij)}) \quad (2.9)$$

ひずみ空間における多重せん断モデルの積分形構成式の基本形は、式(2.1)および式(2.8)、(2.9)により表され、巨視的な意味でのひずみと有効応力とが、誘導異方性を考慮した2階の fabric tensor $\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle$ を通じて関連付けられている。

2.2.2 増分形での構成式 (基本形)

増分形の構成式は、式(2.1)の両辺の微分をとることで、以下のように与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = -\dot{p}\mathbf{I} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \dot{q}^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (2.10)$$

$$\dot{p} = \frac{dp}{d\boldsymbol{\varepsilon}'} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' \quad (2.11)$$

$$\dot{q}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \dot{\gamma}^{(ij)} \quad (2.12)$$

式(2.4)から式(2.7)を式(2.10)に代入すると、以下のような増分形構成式が得られる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.13)$$

$$\mathbb{C} = K_{LU} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \otimes \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} - K_{LU} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}_d \quad (2.14)$$

ここに,

$$K_{LU} = -\frac{dp}{d\varepsilon'} \quad (2.15)$$

$$G_{LU}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \quad (2.16)$$

式(2.15), (2.16)に示す接線剛性テンソルの各成分は, 経路依存性をもつ関数として, ひずみ増分の符号により以下のように定義される。

$$K_{LU} = \begin{cases} K_L & \text{if } \varepsilon' \geq 0 \quad (\text{載荷/中立状態}) \\ K_U & \text{if } \varepsilon' < 0 \quad (\text{除荷状態}) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$G_{LU} = \begin{cases} G_L & \text{if } \dot{\gamma} \geq 0 \quad (\text{載荷/中立状態}) \\ G_U & \text{if } \dot{\gamma} < 0 \quad (\text{除荷状態}) \end{cases} \quad (2.18)$$

ひずみ空間における多重せん断モデルの増分形構成式の基本形は, 式(2.13)に示すように, 誘導異方性を考慮した4階の fabric tensor \mathbb{C} を用いて与えられる。式(2.14)における第1項および第2項は, それぞれ体積成分および偏差成分の関係を表しており, 対称マトリクスである。一方, 第3項は, 体積成分と偏差成分とのカップリング項として, ダイレイタンスーによる影響を考慮しており, 非対称なマトリクスとなっている。

本研究では, 土が載荷以前から本来有している構造異方性 (固有異方性) は簡略化のため考慮しないこととし, 載荷に伴う内部応力の変化によって生じる構造異方性 (誘導異方性) のみを考慮する。なお, 粒状体の固有構造に伴う固有異方性は, 各々の仮想単純せん断機構 $\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle$ の方向に対する依存性を式(2.9)に組み入れることで導入できるものと思われる。

2.3 多重せん断モデルの一般形への拡張

2.3.1 積分形での構成式 (一般形)

ここでは, 前項までに述べてきた多重せん断モデルの基本形構成式を, 実際の砂の挙動をより良く再現できるよう, 一般的な形へと拡張を行う。式(2.1)から式(2.5)はそのまま用いることとし, 式(2.6)に現れるダイレイタンスーによる体積ひずみを, 以下のように収縮的成分 ε_d^c および膨張的成分 ε_d^d に分解する。

$$\varepsilon_d = \varepsilon_d^c + \varepsilon_d^d \quad (2.19)$$

また、収縮的ダイレイタンスー増分の液状化状態依存性を表現するため、仮想有効体積ひずみ ε'' を導入する。これは、有効体積ひずみから膨張的ダイレイタンスー成分を除去したものであり、以下で与えられる。

$$\varepsilon'' = \varepsilon - \varepsilon_d^c \quad (2.20)$$

次に、等方圧力 p に関しては式(2.8)をそのまま適用することとし、式(2.9)に示す仮想単純せん断応力を以下のように一般化する。

$$q^{(ij)} = q^{(ij)}(\gamma^{(ij)}, \varepsilon', \varepsilon'', J_2, \theta) \quad (2.21)$$

式(2.21)において、仮想単純せん断ひずみ $\gamma^{(ij)}$ のみの関数とせず、有効体積ひずみ ε' および仮想有効体積ひずみ ε'' を含む関数としている理由は、仮想単純せん断機構の拘束圧依存性および液状化状態依存性を考慮するためである。また、同式における J_2 および θ は、応力テンソルの第2不変量および Lode 角であり、3次元モデルにおいて導入される種々の破壊基準に対する仮想単純せん断機構の依存性を考慮するため用いられる。

なお、2次元解析における多重せん断モデルでは、仮想単純せん断応力の応力テンソル依存性（すなわち、式(2.21)における J_2 および θ ）は存在せず、式(2.21)は以下のように簡略化される。

$$q^{(ij)} = q^{(ij)}(\gamma^{(ij)}, \varepsilon', \varepsilon'') \quad (2.22)$$

2.3.2 増分形での構成式（一般形）

本項では、一般化された増分形構成式の導出過程を順を追って説明する。まず、式(2.21)の両辺の時間微分を行うと、以下ようになる。

$$\dot{q}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \dot{\gamma}^{(ij)} + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'} \dot{\varepsilon}' + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''} \dot{\varepsilon}'' + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial J_2} \dot{J}_2 + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (2.23)$$

ダイレイタンスーによる体積ひずみの変化率を、後述する2階の projection tensor \mathbf{I}_d および \mathbf{J}_d を用いて以下のように与える。

$$\dot{\varepsilon}_d = \mathbf{I}_d : \dot{\varepsilon} + \mathbf{J}_d : \dot{\sigma}' \quad (2.24)$$

$$\dot{\varepsilon}_d^c = \mathbf{I}_d^c : \dot{\varepsilon} \quad (2.25)$$

結果的に、式(2.23)の右辺におけるひずみ速度は、以下のように表すことができる。

$$\dot{\gamma}^{(ij)} = \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle : \dot{\varepsilon} \quad (2.26)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' = (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{J}_d : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (2.27)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d^c) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.28)$$

同様にして、式(2.23)の右辺に現れる応力速度は、以下のようなになる。

$$\dot{\mathbf{J}}_2 = \frac{\partial \mathbf{J}_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (2.29)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (2.30)$$

式(2.26)から式(2.30)を、式(2.11)および式(2.23)に代入すると、

$$\dot{p} = \frac{dp}{d\varepsilon'} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{dp}{d\varepsilon'} \mathbf{J}_d : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}^{(ij)} &= \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'} \mathbf{J}_d : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \\ &+ \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d^c) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \mathbf{J}_2} \frac{\partial \mathbf{J}_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \end{aligned} \quad (2.32)$$

のようなになる。式(2.10)にこれらの式を代入すると、一般化された増分形の構成式が以下のとおり与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{Q} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= K_{LU} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \otimes \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \\ &- K_{LU} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}_d + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (H_{LU}^{(ij)} + L_{LU}^{(ij)}) \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \otimes \mathbf{I} \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (H_{LU}^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \otimes \mathbf{I}_d + L_{LU}^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \otimes \mathbf{I}_d^c) \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \\ \mathbf{Q} &= -K_{LU} \mathbf{I} \otimes \mathbf{J}_d - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I H_{LU}^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \otimes \mathbf{J}_d \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \otimes \mathbf{J}_q \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

ここに、

$$H_{LU}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'} \quad (2.36)$$

$$L_{LU}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{J}_q = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (2.38)$$

であり、 K_{LU} および $G_{LU}^{(ij)}$ はそれぞれ式(2.15)、式(2.16)により与えられるものとする。

式(2.34)における右辺第1項から第3項までは、式(2.14)に示す増分形構成式の基本形の場合と等しい。一般形における第4項は、せん断機構の拘束圧依存性および液状化状態依存性を表し、第5項はせん断機構に与えるダイレイタンシーの影響を表すものである。第3項から第5項までは、いずれも圧縮伸張の機構（体積成分）とせん断に関する機構（偏差成分）のカップリングを示すもので、非対称マトリクスとなる。式(2.35)における4階の fabric tensor \mathbb{Q} は、せん断機構およびダイレイタンシーに対する、応力の第2不変量 J_2 および Lode 角 θ の影響を表すものである。なお、2次元平面ひずみ条件においては、式(2.35)は考慮する必要がないので、式(2.33)は式(2.13)と同じ形（ただし、接線剛性マトリクスは式(2.34)で与える）に簡略化される。

なお、2次元解析の場合、ダイレイタンシーの応力依存性（すなわち、式(2.21)における J_2 および θ ）は無視されるので、式(2.24)は以下のように簡略化される。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = \mathbf{I}_d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.39)$$

したがって、2次元における増分形の構成式は、式(2.33)に代えて以下で与えればよい。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & K_{LU} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(i)} \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \otimes \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \Delta\omega - K_{LU} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}_d \\ & + \sum_{i=1}^I (H_{LU}^{(i)} + L_{LU}^{(i)}) \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \otimes \mathbf{I} \Delta\omega - \sum_{i=1}^I \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \otimes (H_{LU}^{(i)} \mathbf{I}_d + L_{LU}^{(i)} \mathbf{I}_d^c) \Delta\omega \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.4 ダイレイタンシーの定式化

2.4.1 微視的および巨視的ひずみエネルギー

ひずみ空間における多重せん断モデルでのダイレイタンシーの定式化に先立ち、まず、ひずみエネルギーに関する考察を行う。多重せん断モデルにおけるひずみエネルギー率は、式(2.1)、式(2.4)および式(2.5)より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{W} = \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \left(-p \mathbf{I} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \Delta\omega \Delta\Omega^{(j)} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= -p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} \dot{\gamma}^{(ij)} \Delta\omega \Delta\Omega^{(j)} \end{aligned} \quad (2.42)$$

ここで、式(2.42)を次のように書き表すこととする。

$$\dot{W} = \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{W}_p + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \dot{W}_{qv}^{(ij)} \Delta\omega \Delta\Omega^{(j)} \quad (2.43)$$

ここに,

$$\dot{W}_p = -p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.44)$$

$$\dot{W}_{qv}^{(ij)} = q^{(ij)} \dot{\gamma}^{(ij)} \quad (2.45)$$

以上より, 巨視的なひずみエネルギー率 $\dot{W} = \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ と, 多重せん断機構を構成する個々の仮想単純せん断機構における微視的なひずみエネルギー率 $\dot{W}_{qv}^{(ij)} = q^{(ij)} \dot{\gamma}^{(ij)}$ は, 式(2.43)に示すような形で関連付けられることがわかる。ひずみエネルギー率に関するこの関係は, 後述するダイレイタンシーの定式化において重要な役割を果たすことになる。

次に, 式(2.6)および式(2.19)に基づき, 体積ひずみ速度は以下のように3つの成分に分解することができる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^c + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^d \quad (2.46)$$

ここに, 式(2.46)の右辺第1項は等方的な応力変化によるもの, 第2項および第3項は, それぞれ収縮的および膨張的ダイレイタンシー成分によるものである。式(2.43)に式(2.46)を代入すると, 以下の関係が得られる。

$$\dot{W} = \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{W}_p' + \dot{W}_p^{dc} + \dot{W}_p^{dd} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \dot{W}_{qv}^{(ij)} \Delta\omega \Delta\Omega^{(j)} \quad (2.47)$$

ここに,

$$\dot{W}_p' = -p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' \quad (2.48)$$

$$\dot{W}_p^{dc} = -p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^c \quad (2.49)$$

$$\dot{W}_p^{dd} = -p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^d \quad (2.50)$$

2.4.2 膨張的ダイレイタンシー成分

多重せん断モデルの定式化に基づき, 式(2.21)における仮想単純せん断モデルを, 骨格曲線上では以下のような双曲線型 (Hardin & Drnevich, 1972) で与える。

$$q^{(ij)} = \frac{\gamma^{(ij)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(ij)} / \gamma_v|} q_v \quad (2.51)$$

ここに、 q_v, γ_v は、仮想単純せん断モデルにおけるせん断強度、および（せん断）規準ひずみである。

Taylor (1948) によると、土粒子間のかみ合い（interlocking）を変化させるためになされたせん断仕事は、滑り摩擦エネルギーとして消費され、実質的に仕事をしない成分であるとされる。この仮定に従い、偏差成分とダイレイタンスーの膨張的成分から構成されるひずみは、骨格曲線に沿う載荷時には仕事をしない成分であると仮定する。すなわち、

$$\dot{W}_p^{dd} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \dot{W}_{qv}^{dd} \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} = 0 \quad (2.52)$$

$$\dot{W}_{qv}^{dd} = r_{\varepsilon_d} \dot{W}_{qv}^{(ij)} = r_{\varepsilon_d} q^{(ij)} \dot{\gamma}^{(ij)} \quad (2.53)$$

ここに、 r_{ε_d} は、interlocking の変化に対するせん断ひずみエネルギーの寄与率を規定するパラメータである。カムクレイモデルにおけるひずみエネルギーは、式(2.53)において r_{ε_d} を 1 とした場合に相当し、式(2.49)で表わされる収縮的ダイレイタンスー成分により与えられる。

以上の仮定より、式(2.45)および式(2.50)を用いて、ダイレイタンスーによる体積ひずみの膨張的成分が以下のように与えられる。

$$\dot{\varepsilon}_d^d = \frac{1}{4\pi} r_{\varepsilon_d} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{\gamma^{(ij)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(ij)} / \gamma_v|} M_{fv} \dot{\gamma}^{(ij)} \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (2.54)$$

ここに、

$$M_{fv} = \frac{q_v}{p} \quad (2.55)$$

であり、これは、仮想単純せん断モデルにおけるせん断破壊線の傾きに他ならない。 $\dot{\gamma}^{(ij)} = 0$ のとき $\dot{\varepsilon}_d^d = 0$ であるとし、 $\dot{\gamma}^{(ij)}$ に関して式(2.54)の積分を実行すると、膨張的ダイレイタンスーの積分形が以下のように求められる。

$$\varepsilon_d^d = \frac{1}{4\pi} r_{\varepsilon_d} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left[\left| \frac{\gamma^{(ij)}}{\gamma_v} \right| - \ln \left(1 + \left| \frac{\gamma^{(ij)}}{\gamma_v} \right| \right) \right] \gamma_v M_{fv} \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (2.56)$$

このように、巨視的な観点におけるダイレイタンスーの膨張的成分は、微視的構造におけるひずみの関数として表わされることがわかる。

式(2.26)を式(2.54)に代入すると、膨張的ダイレイタンスー成分と巨視的なひずみとの関係が、2階の fabric tensor \mathbf{I}_d^d を通じて増分形の形で以下のように与えられる。

$$\dot{\varepsilon}_d^d = \mathbf{I}_d^d : \dot{\varepsilon} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{I}_d^d = \frac{1}{4\pi} r_{\varepsilon_d} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{\gamma^{(ij)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(ij)} / \gamma_v|} \mathbf{M}_{fv} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \Delta\omega \Delta\Omega^{(j)} \quad (2.58)$$

繰り返し単純せん断におけるダイレイタンシーの膨張的成分は、式(2.56)から式(2.58)を用いることで、せん断ひずみに対して図 2.2 のように表される。同図より、砂のような粒状体における誘導異方構造が表現されていることがわかる。また、曲線の形状がカクテルグラスの逆三角形のボウル部分に類似しており、せん断ひずみが大きくなるにつれて徐々に直線形状を示すようになる。このことから、本項で示す膨張的ダイレイタンシーの概念を、ひずみ空間における多重せん断モデルに組み込んだモデルを、カクテルグラスモデル (Iai ら, 2009) と称す。

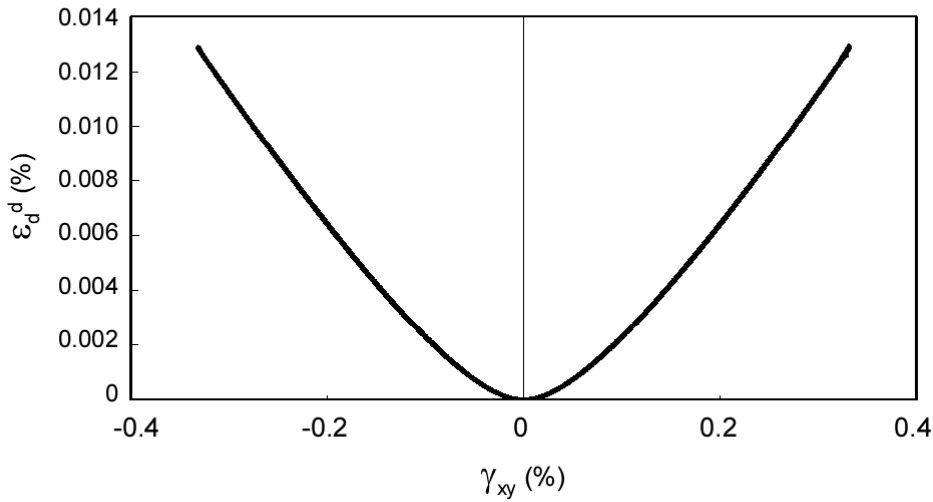


図 2.2 せん断ひずみに対するダイレイタンシーの膨張的成分の関係

$$(r_{\varepsilon_d} = 0.1, \mathbf{M}_{fv} = 0.32, \gamma_v = 5.8 \times 10^{-4})$$

次に、砂の定常状態を考慮するため、これまでに述べてきた膨張的ダイレイタンシー成分の定式化を拡張する。膨張的ダイレイタンシーの終局値を規定するせん断ひずみ γ_{vus} を導入し、式(2.56)に代えて以下のように膨張的ダイレイタンシーの定式化を行う。

$$\varepsilon_d^d = \frac{1}{4\pi} r_{\varepsilon_d} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left[\frac{|\tilde{\gamma}^{(ij)}|}{\gamma_v} - \ln \left(1 + \frac{|\tilde{\gamma}^{(ij)}|}{\gamma_v} \right) \right] \gamma_v \mathbf{M}_{fv} \Delta\omega \Delta\Omega^{(j)} \quad (2.59)$$

$$\frac{|\tilde{\gamma}^{(ij)}|}{\gamma_v} = \left(1 - \exp \left(- \frac{|\gamma^{(ij)}|}{\gamma_{vus}} \right) \right) \frac{\gamma_{vus}}{\gamma_v} \quad (2.60)$$

また、式(2.58)に示す増分形での2階の fabric tensor \mathbf{I}_d^d は、以下のようになる。

$$\mathbf{I}_d^d = \frac{1}{4\pi} r_{\varepsilon_d} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{\tilde{\gamma}^{(ij)} / \gamma_v}{1 + |\tilde{\gamma}^{(ij)} / \gamma_v|} \text{sgn}(\gamma^{(ij)}) \exp\left(-\frac{|\gamma^{(ij)}|}{\gamma_{\text{vus}}}\right) \mathbf{M}_{\text{fv}} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (2.61)$$

2.4.3 収縮的ダイレイタンスー成分

ダイレイタンスーの収縮的成分は、累積塑性せん断ひずみに比例する成分であると仮定し、仮想単純せん断モデルにおける塑性せん断ひずみ増分 $d\gamma_p^{(ij)}$ に応じて、式(2.54)に示す膨張的ダイレイタンスー成分に類似した形で与えるものとする。すなわち、

$$\varepsilon_d^c = \int d\varepsilon_d^c \quad (2.62)$$

$$\varepsilon_d^c = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \mathbf{M}_v |\dot{\gamma}_p^{(ij)}| \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (2.63)$$

ここに、仮想塑性せん断ひずみ増分 $\dot{\gamma}_p^{(ij)}$ は、パラメータ c_1 を用いて、以下で与えられる。

$$\dot{\gamma}_p^{(ij)} = \dot{\gamma}^{(ij)} - c_1 \dot{\gamma}_e^{(ij)} \quad (2.64)$$

パラメータ c_1 は、仮想単純せん断モデルの弾性領域を調整する目的で導入されたもので、 $|\dot{\gamma}^{(ij)}| \leq c_1 \dot{\gamma}_e^{(ij)}$ の場合には、 $\dot{\gamma}_p^{(ij)} = 0$ とする。式(2.64)における仮想弾性せん断ひずみ増分 $\dot{\gamma}_e^{(ij)}$ は、微小ひずみ領域における式(2.51)の関係により、以下で与えられる。

$$\dot{\gamma}_e^{(ij)} = \left(\frac{\gamma_v}{q_v} \right) \dot{q}^{(ij)} \quad (2.65)$$

ここで、後述の式(2.133)(2.134)より、微小ひずみ領域における仮想せん断弾性係数は、以下のように与えられる。

$$\mathbf{G}_{L0}^{(ij)} = \mathbf{G}_{L0} = \frac{q_v}{\gamma_v} \quad (2.66)$$

式(2.16)および式(2.66)を式(2.65)に対して適用すると、以下の関係が導かれる。

$$\dot{\gamma}_e^{(ij)} = \left(\frac{\mathbf{G}_{LU}^{(ij)}}{\mathbf{G}_{L0}} \right) \dot{\gamma}^{(ij)} \quad (2.67)$$

ゆえに、式(2.64)に示す仮想塑性せん断ひずみ増分は、全仮想せん断ひずみ増分より以下の

とおりと与えられる。

$$\dot{\gamma}_p^{(ij)} = \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(ij)}}{G_{L0}} \right) \right) \dot{\gamma}^{(ij)} \quad (2.68)$$

なお、 $1 < c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(ij)}}{G_{L0}} \right)$ の場合には、 $\dot{\gamma}_p^{(ij)} = 0$ とする。

式(2.63)に式(2.68)を代入すると、収縮的ダイレイタンシー増分は以下のように表される。

$$\dot{\varepsilon}_d^c = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J M_v \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(ij)}}{G_{L0}} \right) \right) \left| \dot{\gamma}^{(ij)} \right| \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (2.69)$$

なお、式(2.69)における M_v は変相角などに依存するパラメータであり、2.5.3 項で詳しく述べる。

式(2.5)を式(2.69)に対して適用すると、2 階の fabric tensor \mathbf{I}_d^c を用いて、収縮的ダイレイタンシー増分は以下で与えられる。

$$\dot{\varepsilon}_d^c = \mathbf{I}_d^c : \dot{\varepsilon} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{I}_d^c = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J M_v \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(ij)}}{G_{L0}} \right) \right) \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle^* \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (2.71)$$

ここに、

$\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle : \dot{\varepsilon} \geq 0$ の時 :

$$\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle^* = \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \quad (2.72)$$

$\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle : \dot{\varepsilon} < 0$ の時 :

$$\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle^* = -\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \quad (2.73)$$

本項で示したダイレイタンシーの収縮的成分の定式化は基本形であり、2.5.3 項で後述するように、仮想有効体積ひずみ ε'' の依存性を考慮したパラメータを導入することにより拡張される。

2.5 モデルパラメータ

2.5.1 体積成分（圧縮伸張成分）に関するパラメータ

前節で示したダイレイタンスーモデルを組み込んだひずみ空間多重せん断モデルの適用性を検証するため、提案されたモデルを2次元解析に適用することを考える。式(2.1)などに現れる立体角 $\Delta\Omega^{(j)}$ に関するサンメンションは、2次元解析では省略され、 $\Delta\omega$ に関してのみサンメンションをとればよい。例えば、式(2.1)は以下のように簡略化される。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I} + \sum_{i=1}^I q^{(i)} \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \Delta\omega \quad (2.74)$$

ここでは、構成式に必要なモデルパラメータ、および、構成式を補完する上で必要な関数について述べる。

基準拘束圧を p_a とすると、式(2.17)における体積弾性係数は、正規圧密の場合、

$$K_L = K_{La} \left(\frac{p}{p_a} \right)^{n_k} \quad (2.75)$$

となり、過圧密の場合、

$$K_U = K_{Ua} \left(\frac{p}{p_a} \right)^{n_k} \quad (2.76)$$

と表せる。液状化解析の場合には、式(2.75)(2.76)に代えて、低減係数 r_k 、べき乗指数 l_k をパラメータとして与え、以下のとおりとする。

$$K_{LU} = r_k K_{U0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{l_k} \quad (2.77)$$

ここに、 K_{U0} 、 p_0 は、液状化解析開始時点での体積弾性係数および有効拘束圧であり、基準拘束圧 p_a との間に以下の関係がある。

$$K_{U0} = K_{Ua} \left(\frac{p_0}{p_a} \right)^{n_k} \quad (2.78)$$

式(2.77)におけるパラメータ r_k は、排水および非排水条件における体積弾性係数の差を考慮するために導入され、パラメータ r_k が小さいほど、サイクリックモビリティによるひずみ振幅の増加傾向が抑制される結果となる。また、パラメータ l_k は、サイクリックモビリティによるひずみ振幅の増加傾向を制御するもので、 l_k が大きいほど、ひずみ振幅の増加傾向が抑制される。

式(2.15)を式(2.77)に代入し、両辺の積分を行うことで、式(2.77)の積分形表示が以下のとおり与えられる。

$l_k \neq 1$ の時：

$$p = p_0 (\eta + 1)^{\frac{1}{1-l_k}} \quad (2.79)$$

$$\eta = -(1-l_k)(\varepsilon' - \varepsilon_0) / \varepsilon_{m0} \quad (2.80)$$

$l_k = 1$ の時：

$$p = p_0 \exp \eta \quad (2.81)$$

$$\eta = -(\varepsilon' - \varepsilon_0) / \varepsilon_{m0} \quad (2.82)$$

ここに、 ε_{m0} は体積ひずみに関する規準ひずみ（規準体積ひずみ）であり、液状化解析開始時点での等方圧力および体積弾性係数により、以下で与えられる。

$$\varepsilon_{m0} = p_0 / (r_k K_{U0}) \quad (2.83)$$

2.5.2 せん断成分に関するパラメータ

式(2.51)におけるパラメータ q_v , γ_v は、仮想単純せん断モデルのせん断強度、（せん断）規準ひずみであり、巨視的な意味での実際のせん断強度 τ_m およびせん断弾性係数 G_m と、以下のように関連付けられる（Iai ら, 1992）。

$$G_m = \frac{q_v}{\gamma_v} \sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega \quad (2.84)$$

$$\tau_m = q_v \sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega \quad (2.85)$$

これらを逆に解くと、

$$q_v = \frac{\tau_m}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \quad (2.86)$$

$$\gamma_v = \left(\frac{\sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \right) \frac{\tau_m}{G_m} = \left(\frac{\sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \right) \gamma_m \quad (2.87)$$

なる関係が得られる。ここに、 $\gamma_m = \tau_m / G_m$ は、（せん断）規準ひずみであり、土の動的特性を規定する一種のパラメータとして用いられる（例えば、石原（1976））。

なお、 $I \rightarrow \infty$ の時、

$$q_v = \tau_m / 2 \quad (2.88)$$

$$\gamma_v = \frac{\pi}{4} \gamma_m \quad (2.89)$$

となる。

仮想単純せん断機構が履歴ループに入った際には、拡張Masing則を用いる（Iai ら, 1990）。

履歴ループに入った際の仮想せん断ひずみに応じて、妥当な履歴減衰を表現できるように定められるパラメータ ξ , ζ を用いて、あらかじめ、以下の正規化を行う。

$$\tilde{q}^{(i)} = \frac{q^{(i)} / q_v}{\zeta} \quad (2.90)$$

$$\tilde{\gamma}^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{\xi} \quad (2.91)$$

これらを用いて、履歴ループ内での仮想単純せん断応力は、以下のように与えられる（例えば、小堤（2003））。

$$\frac{\tilde{q}^{(i)} - \tilde{q}_r^{(i)}}{2\delta} = \frac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_r^{(i)}}{2\delta} \frac{1}{1 + \left| \frac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_r^{(i)}}{2\delta} \right|} \quad (2.92)$$

非液状化解析では、せん断強度およびせん断弾性係数を以下のとおり与える。

$$\tau_m = p \sin \phi_f = M_f p \quad (2.93)$$

$$G_m = G_{ma} \left(\frac{p}{p_a} \right)^{m_G} \quad (2.94)$$

ここに、 ϕ_f は砂の内部摩擦角であり、破壊線の傾き $M_f = \sin \phi_f$ を与える。

よって、規準ひずみの拘束圧依存性は、式(2.93)(2.94)より以下のように与えられる。

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G_m} = M_f \frac{p}{G_{ma}} \left(\frac{p}{p_a} \right)^{-m_G} \quad (2.95)$$

一方、液状化解析時には、非排水条件下での既往の室内試験結果（Koseki ら，2000）を参考にして、状態変数 S および液状化フロントパラメータ S_0 により、以下のような拘束圧力依存性および液状化状態依存性を与える。

$S_0 > S_{0bd}$ の場合：

$$\tau_m = \tau_{m0} S \quad (2.96)$$

$$G_m = \tau_m / \gamma_{m0} \quad (2.97)$$

$$\gamma_m = \gamma_{m0} \quad (2.98)$$

$S_0 < S_{0bd}$ の場合：

$$\tau_m = \tau_{m0} S \quad (2.99)$$

$$G_m = \tau_m / \gamma_m \quad (2.100)$$

$$\gamma_m = \gamma_{m0} / (S_0 / S_{0bd}) \quad (2.101)$$

ここに、

$$S_{0bd} = 1.0 \quad (2.102)$$

また、状態変数 S および液状化フロントパラメータ S_0 は、以下で与える。

$$S = p / p_0 \quad (2.103)$$

$$S_0 = \min(p'' / p_0) \quad (2.104)$$

ただし、 S, S_0 の下限値を S_1 とし、パラメータとして小さな正の値を与える。式(2.104)における仮想圧力 p'' は、等方圧力を規定する式(2.79)～(2.83)に準じて、仮想有効体積ひずみ ε'' の関数として、以下のとおり与える。

$l_K \neq 1$ の時：

$$p'' = p_0 (\eta'' + 1)^{\frac{1}{1-l_K}} \quad (2.105)$$

$$\eta'' = -(1-l_K)(\varepsilon'' - \varepsilon_0'') / \varepsilon_{m0}'' \quad (2.106)$$

$l_K = 1$ の時：

$$p'' = p_0 \exp \eta'' \quad (2.107)$$

$$\eta'' = -(\varepsilon'' - \varepsilon_0'') / \varepsilon_{m0}'' \quad (2.108)$$

ここに、 ε_{m0}'' は体積ひずみに関する仮想規準ひずみであり、体積弾性係数の低減パラメータ r_K に準じて、新たなパラメータ r_K'' を導入することで、以下のように定義する。

$$\varepsilon_{m0}'' = p_0 / (r_K'' K_{U0}) \quad (2.109)$$

2.5.3 収縮的ダイレイタンシーに関するパラメータ

本項では、2.4.3 項で導いた収縮的ダイレイタンシー成分を規定する fabric tensor を、仮想有効体積ひずみ ε'' の依存性を考慮できるよう拡張する。ダイレイタンシーによる体積ひずみの収縮的成分および膨張的成分の両方に共通してかかるパラメータ r_{ε_d} 、収縮的成分のみにかかるパラメータ $r_{\varepsilon_d^c}$ を用い、式(2.71)は以下のように書き直される。

$$\mathbf{I}_d^c = -\frac{1}{4\pi} r_{\varepsilon_d} r_{\varepsilon_d^c} r_{S_0} r_{\text{tmp}} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J M_v \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(ij)}}{G_{L0}} \right) \right) \left\| \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \right\|^* \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \quad (2.110)$$

式(2.110)は3次元における定式化であり、2次元解析の場合は以下のように与えられる。

$$\mathbf{I}_d^c = -r_{\varepsilon_d} r_{\varepsilon_d^c} r_{S_0} r_{\text{tmp}} \sum_{i=1}^I M_v \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(i)}}{G_{L0}} \right) \right) \left\| \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \right\|^* \Delta \omega \quad (2.111)$$

式(2.110)および式(2.111)における r_{S_0} は、過剰間隙水圧上昇過程の立ち上がりの形状および

後半部の形状と、これに対応するひずみの伸びを制御する目的で導入されたものであり、パラメータ q_1 , q_2 を用いて、以下で与えられる。

$S_0^* > S_{bi} (=0.8)$ の場合：

$$r_{S_0} = S_0^{*q_2} \left[(S_0^* - S_{bi}) q_1 + (1 - S_0^*) \right] / (1 - S_{bi}) \quad (2.112)$$

$S_0^* \leq S_{bi} (=0.8)$ の場合：

$$r_{S_0} = S_0^{*q_2} \quad (2.113)$$

ここに、

$$S_0^* = p'' / p_0 \quad (2.114)$$

である。ただし、 $S_0^* \geq S_1$ とする。

また、式(2.110)および式(2.111)における r_{tmp} は、変相線を超えた領域における収縮的ダイレイタンスー成分の寄与度を制御するもので、小堤ら(2001)に従い、せん断応力比 $r = \tau / p_0$

(ここに、 $\tau = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \right]^2 + \tau_{xy}^2}$) および状態変数 S を用いて、以下で与えられる。

$$r_{tmp} = (M_{tmp} - r / S) / (M_{tmp} - M_3) \quad (2.115)$$

ここに、

$$M_{tmp} = (M_f + M_p) / 2 \quad (2.116)$$

$$M_3 = 0.67 M_p \quad (2.117)$$

$$M_p = \sin \phi_p \quad (2.118)$$

であり、 $M_{tmp} \leq r / S$ の時は $r_{tmp} = 0$ 、 $r / S \leq M_3$ の時は $r_{tmp} = 1$ とする。なお、式(2.118)における ϕ_p は変相角である。

式(2.110)および式(2.111)において収縮的ダイレイタンスーを規定する M_v は、収縮的体積ひずみの極限值 ϵ_d^{cm} 、パラメータ q_3 を用いて、以下のとおり与える。

$$M_v = \left(1 - \frac{(-\varepsilon_d^c)}{\varepsilon_d^{cm}} \right)^{q_3} M_{v0} \quad (2.119)$$

ここに,

$$M_{v0} = \frac{M_p}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \approx \frac{M_p}{2} \quad (2.120)$$

であり, これは, 膨張的ダイレイタンス成分に関する後述の式(2.122)に対応している。

なお, $-\varepsilon_d^c > \varepsilon_d^{cm}$ の場合には, $M_v = 0$ とする。

2.5.4 膨張的ダイレイタンスに関するパラメータ

式(2.59)で表わされる膨張的ダイレイタンス成分の 3 次元での定式化は, 2 次元解析の場合, 以下のように簡略化される。

$$\varepsilon_d^d = r_{\varepsilon_d} \sum_{i=1}^I \left[\left| \frac{\gamma^{(i)}}{\gamma_v} \right| - \ln \left(1 + \left| \frac{\gamma^{(i)}}{\gamma_v} \right| \right) \right] \gamma_v M_{fv} \Delta \omega \quad (2.121)$$

式(2.121)におけるパラメータ M_{fv} は, 式(2.55)および式(2.86)を参照して以下のように与えられる。

$$M_{fv} = \frac{M_f}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \approx \frac{M_f}{2} \quad (2.122)$$

砂の定常状態を考慮する場合, 式(2.59)を参考に, 膨張的ダイレイタンス成分を式(2.121)に代えて以下のように与える。

$$\varepsilon_d^d = r_{\varepsilon_d} \sum_{i=1}^I \left[\left| \frac{\tilde{\gamma}^{(i)}}{\gamma_v} \right| - \ln \left(1 + \left| \frac{\tilde{\gamma}^{(i)}}{\gamma_v} \right| \right) \right] \gamma_v M_{fv} \Delta \omega \quad (2.123)$$

ここに, $\left| \tilde{\gamma}^{(i)} / \gamma_v \right|$ の項は, パラメータ γ_{vus} を用いて式(2.60)で与えられる。

前項で示した収縮的ダイレイタンスに関するモデルでは, 定常状態に向かう際, 式(2.116)で表わされる破壊線と変相線との中間位置で収縮的ダイレイタンスの増加が止まる。そのため, 中間位置における値が, そのまま定常状態における収縮的ダイレイタンスの値となる。この状況は, 以下のように書くことができる。まず, 式(2.79)および式(2.103)より,

$$\varepsilon' - \varepsilon_0' = -\frac{1}{1-l_K} (S^{1-l_K} - 1) \varepsilon_{m0} \quad (2.124)$$

全応力一定の準静的非排水せん断では、土粒子骨格における体積ひずみの変化は、間隙水の体積変化に等しい。したがって、 n を間隙率、 K_f を水の体積弾性係数、 ε_0 を初期体積ひずみとして、

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -\frac{n}{K_f} (1-S) p_0 \quad (2.125)$$

液状化解析の初期におけるダイレイタンスーによる体積ひずみをゼロとすると、式(2.6)より $\varepsilon_0' = \varepsilon_0$ となるので、

$$\varepsilon - \varepsilon_0' = \varepsilon - \varepsilon_0 \quad (2.126)$$

よって、定常状態でのダイレイタンスーは、その時点での状態変数を S_c とすると、式(2.124)～(2.126)より以下で与えられる。

$$\varepsilon_{dus}^c + \varepsilon_{dus}^d = \varepsilon_{dus} = \frac{1}{1-l_K} (S_c^{1-l_K} - 1) \varepsilon_{m0} - \frac{n}{K_f} (1-S_c) p_0 \quad (2.127)$$

ここに、 ε_{dus}^c 、 ε_{dus}^d は、それぞれ定常状態における収縮的および膨張的ダイレイタンスー成分の値である。

式(2.127)に示す関係を用い、 $-\varepsilon_d^c > -\varepsilon_{dus}^c$ ($= \varepsilon_{dus}^d - \varepsilon_{dus}^c$) の場合には、その時点での収縮的ダイレイタンスー ε_d^c に対応して、膨張的ダイレイタンスーの終局値を以下のように更新する。

$$\varepsilon_{dus}^d = \varepsilon_{dus}^c - \varepsilon_d^c \quad (2.128)$$

この値に対応して、ひずみが十分に大きいとした場合の式(2.123)の逆算により、パラメータ γ_{vus} の値を更新する。具体的には、更新前の γ_{vus} の値を初期値として、反復法により求めるものとする。反復法における定常状態での規準ひずみと膨張的ダイレイタンスーの増分関係は、以下で与えられる。

$$\Delta\gamma_{vus} = \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon_{dus}^d}{\partial \gamma_{vus}}} \Delta \varepsilon_{dus}^d \quad (2.129)$$

ここに、

$$\frac{\partial \varepsilon_{dus}^d}{\partial \gamma_{vus}} \approx r_{\varepsilon_d} \frac{\gamma_{vus}}{1 + \frac{\gamma_{vus}}{\gamma_v}} M_{fv} \pi \quad (2.130)$$

定常状態における状態変数 S_c は、非排水せん断強度 q_{us} より以下のように求められる。

$$S_c = q_{us} / \tau_{m0} \quad (2.131)$$

ここに,

$$\tau_{m0} = M_f p_0 \quad (2.132)$$

である。

表 2.1 に、ここまで述べてきたモデルパラメータについてまとめて示す。本論文で採用するストレス-ダイレイタンスー関係を、ひずみ空間における多重せん断モデルに導入して液状化解析を行う場合、15 個のパラメータを設定する必要がある。うち 3 個は体積成分（圧縮伸張変形）を、3 個はせん断成分を、残りの 9 個はダイレイタンスー成分を制御するパラメータである。ダイレイタンスーを制御するパラメータの 1 つである q_{us} は、定常状態における非排水（全応力一定）せん断強度であり、間隙比と密接な関係があるとされる（Been & Jefferies, 1985 ; Ishihara, 1993）。これは繰り返しせん断など一般的な応力履歴の結果として到達する値であるため、単調載荷により与えられる下限値より小さな値を指定しても、一般には問題はない。しかしながら、設計実務では、非排水単調載荷せん断試験による定常状態でのせん断抵抗を q_{us} として与えることが多い。したがって、ここで与えるパラメータ q_{us} には、非排水単調載荷せん断試験により得られた値を用いることとする。

表 2.1 多重せん断モデルにおける入力パラメータ

	分類	概要
K_{LUa}	体積成分	初期体積弾性係数
r_K	体積成分	液状化解析での体積弾性係数の低減係数
l_K	体積成分	液状化解析での体積弾性係数の拘束圧依存性を表すパラメータ
G_{ma}	せん断成分	初期せん断剛性
ϕ_f	せん断成分	内部摩擦角
h_{max}	せん断成分	最大減衰定数
ϕ_p	ダイレイタンスー成分	変相角
r_{ε_d}	ダイレイタンスー成分	膨張的・収縮的両ダイレイタンスーを制御するパラメータ
$r_{\varepsilon_d^c}$	ダイレイタンスー成分	収縮的ダイレイタンスーを制御するパラメータ
q_1	ダイレイタンスー成分	過剰間隙水圧上昇の初期における収縮的ダイレイタンスーを制御するパラメータ
q_2	ダイレイタンスー成分	過剰間隙水圧上昇の後半における収縮的ダイレイタンスーを制御するパラメータ
ε_d^{cm}	ダイレイタンスー成分	収縮的ダイレイタンスーの終局値
S_1	ダイレイタンスー成分	有効拘束圧の下限値
c_1	ダイレイタンスー成分	収縮的ダイレイタンスーに関して弾性領域を制御するパラメータ
q_{us}	ダイレイタンスー成分	非排水せん断強度（定常状態を考慮する場合）

2.5.5 増分形構成式における各係数について

本項では、2.3.2項で求めた増分形構成式における接線剛性の各項の係数について述べる。ここでは、2次元解析を対象とし、式(2.41)で表わされる接線剛性を用いることとする。

まず、式(2.41)における K_{LU} であるが、これはすでに式(2.77)で与えられている。次に、多重せん断モデルの各せん断バネにおけるせん断剛性 $G_{LU}^{(i)}$ は、せん断成分に関する式(2.51)および式(2.84)~(2.92)より、以下のように与えられる。

(1) 骨格曲線上：

$$G_L^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} = \frac{1}{\left(1 + \left|\gamma^{(i)} / \gamma_v\right|\right)^2} \frac{q_v}{\gamma_v} \quad (2.133)$$

(2) 履歴ループ上：

$$G_{LU}^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} = \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_r^{(i)}}{2\delta}\right|\right)^2} \frac{\zeta}{\xi} \frac{q_v}{\gamma_v} \quad (2.134)$$

ここに、 q_v / γ_v は、式(2.84)より以下で与えられる。

$$\frac{q_v}{\gamma_v} = \frac{G_m}{\sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega} \quad (2.135)$$

続いて、式(2.41)における $H^{(i)}$ は、式(2.36)(2.51)より以下のように表せる。

$$H^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon'} = \left(\frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_v} \frac{\partial q_v}{\partial p} + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_v} \frac{\partial \gamma_v}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial \varepsilon'} \quad (2.136)$$

ここに、

(1) 骨格曲線上：式(2.51)より、

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_v} = \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + \left|\gamma^{(i)} / \gamma_v\right|} \quad (2.137)$$

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_v} = - \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{\left(1 + \left|\gamma^{(i)} / \gamma_v\right|\right)^2} \frac{q_v}{\gamma_v} \quad (2.138)$$

(2) 履歴ループ上：式(2.90)~(2.92)より、

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_v} = \frac{\frac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_r^{(i)}}{2\delta}}{1 + \left| \frac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_r^{(i)}}{2\delta} \right|} 2\delta\zeta + \tilde{q}_r^{(i)}\zeta \quad (2.139)$$

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_v} = -\frac{\frac{\tilde{\gamma}^{(i)}}{2\delta}}{\left(1 + \left| \frac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_r^{(i)}}{2\delta} \right|\right)^2} \frac{q_v}{\gamma_v} 2\delta\zeta \quad (2.140)$$

式(2.136)における $\partial q_v / \partial p$, $\partial \gamma_v / \partial p$ は、以下で与えられる。

$$\frac{\partial q_v}{\partial p} = \frac{\partial q_v}{\partial \tau_m} \frac{\partial \tau_m}{\partial p} \quad (2.141)$$

$$\frac{\partial \gamma_v}{\partial p} = \frac{\partial \gamma_v}{\partial \gamma_m} \frac{\partial \gamma_m}{\partial p} \quad (2.142)$$

ここに、式(2.86)(2.87)より、

$$\frac{\partial q_v}{\partial \tau_m} = \frac{1}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \quad (2.143)$$

$$\frac{\partial \gamma_v}{\partial \gamma_m} = \frac{\sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \quad (2.144)$$

また、

(1) 液状化解析の場合：式(2.96)～(2.104)より、

$$\frac{\partial \tau_m}{\partial p} = \frac{\partial \tau_m}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\tau_{m0}}{p_0} = M_f \quad (2.145)$$

$$\frac{\partial \gamma_m}{\partial p} = \frac{\partial \gamma_m}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial p} = 0 \quad (2.146)$$

(2) 非液状化解析の場合：式(2.93)～(2.95)より、

$$\frac{\partial \tau_m}{\partial p} = M_f \quad (2.147)$$

$$\frac{\partial \gamma_m}{\partial p} = (1 - m_G) M_f \frac{1}{G_{ma}} \left(\frac{p}{p_a} \right)^{-m_G} = \frac{(1 - m_G) M_f}{G_m} \quad (2.148)$$

である。

式(2.136)における $\partial p / \partial \varepsilon'$ は式(2.15)に式(2.77)を代入することで得られる。

最後に、式(2.41)における $L^{(i)}$ は以下のように求められる。まず、式(2.37)より、

$$L^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial S_0} \frac{\partial S_0}{\partial p''} \frac{\partial p''}{\partial \varepsilon''} = \left(\frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_v} \frac{\partial q_v}{\partial S_0} + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_v} \frac{\partial \gamma_v}{\partial S_0} \right) \frac{\partial S_0}{\partial p''} \frac{\partial p''}{\partial \varepsilon''} \quad (2.149)$$

と表せる。ここに、 $\partial q^{(i)}/\partial q_v$ 、 $\partial q^{(i)}/\partial \gamma_v$ は、式(2.137)～(2.140)で与えられる。

また、

$$\frac{\partial q_v}{\partial S_0} = \frac{\partial q_v}{\partial \tau_m} \frac{\partial \tau_m}{\partial S_0} \quad (2.150)$$

$$\frac{\partial \gamma_v}{\partial S_0} = \frac{\partial \gamma_v}{\partial \gamma_m} \frac{\partial \gamma_m}{\partial S_0} \quad (2.151)$$

であり、 $\partial q_v/\partial \tau_m$ 、 $\partial \gamma_v/\partial \gamma_m$ は、式(2.143)および式(2.144)で与えられる。式(2.150)(2.151)における残りの項は、式(2.96)～(2.104)より以下のようなになる。

$S_0 > S_{0bd}$ の場合：

$$\frac{\partial \tau_m}{\partial S_0} = 0 \quad (2.152)$$

$$\frac{\partial \gamma_m}{\partial S_0} = 0 \quad (2.153)$$

$S_0 < S_{0bd}$ の場合：

$$\frac{\partial \tau_m}{\partial S_0} = 0 \quad (2.154)$$

$$\frac{\partial \gamma_m}{\partial S_0} = -\gamma_m / S_0 \quad (2.155)$$

また、式(2.104)より、 $dp'' < 0$ かつ $S_0 \leq p''/p_0$ かつ $S_0 > S_1$ のとき、

$$\frac{\partial S_0}{\partial p''} = p_0^{-1} \quad (2.156)$$

それ以外するとき、

$$\frac{\partial S_0}{\partial p''} = 0 \quad (2.157)$$

また、式(2.105)～(2.109)より、

$$K_{LU}'' = -\frac{dp''}{d\varepsilon''} = -\frac{dp''}{d\eta''} \frac{d\eta''}{d\varepsilon''} = r_k'' K_{U0}'' \left(\frac{p''}{p_0} \right)^{l_k} \quad (2.158)$$

式(2.150)～(2.158)を式(2.149)に代入すると、 $S_0 < S_{0bd}$ かつ $dp'' < 0$ かつ $S_0 \leq p''/p_0$ かつ $S_0 > S_1$ の場合、

$$L^{(i)} = \frac{\gamma_m}{S_0} \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_v} \frac{\partial \gamma_v}{\partial \gamma_m} \frac{K_{LU}''}{p_0} \quad (2.159)$$

となる。ここに、 $\partial q^{(i)}/\partial \gamma_v$ は式(2.138)(2.140)で、また、 $\partial \gamma_v/\partial \gamma_m$ は式(2.144)で与えられる。

なお、 $S_0 > S_{\text{obd}}$ または $dp'' \geq 0$ の場合は、

$$L^{(i)} = 0 \quad (2.160)$$

となる。

次に、2次元液状化解析におけるダイレイタンシーの膨張的成分を規定するため、式(2.58)

に示す2階の fabric tensor \mathbf{I}_d^d を以下のように与えなおす。

まず、式(2.56)を2次元形式に置き換えた上で、両辺を微分して以下を得る。

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d^d = \sum_{i=1}^I \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} d\gamma^{(i)} + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma_v} d\gamma_v \quad (2.161)$$

ここに、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} = r_{\varepsilon_d} \left(\frac{\gamma^{(i)}/\gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)}/\gamma_v|} \right) \mathbf{M}_{fv} \Delta \omega \quad (2.162)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma_v} = r_{\varepsilon_d} \sum_{i=1}^I \left(\frac{|\gamma^{(i)}/\gamma_v|}{1 + |\gamma^{(i)}/\gamma_v|} - \ln \left(1 + \left| \frac{\gamma^{(i)}}{\gamma_v} \right| \right) \right) \mathbf{M}_{fv} \Delta \omega \quad (2.163)$$

式(2.26)より、2次元での仮想単純せん断ひずみ増分は、以下のように求められる。

$$d\gamma^{(i)} = \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.164)$$

また、仮想単純せん断モデルにおけるせん断規準ひずみ増分は、以下で与えられる。

$$d\gamma_v = \frac{\partial \gamma_v}{\partial \gamma_m} \frac{\partial \gamma_m}{\partial S_0} \frac{\partial S_0}{\partial p''} \frac{\partial p''}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}''} d\boldsymbol{\varepsilon}'' \quad (2.165)$$

これに式(2.155)~(2.158)を代入すると、 $S_0 < S_{\text{obd}}$ かつ $dp'' < 0$ かつ $S_0 \leq p''/p_0$ かつ $S_0 > S_1$ の場合、

$$d\gamma_v = \frac{\gamma_v}{S_0} \frac{K_{LU}''}{p_0} d\boldsymbol{\varepsilon}'' \quad (2.166)$$

となる。ここに、式(2.70)と式(2.28)より、

$$d\boldsymbol{\varepsilon}'' = (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d^c) : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.167)$$

である。式(2.164)および式(2.166)を式(2.161)に代入すると、

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d^d = \left[\sum_{i=1}^I \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma_v} \frac{\gamma_v}{S_0} \frac{K_{LU}''}{p_0} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d^c) \right] : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.168)$$

が得られる。なお、 $S_0 < S_{\text{obd}}$ かつ $dp'' < 0$ かつ $S_0 \leq p''/p_0$ かつ $S_0 > S_1$ 以外の場合には、式

(2.166)に代えて,

$$d\gamma_v = 0 \quad (2.169)$$

となるので, 膨張的ダイレイタンシー増分は以下で与えられる。

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d^d = \left[\sum_{i=1}^I \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \right] : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.170)$$

よって, 式(2.57)より, 膨張的ダイレイタンシーに関する2階の fabric tensor は, $S_0 < S_{\text{obd}}$ かつ $dp'' < 0$ かつ $S_0 \leq p''/p_0$ かつ $S_0 > S_1$ の場合,

$$\mathbf{I}_d^d = \sum_{i=1}^I \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma_v} \frac{\gamma_v}{S_0} \frac{K_{LU}''}{p_0} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d^c) \quad (2.171)$$

で与えられる。また, それ以外の場合は以下となる。

$$\mathbf{I}_d^d = \sum_{i=1}^I \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \quad (2.172)$$

ここに, 式(2.171)(2.172)における $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d / \partial \gamma^{(i)}$, $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d / \partial \gamma_v$ は, それぞれ式(2.162)(2.163)で与えられる。また, K_{LU}'' は式(2.158)より求められる。

定常状態を考慮する場合, 膨張的ダイレイタンシーの増分形を求めるのに必要な偏微分は, 式(2.59)(2.60)より以下のとおり与えられる。

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d^d = \sum_{i=1}^I \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} d\gamma^{(i)} + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma_v} d\gamma_v \quad (2.173)$$

ここに,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial |\tilde{\gamma}^{(i)}|} \frac{\partial |\tilde{\gamma}^{(i)}|}{\partial \gamma^{(i)}} = r_{\varepsilon_d} \left(\frac{|\tilde{\gamma}^{(i)} / \gamma_v|}{1 + |\tilde{\gamma}^{(i)} / \gamma_v|} \right) \mathbf{M}_{fv} \operatorname{sgn}(\gamma^{(i)}) \exp\left(-\frac{|\gamma^{(i)}|}{\gamma_{\text{vus}}}\right) \Delta\omega \quad (2.174)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{\partial \gamma_v} = r_{\varepsilon_d} \sum_{i=1}^I \left(\frac{|\tilde{\gamma}^{(i)} / \gamma_v|}{1 + |\tilde{\gamma}^{(i)} / \gamma_v|} - \ln\left(1 + \frac{|\tilde{\gamma}^{(i)}|}{\gamma_v}\right) \right) \mathbf{M}_{fv} \Delta\omega \quad (2.175)$$

これらを式(2.171)(2.172)に代入すると, 定常状態を考慮する場合の2階の fabric tensor \mathbf{I}_d^d が求められる。

2.6 まとめ

本章では, 砂のような粒状体の力学モデルとしてのひずみ空間における多重せん断モデル (Iai & Ozutsumi, 2005) に対して, 新たなストレス-ダイレイタンシー関係を組み込むことで, より一般化された多重せん断モデル (カクテルグラスモデルと称す) の定式化を行

った。ここで用いたストレス-ダイレイタンスー関係は、ダイレイタンスーによる体積ひずみ成分が、仕事をしないせん断機構 (Taylor, 1948) として表現される膨張的成分と、累積塑性せん断ひずみに比例する収縮的成分の和として与えられるという仮定に基づくものである。本章で示した多重せん断モデル構成式は、微小変形理論に立脚したものであるため、幾何学的な非線形性は扱わず、材料特性としての非線形性のみを考慮の対象とするものである。なお、幾何学的非線形性を考慮した大変形理論に基づく多重せん断モデルの定式化は、次章で行うこととする。本章では、微小変形解析を対象として、3次元および2次元平面ひずみ条件での定式化を示した。定式化では、Holzapfel (2000) に準じた表記法を用いることとし、多重せん断モデルにおける粒状体の粒子構造を特徴づける **branch vector** と、それに直交する **tangential vector** との **dyad** 積を基にし、構成関係を規定している。この **dyad** 積は、仮想単純せん断機構を表す2階の **fabric tensor** であり、砂の誘導異方性を考慮したものとなっている。構成式は、増分形および積分形の両方で定式化がなされており、増分形においては、接線剛性として誘導異方性を考慮した4階の **fabric tensor** を用いている。

ダイレイタンスーに関しては、先に述べたように、膨張的成分と収縮的成分の2種類の定式化を行った。膨張的ダイレイタンスーの定式化においては、Taylor (1948) に従い、偏差成分とダイレイタンスーの膨張的成分から構成されるひずみが、骨格曲線に沿う載荷時には仕事をしない成分であると仮定した。一方、収縮的ダイレイタンスーは、累積塑性せん断ひずみに比例する成分であると仮定し、塑性せん断ひずみ増分に応じて規定される増分形としての定式化を行った。なお、膨張的および収縮的ダイレイタンスーによる体積ひずみ成分は、2階の **fabric tensor** を通じて、ひずみ (テンソル) により与えられる。

本章で提案した多重せん断モデルを用いて数値解析を行う場合、15個のパラメータを設定する必要がある。うち3個は体積成分 (圧縮伸張変形) を、3個は偏差成分 (せん断変形)、残りの9個はダイレイタンスー成分を制御するものである。これらのパラメータは、非排水単調載荷せん断試験や非排水繰返しせん断試験 (三軸試験もしくは中空ねじり試験) などを行うことにより求められる。なお、本モデルを用いた要素シミュレーションの結果は、大変形解析の結果とあわせて第6章で示すこととする。

第3章 大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式の定式化

3.1 概要

本章では、第2章で示した微小変形理論でのひずみ空間における多重せん断モデル構成式に基づき、幾何学的非線形性を考慮した大変形解析（有限ひずみ解析）に必要な定式化を行う。ここでは、基準配置に基づく物質表示で表された応力、ひずみ系を用いる Total Lagrangian (TL) 法、および、現配置に基づく空間表示で表された応力、ひずみ系を用いる Updated Lagrangian (UL) 法の両者による定式化を示す。大変形解析に必要な定式化においては、圧縮性を考慮した超弾性体の大変形解析理論 (Holzapfel, 2000) を参考にして、これに多重せん断機構および材料非線形性を盛り込んだ定式化を行う。材料非線形形としては、砂のような粒状体に特有のダイレイタンシーの影響を含むものとする。

3.2 大変形理論における応力・ひずみ

多重せん断モデルの大変形理論での定式化を行う前に、本章では、大変形解析において必要となる応力、ひずみなどの定義について述べる。Holzapfel (2000) の表記法を参考に、大文字は物質表示 ($t=0$ を基準とする) での値、小文字は空間表示 ($t=t$ を基準とする) での値を表す。

3.2.1 空間表示および物質表示での応力・ひずみ

まず、空間表示における応力として、Cauchy 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ を定義する。これは、時刻 $t=t$ の現配置、すなわち変形後の配置において定義される応力であり、真応力テンソルとも呼ばれる。Cauchy 応力テンソルにより、Kirchhoff 応力テンソル $\boldsymbol{\tau}$ が以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \quad (3.1)$$

ここに、Jacobian determinant J は、時刻 $t=0$ の基準配置から時刻 $t=t$ の現配置に至る体積変化率を表し、変形勾配テンソル \mathbf{F} を用いて以下で与えられる。

$$J = dv/dV = \det \mathbf{F} \quad (3.2)$$

ここに、 dV 、 dv は、それぞれ変形前および変形後の微小要素の体積である。また、変形勾配テンソル \mathbf{F} は、変形前および変形後の微小変位ベクトル $d\mathbf{X}$ 、 $d\mathbf{x}$ により、以下で与えられる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad} \boldsymbol{\chi} \quad (3.3)$$

式(3.1)を基準配置での物質表示に引き戻す (pull-back) ことにより, 物質表示での応力として, 以下に示す第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} が与えられる。

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T} \quad (3.4)$$

空間表示でのひずみとしては, 以下に示す Euler-Almansi ひずみテンソル \mathbf{e} を用いる。

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (3.5)$$

ここに, \mathbf{b} は左 Cauchy-Green テンソルであり, 変形勾配と以下の関係がある。

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (3.6)$$

一方, 物質表示でのひずみは, 以下の Green-Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} で与えられる。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (3.7)$$

ここに, \mathbf{C} は右 Cauchy-Green テンソルであり, 変形勾配と以下の関係がある。

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (3.8)$$

なお, Euler-Almansi ひずみテンソルと Green-Lagrange ひずみテンソルの間には, 変形勾配を通じて以下の関係がある。

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \quad (3.9)$$

これを, Euler-Almansi ひずみテンソルに関して解くと, 以下のようになる。

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.10)$$

式(3.9)では, 現配置のひずみを pull-back させることで基準配置におけるひずみが得られており, 一方, 式(3.10)では, 基準配置におけるひずみを push-forward させることで現配置でのひずみを得られることがわかる。

これまでに示した概念を, 模式図として図 3.1 に示す。図中の基準配置における円形をなす矢印の集合体は, 第 2 章で述べた多重せん断モデルにおける多重せん断ばねを概念的に表している。3.3.1 項で後述するように, 空間表示においては, 多重せん断ばねを表すベクトル類が変形勾配の作用により向きと大きさを変えるため, 同図の現配置では歪んだ形で矢印の集合体が描かれている。

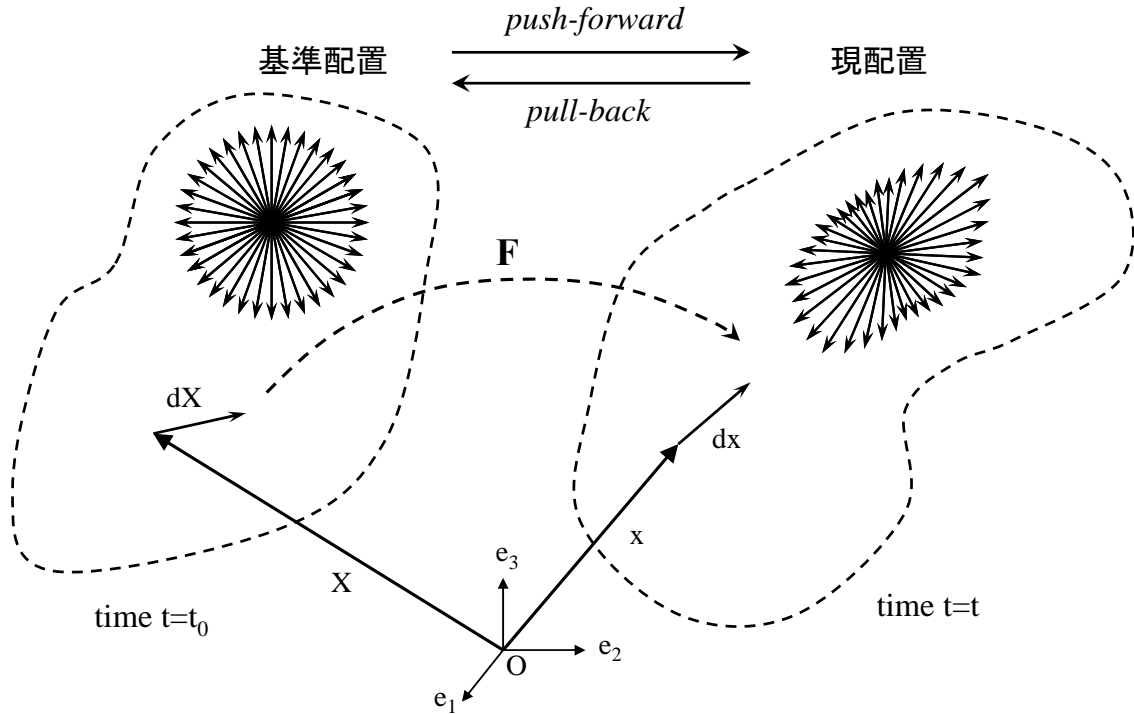


図 3.1 大変形理論における物質表示と空間表示の概念

3.2.2 応力パワーと Work conjugate

基準配置もしくは現配置での物体の単位体積において、応力が単位時間になす仕事は応力パワー（もしくは内部仕事率）と呼ばれる。応力パワーは、種々の応力テンソルと、それに対応する変形テンソル増分（例えば、ひずみテンソル増分）の **double contraction** ($:$) で与えられる。応力パワーを与える応力テンソルと変形テンソル増分は **work conjugate** の関係にあると言われ、それらの組み合わせは複数存在する。以下に、**work conjugate** を組むペアとして代表的なものを挙げる。なお、最左辺は空間表示であり、それ以外は物質表示で表わされている。

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}dv = \int_{\Omega_0} J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}dV = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}dV \quad (3.11)$$

ここに、 \mathbf{d} は変形速度テンソルであり、後述の式(3.16)に示すように、空間表示でのひずみ（Euler-Almansi ひずみテンソル）の Lie 時間微分として与えられる。変形速度テンソルは、別名ストレッチングテンソル、または、ひずみ速度テンソルとも呼ばれる。 \mathbf{P} は第1Piola-Kirchhoff 応力テンソル（または、公称応力テンソル）と呼ばれ、Cauchy 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ または第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} により、以下で与えられる。

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F} \mathbf{S} \quad (3.12)$$

なお、Cauchy 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ 、Kirchhoff 応力テンソル $\boldsymbol{\tau}$ 、第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル

\mathbf{S} が対称テンソルであるのに対し，第 1Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{P} は一般的に対称とはならない。

3.2.3 応力速度およびひずみ速度

基準配置に基づく物質表示での応力（第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} ），ひずみ（Green-Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} ）に対して物質時間微分をとると，これらの速度（増分）として $\dot{\mathbf{S}}$ ， $\dot{\mathbf{E}}$ が得られる。これらを空間表示に push-forward することで，空間表示における応力速度，および，変形速度（ひずみ速度）が以下で与えられる。

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T \quad (3.13)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1} \quad (3.14)$$

式(3.13)の左辺は，Kirchhoff 応力テンソルの Oldroyd 応力速度であり，Kirchhoff 応力テンソルの Lie 時間微分として以下のとおり与えられる（Holzapfel, 2000）。

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \text{Oldr}(\boldsymbol{\tau}) = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{l}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{l}^T \quad (3.15)$$

一方，式(3.14)の左辺は，変形速度テンソルであり，Euler-Almansi ひずみテンソルの Lie 時間微分として以下のように与えられる。

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{l}^T\mathbf{e} + \mathbf{e}\mathbf{l} \quad (3.16)$$

ここに， $\mathbf{l} = \partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{x} = \text{grad}\mathbf{v}$ は空間表示での速度勾配テンソルであり，以下のように分解できる。

$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad (3.17)$$

ただし，

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad (3.19)$$

であり， \mathbf{d} は前述したように変形速度テンソル，また， \mathbf{w} はスピテンソル（または，回転速度テンソル）と呼ばれる。

式(3.13)(3.15)と同様の考え方で，Cauchy 応力の Oldroyd 応力速度は，Cauchy 応力の Lie 時間微分をとることで以下のように与えられる（Holzapfel, 2000）。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \text{Oldr}(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}^T \quad (3.20)$$

Oldroyd 応力速度は， $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ の場合には，以下に示す Jaumann 応力速度に還元される。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{w} \quad (3.21)$$

また， $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}$ の場合には，以下のような Green-Naghdi 応力速度に還元される。

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad (3.22)$$

ここに， \mathbf{R} は変形勾配を極分解した際の直交テンソルであり，剛体回転テンソルと呼ばれる。

物質表示での速度勾配 \mathbf{L} は、以下に示すように、変形勾配の物質時間微分により与えられる。

$$\mathbf{L} = \text{Grad}\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\mathbf{D}\mathbf{F}}{\mathbf{D}t} = \dot{\mathbf{F}} \quad (3.23)$$

物質表示における速度勾配 \mathbf{L} は、空間表示における速度勾配 \mathbf{l} と以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.24)$$

次に、式(3.2)に示す体積変化率の増分は、以下のように展開される。

$$\begin{aligned} \dot{j} &= \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-\text{T}} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-\text{T}} : \mathbf{l} \mathbf{F} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-\text{T}} \mathbf{F}^{\text{T}} : \mathbf{l} \\ &= \mathbf{J} \mathbf{l} : \text{grad} \mathbf{v} = \mathbf{J} \text{tr}(\text{grad} \mathbf{v}) = \mathbf{J} \text{div} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.25)$$

ここで、式(3.25)に式(3.17)を代入し、スピントレンソル \mathbf{w} のトレースがゼロであることを用いると、以下に示すように、体積変化率の増分が変形速度テンソルの対角成分の総和をとることで与えられる。

$$\dot{j} = \mathbf{J} \mathbf{l} : \mathbf{l} = \mathbf{J} \mathbf{l} : (\mathbf{d} + \mathbf{w}) = \mathbf{J} \text{tr} \mathbf{d} \quad (3.26)$$

さらに、式(3.26)に対して、次式で与えられる体積ひずみ速度

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{l} : \mathbf{d} = \text{tr} \mathbf{d} \quad (3.27)$$

を用いると、体積ひずみ速度と Jacobian determinant との間に、以下の関係があることがわかる。

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{j}}{J} \quad (3.28)$$

Jacobian determinant の初期値を $J_0 = 1$ として、式(3.28)の両辺を積分すると、体積ひずみが以下のとおり与えられる。

$$\varepsilon = \ln J \quad (3.29)$$

なお、体積ひずみはスカラー値であるので、物質表示および空間表示のいずれにおいても式(3.29)を用いることで求められる。

3.3 物質表示での積分形構成式（基本形）

3.3.1 大変形理論による構成式の定式化の方向性

前節で述べた大変形理論における応力・ひずみを用いて、本節以降では、第2章で述べたひずみ空間における多重せん断モデルを大変形理論に基づき拡張する。

第2章で示したように、多重せん断モデルの基礎概念として、粒状体を構成する粒子構

造を特徴づける **branch vector** や **tangential vector** などのベクトル類がある。大変形解析では、これらのベクトル類は、物質の変形に伴い、その方向とともに大きさを変えるものとする。

微小変形理論における積分形の構成式（式(2.1)）にならい、空間表示における積分形の構成式を、Cauchy 有効応力 $\boldsymbol{\sigma}'$ を用いることで以下のように与える。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (3.30)$$

ここに、空間表示の **branch vector** に沿った方向ベクトル類は、基準状態としての変形前の初期状態における物質表示の方向ベクトル類から、以下のように与えられる。

$$\mathbf{n}^{(ij)} = \mathbf{F}\mathbf{N}^{(ij)} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{t}^{(ij)} = \mathbf{F}\mathbf{T}^{(ij)} \quad (3.32)$$

なお、物質表示での方向ベクトル類は、いずれも単位ベクトルであるとし、時間に応じて変化しないものとする。

式(3.30)を pull-back すると、第 2Piola-Kirchhoff 応力の有効応力 \mathbf{S}' を用いて、物質表示における積分形の構成式が以下のとおり表される。

$$\mathbf{S}' = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{F}^{-T} = -Jp\mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I Jq^{(ij)} \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (3.33)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} + \mathbf{n}^{(ij)} \otimes \mathbf{t}^{(ij)}) \mathbf{F}^{-T} \\ &= \mathbf{F}^{-1}\mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}^{(ij)} + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}^{(ij)} \otimes \mathbf{F}^{-1}\mathbf{t}^{(ij)} \\ &= \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} + \mathbf{N}^{(ij)} \otimes \mathbf{T}^{(ij)} \\ &= \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

の関係を用いた。

3.3.2 超弾性体構成式に準じた等方成分と偏差成分への分離

前項で示した定式化では、式(3.33)の右辺第 2 項の $\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I Jq^{(ij)} \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}$ が、物質表示における等方成分（体積変化成分）を含んでいる。このことは、以下に示すように、物質表示においては右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} （なお、空間表示であれば 2 階の単位テンソル \mathbf{I} ）との contraction をとることで確かめられる。

$$\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}' = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I 2Jq^{(ij)} \gamma^{(ij)} \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (3.35)$$

ここに、

$$\bar{\mathbf{S}}' = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I Jq^{(ij)} \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (3.36)$$

であり、大変形解析における物質表示においては、 $\bar{\mathbf{S}}'$ に式(3.35)で表わされる分だけ等方的成分が含まれていることがわかる。このことは、定式化としての理論上の問題はないものの、有限要素法などのプログラムに構成式を導入する際には、あまり使い勝手がよいとはいえない。その一例として、せん断変形に伴うロッキング問題を回避するため、等方成分に対してのみ低減積分を適用する選択低減積分（例えば、Hughes（1980））を用いる場合が挙げられる。

この問題を解決するため、Holzapfel（2000）による圧縮性を有する超弾性体の有限ひずみ解析での構成式を参考にし、大変形解析における多重せん断モデルの構成式を導くことを考える。Holzapfel による超弾性体構成式では、等方成分（体積変化成分）および偏差成分（体積一定成分）に分けて定式化がなされており、物質表示の定式化では、第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} が以下のように分解される。

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_q \quad (3.37)$$

ここに、

$$\mathbf{S}_p = -Jp\mathbf{C}^{-1} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{S}_q = J^{-2/3}\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}} \quad (3.39)$$

であり、式(3.39)における $\bar{\mathbf{S}}$ は、仮想第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル（Holzapfel, 2000）と呼ばれる。一方、式(3.39)における4階テンソル \mathbb{Q} は、2階テンソルの物質表示における偏差成分を抽出する projection tensor であり、 \mathbb{N} を4階の単位テンソルとすると、以下で与えられる。

$$\mathbb{Q} = \mathbb{N} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \quad (3.40)$$

実際にこれが物質表示における偏差成分を抽出する projection tensor になっていることは、以下のようにして確かめることができる。まず、式(3.35)と同様にして、式(3.37)と右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} との contraction をとると、以下ようになる。

$$\mathbf{S}:\mathbf{C} = \mathbf{S}_p:\mathbf{C} + \mathbf{S}_q:\mathbf{C} \quad (3.41)$$

ここで、式(3.38)(3.39)より、

$$\mathbf{S}_p:\mathbf{C} = -Jp\mathbf{C}^{-1}:\mathbf{C} = -3Jp \quad (3.42)$$

$$\mathbf{S}_q:\mathbf{C} = (J^{-2/3}\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}):\mathbf{C} = J^{-2/3}\left(\bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}})\mathbf{C}^{-1}\right):\mathbf{C} = 0 \quad (3.43)$$

となり、4階テンソル \mathbb{Q} が上に述べた projection tensor であることが確認された。なお、式(3.43)において、以下の関係を用いた。

$$\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}^T : \mathbf{I} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} : \mathbf{I} = \mathbf{I} : \mathbf{I} = 3 \quad (3.44)$$

3.3.3 物質表示での積分形構成式

前項の結果を用いて、物質表示における多重せん断モデル構成式を、式(3.33)に代えて以下で与えることとする。

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_p + \mathbf{S}'_q = -Jp\mathbf{C}^{-1} + J^{-2/3}\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}' \quad (3.45)$$

ここに、仮想第2Piola-Kirchhoff有効応力テンソル $\bar{\mathbf{S}}'$ は、式(3.36)で与えられるものとする。微小変形理論における多重せん断モデル構成式では、 $\bar{\mathbf{S}}'$ は偏差成分のみで構成されているが、大変形理論に基づく物質表示においては、先に述べたように、式(3.35)の分だけ等方的な成分が含まれている。この成分を取り除いて偏差成分のみとするのが、4階テンソル \mathbb{Q} の役割である。

式(3.45)の右辺第1項における等方圧力は、微小変形理論による定式化の場合と同様（式(2.9)）、以下に示すように有効体積ひずみ ε' の関数とする。

$$p = p(\varepsilon') \quad (3.46)$$

ここに、

$$\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_d \quad (3.47)$$

$$\varepsilon = \ln J \quad (3.48)$$

なお、式(3.48)におけるJacobian determinant J は、変形勾配により式(3.2)で与えられる。

また、式(3.45)の右辺第2項における仮想単純せん断応力に関しても、微小変形理論の場合と同様（式(2.23)）、以下に示すような関数で与える。

$$\mathbf{q}^{(ij)} = \mathbf{q}^{(ij)}(\boldsymbol{\gamma}^{(ij)}, \varepsilon', \varepsilon'') \quad (3.49)$$

ここに、仮想単純せん断ひずみ $\boldsymbol{\gamma}^{(ij)}$ は、物質表示における応力・ひずみ成分の方向ベクトル類にGreen-Lagrangeひずみテンソルを投影したせん断ひずみ成分として、以下で与える。

$$\boldsymbol{\gamma}^{(ij)} = \left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle : \mathbf{E} \quad (3.50)$$

また、仮想有効体積ひずみ ε'' は、前章で示したとおり以下で与える。

$$\varepsilon'' = \varepsilon - \varepsilon_d^c \quad (3.51)$$

なお、式(3.49)では、簡略化のため、式(2.22)に示すような応力テンソルの第2不変量 J_2 およびLode角 θ の依存性を無視している。これは、本研究では、最終的に2次元平面ひずみ条件における有限要素解析への適用を目的としているためであり、3次元モデルを取り扱う際には、上記依存性を厳密に考慮した上で定式化を行う必要がある。

3.4 物質表示での増分形構成式（基本形）

3.4.1 概要

本節では、物質表示における多重せん断モデルの増分形構成式を導く。まず、式(3.45)の両辺の物質時間微分をとると、以下ようになる。

$$\dot{\mathbf{S}}' = \dot{\mathbf{S}}'_p + \dot{\mathbf{S}}'_q \quad (3.52)$$

ここに、

$$\dot{\mathbf{S}}'_p = -\frac{D}{Dt}(Jp\mathbf{C}^{-1}) \quad (3.53)$$

$$\dot{\mathbf{S}}'_q = \frac{D}{Dt}(J^{-2/3})(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}) + J^{-2/3} \frac{D}{Dt}(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}) \quad (3.54)$$

式(3.53)(3.54)の物質時間微分の展開については、これ以降の項で具体的に示す。

ここで、次項以降に現れる Green-Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} の物質時間微分（物質ひずみ速度テンソル）を求めておく。式(3.7)(3.24)より、

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{I}^T\dot{\mathbf{F}} + \mathbf{F}^T\mathbf{I}\dot{\mathbf{F}}) = \mathbf{F}^T \frac{1}{2}(\mathbf{I}^T + \mathbf{I})\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^T d\mathbf{F} \quad (3.55)$$

また、式(3.23)を用いると、以下のように書き表すこともできる。

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{F}^T \text{Grad} \dot{\mathbf{u}})^T + \mathbf{F}^T \text{Grad} \dot{\mathbf{u}} \right] = \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \dot{\mathbf{u}}) \quad (3.56)$$

3.4.2 等方成分の定式化

式(3.53)の物質時間微分を計算すると、以下ようになる。

$$-\frac{D}{Dt}(Jp\mathbf{C}^{-1}) = -\dot{J}p\mathbf{C}^{-1} - J\dot{p}\mathbf{C}^{-1} - Jp \frac{D}{Dt}(\mathbf{C}^{-1}) \quad (3.57)$$

ここに、

$$\dot{J} = J \text{tr} d = \mathbf{I} : \text{grad} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{I} : \text{Grad} \dot{\mathbf{u}} \mathbf{F}^{-1} = J \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.58)$$

$$\dot{p} = \frac{dp}{d\varepsilon'} \dot{\varepsilon}' \quad (3.59)$$

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{C}^{-1}) = -\mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} = -2\mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.60)$$

ダイレイタンスーによる体積ひずみ速度の各成分は、以下に示すように、Green-Lagrange ひずみ速度テンソルの線形関係で与えられるものとする。まず、式(3.27)(3.14)より、体積ひずみ速度が以下のように書き表せる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{I} : \mathbf{d} = \mathbf{I} : \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.61)$$

これにならい，ダイレイタンシーによる体積ひずみ速度も以下のように与えることとする。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^d = \mathbf{C}_{dd}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.62)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^c = \mathbf{C}_{dc}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.63)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = \mathbf{C}_d^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.64)$$

ここに，

$$\mathbf{C}_d^{-1} = \mathbf{C}_{dd}^{-1} + \mathbf{C}_{dc}^{-1} \quad (3.65)$$

よって，式(3.47)(3.51)より，有効体積ひずみ速度および仮想有効体積ひずみ速度は，以下で与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' = (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_d^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.66)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_{dc}^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.67)$$

また，仮想単純せん断ひずみ速度は，式(3.50)より以下のようなになる。

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(ij)} = \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.68)$$

これらを式(3.57)に代入すると，等方成分の物質時間微分は以下のとおり与えられる。

$$\begin{aligned} -\frac{D}{Dt}(Jp\mathbf{C}^{-1}) &= -(\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}})p\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{J} \left(\frac{dp}{d\varepsilon'} (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_d^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \right) \mathbf{C}^{-1} + 2Jp\mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{K}_{LU} - p)\mathbf{C}^{-1} (\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}}) - \mathbf{J}\mathbf{K}_{LU} \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{C}_d^{-1} : \dot{\mathbf{E}}) + 2Jp\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \\ &= \left[\mathbf{J}(\mathbf{K}_{LU} - p)\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2Jp\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{J}\mathbf{K}_{LU} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}_d^{-1} \right] : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

ここに，

$$\mathbf{K}_{LU} = -\frac{dp}{d\varepsilon'} \quad (3.70)$$

以上をまとめると，物質表示での多重せん断モデルにおける等方成分の増分形構成式が，以下のように得られる。

$$\dot{\mathbf{S}}'_p = \mathbb{C}_p : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.71)$$

ここに，

$$\mathbb{C}_p = \mathbf{J}(\mathbf{K}_{LU} - p)\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2Jp\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{J}\mathbf{K}_{LU} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}_d^{-1} \quad (3.72)$$

3.4.3 偏差成分の定式化

(1) 式(3.54)の右辺第1項

まず、式(3.54)の右辺第1項について計算を行う。式(3.58)より、

$$\frac{D}{Dt}(J^{-2/3}) = -\frac{2}{3}J^{-5/3}\dot{J} = -\frac{2}{3}J^{-2/3}\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \quad (3.73)$$

であるので、式(3.54)の右辺第1項は以下のように表せる。

$$\frac{D}{Dt}(J^{-2/3})(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}) = -\frac{2}{3}J^{-2/3}(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}})\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} = -\frac{2}{3}\mathbf{S}'_q \otimes \mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \quad (3.74)$$

(2) 式(3.54)の右辺第2項

次に、式(3.54)の右辺第2項における物質時間微分を計算する。まず、式(3.54)の右辺第2項を以下のように書き下しておく。

$$J^{-2/3} \frac{D}{Dt}(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}) = J^{-2/3} \frac{D}{Dt} \left(\bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}})\mathbf{C}^{-1} \right) = J^{-2/3} \left(\dot{\bar{\mathbf{S}}} - \frac{1}{3} \frac{D}{Dt} [(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}})\mathbf{C}^{-1}] \right) \quad (3.75)$$

式(3.75)の右辺第1項の計算に関して、まず、 $\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle$ は時間に依存しないので、

$$\dot{\bar{\mathbf{S}}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{D}{Dt} (Jq^{(ij)}) \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (3.76)$$

のように書き表せる。よって、以下の物質時間微分を計算すればよい。

$$\frac{D}{Dt}(Jq^{(ij)}) = \dot{J}q^{(ij)} + J\dot{q}^{(ij)} \quad (3.77)$$

ここに、

$$\dot{q}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \dot{\gamma}^{(ij)} + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'} \dot{\varepsilon}' + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''} \dot{\varepsilon}'' \quad (3.78)$$

式(3.77)に式(3.65)~(3.68)を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(Jq^{(ij)}) &= \dot{J}q^{(ij)} + J\dot{q}^{(ij)} \\ &= Jq^{(ij)}\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} + J \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle : \dot{\mathbf{E}} \\ &\quad + J \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'} (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_d^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} + J \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''} (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_{dc}^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \\ &= Jq^{(ij)}\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} + JG_{LU}^{(ij)} \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle : \dot{\mathbf{E}} \\ &\quad + JH_{LU}^{(ij)} (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_d^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} + JL_{LU}^{(ij)} (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_{dc}^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (3.79)$$

ここに、

$$G_{LU}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \quad (3.80)$$

$$H_{LU}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'} \quad (3.81)$$

$$L_{LU}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''} \quad (3.82)$$

これらをまとめて、以下のように書くこととする。

$$\frac{D}{Dt}(Jq^{(ij)}) = JC_q^{(ij)-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.83)$$

ここに、

$$\mathbf{C}_q^{(ij)-1} = q^{(ij)} \bar{\mathbf{C}}^{-1} + G_{LU}^{(ij)} \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle + H_{LU}^{(ij)} (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_d^{-1}) + L_{LU}^{(ij)} (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_{dc}^{-1}) \quad (3.84)$$

これを式(3.76)に代入すると、以下のようなになる。

$$\dot{\bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbf{C}}_q : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.85)$$

ここに、

$$\bar{\mathbf{C}}_q = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I J \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \otimes \mathbf{C}_q^{(ij)-1} \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \quad (3.86)$$

続いて、式(3.75)の右辺第2項の計算を行う。まず、式(3.75)の右辺第2項を以下のように書き下しておく。

$$\frac{D}{Dt} [(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1}] = (\dot{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} + (\mathbf{C} : \dot{\bar{\mathbf{S}}}) \mathbf{C}^{-1} + (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \frac{D}{Dt} (\mathbf{C}^{-1}) \quad (3.87)$$

式(3.87)の右辺各項を順に計算すると、以下のようなになる。

第1項：式(3.7)(3.40)より、

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} &= (2\dot{\mathbf{E}} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} = 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{E}} \\ &= 2\mathbf{C}^{-1} \otimes (\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}}) : \dot{\mathbf{E}} + 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}} \right) : \dot{\mathbf{E}} \\ &= 2\mathbf{C}^{-1} \otimes (\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}}) : \dot{\mathbf{E}} + \frac{2}{3} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (3.88)$$

第2項：式(3.85)より、

$$(\mathbf{C} : \dot{\bar{\mathbf{S}}}) \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \dot{\bar{\mathbf{S}}} = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbf{C}}_q : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.89)$$

第3項：式(3.60)より、

$$(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \frac{D}{Dt} (\mathbf{C}^{-1}) = -2(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{C}^{-1} = -2(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) (\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.90)$$

式(3.87)に式(3.88)～(3.90)を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}[(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}})\mathbf{C}^{-1}] &= \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}:\bar{\mathbf{C}}_q:\dot{\mathbf{E}} \\ &\quad - 2(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}})\left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}} + 2\mathbf{C}^{-1} \otimes (\mathbf{Q}:\bar{\mathbf{S}}):\dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (3.91)$$

となる。

式(3.75)に式(3.85)(3.91)を代入すると、式(3.54)の右辺第2項が以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} J^{-2/3} \frac{D}{Dt}(\mathbf{Q}:\bar{\mathbf{S}}) &= J^{-2/3} \left(\dot{\bar{\mathbf{S}}} - \frac{1}{3} \frac{D}{Dt}[(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}})\mathbf{C}^{-1}] \right):\mathbf{E} \\ &= J^{-2/3} \left[\mathbf{Q}:\bar{\mathbf{C}}_q + \frac{2}{3}(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}})\left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right) \right]:\mathbf{E} - \frac{2}{3}(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}'_q):\mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.92)$$

(3) 偏差成分のまとめ

式(3.54)に式(3.85)(3.92)を代入すると、物質表示での多重せん断モデルにおける偏差成分の増分形構成式が、以下のように得られる。

$$\dot{\mathbf{S}}'_q = \mathbb{C}_q:\dot{\mathbf{E}} \quad (3.93)$$

ここに、

$$\mathbb{C}_q = J^{-2/3} \left[\mathbf{Q}:\bar{\mathbf{C}}_q + \frac{2}{3}(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}})\tilde{\mathbf{Q}} \right] - \frac{2}{3}(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}'_q + \mathbf{S}'_q \otimes \mathbf{C}^{-1}) \quad (3.94)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \quad (3.95)$$

3.4.4 物質表示での増分形構成式

以上をまとめると、物質表示における多重せん断モデルの増分形構成式が、以下のとおり与えられる。

$$\dot{\mathbf{S}}' = \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial \mathbf{E}}:\dot{\mathbf{E}} = \mathbb{C}:\dot{\mathbf{E}} \quad (3.96)$$

ここに、

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_p + \mathbb{C}_q \quad (3.97)$$

であり、 \mathbb{C}_p は式(3.72)で、また \mathbb{C}_q は式(3.94)で与えられるものとする。

なお、式(3.96)に現れるいくつかの項については、有限要素法による数値解析への導入のため、以下に示すように、さらに具体的な形に書き下しておく。

まず、式(3.94)右辺の大括弧内の各項は、

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}:\bar{\mathbf{C}}_q &= \bar{\mathbf{C}}_q - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I 2J\gamma^{(ij)} \mathbf{C}_q^{(ij)-1} \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I J \left(\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle - \frac{2}{3}\gamma^{(ij)} \mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \mathbf{C}_q^{(ij)-1} \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I 2Jq^{(ij)} \gamma^{(ij)} \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (3.99)$$

と書き下すことができる。また、式(3.45)などにおける、第2Piola-Kirchhoff有効応力テンソルの偏差成分は、以下のように書き表せる。

$$\mathbf{S}'_q = J^{-2/3} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I Jq^{(ij)} \left(\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle - \frac{2}{3}\gamma^{(ij)} \mathbf{C}^{-1} \right) \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \quad (3.100)$$

以上のとおり、大変形理論による多重せん断モデルの接線剛性テンソルは、等方成分と偏差成分を分離した形で定式化がなされており、微小変形理論の接線剛性テンソルと比較すると複雑なように映る。しかし、結局のところ、微小変形理論での接線剛性テンソルの一部に応力テンソルの関連項が現れる点、および粒状体を特徴づける方向ベクトル類の変化に関して、テンソルの変換および Jacobian determinant の付加が必要となる点を除けば、基本的には微小変形理論の場合と同じとなる。

なお、増分形構成式におけるいくつかのテンソル項を成分表示すると、以下のようになる。

$$\left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right)_{ABCD} = C_{AB}^{-1} C_{CD}^{-1} \quad (3.101)$$

$$\left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} \right)_{ABCD} = \frac{1}{2} \left(C_{AC}^{-1} C_{BD}^{-1} + C_{AD}^{-1} C_{BC}^{-1} \right) = \frac{\partial C_{AB}^{-1}}{\partial C_{CD}} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} & \left(\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \otimes \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \right)_{ABCD} \\ &= \left(T_A^{(ij)} N_B^{(ij)} + T_B^{(ij)} N_A^{(ij)} \right) \left(T_C^{(ij)} N_D^{(ij)} + T_D^{(ij)} N_C^{(ij)} \right) \end{aligned} \quad (3.103)$$

3.5 空間表示での積分形構成式（基本形）

空間表示での多重せん断モデルの積分形構成式は、式(3.45)(3.36)で与えた物質表示における積分形の構成式を push-forward することにより、Cauchy 有効応力を用いて以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}' \mathbf{F}^T \quad (3.104)$$

式(3.104)の等方成分は、

$$\boldsymbol{\sigma}'_p = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}'_p \mathbf{F}^T = -J^{-1} \mathbf{F} \left(Jp \mathbf{C}^{-1} \right) \mathbf{F}^T = -p \mathbf{I} \quad (3.105)$$

で与えられる。一方，偏差成分は以下のように表せる。

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}'_q &= J^{-1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{S}}'_q \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \left(J^{-2/3} \mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}} \right) \mathbf{F}^T \\
 &= J^{-2/3} \mathbf{F} \left(J^{-1} \bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} J^{-1} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} \right) \mathbf{F}^T \\
 &= J^{-2/3} \left(J^{-1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T - \frac{1}{3} J^{-1} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} \right)
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

ここで，式(3.106)で表わされる項が，実際に空間表示における偏差成分となっているかどうか確かめるため，2階の単位テンソル \mathbf{I} との contraction をとってみる。

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : J^{-2/3} \left(J^{-1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T - \frac{1}{3} J^{-1} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} \right) \tag{3.107}$$

ここで，

$$\mathbf{I} : \mathbf{F} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} : \mathbf{F} \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{F} = \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C} = \mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}} \tag{3.108}$$

また，

$$\frac{1}{3} \mathbf{I} : (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} = (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \tag{3.109}$$

であるので，以下に示すとおり，式(3.106)が空間表示における Cauchy 有効応力の偏差成分であることが確認された。

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}'_q = 0 \tag{3.110}$$

式(3.106)の最右辺第1項は，式(3.36)より以下のように表せる。

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = J^{-1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \tag{3.111}$$

ここで，式(3.111)を式(3.107)に代入して，式(3.110)の関係を用いると以下ようになる。

$$\mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : J^{-2/3} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3} J^{-1} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} \right) = 0 \tag{3.112}$$

よって，式(3.44)より，

$$\mathbf{I} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = J^{-1} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \tag{3.113}$$

これを再び式(3.106)に代入すると，以下の関係が得られる。

$$\boldsymbol{\sigma}'_q = J^{-2/3} \left(\mathbb{N} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.114}$$

ここで，式(3.114)を，物質表示での偏差成分抽出のための4階の projection tensor \mathbb{Q} に準じる形で，以下のように書き表しておく。

$$\boldsymbol{\sigma}'_q = J^{-2/3} \mathbb{Z} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.115}$$

ここに,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (3.116)$$

は, 空間表示における偏差成分抽出のための 4 階の **projection tensor** である。

よって, 空間表示における多重せん断モデルの積分形構成式は, 以下のとおり与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'_p + \boldsymbol{\sigma}'_q = -p\mathbf{I} + J^{-2/3} \mathbb{Z} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.117)$$

なお, 空間表示での応力・ひずみ方向の方向ベクトル類に, **Euler-Almansi** ひずみテンソル \mathbf{e} を投影して得られるせん断ひずみ方向成分 (仮想単純せん断ひずみ)

$$\gamma^{(ij)} = \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle : \mathbf{e} \quad (3.118)$$

と, 物質表示での方向ベクトル類に **Green-Lagrange** ひずみテンソル \mathbf{E} を投影して得られる式(3.50)の仮想単純せん断ひずみを比較すると, 以下に示すように, 両者は同じものであることがわかる。

$$\begin{aligned} \gamma^{(ij)} &= \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle : \mathbf{e} = \langle \mathbf{F}\mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{F}\mathbf{N}^{(ij)} \rangle : \mathbf{F}^{-\text{T}}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1} \\ &= \mathbf{F} \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \mathbf{F}^{\text{T}} : \mathbf{F}^{-\text{T}}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1} = \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.119)$$

3.6 空間表示での増分形構成式（基本形）

空間表示における多重せん断モデルの増分形構成式は, **Holzapfel** (2000) にならい, **Kirchhoff** 応力 $\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}'$ の Lie 時間微分として与えられる **Oldroyd** 応力速度 $\text{Oldr}(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}')$, および, 変形速度テンソル \mathbf{d} を用いて, 以下のように与えられる。

$$\text{Oldr}(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}') = \mathbf{J}\mathbf{C} : \mathbf{d} \quad (3.120)$$

ここに,

$$c_{abcd} = J^{-1} F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} C_{ABCD} \quad (3.121)$$

であり, 主な 4 階テンソルの変換は, 以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} J^{-1} F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1})_{ABCD} &= J^{-1} F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} C_{AB}^{-1} C_{CD}^{-1} \\ &= J^{-1} (F_{aA} C_{AB}^{-1} F_{bB}) (F_{cC} C_{CD}^{-1} F_{dD}) = J^{-1} \delta_{ab} \delta_{cd} = J^{-1} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{abcd} \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned}
 & J^{-1} F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} (\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1})_{ABCD} \\
 &= \frac{J^{-1}}{2} (F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} C_{AC}^{-1} C_{BD}^{-1} + F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} C_{AD}^{-1} C_{BC}^{-1}) \\
 &= \frac{J^{-1}}{2} ((F_{aA} C_{AC}^{-1} F_{cC}) (F_{bB} C_{BD}^{-1} F_{dD}) + (F_{aA} C_{AD}^{-1} F_{dD}) (F_{bB} C_{BC}^{-1} F_{cC})) \\
 &= \frac{J^{-1}}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) = \frac{J^{-1}}{2} (\mathbb{N} + \bar{\mathbb{N}})_{abcd}
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

$$\begin{aligned}
 & J^{-1} F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} (\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \otimes (\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle))_{ABCD} \\
 &= J^{-1} F_{aA} (T_A^{(ij)} N_B^{(ij)} + T_B^{(ij)} N_A^{(ij)}) F_{bB} F_{cC} (T_C^{(ij)} N_D^{(ij)} + T_D^{(ij)} N_C^{(ij)}) F_{dD} \\
 &= J^{-1} (t_a^{(ij)} n_b^{(ij)} + t_b^{(ij)} n_a^{(ij)}) (t_c^{(ij)} n_d^{(ij)} + t_d^{(ij)} n_c^{(ij)}) \\
 &= J^{-1} (\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \otimes \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle)_{abcd}
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

また、式(3.18)より、変形速度テンソルは対称テンソルであるので、式(3.123)は以下のように書き表せる。

$$J^{-1} F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} (\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1})_{ABCD} = J^{-1} \mathbb{N} \tag{3.125}$$

以上の準備のもと、式(3.96)に示す物質表示における増分形構成式を **push-forward** することにより、空間表示における増分形構成式の接線勾配が以下のように得られる。

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_p + \mathbb{C}_q \tag{3.126}$$

$$\mathbb{C}_p = (K_{LU} - p) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2p \mathbb{N} - K_{LU} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}_d \tag{3.127}$$

$$\mathbb{C}_q = J^{-2/3} \left[\mathbb{Z} : \bar{\mathbb{C}}_q + \frac{2}{3} \text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbb{Z} \right] - \frac{2}{3} (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\sigma}'_q + \boldsymbol{\sigma}'_q \otimes \mathbf{I}) \tag{3.128}$$

$$\bar{\mathbb{C}}_q = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \otimes \mathbf{I}_q^{(ij)} \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \tag{3.129}$$

$$\mathbf{I}_q^{(ij)} = q^{(ij)} \mathbf{I} + G_{LU}^{(ij)} \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle + H_{LU}^{(ij)} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d) + L_{LU}^{(ij)} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d^c) \tag{3.130}$$

ここに、

$$\mathbf{I}_d = \mathbf{F} \mathbf{C}_d^{-1} \mathbf{F}^T \tag{3.131}$$

$$\mathbf{I}_d^c = \mathbf{F} \mathbf{C}_{dc}^{-1} \mathbf{F}^T \tag{3.132}$$

であり、物質表示における式(3.62)～(3.67)と同様に、これらの2階テンソルと変形速度テンソルとの **contraction** をとることで、以下のとおりダイレイタンスーによる体積ひずみ速度

が与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^d = \mathbf{I}_d^d : \mathbf{d} \quad (3.133)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^c = \mathbf{I}_d^c : \mathbf{d} \quad (3.134)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = \mathbf{I}_d : \mathbf{d} \quad (3.135)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' = (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d) : \mathbf{d} \quad (3.136)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d^c) : \mathbf{d} \quad (3.137)$$

また、空間表示による仮想単純せん断ひずみ速度は、物質表示での式(3.68)、および、式(3.14)(3.31)(3.32)より、以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(ij)} &= \left\langle \mathbf{F}^{-1} \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{F}^{-1} \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle : \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^{-1} \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \mathbf{F}^{-T} : \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} = \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle : \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.138)$$

なお、式(3.126)におけるいくつかの項については、数値計算への導入のため、以下に示すように、さらに具体的に書き下しておく。

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} : \bar{\mathbf{c}}_q &= \bar{\mathbf{c}}_q - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \left(\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I 2\gamma^{(ij)} \mathbf{I}_q^{(ij)} \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left(\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle - \frac{2}{3} \gamma^{(ij)} \mathbf{I} \right) \otimes \mathbf{I}_q^{(ij)} \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{I} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I 2q^{(ij)} \gamma^{(ij)} \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \quad (3.140)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_q = J^{-2/3} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I q^{(ij)} \left(\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle - \frac{2}{3} \gamma^{(ij)} \mathbf{I} \right) \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \quad (3.141)$$

3.7 空間表示でのダイレイタンシーの定式化

前節までに、大変形理論に基づき、基準配置に基づく物質表示および現配置に基づく空間表示の双方の枠組みにおいて、第2章で述べたひずみ空間における多重せん断モデルを拡張した。しかし、ダイレイタンシーによる体積ひずみの影響に関しては、式(3.47)の有効体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}'$ および式(3.51)の仮想有効体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}''$ により考慮はされているものの、具体的な形での定式化はなされていない。すなわち、物質表示では式(3.62)～(3.67)により、また空間表示では式(3.133)～(3.137)により、ダイレイタンシーによる体積ひずみ類が与えられるが、それらを規定する2階テンソル類（すなわち、 $\mathbf{C}_d, \mathbf{C}_{dc}, \mathbf{C}_{dd}$ および $\mathbf{I}_d, \mathbf{I}_d^c, \mathbf{I}_d^d$ ）は明らか

かになっていない。本節では、これらの成分を具体的に定式化することを目的とする。

3.7.1 膨張的ダイレイタンスーの定式化

まず、多重せん断モデルにおける仮想単純せん断応力は、前章で示した微小変形理論の場合と同様に、骨格曲線上では双曲線型で与えるものとする。

$$q^{(ij)} = \frac{\gamma^{(ij)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(ij)} / \gamma_v|} q_v \quad (3.142)$$

空間表示における Cauchy 有効応力は、式(3.105)(3.106)を用い、以下のように等方成分および偏差成分に分解できる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}_p' + \boldsymbol{\sigma}_q' = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_q' \quad (3.143)$$

ここに、等方圧力は以下で与えられる。

$$p = -\frac{1}{3}\mathbf{I}:\boldsymbol{\sigma}' = -\frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{\sigma}' \quad (3.144)$$

また、ひずみ速度に関しては、Euler-Almansi ひずみテンソルの Lie 時間微分として与えられる変形速度テンソルを用いて、これを以下のように等方成分と偏差成分に分けることとする。

$$\mathbf{d} = \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}:\mathbf{d} + \bar{\mathbf{d}} = \frac{1}{3}\dot{\epsilon}\mathbf{I} + \bar{\mathbf{d}} = \frac{1}{3}(\dot{\epsilon}' + \dot{\epsilon}_d^c + \dot{\epsilon}_d^d)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{d}} \quad (3.145)$$

ここに、体積ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ は、変形速度テンソルにより式(3.27)で与えられる。また、 $\dot{\epsilon}'$ 、 $\dot{\epsilon}_d^c$ 、 $\dot{\epsilon}_d^d$ は、それぞれ有効体積ひずみ速度（等方圧力の変化による成分）、収縮的ダイレイタンスー速度、膨張的ダイレイタンスー速度であり、式(3.136)(3.134)(3.135)で与えられる。

第2章で示したダイレイタンスーの定式化と同様に、偏差成分とダイレイタンスーの膨張的成分とで構成されるひずみは、骨格曲線に沿う载荷時には仕事をしない成分であると仮定する。すなわち、

$$\boldsymbol{\sigma}' : \left(\frac{1}{3}(\dot{\epsilon}_d^d)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{d}} \right) = 0 \quad (3.146)$$

式(3.146)に式(3.143)を代入すると、以下の式が得られる。

$$(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_q') : \left(\frac{1}{3}(\dot{\epsilon}_d^d)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{d}} \right) = -p\mathbf{I} : \frac{1}{3}(\dot{\epsilon}_d^d)\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_q' : \bar{\mathbf{d}} = -p\dot{\epsilon}_d^d + \boldsymbol{\sigma}_q' : \bar{\mathbf{d}} = 0 \quad (3.147)$$

よって、

$$\dot{\epsilon}_d^d = \frac{\boldsymbol{\sigma}_q' : \bar{\mathbf{d}}}{p} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_q' : \mathbf{d}}{p} \quad (3.148)$$

これに式(3.141)を代入すると,

$$\dot{\varepsilon}_d^d = \left[\frac{J^{-2/3}}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{q^{(ij)}}{p} \left(\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle - \frac{2}{3} \gamma^{(ij)} \mathbf{I} \right) \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \right] : \mathbf{d} \quad (3.149)$$

さらに, 式(3.142)に示す骨格曲線の双曲線関係を代入し, 次式を得る。

$$\dot{\varepsilon}_d^d = \left[\frac{J^{-2/3}}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left(\frac{\gamma^{(ij)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(ij)} / \gamma_v|} \right) \mathbf{M}_{fv} \left(\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle - \frac{2}{3} \gamma^{(ij)} \mathbf{I} \right) \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \right] : \mathbf{d} \quad (3.150)$$

ここに,

$$\mathbf{M}_{fv} = \frac{q_v}{p} \quad (3.151)$$

よって, 膨張的ダイレイタンスー速度は, 以下のとおり与えられる。

$$\dot{\varepsilon}_d^d = \mathbf{I}_d^d : \mathbf{d} \quad (3.152)$$

ここに,

$$\mathbf{I}_d^d = J^{-2/3} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left(\frac{\gamma^{(ij)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(ij)} / \gamma_v|} \right) \mathbf{M}_{fv} \left(\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle - \frac{2}{3} \gamma^{(ij)} \mathbf{I} \right) \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \quad (3.153)$$

以上を膨張的ダイレイタンスーの定式化の基本形とし, 第 2 章で示した微小変形理論による定式化の場合と同様に, パラメータを導入するとともに, γ_v の仮想有効体積ひずみ依存性を考慮した項を付加する (詳細は 2.5.4 項および 2.5.5 項を参照のこと)。

3.7.2 収縮的ダイレイタンスーの定式化

一方, 収縮的ダイレイタンスー成分は, 微小変形解析の場合と同様に, 累積塑性せん断ひずみに比例するものとして以下で与える。

$$\dot{\varepsilon}_d^c = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \mathbf{M}_v \left| \dot{\gamma}_p^{(ij)} \right| \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \quad (3.154)$$

ここに, $\dot{\gamma}_p^{(ij)}$ は仮想単純せん断ひずみ増分の塑性成分であり, 弾性領域を調整するパラメータ c_1 を用いて, 以下で与えられる。

$$\dot{\gamma}_p^{(ij)} = \dot{\gamma}^{(ij)} - c_1 \dot{\gamma}_e^{(ij)} \quad (3.155)$$

なお, $\dot{\gamma}^{(ij)} \leq c_1 \dot{\gamma}_e^{(ij)}$ の場合には, $\dot{\gamma}_p^{(ij)} = 0$ とする。

ここに, 仮想単純せん断ひずみ増分は以下で与える。

$$\dot{\gamma}^{(ij)} = \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle : \mathbf{d} = \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.156)$$

また、仮想弾性せん断ひずみ増分（仮想単純せん断ひずみ増分の弾性成分）は、微小変形理論における定式化と同様に以下で与える。

$$\dot{\gamma}_e^{(ij)} = \left(\frac{G_{LU}^{(ij)}}{G_{L0}} \right) \dot{\gamma}^{(ij)} \quad (3.157)$$

ゆえに、式(3.155)は以下のように書き表すことができる。

$$\dot{\gamma}_p^{(ij)} = \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(ij)}}{G_{L0}} \right) \right) \dot{\gamma}^{(ij)} \quad (3.158)$$

なお、 $1 < c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(ij)}}{G_{L0}} \right)$ の場合には、 $\dot{\gamma}_p^{(ij)} = 0$ とする。

式(3.154)(3.156)より、収縮的ダイレイタンスー速度も、膨張的ダイレイタンスー成分と同様の形で、以下のように書き表すことができる。

$$\dot{\varepsilon}_d^c = \mathbf{I}_d^c : \mathbf{d} \quad (3.159)$$

ここに、

$$\mathbf{I}_d^c = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \bar{M}_v^{(ij)} \left| \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \right|^* \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \quad (3.160)$$

ただし、

$\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle : \mathbf{d} \geq 0$ の時、

$$\left| \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \right|^* = \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \quad (3.161)$$

$\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle : \mathbf{d} < 0$ の時、

$$\left| \langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \right|^* = -\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \rangle \quad (3.162)$$

となる。また、

$$\bar{M}_v^{(ij)} = M_v \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(ij)}}{G_{L0}} \right) \right) \quad (3.163)$$

であり, $1 < c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(ij)}}{G_{L0}} \right)$ の場合には, $\bar{\mathbf{M}}_v^{(ij)} = \mathbf{0}$ とする。

3.8 物質表示でのダイレイタンシーの定式化

物質表示における膨張的および収縮的ダイレイタンシー速度は, 空間表示でのダイレイタンシー関連の式を pull-back することにより, 以下のように与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^d = \mathbf{C}_{dd}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.164)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^c = \mathbf{C}_{dc}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.165)$$

ここに, 式(3.153)より,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{dd}^{-1} &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{I}_d^d \mathbf{F}^{-T} \\ &= J^{-2/3} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left(\frac{\gamma^{(ij)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(ij)} / \gamma_v|} \right) \mathbf{M}_{fv} \left(\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle - \frac{2}{3} \gamma^{(ij)} \mathbf{C}^{-1} \right) \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \end{aligned} \quad (3.166)$$

また, 式(3.160)より,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{dc}^{-1} &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{I}_d^c \mathbf{F}^{-T} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \bar{\mathbf{M}}_v^{(ij)} \left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle^* \Delta \omega \Delta \Omega^{(j)} \end{aligned} \quad (3.167)$$

ただし,

$\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle : \dot{\mathbf{E}} \geq 0$ の時,

$$\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle^* = \langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \quad (3.168)$$

$\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle : \dot{\mathbf{E}} < 0$ の時,

$$\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle^* = -\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \rangle \quad (3.169)$$

となる。

3.9 2次元解析での物質表示による積分形構成式

3.9.1 テンソル表示

前節までに示した大変形理論に基づく定式化では、3次元モデルの大変形解析を対象としていた。本節以降では、ひずみ空間多重せん断モデルを2次元平面ひずみ条件での大変形解析に適用するため、これまでの定式化を以下に示すように書き改める。なお、2次元モデルを対象とした定式化では、各項にかかる係数などが3次元の場合と異なるため、まずこの点に関して述べることにする。

3.3.2 項で示した超弾性体における等方成分と偏差成分への分離に関して、3次元では変形勾配の固有値が3個存在するので、偏差成分を表示するために右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} に乗じる係数は $J^{-2/3}$ であった (Holzapfel, 2000)。しかし、2次元の場合、変形勾配の固有値は2個なので、偏差成分を表示するために右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} に乗じる係数は、以下に示すように J^{-1} となる。

$$\bar{\mathbf{C}} = J^{-1}\mathbf{C} \quad (3.170)$$

$$\det \bar{\mathbf{C}} = 1 \quad (3.171)$$

また、2次元での projection tensor (3次元の場合は式(3.40)) を導くために、以下の計算を行う。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial (J^{-1}\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = -\mathbf{C} \otimes \frac{1}{J^2} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} + J^{-1}\mathbf{N} \\ &= -\mathbf{C} \otimes \frac{J^{-1}}{2} \mathbf{C}^{-1} + J^{-1}\mathbf{N} = J^{-1} \left(\mathbf{N} - \frac{1}{2} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (3.172)$$

これより、2次元解析における projection tensor として、以下に示す4階テンソル \mathbf{Q} が用いられる。

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N} - \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \quad (3.173)$$

2次元解析における物質表示での定式化では、式(3.173)の projection tensor を用いることで、第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} が以下のように分割される。

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_q \quad (3.174)$$

ここに、

$$\mathbf{S}_p = -Jp\mathbf{C}^{-1} \quad (3.175)$$

$$\mathbf{S}_q = J^{-1}\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}} \quad (3.176)$$

ここで、実際に式(3.173)で表わされるテンソルが、物質表示における偏差成分を抽出する projection tensor になっていることは、以下のようにして確認できる。まず、式(3.174)と右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} との contraction をとると、

$$\mathbf{S} : \mathbf{C} = \mathbf{S}_p : \mathbf{C} + \mathbf{S}_q : \mathbf{C} \quad (3.177)$$

となる。式(3.175)(3.176)より、

$$\mathbf{S}_p : \mathbf{C} = -Jp\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{C} = -2Jp \quad (3.178)$$

$$\mathbf{S}_q : \mathbf{C} = (J^{-1}\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) : \mathbf{C} = J^{-1} \left(\bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{2}(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}})\mathbf{C}^{-1} \right) : \mathbf{C} = 0 \quad (3.179)$$

と表せるので、上に述べたことが確かめられた。

この結果を用いて、2次元解析における物質表示での多重せん断モデルの積分形構成式を以下で与える。

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_p + \mathbf{S}'_q = -Jp\mathbf{C}^{-1} + J^{-1}\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}} \quad (3.180)$$

ここに、

$$\bar{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^I Jq^{(i)} \langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle \Delta\omega \quad (3.181)$$

である。

3.9.2 ベクトル・マトリクス表示

ここでは、式(3.174)～(3.176)で表されるテンソル表示の積分形構成式を、有限要素法への導入という観点から、ベクトル・マトリクス表示へと書き換えを行う。

2次元解析の場合、応力・ひずみベクトルを、対応する第2Piola-Kirchhoff 応力テンソルおよびGreen-Lagrange ひずみテンソルの成分を用いて以下のように与える。

$$\hat{\mathbf{S}}^T = \{S'_{11} \quad S'_{22} \quad S'_{12}\} \quad (3.182)$$

$$\hat{\mathbf{E}}^T = \{E_{11} \quad E_{22} \quad 2E_{12}\} \quad (3.183)$$

これらを用い、物質表示における多重せん断モデルのベクトル・マトリクス表示での積分形構成式を以下で与える。

$$\hat{\mathbf{S}}' = \hat{\mathbf{S}}'_p + \hat{\mathbf{S}}'_q \quad (3.184)$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{S}}'_p = -Jp\hat{\mathbf{C}}^{-1} \quad (3.185)$$

$$\hat{\mathbf{S}}'_q = \sum_{i=1}^I q^{(i)} \hat{\mathbf{N}}^{(i)} \Delta\omega \quad (3.186)$$

であり、式(3.185)(3.186)における各項は、以下のように表される。

$$\{\hat{\mathbf{C}}^{-1}\}^T = \{C_{11}^{-1} \quad C_{22}^{-1} \quad C_{12}^{-1}\} \quad (3.187)$$

$$\{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\}^T = \{\cos \omega_i \quad -\cos \omega_i \quad \sin \omega_i\} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (3.188)$$

$$\{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\} = \{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\} - \gamma^{(i)} \{\hat{\mathbf{C}}^{-1}\} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (3.189)$$

$$\omega_i = (i-1)\Delta\omega \quad (3.190)$$

$$\Delta\omega = \pi / I \quad (3.191)$$

ここに、 $\hat{\mathbf{C}}^{-1}$ は右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} の逆テンソルの各成分より与えられる。また、 $\hat{\mathbf{N}}^{(i)}$ は、テンソル表示における2階のテンソル $\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle$ の成分をベクトル化したものであり、これを用いて仮想単純せん断ひずみは以下で与えられる。

$$\gamma^{(i)} = \{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\}^T \hat{\mathbf{E}} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (3.192)$$

3.10 2次元解析での物質表示による増分形構成式

3.10.1 テンソル表示

続いて、2次元での物質表示における多重せん断モデルの増分形構成式を導く。まず、式(3.180)の両辺の物質時間微分をとると、以下の関係が与えられる。

$$\dot{\mathbf{S}}' = \dot{\mathbf{S}}'_p + \dot{\mathbf{S}}'_q \quad (3.193)$$

ここに、

$$\dot{\mathbf{S}}'_p = -\frac{D}{Dt}(Jp\mathbf{C}^{-1}) \quad (3.194)$$

$$\dot{\mathbf{S}}'_q = \frac{D}{Dt}(J^{-1})(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}) + J^{-1} \frac{D}{Dt}(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}) \quad (3.195)$$

式(3.194)に示す等方成分の増分形は、式(3.53)で表わされる3次元での定式化と形式的に等しく、すでに3.4.2項で具体的な成分が求められている。よって、式(3.195)に示す偏差成分についてのみ、2次元での物質時間微分の計算を行えばよい。まず、式(3.195)の右辺第1項は、式(3.58)の関係を用いて以下のように表すことができる。

$$\frac{D}{Dt}(J^{-1})(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}) = -J^{-1}(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}})\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} = -\mathbf{S}'_q \otimes \mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \quad (3.196)$$

次に、式(3.195)の右辺第2項の物質時間微分を計算するにあたり、以下のように書き下しておく。

$$J^{-1} \frac{D}{Dt} (\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) = J^{-1} \frac{D}{Dt} \left(\bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{2} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} \right) = J^{-1} \left(\dot{\bar{\mathbf{S}}} - \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} [(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1}] \right) \quad (3.197)$$

ここで、 $\dot{\bar{\mathbf{S}}}$ の計算は、式(3.85)(3.86)で表わされる3次元の場合と形式的に等しく、以下で与えられる。

$$\dot{\bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbb{C}}_q : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.198)$$

ここに、

$$\bar{\mathbb{C}}_q = \sum_{i=1}^I J \langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle \otimes \mathbf{C}_q^{(i-1)} \Delta \omega \quad (3.199)$$

一方、式(3.197)の右辺括弧内第2項、すなわち、

$$\frac{D}{Dt} [(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1}] = (\dot{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} + (\mathbf{C} : \dot{\bar{\mathbf{S}}}) \mathbf{C}^{-1} + (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \frac{D}{Dt} (\mathbf{C}^{-1}) \quad (3.200)$$

の各成分の計算は、以下に示すようになる。

式(3.200)右辺第1項：式(3.7)(3.173)より、

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} &= (2\dot{\mathbf{E}} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} = 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{E}} \\ &= 2\mathbf{C}^{-1} \otimes (\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) : \dot{\mathbf{E}} + 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}} \right) : \dot{\mathbf{E}} \\ &= 2\mathbf{C}^{-1} \otimes (\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) : \dot{\mathbf{E}} + (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (3.201)$$

右辺第2項：式(3.198)を用いて、

$$(\mathbf{C} : \dot{\bar{\mathbf{S}}}) \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \dot{\bar{\mathbf{S}}} = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbb{C}}_q : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.202)$$

右辺第3項：式(3.60)より、

$$(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \frac{D}{Dt} (\mathbf{C}^{-1}) = -2(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{C}^{-1} = -2(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) (\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.203)$$

以上の結果を式(3.200)に代入すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} [(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1}] &= \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbb{C}}_q : \dot{\mathbf{E}} \\ &\quad - 2(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) : \dot{\mathbf{E}} + 2\mathbf{C}^{-1} \otimes (\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (3.204)$$

式(3.198)および式(3.204)を式(3.197)に代入すると、

$$\begin{aligned} J^{-1} \frac{D}{Dt} (\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) &= J^{-1} \left(\dot{\bar{\mathbf{S}}} - \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} [(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1}] \right) : \mathbf{E} \\ &= J^{-1} \left[\mathbb{Q} : \bar{\mathbb{C}}_q + (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \right] : \mathbf{E} - (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}'_q) : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.205)$$

となり、これと式(3.196)を式(3.195)に代入すると、偏差成分の増分形が以下のように与えられる。

$$\dot{\mathbf{S}}'_q = \mathbb{C}_q : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.206)$$

ここに、

$$\mathbb{C}_q = J^{-1} \left[\mathbb{Q} : \bar{\mathbb{C}}_q + (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \tilde{\mathbb{Q}} \right] - (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}'_q + \mathbf{S}'_q \otimes \mathbf{C}^{-1}) \quad (3.207)$$

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \quad (3.208)$$

以上より、式(3.71)(3.206)を式(3.193)に代入すると、2次元解析における多重せん断モデルの物質表示による増分形構成式が、以下に示すとおり与えられる。

$$\dot{\mathbf{S}}' = \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.209)$$

ここに、

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_q \quad (3.210)$$

であり、 \mathbf{C}_p は式(3.72)で、また \mathbf{C}_q は式(3.207)で与えられる。

なお、式(3.207)(3.180)などに現れるいくつかの項に関しては、3次元での式(3.98)～(3.100)に準じ、以下のように具体的に書き表しておく。

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} : \bar{\mathbb{C}}_q &= \bar{\mathbb{C}}_q - \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\sum_{i=1}^I 2J \gamma^{(i)} \mathbf{C}_q^{(i-1)} \Delta \omega \right) \\ &= \sum_{i=1}^I J \left(\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle - \gamma^{(i)} \mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \mathbf{C}_q^{(i-1)} \Delta \omega \end{aligned} \quad (3.211)$$

$$\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^I 2J q^{(i)} \gamma^{(i)} \Delta \omega \quad (3.212)$$

$$\mathbf{S}'_q = \sum_{i=1}^I q^{(i)} \left(\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle - \gamma^{(i)} \mathbf{C}^{-1} \right) \Delta \omega \quad (3.213)$$

また、2次元モデルにおける膨脹的および収縮的ダイレイタンスー増分は、3次元の場合と同様に、それぞれ式(3.164)(3.165)で与えられる。ただし、式中の $\mathbf{C}_{\text{dd}}^{-1}$ および $\mathbf{C}_{\text{dc}}^{-1}$ は、以下で与えるものとする。

$$\mathbf{C}_{\text{dd}}^{-1} = J^{-1} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)} / \gamma_v|} \right) \mathbf{M}_{\text{fv}} \left(\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle - \gamma^{(i)} \mathbf{C}^{-1} \right) \Delta \omega \quad (3.214)$$

$$\mathbf{C}_{\text{dc}}^{-1} = -\sum_{i=1}^I \bar{\mathbf{M}}_v^{(i)} \left\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \right\rangle^* \Delta \omega \quad (3.215)$$

ここに、式(3.163)と同様に、

$$\bar{\mathbf{M}}_v^{(i)} = \mathbf{M}_v \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{\text{LU}}^{(i)}}{G_{\text{L0}}} \right) \right) \quad (3.216)$$

であり、 $1 < c_1 \left(\frac{G_{\text{LU}}^{(i)}}{G_{\text{L0}}} \right)$ の場合には、 $\bar{\mathbf{M}}_v^{(i)} = \mathbf{0}$ とする。

3.10.2 ベクトル・マトリクス表示

3.9.2 項における積分形構成式にならない、ここでは前項で示したテンソル表示による多重せん断モデルの2次元増分形構成式を、ベクトル・マトリクス表示により書き直すこととする。

式(3.182)(3.183)で表わされる2次元解析での応力・ひずみベクトルの増分を用い、式(3.209)(3.210)よりベクトル・マトリクス表示での増分形構成式は以下で与えられる。

$$d\hat{\mathbf{S}}' = \mathbf{D} d\hat{\mathbf{E}} \quad (3.217)$$

ここに、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_q \quad (3.218)$$

$$\mathbf{D}_p = J(K_{\text{LU}} - p) \hat{\mathbf{C}}^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right\}^T + 2Jp \left\{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right\} - JK_{\text{LU}} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{C}}_d^{-1} \right\}^T \quad (3.219)$$

$$\mathbf{D}_q = J^{-1} \left[\tilde{\mathbf{D}}_q + \sum_{i=1}^I 2Jq^{(i)} \gamma^{(i)} \Delta \omega \tilde{\mathbf{Q}} \right] - \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} \hat{\mathbf{S}}_q^T + \hat{\mathbf{S}}_q' \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} \right)^T \right) \quad (3.220)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_q = \sum_{i=1}^I J \hat{\mathbf{N}}^{(i)} \left(\hat{\mathbf{C}}_q^{(i-1)} \right)^T \Delta \omega \quad (3.221)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_q^{(i-1)} = q^{(i)} \hat{\mathbf{C}}^{-1} + G_{\text{LU}}^{(i)} \hat{\mathbf{N}}^{(i)} + H_{\text{LU}}^{(i)} \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} - \hat{\mathbf{C}}_d^{-1} \right) + L_{\text{LU}}^{(i)} \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} - \hat{\mathbf{C}}_{\text{dc}}^{-1} \right) \quad (3.222)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \left\{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right\} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} \right)^T \quad (3.223)$$

なお、

$$\begin{aligned}
 \{\hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1}\} &= \begin{bmatrix} C_{11}^{-1} & 0 & C_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & C_{12}^{-1} & 0 & C_{22}^{-1} \\ 0 & C_{11}^{-1} & 0 & C_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{-1} & 0 & \frac{1}{2}C_{12}^{-1} \\ C_{12}^{-1} & 0 & \frac{1}{2}C_{22}^{-1} \\ 0 & C_{12}^{-1} & \frac{1}{2}C_{11}^{-1} \\ 0 & C_{22}^{-1} & \frac{1}{2}C_{12}^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (C_{11}^{-1})^2 & (C_{12}^{-1})^2 & C_{11}^{-1}C_{12}^{-1} \\ (C_{12}^{-1})^2 & (C_{22}^{-1})^2 & C_{12}^{-1}C_{22}^{-1} \\ C_{11}^{-1}C_{12}^{-1} & C_{12}^{-1}C_{22}^{-1} & \frac{1}{2}C_{11}^{-1}C_{22}^{-1} + \frac{1}{2}(C_{12}^{-1})^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.224}$$

である。

また、ベクトル・マトリクス表示による物質表示でのダイレイタンシー成分は、テンソル表示による式(3.164)(3.165)より、以下のように表せる。

$$d\varepsilon_d = \{\hat{\mathbf{C}}_d^{-1}\}^T d\hat{\mathbf{E}} \tag{3.225}$$

$$d\varepsilon_d^d = \{\hat{\mathbf{C}}_{dd}^{-1}\}^T d\hat{\mathbf{E}} \tag{3.226}$$

$$d\varepsilon_d^c = \{\hat{\mathbf{C}}_{dc}^{-1}\}^T d\hat{\mathbf{E}} \tag{3.227}$$

$$d\varepsilon' = \{\hat{\mathbf{C}}^{-1} - \hat{\mathbf{C}}_d^{-1}\}^T d\hat{\mathbf{E}} \tag{3.228}$$

$$d\varepsilon'' = \{\hat{\mathbf{C}}^{-1} - \hat{\mathbf{C}}_{dc}^{-1}\}^T d\hat{\mathbf{E}} \tag{3.229}$$

ここに、これらの式に現れるダイレイタンシー関連のベクトルは、以下で与えられる。

$$\hat{\mathbf{C}}_{dd}^{-1} = J^{-1} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)} / \gamma_v|} \right) \mathbf{M}_{fv} \hat{\mathbf{N}}^{(i)} \Delta\omega \tag{3.230}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{dc}^{-1} = - \sum_{i=1}^I \bar{\mathbf{M}}_v^{(i)} \left| \hat{\mathbf{N}}^{(i)} \right|^* \Delta\omega \tag{3.231}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_d^{-1} = \hat{\mathbf{C}}_{dd}^{-1} + \hat{\mathbf{C}}_{dc}^{-1} \tag{3.232}$$

なお、式(3.230)における $\hat{\mathbf{N}}^{(i)}$ は、式(3.189)により与えられる。また、式(3.231)において、

$\hat{\mathbf{N}}^{(i)\text{T}} d\hat{\mathbf{E}} \geq 0$ の時,

$$\left| \hat{\mathbf{N}}^{(i)} \right|^* = \hat{\mathbf{N}}^{(i)} \quad (3.233)$$

$\hat{\mathbf{N}}^{(i)\text{T}} d\hat{\mathbf{E}} < 0$ の時,

$$\left| \hat{\mathbf{N}}^{(i)} \right|^* = -\hat{\mathbf{N}}^{(i)} \quad (3.234)$$

であり, $\hat{\mathbf{N}}^{(i)}$ は式(3.188)で定義される。

3.11 2次元解析での空間表示による積分形構成式

3.11.1 テンソル表示

空間表示に対する2次元の積分形構成式は, 式(3.180)(3.181)で表される物質表示での積分形構成式を push-forward することにより, Cauchy 有効応力を用いて以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}' \mathbf{F}^{\text{T}} \quad (3.235)$$

ここに, Cauchy 応力の等方成分は,

$$\boldsymbol{\sigma}'_p = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}'_p \mathbf{F}^{\text{T}} = -J^{-1} \mathbf{F} (J p \mathbf{C}^{-1}) \mathbf{F}^{\text{T}} = -p \mathbf{I} \quad (3.236)$$

であり, 一方, 偏差成分は,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}'_q &= J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}'_q \mathbf{F}^{\text{T}} = J^{-1} \mathbf{F} (J^{-1} \mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{F}^{\text{T}} \\ &= J^{-1} \mathbf{F} \left(J^{-1} \bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{2} J^{-1} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} \right) \mathbf{F}^{\text{T}} \\ &= J^{-1} \left(J^{-1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^{\text{T}} - \frac{1}{2} J^{-1} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (3.237)$$

と表される。

ここで, 式(3.237)で表わされる項が, 実際に空間表示における偏差成分となっていることを確かめるため, 3次元での定式化 (式(3.107)~(3.110)) にならい, 2階の単位テンソル \mathbf{I} との contraction をとる。

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : J^{-1} \left(J^{-1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^{\text{T}} - \frac{1}{2} J^{-1} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} \right) \quad (3.238)$$

ここで, 式(3.108), および,

$$\frac{1}{2} \mathbf{I} : (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} = (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \quad (3.239)$$

より, 以下のとおり, 式(3.237)が空間表示における偏差成分であることが確かめられた。

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}'_q = 0 \quad (3.240)$$

式(3.237)の最右辺第1項は、式(3.181)より以下で与えられる。

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = J^{-1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T = \sum_{i=1}^I q^{(i)} \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \Delta \omega \quad (3.241)$$

ここで、式(3.241)を式(3.238)に代入し、さらに式(3.240)を用いると以下の式が得られる。

$$\mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : J^{-1} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{2} J^{-1} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} \right) = 0 \quad (3.242)$$

これより、

$$\mathbf{I} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = J^{-1} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \quad (3.243)$$

と表せるので、これを再び式(3.238)に代入すれば、以下の関係が得られる。

$$\boldsymbol{\sigma}'_q = J^{-1} \left(\mathbb{N} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.244)$$

これを、物質表示での偏差成分を抽出する4階の projection tensor に準じる形で、以下のよう
に書いておく。

$$\boldsymbol{\sigma}'_q = J^{-1} \mathbb{Z} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.245)$$

ここに、

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (3.246)$$

よって、式(3.236)(3.245)を式(3.235)に適用することにより、空間表示における2次元の積分
形構成式が以下のとおり与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'_p + \boldsymbol{\sigma}'_q = -p \mathbf{I} + J^{-1} \mathbb{Z} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.247)$$

3.11.2 ベクトル・マトリクス表示

3.9.2 項に示した物質表示での積分形構成式にならい、本項では、2次元解析におけるテ
ンソル表示による空間表示での積分形構成式を、以下に示すようにベクトル・マトリクス
形式で書き表すこととする。

まず、2次元解析の場合、応力・ひずみベクトルを、対応する Cauchy 応力テンソルおよ
び Euler-Almansi ひずみテンソルの成分を用いて以下で与える。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}'^T = \{ \sigma'_{11} \quad \sigma'_{22} \quad \sigma'_{12} \} \quad (3.248)$$

$$\hat{\mathbf{e}}^T = \{e_{11} \quad e_{22} \quad 2e_{12}\} \quad (3.249)$$

これらを用い、式(3.247)のテンソル表示による構成式を参考にして、空間表示における多重せん断モデルのベクトル・マトリクス表示での積分形構成式を以下で与える。

$$\hat{\mathbf{g}}' = \hat{\mathbf{g}}'_p + \hat{\mathbf{g}}'_q \quad (3.250)$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{g}}'_p = -p\hat{\mathbf{n}}^{(0)} \quad (3.251)$$

$$\hat{\mathbf{g}}'_q = J^{-1} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \Delta\omega \quad (3.252)$$

なお、式(3.251)における $\hat{\mathbf{n}}^{(0)}$ は、式(3.236)における2階の単位テンソル \mathbf{I} をベクトル表示したものであり、以下で与えられる。

$$\hat{\mathbf{n}}^{(0)T} = \{1 \quad 1 \quad 0\} \quad (3.253)$$

ここで、2次元における空間表示の方向ベクトル類を求めるため、式(3.188)で与えられる物質表示の仮想単純せん断を表す方向ベクトルの成分を、以下に示すように一度テンソル表示に戻しておく。

$$\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle = \begin{bmatrix} \cos \omega_i & \sin \omega_i \\ \sin \omega_i & -\cos \omega_i \end{bmatrix} \quad (3.254)$$

式(3.34)を参考にし、式(3.254)を空間表示におけるテンソル表示で表わすと、以下のようになる。

$$\langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle = \mathbf{F} \langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} n_{11}^{(i)} & n_{12}^{(i)} \\ n_{21}^{(i)} & n_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.255)$$

これを再びベクトル・マトリクス表示に戻すと、空間表示における仮想単純せん断の方向ベクトルが以下で与えられる。

$$\{\hat{\mathbf{n}}^{(i)}\}^T = \{n_{11}^{(i)} \quad n_{22}^{(i)} \quad n_{12}^{(i)}\} \quad (\text{for } i = 1, \dots, I) \quad (3.256)$$

これにより、式(3.252)におけるベクトル $\hat{\mathbf{n}}^{(i)}$ が以下のように求められる。

$$\hat{\mathbf{n}}^{(i)} = \hat{\mathbf{n}}^{(i)} - \gamma^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \quad (\text{for } i = 1, \dots, I) \quad (3.257)$$

また、式(3.118)より、仮想単純せん断ひずみは以下で与える。

$$\gamma^{(i)} = \{\hat{\mathbf{n}}^{(i)}\}^T \hat{\mathbf{e}} \quad (\text{for } i = 1, \dots, I) \quad (3.258)$$

なお、仮想単純せん断ひずみは、物質表示 (式(3.192))、空間表示 (式(3.258)) のいずれの場合も等しくなる。これは、式(3.119)のように両者をテンソル表示で比較すれば、容易に確かめられる。

3.12 2次元解析での空間表示による増分形構成式

3.12.1 テンソル表示

空間表示における2次元の増分形構成式は、式(3.247)に示す積分形構成式の Lie 時間微分をとることで、3次元の場合と同様に以下で与えられる。

$$\text{Oldr}(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}') = \mathbf{J}\mathbf{C} : \mathbf{d} \quad (3.259)$$

ここに、空間表示における接線剛性テンソル \mathbf{C} は、変形勾配を通じ、物質表示における接線剛性テンソル \mathbb{C} と式(3.121)に示す関係にある。式(3.259)の左辺は、Kirchhoff 有効応力テンソル $\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}'$ の Lie 時間微分として与えられる Oldroyd 応力速度、また、式(3.259)の右辺における \mathbf{d} は、Euler-Almansi ひずみテンソルの Lie 時間微分として与えられる変形速度テンソル (式(3.16)参照) である。

3次元での定式化に準じて、式(3.210)に示す2次元解析における物質表示の接線剛性テンソルを push-forward することにより、空間表示に対する増分形構成式の接線勾配が以下のとおり与えられる。

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_q \quad (3.260)$$

ここに、

$$\mathbf{C}_p = (K_{LU} - p)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2p\mathbb{N} - K_{LU}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}_d \quad (3.261)$$

$$\mathbf{C}_q = J^{-1} \left[\mathbb{Z} : \bar{\mathbf{C}}_q + \text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbb{Z} \right] - (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\sigma}'_q + \boldsymbol{\sigma}'_q \otimes \mathbf{I}) \quad (3.262)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_q = \sum_{i=1}^I \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \otimes \mathbf{I}_q^{(i)} \Delta \omega \quad (3.263)$$

$$\mathbf{I}_q^{(i)} = q^{(i)}\mathbf{I} + G_{LU}^{(i)} \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle + H_{LU}^{(i)} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d) + L_{LU}^{(i)} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d^c) \quad (3.264)$$

なお、式(3.262)におけるいくつかの項に関して、以下に示すように具体的に書き下しておく。

$$\mathbb{Z} : \bar{\mathbf{C}}_q = \bar{\mathbf{C}}_q - \frac{1}{2}\mathbf{I} \otimes \left(\sum_{i=1}^I 2\gamma^{(i)} \mathbf{I}_q^{(i)} \Delta \omega \right) = \sum_{i=1}^I \left(\langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle - \gamma^{(i)} \mathbf{I} \right) \otimes \mathbf{I}_q^{(i)} \Delta \omega \quad (3.265)$$

$$\text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{I} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{i=1}^I 2q^{(i)} \gamma^{(i)} \Delta \omega \quad (3.266)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_q = J^{-1} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \left(\langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle - \gamma^{(i)} \mathbf{I} \right) \Delta \omega \quad (3.267)$$

また、2次元での膨張的および収縮的ダイレイタンスー増分を規定するテンソル類は、3次元での式(3.153)(3.160)に代えて以下で与える。

$$\mathbf{I}_d^d = J^{-1} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)} / \gamma_v|} \right) \mathbf{M}_{fv} \left(\langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle - \gamma^{(i)} \mathbf{I} \right) \Delta \omega \quad (3.268)$$

$$\mathbf{I}_d^c = - \sum_{i=1}^I \bar{\mathbf{M}}_v^{(i)} \left| \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle \right|^* \Delta \omega \quad (3.269)$$

3.12.2 ベクトル・マトリクス表示

ここでは、前項で示したテンソル表示による構成式を、ベクトル・マトリクス表示に書き換える。Oldroyd 応力速度テンソルおよび変形速度テンソルのベクトル表示を、それぞれ $\hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{d}}\mathbf{r}$ 、 $\hat{\mathbf{d}}$ とおくと、式(3.259)より以下に示すような2次元での空間表示における増分形構成式が得られる。

$$\hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{d}}\mathbf{r}(J\boldsymbol{\sigma}') = J\mathbf{c}\hat{\mathbf{d}} \quad (3.270)$$

ここに、

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_p + \mathbf{c}_q \quad (3.271)$$

$$\mathbf{c}_p = (K_{LU} - p) \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)\text{T}} + 2p\hat{\mathbf{I}} - K_{LU} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \hat{\mathbf{n}}_d^{\text{T}} \quad (3.272)$$

$$\mathbf{c}_q = J^{-1} \left[\tilde{\mathbf{c}}_q + \sum_{i=1}^I 2q^{(i)} \gamma^{(i)} \Delta \omega \mathbf{Z} \right] - \left(\hat{\mathbf{n}}^{(0)} \boldsymbol{\sigma}'_q{}^{\text{T}} + \boldsymbol{\sigma}'_q \hat{\mathbf{n}}^{(0)\text{T}} \right) \quad (3.273)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_q = \sum_{i=1}^I \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_q^{(i)\text{T}} \Delta \omega \quad (3.274)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_q^{(i)} = q^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} + G_{LU}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + H_{LU}^{(i)} (\hat{\mathbf{n}}^{(0)} - \hat{\mathbf{n}}_d) + L_{LU}^{(i)} (\hat{\mathbf{n}}^{(0)} - \hat{\mathbf{n}}_d^c) \quad (3.275)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)\text{T}} \quad (3.276)$$

なお、式(3.270)は以下で示すように表すこともできる。すなわち、Kirchhoff 有効応力テンソルの線形化により与えられる、式(3.259)と等価な以下の関係式 (Holzapfel, 2000),

$$\Delta \boldsymbol{\tau}' = J\mathbf{C} : \text{grad} \Delta \mathbf{u} = J\mathbf{C} : \Delta \mathbf{e} \quad (3.277)$$

を用いることで、ベクトル・マトリクス表示での増分形構成式が以下のとおり与えられる。

$$d\hat{\boldsymbol{\tau}}' = Jcd\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.278)$$

なお、式(3.277)の最右辺の導出に際して、接線剛性テンソルの対称性を用いた。

また、ベクトル・マトリクス表示による空間表示でのダイレイタンシー成分は、テンソル表示による式(3.152)(3.159)(3.268)(3.269)を参考に、以下で与えられる。

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d = \hat{\mathbf{n}}_d^T d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.279)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d^d = \hat{\mathbf{n}}_d^{dT} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.280)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d^c = \hat{\mathbf{n}}_d^{cT} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.281)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}' = \{\hat{\mathbf{n}}^{(0)} - \hat{\mathbf{n}}_d\}^T d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.282)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}'' = \{\hat{\mathbf{n}}^{(0)} - \hat{\mathbf{n}}_d^c\}^T d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.283)$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{n}}_d^d = J^{-1} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)} / \gamma_v|} \right) M_{iv} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \Delta\omega \quad (3.284)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_d^c = - \sum_{i=1}^I \bar{M}_v^{(i)} |\hat{\mathbf{n}}^{(i)}|^* \Delta\omega \quad (3.285)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_d = \hat{\mathbf{n}}_d^d + \hat{\mathbf{n}}_d^c \quad (3.286)$$

なお、式(3.284)における $\hat{\mathbf{n}}^{(i)}$ は、式(3.257)により与えられる。また、式(3.285)において、 $\hat{\mathbf{n}}^{(i)T} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0$ の時、

$$|\hat{\mathbf{n}}^{(i)}|^* = \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (3.287)$$

$\hat{\mathbf{n}}^{(i)T} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} < 0$ の時、

$$|\hat{\mathbf{n}}^{(i)}|^* = -\hat{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (3.288)$$

であり、 $\hat{\mathbf{n}}^{(i)}$ は式(3.256)で与えられる。

3.13 モデルパラメータ

3.13.1 せん断成分に関するパラメータ

多重せん断モデルにおける骨格曲線上での仮想単純せん断応力は、微小変形解析と同様

に，大変形解析でも以下に示すような双曲線型で与える。

$$q^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)} / \gamma_v|} q_v \quad (3.289)$$

式(3.289)における q_v , γ_v は，仮想単純せん断モデルのせん断強度およびせん断規準ひずみであり，微小変形解析では，前章での式(2.86)(2.87)により与えられる。一方，大変形解析においては，幾何学的非線形性を考慮するため，式(3.31)(3.32)で表される方向ベクトル類に依存する形での定式化がなされる。本節では，2次元平面ひずみ条件での数値解析を対象として，具体的な定式化の流れを示すこととする。

まず，実際に実験などで得られるせん断強度 τ_m と仮想単純せん断モデルにおけるせん断強度 q_v との関係について考える。なお，後述する最大せん断応力 τ の算定に関しては，以下のように空間表示における真応力としての Cauchy 有効応力を用いる。

$$\tau = \sqrt{\left[\frac{1}{2} (\sigma'_{11} - \sigma'_{22}) \right]^2 + (\sigma'_{12})^2} \quad (3.290)$$

そのため，物質表示における定式化に基づく場合，以下の関係を用いて，第2Piola-Kirchhoff有効応力を Cauchy 有効応力に変換しておく。

$$\boldsymbol{\sigma}' = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}' \mathbf{F}^T \quad (3.291)$$

ここに，

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} \quad (3.292)$$

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \quad (3.293)$$

さて，ベクトル・マトリクス表示による空間表示での積分形構成式は，前述のとおり式(3.250)～(3.252)で与えられる。これを具体的に成分表示で表わすと，以下のようなになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + J^{-1} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \begin{pmatrix} n_{11}^{(i)} - \gamma^{(i)} \\ n_{22}^{(i)} - \gamma^{(i)} \\ n_{12}^{(i)} \end{pmatrix} \Delta \omega \quad (3.294)$$

ここに，式(3.294)の右辺第2項における方向ベクトルの各成分は，式(3.256)より与えられる。これにより，最大せん断応力 τ が以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
 \tau &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma'_{11} - \sigma'_{22}) \right]^2 + (\sigma'_{12})^2} \\
 &= J^{-1} \sqrt{\frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^I q^{(i)} (n_{11}^{(i)} - \gamma^{(i)}) \Delta\omega - \sum_{i=1}^I q^{(i)} (n_{22}^{(i)} - \gamma^{(i)}) \Delta\omega \right]^2 + \left(\sum_{i=1}^I q^{(i)} n_{12}^{(i)} \Delta\omega \right)^2} \quad (3.295) \\
 &= J^{-1} \sqrt{\frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^I q^{(i)} (n_{11}^{(i)} - n_{22}^{(i)}) \right]^2 + \left(\sum_{i=1}^I q^{(i)} n_{12}^{(i)} \right)^2} \Delta\omega
 \end{aligned}$$

ここで、初期状態として等方応力状態にある（例えば、等方圧密後の）試料に対して、排水条件での単調荷せん断試験を考える（Iai ら, 1992 ; Towhata and Ishihara, 1985）。せん断ひずみを限りなく大きくすると、仮想単純せん断ひずみが $|\gamma^{(i)}| \rightarrow \infty$ となることから、そのときの仮想単純せん断応力 $q^{(i)}$ は式(3.289)より以下で与えられる。

$$q^{(i)} = \text{sgn}(\gamma^{(i)}) q_v \quad (3.296)$$

また、単調荷せん断試験において、せん断ひずみを限りなく大きくしたときに得られるせん断応力がせん断強度 τ_m の定義に他ならないので、式(3.295)(3.296)より以下の関係が導かれる。

$$\tau_m = J^{-1} q_v \sqrt{\frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^I \text{sgn}(\gamma^{(i)}) (n_{11}^{(i)} - n_{22}^{(i)}) \right]^2 + \left(\sum_{i=1}^I \text{sgn}(\gamma^{(i)}) n_{12}^{(i)} \right)^2} \Delta\omega \quad (3.297)$$

よって、仮想単純せん断モデルにおけるせん断強度 q_v は、実際の土要素におけるせん断強度 τ_m から以下のようにして求められる。

$$q_v = \frac{J}{\sqrt{\frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^I \text{sgn}(\gamma^{(i)}) (n_{11}^{(i)} - n_{22}^{(i)}) \right]^2 + \left(\sum_{i=1}^I \text{sgn}(\gamma^{(i)}) n_{12}^{(i)} \right)^2} \Delta\omega} \tau_m \quad (3.298)$$

次に、仮想単純せん断モデルにおけるせん断規準ひずみについて考える。まず、式(3.289)(3.294)より、

$$\sigma'_{12} = J^{-1} \sum_{i=1}^I q^{(i)} n_{12}^{(i)} \Delta\omega = J^{-1} \sum_{i=1}^I \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)} / \gamma_v|} q_v n_{12}^{(i)} \Delta\omega \quad (3.299)$$

が成立する。この両辺を空間表示におけるせん断ひずみ $2e_{12}$ で微分すると、以下のようになる。

$$\frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial (2e_{12})} = \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial \gamma^{(i)}} \frac{\partial \gamma^{(i)}}{\partial (2e_{12})} = J^{-1} \sum_{i=1}^I \frac{1}{(1 + |\gamma^{(i)} / \gamma_v|)^2} \frac{q_v}{\gamma_v} (n_{12}^{(i)})^2 \Delta\omega \quad (3.300)$$

ここで、土要素の（初期）せん断剛性 G_m は、微小ひずみ領域におけるせん断応力とせん断ひずみの関係に他ならないから、式(3.300)で $\gamma^{(i)} \rightarrow 0$ とすることで、以下に示す関係が導かれる。

$$G_m = J^{-1} \frac{q_v}{\gamma_v} \sum_{i=1}^I (n_{12}^{(i)})^2 \Delta\omega \quad (3.301)$$

これを解くと、仮想単純せん断モデルにおけるせん断規準ひずみが、以下のとおり与えられる。

$$\begin{aligned} \gamma_v &= J^{-1} \frac{q_v}{G_m} \sum_{i=1}^I (n_{12}^{(i)})^2 \Delta\omega \\ &= \frac{\sum_{i=1}^I (n_{12}^{(i)})^2 \Delta\omega}{\sqrt{\frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^I \operatorname{sgn}(\gamma^{(i)}) (n_{11}^{(i)} - n_{22}^{(i)}) \right]^2 + \left(\sum_{i=1}^I \operatorname{sgn}(\gamma^{(i)}) n_{12}^{(i)} \right)^2} \Delta\omega} \frac{\tau_m}{G_m} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^I (n_{12}^{(i)})^2 \Delta\omega}{\sqrt{\frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^I \operatorname{sgn}(\gamma^{(i)}) (n_{11}^{(i)} - n_{22}^{(i)}) \right]^2 + \left(\sum_{i=1}^I \operatorname{sgn}(\gamma^{(i)}) n_{12}^{(i)} \right)^2} \Delta\omega} \gamma_m \end{aligned} \quad (3.302)$$

ここに、 $\gamma_m = \tau_m / G_m$ は規準ひずみである。

3.13.2 収縮的ダイレイタンシーに関するパラメータ

本項では、大変形解析における収縮的ダイレイタンシー関連のパラメータについて述べる。微小変形解析における式(2.111)にならぬ、物質表示および空間表示における収縮的ダイレイタンシー増分を規定するテンソル類を、式(3.215)(3.269)に代えて以下で与える。

物質表示：

$$\mathbf{C}_{dc}^{-1} = -r_{\varepsilon_d} r_{\varepsilon_d^c} r_{S_0} r_{\text{tmp}} \sum_{i=1}^I M_v \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(i)}}{G_{L0}} \right) \right) \left\| \left\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \right\rangle \right\|^* \Delta\omega \quad (3.303)$$

空間表示：

$$\mathbf{I}_d^c = -r_{\varepsilon_d} r_{\varepsilon_d^c} r_{S_0} r_{\text{tmp}} \sum_{i=1}^I M_v \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(i)}}{G_{L0}} \right) \right) \left\| \left\langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \right\rangle \right\|^* \Delta\omega \quad (3.304)$$

これらの式におけるパラメータ $r_{\varepsilon_d}, r_{\varepsilon_d^c}, r_{S_0}, r_{\text{tmp}}$ は、第2章で述べた微小変形解析での定式化

(式(2.112)~(2.118)) と等価なため、ここでの説明は割愛する。一方、収縮的ダイレイタン

シーを規定する M_v は、微小変形解析での式(2.119)(2.120)に代えて以下で与える。

$$M_v = \left(1 - \frac{(-\varepsilon_d^c)}{\varepsilon_d^{cm}} \right)^{q_3} M_{v0} \quad (3.305)$$

ここに、

$$M_{v0} = \frac{J \sin \phi_p}{\sqrt{\frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^l \operatorname{sgn}(\gamma^{(i)}) (n_{11}^{(i)} - n_{22}^{(i)}) \right]^2 + \left(\sum_{i=1}^l \operatorname{sgn}(\gamma^{(i)}) n_{12}^{(i)} \right)^2} \Delta \omega} \quad (3.306)$$

であり、これは、後述する膨張的ダイレイタンシーに関する式(3.309)に対応している。

3.13.3 膨張的ダイレイタンシーに関するパラメータ

続いて、大変形解析における膨張的ダイレイタンシー関連のパラメータであるが、微小変形解析における式(2.58)にならい、interlocking の変化に対するせん断ひずみエネルギーの寄与率を規定するパラメータ r_{ε_d} を導入する。これにより、式(3.214)(3.268)に示す膨張的ダイレイタンシー増分を規定するテンソル類が、以下のように書き改められる。

物質表示：

$$\mathbf{C}_{dd}^{-1} = r_{\varepsilon_d} J^{-1} \sum_{i=1}^l \left(\frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)} / \gamma_v|} \right) M_{fv} \left(\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle - \gamma^{(i)} \mathbf{C}^{-1} \right) \Delta \omega \quad (3.307)$$

空間表示：

$$\mathbf{I}_d^d = r_{\varepsilon_d} J^{-1} \sum_{i=1}^l \left(\frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)} / \gamma_v|} \right) M_{fv} \left(\langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle - \gamma^{(i)} \mathbf{I} \right) \Delta \omega \quad (3.308)$$

これらの式におけるパラメータ M_{fv} は、微小変形解析における式(2.122)に代えて、式(3.298)を参考にして以下で与える。

$$M_{fv} = \frac{q_v}{p} = \frac{JM_f}{\sqrt{\frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^l \operatorname{sgn}(\gamma^{(i)}) (n_{11}^{(i)} - n_{22}^{(i)}) \right]^2 + \left(\sum_{i=1}^l \operatorname{sgn}(\gamma^{(i)}) n_{12}^{(i)} \right)^2} \Delta \omega} \quad (3.309)$$

微小変形解析では、式(2.87)(2.122)に示すように、仮想単純せん断モデルにおけるせん断規準ひずみ γ_v およびパラメータ M_{fv} が仮想単純せん断ひずみ $\gamma^{(i)}$ の変化に依存しない。そのため、増分形で表わされた膨張的ダイレイタンシー成分（例えば、式(2.54)）から、理論的

にその積分形 (例えば, 式(2.56)) を求めることができた。しかし, 大変形解析では, 式(3.302) (3.309)に示されるせん断規準ひずみ γ_v およびパラメータ \mathbf{M}_{iv} が, 物質の変形, すなわち, 方向ベクトル類や仮想単純せん断ひずみ $\gamma^{(i)}$ の変化に依存する形となる。このことから, 式(3.164)(3.152)で表わされる物質表示および空間表示での膨張的ダイレイタンシー増分を基に, 理論的に積分形としての成分を求めることができない。数値計算では, 増分形で表わされた成分に対して数値積分を実行することにより, 積分形としての膨張的ダイレイタンシーを算定することも可能である。しかし, 本研究では, 膨張的ダイレイタンシー成分に関しては簡易的に微小変形解析における定式化を踏襲することとし, 積分形で表わされた式(2.121) (定常状態を考慮する場合は, 式(2.123)) に対して式(3.302)(3.309)を適用することとした。なお, この理由としては, 微小変形解析を対象とした既存のプログラムへの導入の容易さ, および, 定常状態を考慮する際に採用しているアルゴリズム (式(2.124)~(2.132)) が積分形表示された膨張的ダイレイタンシー成分を用いていること, などが挙げられる。増分形で表された膨張的ダイレイタンシー成分の厳密な扱いに関しては, 今後更なる検討が必要になると思われる。

なお, ひずみ空間における多重せん断モデルの定式化に必要なその他のパラメータ (表 2.1 参照) に関しては, 2.5 節で示した微小変形解析における議論がそのまま適用できる。

3.14 まとめ

本章では, 第 2 章で示した微小変形理論におけるひずみ空間での多重せん断モデル構成式に基づき, 幾何学的非線形性を考慮した大変形解析に必要な定式化を行った。大変形理論での定式化には, Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の 2 種類が存在し, それぞれ基準配置に基づく物質表示, および, 現配置に基づく空間表示で表された応力, ひずみ系を用いる。本研究では, これらの両者により定式化を行い, 物質表示では第 2Piola-Kirchhoff 応力および Green-Lagrange ひずみを, また, 空間表示では Cauchy 応力および Euler-Almansi ひずみを用いて構成式を記述した。大変形解析に必要な定式化においては, 圧縮性を考慮した超弾性体の大変形解析理論 (Holzapfel, 2000) を参考にして, これに多重せん断機構および材料非線形性を盛り込んだ形での定式化を行った。ここでの材料非線形性としては, 前章で述べたように, 砂のような粒状体に特有のダイレイタンシーの効果を含むものとした。

大変形理論に基づく構成式の定式化の方向性としては, 空間表示における Cauchy 有効応力を用いた積分形の構成式を, 微小変形理論と同様の形で表せるものと仮定した。ただし, 前章で示した多重せん断モデルの基礎概念としての branch vector や tangential vector などのベクトル類は, 物質の変形に伴い, その方向とともに大きさを変えるため, 物質表示における基準状態のベクトル類に変形勾配を作用させることにより, 空間表示のベクトル類を与えることとした。また, 物質表示における積分形構成式は, 空間表示の積分形構成式を

pull-back することにより、定式化を行った。このようにして表された物質表示および空間表示での積分形構成式は、そのままでは等方成分（体積変化成分）と偏差成分（体積一定成分）とが混在した形となっている。本研究では、構成式としての利便性を考慮し、Holzapfel (2000) の超弾性体理論に準じて、4 階の projection tensor を用いることで、積分形構成式を等方成分と偏差成分とに分離することとした。

有限要素法による数値解析では、第 4 章で述べるように、時間ステップごとにつりあい方程式を解くため、応力増分とひずみ増分との関係が必要となる。そのため、大変形解析における増分形の構成式の定式化を行った。まず、物質表示の増分形構成式は、同表示における積分形構成式の物質時間微分をとることにより求めた。一方、空間表示における増分形構成式は、同表示での積分形構成式の Lie 時間微分をとることにより、Kirchhoff 応力の Oldroyd 応力速度および変形速度テンソルを用いて定式化を行った。なお、ここでも等方成分と偏差成分とに分離する形で定式化がなされており、その両者に対してダイレイタンスの効果が導入されている。

積分形および増分形構成式の双方において、より一般的な 3 次元でのテンソル表示により定式化を行った後、2 次元テンソル表示での構成式を与えた。さらに、有限要素法への導入を考慮して、2 次元でのベクトル・マトリクス表示により定式化を行った。なお、大変形解析による要素シミュレーション結果に関しては第 6 章で、また、遠心模型実験や被災事例を対象とした地震応答解析結果については第 7 章で示すこととする。

第4章 大変形理論に基づく多孔質体の支配方程式の定式化

4.1 概要

本章では、前章で述べた大変形理論に基づくひずみ空間多重せん断モデルを、2次元における有限要素解析に適用するため、大変形理論の枠組みで支配方程式を表すとともに、有限要素法のための離散化を行う。本章で取り扱う支配方程式は、間隙水で満たされた多孔質体に対する運動方程式、および、水流の収支バランス式である。前章と同様に、現配置に基づく空間表示 (Updated Lagrangian 法)、および、基準配置に基づく物質表示 (Total Lagrangian 法) の両者により定式化を行うこととする。

4.2 空間表示での支配方程式

4.2.1 空間表示における基本方程式

Zienkiewicz ら (1982) の定式化 (u-p formulation) を基にして、空間表示における多孔質体の運動方程式および水流の収支バランス式は、Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ を用いて以下のように与えられる。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \operatorname{grad}(p(\mathbf{x}, t))) - \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div}(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \rho_f(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ = -\operatorname{div}(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \rho_f(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) + n \dot{p}(\mathbf{x}, t) / K_f \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここに、土と間隙水の複合物としての密度 ρ は、Jacobian determinant $J = \det \mathbf{F}$ (ここに、 \mathbf{F} は変形勾配) および基準配置における密度 ρ_0 を用いて以下で与えられる。

$$\rho(\mathbf{x}, t) J = \rho_0 \quad (4.3)$$

また、 \mathbf{g} : 重力加速度ベクトル、 \mathbf{u} : 土骨格の変位ベクトル、 \mathbf{k} : 透水係数 (対称テンソル)、 p : 間隙水圧、 ρ_f : 間隙水の密度、 n : 間隙率、 K_f : 間隙水の体積弾性係数である。なお、本定式化では、ひずみと応力に関しては、収縮・圧縮を負、伸張・引張を正とする。ただし、間隙水圧に関しては、圧縮を正とする。

式(4.1)(4.2)に対する境界条件としては、以下に示す4種類の条件を考える。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (4.4)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_\sigma \quad (4.5)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_p \quad (4.6)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k}(\text{grad}p - \rho_f \mathbf{g} + \rho_f \ddot{\mathbf{u}}) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_q \quad (4.7)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{u}}$ は $\partial\Omega_u$ 境界上で規定される変位、 $\bar{\mathbf{t}}$ は $\partial\Omega_\sigma$ 境界上で規定される表面力、 \bar{p} は $\partial\Omega_p$ 境界上で規定される間隙水圧、 $\bar{\mathbf{q}}$ は $\partial\Omega_q$ 境界上で規定される間隙水流入量である。なお、 $\partial\Omega_u$ 境界と $\partial\Omega_\sigma$ 境界をあわせたものが対象領域の全表面に等しく、 $\partial\Omega_u$ 境界と $\partial\Omega_\sigma$ 境界の共通部分は存在しない。これは、 $\partial\Omega_p$ 境界と $\partial\Omega_q$ 境界についても同様である。

初期条件としては、まず対象領域内部において以下のように与えられるものとする。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \quad (4.8)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad (4.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{X}) \quad (4.10)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{X}) \quad (4.11)$$

$$\dot{p}(\mathbf{x}, 0) = \dot{p}_0(\mathbf{X}) \quad (4.12)$$

特に、境界上では次のように与えられるものとする。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (4.13)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{X}) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{on } \partial\Omega_\sigma \quad (4.14)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = \bar{p}_0(\mathbf{X}) \quad \text{on } \partial\Omega_p \quad (4.15)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{k}(\text{grad}p_0 - \rho_f \mathbf{g}) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{X}) \quad \text{on } \partial\Omega_q \quad (4.16)$$

4.2.2 空間表示における運動方程式の離散化

式(4.1)で表される多孔質体の運動方程式は、有効応力原理、

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - p\mathbf{I} \quad (4.17)$$

により、以下のとおりに書くことができる。

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}' - p\mathbf{I}) + \rho\mathbf{g} = \rho\mathbf{u} \quad (4.18)$$

ここに、 \mathbf{I} は2階の単位テンソルであり、対象とする次元での基本ベクトル \mathbf{e}_i を用いて以下のように与えられる。

$$\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (4.19)$$

ここで、仮想仕事の原理を式(4.18)の運動方程式に適用すると、以下に示す式が得られる。

$$\int_{\Omega} [(\boldsymbol{\sigma}' - p\mathbf{I}) : \delta \mathbf{e} - (\rho \mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u}] dv - \int_{\partial \Omega_0} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0 \quad (4.20)$$

ここに、 \mathbf{e} は空間表示における Euler-Almansi ひずみテンソルである。

次に、補関数、節点変位などを用いて、有限要素法への導入のため、以下のように土骨格の変位および間隙水圧の離散化を行う。

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\underline{\mathbf{u}} \quad (4.21)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{H}\ddot{\underline{\mathbf{u}}} \quad (4.22)$$

$$p = \hat{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{p}} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{g} = -\mathbf{H}\underline{\mathbf{g}} \quad (4.24)$$

ここに、 \mathbf{H} : 変位の補関数、 $\hat{\mathbf{H}}$: 水圧の補関数、 $\underline{\mathbf{u}}$: 節点変位、 $\ddot{\underline{\mathbf{u}}}$: 節点加速度、 $\underline{\mathbf{p}}$: 節点間隙水圧、 $\underline{\mathbf{g}}$: 重力加速度であり、2次元の場合、以下のように表される。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & \cdots & h_N & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & \cdots & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 & \hat{h}_2 & \hat{h}_3 & \cdots & \hat{h}_N \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\underline{\mathbf{u}}^T = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_1^2 & u_2^2 & u_1^3 & u_2^3 & \cdots & u_1^N & u_2^N \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\underline{\mathbf{p}}^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_N \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\underline{\mathbf{I}}_v^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

なお、 N は1要素あたりの節点数である。

これらを用いて、2次元解析における式(4.20)の運動方程式の離散化を行う。まず、空間表示における仮想仕事 δw は、Cauchy 応力および仮想変位に対応する仮想 Euler-Almansi ひずみにより、以下で与えられる。

$$\delta w = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e} dv = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \text{sym}(\text{grad} \delta \mathbf{u}) dv \quad (4.30)$$

ここで、式(4.21)を用いると、式(4.30)における仮想 Euler-Almansi ひずみは以下のとおり書き表すことができる。

$$\delta \mathbf{e} = \text{sym}(\text{grad } \delta \mathbf{u}) = \text{sym} \left(\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \right) \quad (4.31)$$

ここに、空間表示における変位勾配は以下で与えられる。

$$\mathbf{l}_u = \text{grad } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} u_2^k \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

式(4.31)をベクトル表示で書き直すと、以下のとおりとなる。

$$\delta \hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_2^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_1^k + \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_2^k \end{bmatrix} = \mathbf{b}_L \delta \underline{\mathbf{u}} \quad (4.33)$$

ここに、

$$\mathbf{b}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

よって、これを式(4.20)に対して適用し、さらに式(4.22)(4.24)を考慮すると、以下に示す離散化された運動方程式が得られる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T (\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - p \hat{\mathbf{m}}) dv + \mathbf{M} (g \underline{\mathbf{l}}_v + \underline{\ddot{\mathbf{u}}}) - \int_{\partial \Omega_e} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0 \quad (4.35)$$

ここに、

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}'^T = [\sigma'_{11} \quad \sigma'_{22} \quad \sigma'_{12}] \quad (4.36)$$

$$\hat{\mathbf{m}}^T = [1 \quad 1 \quad 0] \quad (4.37)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dv = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (4.38)$$

で与えられる。なお、式(4.38)より明らかなように、質量マトリクスは、空間表示による Updated Lagrangian 法および物質表示による Total Lagrangian 法の両者において等しく、座標の更新にあわせて時間毎に更新する必要はない。

式(4.35)に式(4.23)を代入し間隙水圧の補間関数を適用すると、以下の式が得られる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + \mathbf{M}(g\underline{\mathbf{L}} + \underline{\ddot{\mathbf{u}}}) - \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0 \quad (4.39)$$

ここに、

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{H}} dv \quad (4.40)$$

境界応力については、面積分を変形後の面積で行うのが適切な場合と、変形前の面積をそのまま用いればよい場合とが存在する。前者の例として水中構造物に作用する水圧、後者の例としては圧密促進のための盛土荷重が挙げられる。ここでは、定式化およびプログラミングの容易さや計算効率を考え、Bathe (1996) の方法にならい、後者による定式化を行うこととする。すなわち、

$$\int_{\partial\Omega_e} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} ds = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (4.41)$$

なお、対象とする問題によっては、前者による定式化が適切である場合もあり、この点に関しては今後更なる検討が必要と思われる。

次に、大変形解析における空間表示でのひずみ、すなわち Euler-Almansi ひずみについて、節点変位との関係を求めることとする。まず、微小ひずみ理論での定義におけるひずみは、式(4.34)を用いて以下のとおり与えられる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \mathbf{b}_L \underline{\mathbf{u}} \quad (4.42)$$

ここで、空間表示における変位勾配と変形勾配との関係、

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1 - u_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1 - u_1)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(x_2 - u_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_2 - u_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l_{11} & -l_{12} \\ -l_{21} & 1 - l_{22} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

を、前章の式(3.5)に対して適用すると、Euler-Almansi ひずみテンソルが以下のとおり与えられる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-l_{11} & -l_{21} \\ -l_{12} & 1-l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-l_{11} & -l_{12} \\ -l_{21} & 1-l_{22} \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} l_{11} - \frac{1}{2}(l_{11}^2 + l_{21}^2) & \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21} - l_{11}l_{12} - l_{21}l_{22}) \\ \text{sym} & l_{22} - \frac{1}{2}(l_{12}^2 + l_{22}^2) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

よって、式(4.32)(4.42)の成分を用いることで、ベクトル表示での Euler-Almansi ひずみが以下のとおり求められる。

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{b}_L \mathbf{u} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(l_{11}^2 + l_{21}^2) \\ \frac{1}{2}(l_{12}^2 + l_{22}^2) \\ l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

4.2.3 空間表示における水流の収支バランス式の離散化

本項では、前項での土骨格の運動方程式に続き、水流の収支バランス式の離散化を行う。

まず、式(4.2)で表される収支バランス式を、水圧拘束境界 $\partial\Omega_p$ でゼロとなる任意の関数 \hat{h} を用いて Galerkin 法により積分表示すると、以下のような式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \hat{h} \operatorname{div}(\mathbf{k}(\operatorname{grad} p)) dv - \int_{\Omega} \hat{h} \operatorname{div} \mathbf{u} dv - \int_{\Omega} \hat{h} \operatorname{div}(\mathbf{k} \rho_f (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}})) dv \\
 - \int_{\Omega} \hat{h} n \dot{p} / K_f dv + \int_{\partial\Omega} \hat{h} (\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) ds = 0
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

ここで、任意のスカラー場 Φ 、および、ベクトル場 \mathbf{v} に対して、

$$\operatorname{div}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \Phi \tag{4.47}$$

が成立するので (Holzapfel, 2000)、式(4.46)の左辺第1項および第3項はそれぞれ以下のよう表せる。

$$\int_{\Omega} \hat{h} \operatorname{div}(\mathbf{k}(\operatorname{grad} p)) dv = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\hat{h} \mathbf{k}(\operatorname{grad} p)) dv - \int_{\Omega} \mathbf{k}(\operatorname{grad} p) \cdot \operatorname{grad} \hat{h} dv \tag{4.48}$$

$$\int_{\Omega} \hat{h} \operatorname{div}(\mathbf{k} \rho_f (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}})) dv = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\hat{h} \mathbf{k} \rho_f (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}})) dv - \int_{\Omega} \mathbf{k} \rho_f (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \operatorname{grad} \hat{h} dv \tag{4.49}$$

続いて、これらに対して Gauss の定理を適用すると、それぞれ

$$\int_{\Omega} \hat{h} \operatorname{div}(\mathbf{k}(\operatorname{grad} p)) dv = \int_{\partial\Omega} \hat{h} \mathbf{k}(\operatorname{grad} p) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \mathbf{k}(\operatorname{grad} p) \cdot \operatorname{grad} \hat{h} dv \quad (4.50)$$

$$\int_{\Omega} \hat{h} \operatorname{div}(\mathbf{k} \rho_f (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}})) dv = \int_{\partial\Omega} \hat{h} \mathbf{k} \rho_f (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \mathbf{k} \rho_f (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \operatorname{grad} \hat{h} dv \quad (4.51)$$

と表せる。最後に式(4.50)(4.51)を式(4.46)に代入し、 $\partial\Omega_p$ 上では $\hat{h} = 0$ 、また、式(4.7)より $\partial\Omega_q$

上では $\mathbf{k}(\operatorname{grad} p - \rho_f \mathbf{g} + \rho_f \ddot{\mathbf{u}}) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}}$ となることを用いると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{grad} \hat{h})^T \mathbf{k}(\operatorname{grad} p) dv + \int_{\Omega} \hat{h} \operatorname{div} \ddot{\mathbf{u}} dv - \int_{\Omega} (\operatorname{grad} \hat{h})^T (\mathbf{k} \rho_f (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}})) dv \\ + \int_{\Omega} \hat{h} n \dot{p} / K_f dv - \int_{\partial\Omega_q} \hat{h} \bar{\mathbf{q}} ds = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

なお、式(4.52)の左辺における最後の項の面積分の範囲は、 $\partial\Omega_p \cap \partial\Omega_q = \emptyset$ の性質より、

$\partial\Omega_q$ のみに関する積分となることを用いた。

ここで、式(4.23)(4.28)(4.26)を用いて、水圧勾配を以下のとおり離散化しておく。

$$\operatorname{grad} p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{h}_k}{\partial x_1} p_k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{h}_k}{\partial x_2} p_k \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{b}} \mathbf{p} \quad (4.53)$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{h}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{h}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{h}_3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \hat{h}_N}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \hat{h}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{h}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{h}_3}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \hat{h}_N}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

よって、式(4.53)を式(4.52)に代入し、任意の関数 \hat{h} として水圧の補間関数 \hat{h}_k を採用すると

(ただし、水圧拘束境界 $\partial\Omega_p$ ではゼロとする)、式(4.52)は以下のとおり離散化される。

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{b}} \, dv \right) \underline{\mathbf{p}} + \left(\int_{\Omega} \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{m}}^T \mathbf{b}_L \, dv \right) \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \left(\int_{\Omega} \rho_f \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{k} \mathbf{H} \, dv \right) (g \underline{\mathbf{L}} + \underline{\dot{\mathbf{u}}}) \\ & + \left(\int_{\Omega} \frac{n}{K_f} \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} \, dv \right) \underline{\dot{\mathbf{p}}} - \int_{\partial\Omega_q} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{q}} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

表記を簡潔にするため、これを以下のように書き直しておく。

$$\mathbf{G} \underline{\mathbf{p}} + \mathbf{R} \underline{\dot{\mathbf{p}}} = \int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{q}} \, ds - \mathbf{Q}^T \underline{\dot{\mathbf{u}}} - \hat{\mathbf{M}} (g \underline{\mathbf{L}} + \underline{\dot{\mathbf{u}}}) \quad (4.56)$$

ここに、

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{b}} \, dv \quad (4.57)$$

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \frac{n}{K_f} \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} \, dv \quad (4.58)$$

$$\mathbf{Q}^T = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{m}}^T \mathbf{b}_L \, dv = \left(\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{H}} \, dv \right)^T \quad (4.59)$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \int_{\Omega} \rho_f \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{k} \mathbf{H} \, dv \quad (4.60)$$

式(4.55)などにおける境界での間隙水流入量に関しては、面積分を変形後の面積にあわせて行うのが適切な場合と、変形前の面積で行っておけばよい場合とが考えられるが、ここでは式(4.41)に示す境界応力の場合と同様に、後者により定式化を行うこととする。すなわち、式(4.56)において、

$$\int_{\partial\Omega_q} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{q}} \, ds = \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}} \, dS \quad (4.61)$$

とする。

4.2.4 空間表示における非排水条件での運動方程式

式(4.2)の水流の収支バランス式において、 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ とおくと、次式に示すような非排水条件でのバランス式が得られる。

$$n \dot{p}(\mathbf{x}, t) / K_f = -\operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (4.62)$$

ここで、前章における式(3.25)を用いると、式(4.62)は以下のように書き換えることができる。

$$\dot{p} = -\frac{K_f}{n} \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = -\frac{K_f}{n} \frac{\dot{J}}{J} \quad (4.63)$$

これを、初期条件 $p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{X})$ のもとで時間積分すると、以下のとおりとなる。

$$p^* \equiv p - p_0 = -\frac{K_f}{n}(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (4.64)$$

ここに、大変形解析における体積ひずみは、前章で示したように以下で与えられる。

$$\varepsilon = \ln J \quad (4.65)$$

また、 ε_0 は初期状態における体積ひずみである。

式(4.64)を式(4.39)に代入すると、非排水条件における空間表示での運動方程式が以下のよう
に得られる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv - \int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\mathbf{m}} p^* dv + \mathbf{M}(g\mathbf{L}_v + \ddot{\mathbf{u}}) - \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0 \quad (4.66)$$

4.3 物質表示での支配方程式

4.3.1 物質表示における運動方程式の離散化

物質表示における基本方程式は、式(4.1)(4.2)に示す空間表示での多孔質体の運動方程式および水流の収支バランス式を基にして導くこととする。空間表示における運動方程式に仮想仕事の原理を適用すると、先に述べた式(4.20)のように表すことができるので、これを、第2Piola-Kirchhoff有効応力テンソル \mathbf{S}' およびGreen-Lagrangeひずみテンソル \mathbf{E} を用いて物質表示に書き直すこととする。

まず、Holzapfel (2000) より、

$$\delta \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \delta \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (4.67)$$

の関係があるので、式(4.20)は次のように書ける。

$$\int_{\Omega} \left[\mathbf{F}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}' - p\mathbf{I}) \mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{E} - (\rho \mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \right] J dV - \int_{\partial\Omega_\sigma} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (4.68)$$

ここに、式(3.2)を用いた。さらに、式(3.1)(3.4)(3.8)(4.3)を適用すると、物質表示における以下の式が得られる。

$$\int_{\Omega_0} \left[(\mathbf{S}' - Jp\mathbf{C}^{-1}) : \delta \mathbf{E} - (\rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \right] dV - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (4.69)$$

続いて、空間表示の場合と同様に、補間関数や節点変位などを用いて、式(4.21)~(4.24)のとおりに土骨格の変位および間隙水圧の離散化を行う。物質表示における仮想仕事 δw は、第2Piola-Kirchhoff 応力および仮想変位に対する仮想Green-Lagrangeひずみにより、以下で与えられる。

$$\delta w = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV \quad (4.70)$$

ここで、式(4.21)を用いると、仮想Green-Lagrangeひずみは以下のようなテンソル表示で表される。

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{E} &= \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) = \text{sym} \left(\begin{bmatrix} L_{11} + 1 & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \right) \\
 &= \text{sym} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \\
 &+ \text{sym} \begin{bmatrix} L_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k + L_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & L_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k + L_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \\ L_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k + L_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & L_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k + L_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

ここに、物質表示における変位勾配は以下で与えられる。

$$\mathbf{L}_u = \text{Grad} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} u_2^k \end{bmatrix} \tag{4.72}$$

これをベクトル表示で書き直すと、以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned}
 \delta \hat{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k + \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} L_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k + L_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & L_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k + L_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \\ L_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k + L_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k & L_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k + L_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k \\ L_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k + L_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k + L_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k + L_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{B}_L \delta \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

ここに、

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1} \tag{4.74}$$

$$\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial X_1} & 0 & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial X_2} & \cdots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial X_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & \frac{\partial h_2}{\partial X_2} & \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & \frac{\partial h_3}{\partial X_2} & \frac{\partial h_3}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial X_2} & \frac{\partial h_N}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} L_{11} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & & L_{21} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & & L_{11} \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & & & & \\ L_{12} \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & & L_{22} \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & & L_{12} \frac{\partial h_2}{\partial X_2} & & & & \\ L_{11} \frac{\partial h_1}{\partial X_2} + L_{12} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & & L_{21} \frac{\partial h_1}{\partial X_2} + L_{22} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & & L_{11} \frac{\partial h_2}{\partial X_2} + L_{12} \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & & & & \\ & L_{21} \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & \cdots & & L_{11} \frac{\partial h_N}{\partial X_1} & & L_{21} \frac{\partial h_N}{\partial X_1} & & \\ & L_{22} \frac{\partial h_2}{\partial X_2} & \cdots & & L_{12} \frac{\partial h_N}{\partial X_2} & & L_{22} \frac{\partial h_N}{\partial X_2} & & \\ L_{21} \frac{\partial h_2}{\partial X_2} + L_{22} \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & \cdots & & & L_{11} \frac{\partial h_N}{\partial X_2} + L_{12} \frac{\partial h_N}{\partial X_1} & & L_{21} \frac{\partial h_N}{\partial X_2} + L_{22} \frac{\partial h_N}{\partial X_1} & & \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

よって、これを式(4.69)に代入し、さらに式(4.22)(4.24)を適用すると、以下に示す離散化された運動方程式が得られる。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T (\hat{\mathbf{S}}' - Jp\hat{\mathbf{C}}^{-1}) dV + \mathbf{M}(g\mathbf{I}_v + \ddot{\mathbf{u}}) - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS = 0 \quad (4.77)$$

ここに、

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (4.78)$$

これに式(4.23)を代入し、間隙水圧の補間関数を適用すると、以下のとおりとなる。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV - \mathbf{Q}\underline{p} + \mathbf{M}(g\mathbf{I}_v + \ddot{\mathbf{u}}) - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS = 0 \quad (4.79)$$

ここに、

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T J\hat{\mathbf{C}}^{-1} \hat{\mathbf{H}} dV \quad (4.80)$$

次に、大変形解析における物質表示でのひずみ、すなわち Green-Lagrange ひずみについて、節点変位との関係を求めることとする。まず、微小ひずみ理論におけるひずみは、式(4.75)を用いて以下のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{L_0} \underline{\mathbf{u}} \quad (4.81)$$

ここで、物質表示における変位勾配と変形勾配との関係、

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (X_1 + u_1)}{\partial X_1} & \frac{\partial (X_1 + u_1)}{\partial X_2} \\ \frac{\partial (X_2 + u_2)}{\partial X_1} & \frac{\partial (X_2 + u_2)}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} + 1 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} + 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

を、前章の式(3.7)に対して適用すると、Green-Lagrange ひずみテンソルが以下のとおり与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} L_{11} + 1 & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} + 1 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} L_{11} + \frac{1}{2} (L_{11}^2 + L_{21}^2) & L_{12} + L_{21} + L_{11} L_{12} + L_{21} L_{22} \\ \text{sym} & L_{22} + \frac{1}{2} (L_{12}^2 + L_{22}^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.83)$$

よって、式(4.72)(4.81)の成分を用いることで、ベクトル表示での Green-Lagrange ひずみが以下のように求められる。

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{L_0} \underline{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (L_{11}^2 + L_{21}^2) \\ \frac{1}{2} (L_{12}^2 + L_{22}^2) \\ L_{11} L_{12} + L_{21} L_{22} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

4.3.2 物質表示における水流の収支バランス式の離散化

物質表示における水流の収支バランス式は、空間表示での水流の収支バランス式より与えるものとする。任意のスカラー場 Φ およびベクトル場 \mathbf{v} に対して、

$$\text{grad} \Phi = \mathbf{F}^{-T} \text{Grad} \Phi \quad (4.85)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{Grad} \mathbf{v} : \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \quad (4.86)$$

が成立するので (Holzapfel, 2000), 式(4.52)は以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} J \left(\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \operatorname{Grad}(\hat{h}) \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{k} \left(\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \operatorname{Grad}(p) \right) dV + \int_{\Omega_0} J \hat{h} \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} : \operatorname{Grad} \dot{\mathbf{u}} dV \\ & - \int_{\Omega_0} J \left(\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \operatorname{Grad}(\hat{h}) \right)^{\mathrm{T}} (\mathbf{k} \rho_f (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}})) dV + \int_{\Omega} J \hat{h} n \dot{p} / K_f dV - \int_{\partial \Omega_{0q}} \hat{h} \bar{\mathbf{Q}} dS = 0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

ここに, 前章における式(3.2)を用いた。

なお, 式(4.87)の左辺第2項を, $\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{F})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$ を用いて以下のように表しておく。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} J \left(\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \operatorname{Grad}(\hat{h}) \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{k} \left(\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \operatorname{Grad}(p) \right) dV + \int_{\Omega_0} J \hat{h} \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \operatorname{Grad} \dot{\mathbf{u}} dV \\ & - \int_{\Omega_0} J \left(\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \operatorname{Grad}(\hat{h}) \right)^{\mathrm{T}} (\mathbf{k} \rho_f (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}})) dV + \int_{\Omega} J \hat{h} n \dot{p} / K_f dV - \int_{\partial \Omega_{0q}} \hat{h} \bar{\mathbf{Q}} dS = 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

次に, この式の離散化を行うこととする。まず, 変形勾配に関する式(4.82)より, $J = \det \mathbf{F}$ であることを考慮すると, 以下の関係式が得られる。

$$\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = J^{-1} \begin{bmatrix} L_{22} + 1 & -L_{21} \\ -L_{12} & L_{11} + 1 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

これと式(4.22)(4.23)を用い, 式(4.88)に現れる主要項は, 以下のように離散化される。

$$\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \operatorname{Grad} p = \hat{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{p}} \quad (4.90)$$

$$J \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \operatorname{Grad} \dot{\mathbf{u}} = J \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_L \dot{\underline{\mathbf{u}}} \quad (4.91)$$

ここに,

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{h}_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \hat{h}_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \hat{h}_3}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial \hat{h}_N}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \hat{h}_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \hat{h}_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \hat{h}_3}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial \hat{h}_N}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

これらの関係を用いると, 式(4.88)は以下のように離散化される。

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_0} J \hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{k} \hat{\mathbf{B}} dV \right) \underline{\mathbf{p}} + \left(\int_{\Omega_0} J \hat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}} \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_L dV \right) \dot{\underline{\mathbf{u}}} + \int_{\Omega_0} J \rho_f \hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{k} \mathbf{H} dV (\mathbf{g} \underline{\mathbf{L}} \mathbf{g} + \dot{\underline{\mathbf{u}}}) \\ & + \int_{\Omega} J \frac{n}{K_f} \hat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{H}} dV \dot{\underline{\mathbf{p}}} - \int_{\partial \Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{Q}} dS = 0 \end{aligned} \quad (4.93)$$

表記を簡略化するため、これを以下のとおり書き直しておく。

$$\underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{R}}\underline{\dot{\mathbf{p}}} = \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}} dS - \mathbf{Q}^T \underline{\dot{\mathbf{u}}} - \hat{\mathbf{M}}(g\underline{\mathbf{L}}_v + \underline{\dot{\mathbf{u}}}) \quad (4.94)$$

ここに、

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega_0} J \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{B}} dV \quad (4.95)$$

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega_0} J \frac{n}{K_f} \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} dV \quad (4.96)$$

$$\mathbf{Q}^T = \int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{H}}^T J (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^T \mathbf{B}_L dV = \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T J \hat{\mathbf{C}}^{-1} \hat{\mathbf{H}} dV \right)^T \quad (4.97)$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \int_{\Omega_0} J \rho_f \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{k} \mathbf{H} dV \quad (4.98)$$

4.3.3 物質表示における非排水条件での運動方程式

物質表示においても、空間表示の場合と同様に式(4.64)の関係が得られる。これを式(4.77)に代入すると、非排水条件下での物質表示における運動方程式が、以下に示すように与えられる。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T J p^* \hat{\mathbf{C}}^{-1} dV + \mathbf{M}(g\underline{\mathbf{L}}_v + \underline{\dot{\mathbf{u}}}) - \int_{\partial\Omega_{0e}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS = 0 \quad (4.99)$$

4.4 Total Lagrangian 法による解析手法の概要

本節以降では、これまで示した基本方程式の定式化を基に、有限要素法による数値解析での解析方法やその手順、動的解析における時間積分法などについて述べる。ここで扱う解析の種類としては、大きく分けて、物体の運動に起因する慣性力を考慮しない静的解析と、慣性力を考慮する動的解析の2種類が存在する。前者の例として、地盤・構造物系の重力の影響による自重解析（定常浸透流解析を含む）、静的環境下における砂の要素試験を対象とした数値解析などがある。一方、後者の例としては、地盤・構造物系の地震応答解析がその代表として挙げられる。まず本節では、4.3節で示した物質表示での支配方程式の定式化に基づき、Total Lagrangian 法による大変形解析手法について述べることとする。

4.4.1 地盤変形の自重解析

まず、慣性力の影響を考慮しない静的解析に関して定式化を行う。本項では、重力によ

る地盤の自重解析を対象とするため、式(4.79)から慣性項を落とした以下の離散化された釣り合い式を解くことになる。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + \mathbf{M}g\underline{\mathbf{L}}_v - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS = 0 \quad (4.100)$$

これを、以下のように書き表すこととする。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} = \mathfrak{R} \quad (4.101)$$

$$\mathfrak{R} = -\mathbf{M}g\underline{\mathbf{L}}_v + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (4.102)$$

なお、これらの方程式において、変位拘束境界 $\partial\Omega_u$ 上の自由度に関する式は取り除かれているものとする。また、水圧 p としては、次項で示す定常浸透流解析の解を用いる。

次に、式(4.101)(4.102)で表される方程式を、いくつかのステップに分割し、段階的に荷重を増加させて解くことを考える。今、第 n 荷重ステップまでの解が既知であるとし、第 $n+1$ 荷重ステップにおける解を求めることとする。

まず、第 $n+1$ 荷重ステップにおいて、式(4.101)は以下のように表せる。

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1} \hat{\mathbf{S}}'_{n+1} dV - \mathbf{Q}_{n+1} \underline{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathfrak{R}_{n+1} \quad (4.103)$$

ここで、節点変位ベクトル $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$ 、および、これに対する Green-Lagrange ひずみ $\hat{\mathbf{E}}_{n+1}$ から求

めた第 2Piola-Kirchhoff 有効応力 $\hat{\mathbf{S}}'_{n+1}$ の第 i 回目の試行値を、それぞれ $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i$ 、 $\hat{\mathbf{S}}'_{n+1}^i$ と表すこ

ととする。同様に、節点間隙水圧ベクトル $\underline{\mathbf{p}}_{n+1}$ を節点荷重に変換するマトリクス \mathbf{Q}_{n+1} に対

して、第 i 回目の試行値を \mathbf{Q}_{n+1}^i と書く。

また、第 i 回目の試行値に対する不平衡力を $\boldsymbol{\phi}_{n+1}^i$ とすると、これは式(4.103)より以下のとおり与えられる。

$$\boldsymbol{\phi}_{n+1}^i = - \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i \hat{\mathbf{S}}'_{n+1}^i dV - \mathbf{Q}_{n+1}^i \underline{\mathbf{p}}_{n+1} + \mathfrak{R}_{n+1} \quad (4.104)$$

$$\mathfrak{R}_{n+1} = -\mathbf{M}g_{n+1} \underline{\mathbf{L}}_v + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}_{n+1} dS \quad (4.105)$$

第 $i+1$ 回目の節点変位ベクトルの試行値 $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ を、

$$\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i \quad (4.106)$$

により定めるものとすれば、第*i*+1回目の試行値に対する不平衡力は、近似的に以下で与えられる。

$$\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^i + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i \quad (4.107)$$

ここに、

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = -(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i - (\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i + \left(\frac{\partial (\mathbf{Qp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \quad (4.108)$$

$$(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i = \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i \mathbf{D}_{n+1}^i (\mathbf{B}_L)_{n+1}^i dV \quad (4.109)$$

$$(\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{NL}^T \llbracket \mathbf{S}' \rrbracket_{n+1}^i \mathbf{B}_{NL} dV \quad (4.110)$$

$$\left(\frac{\partial (\mathbf{Qp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = (\mathbf{K}_{pL})_{n+1}^i + (\mathbf{K}_{pNL})_{n+1}^i \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{K}_{pL})_{n+1}^i \\ &= \int_{\Omega_0} J_{n+1}^i (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i \left[(\hat{\mathbf{C}}^{-1})_{n+1}^i \left\{ (\hat{\mathbf{C}}^{-1})_{n+1}^i \right\}^T - 2 \left\{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right\}_{n+1}^i \right] (\hat{\mathbf{H}}\mathbf{p})_{n+1}^i (\mathbf{B}_L)_{n+1}^i dV \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$(\mathbf{K}_{pNL})_{n+1}^i = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{NL}^T J_{n+1}^i \llbracket \mathbf{C}^{-1} \rrbracket_{n+1}^i (\hat{\mathbf{H}}\mathbf{p})_{n+1}^i \mathbf{B}_{NL} dV \quad (4.113)$$

なお、式(4.109)における \mathbf{D} は、物質表示でのベクトル・マトリクス表示による地盤材料の接線剛性(式(3.218)参照)である。また、式(4.110)で表される大変形解析での幾何学的非線

形項における \mathbf{B} マトリクス \mathbf{B}_{NL} および応力 $\tilde{\mathbf{S}}'$ は、以下のとおり与えられる。

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial X_1} & 0 & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial X_2} & 0 & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial X_1} & \dots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial X_2} & \dots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

$$\llbracket \mathbf{S}' \rrbracket = \begin{bmatrix} \mathbf{S}'_{11} & \mathbf{S}'_{12} & 0 & 0 \\ \mathbf{S}'_{21} & \mathbf{S}'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}'_{11} & \mathbf{S}'_{12} \\ 0 & 0 & \mathbf{S}'_{21} & \mathbf{S}'_{22} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

また、式(4.111)における $\{\hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1}\}$ は式(3.224)で、 $\llbracket \mathbf{C}^{-1} \rrbracket$ は以下の式で与えられる。

$$\llbracket \mathbf{C}^{-1} \rrbracket = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}^{-1} & \mathbf{C}_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{21}^{-1} & \mathbf{C}_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{11}^{-1} & \mathbf{C}_{12}^{-1} \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{21}^{-1} & \mathbf{C}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

ここで、式(4.109)(4.110)で表される全体系での接線剛性マトリクス of 導出過程を、以下で詳しく述べることにする。まず、式(4.70)を参考に、式(4.69)における第 2Piola-Kirchhoff 有効応力で表される仮想仕事 $\delta w'$ の線形化を行う (増分分解)。すなわち、

$$\Delta \delta w' = \Delta \delta w'_L + \Delta \delta w'_{NL} = \int_{\Omega_0} \Delta \mathbf{S}' : \delta \mathbf{E} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}' : \Delta \delta \mathbf{E} dV \quad (4.117)$$

となり、これの右辺第 1 項は、微小変形解析の場合の接線剛性マトリクスを表す項となる。すなわち、物質表示における接線剛性テンソル (式(3.210)参照) を用い、式(4.117)の右辺第 1 項は以下のように表せる。

$$\Delta \delta w'_L = \int_{\Omega_0} \Delta \mathbf{S}' : \delta \mathbf{E} dV = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial \mathbf{E}} : \Delta \mathbf{E} \right) : \delta \mathbf{E} dV = \int_{\Omega_0} (\mathbb{C} : \Delta \mathbf{E}) : \delta \mathbf{E} dV \quad (4.118)$$

これを、式(4.27)の節点変位と式(4.25)の補間関数を用いてベクトル・マトリクス形式に書き直すと、式(4.109)に示すマトリクスが以下のように得られる。

$$\Delta \delta w'_L = \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L \delta \mathbf{u})^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{u} dV = (\delta \mathbf{u})^T \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV \right) \Delta \mathbf{u} \quad (4.119)$$

ここに、式(4.73)の関係を用いた。

一方、式(4.117)の右辺第 2 項は、大変形解析で現れる幾何学的非線形項であり、Green-Lagrange ひずみの定義により以下のとおりに書くことができる。

$$\Delta \delta w'_{NL} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S}' : \text{sym}(\Delta \mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{S}' : \text{sym}(\text{Grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV \quad (4.120)$$

第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルの対称性を利用すると、式(4.120)はさらに以下のように書き表せる。

$$\Delta \delta w'_{NL} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S}' : \text{Grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{Grad} \delta \mathbf{u} dV = \int_{\Omega_0} \text{Grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{S}' : \text{Grad} \delta \mathbf{u} dV \quad (4.121)$$

これを、式(4.27)の節点変位と式(4.25)の補間関数を用いて、具体的に書き下すと以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} & \text{Grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{S}' : \text{Grad} \delta \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{21} \\ S'_{12} & S'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S'_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_1^k + S'_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_1^k & S'_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_1^k + S'_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_1^k \\ S'_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_2^k + S'_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_2^k & S'_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_2^k + S'_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_2^k \end{bmatrix} \\ & \quad \cdot \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \\ &= \left(S'_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_1^k + S'_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_1^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k \\ &+ \left(S'_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_1^k + S'_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_1^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k \\ &+ \left(S'_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_2^k + S'_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_2^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k \\ &+ \left(S'_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_2^k + S'_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_2^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \end{aligned} \quad (4.122)$$

これをベクトル・マトリクス表示で書き表すと、式(4.114)(4.115)、および、

$$\mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{u} = \left[\sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k \quad \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k \quad \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k \quad \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \right]^T \quad (4.123)$$

の関係を用いて、式(4.110)に示す接線剛性マトリクスを含む式が以下のように得られる。

$$\Delta \delta w'_{NL} = \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{u})^T \llbracket \mathbf{S}' \rrbracket \mathbf{B}_{NL} \Delta \mathbf{u} dV = (\delta \mathbf{u})^T \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{NL}^T \llbracket \mathbf{S}' \rrbracket \mathbf{B}_{NL} dV \right) \Delta \mathbf{u} \quad (4.124)$$

次に、式(4.111)の導出過程を示す。まず、式(4.69)における水圧と仮想 Green-Lagrange ひずみによる仮想仕事 δw_p は、式(4.70)にならい以下のように表せる。

$$\delta w_p = \int_{\Omega_0} Jp\mathbf{C}^{-1} : \delta \mathbf{E} dV = \int_{\Omega_0} Jp\mathbf{C}^{-1} : \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV \quad (4.125)$$

これを, 変位 \mathbf{u} について線形化すると,

$$\begin{aligned} \Delta \delta w_p &= \Delta \delta w_{pL} + \Delta \delta w_{pNL} \\ &= \int_{\Omega_0} p \Delta(\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}) : \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV + \int_{\Omega_0} Jp\mathbf{C}^{-1} : \text{sym}(\Delta \mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV \end{aligned} \quad (4.126)$$

となる。さらに, 右辺第 1 項を以下のように書き換えておく。

$$\begin{aligned} \Delta \delta w_{pL} &= \int_{\Omega_0} p \Delta(\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}) : \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV \\ &= \int_{\Omega_0} p(\Delta \mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} : \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV + \int_{\Omega_0} pJ\Delta \mathbf{C}^{-1} : \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV \end{aligned} \quad (4.127)$$

ここで, Holzapfel (2000) より,

$$\Delta \mathbf{J} = J \text{div} \Delta \mathbf{u} = J \text{tr}(\text{Grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{J}\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{F}^T \text{Grad} \Delta \mathbf{u} \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{C}^{-1} &= -\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} : \Delta \mathbf{C} = -2(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}) : \Delta \mathbf{E} \\ &= -2(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}) : \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \Delta \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.129)$$

であるので, 右 Cauchy-Green テンソルの対称性を考慮して, 式(4.127)は以下のように書き表せる。

$$\begin{aligned} \Delta \delta w_{pL} &= \int_{\Omega_0} pJ(\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u})(\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{F}^T \text{Grad} \Delta \mathbf{u}) dV \\ &\quad - \int_{\Omega_0} 2pJ(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) : (\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}) : (\mathbf{F}^T \text{Grad} \Delta \mathbf{u}) dV \end{aligned} \quad (4.130)$$

これを, 式(4.21)より得られる関係式,

$$\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{F}^T \text{Grad} \Delta \mathbf{u} = (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^T \mathbf{B}_L \Delta \underline{\mathbf{u}} \quad (4.131)$$

を用いて離散化すると, 以下に示すとおり式(4.112)のマトリクスが導かれる。

$$\Delta \delta w_{pL} = (\delta \underline{\mathbf{u}})^T \left(\int_{\Omega_0} J \mathbf{B}_L^T \left[\hat{\mathbf{C}}^{-1} (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^T - 2 \{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1} \} \right] (\hat{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{p}}) \mathbf{B}_L dV \right) \Delta \underline{\mathbf{u}} \quad (4.132)$$

なお, 式(4.132)において, 間隙水圧の離散化に関する式(4.23)を用いた。

一方, 式(4.126)の右辺第 2 項は, 式(4.120)を参考にして,

$$\begin{aligned} \Delta \delta w_{pNL} &= \int_{\Omega_0} Jp\mathbf{C}^{-1} : \text{sym}(\Delta \mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV \\ &= \int_{\Omega_0} Jp\mathbf{C}^{-1} : \text{sym}(\text{Grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{Grad} \delta \mathbf{u}) dV \end{aligned} \quad (4.133)$$

と表せる。右 Cauchy-Green テンソルの対称性を考慮すると、これは以下のように書ける。

$$\Delta \delta w_{pNL} = \int_{\Omega_0} Jp \mathbf{C}^{-1} : \text{Grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{Grad} \delta \mathbf{u} dV = \int_{\Omega_0} Jp \text{Grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} : \text{Grad} \delta \mathbf{u} dV \quad (4.134)$$

これを、式(4.27)の節点変位と式(4.25)の補間関数を用いて、具体的に書き下すと以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} & Jp \text{Grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{C}^{-1} : \text{Grad} \delta \mathbf{u} \\ &= Jp \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{-1} & C_{12}^{-1} \\ C_{21}^{-1} & C_{22}^{-1} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \\ &= Jp \begin{bmatrix} C_{11}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_1^k + C_{12}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_1^k & C_{21}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_1^k + C_{22}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_1^k \\ C_{11}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_2^k + C_{12}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_2^k & C_{21}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_2^k + C_{22}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_2^k \end{bmatrix} \\ & \quad : \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \\ &= Jp \left(C_{11}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_1^k + C_{12}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_1^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k \\ &+ Jp \left(C_{21}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_1^k + C_{22}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_1^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k \\ &+ Jp \left(C_{11}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_2^k + C_{12}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_2^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k \\ &+ Jp \left(C_{21}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \Delta u_2^k + C_{22}^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \Delta u_2^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \end{aligned} \quad (4.135)$$

これに式(4.23)(4.116)(4.123)を適用し、ベクトル・マトリクス表示で表すと以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta \delta w_{pNL} &= \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_{NL} \delta \underline{\mathbf{u}})^T Jp \llbracket \mathbf{C}^{-1} \rrbracket \mathbf{B}_{NL} \Delta \underline{\mathbf{u}} dV \\ &= (\delta \underline{\mathbf{u}})^T \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{NL}^T J \llbracket \mathbf{C}^{-1} \rrbracket (\hat{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{p}}) \mathbf{B}_{NL} dV \right) \Delta \underline{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (4.136)$$

これで、式(4.113)で表される接線剛性マトリクス成分が導かれた。

よって、式(4.107)における第*i*+1回目の不平衡力がゼロとなるよう、Newton 法などを用

いて次式により節点変位増分を求めればよい。

$$\left[(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i + (\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i - \left(\frac{\partial(\mathbf{Qp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \right] \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i = \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1}^i \quad (4.137)$$

なお、大変形解析において式(4.114)で表される \mathbf{B} マトリクス \mathbf{B}_{NL} は、変形の進行に依存しないので、解析中に更新する必要はない。

さて、地盤の自重解析により算定された応力などに対して、下添字 st を用いて表示すれば、式(4.101)(4.102)より以下の関係が得られる。

$$-\mathbf{M}g\underline{\mathbf{L}}_v = \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{st} \hat{\mathbf{S}}'_{st} dV - \mathbf{Q}_{st} \underline{\mathbf{p}}_{st} - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}_{st} dS \quad (4.138)$$

4.4.2 定常浸透流解析

定常浸透流解析，すなわち時間依存性を考慮しない水圧の自重解析では，式(4.94)より時間依存項を落とした以下の方程式を解くこととなる。

$$\mathbf{G} \underline{\mathbf{p}} = \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}} dS - \hat{\mathbf{M}}g\underline{\mathbf{L}}_v \quad (4.139)$$

ここで，節点間隙水圧ベクトル $\underline{\mathbf{p}}$ を，非拘束自由度 $\underline{\mathbf{p}}^f$ と水圧境界 $\partial\Omega_{0p}$ 上での拘束自由度 $\underline{\mathbf{p}}^c$ に分解する。また，これに応じて，節点水圧にかかるマトリクス \mathbf{G} も分解して表す。すなわち，

$$\underline{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{p}}^f \\ \underline{\mathbf{p}}^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^f & \mathbf{G}^c \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

さらに，表記を簡潔にするため，非拘束自由度水圧 $\underline{\mathbf{p}}^f$ を改めて $\underline{\mathbf{p}}$ と書き直し，対応するマトリクスに関しても上添字を省略して表すこととする。これにより，式(4.139)は以下のとおり書き表される。

$$\mathbf{G} \underline{\mathbf{p}} = \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}} dS - \hat{\mathbf{M}}g\underline{\mathbf{L}}_v - \mathbf{G}^c \underline{\mathbf{p}}^c \quad (4.141)$$

ここで，これを以下のとおり書き直しておく。

$$\mathbf{G} \underline{\mathbf{p}} = \mathfrak{R}^p \quad (4.142)$$

ここに，

$$\mathfrak{R}^p = \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}} dS - \hat{\mathbf{M}}g\underline{\mathbf{L}}_v - \mathbf{G}^c \underline{\mathbf{p}}^c \quad (4.143)$$

次に、地盤の自重解析の場合と同様に、式(4.142)をいくつかのステップに分け、段階的に荷重を増加させて解くこととする。第 n 荷重ステップまでの解が既知であるとする、第 $n+1$ ステップでは式(4.142)が以下のように表される。

$$\mathbf{G}_{n+1}\mathbf{p}_{n+1} = \mathfrak{R}_{n+1}^p \quad (4.144)$$

ここに、 \mathbf{G}_{n+1} は、地盤の自重解析の各段階において更新される変形勾配をもとに、式(4.95)より以下のとおり与える。

$$\mathbf{G}_{n+1} = \int_{\Omega_0} J_{n+1} \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{B}} dV \quad (4.145)$$

定常浸透流解析により求められた水圧などを下添字 st を用いて表示すれば、式(4.139)より以下のように書くことができる。

$$\hat{\mathbf{M}}_{st} g \mathbf{L}_v = \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}}_{st} dS - \mathbf{G}_{st} \mathbf{p}_{st} \quad (4.146)$$

4.4.3 地盤変形と水圧の連成自重解析

地盤変形の自重解析と定常浸透流解析を連成させて解く場合、式(4.101)(4.142)の連立方程式を解くこととなる。ここで、式(4.140)にならない、節点相対変位ベクトル \mathbf{u} を非拘束自由度 \mathbf{u}^f と変位境界 $\partial\Omega_{0u}$ 上の拘束自由度 \mathbf{u}^c に分解し、これに応じて質量マトリクス \mathbf{M} も以下のように区分することとする。

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^f \\ \mathbf{u}^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^f & \mathbf{M}^c \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

ここでは、表記を簡潔にするため、非拘束自由度変位 \mathbf{u}^f を改めて \mathbf{u} と書き直すとともに、対応する質量マトリクス \mathbf{M}^f も単に \mathbf{M} と書くこととする。さらに、地盤と水圧の連成項を表すマトリクス \mathbf{Q} に関しても、以下のような分割を行う。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{ff} & \mathbf{Q}^{fc} \\ \mathbf{Q}^{cf} & \mathbf{Q}^{cc} \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

ここに、上添字は、 ff : 変位境界・水圧境界の両方で非拘束自由度、 fc : 変位境界で非拘束自由度かつ水圧境界で拘束自由度、 cf : 変位境界で拘束自由度かつ水圧境界で非拘束自由度、 cc : 変位境界・水圧境界の両方で拘束自由度であることを表す。なお、ここでも表記を簡略化するため、 \mathbf{Q}^{ff} は単に \mathbf{Q} と書くこととする。

これらを用いると、連成自重解析における連立方程式が以下のように与えられる。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} = \mathfrak{R} \quad (4.149)$$

$$\mathbf{G}\underline{\mathbf{p}} = \mathfrak{R}^p \quad (4.150)$$

ここに,

$$\mathfrak{R} = \mathbf{Q}^{fc} \underline{\mathbf{p}}^c - g \mathbf{M} \underline{\mathbf{L}}_v + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (4.151)$$

$$\mathfrak{R}^p = -\mathbf{G}^c \underline{\mathbf{p}}^c + \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}} dS - \hat{\mathbf{M}} g \underline{\mathbf{L}}_v \quad (4.152)$$

これを, 地盤の自重解析と同様に, いくつかのステップに分けて段階的に荷重を増加させて解く。第 n 荷重ステップまでが既知であるとし, 第 $n+1$ 荷重ステップでの釣り合いを考えると, 式(4.149)(4.150)は以下のように表せる。

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1} \hat{\mathbf{S}}'_{n+1} dv_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1} \underline{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathfrak{R}_{n+1} \quad (4.153)$$

$$\mathbf{G}_{n+1} \underline{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathfrak{R}_{n+1}^p \quad (4.154)$$

ここで, 第 i 回目の試行値に対する不平衡力を $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i$ とし, 式(4.153)(4.154)についてまとめる形で, 以下のように与えることとする。

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}^u)_{n+1}^i \\ (\boldsymbol{\varphi}^p)_{n+1}^i \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

ここに,

$$(\boldsymbol{\varphi}^u)_{n+1}^i = - \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i \hat{\mathbf{S}}'_{n+1} dV + \mathbf{Q}_{n+1}^i \underline{\mathbf{p}}_{n+1}^i + \mathfrak{R}_{n+1}^i \quad (4.156)$$

$$(\boldsymbol{\varphi}^p)_{n+1}^i = \mathbf{G}_{n+1}^i \underline{\mathbf{p}}_{n+1}^i - (\mathfrak{R}^p)_{n+1}^i \quad (4.157)$$

さらに, 節点変位ベクトル $\underline{\mathbf{u}}$ と節点間隙水圧ベクトル $\underline{\mathbf{p}}$ により構成されるベクトルを以下のとおり定義する。

$$\underline{\boldsymbol{\zeta}} \equiv \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

第 $i+1$ 回目の試行値 $\underline{\boldsymbol{\zeta}}_{n+1}^{i+1}$ を,

$$\underline{\boldsymbol{\zeta}}_{n+1}^{i+1} = \underline{\boldsymbol{\zeta}}_{n+1}^i + \Delta \underline{\boldsymbol{\zeta}}_{n+1}^i \quad (4.159)$$

により定めるものとする、第*i*+1回目の試行値に対する不平衡力は、線形化により次式で近似される。

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \underline{\zeta}} \right)_{n+1}^i \Delta \underline{\zeta}_{n+1}^i \quad (4.160)$$

ここに、式(4.160)におけるマトリクス $\partial \boldsymbol{\varphi} / \partial \underline{\zeta}$ は、式(4.156)(4.157)より以下のように分割される。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \underline{\zeta}} \right)_{n+1}^i = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^u}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i & \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^u}{\partial \underline{\mathbf{p}}} \right)_{n+1}^i \\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i & \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \underline{\mathbf{p}}} \right)_{n+1}^i \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

以下で、この成分を具体的に求めることとする。

まず、地盤の自重解析における式(4.108)と同様に、 $\partial \boldsymbol{\varphi}^u / \partial \underline{\mathbf{u}}$ は、

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^u}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = -(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i - (\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i + \left(\frac{\partial (\mathbf{Qp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \quad (4.162)$$

と表される。ここに、右辺の各項は式(4.109)～(4.111)に示すとおりである。

次に、式(4.161)における以下の成分を求める。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = \left(\frac{\partial (\mathbf{Gp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \quad (4.163)$$

ここに、

$$\frac{\partial (\mathbf{Gp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \int_{\Omega_0} J \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{B}} p dV \quad (4.164)$$

この計算を行うため、式(4.164)の被微分項を、式(4.88)で表される離散化前の表記法に戻しておく。すなわち、

$$\mathbf{Gp} = \int_{\Omega_0} J \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{B}} dV p = \int_{\Omega^0} J \left(\mathbf{F}^{-T} \text{Grad}(\hat{h}) \right)^T \mathbf{k} \left(\mathbf{F}^{-T} \text{Grad}(p) \right) dV \quad (4.165)$$

これを線形化すると、

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{G}\underline{\mathbf{p}}) &= \Delta\left(\int_{\Omega^0} J(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}\hat{h})^T \mathbf{k}(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) dV\right) \\
&= \int_{\Omega^0} \Delta J(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}\hat{h})^T \mathbf{k}(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) dV \\
&\quad + \int_{\Omega^0} J(\Delta\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}\hat{h})^T \mathbf{k}(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) dV + \int_{\Omega^0} J(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}\hat{h})^T \mathbf{k}(\Delta\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) dV
\end{aligned} \tag{4.166}$$

と表せる。ここで、式(4.128), および,

$$\Delta\mathbf{F}^{-T} = (\Delta\mathbf{F}^{-1})^T = -(\mathbf{F}^{-1}\text{Grad}\Delta\mathbf{u}\mathbf{F}^{-1})^T = -\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}^T\Delta\mathbf{u}\mathbf{F}^{-T} \tag{4.167}$$

を考慮すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\Delta(\mathbf{G}\underline{\mathbf{p}}) \\
&= \int_{\Omega^0} J\mathbf{C}^{-1}:\mathbf{F}^T\text{Grad}\Delta\mathbf{u}(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}\hat{h})^T \mathbf{k}(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) dV \\
&\quad - \int_{\Omega^0} J(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}\hat{h})^T \text{Grad}\Delta\mathbf{u}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) dV \\
&\quad - \int_{\Omega^0} J(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}\hat{h})^T \mathbf{k}(\text{Grad}\Delta\mathbf{u}\mathbf{F}^{-1})^T (\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) dV
\end{aligned} \tag{4.168}$$

これを、式(4.21)(4.23)(4.90)(4.91)(4.114)を用いて離散化する。まず、式(4.168)の右辺第2項の成分を展開すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{Grad}\Delta\mathbf{u}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\text{NL11}} \\ q_{\text{NL12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_1} q_{\text{NL11}} + \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_2} q_{\text{NL12}} \\ \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_1} q_{\text{NL11}} + \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_2} q_{\text{NL12}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} q_{\text{NL11}} & q_{\text{NL12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{\text{NL11}} & q_{\text{NL12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{4.169}$$

ここに,

$$\begin{bmatrix} q_{\text{NL11}} \\ q_{\text{NL12}} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}(p)) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{k}\hat{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{p}} \tag{4.170}$$

よって、次式のように書ける。

$$\text{Grad}\Delta\mathbf{u}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}(p)) = \mathbf{q}_{\text{NL1}} \mathbf{B}_{\text{NL}} \Delta\mathbf{u} \tag{4.171}$$

ここに,

$$\mathbf{q}_{\text{NL1}} = \begin{bmatrix} q_{\text{NL11}} & q_{\text{NL12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{\text{NL11}} & q_{\text{NL12}} \end{bmatrix} \quad (4.172)$$

同様に, 式(4.168)の右辺第3項の成分を展開すると, 以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\text{Grad}\Delta\mathbf{u}\mathbf{F}^{-1})^T(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) &= \mathbf{k}\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}^T\Delta\mathbf{u}(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) \\ &= \mathbf{k}\mathbf{F}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{k}\mathbf{F}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_1} \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_2} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{k}\mathbf{F}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial p}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial\Delta u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial\Delta u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.173)$$

ここに,

$$\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} & \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T = \hat{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{p}} \quad (4.174)$$

よって, 以下のとおり書ける。

$$\mathbf{k}(\text{Grad}\Delta\mathbf{u}\mathbf{F}^{-1})^T(\mathbf{F}^{-T}\text{Grad}p) = \mathbf{q}_{\text{NL2}}\mathbf{B}_{\text{NL}}\Delta\mathbf{u} \quad (4.175)$$

ここに,

$$\mathbf{q}_{\text{NL2}} = \mathbf{k}\mathbf{F}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial p}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (4.176)$$

以上をまとめると, 式(4.168)は以下のように離散化される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{p}})}{\partial\underline{\mathbf{u}}} &= \int_{\Omega^0} \mathcal{J}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{k}\hat{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{p}}[\hat{\mathbf{C}}^{-T}\mathbf{B}_{\text{L}}]dV - \int_{\Omega^0} \mathcal{J}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{q}_{\text{NL1}}\mathbf{B}_{\text{NL}}dV - \int_{\Omega^0} \mathcal{J}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{q}_{\text{NL2}}\mathbf{B}_{\text{NL}}dV \\ &= \int_{\Omega^0} \mathcal{J}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{q}_{\text{NL0}}[\hat{\mathbf{C}}^{-T}\mathbf{B}_{\text{L}}]dV - \int_{\Omega^0} \mathcal{J}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{q}_{\text{NL}}\mathbf{B}_{\text{NL}}dV \end{aligned} \quad (4.177)$$

ここに,

$$\mathbf{q}_{\text{NL0}} = \mathbf{k}\hat{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{p}} \quad (4.178)$$

$$\mathbf{q}_{\text{NL}} = \mathbf{q}_{\text{NL1}} + \mathbf{q}_{\text{NL2}} \quad (4.179)$$

よって、式(4.177)を式(4.163)に代入すると、次式のようなになる。

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = -(\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\text{G}})_{n+1}^i \quad (4.180)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\text{G}}]_{n+1}^i &= - \left(\frac{\partial (\mathbf{G}\underline{\mathbf{p}})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = - \int_{\Omega^0} J_{n+1}^i (\hat{\mathbf{B}}^{\text{T}})_{n+1}^i (\mathbf{q}_{\text{NL0}})_{n+1}^i (\hat{\mathbf{C}}^{-\text{T}})_{n+1}^i (\mathbf{B}_{\text{L}})_{n+1}^i dV \\ &\quad + \int_{\Omega^0} J_{n+1}^i (\hat{\mathbf{B}}^{\text{T}})_{n+1}^i (\mathbf{q}_{\text{NL}})_{n+1}^i \mathbf{B}_{\text{NL}} dV \end{aligned} \quad (4.181)$$

続いて、式(4.161)の水圧 $\underline{\mathbf{p}}$ に係る項は、式(4.95)(4.97)を用いて以下で与えられる。

$$\left(\frac{\partial \Phi^u}{\partial \underline{\mathbf{p}}} \right)_{n+1}^i = \mathbf{Q}_{n+1}^i \quad (4.182)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \underline{\mathbf{p}}} \right)_{n+1}^i = \mathbf{G}_{n+1}^i \quad (4.183)$$

以上をまとめると、式(4.161)は以下のように書き表せる。

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\zeta}} \right)_{n+1}^i = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi^u}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i & \mathbf{Q}_{n+1}^i \\ -(\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\text{G}})_{n+1}^i & \mathbf{G}_{n+1}^i \end{bmatrix} \quad (4.184)$$

よって、式(4.160)において第 $i+1$ 回目の不平衡力がゼロとなるよう、次式により節点変位および水圧の増分を求めればよい。

$$\begin{bmatrix} - \left(\frac{\partial \Phi^u}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i & -\mathbf{Q}_{n+1}^i \\ (\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\text{G}})_{n+1}^i & -\mathbf{G}_{n+1}^i \end{bmatrix} \Delta \underline{\zeta}_{n+1}^i = \Phi_{n+1}^i \quad (4.185)$$

4.4.4 地盤変形の動的解析

本項以降では、物体の運動に起因する慣性力を考慮した動的解析を対象とし、数値解析への導入に際して必要な定式化を行う。動的解析では、自重解析により得られた応力を初期状態とし、また、自重解析終了時の節点変位を基準として相対変位を考える。さらに、地震時の地盤・構造物系に対する動的解析を対象とする場合、基盤に一様に入射する地震

動加速度 $\ddot{\mathbf{u}}_g$ に対する応答を求める必要がある。そこで、先の相対変位に対する相対的な変位として、基盤に対する相対変位を、新たな変位の定義として与えることとする。これにより、式(4.79)で表される物質表示における運動方程式は、以下のとおり書き直される。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + \mathbf{M}(g\underline{\mathbf{L}}_v + \ddot{\mathbf{u}}_g \underline{\mathbf{I}} + \ddot{\mathbf{u}}) - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS = 0 \quad (4.186)$$

ここに、 $\underline{\mathbf{I}}$ は、各節点変位について、基盤における加振方向と等しい自由度成分には 1 を、その他には 0 を割り当てたベクトルである。

さらに、式(4.186)に速度に比例する粘性減衰項を付加し、以下のとおり与えることとする。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = -\ddot{\mathbf{u}}_g \mathbf{M}\underline{\mathbf{I}} - \mathbf{M}g\underline{\mathbf{L}}_v + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (4.187)$$

ここに、 \mathbf{C} は粘性マトリクスである。

これに、地盤の自重解析により得られた式(4.138)を代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} \\ & = -\ddot{\mathbf{u}}_g \mathbf{M}\underline{\mathbf{I}} + \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{st} \hat{\mathbf{S}}'_{st} dV - \mathbf{Q}_{st} \underline{\mathbf{p}}_{st} + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}^* dS \end{aligned} \quad (4.188)$$

ここに、動的解析における境界応力は、自重解析における境界応力からの相対値として以下のとおり与える。

$$\bar{\mathbf{T}}^* = \bar{\mathbf{T}} - \bar{\mathbf{T}}_{st} \quad (4.189)$$

なお、大変形解析における節点水圧 $\underline{\mathbf{p}}$ は、過剰間隙水圧（すなわち、自重解析後の静水圧に対する相対値） $\underline{\mathbf{p}}^* = \underline{\mathbf{p}} - \underline{\mathbf{p}}_{st}$ として与えず、自重解析後の静水圧を引き継いだ全水圧とする。

これは、微小変形解析の場合と異なり、水圧項にかかるマトリクス \mathbf{Q} が変形に応じて更新されるため、もし水圧を相対値で与えると、補正項 $(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{st}) \underline{\mathbf{p}}_{st}$ を導入する必要性が生じるためである。

ここで、式(4.147)にならい、粘性マトリクス \mathbf{C} も以下のように分割する。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^f & \mathbf{C}^c \end{bmatrix} \quad (4.190)$$

さらに、表記を簡潔にするため、非拘束自由度を表す上添字 f を無視すると、離散化された運動方程式(4.188)は式(4.147)(4.190)を用いて以下のとおり表される。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathfrak{R} \quad (4.191)$$

ここに、

$$\mathfrak{R} = -\ddot{u}_g \mathbf{M}\underline{\mathbf{I}} - \mathbf{C}^c \underline{\dot{u}}^c - \mathbf{M}^c \underline{\ddot{u}}^c + \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{st} \hat{\mathbf{S}}'_{st} dV - \mathbf{Q}_{st} \underline{\mathbf{p}}_{st} + \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}^* dS \quad (4.192)$$

式(4.191)に対して、式(4.99)に示す非排水解析の場合の項を追加して、以下のとおり一般形として与えておく。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T J p^* \hat{\mathbf{C}}^{-1} dV - \mathbf{Q} \underline{\mathbf{p}} + \mathbf{C} \underline{\dot{u}} + \mathbf{M} \underline{\ddot{u}} = \mathfrak{R} \quad (4.193)$$

なお、実際の計算では、必要に応じて不要な項(例えば、非排水解析であれば $-\mathbf{Q} \underline{\mathbf{p}}$, $-\mathbf{Q}_{st} \underline{\mathbf{p}}_{st}$)

を落として用いることとする。

運動方程式における時間積分は、静的解析での荷重ステップの扱いと同様に、第 n 時間ステップまでの変位を既知とし、第 $n+1$ 時間ステップの変位などを式(4.193)により求める。ここでは、運動方程式の時間積分法として、以下に示す中央差分法、Newmark 法、Wilson の θ 法の3種類を扱うこととする。

(a) 中央差分

第 n 時間ステップにおける変位 $\underline{\mathbf{u}}_n$ などは、式(4.193)により以下を満たす。

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_n \hat{\mathbf{S}}'_n dV - \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_n J_n p_n^* \hat{\mathbf{C}}_n^{-1} dV - \mathbf{Q}_n \underline{\mathbf{p}}_n + \mathbf{C} \underline{\dot{u}}_n + \mathbf{M} \underline{\ddot{u}}_n = \mathfrak{R}_n \quad (4.194)$$

ここで、第 n ステップにおける速度および加速度を以下で表わす。

$$\underline{\dot{u}}_n = (\underline{\mathbf{u}}_{n+1} - \underline{\mathbf{u}}_{n-1}) / (2\Delta t) \quad (4.195)$$

$$\underline{\ddot{u}}_n = (\underline{\mathbf{u}}_{n+1} - 2\underline{\mathbf{u}}_n + \underline{\mathbf{u}}_{n-1}) / (\Delta t)^2 \quad (4.196)$$

ただし、 Δt は時間ステップの刻みを表す。これらを式(4.194)に代入して整理すると、以下のようになる。

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \underline{\mathbf{u}}_{n+1} = \underline{\boldsymbol{\psi}}_n + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \underline{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \underline{\mathbf{u}}_{n-1} \quad (4.197)$$

ここに、

$$\underline{\boldsymbol{\psi}}_n = - \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_n \hat{\mathbf{S}}'_n dV + \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_n J_n p_n^* \hat{\mathbf{C}}_n^{-1} dV + \mathbf{Q}_n \underline{\mathbf{p}}_n + \mathfrak{R}_n \quad (4.198)$$

さらに、

$$\underline{\mathbf{u}}_{n+1} = \underline{\mathbf{u}}_n + \Delta \underline{\mathbf{u}}_n \quad (4.199)$$

とおき、これを式(4.197)に代入すると次式を得る。

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \Delta \underline{\mathbf{u}}_n = \underline{\boldsymbol{\psi}}_n - \left(\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) (\underline{\mathbf{u}}_n - \underline{\mathbf{u}}_{n-1}) \quad (4.200)$$

これを $\Delta \underline{\mathbf{u}}_n$ について解き、式(4.199)および式(4.195)(4.196)を適用すると、第 $n+1$ 時間ステ

ップにおける節点変位, 第 n 時間ステップにおける節点速度および加速度が得られる。さらに, 得られた節点変位を基に, 式(4.84)により Green-Lagrange ひずみが算定されるので, これを第3章で示した多重せん断モデル構成式に適用することにより第2Piola-Kirchhoff 応力が求められる。なお, ここでの解法は, 微小変形解析の場合とほぼ同様であるが, 物質表示による大変形解析では, 座標の更新に応じて式(4.76)で表される \mathbf{B} マトリクスが更新される点異なる。

(b) Newmark 法

Newmark 法では, 第 n 時間ステップにおける変位, 速度, 加速度を既知とし, 第 $n+1$ 時間ステップにおける変位 $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$ などを非線形反復により求める。第 $n+1$ 時間ステップにおいても式(4.193)が成立するはずであるので, 以下のとおり書くことができる。

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1} \hat{\mathbf{S}}'_{n+1} dV - \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_n J_{n+1} p_{n+1}^* \hat{\mathbf{C}}_{n+1}^{-1} dV \\
 & - \mathbf{Q}_{n+1} \underline{\mathbf{p}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1} + \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1} = \mathfrak{R}_{n+1}
 \end{aligned} \quad (4.201)$$

ここで, 第 i 回目の試行値に対する不平衡力を $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i$ とすると, これは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i &= - \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i \hat{\mathbf{S}}'_{n+1} dV + \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i J_{n+1}^i p_{n+1}^{*i} (\hat{\mathbf{C}}^{-1})_{n+1}^i dV \\
 & + \mathbf{Q}_{n+1}^i \underline{\mathbf{p}}_{n+1}^i - \mathbf{C} \dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i - \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i + \mathfrak{R}_{n+1} \\
 & = \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i + \boldsymbol{\chi}_{n+1}^i
 \end{aligned} \quad (4.202)$$

ここに,

$$\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i = - \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i \hat{\mathbf{S}}'_{n+1} dV + \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i J_{n+1}^i p_{n+1}^{*i} (\hat{\mathbf{C}}^{-1})_{n+1}^i dV + \mathbf{Q}_{n+1}^i \underline{\mathbf{p}}_{n+1}^i + \mathfrak{R}_{n+1} \quad (4.203)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{n+1}^i = -\mathbf{C} \dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i - \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i \quad (4.204)$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R}_{n+1} &= -(\ddot{u}_g)_{n+1} \mathbf{M} \mathbf{I} - \mathbf{C}^c \dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^c - \mathbf{M}^c \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^c + \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{st} \hat{\mathbf{S}}_{st} dV \\
 & - \mathbf{Q}_{st} \underline{\mathbf{p}}_{st} + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}_{n+1}^* dS
 \end{aligned} \quad (4.205)$$

第 $i+1$ 回目の試行値 $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ を,

$$\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i \quad (4.206)$$

により定めるものとすれば、第 $i+1$ 回目の試行値に対する不平衡力は、式(4.107)に示す自重解析の場合と同様に、近似的に次式で表される。

$$\Phi_{n+1}^{i+1} = \Psi_{n+1}^i + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \chi_{n+1}^i \quad (4.207)$$

ここに、

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = -(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i - (\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i + \left(\frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i + \left(\frac{\partial (\mathbf{Qp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \quad (4.208)$$

$$\mathbf{P}^* = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T J p^* \hat{\mathbf{C}}^{-1} dV \quad (4.209)$$

非排水解析の場合に現れる式(4.209)の偏微分は、式(4.111)に準じて、以下のとおり求められる。

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = -\hat{\mathbf{A}}_{n+1}^i + (\mathbf{K}_{p^*L})_{n+1}^i + (\mathbf{K}_{p^*NL})_{n+1}^i \quad (4.210)$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{A}}_{n+1}^i = \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i J_{n+1}^i \frac{K_f}{n} (\hat{\mathbf{C}}^{-1})_{n+1}^i \left\{ (\hat{\mathbf{C}}^{-1})_{n+1}^i \right\}^T (\mathbf{B}_L)_{n+1}^i dV \quad (4.211)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{K}_{p^*L})_{n+1}^i \\ &= \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i J_{n+1}^i (p^*)_{n+1}^i \left[(\hat{\mathbf{C}}^{-1})_{n+1}^i \left\{ (\hat{\mathbf{C}}^{-1})_{n+1}^i \right\}^T - 2 \left\{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right\}_{n+1}^i \right] (\mathbf{B}_L)_{n+1}^i dV \end{aligned} \quad (4.212)$$

$$(\mathbf{K}_{p^*NL})_{n+1}^i = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{NL}^T J_{n+1}^i (p^*)_{n+1}^i (\tilde{\mathbf{C}}^{-1})_{n+1}^i \mathbf{B}_{NL} dV \quad (4.213)$$

Newmark 法では、 $\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^{i+1}$ および $\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^{i+1}$ を、 $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ を用いて以下のように表す。

$$\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^{i+1} = a_0 \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} - (a_0 \underline{\mathbf{u}}_n + a_2 \dot{\underline{\mathbf{u}}}_n + a_3 \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_n) \quad (4.214)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^{i+1} = a_1 \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} - (a_1 \underline{\mathbf{u}}_n + a_4 \dot{\underline{\mathbf{u}}}_n + a_5 \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_n) \quad (4.215)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}, \\
 a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.216}$$

よって、式(4.206)(4.214)(4.215)を式(4.207)に適用し、第*i*+1回目の試行値に対する不平衡力をゼロとすると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \left[\left((\mathbf{K}_L)_{n+1}^i + (\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i - \left(\frac{\partial (\mathbf{Qp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i + a_1 \mathbf{C} + a_0 \mathbf{M} \right] \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i \\
 & = \Psi_{n+1}^i - (a_1 \mathbf{C} + a_0 \mathbf{M}) \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \mathbf{C} (a_1 \underline{\mathbf{u}}_n + a_4 \dot{\underline{\mathbf{u}}}_n + a_5 \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_n) + \mathbf{M} (a_0 \underline{\mathbf{u}}_n + a_2 \dot{\underline{\mathbf{u}}}_n + a_3 \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_n)
 \end{aligned} \tag{4.217}$$

これを $\Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i$ について解き、式(4.206)より第*i*+1回目の試行値 $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ を求める。さらに、 $\Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i$ に対する Green-Lagrange ひずみ増分および第2Piola-Kirchhoff 応力増分を求める。なお、応力の計算においては、第3章で示した多重せん断モデル構成式を適用する。また、微小変形解析の場合と異なり、座標の更新に伴う **B** マトリクスおよび接線剛性マトリクスの更新が必要となる。

(c) Wilson の θ 法

先に述べた Newmark 法が、第*n*+1時間ステップにおける平衡状態を考慮しているのに対し、Wilson の θ 法では、第*n*時間ステップの時刻を *t* とすると、 $t + \theta\Delta t$ (ただし、 $\theta \geq 1.0$) における平衡条件を満足するように非線形反復計算を行う。式(4.207)における添字 *n*+1 を $t + \theta\Delta t$ に置き換えると、第*i*+1回目の試行値に対する不平衡力が以下のとおり与えられる。

$$\Phi_{t+\theta\Delta t}^{i+1} = \Psi_{t+\theta\Delta t}^i + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{t+\theta\Delta t}^i \Delta \underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i + \chi_{t+\theta\Delta t}^i \tag{4.218}$$

この右辺各項は、式(4.203)(4.208)(4.204)のそれぞれにおいて、添字 *n*+1 を $t + \theta\Delta t$ に置き換えることで与えられる。また、第*i*+1回目の試行値 $\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1}$ は、以下で表されるものとする。

$$\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} = \underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i + \Delta \underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i \tag{4.219}$$

Wilson の θ 法では、 $\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1}$ および $\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1}$ を、 $\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1}$ を用いて以下のように表す。

$$\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} = a_0 \underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} - (a_0 \underline{\mathbf{u}}_n + a_2 \dot{\underline{\mathbf{u}}}_n + 2\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_n) \tag{4.220}$$

$$\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} = a_1 \underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1} - (a_1 \underline{\mathbf{u}}_n + 2\dot{\underline{\mathbf{u}}}_n + a_3 \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_n) \tag{4.221}$$

ここに,

$$a_0 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}, \quad a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}, \quad a_2 = 2a_1, \quad a_3 = \frac{\theta\Delta t}{2} \quad (4.222)$$

よって, 式(4.220)(4.221)を式(4.218)に適用し, 第*i*+1回目の試行値に対する不平衡力をゼロとすると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[\left((\mathbf{K}_L)_{t+\theta\Delta t}^i + (\mathbf{K}_{NL})_{t+\theta\Delta t}^i \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{t+\theta\Delta t}^i - \left(\frac{\partial (\mathbf{Qp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{t+\theta\Delta t}^i + a_1 \mathbf{C} + a_0 \mathbf{M} \right] \Delta \underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i \\ & = \Psi_{t+\theta\Delta t}^i - (a_1 \mathbf{C} + a_0 \mathbf{M}) \underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i + \mathbf{C} (a_1 \underline{\mathbf{u}}_n + 2\underline{\dot{\mathbf{u}}}_n + a_3 \underline{\ddot{\mathbf{u}}}_n) + \mathbf{M} (a_0 \underline{\mathbf{u}}_n + a_2 \underline{\dot{\mathbf{u}}}_n + 2\underline{\ddot{\mathbf{u}}}_n) \end{aligned} \quad (4.223)$$

これを $\Delta \underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^i$ について解くと, 式(4.219)より第*i*+1回目の試行値 $\underline{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^{i+1}$ が求められる。

4.4.5 水圧の動的解析

式(4.94)に, 定常浸透流解析により求められた式(4.146)を代入すると, 離散化された水流の収支バランス式が以下のとおり表せる。

$$\mathbf{Gp} + \mathbf{Rp} = \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}}^* dS - \mathbf{Q}^T \underline{\dot{\mathbf{u}}} - \hat{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{u}}} + \mathbf{G}_{st} \underline{\mathbf{p}}_{st} - (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}}_{st}) g \underline{\mathbf{L}}_v \quad (4.224)$$

ここに, 動的解析における境界での間隙水流入量は, 自重解析における流入量からの相対値として, 以下のとおり与える。

$$\bar{\mathbf{Q}}^* = \bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{Q}}_{st} \quad (4.225)$$

水圧の動的解析では, 式(4.224)の左辺の時間微分を差分近似により解く。なお, 式(4.224)は節点速度および加速度を右辺に含むので, 次項で示すように, 地盤変位と連成させて解くのが一般的である。そのため, 差分近似の詳細は次項であわせて述べることとし, ここで説明は省略する。

4.4.6 地盤変形と水圧の連成動的解析

ここでは, SSpj 法 (Zienkiewicz ら, 2000) を用い, 式(4.191)と式(4.224)を連成させて解くことを考える。改めて, 解くべき連立方程式を以下にまとめて挙げておく。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV + \mathbf{C} \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \mathbf{M} \underline{\ddot{\mathbf{u}}} - \mathbf{Qp} = \mathfrak{R} \quad (4.226)$$

$$\mathbf{Gp} + \mathbf{Rp} + \mathbf{Q}^T \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{u}}} = \mathfrak{R}^p \quad (4.227)$$

ここに,

$$\mathfrak{R} = -\ddot{u}_g \mathbf{M}\mathbf{I} - \mathbf{C}^c \dot{\mathbf{u}}^c - \mathbf{M}^c \ddot{\mathbf{u}}^c + \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{st} \hat{\mathbf{S}}'_{st} dV - \mathbf{Q}_{st} \mathbf{p}_{st} + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}^* dS \quad (4.228)$$

$$\mathfrak{R}^p = \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}}^* dS + \mathbf{G}_{st} \mathbf{p}_{st} - (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}}_{st}) g \mathbf{I}_v \quad (4.229)$$

ここで, 連成自重解析の場合と同様に, 節点相対変位ベクトル \mathbf{u} を非拘束自由度 \mathbf{u}^f と変位境界 $\partial\Omega_{0u}$ 上の拘束自由度 \mathbf{u}^c に分解し, 関連するマトリクスも式(4.147)(4.190)のとおり表す

こととする。また, 節点間隙水圧ベクトル \mathbf{p} も非拘束自由度 \mathbf{p}^f と水圧境界 $\partial\Omega_{0p}$ 上での拘束自由度 \mathbf{p}^c に分解し, 関連するマトリクスも式(4.140), および,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^f & \mathbf{R}^c \end{bmatrix} \quad (4.230)$$

のように書き直しておく。さらに, 表記を簡潔にするため, 非拘束自由度に関する上添字 f を省略して表すこととする。

同様に, 地盤変位と水圧の連成項を表すマトリクス \mathbf{Q} , $\hat{\mathbf{M}}$ については, 式(4.148)および次式のように分割を行う。

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{ff} & \hat{\mathbf{M}}^{cf} \\ \hat{\mathbf{M}}^{fc} & \hat{\mathbf{M}}^{cc} \end{bmatrix} \quad (4.231)$$

なお, 式(4.231)における上添字の意味は, 式(4.148)で説明したとおりである。ここでも, 表記を簡潔にするため, 上添字のうち ff は落として書くこととする。

これらを用いると, 式(4.226)(4.227)は以下のように表せる。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}}' dV + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}\mathbf{p} = \mathfrak{R} \quad (4.232)$$

$$\mathbf{G}\mathbf{p} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}} = \mathfrak{R}^p \quad (4.233)$$

ここに,

$$\mathfrak{R} = -\ddot{u}_g \mathbf{M}\mathbf{I} - \mathbf{C}^c \dot{\mathbf{u}}^c - \mathbf{M}^c \ddot{\mathbf{u}}^c + \mathbf{Q}^{fc} \mathbf{p}^c + \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{st} \hat{\mathbf{S}}'_{st} dV - \mathbf{Q}_{st} \mathbf{p}_{st} + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}^* dS \quad (4.234)$$

$$\mathfrak{R}^p = -\mathbf{G}^c \mathbf{p}^c - \mathbf{R}^c \dot{\mathbf{p}}^c - \mathbf{Q}^{cfT} \dot{\mathbf{u}}^c - \hat{\mathbf{M}}^{cf} \ddot{\mathbf{u}}^c + \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}}^* dS + \mathbf{G}_{st} \mathbf{p}_{st} - (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}}_{st}) g \mathbf{I}_v \quad (4.235)$$

SSpj 法では、時間ステップ t_n から $t_{n+1}(=t_n + \Delta t)$ の間で、以下の関係を仮定する。

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_n + \underline{\dot{\mathbf{u}}}_n \tau + \cdots + \frac{\underline{\mathbf{u}}_n}{(p-1)!} \tau^{p-1} + \frac{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}{p!} \tau^p = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\underline{\mathbf{u}}_n}{k!} \tau^k + \frac{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}{p!} \tau^p \quad (4.236)$$

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\underline{\mathbf{u}}_n}{(k-1)!} \tau^{k-1} + \frac{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}{(p-1)!} \tau^{p-1} \quad (4.237)$$

$$\underline{\ddot{\mathbf{u}}} = \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\underline{\mathbf{u}}_n}{(k-2)!} \tau^{k-2} + \frac{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}{(p-2)!} \tau^{p-2} \quad (4.238)$$

$$\underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{p}}_n + \underline{\dot{\mathbf{p}}}_n \tau + \cdots + \frac{\underline{\mathbf{p}}_n}{(q-1)!} \tau^{q-1} + \frac{\underline{\boldsymbol{\beta}}}{q!} \tau^q = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\underline{\mathbf{p}}_n}{k!} \tau^k + \frac{\underline{\boldsymbol{\beta}}}{q!} \tau^q \quad (4.239)$$

$$\underline{\dot{\mathbf{p}}} = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\underline{\mathbf{p}}_n}{(k-1)!} \tau^{k-1} + \frac{\underline{\boldsymbol{\beta}}}{(p-1)!} \tau^{p-1} \quad (4.240)$$

ここに、 τ は、現時刻 t により $\tau = t - t_n$ と表される。なお、 $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ および $\underline{\boldsymbol{\beta}}$ は、節点変位および水圧に関連する未知ベクトルである。

また、当該時間ステップにおいて、強制変位や境界応力などは線形的に変化するものと仮定する。すなわち、以下のように表される。

$$\underline{\mathbf{u}}^c = \underline{\mathbf{u}}_n^c + \frac{\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^c - \underline{\mathbf{u}}_n^c}{\Delta t} \tau \quad (4.241)$$

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}}^c = \underline{\dot{\mathbf{u}}}_n^c + \frac{\underline{\dot{\mathbf{u}}}_{n+1}^c - \underline{\dot{\mathbf{u}}}_n^c}{\Delta t} \tau \quad (4.242)$$

$$\underline{\ddot{\mathbf{u}}}^c = \underline{\ddot{\mathbf{u}}}_n^c + \frac{\underline{\ddot{\mathbf{u}}}_{n+1}^c - \underline{\ddot{\mathbf{u}}}_n^c}{\Delta t} \tau \quad (4.243)$$

$$\underline{\mathbf{p}}^c = \underline{\mathbf{p}}_n^c + \frac{\underline{\mathbf{p}}_{n+1}^c - \underline{\mathbf{p}}_n^c}{\Delta t} \tau \quad (4.244)$$

$$\underline{\dot{\mathbf{p}}}^c = \underline{\dot{\mathbf{p}}}_n^c + \frac{\underline{\dot{\mathbf{p}}}_{n+1}^c - \underline{\dot{\mathbf{p}}}_n^c}{\Delta t} \tau \quad (4.245)$$

$$\bar{\mathbf{T}}^* = \bar{\mathbf{T}}_n^* + \frac{\bar{\mathbf{T}}_{n+1}^* - \bar{\mathbf{T}}_n^*}{\Delta t} \tau \quad (4.246)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}^* = \bar{\mathbf{Q}}_n^* + \frac{\bar{\mathbf{Q}}_{n+1}^* - \bar{\mathbf{Q}}_n^*}{\Delta t} \tau \quad (4.247)$$

さらに、当該時間ステップにおける応力の変化は、変位に応じて線形的に変化するものと仮定する。以上の仮定を式(4.232)(4.233)に対して適用し、それらの両辺に重み関数 \mathbf{W} を乗

じて $0 \sim \Delta t$ の区間で積分を行う。さらに、両辺を $\int_0^{\Delta t} W d\tau$ で割ると、以下に示すとおりとなる。

$$\tilde{\mathfrak{R}} - \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \tilde{\mathbf{S}}' dV - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{M} \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{p}} = 0 \quad (4.248)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathfrak{R}}^p = 0 \quad (4.249)$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{S}}' = \hat{\mathbf{S}}'(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (4.250)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathbf{u}_n}{k!} \theta_k \Delta t^k + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{p!} \theta_p \Delta t^p \quad (4.251)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mathbf{u}_n}{(k-1)!} \theta_{k-1} \Delta t^{k-1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{(p-1)!} \theta_{p-1} \Delta t^{p-1} \quad (4.252)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\mathbf{u}_n}{(k-2)!} \theta_{k-2} \Delta t^{k-2} + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{(p-2)!} \theta_{p-2} \Delta t^{p-2} \quad (4.253)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathbf{p}_n}{k!} \theta_k \Delta t^k + \frac{\boldsymbol{\beta}}{q!} \theta_q \Delta t^q \quad (4.254)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\mathbf{p}_n}{(k-1)!} \theta_{k-1} \Delta t^{k-1} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{(q-1)!} \theta_{q-1} \Delta t^{q-1} \quad (4.255)$$

$$\theta_k \Delta t^k = \int_0^{\Delta t} W \tau^k d\tau / \int_0^{\Delta t} W d\tau \quad (4.256)$$

同様にして、境界上での拘束変位、間隙水圧、境界応力、境界間隙水流入量も、以下のよう線形関係で与える。

$$\tilde{\mathbf{u}}^c = \mathbf{u}_n^c + \theta_1 (\mathbf{u}_{n+1}^c - \mathbf{u}_n^c) \quad (4.257)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^c = \dot{\mathbf{u}}_n^c + \theta_1 (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^c - \dot{\mathbf{u}}_n^c) \quad (4.258)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^c = \ddot{\mathbf{u}}_n^c + \theta_1 (\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^c - \ddot{\mathbf{u}}_n^c) \quad (4.259)$$

$$\tilde{\underline{\mathbf{p}}}^c = \underline{\mathbf{p}}_n^c + \theta_1 (\underline{\mathbf{p}}_{n+1}^c - \underline{\mathbf{p}}_n^c) \quad (4.260)$$

$$\tilde{\underline{\dot{\mathbf{p}}}}^c = \underline{\dot{\mathbf{p}}}_n^c + \theta_1 (\underline{\dot{\mathbf{p}}}_{n+1}^c - \underline{\dot{\mathbf{p}}}_n^c) \quad (4.261)$$

$$\tilde{\underline{\mathbf{T}}}^* = \underline{\mathbf{T}}_n^* + \theta_1 (\underline{\mathbf{T}}_{n+1}^* - \underline{\mathbf{T}}_n^*) \quad (4.262)$$

$$\tilde{\underline{\mathbf{Q}}}^* = \underline{\mathbf{Q}}_n^* + \theta_1 (\underline{\mathbf{Q}}_{n+1}^* - \underline{\mathbf{Q}}_n^*) \quad (4.263)$$

これらを式(4.234)(4.235)に代入し、 $\tilde{\mathfrak{R}}$ および $\tilde{\mathfrak{R}}^p$ を算定する。

SSpj 法を用いて連立方程式(4.248)(4.249)を解く場合、式(4.251)～(4.255)に現れる節点変位および水圧を決定するための未知ベクトル、

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \quad (4.264)$$

を反復法により求める必要がある。まず、第*i*回目の試行値に対する不平衡力 $\boldsymbol{\varphi}^i$ を以下のように書くこととする。

$$\boldsymbol{\varphi}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{ui} \\ \boldsymbol{\varphi}^{pi} \end{bmatrix} \quad (4.265)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varphi}^{ui} = - \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \tilde{\mathbf{S}}^n dV - \mathbf{C} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}^i - \mathbf{M} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}^i + \tilde{\mathbf{Q}}^i \tilde{\underline{\mathbf{p}}}^i + \tilde{\mathfrak{R}}^i \quad (4.266)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{pi} = \tilde{\mathbf{G}}^i \tilde{\underline{\mathbf{p}}}^i + \tilde{\mathbf{R}}^i \tilde{\underline{\mathbf{p}}}^i + \tilde{\mathbf{Q}}^{Ti} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}^i + \tilde{\mathbf{M}}^i \tilde{\underline{\mathbf{u}}}^i - \tilde{\mathfrak{R}}^{pi} \quad (4.267)$$

ここで、第*i*+1回目の試行値 $\boldsymbol{\gamma}^{i+1}$ を、

$$\boldsymbol{\gamma}^{i+1} = \boldsymbol{\gamma}^i + \Delta \boldsymbol{\gamma}^i \quad (4.268)$$

により求めるものとする、第*i*+1回目の試行値に対する不平衡力は、近似的に次式で表される。

$$\boldsymbol{\varphi}^{i+1} = \boldsymbol{\varphi}^i + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right)^i \Delta \boldsymbol{\gamma}^i \quad (4.269)$$

ここに、

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right)^i = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^u}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right)^i & \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^u}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)^i \\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right)^i & \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)^i \end{bmatrix} \quad (4.270)$$

であり、式(4.270)の各成分は以下のとおり与えられる。

まず、式(4.162)に準じて、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^u}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right)^i &= - \left[(\mathbf{K}_L)^i + (\mathbf{K}_{NL})^i - \left(\frac{\partial (\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{p}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i \right] \theta_p \frac{\Delta t^p}{p!} \\ &\quad - \mathbf{C} \theta_{p-1} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} - \mathbf{M} \theta_{p-2} \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \end{aligned} \quad (4.271)$$

となる。次に、 $\boldsymbol{\varphi}^p$ の $\boldsymbol{\alpha}$ での偏微分は以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right)^i &= \mathbf{Q}^T \theta_{p-1} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} + \hat{\mathbf{M}}^i \theta_{p-2} \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial (\mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i + \left(\frac{\partial (\mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i + \left(\frac{\partial (\mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i + \left(\frac{\partial (\hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i \right] \theta_p \frac{\Delta t^p}{p!} \end{aligned} \quad (4.272)$$

ここに、右辺大括弧内の第1項は、式(4.177)で与えられる。また、式(4.177)の導出と同様にして、大括弧内の第2~4項は以下のとおりとなる。

$$\left(\frac{\partial (\mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i = \int_{\Omega_0} J^i \frac{n}{K_f} \tilde{p}^i \hat{\mathbf{H}}^T \left[(\hat{\mathbf{C}}^{-T})^i (\mathbf{B}_L)^i \right] dV \quad (4.273)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial (\mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i \\ &= \int_{\Omega_0} (\hat{\mathbf{H}}^T)^i J^i (\tilde{\mathbf{u}}^T)^i (\mathbf{B}_L^T)^i \left[(\hat{\mathbf{C}}^{-1})^i \left\{ (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^i \right\}^T - 2 \{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1} \}^i \right] (\mathbf{B}_L)^i dV \\ &\quad + \int_{\Omega_0} (\hat{\mathbf{H}}^T)^i J^i (\tilde{\mathbf{u}}^T)^i \mathbf{B}_{NL}^T \llbracket \mathbf{C}^{-1} \rrbracket^i \mathbf{B}_{NL} dV \end{aligned} \quad (4.274)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial (\hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i = \int_{\Omega^0} J^i \rho_f (\hat{\mathbf{B}}^T)^i (\mathbf{q}_{NL3})^i \left[(\hat{\mathbf{C}}^{-T})^i (\mathbf{B}_L)^i \right] dV \\ &\quad - \int_{\Omega^0} \rho_f J^i (\hat{\mathbf{B}}^T)^i (\mathbf{q}_{NL4})^i \mathbf{B}_{NL} dV \end{aligned} \quad (4.275)$$

ここに、

$$\tilde{p} = \hat{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{p}} \quad (4.276)$$

$$\mathbf{q}_{NL3} = \mathbf{kH}\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.277)$$

$$\mathbf{q}_{\text{NL4}} = \begin{bmatrix} q_{\text{NL41}} & q_{\text{NL42}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{\text{NL41}} & q_{\text{NL42}} \end{bmatrix} \quad (4.278)$$

$$\begin{bmatrix} q_{\text{NL41}} \\ q_{\text{NL42}} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}_{\text{NL3}} \quad (4.279)$$

以上より，式(4.272)は以下のとおり与えられる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right)^i &= \mathbf{Q}^i \theta_{p-1} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} + \hat{\mathbf{M}}^i \theta_{p-2} \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \\ &\quad - \left[(\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\mathbf{G}})^i + (\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\mathbf{R}})^i + (\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\mathbf{Q}^{\text{T}}})^i + (\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\hat{\mathbf{M}}})^i \right] \theta_p \frac{\Delta t^p}{p!} \end{aligned} \quad (4.280)$$

ここに，

$$(\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\mathbf{G}})^i = - \left(\frac{\partial (\mathbf{G} \tilde{\mathbf{p}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i \quad (4.281)$$

$$(\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\mathbf{R}})^i = - \left(\frac{\partial (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i \quad (4.282)$$

$$(\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\mathbf{Q}^{\text{T}}})^i = - \left(\frac{\partial (\mathbf{Q}^{\text{T}} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i \quad (4.283)$$

$$(\mathbf{K}_{\text{NL}}^{\hat{\mathbf{M}}})^i = - \left(\frac{\partial (\hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^i \quad (4.284)$$

式(4.270)の $\boldsymbol{\beta}$ による偏微分項は，式(4.254)(4.255)を式(4.266)(4.267)に適用することにより，以下のとおりとなる。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^u}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)^i = \mathbf{Q}^i \frac{\theta_q \Delta t^q}{q!} \quad (4.285)$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)_{n+1}^i = \mathbf{G}^i \frac{\theta_q \Delta t^q}{q!} + \mathbf{R}^i \frac{\theta_{q-1} \Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \quad (4.286)$$

以上より，SSpj 法を適用した場合の地盤変形と水圧の連成解析では，式(4.269)における第 $i+1$ 回目の不平衡力がゼロとなるよう，次式により節点変位および水圧の増分値を求めればよい。

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^u}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right)^i & -\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^u}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right)^i \\ -\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right)^i & -\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right)^i \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\gamma}^i = \boldsymbol{\varphi}^i \quad (4.287)$$

さらに、得られた節点変位および水圧増分により、式(4.268)を用いて第*i*+1回目の試行値 $\boldsymbol{\gamma}^{i+1}$ が与えられる。また、物質表示による大変形解析 (Total Lagrangian 法) での B マトリクスを用いて Green-Lagrange ひずみ増分が、第3章で示した多重せん断モデル構成式を用いて第2Piola-Kirchhoff 応力増分が求められる。

4.5 Updated Lagrangian 法による解析手法の概要

前節では、物質表示に基づく Total Lagrangian 法を用いた大変形解析での解析手法に関して述べた。本節では、空間表示に基づく Updated Lagrangian 法について述べることとするが、解析手法に関する基本的な概念、すなわち、離散化された方程式の反復計算法や動的問題での時間積分法などは、Total Lagrangian 法での説明がそのまま適用できる。そのため、前節と重複する部分に関しては概略を述べるにとどめ、空間表示での Euler-Almansi ひずみおよび Cauchy 応力により表現される成分を含む項に関しては、具体的に定式化の流れを示すこととする。

4.5.1 地盤変形の自重解析

4.4.1 項にならい、地盤の自重解析を対象とする場合、式(4.39)より離散化された運動方程式が以下のように与えられる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + g\mathbf{M}\underline{\mathbf{L}}_v - \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0 \quad (4.288)$$

これを、式(4.41)を用いて、以下のように書き表すこととする。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} = \mathfrak{R} \quad (4.289)$$

$$\mathfrak{R} = -\mathbf{M}g\underline{\mathbf{L}}_v + \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (4.290)$$

なお、これらの方程式において、変位拘束境界 $\partial\Omega_u$ 上の自由度に関する式は取り除かれているものとし、水圧 p には次項で示す定常浸透流解析の解を用いる。

次に、式(4.289)(4.290)で表される方程式を、いくつかのステップに分割し、段階的に荷重を増加させて解く。第*n*荷重ステップまでの解が既知であるとし、第*n*+1荷重ステップにおける式(4.289)を以下のように書き表す。

$$\int_{\Omega_{n+1}} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{n+1} dv_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1} \underline{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathfrak{R}_{n+1} \quad (4.291)$$

ここに、節点変位ベクトル $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$ ，および、これに対する Euler-Almansi ひずみ $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}$ から求めた Cauchy 有効応力 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{n+1}$ の第 i 回目の試行値を、それぞれ $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i$ ， $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{n+1}^i$ と表すこととする。

第 i 回目の試行値に対する不平衡力を $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i$ とすると、これは式(4.291)より以下のとおり与えられる。

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i = - \int_{\Omega_{n+1}^i} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{n+1}^i dv_{n+1}^i - \mathbf{Q}_{n+1}^i \underline{\mathbf{p}}_n + \mathfrak{R}_{n+1} \quad (4.292)$$

$$\mathfrak{R}_{n+1} = -\mathbf{M}g_{n+1}\underline{\mathbf{1}}_v + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}_{n+1} dS \quad (4.293)$$

第 $i+1$ 回目の節点変位ベクトルの試行値 $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ を式(4.106)で与えると、第 $i+1$ 回目の試行値に対する不平衡力は、Total Lagrangian 法の場合と同様に式(4.107)(4.108)で表される。ただし、式(4.108)の右边各項は、以下のように与えられるものとする。

$$(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i = \int_{\Omega_{n+1}^i} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i \mathbf{c}_{n+1}^i (\mathbf{b}_L)_{n+1}^i dv_{n+1}^i \quad (4.294)$$

$$(\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i = \int_{\Omega_{n+1}^i} (\mathbf{b}_{NL}^T)_{n+1}^i \llbracket \boldsymbol{\sigma}' \rrbracket_{n+1}^i (\mathbf{b}_{NL})_{n+1}^i dv_{n+1}^i \quad (4.295)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i &= \int_{\Omega_{n+1}^i} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i (\hat{\mathbf{m}}\hat{\mathbf{m}}^T - 2\mathbf{I})(\hat{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{p}})_{n+1}^i (\mathbf{b}_L)_{n+1}^i dv_{n+1}^i \\ &+ \int_{\Omega_{n+1}^i} \mathbf{b}_{NL}^T \llbracket \mathbf{m} \rrbracket (\hat{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{p}})_{n+1}^i \mathbf{b}_{NL} dv_{n+1}^i \end{aligned} \quad (4.296)$$

なお、式(4.296)における \mathbf{c} は、空間表示でのベクトル・マトリクス表示による地盤材料の接線剛性（式(3.271)参照）である。また、式(4.295)で表される大変形解析での幾何学的非線形項における \mathbf{B} マトリクス \mathbf{b}_{NL} および応力 $\llbracket \boldsymbol{\sigma}' \rrbracket$ は、以下のとおり与えられる。

$$\mathbf{b}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & 0 & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \dots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (4.297)$$

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma}' \rrbracket = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & 0 & 0 \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ 0 & 0 & \sigma'_{21} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} \quad (4.298)$$

また、式(4.296)における $\hat{\mathbf{m}}$ は式(4.37)で、一方、 \mathbf{I} および $\llbracket \mathbf{m} \rrbracket$ は以下の式で与えられる。

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.299)$$

$$\llbracket \mathbf{m} \rrbracket = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.300)$$

ここで、式(4.294)(4.295)の導出過程を、以下で詳しく述べることにする。まず、

$$\delta \mathbf{E} = \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) = \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F}) \quad (4.301)$$

の関係を式(4.118)に適用し、接線剛性テンソル \mathbb{C} の対称性を利用すると、以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \Delta \delta w'_L &= \int_{\Omega_0} (\mathbb{C} : \mathbf{F}^T \text{grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{F}) : \mathbf{F}^T \text{grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F} dV \\ &= \int_{\Omega_0} \mathbf{F} (\mathbb{C} : \mathbf{F}^T \text{grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{F}) \mathbf{F}^T : \text{grad} \delta \mathbf{u} dV \\ &= \int_{\Omega_0} \text{grad} \delta \mathbf{u} : \mathbf{J} \mathbf{c} : \text{grad} \Delta \mathbf{u} dV = \int_{\Omega} \text{grad} \delta \mathbf{u} : \mathbf{c} : \text{grad} \Delta \mathbf{u} dv \end{aligned} \quad (4.302)$$

これを、式(4.27)の節点変位と式(4.25)の補間関数を用いてベクトル・マトリクス形式に書き直すと、

$$\Delta \delta w'_L = \int_{\Omega} (\mathbf{b}_L \delta \mathbf{u})^T \mathbf{c}_{bL} \Delta \mathbf{u} dv = \delta \mathbf{u}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \mathbf{c}_{bL} dv \right) \Delta \mathbf{u} \quad (4.303)$$

となり、式(4.294)における接線剛性マトリクスが示された。

同様に、式(4.121)における第 2Piola-Kirchhoff 有効応力を、push-forward することにより Cauchy 有効応力に変換すると、

$$\begin{aligned} \Delta \delta w'_{NL} &= \int_{\Omega_0} \text{grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{F} (J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{F}^{-T}) : \text{grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F} dV \\ &= \int_{\Omega_0} J \text{grad} \Delta \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma}' : \text{grad} \delta \mathbf{u} dV = \int_{\Omega} \text{grad} \Delta \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma}' : \text{grad} \delta \mathbf{u} dv \end{aligned} \quad (4.304)$$

と表せる。これを、節点変位と補間関数を用いて書き下すと、以下のようにになる。

$$\begin{aligned} &\text{grad} \Delta \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma}' : \text{grad} \delta \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{21} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma'_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_1^k + \sigma'_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_1^k & \sigma'_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_1^k + \sigma'_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_1^k \\ \sigma'_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_2^k + \sigma'_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_2^k & \sigma'_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_2^k + \sigma'_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_2^k \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \\ &= \left(\sigma'_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_1^k + \sigma'_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_1^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_1^k \\ &+ \left(\sigma'_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_1^k + \sigma'_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_1^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_1^k \\ &+ \left(\sigma'_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_2^k + \sigma'_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_2^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_2^k \\ &+ \left(\sigma'_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_2^k + \sigma'_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_2^k \right) \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_2^k \end{aligned} \quad (4.305)$$

これをベクトル・マトリクス表示で表すと、式(4.297)(4.298)、および、

$$\mathbf{b}_{\text{NL}} \delta \mathbf{u} = \left[\sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_1^k \quad \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_1^k \quad \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_2^k \quad \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_2^k \right]^T \quad (4.306)$$

の関係を用いて、式(4.295)の接線剛性マトリクスを含む式が以下のように得られる。

$$\Delta \delta w'_{\text{NL}} = \int_{\Omega} (\mathbf{b}_{\text{NL}} \delta \mathbf{u})^T \llbracket \boldsymbol{\sigma}' \rrbracket \mathbf{b}_{\text{NL}} \Delta \mathbf{u} dv = (\delta \mathbf{u})^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{b}_{\text{NL}}^T \llbracket \boldsymbol{\sigma}' \rrbracket \mathbf{b}_{\text{NL}} dv \right) \Delta \mathbf{u} \quad (4.307)$$

次に、式(4.296)を導く。まず、式(4.127)(4.130)に式(4.301)の関係を適用し、

$$\delta \mathbf{C}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1} (\text{grad}^T \delta \mathbf{u} + \text{grad} \delta \mathbf{u}) \mathbf{F}^{-T} \quad (4.308)$$

の関係 (Holzapfel, 2000) を用いると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \delta w_{pL} &= \int_{\Omega_0} p J (\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{F}^T \text{grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F}) (\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{F}^T \text{grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{F}) dV \\ &\quad - \int_{\Omega_0} 2 p J \mathbf{F}^{-1} \text{grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-T} : \mathbf{F}^T \text{grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{F} dV \\ &= \int_{\Omega} p (\mathbf{I} : \text{grad} \delta \mathbf{u}) (\mathbf{I} : \text{grad} \Delta \mathbf{u}) dv - \int_{\Omega} 2 p \text{grad} \delta \mathbf{u} : \text{grad} \Delta \mathbf{u} dv \end{aligned} \quad (4.309)$$

これを、式(4.21)より得られる関係式、

$$\mathbf{I} : \text{grad} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{b}_L \Delta \mathbf{u} \quad (4.310)$$

を用いて離散化すると、以下のように式(4.296)の右辺第1項の成分が求められる。

$$\Delta \delta w_{pL} = (\delta \mathbf{u})^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T [\hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{m}}^T - 2\mathbf{I}] (\hat{\mathbf{H}} \mathbf{p}) \mathbf{b}_L dv \right) \Delta \mathbf{u} \quad (4.311)$$

なお、ここに間隙水圧の離散化に関する式(4.23)を用いた。

一方、式(4.296)の右辺第2項は、式(4.301)を用いて式(4.134)を空間表示に書き直すことにより与えられる。すなわち、

$$\Delta \delta w_{pNL} = \int_{\Omega} p \text{grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{F} \mathbf{C}^{-1} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F} dv = \int_{\Omega} p \text{grad} \Delta \mathbf{u} : \text{grad} \delta \mathbf{u} dv \quad (4.312)$$

これを、節点変位と補間関数を用いて書き下すと、以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned}
& \text{grad} \Delta \mathbf{u} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_2^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \quad (4.313) \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_1^k \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_1^k + \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_1^k \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_1^k \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \Delta u_2^k \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} \delta u_2^k + \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \Delta u_2^k \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} \delta u_2^k
\end{aligned}$$

これに式(4.23)(4.297)(4.300)を適用し、ベクトル・マトリクス表示で表すと、以下のとおり式(4.296)の右辺第2項のマトリクスが示された。

$$\Delta \delta w_{pNL} = \int_{\Omega} (\mathbf{b}_{NL} \delta \mathbf{u})^T p \llbracket \mathbf{m} \rrbracket \mathbf{b}_{NL} \Delta \mathbf{u} dv = (\delta \mathbf{u})^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{b}_{NL}^T \llbracket \mathbf{m} \rrbracket (\hat{\mathbf{H}} \mathbf{p}) \mathbf{b}_{NL} dv \right) \Delta \mathbf{u} \quad (4.314)$$

よって、式(4.107)における第*i*+1回目の不平衡力がゼロとなるよう、次式により節点変位増分を求めればよい。

$$\left[(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i + (\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i - \left(\frac{\partial (\mathbf{Q} \mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1}^i \right] \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i = \boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i \quad (4.315)$$

地盤の自重解析により算定された応力などに対して、下添字 *st* を用いて表示することとすれば、式(4.289)(4.290)より以下の関係が得られる。

$$-\mathbf{M} g \mathbf{I}_v = \int_{\Omega_{st}} (\mathbf{b}_L^T)_{st} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{st} dv_{st} - \mathbf{Q}_{st} \mathbf{p}_{st} - \int_{\partial \Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}_{st} dS \quad (4.316)$$

4.5.2 定常浸透流解析

Updated Lagrangian 法を用いた定常浸透流解析では、Total Lagrangian 法の場合と同様に、離散化された式(4.139)を解く。具体的な解法は 4.4.2 項を参照のこと。なお、Updated Lagrangian 法では、式(4.57)により、節点水圧にかかるマトリクス \mathbf{G}_{n+1} を式(4.145)に代えて以下で与える。

$$\mathbf{G}_{n+1} = \int_{\Omega_{n+1}^i} \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{b}} dv_{n+1}^i \quad (4.317)$$

4.5.3 地盤変形と水圧の連成自重解析

地盤の自重解析と定常浸透流解析とを連成させる場合、式(4.289)(4.142)の連立方程式を解

くこととなる。4.4.3 項の Total Lagrangian 法の場合と同様に、式(4.147)(4.148)のような分割を行うと、連成自重解析において解くべき方程式が以下のように与えられる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} = \mathfrak{R} \quad (4.318)$$

$$\mathbf{G}\underline{\mathbf{p}} = \mathfrak{R}^p \quad (4.319)$$

ここに、

$$\mathfrak{R} = \mathbf{Q}^{fc} \underline{\mathbf{p}}^c - g\mathbf{M}\underline{\mathbf{L}}_v + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (4.320)$$

$$\mathfrak{R}^p = -\mathbf{G}^c \underline{\mathbf{p}}^c + \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}} dS - \hat{\mathbf{M}}g\underline{\mathbf{L}}_v \quad (4.321)$$

これを、いくつかのステップに分けて段階的に荷重を増加させて解く。第 n 荷重ステップまでが既知であるとし、第 $n+1$ 荷重ステップでの釣り合いを考えると、

$$\int_{\Omega_{n+1}} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} dv_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1} \underline{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathfrak{R}_{n+1} \quad (4.322)$$

$$\mathbf{G}_{n+1} \underline{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathfrak{R}_{n+1}^p \quad (4.323)$$

ここで、第 i 回目の試行値に対する不平衡力で、変位および水圧についてまとめたものを $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i$ とし、以下のように表すこととする。

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^i = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}^u)_{n+1}^i \\ (\boldsymbol{\varphi}^p)_{n+1}^i \end{bmatrix} \quad (4.324)$$

ここに、

$$(\boldsymbol{\varphi}^u)_{n+1}^i = - \int_{\Omega_{n+1}^i} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^i dv_{n+1}^i + \mathbf{Q}_{n+1}^i \underline{\mathbf{p}}_{n+1}^i + \mathfrak{R}_{n+1}^i \quad (4.325)$$

$$(\boldsymbol{\varphi}^p)_{n+1}^i = \mathbf{G}_{n+1}^i \underline{\mathbf{p}}_{n+1}^i - (\mathfrak{R}^p)_{n+1}^i \quad (4.326)$$

さらに、Total Lagrangian 法での定式化にならい、節点変位ベクトル $\underline{\mathbf{u}}$ と節点間隙水圧ベクトル $\underline{\mathbf{p}}$ により構成されるベクトルを式(4.158)のように置くと、第 $i+1$ 回目の試行値に対する不平衡力は式(4.160)のとおり与えられる。式(4.160)におけるマトリクス $\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\underline{\boldsymbol{\zeta}}$ は、形式上

は Total Lagrangian 法での式(4.161)と同様であるが、具体的な成分は空間表示により書き表される。以下で、この成分を求めることとする。

まず、地盤の自重解析における式(4.294)～(4.296)を用いて、 $\partial\boldsymbol{\varphi}^u/\partial\underline{\mathbf{u}}$ は以下のように表される。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^u}{\partial \underline{\mathbf{u}}}\right)_{n+1}^i = -(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i - (\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i + \left(\frac{\partial(\mathbf{Qp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}}\right)_{n+1}^i \quad (4.327)$$

次に、 $\boldsymbol{\Phi}^p$ の $\underline{\mathbf{u}}$ による偏微分，すなわち，以下の成分を求める。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^p}{\partial \underline{\mathbf{u}}}\right)_{n+1}^i = \left(\frac{\partial(\mathbf{Gp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}}\right)_{n+1}^i \quad (4.328)$$

この計算を行うため，物質表示における式(4.166)を，以下のように空間表示に書き換える。

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{Gp}) &= \int_{\Omega} \text{div} \Delta \mathbf{u} \text{grad} \hat{h}^T \mathbf{k} \text{grad} p \, dv - \int_{\Omega} (\text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{grad} \hat{h})^T \mathbf{k} (\text{grad} p) \, dv \\ &\quad - \int_{\Omega} (\text{grad} \hat{h})^T \mathbf{k} (\text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{grad} p) \, dv \end{aligned} \quad (4.329)$$

これを，式(4.21)(4.23)(4.297)を用いて離散化すると，以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{Gp})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{b}} \hat{\mathbf{m}}^T \mathbf{b}_L \, dv - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{q}_{NL1} \mathbf{b}_{NL} \, dv - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{q}_{NL2} \mathbf{b}_{NL} \, dv \\ &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{q}_{NL0} \hat{\mathbf{m}}^T \mathbf{b}_L \, dv - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{q}_{NL} \mathbf{b}_{NL} \, dv \end{aligned} \quad (4.330)$$

ここに，

$$\mathbf{q}_{NL0} = \mathbf{k} \hat{\mathbf{b}} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} k_{11} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ k_{22} \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (4.331)$$

$$\mathbf{q}_{NL} = \mathbf{q}_{NL1} + \mathbf{q}_{NL2} \quad (4.332)$$

$$\mathbf{q}_{NL1} = \begin{bmatrix} k_{11} \frac{\partial p}{\partial x_1} & k_{22} \frac{\partial p}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} \frac{\partial p}{\partial x_1} & k_{22} \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (4.333)$$

$$\mathbf{q}_{NL2} = \begin{bmatrix} k_{11} \frac{\partial p}{\partial x_1} & 0 & k_{11} \frac{\partial p}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & k_{22} \frac{\partial p}{\partial x_1} & 0 & k_{22} \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (4.334)$$

これを式(4.328)に代入すると，以下のとおり $\boldsymbol{\Phi}^p$ の $\underline{\mathbf{u}}$ による偏微分が与えられる。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^p}{\partial \underline{\mathbf{u}}}\right)_{n+1}^i = -(\mathbf{K}_{NL}^G)_{n+1}^i \quad (4.335)$$

ここに，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{NL}^G &= - \left(\frac{\partial(\mathbf{G}\underline{\mathbf{p}})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \\
 &= - \int_{\Omega_{n+1}^i} (\hat{\mathbf{b}}^T)_{n+1}^i (\mathbf{q}_{NL0})_{n+1}^i \hat{\mathbf{m}}^T (\mathbf{b}_L)_{n+1}^i dv_{n+1}^i + \int_{\Omega_{n+1}^i} (\hat{\mathbf{b}}^T)_{n+1}^i (\mathbf{q}_{NL})_{n+1}^i (\mathbf{b}_{NL})_{n+1}^i dv_{n+1}^i
 \end{aligned} \tag{4.336}$$

続いて、 φ^u および φ^p の水圧 $\underline{\mathbf{p}}$ による偏微分項は、式(4.57)(4.59)を用いて以下で与えられる。

$$\left(\frac{\partial \varphi^u}{\partial \underline{\mathbf{p}}} \right)_{n+1}^i = \mathbf{Q}_{n+1}^i \tag{4.337}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi^p}{\partial \underline{\mathbf{p}}} \right)_{n+1}^i = \mathbf{G}_{n+1}^i \tag{4.338}$$

以上をまとめると、

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\zeta}} \right)_{n+1}^i = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \varphi^u}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i & \mathbf{Q}_{n+1}^i \\ -(\mathbf{K}_{NL}^G)_{n+1}^i & \mathbf{G}_{n+1}^i \end{bmatrix} \tag{4.339}$$

となり、Total Lagrangian 法の場合の式(4.184)と形式的には等しくなる。ただし、Updated Lagrangian 法におけるその成分は、式(4.336)などに明らかなように空間表示に基づいて定式化がなされている。

よって、以上より、Total Lagrangian 法と同様に第 $i+1$ 回目の不平衡力がゼロとなるよう、式(4.185)により節点変位および水圧の増分を求めればよい。

4.5.4 地盤変形の動的解析

本項以降では、Updated Lagrangian 法を用いて動的解析を行う際に必要な定式化について述べる。まず、Total Lagrangian 法での定式化に基づき、式(4.39)において地震動入力基盤に対する地盤節点の相対変位を新たな変位の定義とし、さらに速度比例型の粘性減衰項を付加すると、次式が与えられる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\underline{\mathbf{u}}} + \mathbf{M}\ddot{\underline{\mathbf{u}}} = -\ddot{u}_g \mathbf{M}\mathbf{I} - \mathbf{M}g\mathbf{L}_v + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS \tag{4.340}$$

これに、地盤の自重解析により得られた式(4.316)を代入すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\underline{\dot{\mathbf{u}}} + \mathbf{M}\underline{\ddot{\mathbf{u}}} \\ & = -\ddot{u}_g \mathbf{M}\underline{\mathbf{I}} + \int_{\Omega_{st}} (\mathbf{b}_L^T)_{st} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{st} dv_{st} - \mathbf{Q}_{st}\underline{\mathbf{p}}_{st} + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}^* dS \end{aligned} \quad (4.341)$$

ここで、動的解析における境界応力は、式(4.189)に示すとおり、自重解析での値に対する相対値として与える。また、式(4.147)(4.190)のとおり、節点変位および関連するマトリクス類を非拘束自由度と拘束自由度に分割すると、式(4.341)は次式のように表される。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\underline{\dot{\mathbf{u}}} + \mathbf{M}\underline{\ddot{\mathbf{u}}} = \mathfrak{R} \quad (4.342)$$

ここに、

$$\mathfrak{R} = -\ddot{u}_g \mathbf{M}\underline{\mathbf{I}} - \mathbf{C}^c \underline{\dot{\mathbf{u}}}^c - \mathbf{M}^c \underline{\ddot{\mathbf{u}}}^c + \int_{\Omega_{st}} (\mathbf{b}_L^T)_{st} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{st} dv_{st} - \mathbf{Q}_{st}\underline{\mathbf{p}}_{st} + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}^* dS \quad (4.343)$$

式(4.342)に対して、式(4.66)における非排水解析の場合の項を追加して、以下のとおり一般形として与えておく。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv - \int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\mathbf{m}} p^* dv - \mathbf{Q}\underline{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\underline{\dot{\mathbf{u}}} + \mathbf{M}\underline{\ddot{\mathbf{u}}} = \mathfrak{R} \quad (4.344)$$

離散化された運動方程式の時間積分に関しては、Total Lagrangian 法の場合と同様に、第 n 時間ステップまでの変位を既知として、以下に示す各時間積分法により第 $n+1$ 時間ステップの変位を求める。

(a) 中央差分

中央差分法の基本的な概念は、Total Lagrangian 法の定式化 (4.4.4 項) で述べたとおりである。第 n ステップにおける速度および加速度を式(4.195)(4.196)で与えることにより、式(4.200)の関係が得られるので、これにより第 $n+1$ 時間ステップにおける節点変位、第 n 時間ステップにおける節点速度および加速度が求められる。なお、Updated Lagrangian 法では、式(4.198)に代えて、

$$\boldsymbol{\psi}_n = - \int_{\Omega_n} (\mathbf{b}_L^T)_n \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n dv_n + \int_{\Omega} (\mathbf{b}_L^T)_n p_n^* \hat{\mathbf{m}} dv_n + \mathbf{Q}_n \underline{\mathbf{p}}_n + \mathfrak{R}_n \quad (4.345)$$

を用いる。

(b) Newmark 法

基本的な考え方は、4.4.4 項で述べたとおりである。まず、第 $n+1$ 時間ステップにおける離散化された運動方程式が、式(4.344)より以下のとおり書ける。

$$\int_{\Omega_{n+1}} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{n+1} dv_{n+1} - \int_{\Omega} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1} \hat{\mathbf{m}} p_{n+1}^* dv_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1} \underline{\mathbf{p}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1} + \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1} = \mathfrak{R}_{n+1} \quad (4.346)$$

ここで、第*i*回目の試行値に対する不平衡力は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_{n+1}^i &= - \int_{\Omega_{n+1}} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{n+1} dv_{n+1}^i + \int_{\Omega} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i \hat{\mathbf{m}} p_{n+1}^{i*} dv_{n+1}^i \\ &\quad + \mathbf{Q}_{n+1}^i \underline{\mathbf{p}}_{n+1}^i - \mathbf{C} \dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i - \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i + \mathfrak{R}_{n+1} \\ &= \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i + \boldsymbol{\chi}_{n+1}^i \end{aligned} \quad (4.347)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i &= - \int_{\Omega_{n+1}} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{n+1} dv_{n+1}^i + \int_{\Omega} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i \hat{\mathbf{m}} p_{n+1}^{i*} dv_{n+1}^i + \mathbf{Q}_{n+1}^i \underline{\mathbf{p}}_{n+1}^i + \mathfrak{R}_{n+1} \\ \mathfrak{R}_{n+1} &= - (\ddot{u}_g)_{n+1} \mathbf{M} \underline{\mathbf{I}} - \mathbf{C}^c \dot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^c - \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^c + \int_{\Omega_{st}} (\mathbf{b}_L^T)_{st} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{st} dv_{st} \\ &\quad - \mathbf{Q}_{st} \underline{\mathbf{p}}_{st} + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}_{n+1}^* dS \end{aligned} \quad (4.348)$$

であり、 $\boldsymbol{\chi}_{n+1}^i$ は式(4.204)で与えられる。

第*i*+1回目の節点変位の試行値を式(4.206)で表すと、その試行値に対する不平衡力は式(4.207)(4.208)により与えられる。なお、Updated Lagrangian 法では、式(4.209)に代えて以下で \mathbf{P}^* を与える。

$$\mathbf{P}^* = \int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T p^* \hat{\mathbf{m}} dv \quad (4.350)$$

ここで、式(4.350)は非排水解析の場合に生じる項であり、これの節点変位 $\underline{\mathbf{u}}$ による偏微分は、式(4.296)に準じて以下のとおり求められる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i &= - \hat{\mathbf{A}}_{n+1}^i + \int_{\Omega_{n+1}} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i (\hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{m}}^T - 2\mathbf{I}) (p^*)_{n+1}^i (\mathbf{b}_L)_{n+1}^i dv_{n+1}^i \\ &\quad + \int_{\Omega_{n+1}^i} \mathbf{b}_{NL}^T \llbracket \mathbf{m} \rrbracket (p^*)_{n+1}^i \mathbf{b}_{NL} dv_{n+1}^i \end{aligned} \quad (4.351)$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{A}}_{n+1}^i = \int_{\Omega_{n+1}^i} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i \frac{K_f}{n} \hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{m}}^T (\mathbf{b}_L)_{n+1}^i dv_{n+1}^i \quad (4.352)$$

Newmark 法では、第*n*+1時間ステップの第*i*+1回目の反復計算において、節点変位を用いて節点加速度および速度を式(4.214)(4.215)により与える。これにより、第*i*+1回目の試行値に対する不平衡力をゼロとするよう、式(4.217)を用いて節点変位増分 $\Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i$ および第*i*+1

回目の試行値 $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ が求められる。さらに、変位増分より Updated Lagrangian 法での B マトリクスを通じて Euler-Almansi ひずみ増分が求められ、最終的に第 3 章で示した多重せん断モデル構成式を適用することで Cauchy 応力増分が算定される。なお、式(4.217)における Updated Lagrangian 法の場合の各項は、式(4.294)(4.295)(4.296)(4.351)で表される。

(c) Wilson の θ 法

Wilson の θ 法では、第 n 時間ステップの時刻を t とすると、 $t + \theta \Delta t$ (ただし、 $\theta \geq 1.0$) における平衡条件を満足するように非線形反復計算を行う。したがって、基本的には先に述べた Newmark 法における添字 $n+1$ を $t + \theta \Delta t$ に置き換えればよい。詳細は、4.4.4 項における Total Lagrangian 法での定式化を参照のこと。

4.5.5 水圧の動的解析

Updated Lagrangian 法による水圧の動的解析において、離散化された水流の収支バランス式は、Total Lagrangian 法の場合と同様に式(4.224)で表される。ただし、各項の具体的な成分は、式(4.57)(4.59)(4.60)に示すように現配置に基づく空間表示で記述される。差分近似を用いた水流の収支バランス式の解法は、次項の連成解析の説明の際にあわせて述べることにする。

4.5.6 地盤変形と水圧の連成動的解析

Total Lagrangian 法の場合と同様に、時間積分法として SSPj 法を用いて、地盤変形と水圧の連成動的解析を行う。解くべき連立方程式を以下に改めて挙げておく。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv + \mathbf{C} \dot{\underline{\mathbf{u}}} + \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}} - \mathbf{Q} \underline{\mathbf{p}} = \mathfrak{R} \quad (4.353)$$

$$\mathbf{G} \underline{\mathbf{p}} + \mathbf{R} \dot{\underline{\mathbf{p}}} + \mathbf{Q}^T \dot{\underline{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{M}} \ddot{\underline{\mathbf{u}}} = \mathfrak{R}^p \quad (4.354)$$

ここに、

$$\mathfrak{R} = -\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_g \mathbf{M} \underline{\mathbf{I}} - \mathbf{C}^c \dot{\underline{\mathbf{u}}}^c - \mathbf{M}^c \ddot{\underline{\mathbf{u}}}^c + \int_{\Omega_{st}} (\mathbf{b}_L^T)_{st} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{st} dv_{st} - \mathbf{Q}_{st} \underline{\mathbf{p}}_{st} + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}^* dS \quad (4.355)$$

$$\mathfrak{R}^p = \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}}^* dS + \mathbf{G}_{st} \underline{\mathbf{p}}_{st} - (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}}_{st}) g \underline{\mathbf{L}}_v \quad (4.356)$$

ここで、Total Lagrangian 法の場合と同様に、節点変位および間隙水圧ベクトル、また関連するマトリクス類を、式(4.230)(4.231)などのように非拘束自由度、拘束自由度に分割し、さ

らに非拘束自由度に関する添字を省略して書くことにすると、次式が得られる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{Q} \mathbf{p} = \mathfrak{R} \quad (4.357)$$

$$\mathbf{G} \mathbf{p} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}} = \mathfrak{R}^p \quad (4.358)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = & -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} - \mathbf{C}^c \dot{\mathbf{u}}^c - \mathbf{M}^c \ddot{\mathbf{u}}^c + \mathbf{Q}^{fc} \mathbf{p}^c \\ & + \int_{\Omega_{st}} (\mathbf{b}_L^T)_{st} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{st} dv_{st} - \mathbf{Q}_{st} \mathbf{p}_{st} + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}^* dS \end{aligned} \quad (4.359)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^p = & -\mathbf{G}^c \mathbf{p}^c - \mathbf{R}^c \dot{\mathbf{p}}^c - \mathbf{Q}^{cfT} \dot{\mathbf{u}}^c - \hat{\mathbf{M}}^{cf} \ddot{\mathbf{u}}^c + \int_{\partial\Omega_{0q}} \hat{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Q}}^* dS \\ & + \mathbf{G}_{st} \mathbf{p}_{st} - (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}}_{st}) g \mathbf{I}_v \end{aligned} \quad (4.360)$$

SSpj 法では、時間ステップ t_n から $t_{n+1} (= t_n + \Delta t)$ の間で、式(4.236)～(4.247)の関係を仮定する。これらの仮定を、式(4.357)(4.358)に対して適用し、それらの両辺に重み関数 W を乗じて $0 \sim \Delta t$ の区間で積分を行い、さらに両辺を $\int_0^{\Delta t} W d\tau$ で割ると次式を得る。

$$\tilde{\mathfrak{R}} - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{b}}_L^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' d\tilde{v} - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{M} \tilde{\ddot{\mathbf{u}}} + \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{p}} = 0 \quad (4.361)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{R}} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \tilde{\mathbf{Q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{M}} \tilde{\ddot{\mathbf{u}}} - \tilde{\mathfrak{R}}^p = 0 \quad (4.362)$$

ここに、

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = \hat{\boldsymbol{\sigma}}'(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (4.363)$$

であり、 $\tilde{\mathbf{u}}$ 、 $\tilde{\mathbf{p}}$ などは、Total Lagrangian 法と同様に式(4.251)～(4.256)で与えられる。

また、境界上での拘束変位、間隙水圧、境界応力、境界間隙水流入量も、Total Lagrangian 法における式(4.257)～(4.263)をそのまま適用する。

SSpj 法により連成動的解析を行う場合、節点変位および水圧を求めるために、式(4.264)で表される未知ベクトルを算定する必要がある。まず、第 i 回目の試行値に対する不平衡力 $\boldsymbol{\varphi}^i$ を以下のように書き表す。

$$\boldsymbol{\varphi}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{ui} \\ \boldsymbol{\varphi}^{pi} \end{bmatrix} \quad (4.364)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varphi}^{ui} = - \int_{\Omega^i} (\tilde{\mathbf{b}}_L^T)^i \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'^i dv^i - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{u}}^i - \mathbf{M} \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}^i + \tilde{\mathbf{Q}}^i \tilde{\mathbf{p}}^i + \tilde{\mathfrak{R}}^i \quad (4.365)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{pi} = \tilde{\mathbf{G}}^i \tilde{\mathbf{p}}^i + \tilde{\mathbf{R}}^i \tilde{\mathbf{p}}^i + \tilde{\mathbf{Q}}^{Ti} \tilde{\mathbf{u}}^i + \tilde{\mathbf{M}}^i \tilde{\mathbf{u}}^i - \tilde{\mathfrak{R}}^{pi} \quad (4.366)$$

ここで、第*i*+1回目の試行値 $\boldsymbol{\gamma}^{i+1}$ を式(4.268)で与えるものとする、第*i*+1回目の試行値に対する不平衡力は式(4.269)(4.270)で表される。式(4.270)に現れる不平衡力 $\boldsymbol{\varphi}^i$ の $\boldsymbol{\alpha}$ または $\boldsymbol{\beta}$ による偏微分項は、以下のようにして求められる。

まず、式(4.327)に準じて、 $\partial\boldsymbol{\varphi}^u/\partial\boldsymbol{\alpha}$ は以下のとおり与えられる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^u}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\right)^i &= -\left[\left(\mathbf{K}_L\right)^i + \left(\mathbf{K}_{NL}\right)^i - \left(\frac{\partial(\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{p}})}{\partial\tilde{\mathbf{u}}}\right)^i\right] \theta_p \frac{\Delta t^p}{p!} \\ &\quad - \mathbf{C} \theta_{p-1} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} - \mathbf{M} \theta_{p-2} \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \end{aligned} \quad (4.367)$$

次に、 $\boldsymbol{\varphi}^p$ の $\boldsymbol{\alpha}$ での偏微分は以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^p}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\right)^i &= \mathbf{Q}^T \theta_{p-1} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} + \hat{\mathbf{M}}^i \theta_{p-2} \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial(\mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}})}{\partial\tilde{\mathbf{u}}}\right)^i + \left(\frac{\partial(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}})}{\partial\tilde{\mathbf{u}}}\right)^i + \left(\frac{\partial(\mathbf{Q}^T\tilde{\mathbf{u}})}{\partial\tilde{\mathbf{u}}}\right)^i + \left(\frac{\partial(\hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{u}})}{\partial\tilde{\mathbf{u}}}\right)^i \right] \theta_p \frac{\Delta t^p}{p!} \end{aligned} \quad (4.368)$$

ここに、右辺大括弧内の第1項は、式(4.330)で与えられる。また、式(4.330)の導出過程を参考にし、大括弧内の第2~4項は以下のとおりとなる。

$$\left(\frac{\partial(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}})}{\partial\tilde{\mathbf{u}}}\right)^i = \int_{\Omega^i} \frac{n}{K_f} \tilde{p}^i \hat{\mathbf{H}}^T \left[\hat{\mathbf{m}}^T (\mathbf{b}_L)^i \right] dv^i \quad (4.369)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\mathbf{Q}^T\tilde{\mathbf{u}})}{\partial\tilde{\mathbf{u}}}\right)^i &= \int_{\Omega^i} (\hat{\mathbf{H}}^T)^i (\tilde{\mathbf{u}}^T)^i (\mathbf{b}_L^T)^i (\hat{\mathbf{m}}\hat{\mathbf{m}}^T - 2\mathbf{I}) (\mathbf{b}_L)^i dv^i \\ &\quad + \int_{\Omega^i} (\hat{\mathbf{H}}^T)^i (\tilde{\mathbf{u}}^T)^i \mathbf{b}_{NL}^T [\mathbf{m}] \mathbf{b}_{NL} dv^i \end{aligned} \quad (4.370)$$

$$\left(\frac{\partial(\hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{u}})}{\partial\tilde{\mathbf{u}}}\right)^i = \int_{\Omega^i} \rho_f (\hat{\mathbf{b}}^T)^i (\mathbf{q}_{NL3})^i \left[\hat{\mathbf{m}}^T (\mathbf{b}_L)^i \right] dv^i - \int_{\Omega^i} \rho_f (\hat{\mathbf{b}}^T)^i (\mathbf{q}_{NL4})^i (\mathbf{b}_{NL})^i dv^i \quad (4.371)$$

ここに、式(4.276)~(4.279)の関係を用いた。

最後に、 $\boldsymbol{\varphi}^u$ 、 $\boldsymbol{\varphi}^p$ の $\boldsymbol{\beta}$ による偏微分項は、式(4.254)(4.255)を式(4.365)(4.366)に適用することにより、以下のとおり与えられる。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^n}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right)^i = \mathbf{Q}^i \frac{\theta_q \Delta t^q}{q!} \quad (4.372)$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^p}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right)_{n+1}^i = \mathbf{G}^i \frac{\theta_q \Delta t^q}{q!} + \mathbf{R}^i \frac{\theta_{q-1} \Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \quad (4.373)$$

なお、 $\boldsymbol{\beta}$ による偏微分項は、Total Lagrangian法での式(4.285)(4.286)と形式的には等しいが、Updated Lagrangian法における右辺のマトリクスは、空間表示により表された式(4.57)(4.59)となっている。

以上より、SSpj法を適用した場合の地盤変形と水圧の連成解析では、第*i*+1回目の不平衡力がゼロとなるよう、式(4.287)により節点変位および水圧の増分値を求めればよい。さらに、空間表示による大変形解析(Updated Lagrangian法)での \mathbf{B} マトリクスを用いてEuler-Almansiひずみが求められ、それを第3章で示した多重せん断モデル構成式に適用することでCauchy応力が算定される。

4.6 Shear Locking 現象の回避

有限要素法により数値解析を行うにあたり、その解析精度に影響を与える要因の一つとしてShear Locking現象の存在が挙げられる。Shear Locking現象とは、せん断剛性が体積弾性係数に比べて著しく低下すると、要素のある特定のモード(アワグラスモード)での変形が抑制されるという数値解析上の現象である(例えば、Molenkampら(1992))。この現象により、本来生じるはずである変形量と比較して、全体系の変位応答が著しく抑制される場合がある。この数値解析上の問題を回避するため、要素積分を行う際に、等方成分に対するガウス積分の次数を低減する方法、すなわちSRI法(Hughes, 1980)が一般的に用いられる。なお、ここに、偏差成分に関しては低減次数は採用せず、通常どおりの積分次数を用いて計算を行う。

まず、微小変形解析の場合、ひずみ増分テンソル $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ を以下のように、等方成分と偏差成分とに分解する。

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{1}{2} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.374)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_q = \left(\mathbf{N} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.375)$$

ここに、 \mathbf{I} 、 \mathbf{N} は、それぞれ2階、4階の単位テンソルとするであり、ひずみの成分分解のためのprojection tensorとなっている。

これらをベクトル・マトリクス表示で表すと、以下のとおりとなる。

$$\delta \hat{\mathbf{e}}_p = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^T \delta \hat{\mathbf{e}} \quad (4.376)$$

$$\delta \hat{\mathbf{e}}_q = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^T \right) \delta \hat{\mathbf{e}} \quad (4.377)$$

ここで、ひずみベクトルは、節点変位および微小変形理論での \mathbf{B} マトリクスを用いて、

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (4.378)$$

と表せるので、 \mathbf{B} マトリクスもひずみベクトルに準じて以下のように分解すればよい。

$$\mathbf{B}_p = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^T \mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B} \quad (4.379)$$

$$\mathbf{B}_q = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^T \right) \mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{B} \quad (4.380)$$

ここに、

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (4.381)$$

次に、空間表示による Updated Lagrangian 法では、微小変形解析の場合と同様に、projection tensor を用いて Euler-Almansi ひずみテンソルが以下のように分解される。

$$\delta \mathbf{e}_p = \frac{1}{2} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \delta \mathbf{e} \quad (4.382)$$

$$\delta \mathbf{e}_q = \left(\mathbf{N} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : \delta \mathbf{e} \quad (4.383)$$

これらをベクトル・マトリクス表示すると、

$$\delta \hat{\mathbf{e}}_p = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^T \delta \hat{\mathbf{e}} \quad (4.384)$$

$$\delta \hat{\mathbf{e}}_q = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^T \right) \delta \hat{\mathbf{e}} \quad (4.385)$$

となり、ここで式(4.33)を用いれば、Updated Lagrangian 法における \mathbf{B} マトリクス (式(4.34)) が以下のように分解される。

$$\mathbf{b}_{Lp} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^T \mathbf{b}_L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b}_L \quad (4.386)$$

$$\mathbf{b}_{Lq} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^T \right) \mathbf{b}_L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{b}_L \quad (4.387)$$

一方、物質表示による Total Lagrangian 法では、空間表示における式(4.382)(4.383)を pull-back することにより、Green-Lagrange ひずみテンソルが以下のように与えられる。

$$\delta \mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} : \delta \mathbf{E} \quad (4.388)$$

$$\delta \mathbf{E}_q = \left(\mathbf{N} - \frac{1}{2} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) : \delta \mathbf{E} \quad (4.389)$$

これらをベクトル・マトリクス表示すると、以下のとおりとなる。

$$\delta \hat{\mathbf{E}}_p = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}} (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^T \delta \hat{\mathbf{E}} \quad (4.390)$$

$$\delta \hat{\mathbf{E}}_q = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}} (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^T \right) \delta \hat{\mathbf{E}} \quad (4.391)$$

ここで、式(4.73)を適用すると、Total Lagrangian 法における \mathbf{B} マトリクス (式(4.74)) が、以下のように等方成分と偏差成分とに分解される。

$$\mathbf{B}_{Lp} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}} (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^T \mathbf{B}_L \quad (4.392)$$

$$\mathbf{B}_{Lq} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}} (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^T \right) \mathbf{B}_L \quad (4.393)$$

以上より、有限要素法による数値解析では、4.4 節および 4.5 節で示した反復解法により変位増分が与えられるので、等方成分と偏差成分とに分解した \mathbf{B} マトリクスを適用することでひずみの等方成分、偏差成分が求められる。さらに、第 2 章および第 3 章で示した構成関係を用いて、接線剛性および応力の等方成分、偏差成分を算定すればよい。第 6 章における要素シミュレーション、および、第 7 章で述べる地盤・構造物系の地震応答解析においても SRI 法を適用し、特に断りがない限り、等方成分に対しては 1 次、偏差成分に対しては 2 次のガウス積分を用いて解析を実施した。

4.7 まとめ

本章では、第 3 章で述べた大変形理論に基づくひずみ空間での多重せん断モデルを、2 次

元平面ひずみ条件での有限要素解析に適用するため、大変形理論の枠組みで支配方程式を表すとともに、有限要素法のための離散化を行った。本章で対象とした支配方程式は、間隙水で満たされた多孔質体に対する運動方程式、および、水流の収支バランス式である。ここでも、現配置に基づく空間表示により表される Updated Lagrangian 法、および、基準配置に基づく物質表示により表される Total Lagrangian 法の両者により定式化を行った。

空間表示による Updated Lagrangian 法での多孔質体の運動方程式および水流の収支バランス式は、Zienkiewicz ら (1982) の定式化 (u-p formulation) を基にして与えた。これに仮想仕事の原理を適用し、有限要素法への導入のため、補間関数および節点変位、節点水圧を用いて離散化を行った。空間表示における Euler-Almansi ひずみは、Updated Lagrangian 法における変位-ひずみマトリクス (B マトリクス) と変位勾配を用いて、節点変位より与えた。なお、Updated Lagrangian 法における B マトリクスは、微小変形解析の場合と同じ形式で与えられる。

物質表示による Total Lagrangian 法での多孔質体の運動方程式および水流の収支バランス式は、空間表示による Updated Lagrangian 法での支配方程式を pull-back することで与えられるものとした。Updated Lagrangian 法の場合と同様に、これに仮想仕事の原理を適用し、有限要素法への導入のため離散化を行った。物質表示における Green-Lagrange ひずみは、Total Lagrangian 法における B マトリクスと変位勾配を用いて、節点変位より与えた。なお、Total Lagrangian 法での B マトリクスには、微小変形解析の B マトリクスと同形式で表される成分と、幾何学的非線形性に伴う成分とが存在する。

以上の離散化された基本方程式を基に、有限要素法による数値解析の方法や手順、動的解析での時間積分法などについて、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の双方で定式化を行った。取り扱った解析の種類としては、物体の運動に起因する慣性力を考慮しない静的解析と、慣性力を考慮する動的解析の 2 種類に大きく分けられる。静的解析としては、地盤変形の自重解析、定常浸透流解析、およびそれらの連成自重解析に関して定式化を行った。一方の動的解析としては、地盤変形の動的解析、水圧の動的解析、およびそれらの連成動的解析を対象とした。地盤変形の動的解析では、時間積分法として、中央差分法、Newmark 法、Wilson の θ 法を取り扱った。他方、地盤と水圧の連成動的解析では、SSpj 法を用いて定式化を行った。

さらに、有限要素法での解析精度に影響を与える Shear Locking 現象を回避するため、微小変形解析および大変形解析の両者に対して、SRI 法 (Hughes, 1980)、すなわち要素積分の際に等方成分に対するガウス積分の次数を低減する方法、の定式化を行った。

第 3 章のまとめで述べたとおり、これらの定式化に基づく有限要素法での数値解析結果は、第 6 章および第 7 章で示すこととする。

第5章 多重せん断モデル型線形弾性体の定式化およびその適用性

5.1 概要

地盤・構造物系の地震時における変形挙動を数値解析により求めようとする場合、地盤のような非線形材料に関する構成式に加え、線形弾性体の構成式が必要とされることがある。その典型的な例としては、護岸・港湾構造物としてのケーソンや防波堤などを含む地盤・構造物系の地震応答解析が挙げられる。また、地盤改良に用いられる剛な改良体なども、線形弾性体の構成式を適用することが可能であると思われる。これらの地盤・構造物系の大変形解析を行うにあたり、微小変形理論での線形弾性体構成式をそのまま大変形解析に適用することも可能ではあるが、後述するように、大ひずみ領域における挙動が現実的でない。

そこで本章では、この問題を解決するため、砂の力学モデルとしてのひずみ空間における多重せん断モデル (Iai & Ozutsumi, 2005) の概念に基づき、新たな線形弾性体の構成式を提案する。第3章で示したように、大変形理論における多重せん断モデル構成式が、材料非線形性および幾何学的非線形性の両者を考慮していたのに対し、ここで提案する多重せん断型線形弾性体モデルでは、材料特性 (多重せん断ばねの応力-ひずみ関係) には線形関係を適用することとしている。以下では、まず、物質表示および空間表示の両者により提案モデルの定式化を行い、その後、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法による弾性体の支配方程式の定式化について述べ、最後に要素シミュレーションによる数値解析例を示す。

5.2 多重せん断モデル型線形弾性体の定式化

5.2.1 微小変形理論における線形弾性体構成式

本項では、大変形解析における線形弾性体の構成式を考える前に、微小ひずみ理論に基づく線形弾性体の構成式について述べる。まず、2次元平面ひずみ条件における線形弾性体の剛性マトリクスは、以下のとおり与えられる (例えば、吉田 (1997))。

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

ここに、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。

ここで、式(5.1)を体積成分（等方成分）とせん断成分（偏差成分）とに分解すると、以下のよう表せる。

$$\mathbf{D} = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

ここに、 K は体積弾性係数、 G はせん断剛性であり、ヤング率およびポアソン比との間に以下の関係がある。

$$K = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.3)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.4)$$

よって、線形弾性体における応力 $\boldsymbol{\sigma}$ とひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ の関係は、以下のとおり書くことができる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = -p\mathbf{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 q^{(i)}\mathbf{n}^{(i)} \quad (5.5)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}\} \quad (5.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}\} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{n}^{(0)T} = \{1 \quad 1 \quad 0\} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{n}^{(1)T} = \{1 \quad -1 \quad 0\} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{n}^{(2)T} = \{0 \quad 0 \quad 1\} \quad (5.10)$$

$$p = -K\varepsilon \quad (5.11)$$

$$q^{(i)} = G\gamma^{(i)} \quad (\text{for } i=1,2) \quad (5.12)$$

であり、式(5.11)(5.12)における体積ひずみ、せん断ひずみは、以下で与えられる。

$$\varepsilon = \mathbf{n}^{(0)T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.13)$$

$$\gamma^{(i)} = \mathbf{n}^{(i)T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{for } i=1,2) \quad (5.14)$$

また、式(5.5)と同様に、応力増分とひずみ増分の関係は、以下のとおり書くことができる。

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.15)$$

ここに、接線剛性マトリクスは、以下のとおり与えられる。

$$\mathbf{D} = K\mathbf{n}^{(0)}\mathbf{n}^{(0)T} + \sum_{i=1}^2 G\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)T} \quad (5.16)$$

さて、ここで、第 2 章で示した微小変形解析における多重せん断モデルの基本形を思い出してみる。テンソル表記された 3 次元での増分形構成式(2.13)を、2 次元ベクトル・マトリクス表示で表すと、式(5.15)に示す増分形構成式に還元される。一方、式(2.14)の接線剛性テンソルは、ダイレイタンスーに関連する項を無視し、以下のように書き換えられる。

$$\mathbf{D} = K_{LU} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)T} + \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)T} \Delta\omega \quad (5.17)$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{n}}^{(0)T} = \{1 \quad 1 \quad 0\} \quad (5.18)$$

$$\hat{\mathbf{n}}^{(i)T} = \{\cos \omega_i \quad -\cos \omega_i \quad \sin \omega_i\} \quad (\text{for } i = 1, \dots, I) \quad (5.19)$$

$$\omega_i = (i-1)\Delta\omega \quad (5.20)$$

$$\Delta\omega = \pi / I \quad (5.21)$$

式(5.16)と式(5.17)を比較すると、 $K_{LU} = K$ 、 $G_{LU}^{(i)} = G/\Delta\omega$ と置き、さらに $I = 2$ とすると、

両者により表される接線剛性マトリクスが一致することがわかる。よって、微小変形解析における線形弾性体構成式は、体積弾性係数およびせん断剛性が定数で与えられる（ばねが 2 本の）多重せん断モデル (Iai ら, 1992 ; Iai & Ozutsumi, 2005) であると解釈することができる。これが、5.2.3 項および 5.2.4 項で述べる多重せん断モデル型線形弾性体の基本概念である。

5.2.2 物質および空間表示での線形弾性型構成式

大変形解析における多重せん断モデル型の線形弾性体構成式の定式化の前に、本項では、微小変形解析で用いた式(5.15)の構成関係を、そのまま大変形解析に対して適用した場合の定式化を示す。第 3 章で述べたように、大変形解析には、基準配置に基づく物質表示により定式化がなされる Total Lagrangian 法、現配置に基づく空間表示により表される Updated Lagrangian 法の 2 種類の方法が存在する。以下では、両者それぞれに対して、式(5.15)の構成関係を適用することとする。なお、次項以降で述べる多重せん断モデル型線形弾性体に対して、本項で述べる構成式を線形弾性型と称し、特に Total Lagrangian 法の場合は線形弾性型 TL モデル、一方、Updated Lagrangian 法の場合は線形弾性型 UL モデルと呼ぶこととする。

まず、Total Lagrangian 法では、物質表示における第 2Piola-Kirchhoff 応力ベクトル $\hat{\mathbf{S}}$ と Green-Lagrange ひずみベクトル $\hat{\mathbf{E}}$ を用いて構成関係が表されるので、線形弾性型 TL モデルの増分形構成式は以下のとおり与えられる。

$$d\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{D}d\hat{\mathbf{E}} \quad (5.22)$$

ここに、接線剛性マトリクスは式(5.16)により与える。

このモデルは、一般に Saint-Venant-Kirchhoff モデルと呼ばれており (久田, 1992; Holzapfel, 2000), 大変形微小ひずみ問題 (すなわち, 大回転現象など) に対して適用するのが正当であるとされている。これは, 5.4 節で後述するように, 一要素モデルに対して一軸圧縮引張のシミュレーションを行った場合, 引張側の大ひずみ領域では荷重が急増し, 逆に圧縮側では荷重がゼロへと向かうという非現実的な解析結果からも明らかである。

次に, Updated Lagrangian 法では, 空間表示での Cauchy 応力ベクトル $\hat{\mathbf{d}}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ と Euler-Almansi ひずみ $\hat{\mathbf{d}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ を用いて構成関係が表されるので, 線形弾性型 UL モデルの増分形構成式は以下のとおり与えられる。

$$\hat{\mathbf{d}}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{d}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (5.23)$$

ここに, 接線剛性マトリクスは式(5.16)で与えられるものとする。

これらのモデルを用いた要素シミュレーションの結果は, 多重せん断型モデルの結果とあわせて 5.4 節で詳しく述べる。

5.2.3 物質表示での多重せん断モデル型線形弾性体

ここでは, 5.2.1 項での帰結を基に, 大変形解析における線形弾性体モデルを表現する構成式として, 第 3 章で示した多重せん断モデルの大変形解析での定式化に準じた, 以下のような構成モデルを提案する。

本項では, Total Lagrangian 法における多重せん断モデル型の線形弾性体構成式の定式化を示す。2 次元平面ひずみ条件を対象とし, 物質表示における第 2Piola-Kirchhoff 応力ベクトル, Green-Lagrange ひずみベクトルを以下のように置く。

$$\hat{\mathbf{S}}^T = \{S_{11} \quad S_{22} \quad S_{12}\} \quad (5.24)$$

$$\hat{\mathbf{E}}^T = \{E_{11} \quad E_{22} \quad 2E_{12}\} \quad (5.25)$$

これにより, 線形弾性体モデルの積分形の基本形を, 第 3 章で示した多重せん断モデルの積分形構成式(3.184)にならい, 以下で与える。

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_p + \hat{\mathbf{S}}_q \quad (5.26)$$

ここに,

$$\hat{\mathbf{S}}_p = -Jp\hat{\mathbf{C}}^{-1} \quad (5.27)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_q = \sum_{i=1}^I q^{(i)} \left(\hat{\mathbf{N}}^{(i)} - \gamma^{(i)} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right) \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (5.28)$$

また,

$$\{\hat{\mathbf{C}}^{-1}\}^T = \{C_{11}^{-1} \quad C_{22}^{-1} \quad C_{12}^{-1}\} \quad (5.29)$$

$$\{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\}^T = \{\cos \omega_i \quad -\cos \omega_i \quad \sin \omega_i\} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (5.30)$$

であり、各多重せん断ばねの角度およびばね間隔は式(5.20)(5.21)で与えられる。

さて、大変形解析における体積ひずみは、第3章で述べたように、Jacobian determinantにより以下のとおり与えられる。

$$\varepsilon = \ln J \quad (5.31)$$

また、多重せん断モデルにおける仮想単純せん断ひずみ成分は、以下のとおり与えられる。

$$\gamma^{(i)} = \{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\}^T \hat{\mathbf{E}} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (5.32)$$

線形弾性体としての積分形の構成式は、式(5.31)および式(5.32)のひずみ成分と、式(5.27)(5.28)における等方圧力、仮想単純せん断応力との関係を、以下に示す線形関係で与えることにより定式化する。

$$p = -K\varepsilon \quad (5.33)$$

$$q^{(i)} = G_v \gamma^{(i)} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (5.34)$$

ここに、

$$G_v = \frac{G}{\sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega} \approx \frac{G}{\pi/2} \quad (5.35)$$

次に、多重せん断モデル型線形弾性体の増分形構成式は、式(5.26)の両辺の物質時間微分をとることにより、以下のとおり与えられる。

$$d\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{D}d\hat{\mathbf{E}} \quad (5.36)$$

ここに、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_q \quad (5.37)$$

式(5.37)における等方成分の接線剛性マトリクスは、式(3.219)からダイレイタンスーに関連する項を省いて、以下で与えられる。

$$\mathbf{D}_p = J(K-p)\hat{\mathbf{C}}^{-1}\{\hat{\mathbf{C}}^{-1}\}^T + 2Jp\{\hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1}\} \quad (5.38)$$

また、偏差成分の接線剛性マトリクスは、式(3.220)に準じて、以下のとおり与えられる。

$$\mathbf{D}_q = \mathbf{D}_{q1} + \mathbf{D}_{q2} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{D}_{q1} = \sum_{i=1}^I (\hat{\mathbf{N}}^{(i)} - \gamma^{(i)} \hat{\mathbf{C}}^{-1}) (G_v \hat{\mathbf{N}}^{(i)} + q^{(i)} \hat{\mathbf{C}}^{-1})^T \Delta \omega \quad (5.40)$$

$$\mathbf{D}_{q_2} = \sum_{i=1}^I 2q^{(i)} \gamma^{(i)} \Delta\omega \left(\left\{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right\} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}}^{-1} (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^T \right) - \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} (\hat{\mathbf{S}}_q)^T + \hat{\mathbf{S}}_q (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^T \right) \quad (5.41)$$

5.2.4 空間表示での多重せん断モデル型線形弾性体

前項と同様にして、本項では、Updated Lagrangian 法における多重せん断モデル型の線形弾性体構成式の定式化を行う。2次元平面ひずみ条件を対象とし、空間表示における Cauchy 応力ベクトル、Euler-Almansi ひずみベクトルを以下のように置く。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T = \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \} \quad (5.42)$$

$$\hat{\mathbf{e}}^T = \{ e_{11} \quad e_{22} \quad 2e_{12} \} \quad (5.43)$$

これらを用いて、多重せん断モデルの積分形を以下で与える。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_p + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_q \quad (5.44)$$

ここに、

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_p = -p \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \quad (5.45)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_q = J^{-1} \sum_{i=1}^I q^{(i)} (\hat{\mathbf{n}}^{(i)} - \gamma^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)}) \Delta\omega \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (5.46)$$

であり、 $\hat{\mathbf{n}}^{(0)}$ は式(5.18)で与える。また、ここでの $\hat{\mathbf{n}}^{(i)}$ は式(3.256)で与えられ、物質表示の仮想単純せん断を表す方向ベクトル成分である式(5.30)を、テンソル表示に戻した後、空間表示へと push-forward することにより得られるベクトルである。

大変形解析における体積ひずみは、空間表示においても、物質表示と同様に式(5.31)で与えられる。また、仮想単純せん断ひずみは以下で与えられる。

$$\gamma^{(i)} = \left\{ \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \right\}^T \hat{\mathbf{e}} = \left\{ \hat{\mathbf{N}}^{(i)} \right\}^T \hat{\mathbf{E}} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (5.47)$$

ここに、仮想単純せん断ひずみは、空間表示、物質表示のいずれにおいても等しくなる。

これは、式(5.47)をテンソル表示で比較すれば、式(3.119)により容易に確認できる。

空間表示での多重せん断モデル型線形弾性体の積分形構成式は、これらのひずみ成分と、式(5.45)(5.46)における等方圧力、仮想単純せん断ひずみとの関係を、物質表示の場合と同様に、式(5.33)(5.34)に示す線形関係で与えることにより定式化する。

次に、多重せん断モデル型線形弾性体の増分形構成式は、Kirchhoff 応力テンソル $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ の Lie 時間微分として与えられる Oldroyd 応力速度 $\text{Oldr}(J\boldsymbol{\sigma})$ 、変形速度テンソル \mathbf{d} (詳細は第3章を参照のこと) を用いて、以下のとおり与えられる。

$$\text{Oldr}(J\boldsymbol{\sigma}) = J\mathbf{C}:\mathbf{d} \quad (5.48)$$

これをベクトル・マトリクス形式で表すと、以下のような増分形の構成式が得られる。

$$\widehat{\text{Oldr}}(J\boldsymbol{\sigma}) = J\mathbf{c}\hat{\mathbf{d}} \quad (5.49)$$

ここに、

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_p + \mathbf{c}_q \quad (5.50)$$

であり、この接線剛性マトリクスの等方成分は、式(3.272)からダイレイタンスーに関する項を除くことにより、以下で与えられる。

$$\mathbf{c}_p = (K - p)\hat{\mathbf{n}}^{(0)}\mathbf{n}^{(0)\text{T}} + 2p\mathbf{I} \quad (5.51)$$

ここに、

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

また、偏差成分の接線剛性マトリクスは、式(3.273)に準じて、以下のとおり与えられる。

$$\mathbf{c}_q = \mathbf{c}_{q1} + \mathbf{c}_{q2} \quad (5.53)$$

ここに、

$$\mathbf{c}_{q1} = J^{-1} \sum_{i=1}^I (\hat{\mathbf{n}}^{(i)} - \gamma^{(i)}\hat{\mathbf{n}}^{(0)}) (G\sqrt{\hat{\mathbf{n}}^{(i)}} + q^{(i)}\hat{\mathbf{n}}^{(0)})^{\text{T}} \Delta\boldsymbol{\omega} \quad (5.54)$$

$$\mathbf{c}_{q2} = \left(\sum_{i=1}^I 2q^{(i)}\gamma^{(i)}\Delta\boldsymbol{\omega} \right) \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}^{(0)}\hat{\mathbf{n}}^{(0)\text{T}} \right) - (\hat{\mathbf{n}}^{(0)}\boldsymbol{\sigma}'_q{}^{\text{T}} + \boldsymbol{\sigma}'_q\hat{\mathbf{n}}^{(0)\text{T}}) \quad (5.55)$$

5.3 大変形解析における弾性体の基本方程式

本節では、全応力で規定される材料としての弾性体に対する基本方程式を、大変形理論の枠組みで与えるとともに、有限要素法への導入のために離散化を行う。弾性体の基本方程式は、第4章で示した多孔質体の運動方程式から間隙水圧の項を落とす（すなわち、有効応力を全応力に置き換える）ことにより得られるため、適宜第4章の定式化を参照して述べることとする。なお、構成式の定式化と同様に、基本方程式に関しても、空間表示による Updated Lagrangian 法、物質表示による Total Lagrangian 法の両者により定式化を行う。

5.3.1 Updated Lagrangian 法による定式化

本項では、空間表示による Updated Lagrangian 法での基本方程式の定式化を行う。弾性体の基本方程式である運動方程式は、空間表示では Cauchy 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ を用いて、以下のとおり表せる (Holzapfel, 2000)。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (5.56)$$

ここに、 ρ : (空間表示での) 弾性体の密度、 \mathbf{g} : 重力加速度ベクトル、 \mathbf{u} : 弾性体の変位ベクトルである。

また、式(5.56)に対する境界条件は、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_{\mathbf{u}} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.58)$$

で与える。ここに、 $\bar{\mathbf{u}}$ は $\partial\Omega_{\mathbf{u}}$ 境界上で規定される変位、 $\bar{\mathbf{t}}$ は $\partial\Omega_{\boldsymbol{\sigma}}$ 境界上で規定される表面力である。一方、初期条件としては、まず対象領域内部において、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \quad (5.59)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad (5.60)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{X}) \quad (5.61)$$

とし、境界上では以下のように与えることとする。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{on } \partial\Omega_{\mathbf{u}} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{X}) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{on } \partial\Omega_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.63)$$

式(5.56)で表される運動方程式は、仮想仕事の原理により以下のとおり書ける。

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e} - (\rho \mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u}] dv - \int_{\partial\Omega_{\boldsymbol{\sigma}}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0 \quad (5.64)$$

ここに、 \mathbf{e} は空間表示における Euler-Almansi ひずみテンソルである。

次に、式(4.21)(4.22)(4.24)に示すように、変位や加速度を補間関数を用いて節点値で表すと、運動方程式(5.64)は式(4.35)に準じて以下のように離散化される。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dv + \mathbf{M}(\mathbf{g}_L + \ddot{\mathbf{u}}) - \int_{\partial\Omega_{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0 \quad (5.65)$$

ここに、質量マトリクスは以下で与えられる。

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dv \quad (5.66)$$

境界応力に関しては、第 4 章での多孔質体の定式化と同様に、面積分を変形前の面積で行うこととし、式(4.41)により定式化を行う。また、ベクトル・マトリクス表示における空間表示でのひずみについても、第 4 章の議論がそのまま適用できるので、式(4.34)で表される空間表示での \mathbf{B} マトリクスおよび式(4.32)の変位勾配を用いて、式(4.45)により Euler-Almansi ひずみベクトルが与えられる。

Updated Lagrangian 法による離散化された運動方程式(5.65)の解法に関しては、第 4 章で述

べた多孔質体の運動方程式とほぼ等しいものとなるので、ここでの詳細な説明は省略する。すなわち、運動方程式(5.65)において時間依存項を無視したつりあい方程式の自重解析を行う場合は、4.5.1項の地盤の自重解析の定式化において、有効応力 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'$ を全応力 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ とするとともに、節点水圧 $\underline{\mathbf{p}}$ に関する項を落とせばよい。また、慣性項を考慮した動的解析を行う際も、4.5.4項の地盤の動的解析の定式化に対して同様の処理を行うことで、弾性体の動的解析における定式化式が得られる。動的解析で用いられる時間積分法としては、多孔質体の場合と同様に、中央差分法、Newmark法、Wilsonの θ 法などが挙げられる。

5.3.2 Total Lagrangian 法による定式化

本項では、物質表示での Total Lagrangian 法における基本方程式の定式化について述べる。弾性体の基本方程式としての運動方程式は、物質表示では第1Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{P} を用いて、以下のように与えられる (Holzapfel, 2000)。

$$\text{Div}\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) + \rho_0(\mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \rho_0(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad (5.67)$$

ここに、 ρ_0 : (物質表示での) 弾性体の密度、 \mathbf{g} : 重力加速度ベクトル、 \mathbf{u} : 弾性体の変位ベクトルである。

また、式(5.67)に対する境界条件は、

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_{0u} \quad (5.68)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_{0\sigma} \quad (5.69)$$

で与える。ここに、 $\bar{\mathbf{u}}$ は $\partial\Omega_{0u}$ 境界上で規定される変位、 $\bar{\mathbf{T}}$ は $\partial\Omega_{0\sigma}$ 境界上で規定される表面力である。一方、初期条件としては、まず対象領域内部では、

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \quad (5.70)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad (5.71)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, 0) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{X}) \quad (5.72)$$

とし、境界上では以下のとおり与えることとする。

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{on } \partial\Omega_{0u} \quad (5.73)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{X})\mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{on } \partial\Omega_{0\sigma} \quad (5.74)$$

なお、第1Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{P} は、空間表示での Cauchy 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ 、および、物質表示での第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} を用いて以下で与えられる。

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}\mathbf{S} \quad (5.75)$$

ここに、 $\boldsymbol{\tau}$ は Kirchhoff 応力テンソル、 \mathbf{F} は変形勾配テンソルである。

式(5.67)の運動方程式は、仮想仕事の原理により、Green-Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} を用いて以下のとおり表せる。

$$\int_{\Omega_0} [\mathbf{S} : \delta \mathbf{E} - (\rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u}] dV - \int_{\partial \Omega_{0\sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (5.76)$$

なお、式(5.76)は、空間表示における運動方程式(5.64)を pull-back し、さらに $\rho J = \rho_0$ の関係を用いることにより得ることもできる。

次に、Updated Lagrangian 法の場合と同様に、変位および加速度を補間関数により節点値を用いて表すと、Total Lagrangian 法での運動方程式(5.76)は以下のように離散化される。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}} dV + \mathbf{M}(\mathbf{g} \mathbf{1}_V + \ddot{\mathbf{u}}) - \int_{\partial \Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS = 0 \quad (5.77)$$

ここに、質量マトリクスは、

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (5.78)$$

で与えられ、 $\rho J = \rho_0$ の関係を考慮すると、式(5.66)に示す Updated Lagrangian 法における質量マトリクスと等価であることがわかる。

なお、物質表示における Green-Lagrange ひずみベクトルは、Total Lagrangian 法での式(4.75)で表される \mathbf{B} マトリクス、および、式(4.72)の変位勾配を用いて、式(4.84)のように与えられる。

Total Lagrangian 法による離散化された運動方程式(5.77)の解法に関しては、第4章の多孔質体の運動方程式に関する議論がほぼそのまま適用できる。すなわち、運動方程式(5.77)において時間依存項を無視した自重解析を行う場合は、4.4.1 項の地盤の自重解析の定式化において、有効応力 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'$ を全応力 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ に置き換え、さらに節点水圧 $\underline{\mathbf{p}}$ に関する項を落とせばよい。また、慣性項を考慮した弾性体の動的解析の場合は、4.4.4 項の地盤の動的解析の定式化に対して、同様の処理を行うことで定式化がなされる。動的解析での時間積分法には、Updated Lagrangian 法の場合と同様に、中央差分法、Newmark 法、Wilson の θ 法などを用いる。

5.4 要素シミュレーション

以上の定式化に基づき、本章で提案する多重せん断型の線形弾性体構成式を用いて、有限要素法による要素シミュレーションを実施した。多重せん断型モデルを用いた大変形解析に加え、解析法による結果の違いを考察するため、5.2.1 項で示した微小変形理論での弾性体構成式を用いる微小変形解析、および、5.2.2 項で示した微小変形解析での構成関係を物質表示もしくは空間表示において適用する大変形解析もあわせて行った。なお、5.2.2 項で述べたように、微小変形解析での接線剛性マトリクスを、物質表示における応力-ひずみ関係に適用したモデルを線形弾性型 TL モデル、一方、空間表示における応力-ひずみ関係に適用したものを線形弾性型 UL モデルと称す。また、5.2.3 項で示したモデルを多重せん断型 TL モデル、5.2.4 項のモデルを多重せん断型 UL モデルと呼ぶこととする。

要素シミュレーションとしては、Bathe (1996) の例題を参考にし、8 節点で構成される

一辺が 2cm の立方体モデルの一軸圧縮引張解析を実施した。図 5.1 に、Bathe の例題におけるモデルの概略図を示す。同図に示すとおり，立方体の左側面は完全固定とし，右側面に一様な強制外力もしくは強制変位（引張を正とする）を与える。右側面の節点は x 方向のみ自由度をもち， y 方向および z 方向には変位が生じないものとする。そのため，有限要素法による数値解析では，2次元 (x - y) 平面ひずみ条件として一軸圧縮引張試験を実施した。また，後で述べるように，線形弾性型 TL 法では圧縮が進むと外力が減少する傾向があるため，ここでは変位制御により解析を行った。なお，弾性体の物性値の設定は，Bathe の例題に準じ，ヤング率 $E = 10^8 \text{ kPa}$ ，ポアソン比 $\nu = 0.30$ とする。

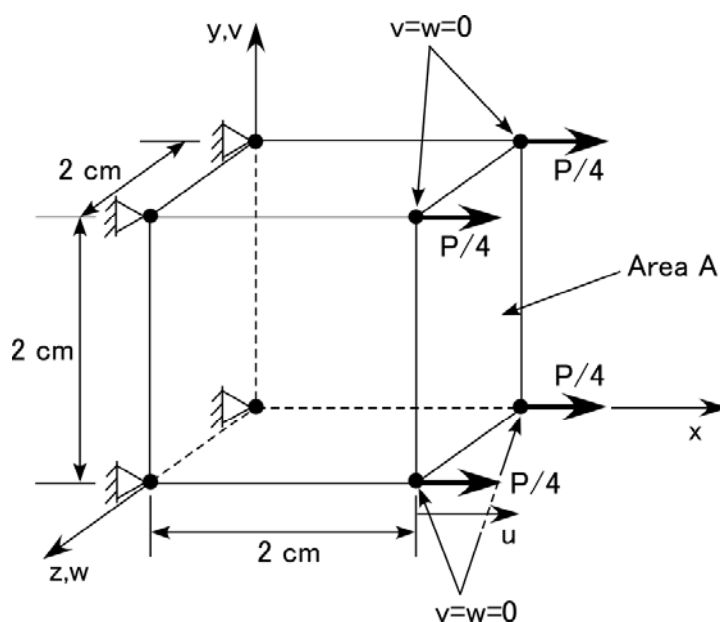


図 5.1 一軸圧縮引張試験概略図 (Bathe (1996) に加筆)

有限要素法により得られた右側面における節点での（強制）変位と荷重関係との関係を図 5.2(a)に示す。まず，微小変形解析では，応力-ひずみ関係と同様に，荷重-変位関係も線形関係で表されることがわかる。一方，大変形解析により得られた結果は，幾何学的非線形性を考慮しているため，いずれの場合も微小変形解析とは異なるものとなっている。大変形解析での荷重-変位関係を具体的に眺めてみると，まず，線形弾性型 TL モデルと線形弾性型 UL モデルでは，微小変形解析の結果を基準として両極端の傾向を示している。特に，線形弾性型 TL モデルにおける引張領域での荷重増加傾向，および，線形弾性型 UL モデルにおける圧縮領域での荷重増加傾向は顕著である。また，線形弾性型 TL 法では，ある一定の圧縮変形が生じると，それ以降は圧縮の進展とともに荷重の減少が始まり，最終的にゼロに至ることがわかる。Bathe においてもこのような荷重-変位関係が得られており (図 5.2(b) 参照)，この荷重ゼロ点は，圧縮側の強制変位が 2cm，すなわち要素の面積 (図 5.1 では体積) がゼロとなっている状態に対応する。これは，ある物体に強制変位を与えて一軸圧縮

すると、途中から荷重がゼロに向かうため、容易に体積がゼロの状態まで物体を圧縮できることに他ならない。現実の材料でこのような性質を有するものは考えにくく、そのため、大変形現象に対して線形弾性型 TL モデルを適用することは適切ではない。一方、線形弾性型 UL モデルに関しても、引張領域において荷重が一定値に収束する傾向にあり、これはすなわち、一定荷重に達した時点で変位が急増することを表す。このように、線形弾性型 UL モデルは、線形弾性型 TL モデルに対して圧縮領域と引張領域とを入れ替えたような性質を示し、やはり大変形現象を適切に評価できるものとは考え難い。

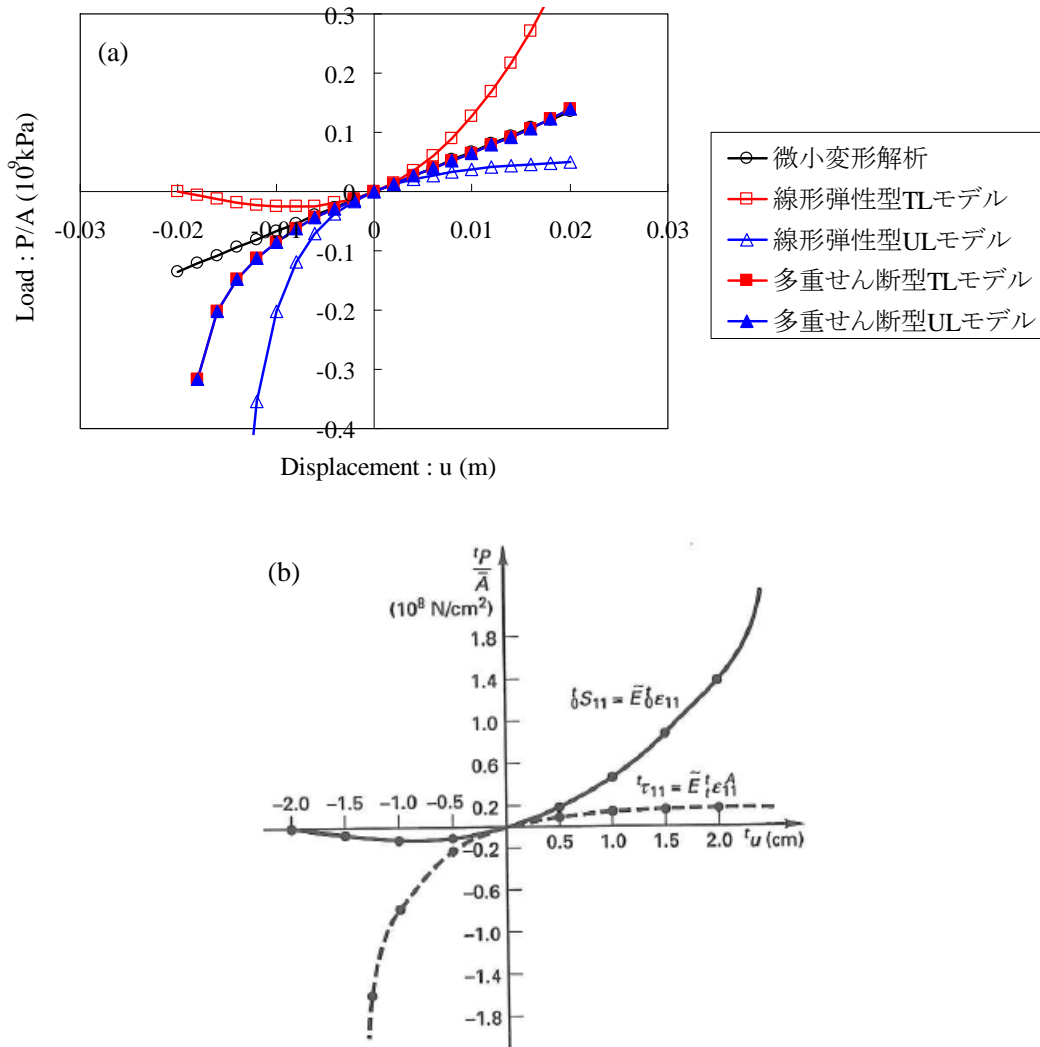


図 5.2 一軸圧縮引張解析における荷重-変位関係：(a) 本解析結果；(b) Bathe (1996) より抜粋 (pp.590 の Figure6.8(a))

続いて、図 5.2(a)における多重せん断モデル型線形弾性体の挙動についての考察を行う。まず、線形弾性型 TL/UL モデルとは異なり、多重せん断型モデルを用いた場合、TL モデル

と UL モデルの荷重-変位関係が一致している。この要因は、物質表示および空間表示のいずれにおいても、線形関係を式(5.33)(5.34)により規定していることによる。本来、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の区別は、基準としている配置（および、それに伴う表示法）の違いによるものであり、対象としている物質の変形・運動に関しては等しいはずである。数値計算での誤差などはあるにしても、両者による荷重-変位関係はほぼ等しくなるべきであり、このことから、本章で提案する多重せん断モデル型の線形弾性体構成式が理に適ったものであることがわかる。多重せん断型モデルでは、線形弾性型 TL/UL モデルで見られたような両極端な傾向は抑えられており、引張領域における荷重-変位関係は、微小変形解析のそれとほぼ等しくなっている。一方、圧縮領域では、微小変形解析と比較すると、圧縮の進展とともに荷重が増加する傾向にある。これは、ある物体を厚みがゼロに近づくまで圧縮しようとする場合、それまでより大きな増分荷重が必要とされるということであり、現実的な挙動を示しているものと思われる。

次に、一軸圧縮引張における応力-ひずみ関係を図 5.3 に示す。同図における横軸は（水平）垂直ひずみであり、Total Lagrangian 法の場合は物質表示での Green-Lagrange ひずみ、Updated Lagrangian 法の場合は空間表示での Euler-Almansi ひずみを表している。一方、縦軸は（水平）垂直応力であり、Total Lagrangian 法の場合は第 2Piola-Kirchhoff 応力、Updated Lagrangian 法の場合は Cauchy 応力で表される。線形弾性型 TL 法および UL 法では、応力-ひずみ関係が線形で表され、微小変形解析でのラインに重なっている。これは、式(5.22)(5.23)に示す物質もしくは空間表示での応力-ひずみ間の線形関係からも明らかである。一方、多重せん断モデル型の線形弾性体では、応力-ひずみ関係は非線形となり、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法とで異なった形状を有している。このことより、多重せん断モデル型線形弾性体における“線形”とは、当該表示での応力とひずみの関係性を指すものではなく、式(5.33)(5.34)に示すように、等方圧力と体積ひずみ、および、仮想単純せん断応力と仮想単純せん断ひずみの関係が線形であることを示すものである。

ここで、図 5.3 の横軸および縦軸を、すべてのケースにおいて、それぞれ Euler-Almansi ひずみ、Cauchy 応力で表示した場合の応力-ひずみ関係を図 5.4 に示す。なお、同図には、参考として微小変形解析での応力-ひずみ関係もあわせて記してある。まず、線形弾性型 UL モデルでは、空間表示での応力-ひずみ間に線形関係を課しているため、図 5.3 と同じ結果となる。また、線形弾性型 TL モデルでは、物質表示で表された図 5.3 の応力、ひずみを、変形勾配を用いて push-forward することにより空間表示に置き換えている。そのため、物質表示では線形であった応力-ひずみ関係が、図 5.4 に示す空間表示では非線形な関係となっている。一方、多重せん断モデル型の線形弾性体では、Cauchy 応力と Euler-Almansi ひずみの関係は非線形にはなるものの、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の結果は等しく描かれている。このことから、同じ定義の応力およびひずみにより整理をすれば、得られる応力-ひずみ関係は等しくなることがわかる。よって、多重せん断モデル型の線形弾性体構成式を用いる場合、Total Lagrangian 法もしくは Updated Lagrangian 法のどちらの解法を選

択しても、本質的な違いは生じない。

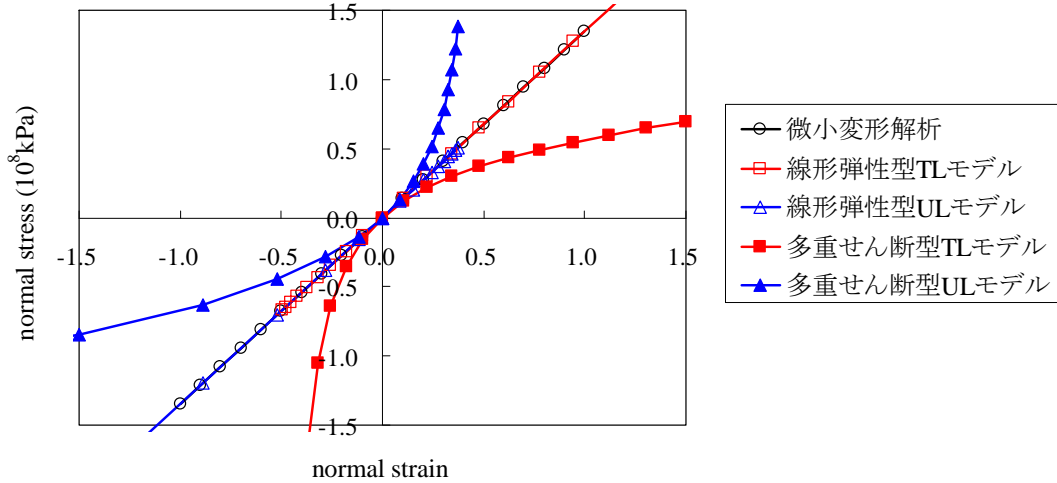


図 5.3 一軸圧縮引張解析における応力-ひずみ関係

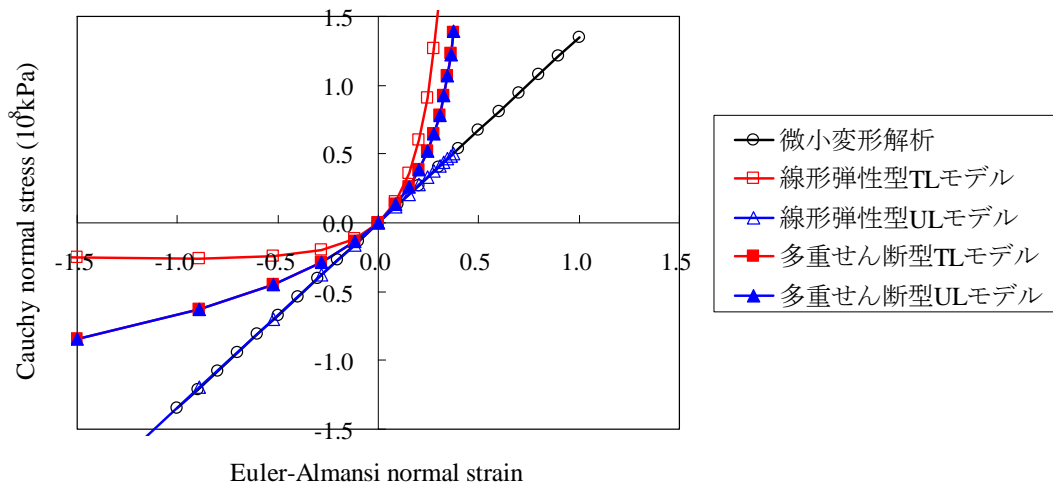


図 5.4 一軸圧縮引張解析における Cauchy 応力-Euler-Almansi ひずみ関係

5.5 まとめ

本章では、砂の力学モデルとしてのひずみ空間における多重せん断モデル (Iai & Ozutsumi, 2005) に基づき、大変形解析で用いる新たな線形弾性体の構成式を提案した。この構成式の基本的な概念は、微小変形解析での線形弾性体構成式が、体積弾性係数およびせん断剛性が定数で与えられる (ばねが 2 本の) 多重せん断モデルと等価であるという事実に基づくものである。大変形理論に基づく多重せん断モデルの構成式を参考にし、等方圧力と体積ひずみ、および、仮想単純せん断応力と仮想単純せん断ひずみの間に線形関係を仮定す

ることで、新たな線形弾性体の定式化を行った。本章で提案する多重せん断モデル型の線形弾性体構成式は、物質表示（第2Piola-Kirchhoff 応力，Green-Lagrange ひずみ）および空間表示（Cauchy 応力，Euler-Almansi ひずみ）の双方において定式化がなされているが、表現方法が異なるのみで、両者の間に本質的な違いはない。また、間隙水で満たされた多孔質体の支配方程式に準じて、大変形解析における弾性体の運動方程式の定式化、および、有限要素法への導入のための離散化を行った。ここでも、物質表示による Total Lagrangian 法、および、空間表示における Updated Lagrangian 法の2種類の解法に関して定式化を行っているが、これらも本質的には等価であり、構成関係において用いられている応力、ひずみ（の表示形式）に応じて解法を使い分ければよい。

本章で提案した多重せん断モデル型の線形弾性体構成式を用いて、有限要素法により一軸圧縮引張試験の要素シミュレーションを行った。その結果、微小変形解析での構成関係を、物質表示（Total Lagrangian 法）もしくは空間表示（Updated Lagrangian 法）の応力とひずみに対して適用した線形弾性型の大変形モデルでは、両者の荷重-変位関係が両極端な挙動を示し、そのいずれもが現実の材料には適用し難いということがわかった。すなわち、線形弾性型 TL モデルでは、引張を加えた場合には荷重が急増する性質を有するのに対し、圧縮を加えた場合には圧縮の進展とともに荷重がゼロに向かい減少する傾向が見られ、容易に体積がゼロの状態にまで物体を圧縮できる結果となった。一方、線形弾性型 UL モデルでは、圧縮を加えた場合には荷重が大幅に増加する傾向を示すのに対し、引張を加えた場合には荷重はある一定値に収束し、それ以降は荷重増分を与えずとも変位が急増する結果となり、線形弾性型 TL モデルの圧縮領域と引張領域とを入れ替えたような荷重-変位関係が得られた。それに対して、多重せん断モデル型の線形弾性体構成式を用いた場合、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の両者の荷重-変位関係は一致し、解析法の違いにより挙動が左右されないという現実的な結果が得られた。さらに、得られた荷重-変位関係は、微小変形解析の構成関係をそのまま用いた線形弾性型大变形モデルと比較して、より現実的な挙動を示す結果となった。また、応力-ひずみ関係に関しても、表示する応力、ひずみの定義を合わせることにより、Total Lagrangian 法もしくは Updated Lagrangian 法のいずれを用いても、等しい結果が得られることが示された。以上より、本章で提案する多重せん断モデル型の線形弾性体構成式は、大变形解析における弾性体構成式として、合理的なものであるといえる。

第 6 章 大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式を用いた要素

シミュレーション

6.1 概要

本章では、第 3 章で示した大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式を用いて、有限要素法による要素シミュレーションを実施する。数値解析においては、第 4 章で示した間隙水で満たされた多孔質体の大変形理論に基づく支配方程式を適用することとし、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の両者により数値解析を行う。

本章での要素シミュレーションの対象としては、砂の非排水単調せん断試験、非排水繰り返しせん断試験、非排水平面ひずみ圧縮試験を取り上げた。いずれの場合も、慣性項を考慮しない静的解析であるため、時間積分法を用いる必要はなく、段階的に荷重を増加させることにより離散化された支配方程式が解かれる。なお、微小変形解析と大変形解析の比較のため、第 2 章における微小変形理論に基づく多重せん断モデル構成式を用いた数値解析もあわせて実施した。

6.2 非排水単調せん断試験

6.2.1 要素シミュレーションの概要

ここでは、一要素の単純モデルに対して、砂の非排水単調せん断試験に対する数値解析を実施した。要素シミュレーションでは、室内実験における状態を再現するため、まずモデルに対して排水条件下で等方圧密を行い、その後、非排水条件下で変位制御により単調的にせん断変形を与えた。図 6.1 に、要素シミュレーションの手順を模式的に示す。

砂の非排水単調せん断試験に関する既往の結果 (Ishihara, 1993 ; Verdugo & Ishihara, 1996 ; Yoshimine & Ishihara, 1998) から、非排水条件下での砂の挙動には、図 6.2 に示すような典型的な定常状態が存在することが明らかにされている。同図に示すように、室内試験では大きく分けて 4 種類の挙動が観測されている。まず、タイプ A では、ほとんど有効拘束圧の減少が見られないまま、せん断応力が単調的に定常状態に達する。続いて、タイプ B では、変相線に至るまで有効拘束圧が減少するものの、せん断応力は単調増加的に定常状態へと向かう。一方、タイプ C では、変相線に至る前にせん断応力が一度ピークを迎え、その後、変相線までは減少傾向を示す。変相線を越えた後は、タイプ B と同様に定常状態へと至る。同図に見られるように、準定常状態が存在するのが、タイプ C の大きな特徴である。最後に、タイプ D では、タイプ C と同様に変相線に至るまでにせん断応力のピークが存在する

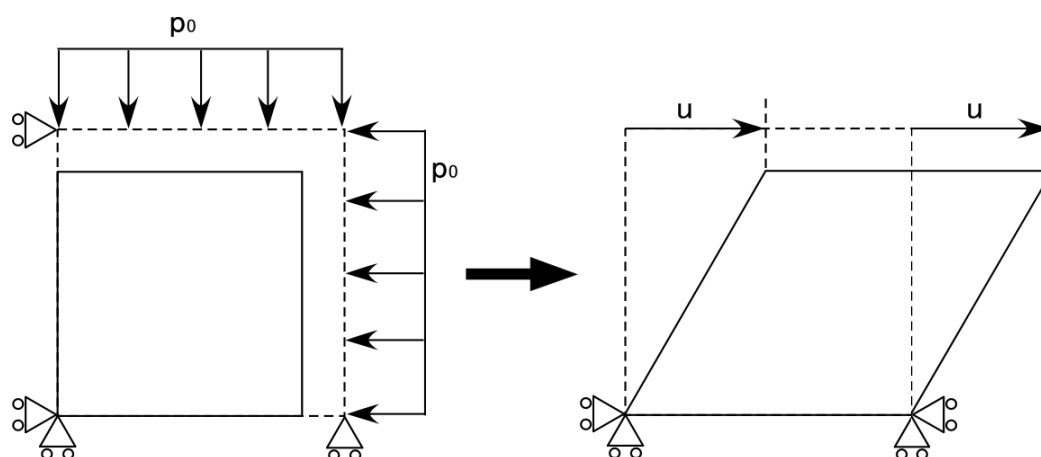


図 6.1 等方圧密-非排水単調せん断試験の要素シミュレーション手順

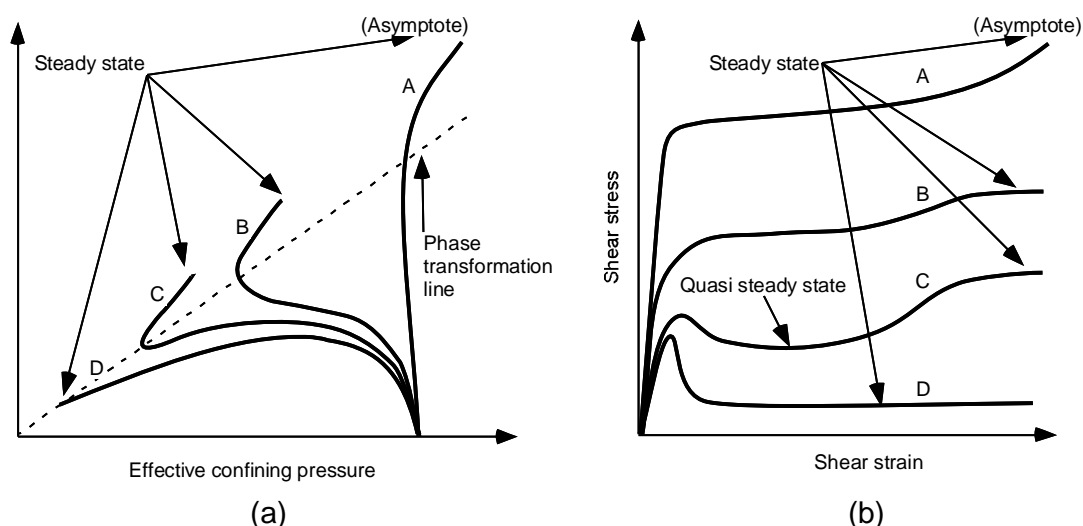


図 6.2 砂の非排水単調せん断試験結果の模式図 (Yoshimine & Ishihara (1998) を修正・加筆) : (a) 有効応力経路 ; (b) せん断応力-せん断ひずみ関係

が、変相線に達しても体積の膨張傾向が見られず、そのまま定常状態へと至る。

ここでの要素シミュレーションの第一の目的は、微小変形解析の結果と比較して、大変形解析での挙動がどのように表されるかということであるが、上に述べた実験結果における定常状態が、要素シミュレーションでいかに再現されるかということも重要な論点である。

6.2.2 微小変形解析での結果

ここでは、まず、第2章で示した微小変形理論に基づく多重せん断モデルを用いた要素シミュレーションの結果を示す。解析に用いたモデルパラメータは、表 6.1 に示すとおり

である。ここに、ダイレイタンシー成分に関連するパラメータである非排水せん断強度 q_{us} は、5,30,200kPa の 3 種類に加え、 $q_{us} = \infty$ とした定常状態を考慮しないケースの解析も実施した。また、初期有効拘束圧の違いが解析結果に及ぼす影響を見るため、単調せん断変形を加える前の等方圧密は、20,50,100,200kPa の 4 種類の拘束条件の下で行った。なお、表 6.1 に示すパラメータは、後述の大変形解析においても共通である。

表 6.1 要素シミュレーションにおけるモデルパラメータ

$K_{L/Ua}$ (kPa)	r_k	l_k	G_{ma} (kPa)	ϕ_f ($^{\circ}$)	h_{max}	ϕ_p ($^{\circ}$)	
220300	0.5	2.0	84490	39.67	0.24	28.0	
$(p_a = 98\text{kPa})$							
r_{ε_d}	$r_{\varepsilon_d^c}$	q_1	q_2	ε_d^{cm}	S_1	c_1	q_{us} (kPa)
0.1	30.0	1.0	1.0	0.2	0.005	1.0	5,30,200, ∞

まず、図 6.3 に非排水せん断強度 q_{us} を 5kPa とした場合の解析結果を示す。同図(a)は有効応力経路、同図(b)(c)はせん断応力-せん断ひずみ関係である。ここに、同図(b)は、せん断ひずみを解析終了時の 200%まで表示した（全体領域での）関係図であり、一方の同図(c)は、同図(b)からせん断ひずみが 1.0%までの部分を抽出して表示したものである。なお、同図の表題において、小ひずみ領域という用語を用いているが、これは本来の意味での $10^{-3}\%$ 程度以下の微小ひずみ（例えば、石原（1976）を表すものではなく、せん断ひずみが 1.0%までの状態を便宜的に表現するものとして用いている。また、同図の縦軸は、せん断応力 τ_{xy} と、以下で与えられる最大せん断応力、

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (6.1)$$

により表されている。微小変形理論において単純せん断変形の状態を考える場合、軸差応力 $(\sigma'_x - \sigma'_y)/2$ は発生しないため、式(6.1)よりせん断応力は最大せん断応力と一致することがわかる。なお、ここで両者による表示を併用しているのは、後述する大変形解析での結果と比較するためであり、大変形解析においては、単純せん断の場合でもせん断応力が最大せん断応力と一致するとは限らない。同図(a)と先に示した図 6.2(a)を比較すると、等方圧密時の拘束圧に関わらずせん断応力は 5kPa に収束しており、いずれの場合も先に述べたタイプ D に近い挙動を示している。ただし、等方圧密終了時の初期拘束圧が 20~100kPa の場合は、わずかではあるがせん断応力が増加しており、変相線を超えた領域での正のダイレイタンシーの影響が見受けられる。この傾向は、図 6.3(b)と図 6.2(b)を比較しても明らかであり、挙動としては限りなくタイプ D に近いものの、わずかにタイプ C の準定常状態が

存在することがわかる。

次に、非排水せん断強度 q_{us} を 30kPa とした場合の解析結果を、図 6.4 に示す。同図より、等方圧密終了時の初期拘束圧に関わらず、いずれの場合においても、せん断応力は非排水せん断強度である 30kPa に収束している。ここでの挙動は、図 6.2 に示したタイプ C の傾向と等しく、まず負のダイレイタンスの影響によりせん断応力はピーク強度から変相線

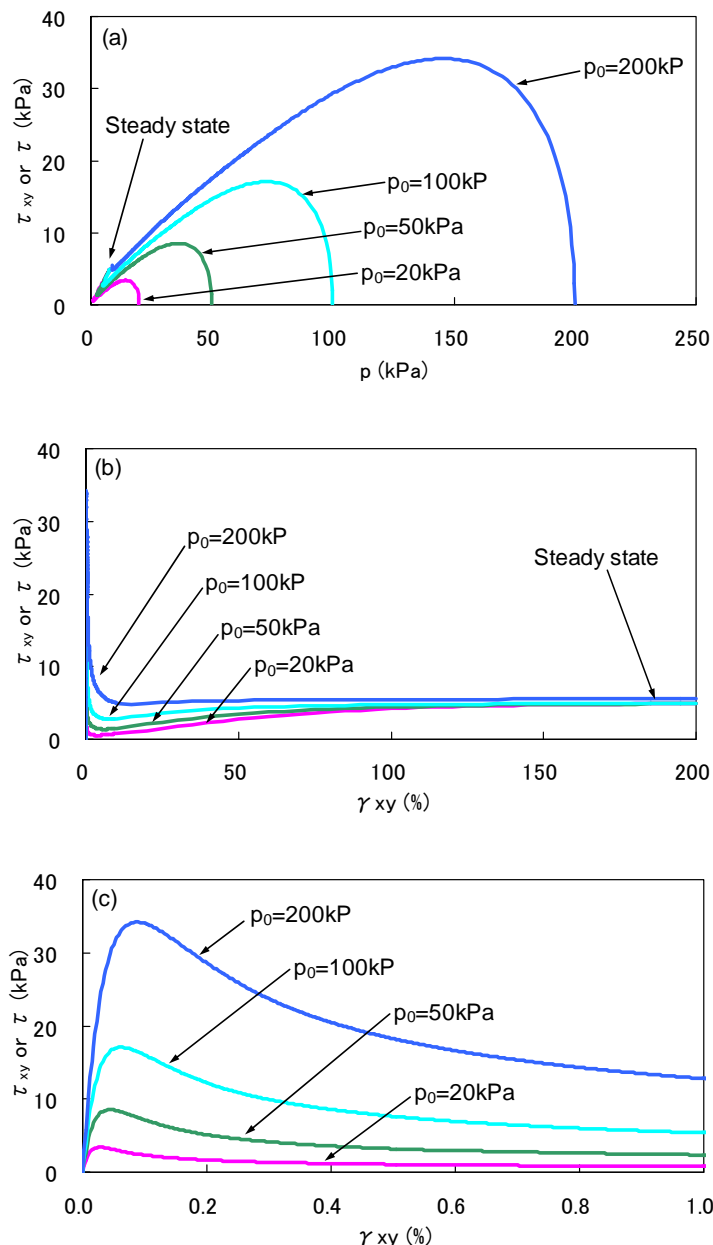


図 6.3 非排水単調せん断解析結果 ($q_{us} = 5 \text{ kPa}$): (a) 有効応力経路; (b) せん断応力-せん断ひずみ関係 (全体図); (c) せん断応力-せん断ひずみ関係 (小ひずみ領域)

へと向かう。さらに、変相線を超えた領域において正のダイレイタンシーの影響が顕著に見られ、最終的に定常状態へと至っている。図 6.3 (c) と図 6.4 (c) を比較すると、定常状態における非排水せん断強度の差異が、せん断ひずみが 1.0% までの挙動に対しても影響を及ぼしていることがわかる。ただし、せん断ひずみが 0.1% までの挙動、すなわち、初期等方状態から変相線へと至る途中のピーク強度位置までは、図 6.3 (c) と図 6.4 (c) の間に際立った違いは見られない。これは、図 6.3 (a) と図 6.4 (a) から見てとることができる。

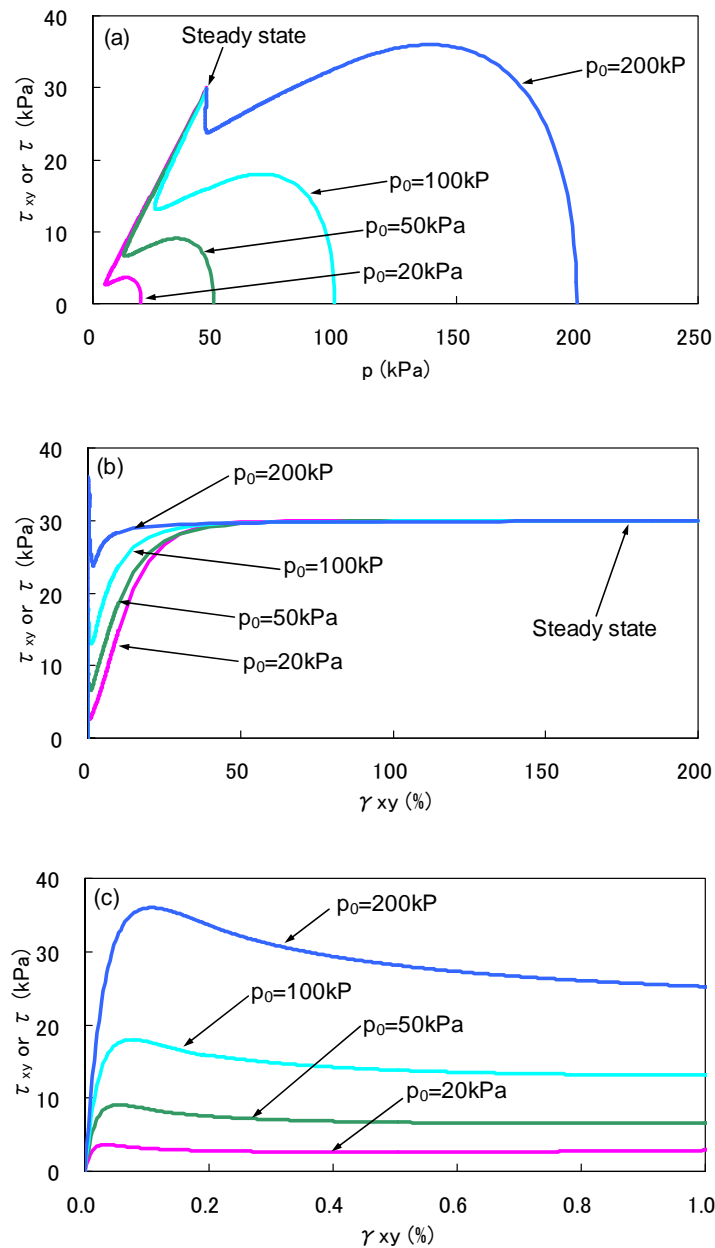


図 6.4 非排水単調せん断解析結果 ($q_{us} = 30 \text{ kPa}$): (a) 有効応力経路; (b) せん断応力-せん断ひずみ関係 (全体図); (c) せん断応力-せん断ひずみ関係 (小ひずみ領域)

続いて、非排水せん断強度 q_{us} を 200kPa とした場合の解析結果を、図 6.5 に示す。この場合も、明らかにタイプ C の挙動であり、準定常状態を経た後で、せん断応力は非排水せん断強度に等しい 200kPa まで上昇し、最終的に定常状態に至っている。同図(c)と図 6.3 (c) および図 6.4(c)を比較すると、ピーク強度に達するまでの領域、すなわち、せん断ひずみが 0.1%以下の領域では、これらの挙動の間に明確な差異は見られない。このことより、多重せん断モデルにおける入力パラメータとしての非排水せん断強度は、ピーク強度以降の変

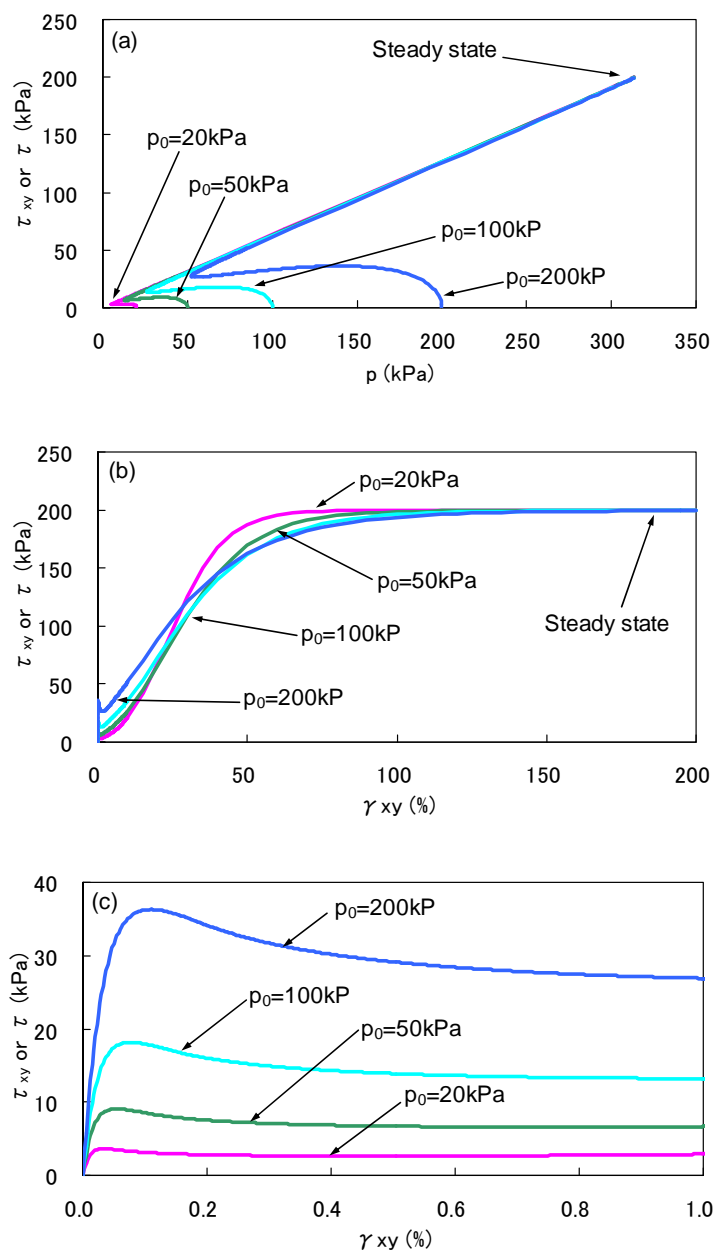


図 6.5 非排水単調せん断解析結果 ($q_{us} = 200$ kPa) : (a) 有効応力経路 ; (b) せん断応力-せん断ひずみ関係 (全体図) ; (c) せん断応力-せん断ひずみ関係 (小ひずみ領域)

相線へと向かう領域、および、変相線を超えて定常状態へと至る領域での挙動に影響を及ぼすものであり、ピーク強度に至るまでの挙動に関してはほぼ寄与しないことがわかる。

最後に、非排水せん断強度を $q_{us} = \infty$ とし、定常状態を考慮しない場合の解析結果を、図 6.6 に示す。同図(a)より、変相線を超えた領域での正のダイレイタンスの発生に伴い、せん断応力および有効拘束圧が非常に大きな値となっているのがわかる。これは、同図(b)を見てもわかるとおり、せん断ひずみが 200%にも達する大きなせん断変形を加えた場合、解

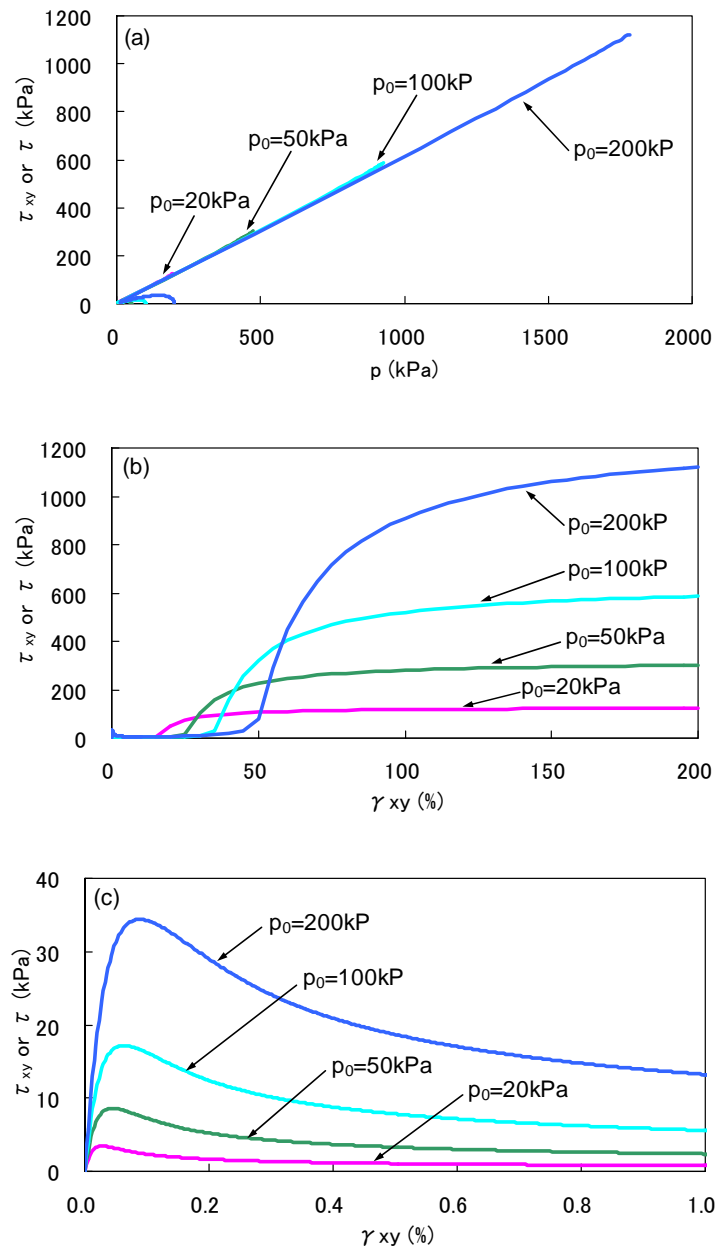


図 6.6 非排水単調せん断解析結果 ($q_{us} = \infty$): (a) 有効応力経路; (b) せん断応力-せん断ひずみ関係 (全体図); (c) せん断応力-せん断ひずみ関係 (小ひずみ領域)

析におけるそれに伴う応力の値は、変相線を境に急増することを意味する。通常、砂質土には定常状態が存在し、ある有限の値として非排水せん断強度が規定されるので、ここに示す挙動は特異なものであり、実際の砂の挙動としては図 6.3～図 6.5 に示す形が一般的である。なお、せん断ひずみが 0.1%に満たない領域では、パラメータとしての非排水せん断強度の影響は小さいため、図 6.6 (c)の挙動は定常状態を考慮した場合のそれとほぼ変わらない。すなわち、発生するせん断ひずみが小さく、ピーク強度に至るまでの領域であれば、非排水せん断強度を与えずとも解析が可能である。しかし、例えば、繰り返し三軸試験や繰り返し中空ねじり試験により液状化抵抗曲線を求める際には、両振幅 5%ひずみを判定基準として用いる。また、次章で示す地震時の地盤・構造物系の液状化解析では、数%から数十%、もしくはそれ以上のひずみ領域を対象とするため、基本的には室内試験結果などから得られた非排水せん断強度を、入力パラメータとして設定する必要があると思われる。

6.2.3 パラメータが解析結果に及ぼす影響

大変形解析による要素シミュレーション結果を示す前に、ここでは、パラメータがどのように解析結果に影響を及ぼすかについて考察する。前項で示した図 6.5 の結果、すなわち、表 6.1 のパラメータを用い、非排水せん断強度を 200kPa とした場合を基本ケースとし、ある特定のパラメータを変更した際の挙動の変化を示す。ここで対象としたパラメータは、収縮的ダイレイタンス成分に影響を及ぼす r_{ε_d} と、過剰間隙水圧上昇の後半における収縮的ダイレイタンス成分を制御するパラメータ q_2 である。

まず、パラメータ r_{ε_d} を変化させた場合の解析結果を、図 6.7 に示す。同図(a)と図 6.2 (a)を比較すると、パラメータが小さい場合 ($r_{\varepsilon_d} = 1, 2$) は、タイプ A に分類されるように、有効拘束圧の減少をほぼ伴わないまま単調的に定常状態に到達する。一方、中程度のパラメータ値 ($r_{\varepsilon_d} = 5, 10$) を用いた場合は、タイプ B の傾向を示しており、明瞭なピーク強度を経ないまま変相線に到達し、さらには定常状態へと至る。パラメータとしてそれ以上の値 ($r_{\varepsilon_d} = 20, 50$) を用いた場合は、タイプ C に示すとおり、ピーク強度に達した後に変相へと向かい、最終的に定常状態へと達する。図 6.7 (b)と図 6.2 (b)の比較からも同様の分類が可能であり、パラメータ r_{ε_d} として大きな値 (50 程度) を用いた場合、タイプ C に示すような準定常状態が明らかに存在することが確認できる。以上より、収縮的ダイレイタンス成分を規定するパラメータ r_{ε_d} を適宜調節することで、図 6.2 に示すような定常状態へと至る種々の挙動を、精度良く再現することが可能であると思われる。

次に、パラメータ q_2 を変化させた場合の解析結果を、図 6.8 に示す。同図(a)と図 6.2 (a)を比較すると、パラメータ q_2 として大きな値 ($q_2 = 2.0, 5.0$) を与えた場合、その挙動はタイプ B に分類することができる。パラメータの値を徐々に小さくすると ($q_2 = 0.5, 1.0$)、タイプ C の挙動を示すようになり、さらに小さい値 ($q_2 = 0, 0.2$) を用いると、その挙動

はタイプDに近いものとなる。図6.8(b)を見ると、中程度のパラメータ(例えば、 $q_2 = 0.5$)を用いた場合、タイプCの特徴である準定常状態が存在することが確認できる。一方、パラメータ q_2 をゼロ、もしくはそれに近い値とした場合、せん断応力はほぼ一定の値をとり変動しない傾向にある。同図より、その値は、設定した非排水せん断強度(200kPa)と比べてかなり小さいものであり、意図した結果とは異なるように思われる。せん断ひずみをさらに限りなく大きくすれば、理論的には目標としたせん断強度が得られるはずである

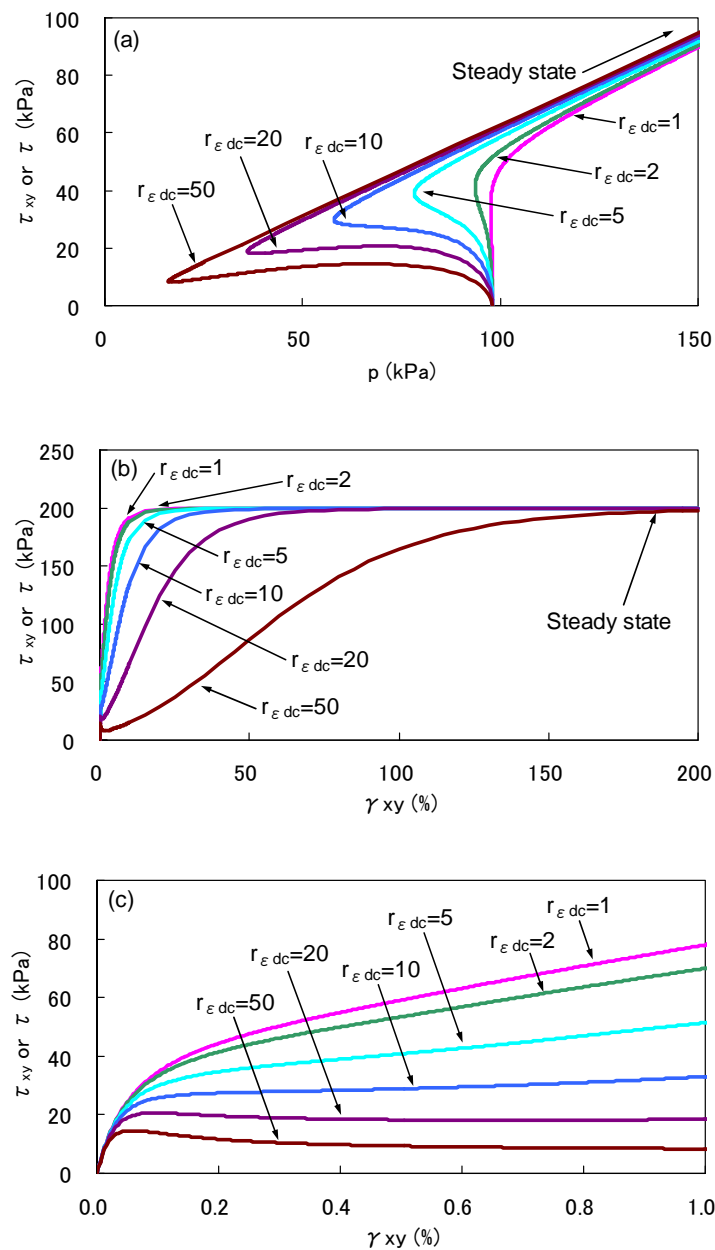


図 6.7 パラメータ $r_{\epsilon dc}$ に対する解析結果の感度 ($q_{us} = 200$ kPa) : (a) 有効応力経路 ; (b) せん断応力-せん断ひずみ関係 (全体図) ; (c) せん断応力-せん断ひずみ関係 (小ひずみ領域)

が、実際にそのようなひずみ領域を考えることは皆無に等しいため、今回対象としたひずみ領域ではタイプDの挙動とみなしてもよいであろう。以上より、パラメータ q_2 についても、その値をうまく調節することにより、図6.2に示す種々の挙動を再現できるものと思われる。なお、タイプDの挙動の再現に関しては、ここでのパラメータ q_2 による制御よりも、入力としての非排水せん断強度により規定されるべきであり、図6.3(a)に示すように、小さいせん断強度を入力すれば再現が可能である。

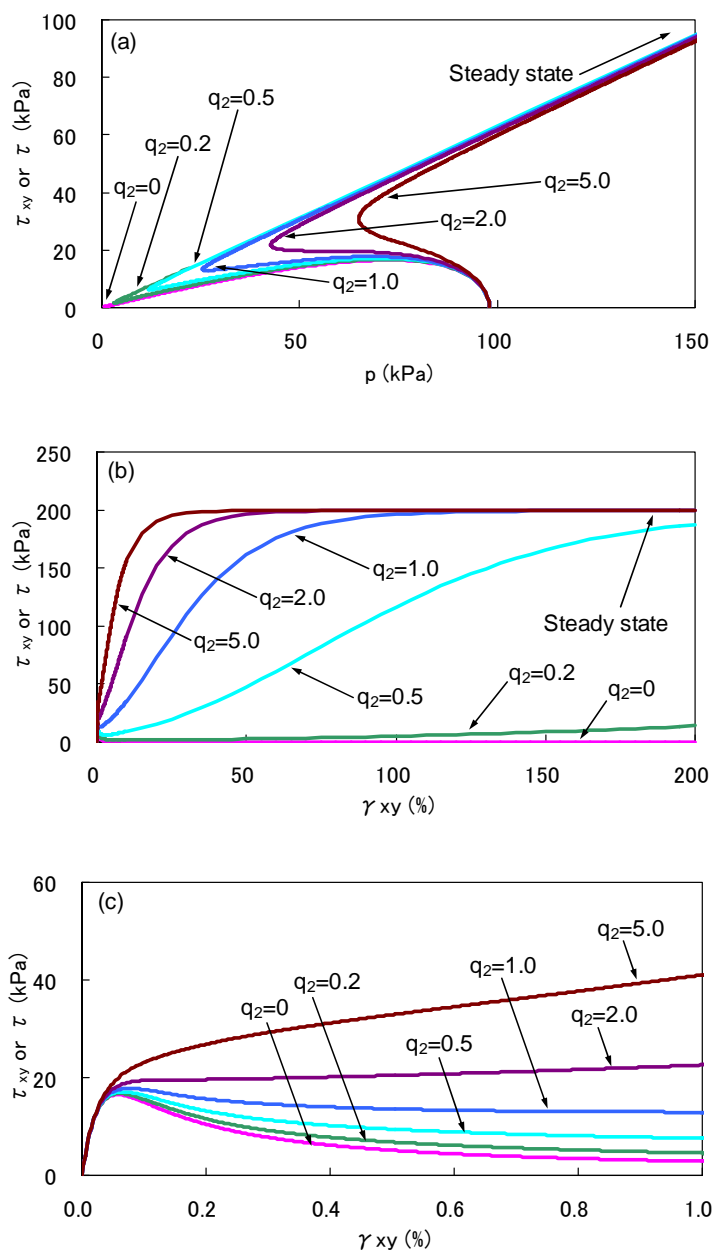


図 6.8 パラメータ q_2 に対する解析結果の感度 ($q_{us} = 200 \text{ kPa}$): (a) 有効応力経路; (b) せん断応力-せん断ひずみ関係 (全体図); (c) せん断応力-せん断ひずみ関係 (小ひずみ領域)

6.2.4 大変形解析での結果

ここでは、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法を用いた、大変形解析での要素シミュレーション結果を示す。いずれの解法の場合にも、結果の表示には空間表示での Cauchy 有効応力および Euler-Almansi ひずみを用いることとする。また、大変形解析では、微小変形解析での σ'_x , σ'_y , τ_{xy} を σ'_{11} , σ'_{22} , σ'_{12} と書き換えることとし、式(6.1)の最大せん断応力を以下で与え直す。

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma'_{11} - \sigma'_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma'_{12})^2} \quad (6.2)$$

なお、式(6.1)と式(6.2)は、表記法は異なるものの、物理的な意味は等価である。大変形解析結果では、せん断応力 σ'_{12} と式(6.2)で表される最大せん断応力とを分けて示す。

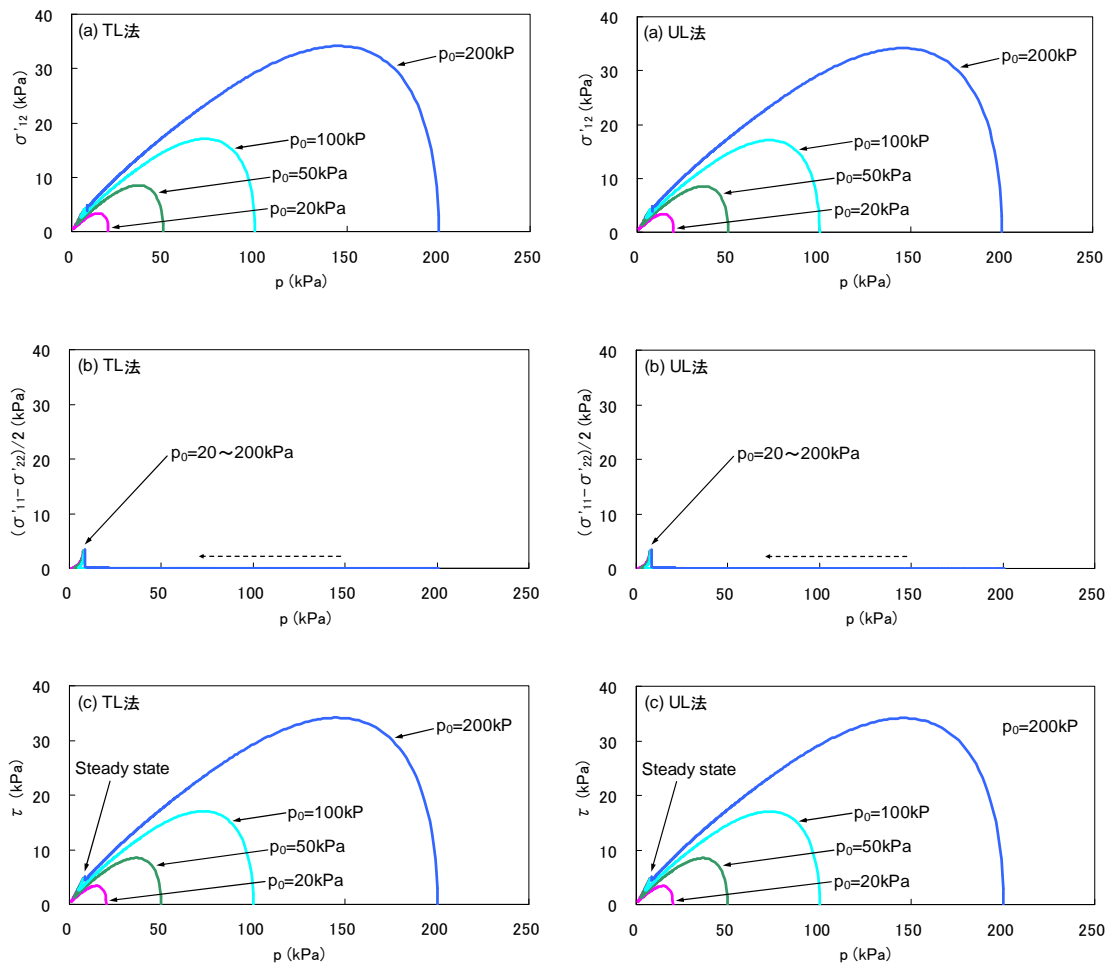


図 6.9 大変形解析における有効応力経路 ($q_{us} = 5\text{kPa}$): (a) せん断応力表示; (b) 軸差応力表示; (c) 最大せん断応力表示

これは、大変形理論のもとでは、幾何学的非線形性が考慮されるため、単調せん断変形の場合でも軸差応力（および軸差ひずみ）が生じるからである。

まず、図 6. 9～図 6. 11 に、非排水せん断強度 q_{us} を 5kPa とした場合の解析結果を示す。図 6. 9 は有効応力経路、図 6. 10 は全体領域での応力-ひずみ関係、図 6. 11 は小ひずみ領域での応力-ひずみ関係である。それぞれの図において、左列が Total Lagrangian 法による結果、一方、右列が Updated Lagrangian 法による結果である。いずれの図においても、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法との間に明瞭な差異は見られず、両者の結果はほぼ完全に一致している。物質表示と空間表示の相互間に、push-forward および pull-back の関係があることを考慮すると、これは理論的には当然の帰結であるが、数値解析では、計算上の誤差などの混入により必ずしも結果が完全に一致するとは限らない。ここでのケースでは、解析対象モデルが一要素であり、条件も単調せん断という基本的なものであったため、数値解析における誤差がほとんど生じなかったものと思われる。したがって、本項では、Total

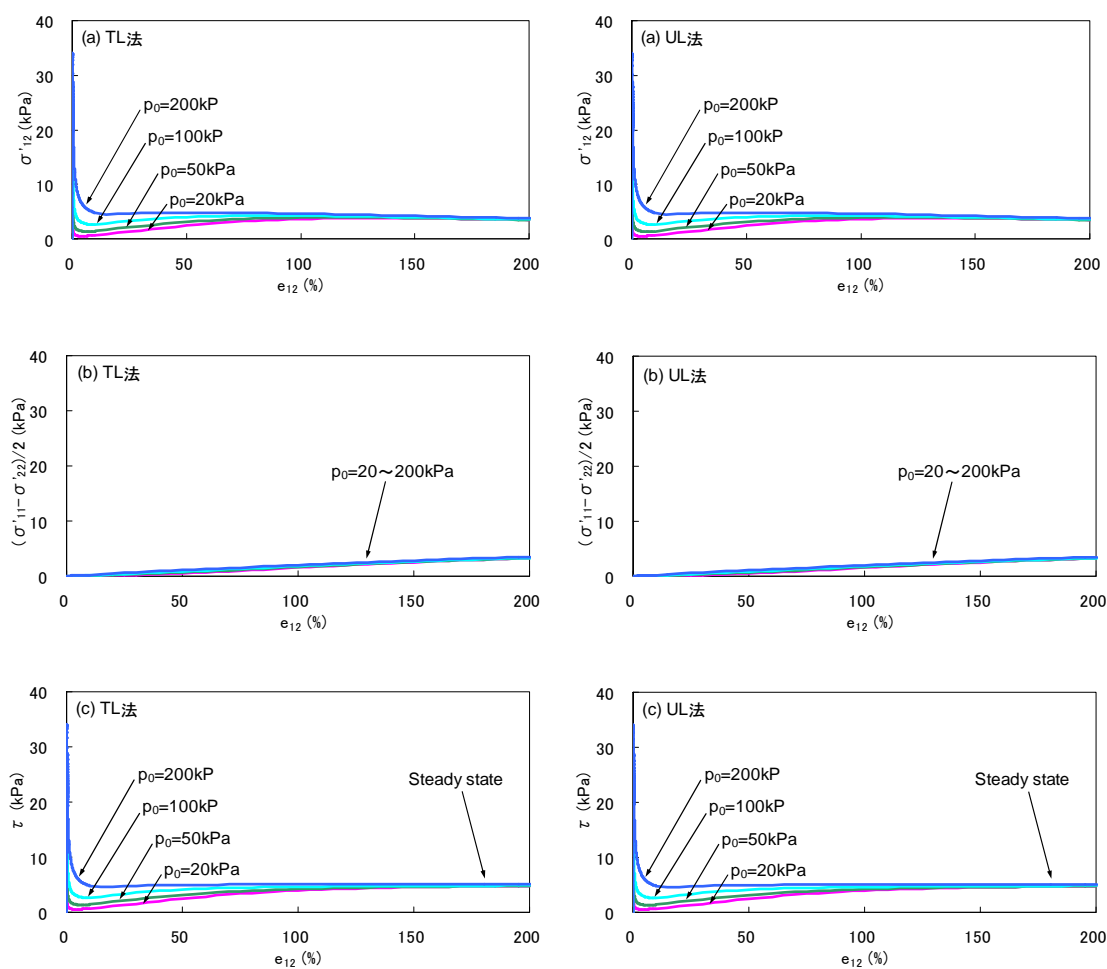


図 6. 10 大変形解析における応力-ひずみ関係（全体図）（ $q_{us} = 5\text{kPa}$ ）：(a) せん断応力表示；(b) 軸差応力表示；(c) 最大せん断応力表示

Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の区別なく、大変形解析により得られた一意な結果として述べることにする。

図 6.9 に示す大変形解析での有効応力経路と、図 6.3 (a)の微小変形解析のそれとを比較すると、図 6.9 (c)のように最大せん断応力で整理すれば、両者が同一の挙動を示していることがわかる。これは、図 6.10 と図 6.3 (b)に示す応力-ひずみ関係に関しても同様である。一方、図 6.9 (a)および図 6.10 (a)に示すように、せん断応力 σ'_{12} は、ひずみが 50%程度の領域（有効応力経路では、変相線を超えて定常状態に向かう中途段階に相当する）までは微小変形解析でのせん断応力と等しいが、それ以降、わずかではあるが減少する傾向が見られる。それとは逆に、図 6.9 (b)および図 6.10 (b)に示す軸差応力は、ひずみの進行とともに徐々にではあるが増大する傾向を有している。この現象は、大変形解析ではせん断変形に伴う回転のモード（幾何学的非線形性）が考慮されるため、変形が大きくなりせん断ひずみが増大すると、せん断応力の鉛直方向の作用面が次第に傾き、その結果として水平方向

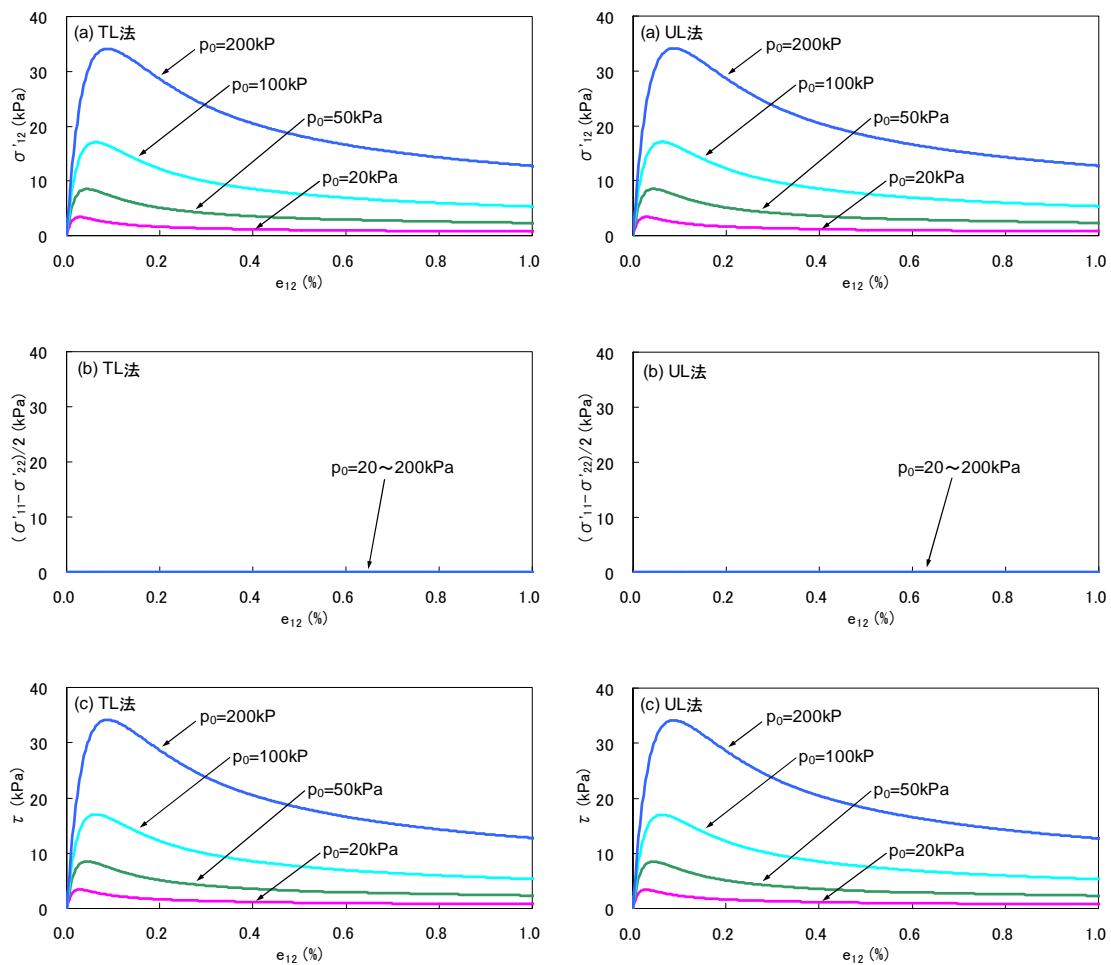


図 6.11 大変形解析における応力-ひずみ関係（小ひずみ領域）（ $q_{us} = 5\text{kPa}$ ）：(a) せん断応力表示；(b) 軸差応力表示；(c) 最大せん断応力表示

の直応力（および、それに伴う軸差応力）が発生することによるものと思われる。図 6. 11 を見ると、せん断ひずみが 1.0%に満たない領域では、幾何学的非線形性の影響はほとんど無視できるため、同図(b)において軸差応力は発生しておらず、同図(a)のせん断応力と同図(c)の最大せん断応力とが一致する結果となっている。このことより、ひずみが数%程度までしか発生しない現象を扱う場合は、微小変形解析でも十分に精度良い結果が得られるが、ひずみが数十%を超えるような現象に対しては、幾何学的非線形性を考慮した大変形解析が必要であると思われる。これは、後述するように、非排水せん断強度を大きく設定した場合、さらに重要な問題となる。

次に、軸差応力もしくは軸差ひずみを横軸に、せん断応力もしくはせん断ひずみを縦軸にとり、図 6. 12 に示すような応力経路およびひずみ経路を考える。同図(a)(b)は応力経路、同図(c)はひずみ経路である。なお、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の結果が等しいため、ここでは両者を併記した形で結果を示す。微小変形解析では、単純せん断変形に伴う応力増分の方向は、せん断応力増分のみに依存しその方向を変えない。一例として、初期拘束圧 200kPa での微小変形解析による結果を図 6. 12 に併記してある。これは、微小変形解析において軸差応力が発生しないことを考えれば、当然の帰結として得られる。一方、大変形解析では、単純せん断変形において回転のモード（幾何学的非線形性）が考慮されるため、図 6. 12 (a)に示すように、回転の影響により応力増分の方向が時々刻々と変化していくのがわかる。拡大表示された同図(b)では、その様子がより顕著に確認できる。また、定常状態に向かうにつれて、いずれの初期有効拘束圧の場合においても、非排水せん断強度（ここでは、5kPa）を半径として描かれた円の円周に沿う形で応力経路が変化していく様子が見てとれる。次に、図 6. 12 (c)に示すひずみ経路では、微小変形解析においては軸差ひずみが発生せず、ひずみ増分はせん断ひずみ成分にのみ依存する。一方、大変形解析では、せん断変形が進展するに従って軸差ひずみも発生し、最終的にはせん断ひずみに等しい程度の軸差ひずみが生じているのがわかる。応力経路の場合と同様に、これも幾何学的非線形性を考慮した結果であり、せん断変形の進行具合に応じてひずみ増分がその向きを変えること、および、せん断ひずみが 200%に達した時点での回転角が $\pi/8$ となることが、同図より確認できる。

次に、非排水せん断強度 q_{us} を 30kPa とした場合の大変形解析結果を、図 6. 13～図 6. 16 に示す。図 6. 13 は有効応力経路、図 6. 14 は全体領域での応力-ひずみ関係、図 6. 15 は小ひずみ領域での応力-ひずみ関係である。また、図 6. 16 は、せん断成分と軸差成分とにより表された応力経路およびひずみ経路である。非排水せん断強度 q_{us} を 5kPa とした場合と同様に、Total Lagrangian 法、Updated Lagrangian 法の両者による結果は等しいため、ここでは特に解析法の区別なく述べることにする。なお、後述する非排水せん断強度 q_{us} を 200kPa および ∞ とした解析結果に関しても、同様である。まず、図 6. 13 に示す有効応力経路より、同図(c)のように最大せん断応力で整理をすると、図 6. 4 (a)における微小変形解析の結果と等しいものとなる。これは、図 6. 14 (c)と図 6. 4 (b)の応力-ひずみ関係を比較することから

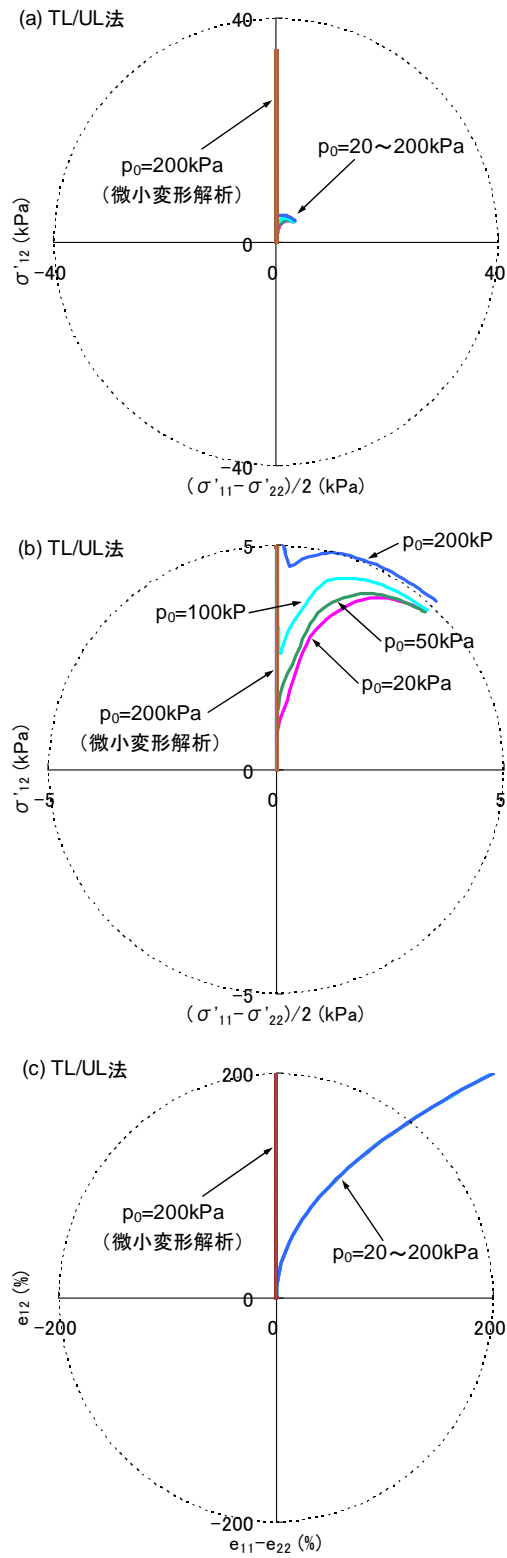


図 6.12 大変形解析における応力経路およびひずみ経路 ($q_{us} = 5\text{kPa}$) : (a) 応力経路 ; (b) 応力経路 (拡大図) ; (c) ひずみ経路

も確認できる。一方、図 6.13 (a)に示すせん断応力は、微小変形解析の場合と異なり、変相線を超えて準定常状態から定常状態へと至る過程で減少傾向を示している。それに対して、図 6.13 (b)より、軸差応力は定常状態に向かうにつれて増加傾向にあることがわかる。これらの傾向は、図 6.14 (a)(b)に示す応力-ひずみ関係においても確認することができる。これは、先に述べたように、せん断変形に伴う回転のモード（幾何学的非線形性）を考慮したためであり、ここでの結果は、非排水せん断強度を $q_{us} = 5\text{kPa}$ とした場合の図 6.9, 図 6.10 よりも、幾何学的非線形性の影響を色濃く表すものとなっている。したがって、図 6.14 (a)(b)からもわかるように、せん断ひずみが 10%を超えるような現象を扱う場合には、大変形解析を適用することが望ましいと言える。一方、せん断ひずみが 1.0%に満たない領域では、微小変形解析でも十分に精度が保たれることが、図 6.15 と図 6.4 (c)を比較することで確認できる。

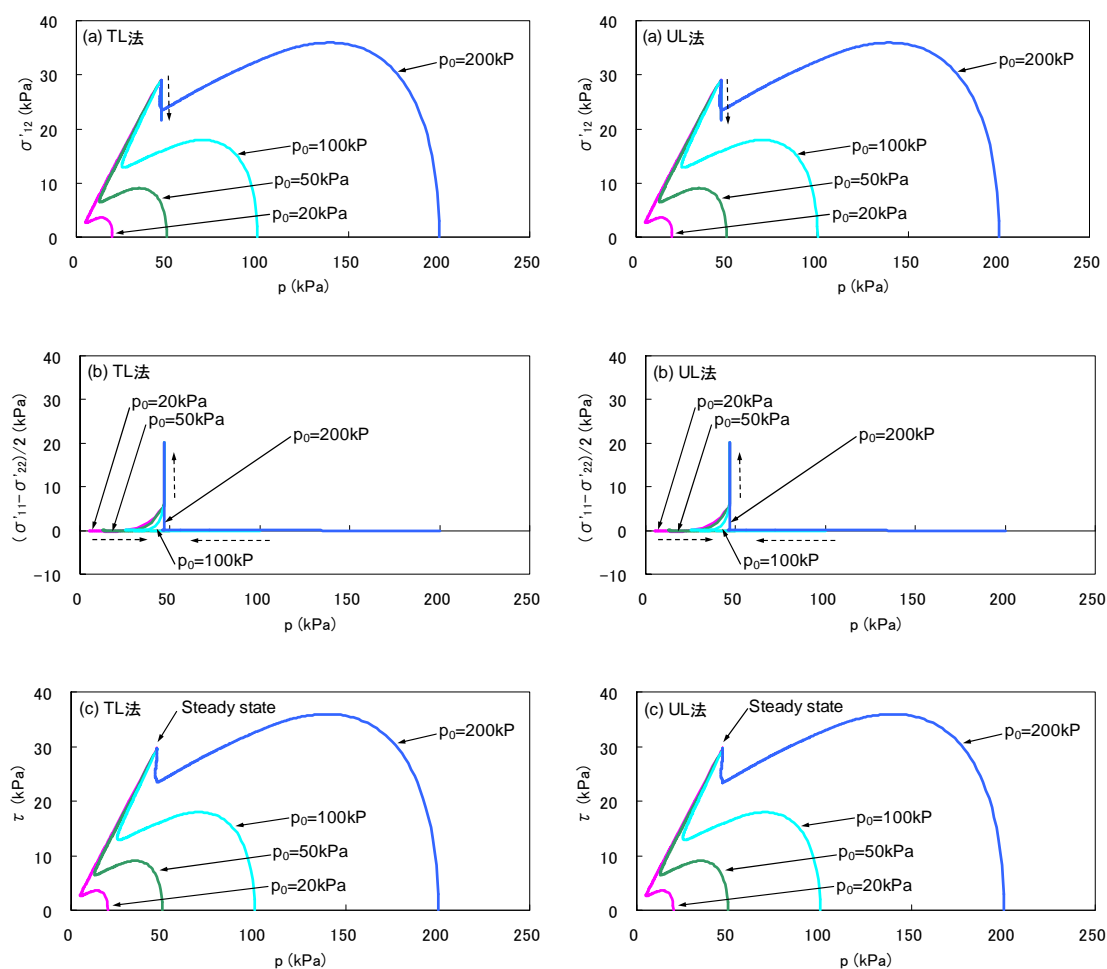


図 6.13 大変形解析における有効応力経路 ($q_{us} = 30\text{kPa}$): (a) せん断応力表示; (b) 軸差応力表示; (c) 最大せん断応力表示

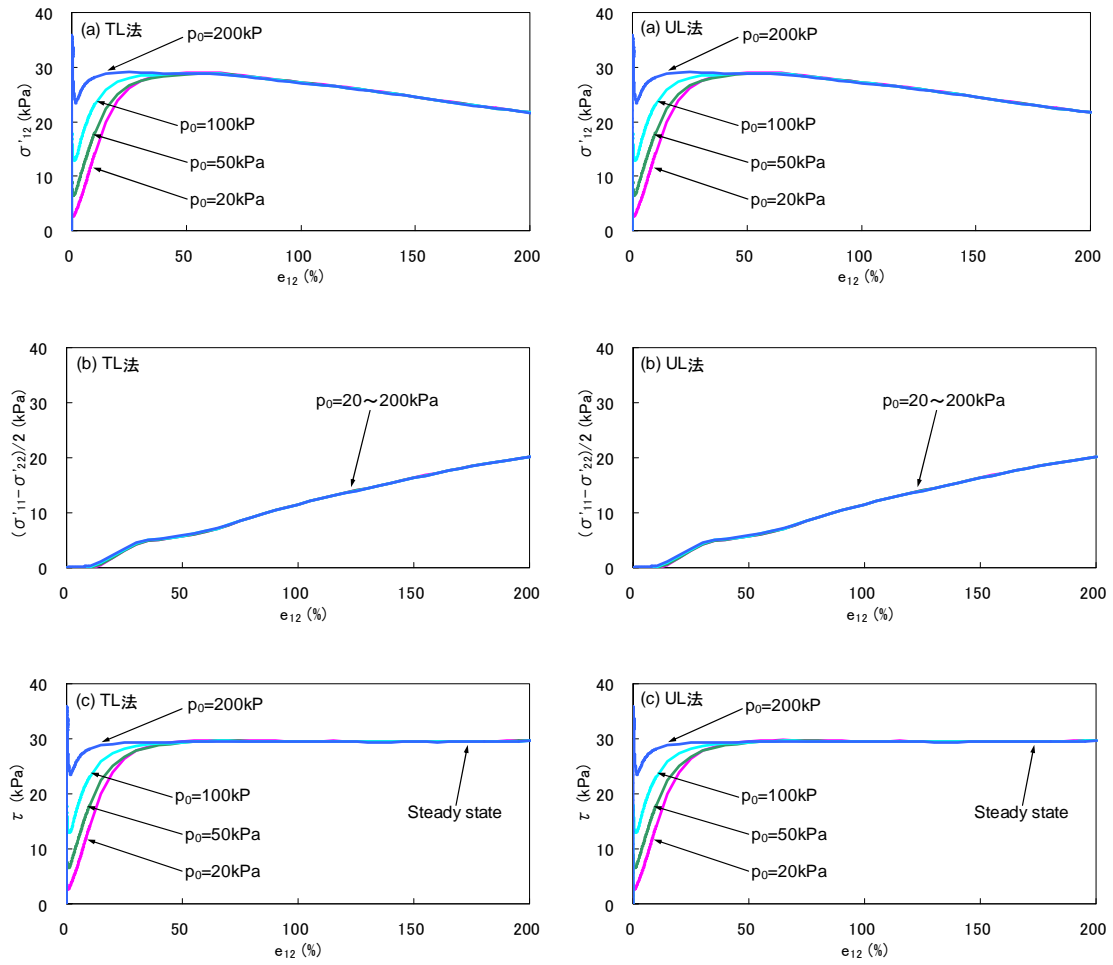


図 6.14 大変形解析における応力-ひずみ関係 (全体図) ($q_{us} = 30\text{kPa}$): (a) せん断応力表示; (b) 軸差応力表示; (c) 最大せん断応力表示

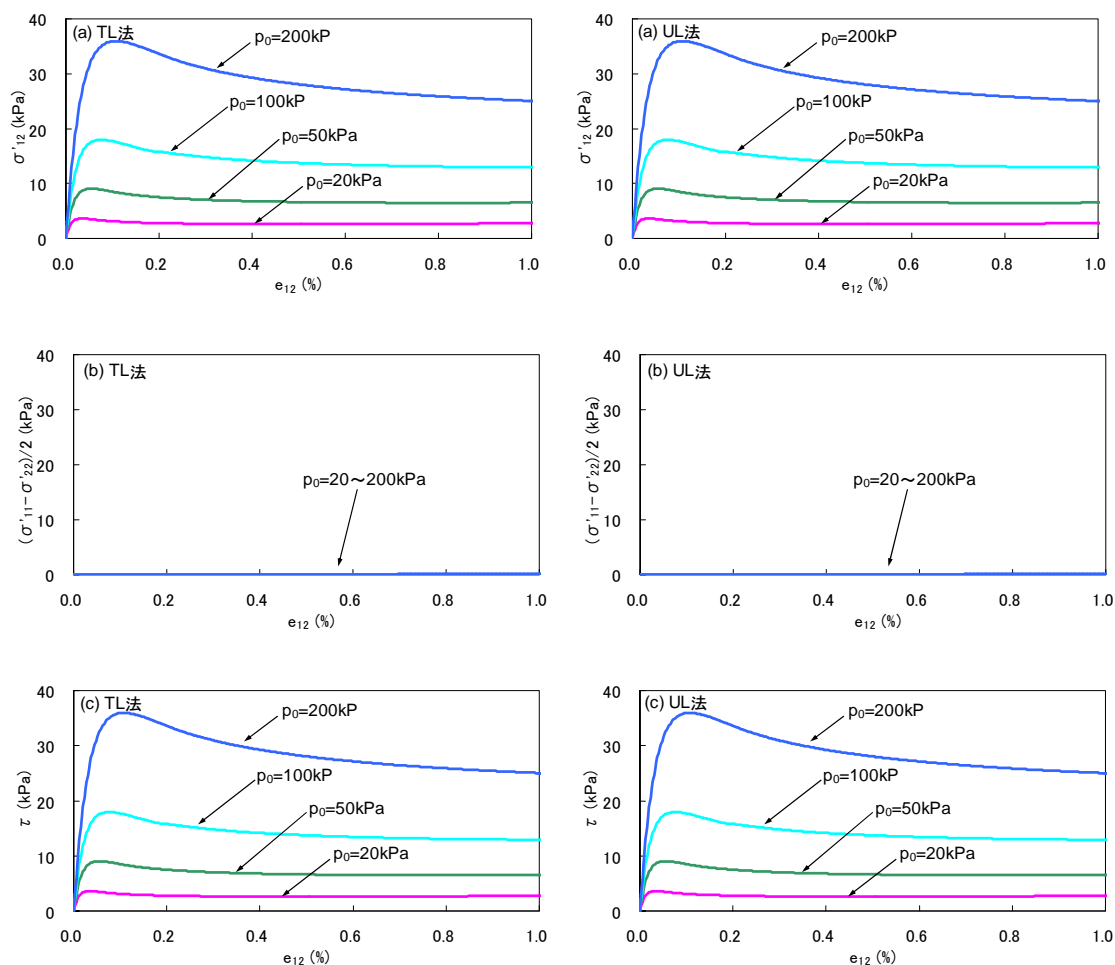


図 6.15 大変形解析における応力-ひずみ関係（小ひずみ領域）（ $q_{us} = 30\text{kPa}$ ）：(a) せん断応力表示；(b) 軸差応力表示；(c) 最大せん断応力表示

次に、応力もしくはひずみの軸差成分とせん断成分により描かれた応力経路およびひずみ経路を、図 6.16 に示す。ここでの要素シミュレーションでは、変位制御により解析を行っているため、入力パラメータとしての非排水せん断強度に依らず、図 6.16 (b)と図 6.12 (c) に示すひずみ経路は一致する結果となっている。一方の応力経路に関しても、図 6.16 (a)と図 6.12 (b)を比較すれば、非排水せん断強度の違いにより円の半径は異なるものの、定常状態に向うにつれて、円に沿う形で応力経路が進展していく様子が確認できる。このように、応力増分の方向は、その時点での変形状態に依存してその値を変えていく。図 6.16 より、応力経路およびひずみ経路の双方において、せん断ひずみが 200%に達した時点での回転角が $\pi/8$ となることが確認できる。

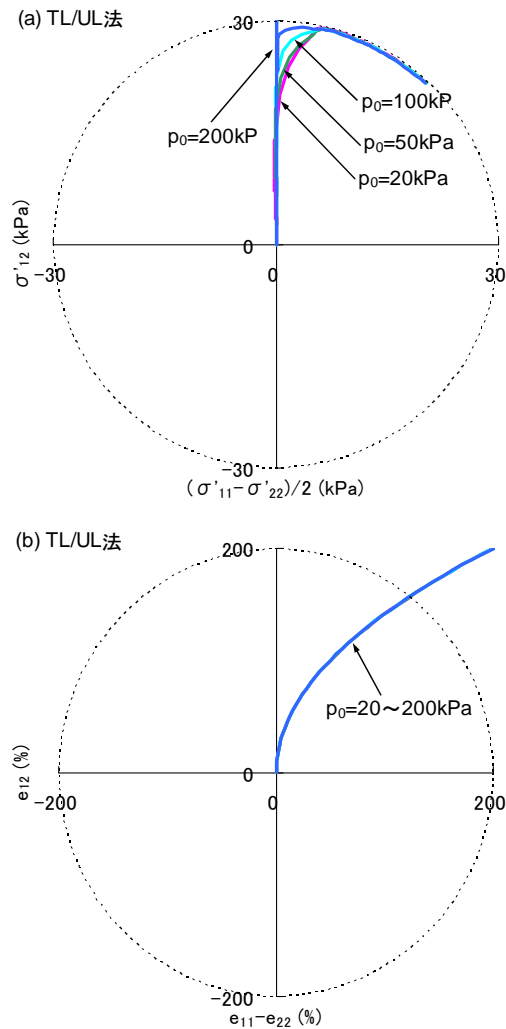


図 6.16 大変形解析における応力経路およびひずみ経路 ($q_{us} = 30\text{kPa}$): (a) 応力経路; (b) ひずみ経路

続いて、非排水せん断強度 q_{us} を 200kPa とした場合の大変形解析結果を、図 6.17～図 6.20 に示す。図 6.17 は有効応力経路、図 6.18 は全体領域での応力-ひずみ関係であり、微小変形解析における図 6.5 (a)(b)と比較すれば、その概ねの傾向は、非排水せん断強度を 30kPa とした場合に述べたとおりである。ここでも、最大せん断応力で整理すれば、応力経路および応力-ひずみ関係は一致し、せん断応力および軸差応力は、幾何学的非線形性に伴う回転モードの発現により、定常状態に向うにつれてそれぞれ減少、増加傾向を示す。一方、図 6.19 の小ひずみ領域での応力-ひずみ関係は、微小変形解析での図 6.5 (c)と同様の挙動を示しており、このひずみ領域では幾何学的非線形性の影響が無視できることがわかる。

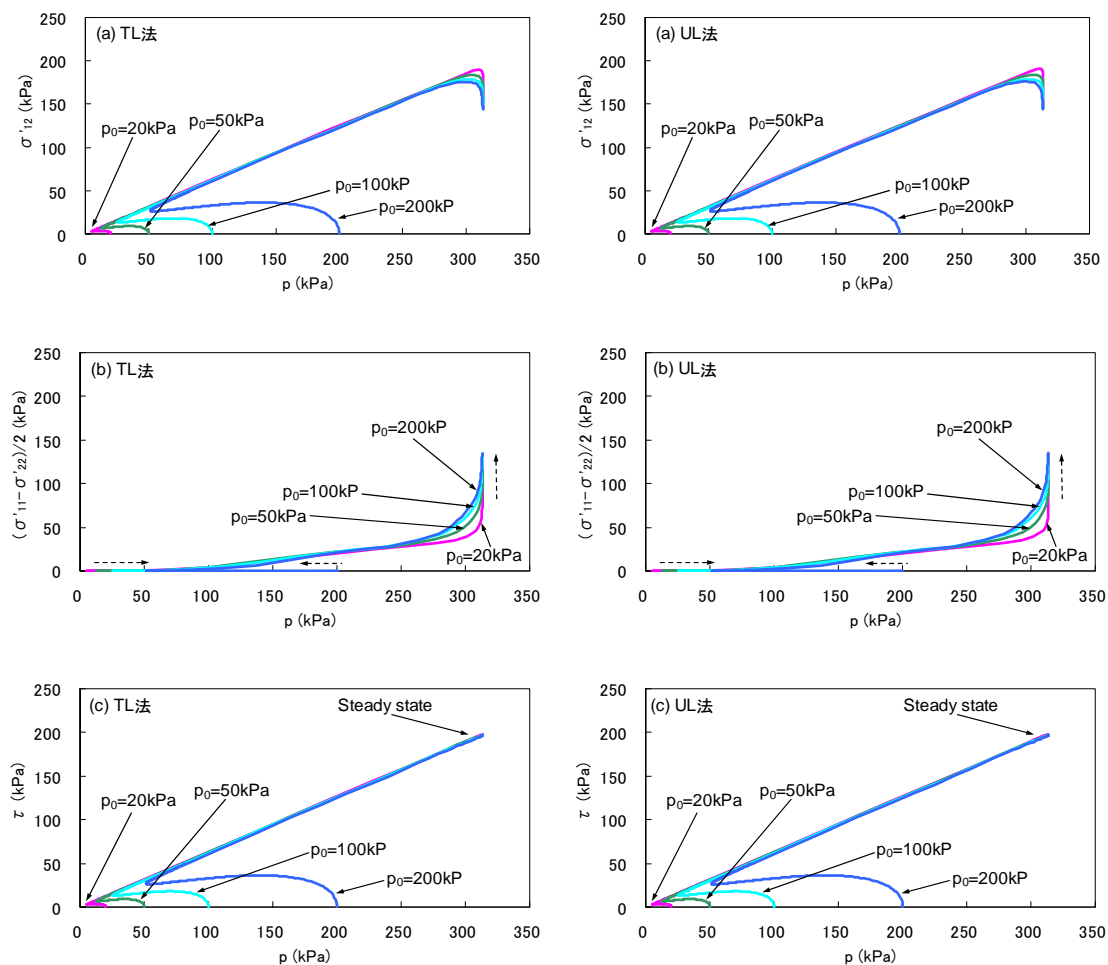


図 6.17 大変形解析における有効応力経路 ($q_{us} = 200\text{kPa}$): (a) せん断応力表示; (b) 軸差応力表示; (c) 最大せん断応力表示

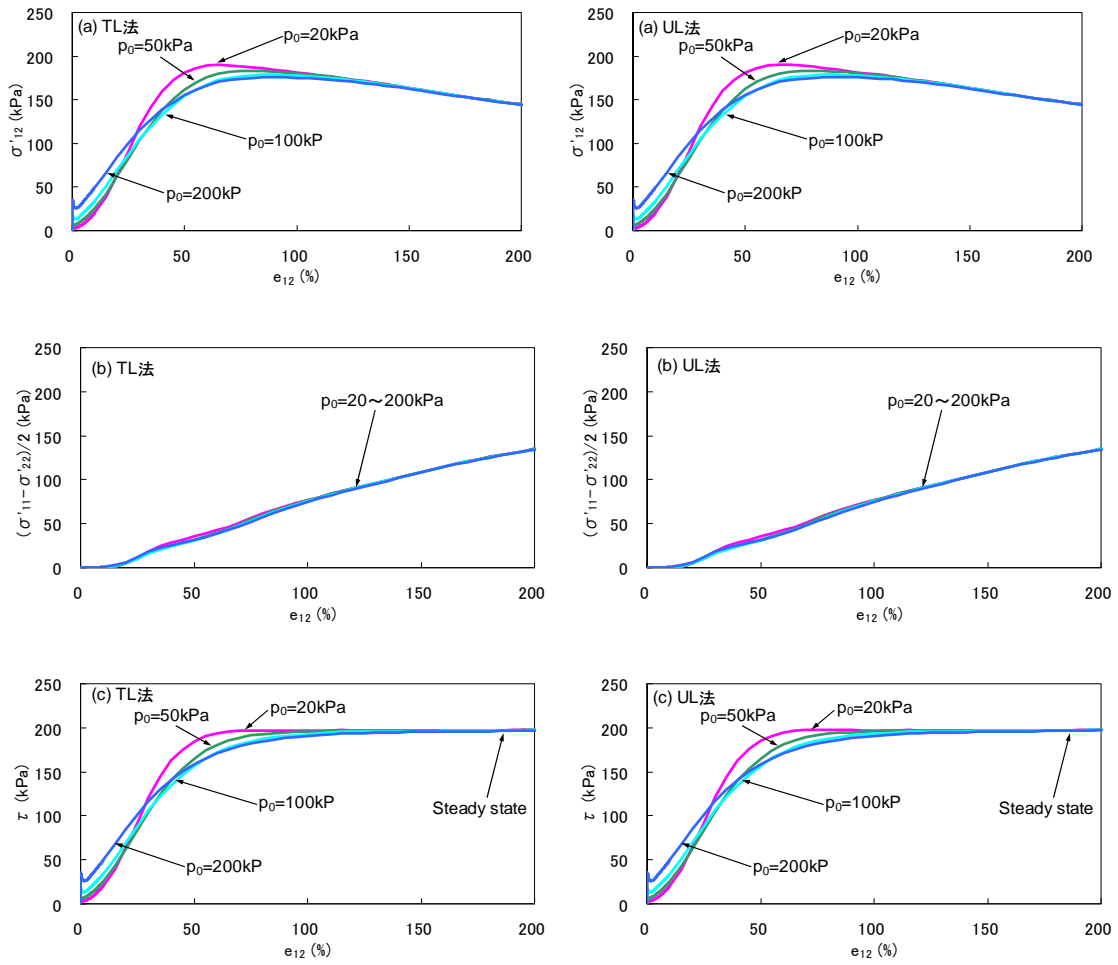


図 6.18 大変形解析における応力-ひずみ関係 (全体図) ($q_{us} = 200\text{kPa}$) : (a) せん断応力表示 ; (b) 軸差応力表示 ; (c) 最大せん断応力表示

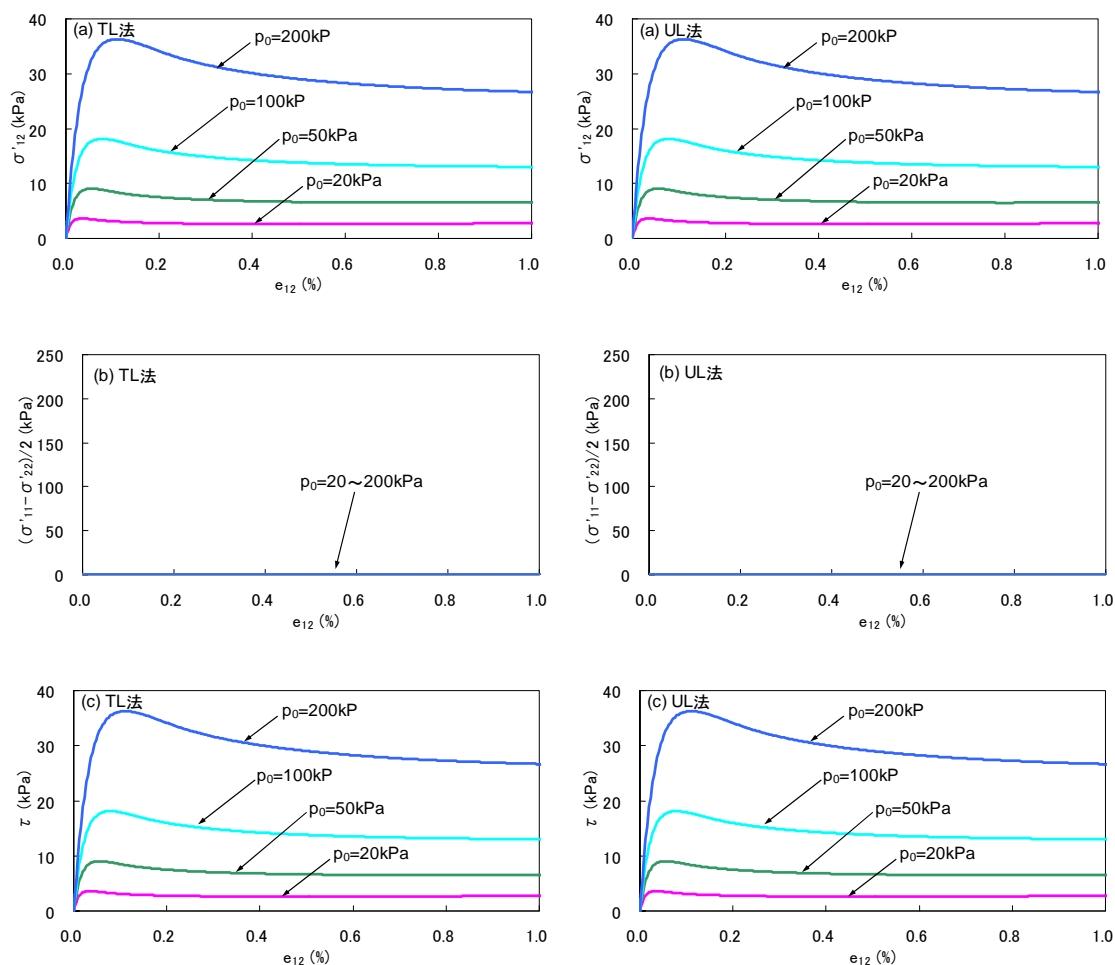


図 6.19 大変形解析における応力-ひずみ関係（小ひずみ領域）（ $q_{us} = 200\text{kPa}$ ）：(a) せん断応力表示；(b) 軸差応力表示；(c) 最大せん断応力表示

次に、応力もしくはひずみの軸差成分とせん断成分により描かれた応力経路およびひずみ経路を、図 6.20 に示す。概ねの傾向は、非排水せん断強度を 5kPa（図 6.12）および 30kPa（図 6.16）とした場合と等しく、定常状態に近づくにつれて、非排水せん断強度を半径とする円に沿う形で応力経路が進行していく。また、応力増分に関しては、せん断変形における回転モードの発現に伴う軸差応力の影響により、その方向を時々刻々変えることとなる。一方、図 6.20 (b)に示すひずみ経路は、変位制御による解析のため、図 6.12 (c)や図 6.16 (b)に示す結果と等しくなることがわかる。

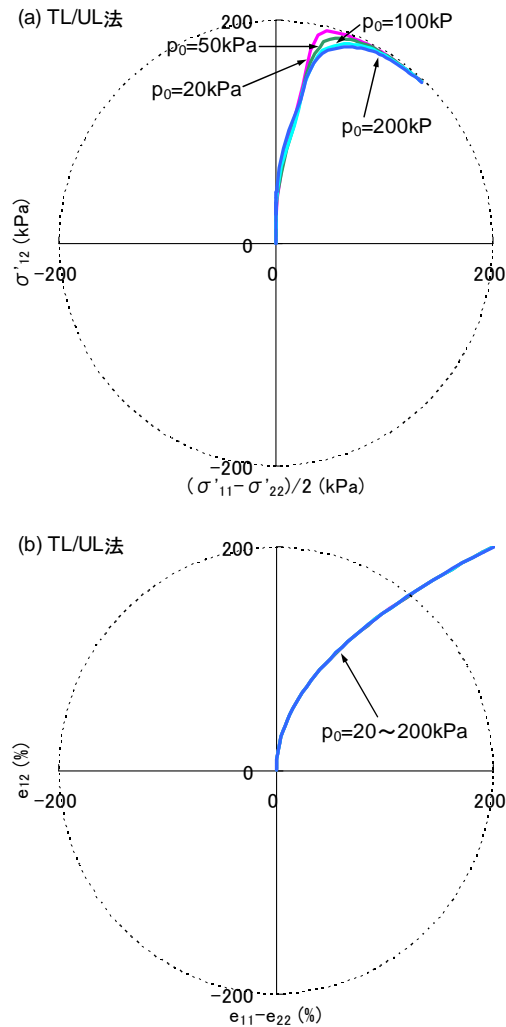


図 6.20 大変形解析における応力経路およびひずみ経路 ($q_{us} = 200\text{kPa}$) : (a) 応力経路 ; (b) ひずみ経路

最後に、非排水せん断強度を ∞ とした場合の大変形解析結果を、図 6.21～図 6.24 に示す。図 6.6 の微小変形解析による結果と比較すると、基本的な傾向は、非排水せん断強度に有限の値を設定した場合と概ね等しい。すなわち、大ひずみ領域ではせん断応力、軸差応力の減少、増加傾向が見られる一方、小ひずみ領域では微小変形解析とほぼ等しい結果が得られている。ただし、非排水せん断強度を限りなく大きく見積もっているため、明瞭な定常状態が存在せず、図 6.24 (a)に示す応力経路では、これまでに見られたような、非排水せん断強度を半径とする円に沿う形での応力の進展が見受けられない。同図より、大ひずみ領域において定常状態の影響を受けない代わりに、等方圧密後の初期拘束圧に強く依存する形で応力経路が進展していく様子が確認できる。

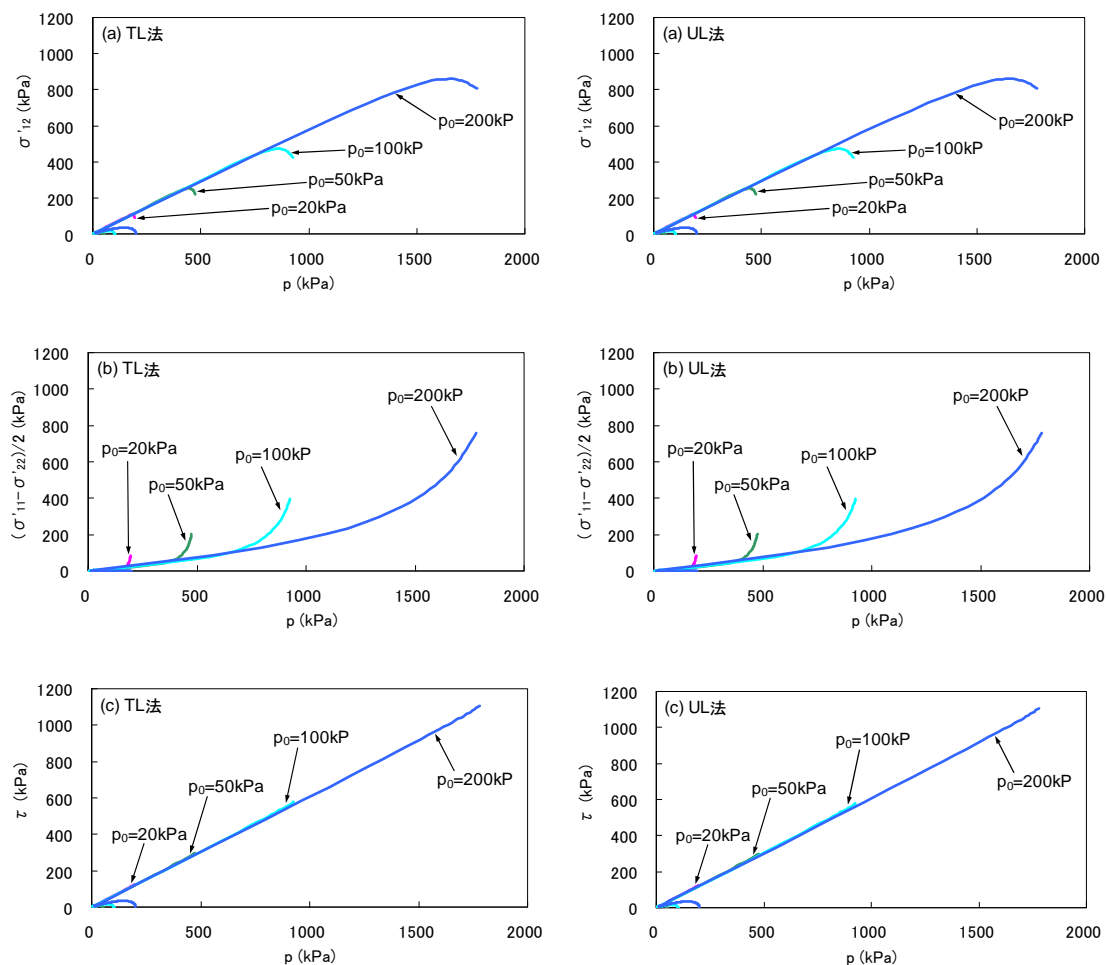


図 6.21 大変形解析における有効応力経路 ($q_{us} = \infty$): (a) せん断応力表示; (b) 軸差応力表示; (c) 最大せん断応力表示

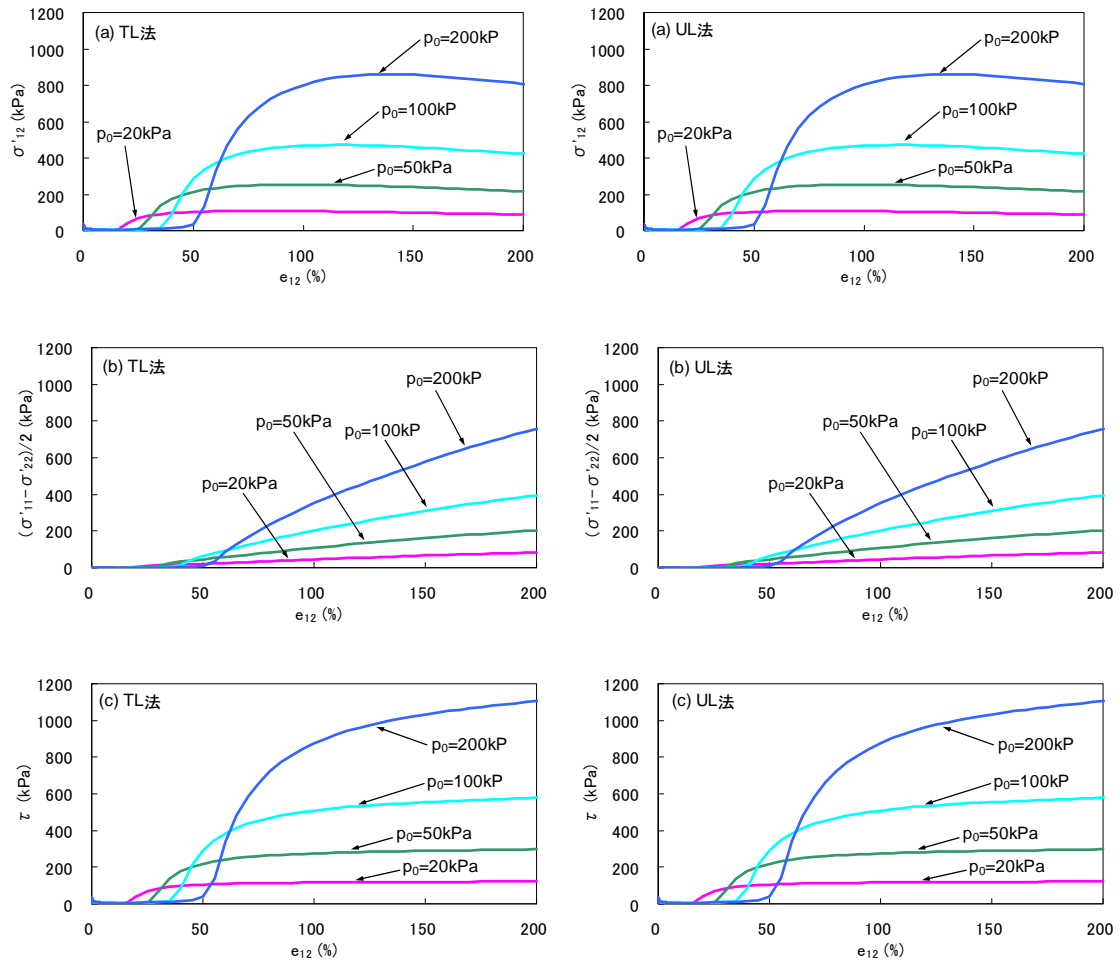


図 6.22 大変形解析における応力-ひずみ関係 (全体図) ($q_{us} = \infty$) : (a) せん断応力表示 ; (b) 軸差応力表示 ; (c) 最大せん断応力表示

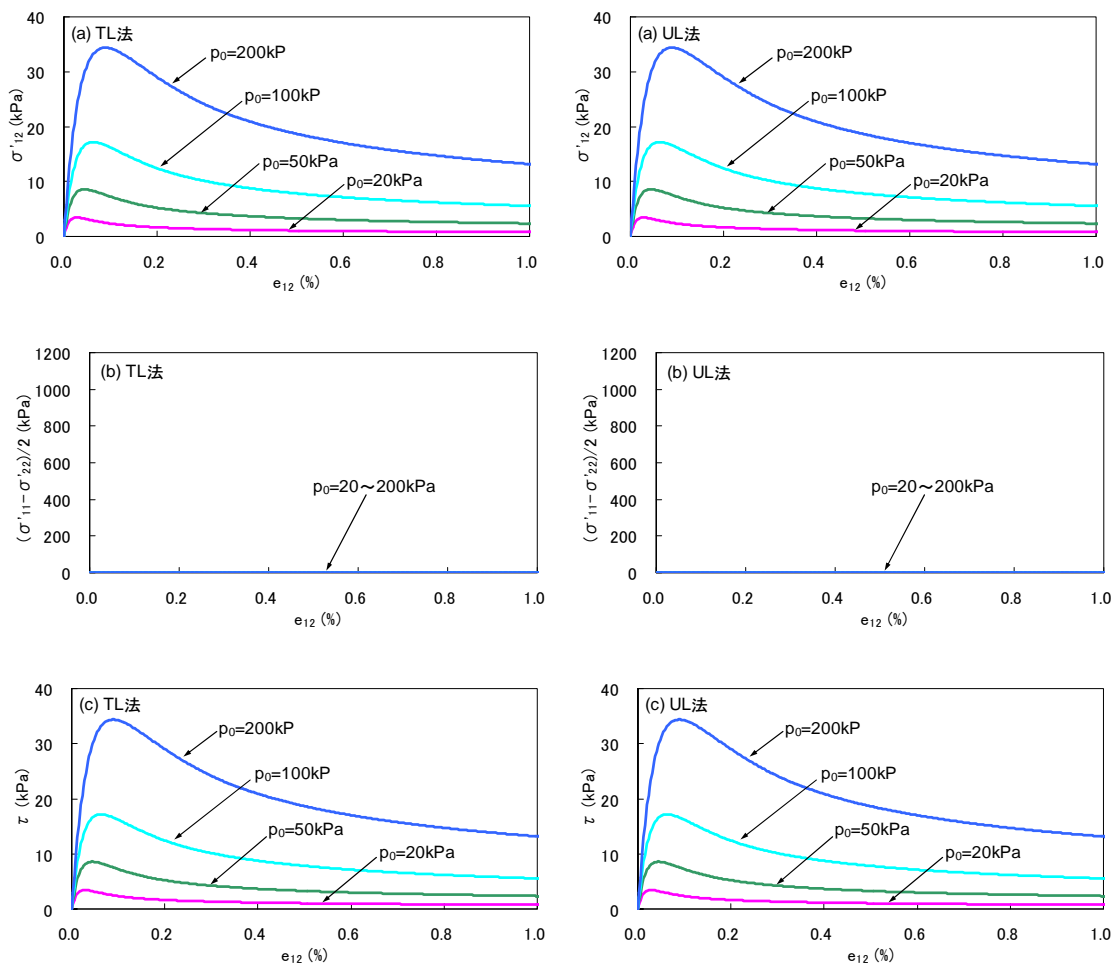


図 6.23 大変形解析における応力-ひずみ関係 (小ひずみ領域) ($q_{us} = \infty$) : (a) せん断応力表示 ; (b) 軸差応力表示 ; (c) 最大せん断応力表示

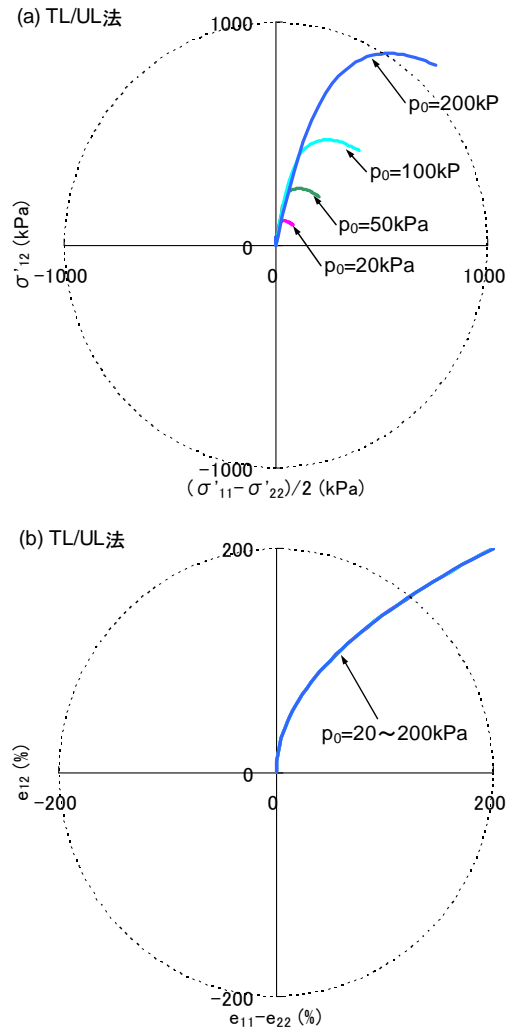


図 6.24 大変形解析における応力経路およびひずみ経路 ($q_{us} = \infty$): (a) 応力経路; (b) 応力経路 (拡大図); (c) ひずみ経路

6.3 非排水繰り返しせん断試験

6.3.1 要素シミュレーションの概要

本節では、前節の非排水単調せん断解析において用いた一要素の単純モデルに対して、砂の非排水繰り返しせん断試験に対する数値解析を実施した。要素シミュレーションでは、室内要素試験における状態を模擬するため、まずモデルに対して排水条件下で等方圧密 (98.0kPa) を行い、その後、非排水条件のもとで応力制御により繰り返しせん断を与えた。ここに、繰り返しせん断応力振幅は 23kPa (せん断応力比で表すと、約 0.23) とし、慣性項の影響は無視できるものとして静的環境下で解析を行った。図 6.25 に、要素シミュレーションの手順を模式的に示す。

次に、要素シミュレーションに用いたモデルパラメータを、表 6. 2 に示す。これらは、微小変形解析においても大変形解析においても共通に用いられる。ここでは、入力パラメータとしての非排水せん断強度を、23,60,∞の3種類に設定し、それぞれの条件での繰り返しせん断時の挙動を考察した。

ここで示す非排水繰り返しせん断の要素シミュレーションは、次章で述べる地震応答解析において、解析パラメータを決定する目的で、室内試験により得られた液状化抵抗曲線にフィッティングするように行われる予備解析としての要素解析に対応している。液状化抵抗曲線を求める際には、両振幅ひずみが5%に達した状態を液状化の発生とみなし、その時点での繰り返し回数を繰り返しせん断応力比に対してプロットする。そのため、ここでの要素シミュレーションでは、せん断ひずみ振幅がある一定値に達した時点で解析を終了し、その時点までのシミュレーション結果を示すこととした。通常、液状化抵抗曲線を算定することが目的であれば、せん断ひずみの一定値としては、先に述べた両振幅5%までとすれば問題ない。しかし、ここでは、微小変形解析と大変形解析とにおける繰り返しせん断時の挙動の比較という目的も含むため、閾値を通常より大きめに設定し、片振幅せん断ひずみが20%の時点まで解析を行った。

前節での非排水単調せん断の場合と同様に、大変形解析による結果は、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の両者において、空間表示での応力・ひずみを用いて表す。ここで注意したいのは、空間表示での Euler-Almansi ひずみのせん断ひずみが、 e_{12} ではなく $2e_{12}$ と表される点である。これは、微小変形理論での工学的せん断ひずみが、以下で与えられることを考慮すれば明らかである。

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = 2\varepsilon_{xy} \tag{6.3}$$

なお、ここに、ひずみテンソルの対称性を用いている。

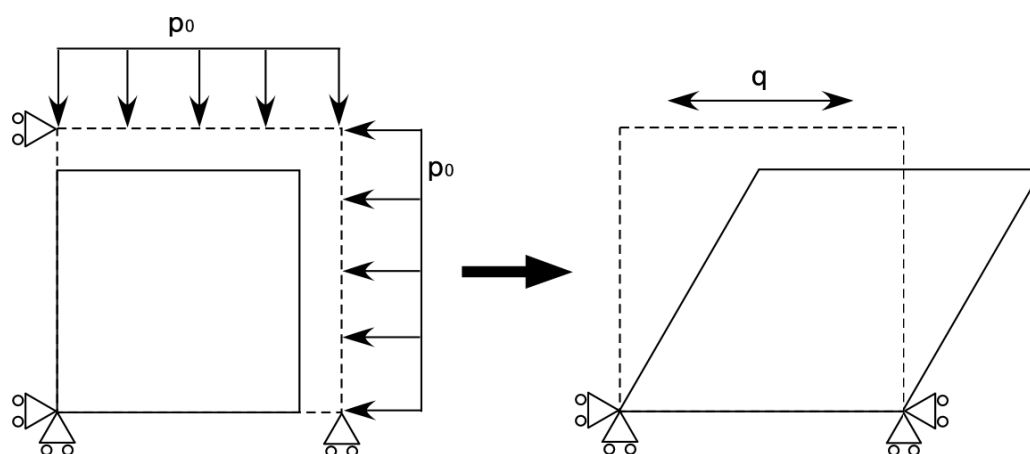


図 6. 25 等方圧密-非排水繰り返しせん断試験の要素シミュレーション手順

表 6.2 要素シミュレーションにおけるモデルパラメータ

$K_{L/Ua}$ (kPa)	r_K	l_K	G_{ma} (kPa)	ϕ_f ($^{\circ}$)	h_{max}	ϕ_p ($^{\circ}$)	
220300	0.5	2.0	84490	39.67	0.24	28.0	
($p_a = 98\text{kPa}$)							
r_{ε_d}	$r_{\varepsilon_d^c}$	q_1	q_2	ε_d^{cm}	S_1	c_1	q_{us} (kPa)
0.1	1.5	1.0	1.0	0.2	0.005	1.0	23,60,∞

6.3.2 非排水せん断強度を 23kPa とした場合

ここでは、非排水せん断強度を 23kPa とした場合の、要素シミュレーション結果を示す。図 6.26 は有効応力経路、図 6.27 はせん断応力-せん断ひずみ関係、図 6.28 はせん断ひずみの時刻歴、図 6.29 は有効応力減少比の時刻歴である。ここに、図 6.28 および図 6.29 の各種時刻歴図において、横軸はせん断応力の繰り返し回数で表されている。また、図 6.29 における有効応力減少比は、全応力一定条件下では過剰間隙水圧比に相当する。すべての図において、上段(a)は微小変形解析、中段(b)は Total Lagrangian 法による大変形解析、下段(c)は Updated Lagrangian 法による大変形解析の結果である。

まず、図 6.26 に示す有効応力経路を見ると、いずれの場合も、繰り返しせん断を受けるにつれて有効拘束圧が次第に減少し、応力経路が破壊線の近傍まで至っていることがわかる。同図(b)(c)より、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法による結果はほぼ一致しており、同図(a)に示す微小変形解析の結果と比較しても、それほど明瞭な差異は見られない。大変形解析では、有効拘束圧が減少し、応力経路が破壊線に近づくにつれて、微小変形解析との挙動の違いが少し見られるものの、そこに至るまでの挙動に関してはほぼ等しくなっている。前節で述べたように、微小変形解析と大変形解析との間で、せん断応力にほとんど差がないということは、せん断に伴う回転のモードがここでは誘起されず、軸差応力がほぼ発生していないことを意味する。すなわち、ここでの繰り返しせん断においては、幾何学的非線形性が明瞭に発現する変形領域にまで至っていない。このことより、室内試験により得られた液状化抵抗曲線に対して、それにフィッティングするよう要素シミュレーションを行う際には、微小変形解析でも特に問題はないと言える。

次に、図 6.27 におけるせん断応力-せん断ひずみ関係より、ここでも Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の結果はほぼ一致しており、微小変形解析と大変形解析の差異もわずかである。これは、図 6.28 に示すせん断ひずみ時刻歴においても同様である。例えば、同図(a)と同図(b)の正のひずみ領域において、応力-ひずみ関係の（ひずみが最大となる）折り返し点での値を比較すると、その差はせん断ひずみレベルで 0.5%程度である。このことから、前述のとおり、要素シミュレーションにより液状化抵抗曲線を算定する際には、微小変形解析でも問題はないものと思われる。なお、当然のことながら、大変形解析を適用

した方が理論的にはより厳密であり、このことを疑う余地はない。しかし、ここで扱うひずみ領域であれば、微小変形解析でも十分信頼に足る結果が得られるということである。

続いて、図 6.29 に示す有効応力減少比を比較すると、その最大値は、微小変形解析で 0.64、大変形解析では Total Lagrangian 法、Updated Lagrangian 法の双方で 0.65 であり、ほぼ等しい結果となっている。この傾向は、有効応力減少比が有効拘束圧（の変化量）に依存することを考えれば、図 6.2 に示す有効応力経路からも明らかである。

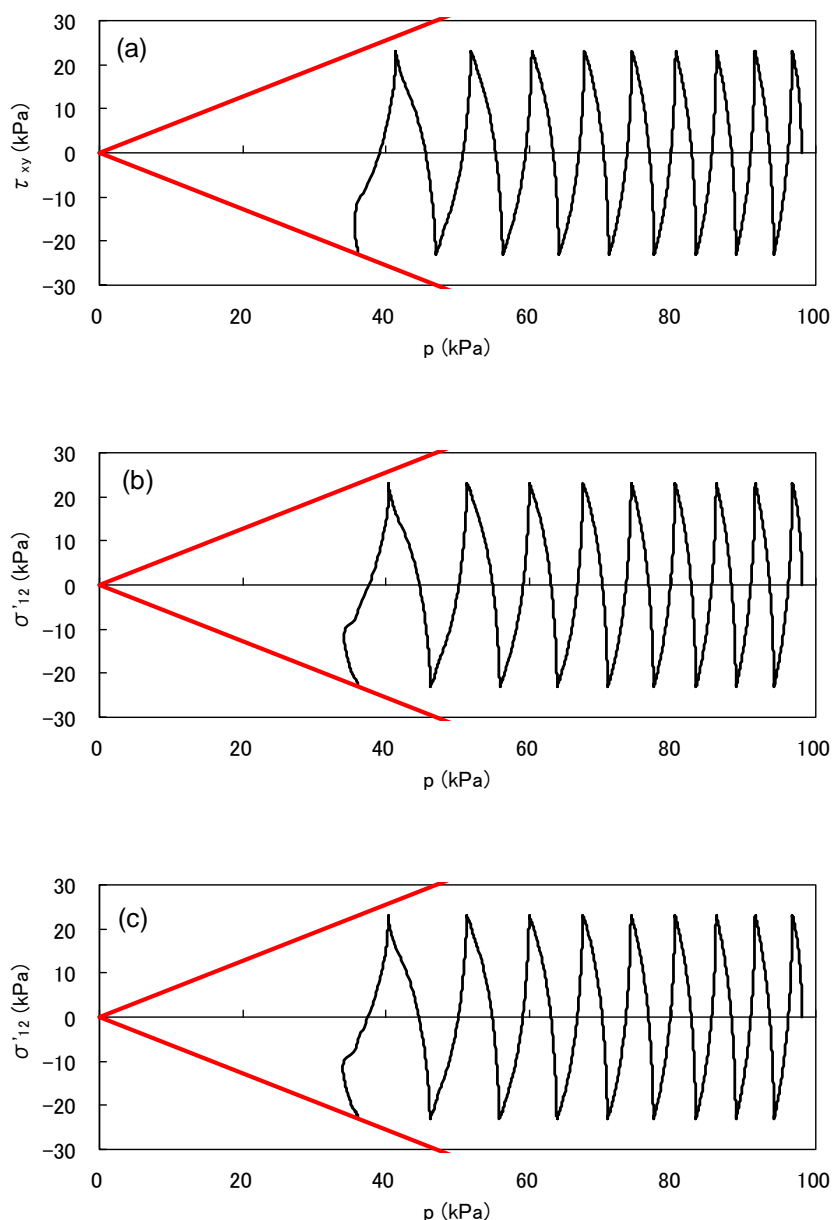


図 6.26 有効応力経路 ($q_{us} = 23\text{kPa}$) : (a) 微小変形解析 ; (b) 大変形 TL 法 ; (c) 大変形 UL 法

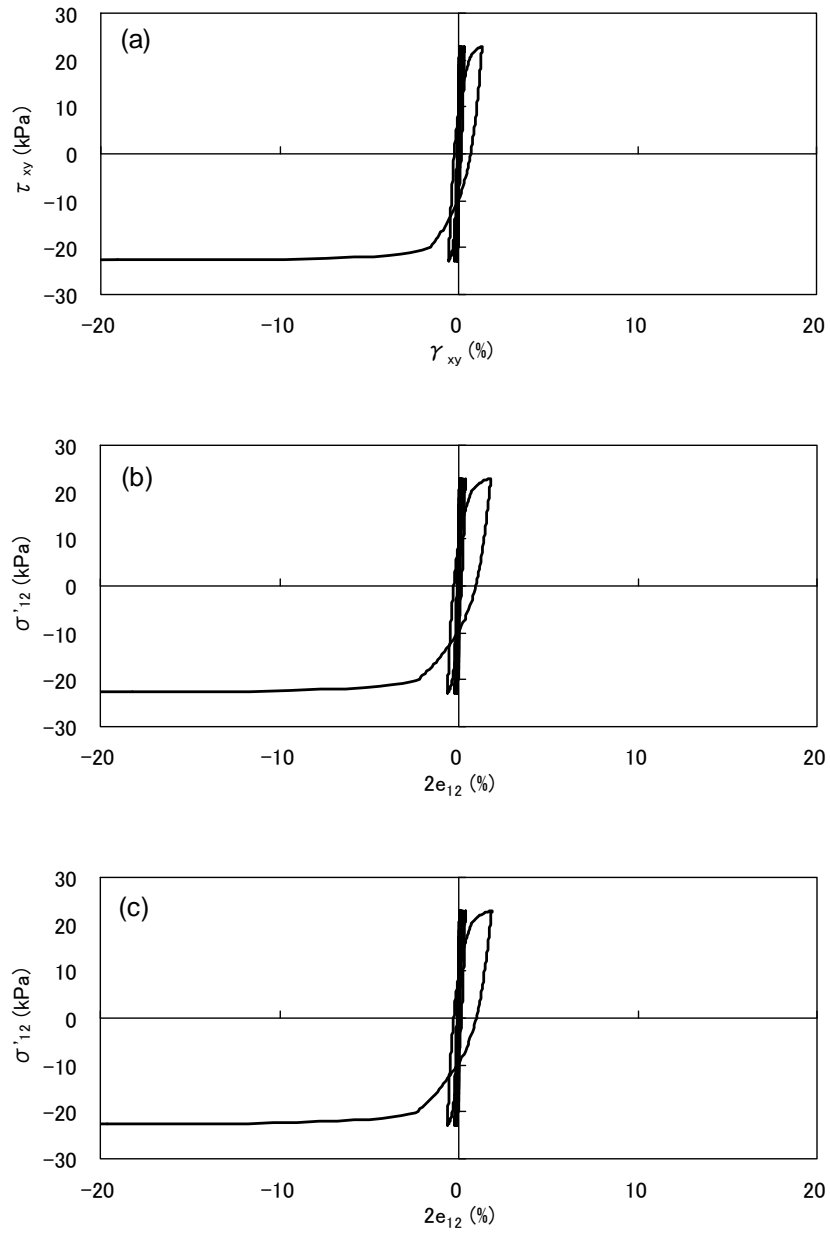


図 6.27 せん断応力-せん断ひずみ関係 ($q_{us} = 23 \text{ kPa}$): (a) 微小変形解析; (b) 大変形 TL 法; (c) 大変形 UL 法

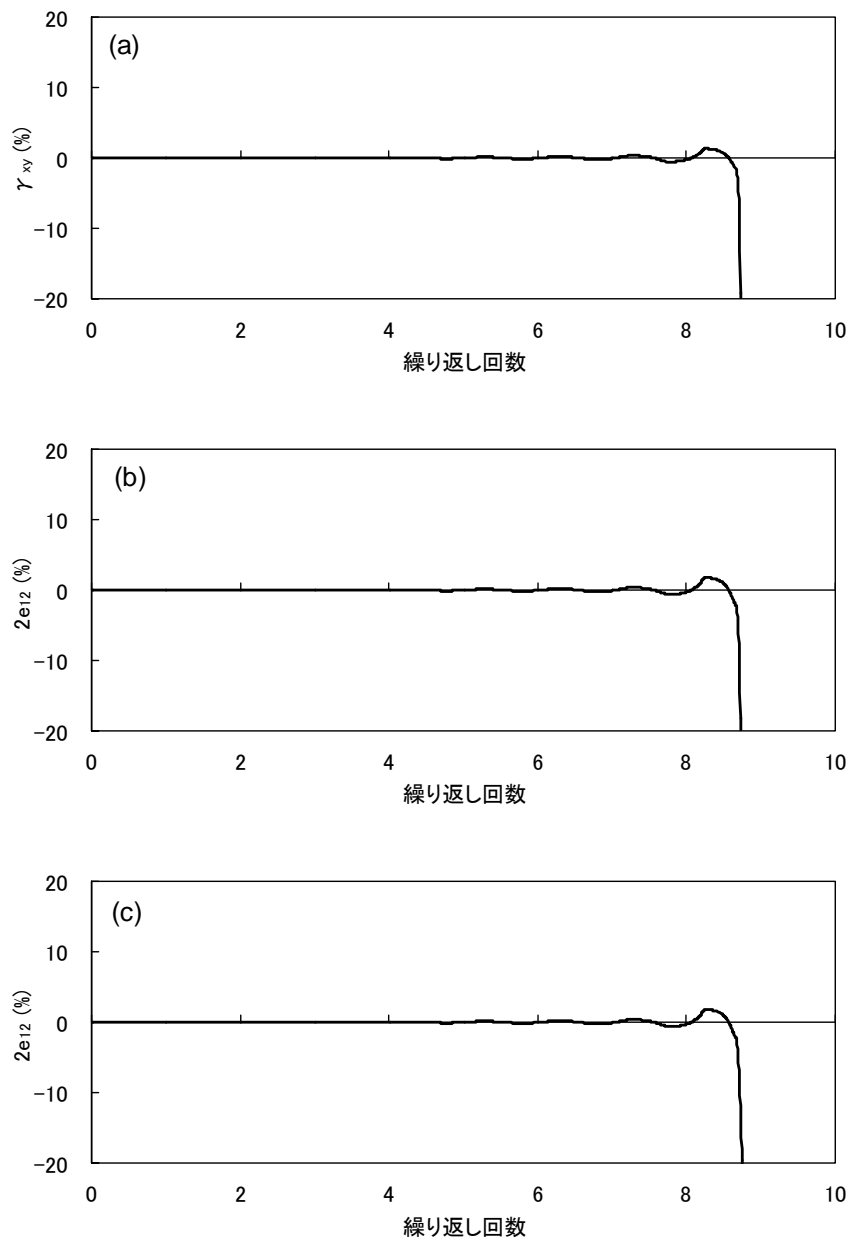


図 6.28 せん断ひずみ時刻歴 ($q_{us} = 23\text{kPa}$): (a) 微小変形解析; (b) 大変形 TL 法; (c) 大変形 UL 法

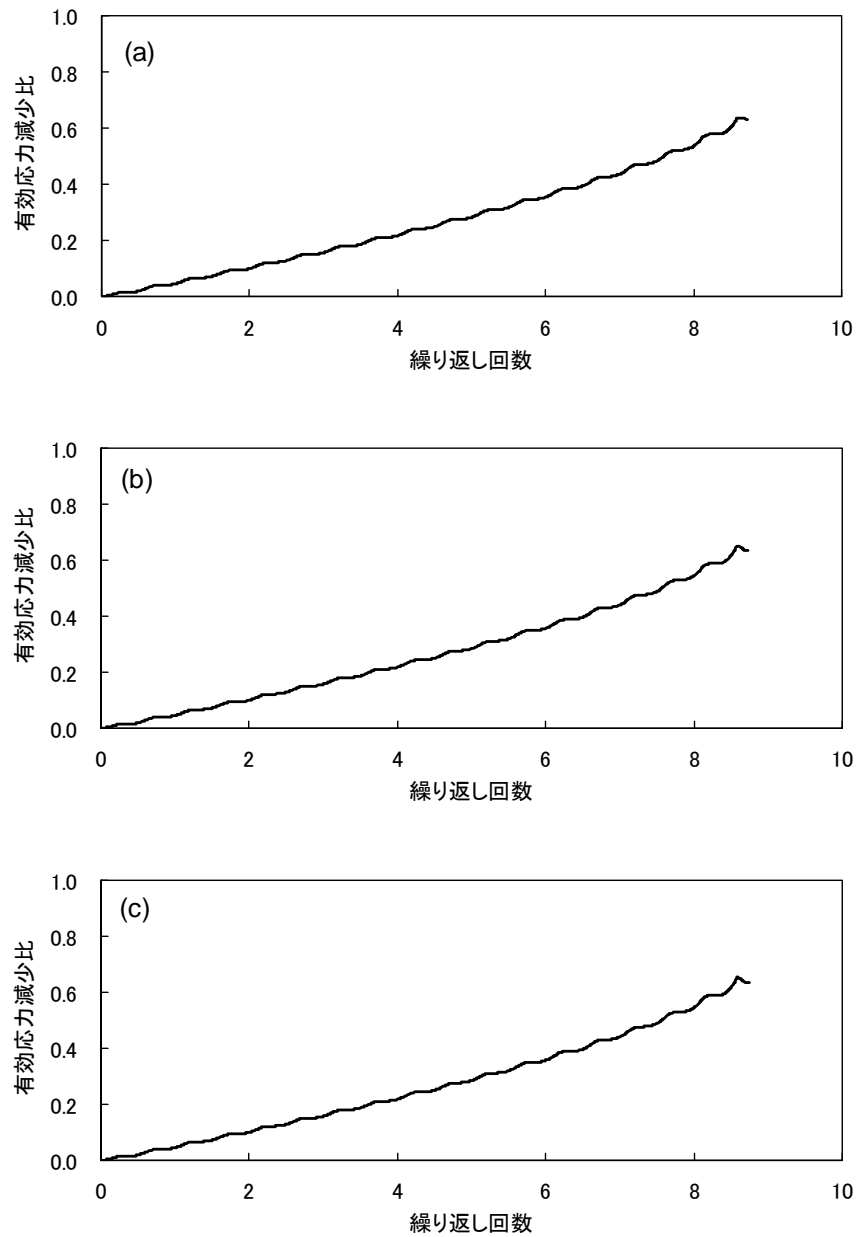


図 6.29 有効応力減少比時刻歴 ($q_{us} = 23\text{kPa}$): (a) 微小変形解析; (b) 大変形 TL 法; (c) 大変形 UL 法

6.3.3 非排水せん断強度を 60kPa とした場合

ここでは、非排水せん断強度を前項よりも大きく、すなわち、 $q_{us} = 60\text{kPa}$ に設定した場合の解析結果を示す。

まず、得られた有効応力経路を図 6.30 に示す。同図と非排水せん断強度を 23kPa とした場合の図 6.26 を比較すると、非排水せん断強度を大きく設定することにより、せん断応力

の繰り返し回数が多くなっていることがわかる。すなわち、これは、所定のひずみ（ここでは片振幅 20%）を発生させるのに必要なせん断応力の繰り返し回数が、非排水せん断強度と正の相関を有していることを意味する。このことは、図 6.32 に示すせん断ひずみ時刻歴図を、非排水せん断強度を 23kPa とした場合の図 6.28 と比較することからも確認できる。非排水せん断強度が 23kPa の場合に、片振幅 20%のせん断ひずみを発生されるのに要した回数が 8.7 回程度であったのに対し、非排水せん断強度を 60kPa に設定すると、12.2 回程度の繰り返しせん断が必要となる。液状化抵抗曲線に必要な両振幅 5%ひずみの状態を考えると、非排水せん断強度を 23, 60kPa とした場合に必要な繰り返しせん断は、それぞれ 8.7 回および 10.2 回程度であり、それほど大きい差ではないものの、やはり非排水せん断強度の影響を受けている。また、非排水せん断強度を 23kPa とした場合は、ある点（ここでは繰り返し回数が 8.7 回）でひずみが急増するのに対し、60kPa とした場合は、徐々にひずみ振幅が増加していく傾向にある。つまり、液状化抵抗曲線を算定するための要素シミュレーションにおいても、入力パラメータとしての非排水せん断強度を適切に設定する必要があると言える。なお、さらに小さいひずみ領域（例えば、1.0%未満）においては、非排水せん断強度の影響は無視できるほど小さい。一方、有効応力減少比に関しては、図 6.29 では有効応力減少比の上限が 0.65 程度であるため、液状化判定に用いられる過剰間隙水圧比（全応力一定条件下では有効応力減少比に相当）が 95%の状態が確認できない。しかし、例えば、有効応力減少比が 0.5 の状態を比較すると、非排水せん断強度を 23, 60kPa とした場合、両者ともに 8.0 回程度の繰り返し回数が必要とされる。このことから、少なくとも過剰間隙水圧上昇の前半過程においては、非排水せん断強度の影響は小さいものと考えられる。なお、過剰間隙水圧比が 95%に近づく状態では、両振幅 5%以上のひずみの場合と同様に、非排水せん断強度の影響を適切に考慮する必要があると思われる。

再び図 6.30 に戻り、微小変形解析と大変形解析との比較を行うと、有効拘束圧が低い領域での挙動に違いはあるものの、それ以外の部分では概ね等しい挙動が得られている。このことは、前述したとおり、液状化抵抗曲線を算定する要素解析では、取り扱うひずみ領域がそれほど大きくないこともあり、微小変形解析で十分に再現が可能であることを示している。なお、同図(b)(c)における Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の結果は、ほぼ一致している。

次に、図 6.31 に示すせん断応力-せん断ひずみ関係より、ここでも Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の結果がほぼ一致していることがわかる。微小変形解析の場合と比較すると、せん断ひずみが 10%を超える領域では、ひずみの伸びに違いが見られるものの、それ以下のひずみ領域では明瞭な差異は確認できない。この傾向は、図 6.32 に示すせん断ひずみ時刻歴においても明らかである。なお、図 6.31 ではひずみの増加に伴い要素の剛性は低下傾向を示し、密な砂に見られるサイクリックモビリティ現象のような剛性の急激な回復傾向は存在しない。

続いて、図 6.33 に示す有効応力減少比に関しても、Total Lagrangian 法と Updated

Lagrangian 法における違いは見られない。有効応力減少比の最大値を比較すると、微小変形解析では約 0.90、大変形解析では約 0.93 となっており、繰り返し回数の増加に伴い、微小変形解析と大変形解析との差異も増大するようである。しかし、過剰間隙水圧の上昇過程におけるそれらの差はそれほど大きいものではなく、過剰間隙水圧比が 95%の状態を液状化判定基準として液状化抵抗曲線を算定する場合でも、微小変形解析を用いることに特に問題はないと思われる。

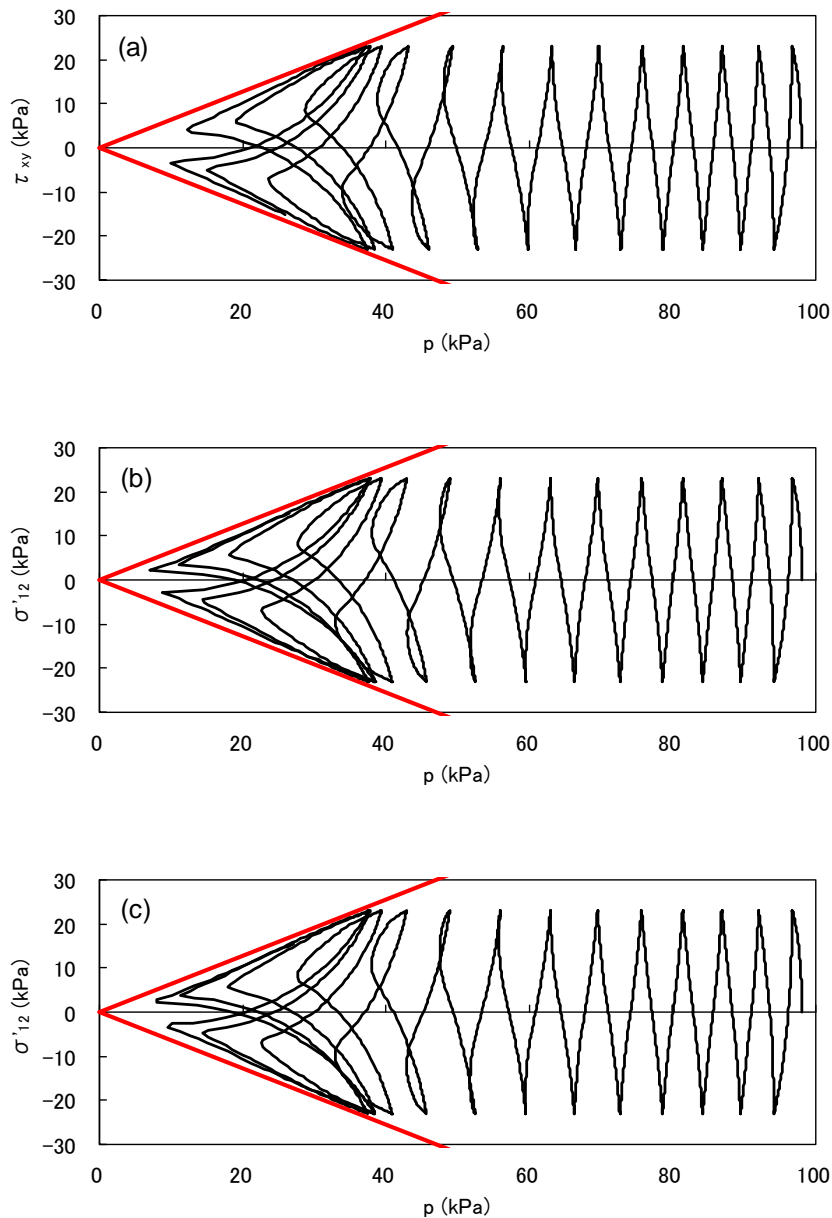


図 6.30 有効応力経路 ($q_{us} = 60\text{kPa}$) : (a) 微小変形解析 ; (b) 大変形 TL 法 ; (c) 大変形 UL 法

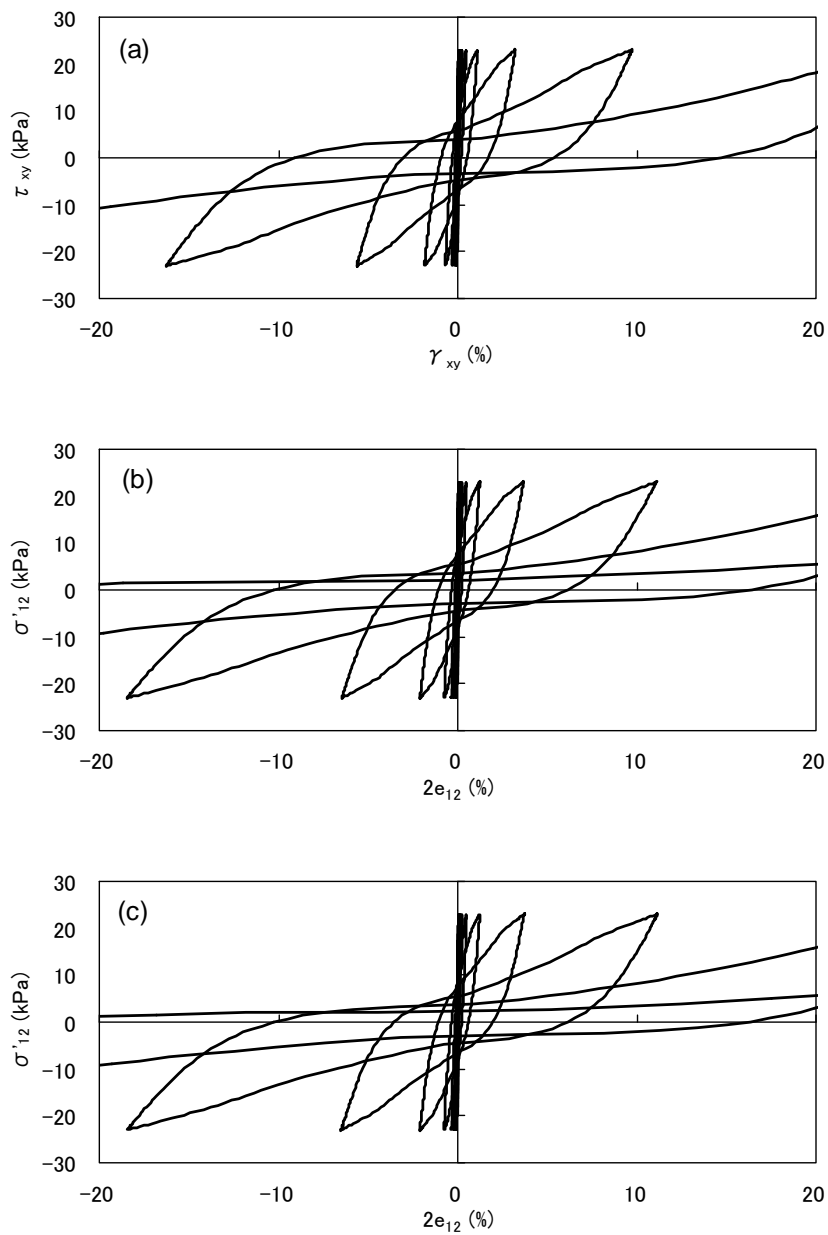


図 6.31 せん断応力-せん断ひずみ関係 ($q_{us} = 60\text{kPa}$): (a) 微小変形解析; (b) 大変形 TL 法; (c) 大変形 UL 法

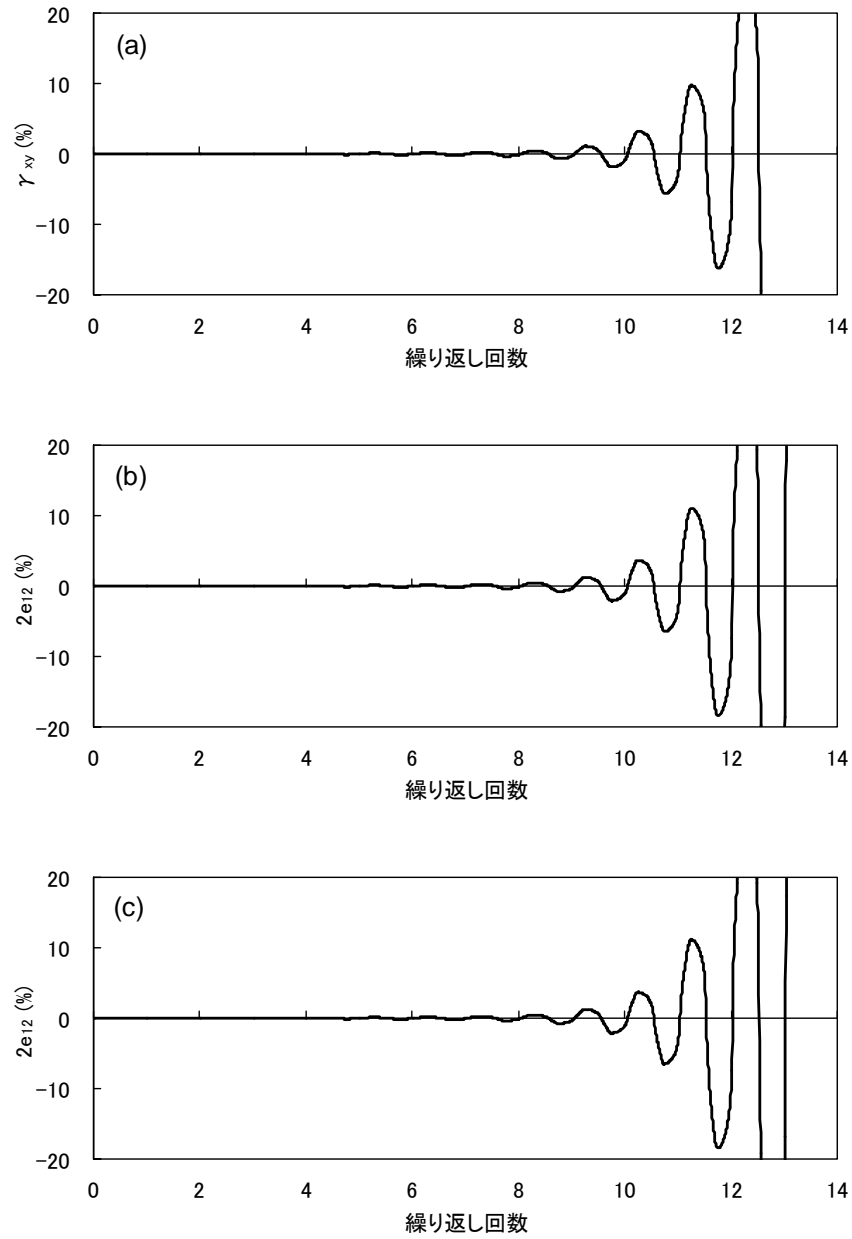


図 6.32 せん断ひずみ時刻歴 ($q_{us} = 60\text{kPa}$): (a) 微小変形解析; (b) 大変形 TL 法; (c) 大変形 UL 法

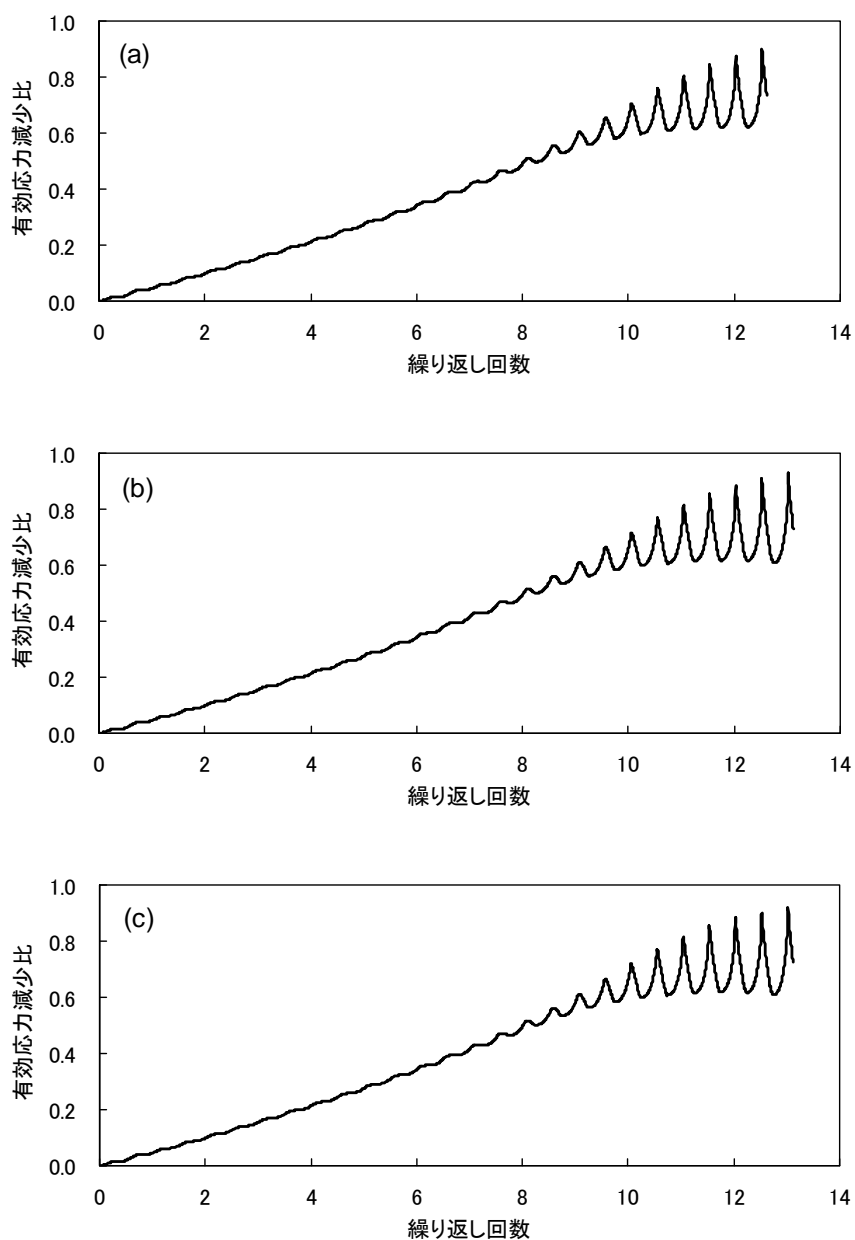


図 6.33 有効応力減少比時刻歴 ($q_{us} = 60\text{kPa}$): (a) 微小変形解析; (b) 大変形 TL 法; (c) 大変形 UL 法

6.3.4 非排水せん断強度を無限大とした場合

本節での最後に、前項よりもさらに非排水せん断強度を大きくし、 $q_{us} = \infty$ とした場合の解析結果を示すこととする。図 6.34 は有効応力経路、図 6.35 はせん断応力-せん断ひずみ関係、図 6.36 はせん断ひずみ時刻歴、図 6.37 は有効応力減少比時刻歴である。いずれのグラフにおいても、概ねの傾向はすでに前項までに述べてきたとおりであり、せん断ひず

みレベルが 10% (繰り返し回数では 13 回程度に相当) に満たない領域では、微小変形解析と大変形解析との間に明瞭な差異は見られない。ここでの結果を、前項までの結果とあわせると、非排水せん断強度の大きさに関わらず、液状化抵抗曲線を算定するための要素シミュレーションにおいては、微小変形解析を用いても特に問題はないことがわかる。これは、液状化抵抗曲線で用いられる液状化判定としてのひずみ基準が両振幅 5% であることに依るものであり、さらに大きなひずみ領域を対象とする場合には、より理論に厳密な定式化に基づく大変形解析を用いることが望ましい。大地震時の地盤・構造物系の動的挙動などはこの典型的な例であり、これに関しては、次章において具体的に述べることにする。

一方で、非排水せん断強度の違いが解析結果に及ぼす影響であるが、前項までの結果とここでの結果を比較すると、非排水せん断強度を無限大とした場合、図 6.36 より大ひずみ領域においてもせん断応力の増加に伴い要素の剛性はある程度の強度を有しており、図 6.31 で示したような剛性の低下傾向は見られない。このことより、非排水せん断強度の違いは、所定のひずみ振幅を発生させるのに必要な繰り返し回数にも影響を与えることがわかる。両振幅ひずみ 5% の条件を考えると、非排水せん断強度を 23, 60kPa とした場合、図 6.28 および図 6.32 より、それぞれ 8.7, 10.2 回程度の繰り返しせん断応力が必要であったのに対し、非排水せん断強度を無限大に設定すると、必要とされる繰り返し回数は図 6.36 より 10.7 回程度となる。これは、非排水せん断強度を 60kPa とした結果とほとんど変わらず、今回の条件では、非排水せん断強度がある一定値以上になると、解析結果に及ぼす影響はかなり小さくなるようである。しかし、非排水せん断強度が 23kPa の場合と比較すると、2.0 回程度繰り返し回数が増加している。これも決して大きい差異とは言えないが、非排水せん断強度がひずみの伸び具合や、それに伴う応力-ひずみ関係などにも影響を及ぼしていることを考えれば、やはり適切に非排水せん断強度を評価する必要があると思われる。なお、ここでは、繰り返しせん断応力振幅や初期拘束圧はすべてのケースにおいて一定としたが、非排水せん断強度を変化させた場合の挙動は、これらにも依存するものと思われる。

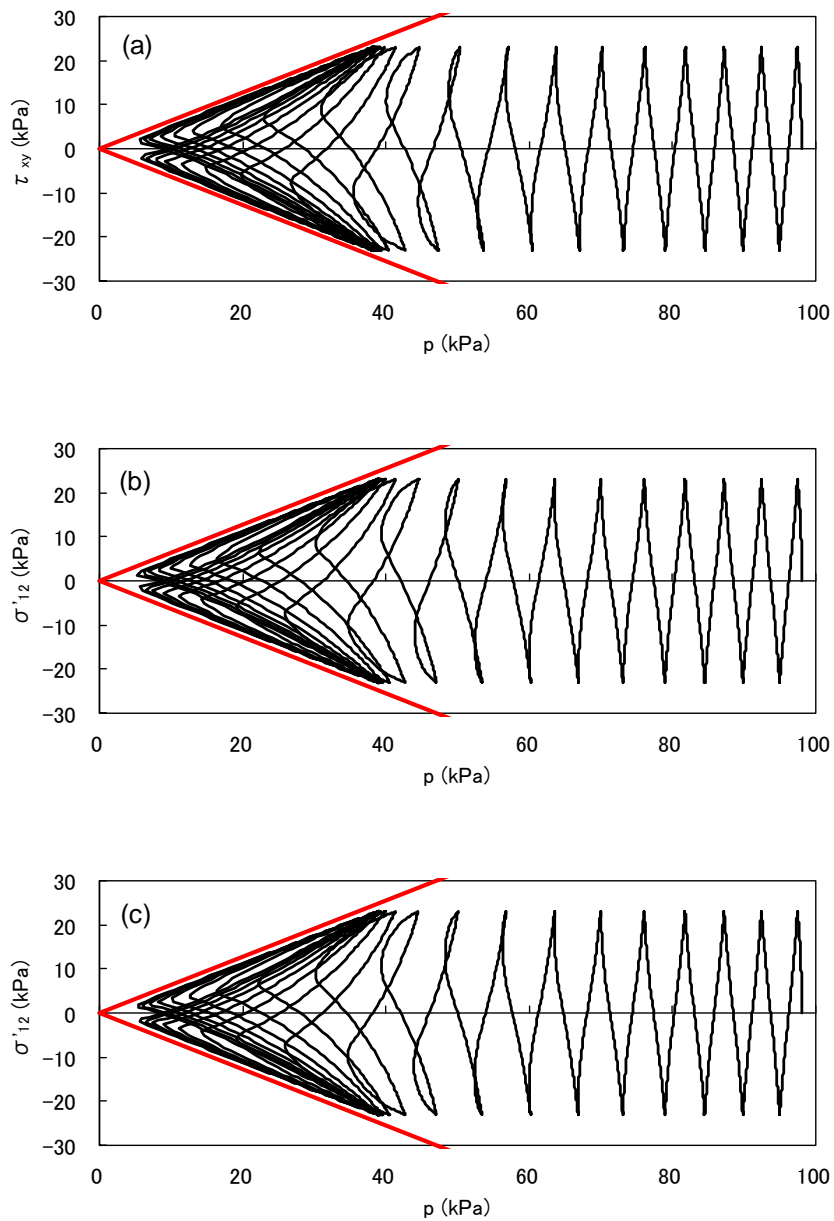


図 6.34 有効応力経路 ($q_{us} = \infty$): (a) 微小変形解析; (b) 大変形 TL 法; (c) 大変形 UL 法

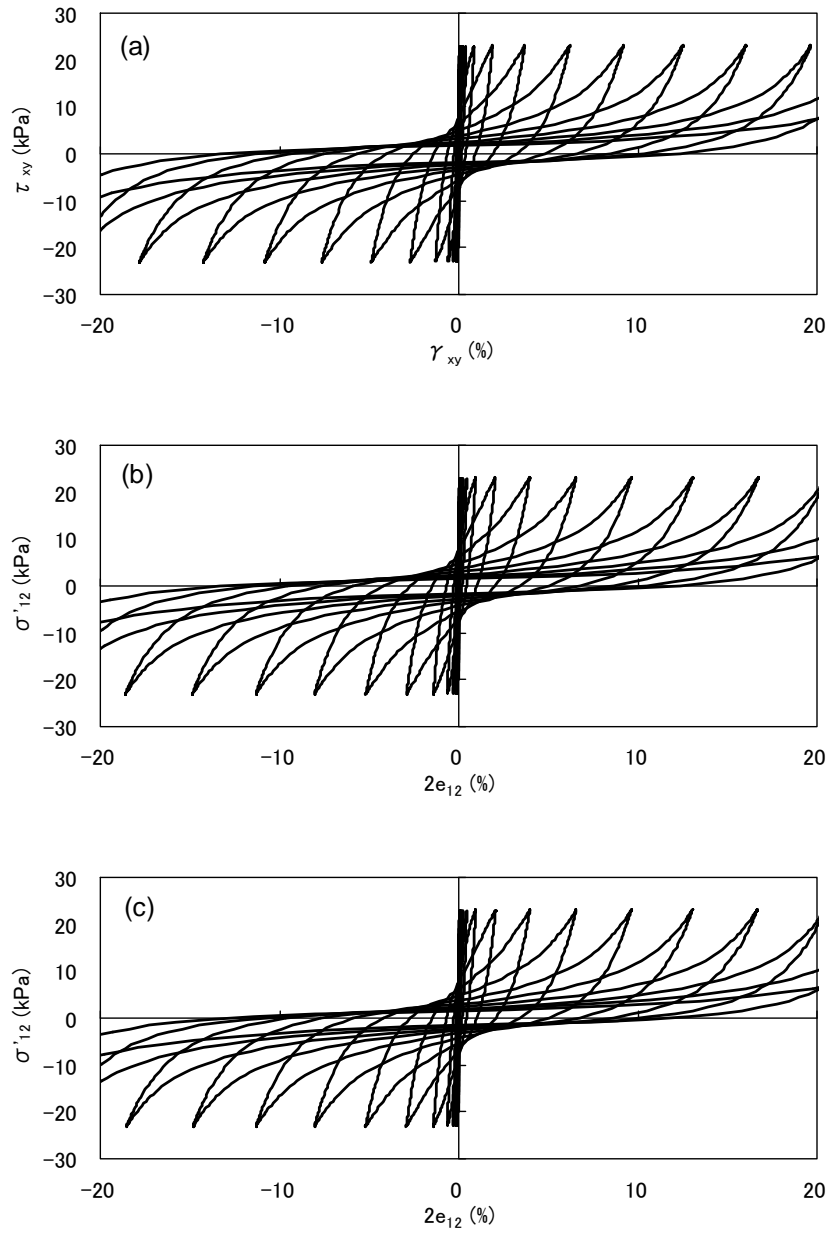


図 6.35 せん断応力-せん断ひずみ関係 ($q_{us} = \infty$): (a) 微小変形解析; (b) 大変形 TL 法;
(c) 大変形 UL 法

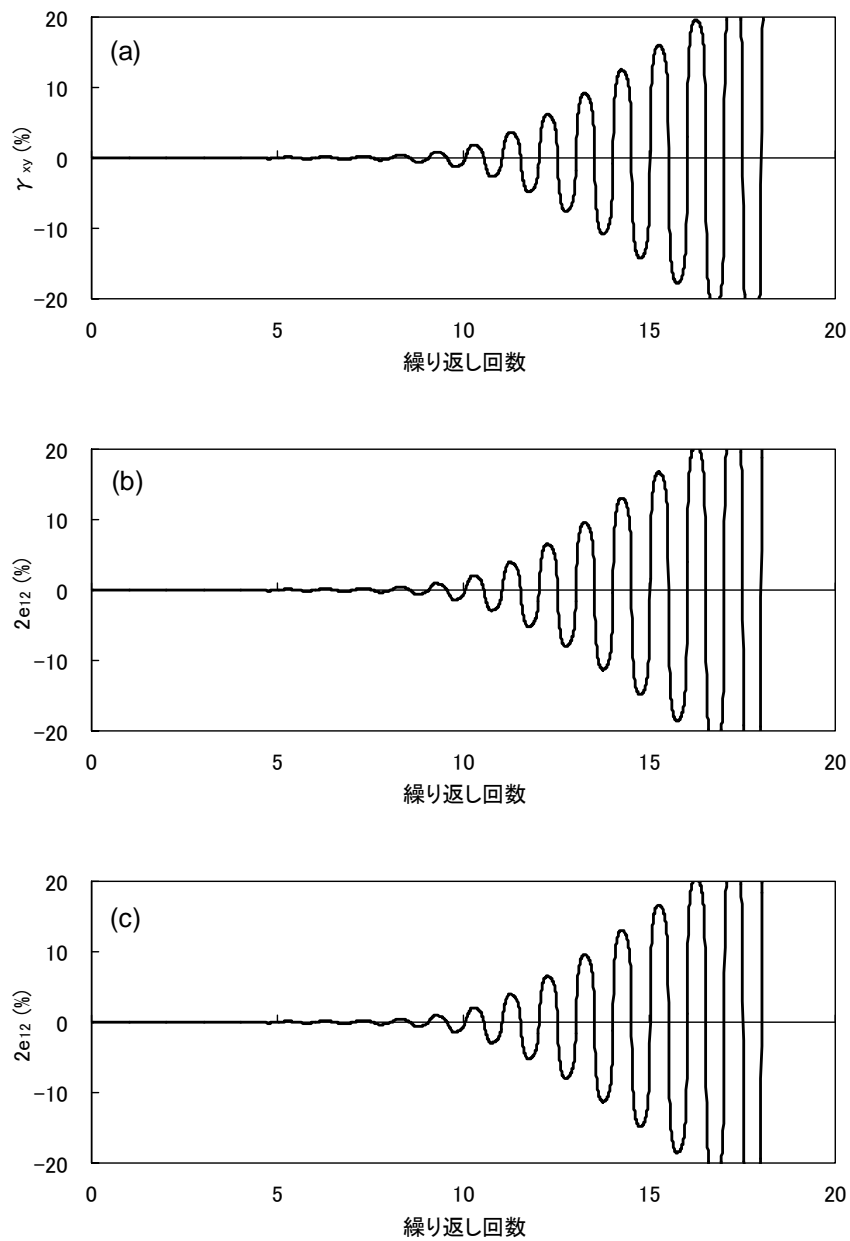


図 6.36 せん断ひずみ時刻歴 ($q_{us} = \infty$) : (a) 微小変形解析 ; (b) 大変形 TL 法 ; (c) 大変形 UL 法

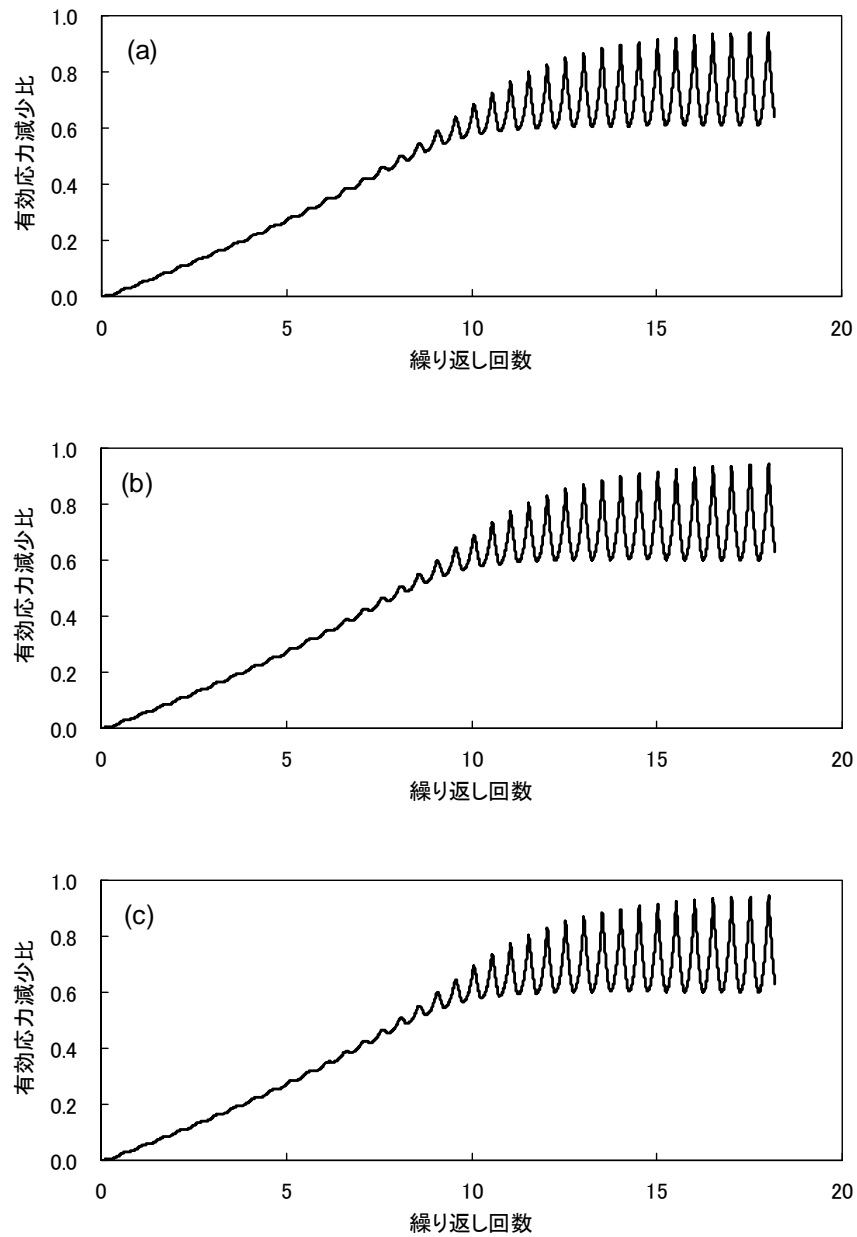


図 6.37 有効応力減少比時刻歴 ($q_{us} = \infty$): (a) 微小変形解析; (b) 大変形 TL 法; (c) 大変形 UL 法

6.4 非排水平面ひずみ圧縮試験

6.4.1 要素シミュレーションの概要

本節では、非排水条件下における砂の平面ひずみ圧縮試験に対する要素シミュレーションの結果について述べる。Han ら (1991), Finno ら (1997), Mokni ら (1998) の実験では、

供試体のサイズや用いた砂の物性の違いはあるものの、いずれの場合もひずみの局所化、および、それに伴うせん断帯の発現が確認されている。一例として、図 6. 38 に Mokni ら (1998) の実験結果を示す。ここでは、有限要素法による大変形解析を適用することで、このような現象が再現できるかどうかについて、微小変形解析との比較を行いながら定性的な側面からの検証を行う。なお、数値解析による既往の実験結果の再現性に関しては、

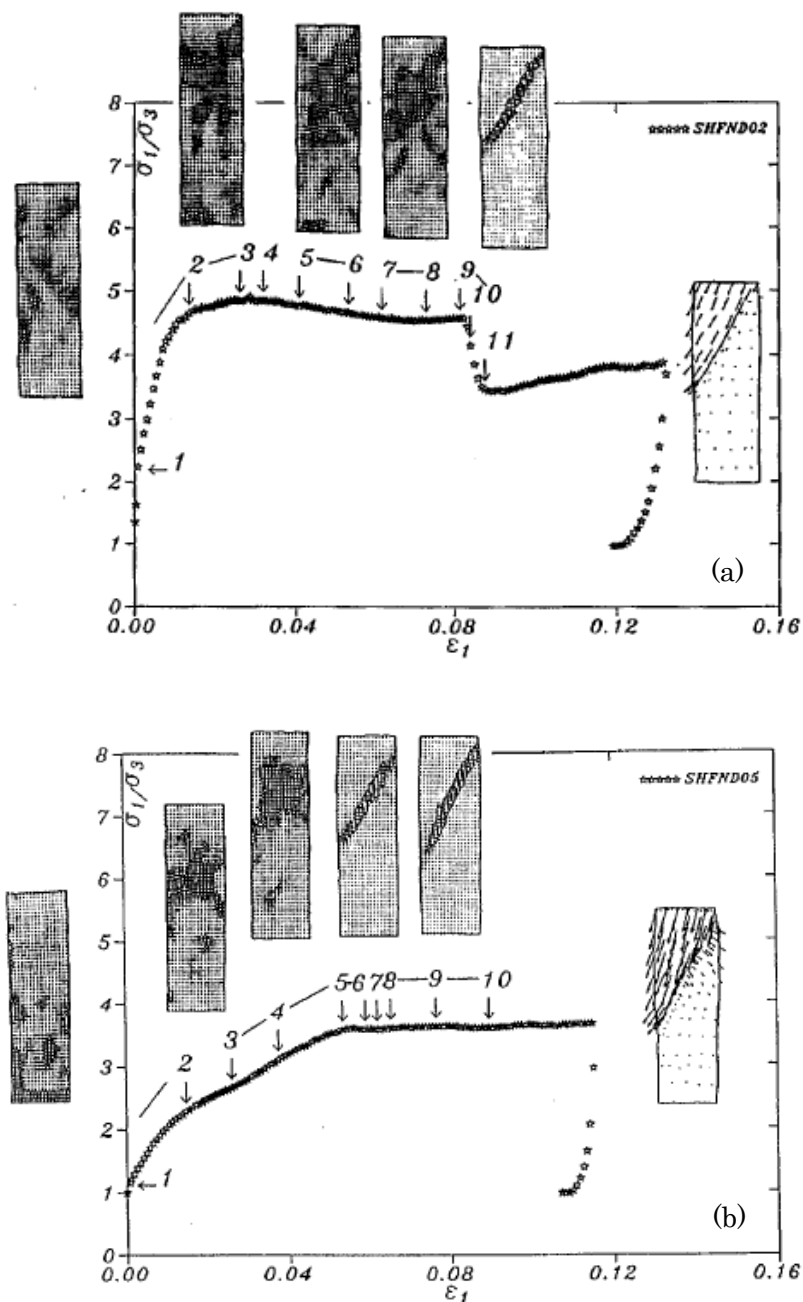


図 6. 38 非排水平面ひずみ圧縮試験におけるひずみの局所化 : (a) 密な Hostun RF sand ; (b) 緩い Hostun RF sand (Mokni ら (1998) より抜粋)

供試体のサイズや物性値を各々の実験に則して設定することで、より精密な検証を行う必要があると思われるが、これについてはここでは触れずに今後の研究に委ねることとする。

Han ら (1991) および Finno ら (1997) は、高さ 14.0cm、幅 4.0cm (高さ/幅=3.5) の供試体を用いて実験を行っている。また、Mokni ら (1998) が用いた供試体の寸法は、高さ 34.0cm、幅 10.0cm (高さ/幅=3.4) であった。本解析では、これらの供試体寸法を参考にして、図 6.39 に示すような高さ 30.0cm、幅 10.0cm (高さ/幅=3.0) のモデル (以後、基本モデルと称す) を設定した。要素シミュレーションでは、まずモデルに対して排水条件下で等方圧密 (98.0kPa) を行い、その後、非排水条件のもとで変位制御により平面ひずみ圧縮状態を再現した。解析に用いたモデルパラメータを表 6.3 に示す。前節までの要素シミュレーションと同様に、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の両者により大変形

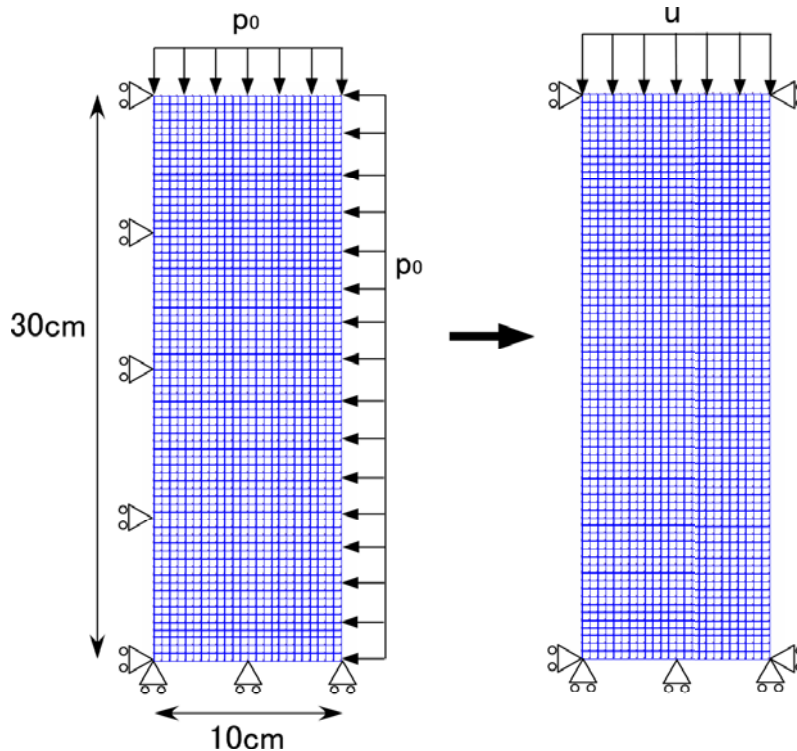


図 6.39 解析対象モデル (基本モデル) および要素シミュレーション手順

表 6.3 要素シミュレーションにおけるモデルパラメータ

K_{LUa}	r_K	l_K	G_{ma}	ϕ_f	h_{max}	ϕ_p	
(kPa)			(kPa)	($^{\circ}$)		($^{\circ}$)	
220300	0.5	2.0	84490	39.67	0.24	28.0	
$(p_a = 98\text{kPa})$							
r_{ε_d}	$r_{\varepsilon_d^c}$	q_1	q_2	ε_d^{cm}	S_1	c_1	q_{us}
							(kPa)
0.2	0.5	1.0	.5	0.1	0.005	1.0	60

解析を実施した。

6.4.2 基本モデルに対する要素シミュレーション結果

ここでは、基本モデルに対する要素シミュレーションの結果について述べる。まず、図 6.40～図 6.42 に、次式で表される最大せん断ひずみの分布図を示す。

$$\gamma = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (6.4)$$

ここに、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ は直ひずみ、 γ_{xy} は (工学的) せん断ひずみである。なお、大変形解析の場合は、式(6.4)に代えて以下で最大せん断ひずみを与える。

$$\gamma = \sqrt{(\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{22})^2 + (2\mathbf{e}_{12})^2} \quad (6.5)$$

ここに、 $\mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{22}, \mathbf{e}_{12}$ は Euler-Almansi ひずみテンソルの各成分である。

図 6.40 に示す微小変形解析の結果では、最大せん断ひずみの分布は軸対称な形状を呈しており、公称軸ひずみの増加とともにモデル中央から広範囲に渡りひずみが増大するものの、ひずみの局所化は見られない。公称軸ひずみが 5.83%の時点での最大せん断ひずみの最大値は、同図よりおよそ 15%であることがわかる。一方、図 6.41, 図 6.42 に示す Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法による大変形解析の結果では、公称軸ひずみの増加とともにひずみの局所化が顕在化するようになり、明瞭なせん断帯が形成されていることが確認できる。公称軸ひずみが 5.83%の時点での最大せん断ひずみの最大値は、およそ 50%にまで上昇しており、微小変形解析と比較すると大変形解析では明らかにひずみが局所的に増大している。せん断帯はモデル上面の一端 (TL 法の場合は右端, UL 法の場合は左端) から、垂直軸に対して反対側のモデル高さ中央付近に向かい形成されており、これは図 6.38 に示す実験結果とおおよそ合致するものである。Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の最大せん断ひずみの分布形状が、垂直方向の中心軸に対して鏡像の位置関係にあるのは興味深い。これは数値解析における打ち切り誤差などの微小な差異によるものと考えられる。なお、実験において供試体の幾何形状に微小な偏りやくぼみが存在することは十分考えられ、この影響を解析において考慮したい場合は、例えば Asaoka ら (1995) のように、一方の側方部のメッシュを意図的にごくわずかにくぼませることで、せん断帯の形成方向をある程度制御することができるものと思われる。

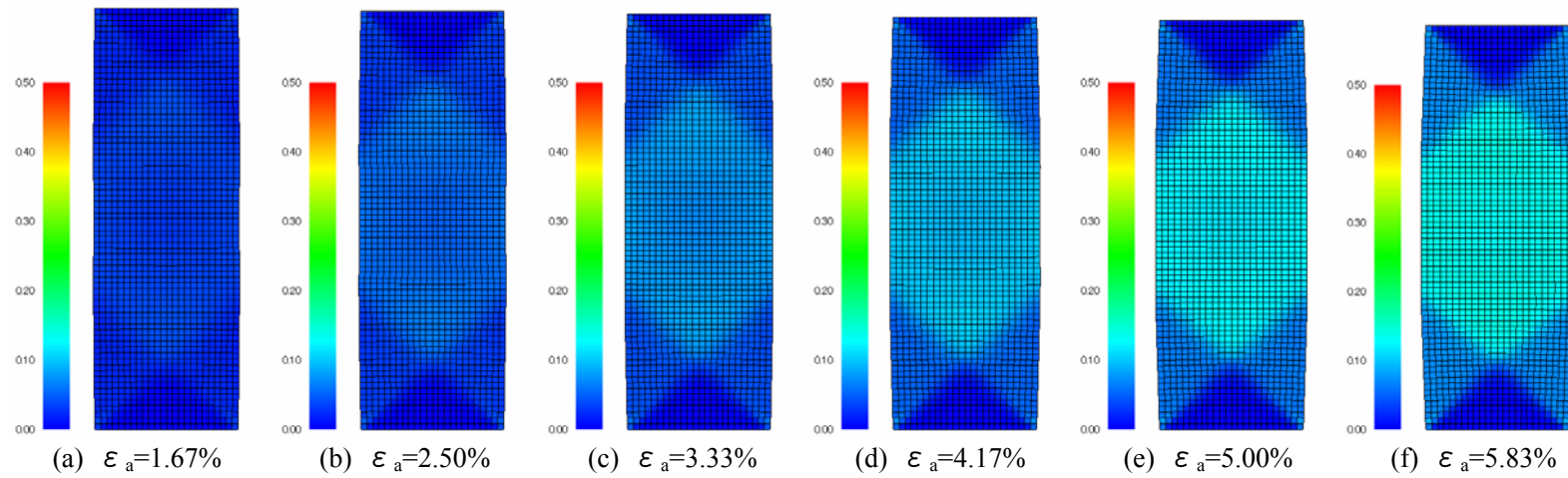


図 6.40 最大せん断ひずみ分布図 (微小変形解析)

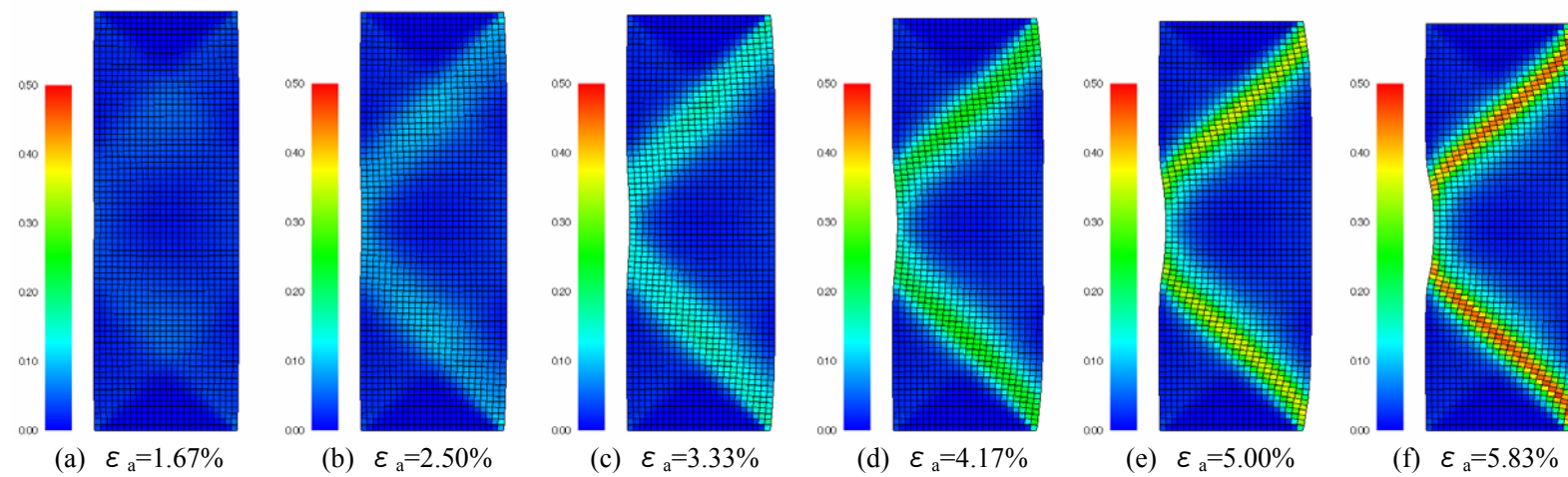


図 6.41 最大せん断ひずみ分布図 (大変形解析 TL 法)

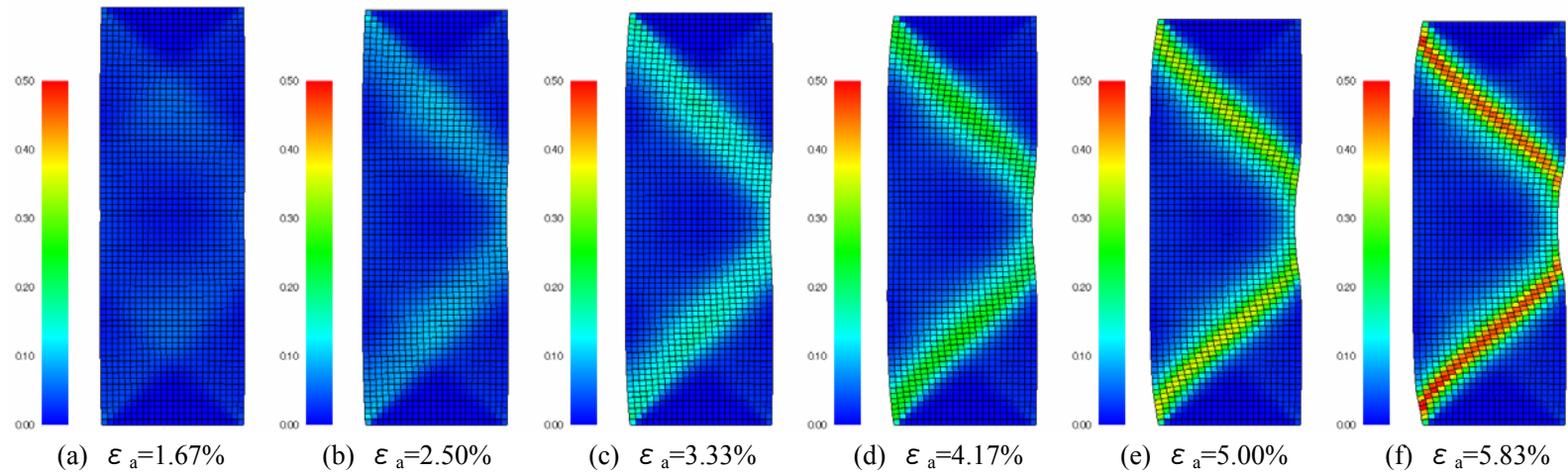


図 6.42 最大せん断ひずみ分布図 (大変形解析 UL 法)

ここで、表 6.3 における入力パラメータとしての非排水せん断強度を 200kPa とした場合、ひずみの局所化やせん断帯の形成にどのような影響が生じるかを調べてみる。結果の一例として、図 6.43 に Total Lagrangian 法を用いた場合の最大せん断ひずみの分布形状を示す。公称軸ひずみが 5.00%を超えるまでは、垂直軸に対して左右対称なひずみの分布形状を呈しており、モデルの上半分および下半分のそれぞれにおいて、クロス型 (X 字型) にひずみが増大していることが確認できる。公称軸ひずみをさらに増加させ続けると、最大せん断ひずみの分布形状はクロス型から図 6.41 に示すような形状へと至る。すなわち、クロス (X 字) の一方における最大せん断ひずみは、モデルに与える公称軸ひずみがある一定値に達した時点でそれ以上は増大しないものの、もう一方の最大せん断ひずみは局所的に増大を続け、最終的に明瞭なせん断帯を形成することがわかる。図 6.41 と図 6.43 を比較すると、等しい公称軸ひずみを与えた場合、非排水せん断強度が大きいほど発生する最大せん断ひずみは小さくなることから、非排水せん断強度が大きい場合には、ひずみの局所化およびせん断帯の発現に至るまでにより大きな公称軸ひずみを与える必要があると言える。

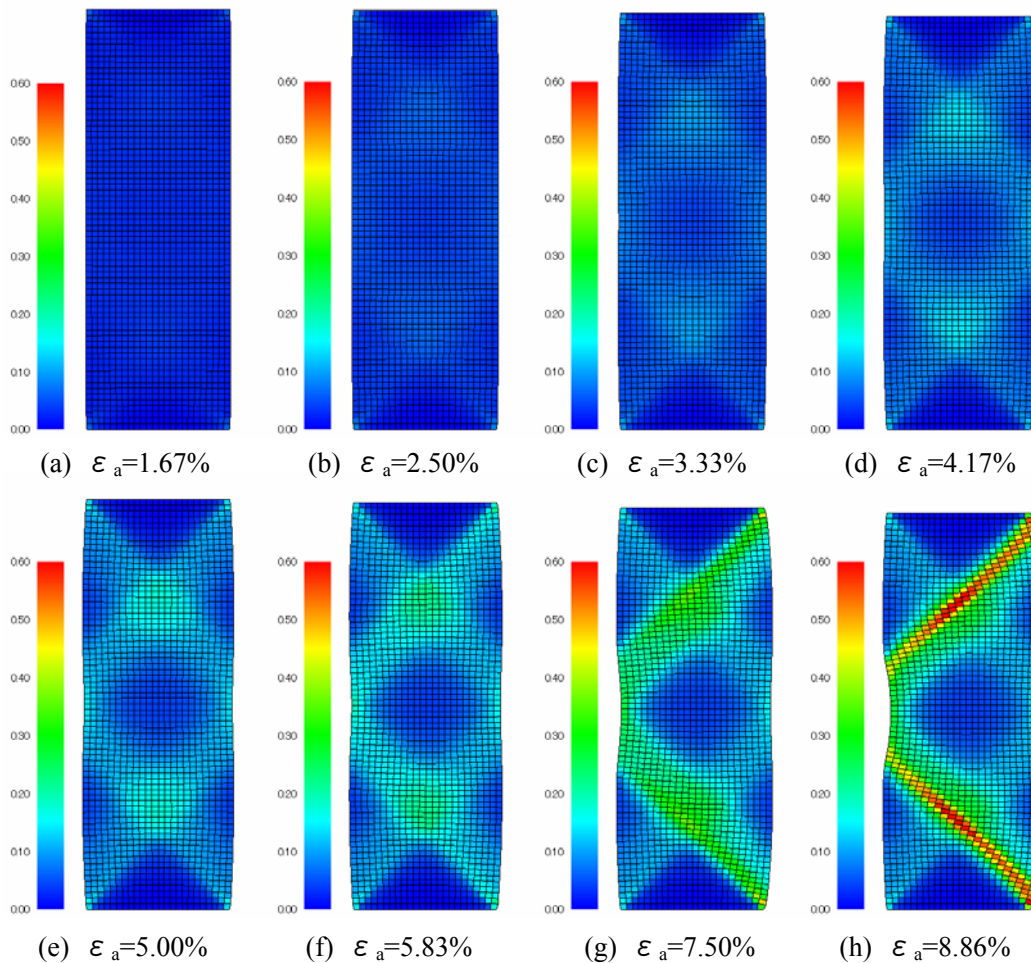


図 6.43 $q_{us} = 200\text{kPa}$ とした場合の最大せん断ひずみ分布図 (大変形解析 TL 法)

次に、表 6. 3 のパラメータを用いた場合（すなわち、非排水せん断強度を 60kPa とした場合）の有効応力経路、最大せん断応力-最大せん断ひずみ関係を示す。図 6. 44 に出力対象とした要素の位置を示す。なお、微小変形解析では図 6. 40 に示すように変形形状およびひずみ分布が軸対称であるので、要素番号 1660,1684 のデータは示さず、それぞれ要素番号 4,28 により代表するものとした。まず、図 6. 45 に示す微小変形解析における有効応力経路を見ると、いずれの要素においても平均有効応力がやや減少しながら、最大せん断応力が非排水せん断強度へと至っていること（定常状態）が確認できる。これは図 6. 2 におけるタイプ A とタイプ B の中間に位置するような挙動であり、等方圧密後の初期有効拘束圧や解析における種々のパラメータ（表 2.1 参照）に依存する。そのため、それらを変化させることにより、単調せん断試験の要素シミュレーションの場合と同様に、異なったタイプの有効応力経路が示されるものと考えられる。図 6. 46 は微小変形解析における最大せん断応力-最大せん断ひずみ関係であり、各要素の応力-ひずみ関係は非常に酷似しており、最大せん断ひずみがおよそ 5%を超えた時点から最大せん断応力の増減が見られず、これからも定常状態に至っていることが確認できる。同図より、いずれの要素においても最大せん断ひずみが最終的には数十%にまで至っており、図 6. 40 の結果と同様に、微小変形解析ではひずみが局所的に増大するという現象は生じえないことがわかる。

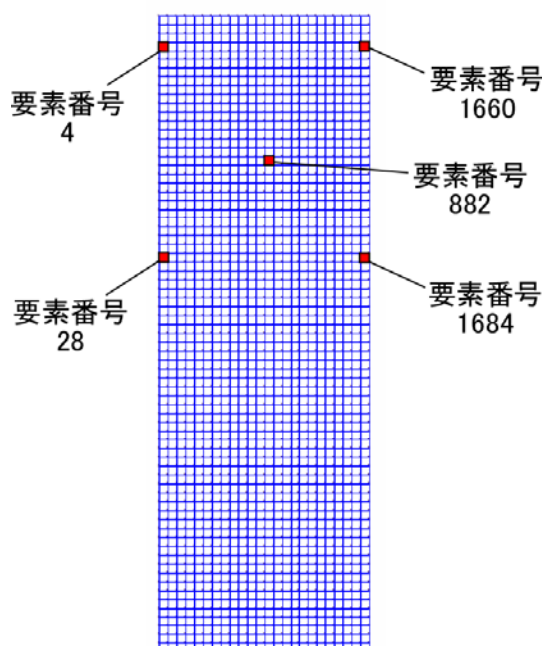


図 6. 44 出力対象要素

次に、Total Lagrangian 法による大変形解析の結果について述べる。図 6. 47 は有効応力経路、図 6. 48 は最大せん断応力-最大せん断ひずみ関係である。図 6. 47 より、図 6. 41 における最大せん断ひずみの局所化領域に該当する要素（要素番号 28,882,1660）とそうでない要

素（要素番号 4,1684）との有効応力経路が異なることがわかる。すなわち、ひずみが局所化している要素では、図 6.47(b)(c)(d)に示すように、わずかな平均有効応力の減少を伴いながら最大せん断応力は定常状態へと至る。それに対して最大せん断ひずみが進展しない要素では、同図(a)(e)に示すように定常状態へと向おうとするものの、有効拘束圧のさらなる減少とともに最大せん断応力も現象に転じる結果となる。このような差異は、いずれの要素が先に定常状態に至るかという問題に支配されているものと考えられる。すなわち、定常状態にある要素では、図 6.48(b)(c)(d)に見られるように最大せん断ひずみが数十%にまで急増し、最終的にひずみの局所化およびせん断帯の形成に寄与するものの、定常状態に未だ至っていない要素では、図 6.48(a)(e)のようにひずみの硬化領域において最大せん断応力が減少することで除荷を受けるような状態となり、最終的に最大せん断ひずみの増加はほぼ見られない。このような傾向は、図 6.49 に示す Updated Lagrangian 法による有効応力経路、および、図 6.50 に示す最大せん断応力-最大せん断ひずみ関係においても同様に確認できる。

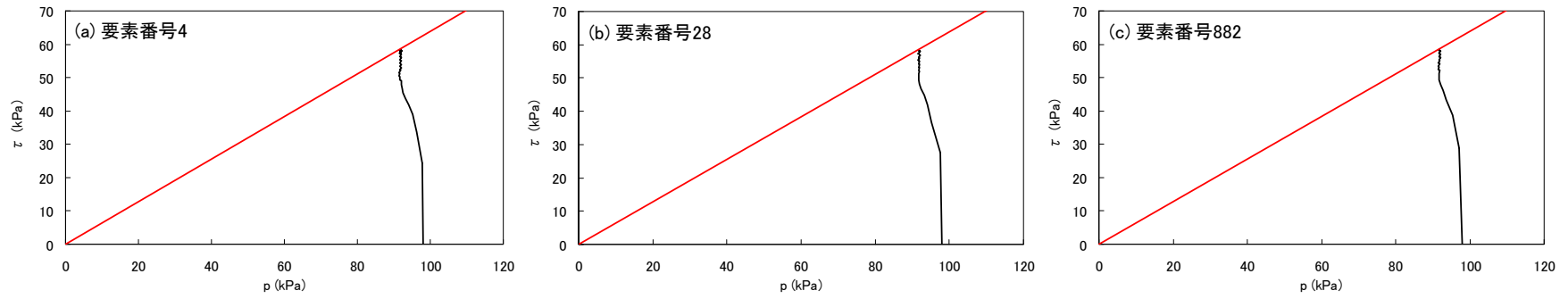


図 6.45 有効応力経路（微小変形解析）

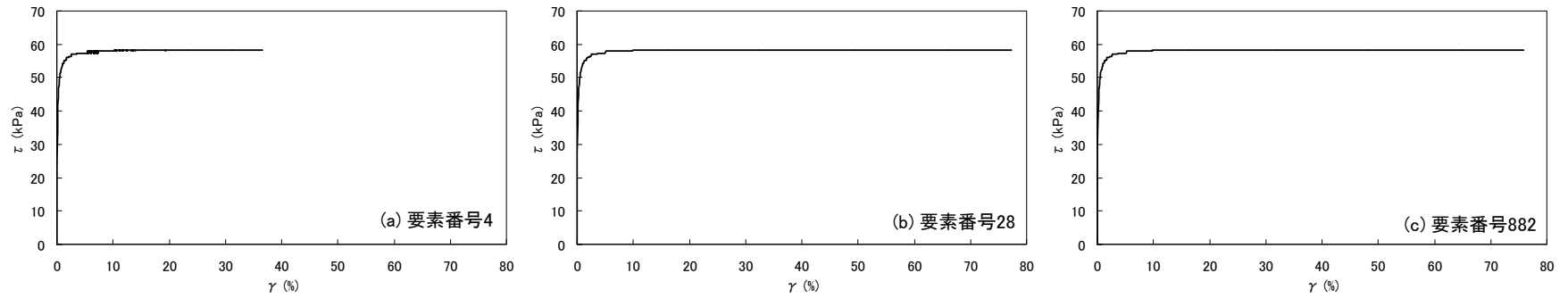


図 6.46 最大せん断応力-最大せん断ひずみ関係（微小変形解析）

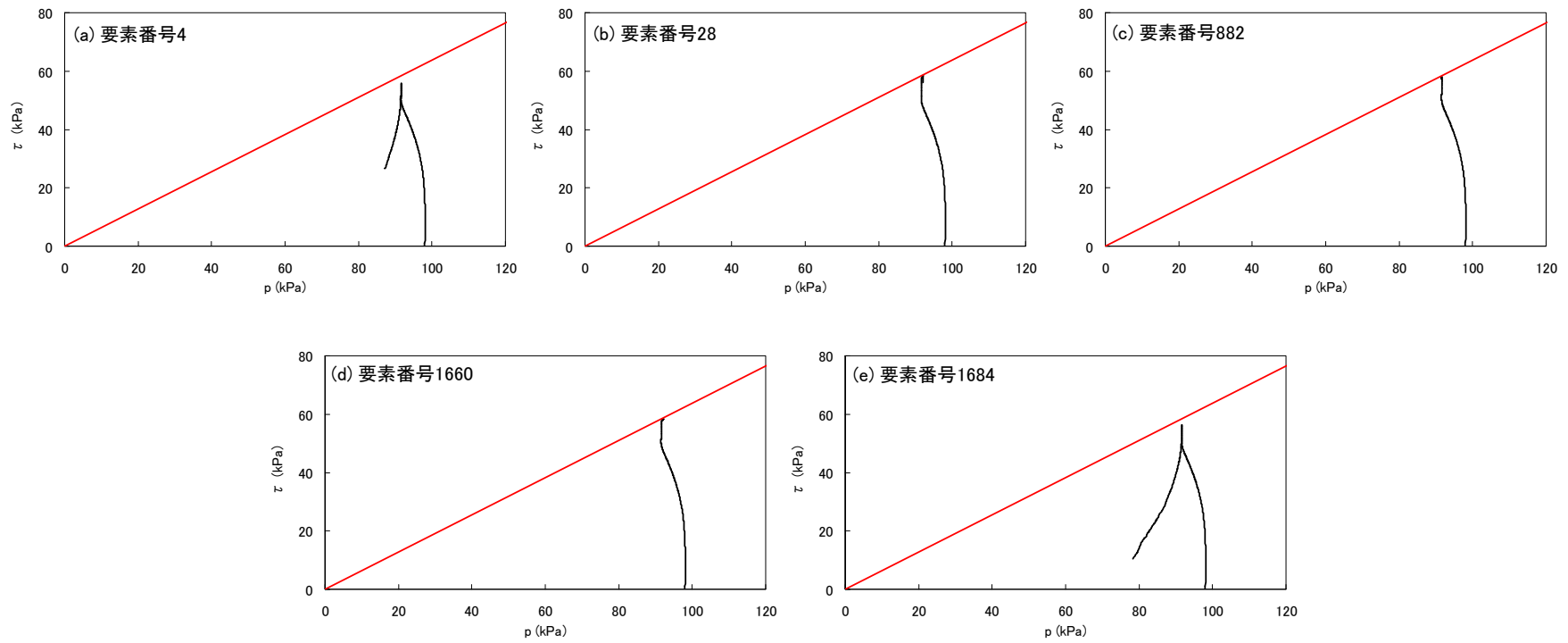


図 6.47 有効応力経路 (大変形解析 TL 法)

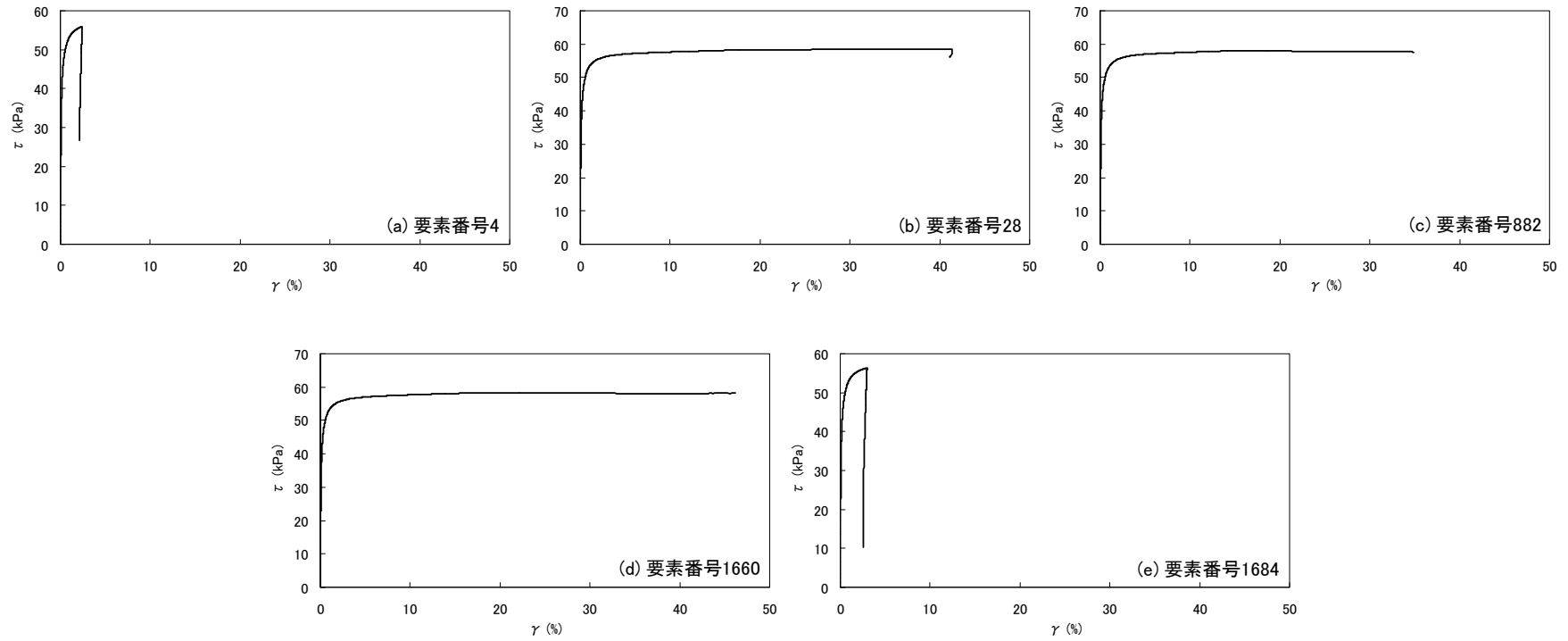


図 6.48 最大せん断応力-最大せん断ひずみ関係 (大変形解析 TL 法)

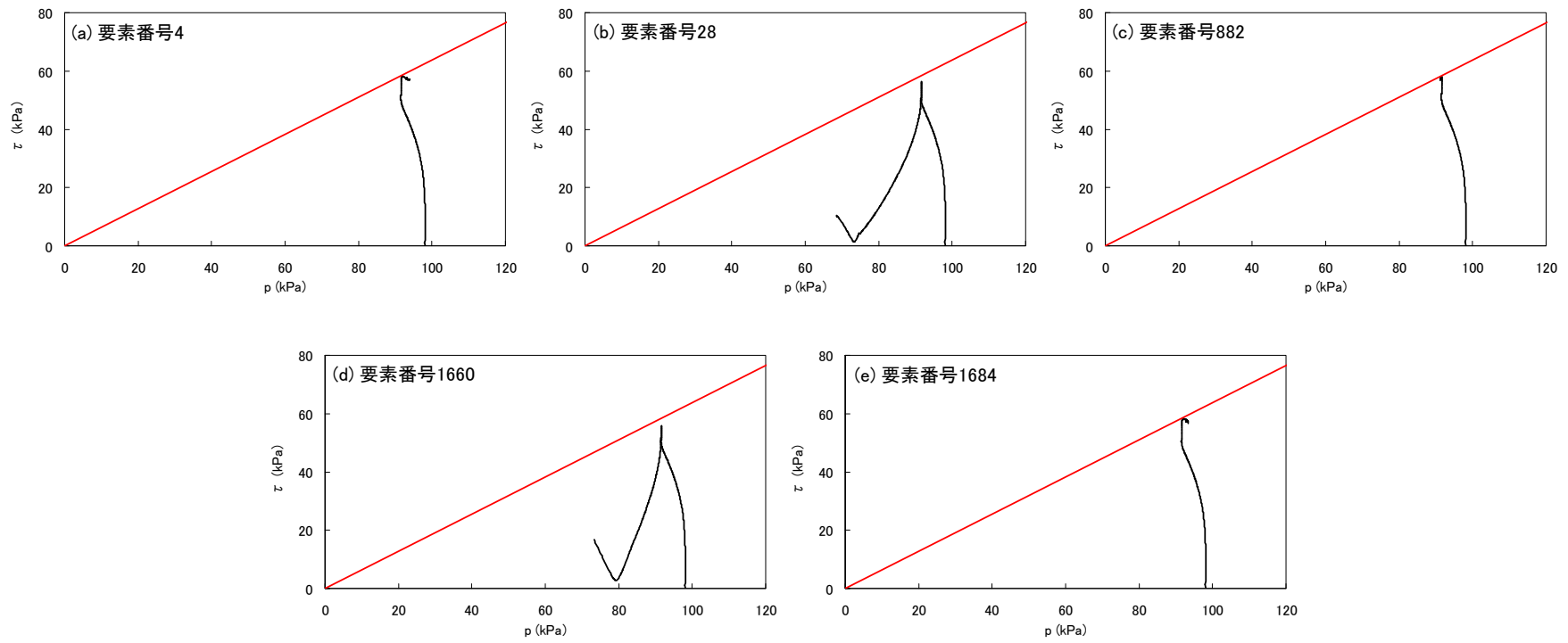


図 6.49 有効応力経路（大変形解析 UL 法）

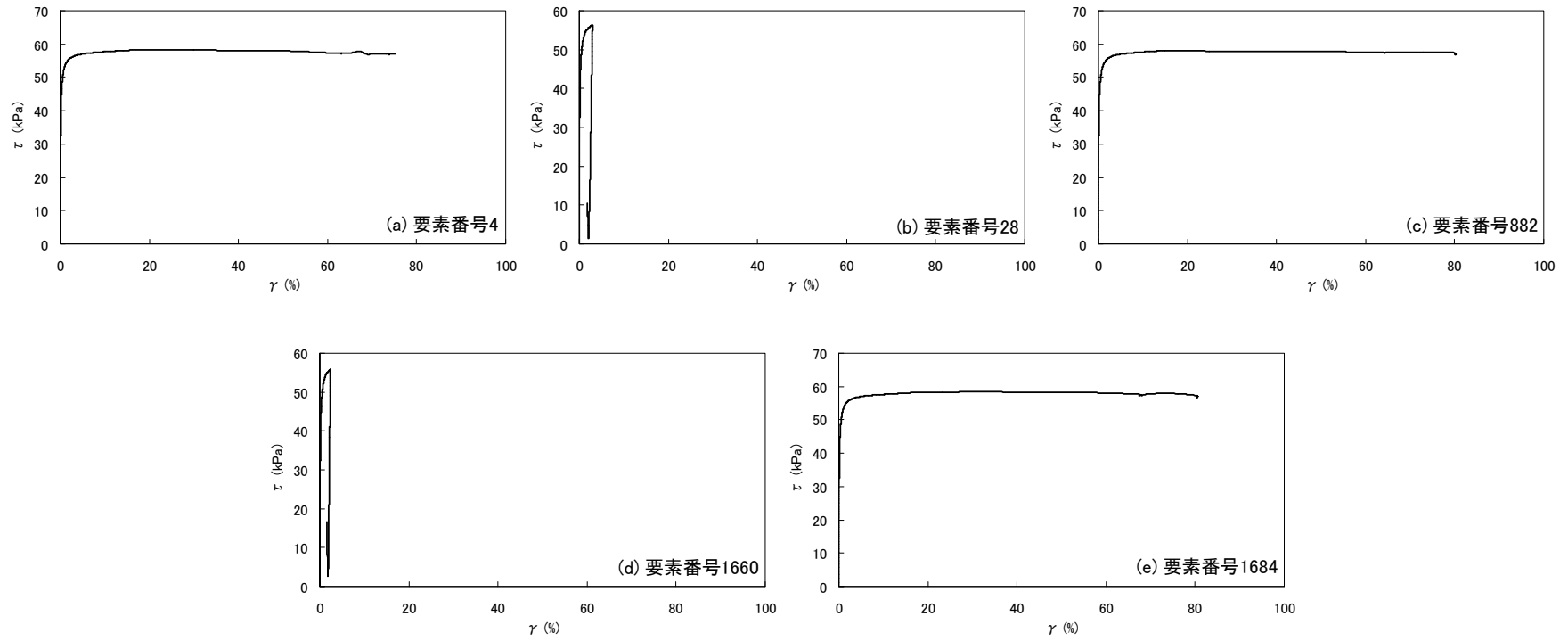


図 6.50 最大せん断応力-最大せん断ひずみ関係 (大変形解析 UL 法)

6.4.3 低アスペクト比モデルに対する要素シミュレーション結果

前項では、図 6.39 に示すような高さとの比が 3 : 1 のモデルを対象とした。ここでは、モデルの幾何的形狀、特にアスペクト比が変化した場合、ひずみの局所化およびせん断帯の形成にどのような影響を及ぼすかについて考察を行う。図 6.51 に本項で対象とする低アスペクト比モデル（高さ : 幅 = 3 : 2）のメッシュ分割図、および、要素シミュレーションの手順を示す。要素シミュレーション手順は、図 6.39 の基本モデルの場合と同様であるので、ここでの説明は割愛する。また、解析に用いたモデルパラメータも、基本モデルと同様に表 6.3 に示すとおりである。

ここでは最大せん断ひずみの分布図を示す。図 6.52 は微小変形解析、図 6.53 は Total Lagrangian 法による大変形解析、図 6.54 は Updated Lagrangian 法による大変形解析の結果である。いずれの場合も、公称軸ひずみの増加とともに、クロス型（X 字型）に最大せん断ひずみが増大している様子が確認できる。ただし、図 6.52 の微小変形解析の結果では、ひずみが局所的に増大しているというより、むしろ比較的広い範囲に渡って（太い X 字型に）20%程度の最大せん断ひずみを生じている。中央部では最大せん断ひずみの値はおおよそ 40%にまで増大しており、図 6.40 における最大値よりも 30%ほど大きい。これはアスペクト比が低いことによるものである。一方、図 6.53 および図 6.54 に示す大変形解析の結果より、まず、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の分布形状はほぼ等しいことがわかる。同図より、アスペクト比が低い場合は、最大せん断ひずみはクロス型（X 字型）に局所化する傾向にあり、最終的にモデルの対角頂点を結ぶような 2 本のせん断帯が形成される。モデル中央部ではおおよそ 80%の非常に大きな最大せん断ひずみが生じており、それ以外のせん断帯部においても 40%程度のひずみが発生している。図 6.41、図 6.42 と 図 6.53、図 6.54 を比較すると、アスペクト比の違いによりひずみの局所化に明らかな差が生じ、異なる形状のせん断帯が形成されることが確認できる。また、アスペクト比が高い場合は、供試体における微小な偏りがひずみの局所化およびせん断帯の形成に多大な影響を及ぼすものと考えられるが、アスペクト比が低い場合は、供試体の変形に対する幾何的な拘束条件が強い（すなわち、変形の自由度が小さく変形モードが制限される）ために、その影響は比較的小さいものと思われる。

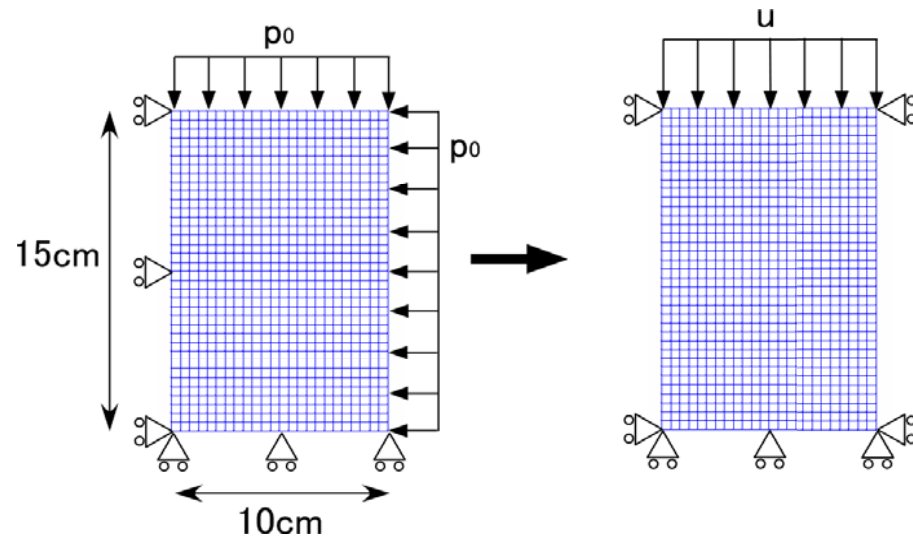


図 6.51 解析対象モデル（低アスペクト比モデル）および要素シミュレーション手順

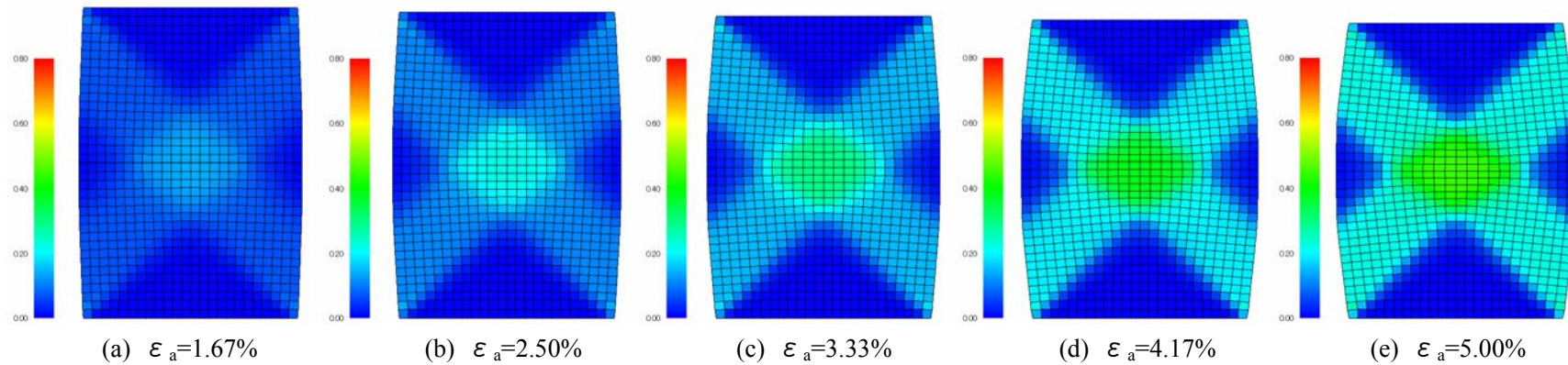


図 6.52 最大せん断ひずみ分布図（微小変形解析）

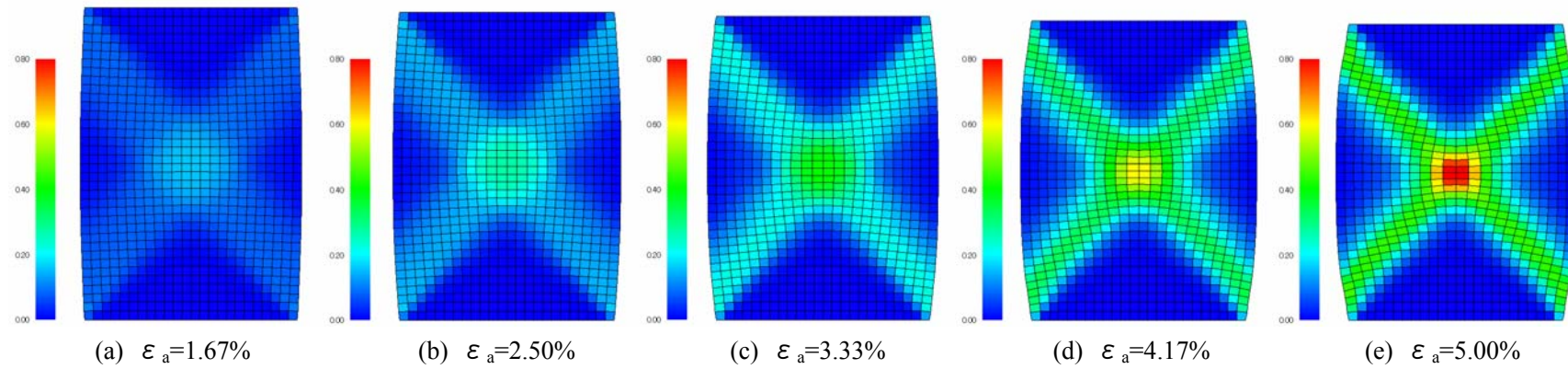


図 6.53 最大せん断ひずみ分布図 (大変形解析 TL 法)

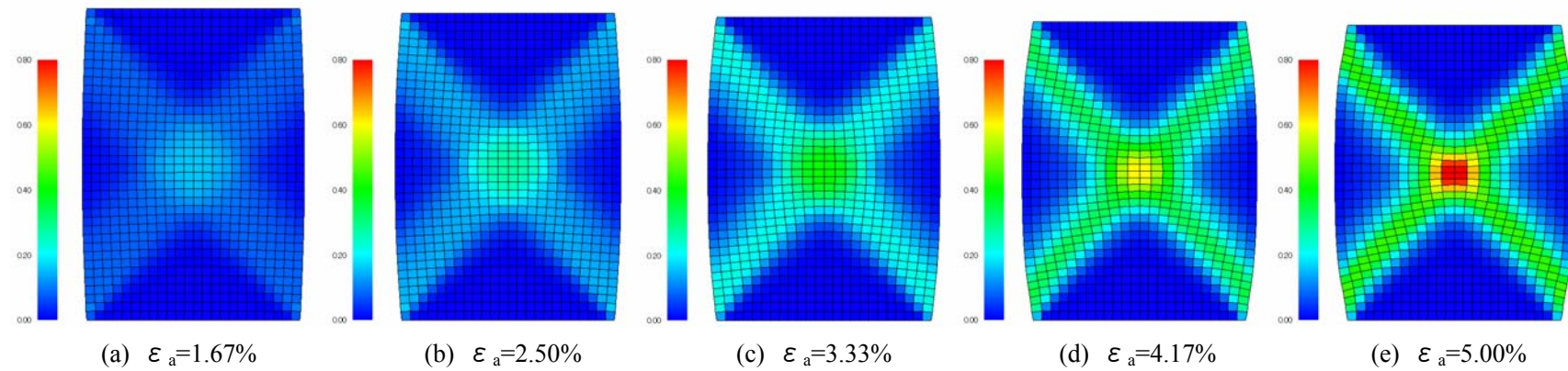


図 6.54 最大せん断ひずみ分布図 (大変形解析 UL 法)

6.4.4 1/4モデルに対する要素シミュレーション結果

ここでは、図 6.39 に示す基本モデルの軸対称性を考慮し、図 6.55 のような 1/4 モデル(高さ 15cm, 幅 5cm) を用いて要素シミュレーションを実施した。図 6.39 における要素シミュレーションの拘束条件を 1/4 モデルで等価に再現するため、図 6.55 のように強制変位を与える際には 1/4 モデルの左方境界を鉛直ローラーとし、右方境界は右頂点を除き水平方向の自由度を持たせることとした。解析に用いたモデルパラメータは表 6.3 に示すとおりである。

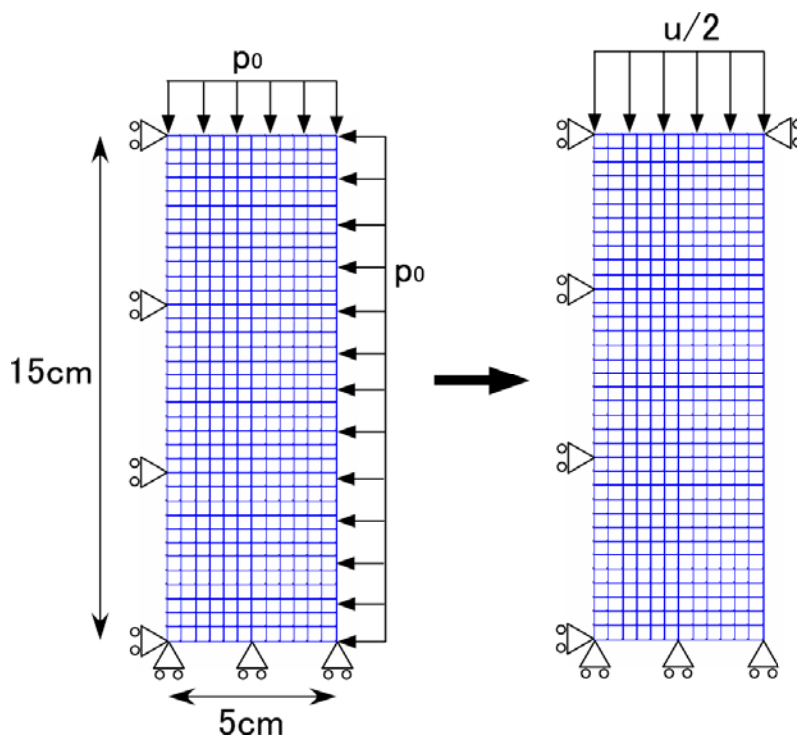


図 6.55 解析対象モデル (1/4 モデル) および要素シミュレーション手順

まず、図 6.56 に示す微小変形解析での最大せん断ひずみの分布図より、公称軸ひずみが 7.5%の時点において、モデル中央高さより概ね下の領域で最大せん断ひずみが 20%程度まで上昇していることがわかる。しかし、ひずみが局所的に増大している様子は見られず、そのためせん断帯も存在しない。この結果は、図 6.40 に示す基本モデルの結果と整合するものであり、実際、基本モデルの最大せん断ひずみ分布図に対して右上の 1/4 部分を切り取れば、図 6.56 に示す 1/4 モデルの分布形状とほぼ一致することが確認できる。このことより、軸対称なモデルに対して微小変形解析を実施する場合は、軸対称性を考慮した 1/4 モデルを適用すれば十分である。ただし、いずれの場合、すなわち基本モデルでも 1/4 モデルでも、ひずみの局所化やそれに伴うせん断帯の発生は考慮できないため、ここで対象とするような変形から破壊に至る現象を数値解析により追跡するためには、微小変形解析は不適

であると言える。

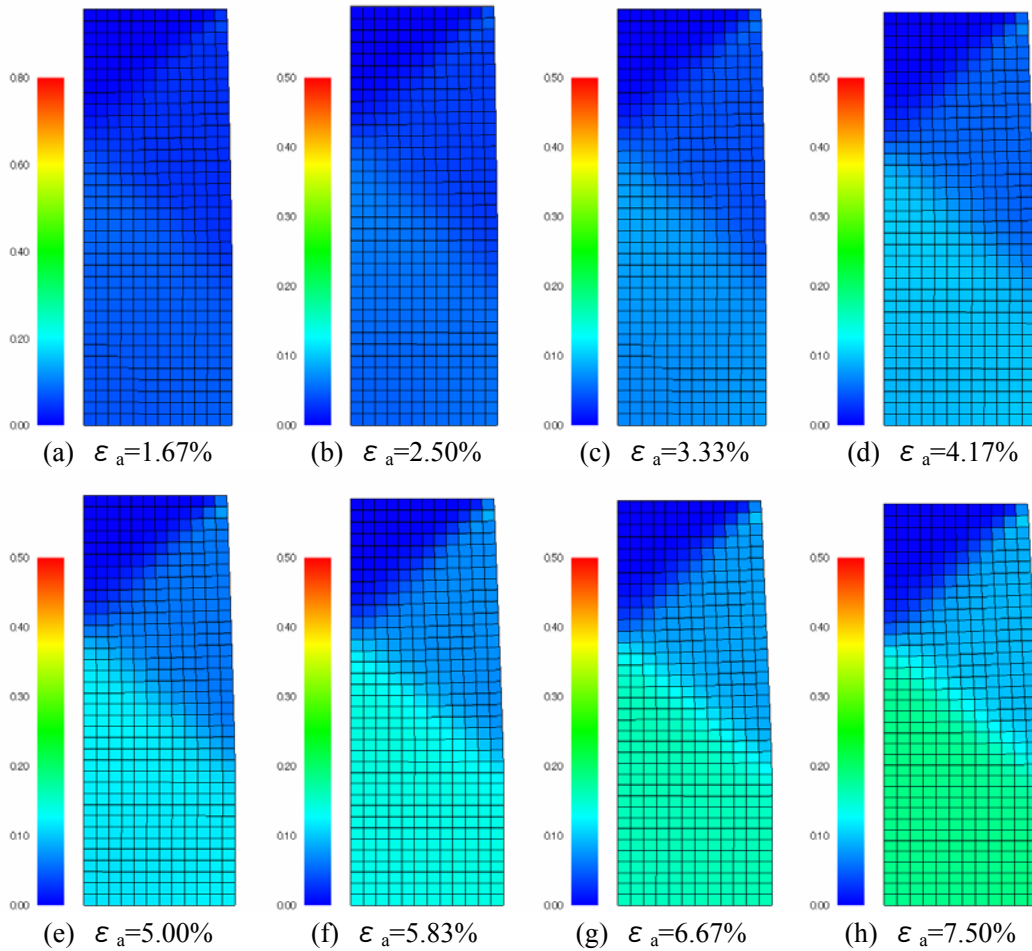


図 6.56 最大せん断ひずみ分布図（微小変形解析）

次に、大変形解析における最大せん断ひずみの分布図を図 6.57 および図 6.58 に示す。図 6.57 が Total Lagrangian 法を、図 6.58 が Updated Lagrangian 法を適用した場合の結果である。両図より、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法のいずれの解析手法を用いても、最大せん断ひずみの分布形状にほぼ差は生じないことが確認できる。最大せん断ひずみは水平方向の自由度が拘束されている左方境界の中央付近で最も増大し、公称軸ひずみが 7.5% の段階でおよそ 50% の大きな値となっている。また、ひずみの局所化に伴うせん断帯は、左方境界中央部から右方境界の上下端に向かう形で進展している。ここでの結果と基本モデルに対して Total Lagrangian 法を適用した場合の図 6.41 のひずみの分布形状を比較すると、図 6.57 における右肩上がりのせん断帯の形成は共通しているものの、それ以外の形状は大きく異なることが確認できる。基本モデルを用いた場合、1/4 モデルにおける左方境界（基本モデルでは垂直方向の中心軸に相当）でのひずみの局所的な増大傾向は見ら

れず、また、基本モデルの上半分の領域では右肩下がりのせん断帯は形成されていない。さらに、発生する最大せん断ひずみの大きさを比較すると、基本モデルでは公称軸ひずみが5.83%の時点で最大値が50%程度であるのに対し、1/4モデルでは最大で35%程度であり、最大せん断ひずみにして約15%の差異が生じている。一方、基本モデルに対して Updated Lagrangian 法を適用した図 6.42 では、せん断帯の発生方向が 1/4モデルにおける図 6.58 とは異なっており、単純に結果を比較することが難しい。しかし、やはり 1/4モデルにおける左方境界でのひずみの局所的な増大傾向などは、基本モデルの結果には認められない。以上のことより、ひずみの局所化やそれに伴うせん断帯の形成を数値解析において再現するためには、微小変形解析ではなく大変形解析を適用する必要がある、さらに、図 6.55 のような 1/4モデルを用いるのではなく、図 6.39 に示すような全体系としての基本モデルを用いるべきである。

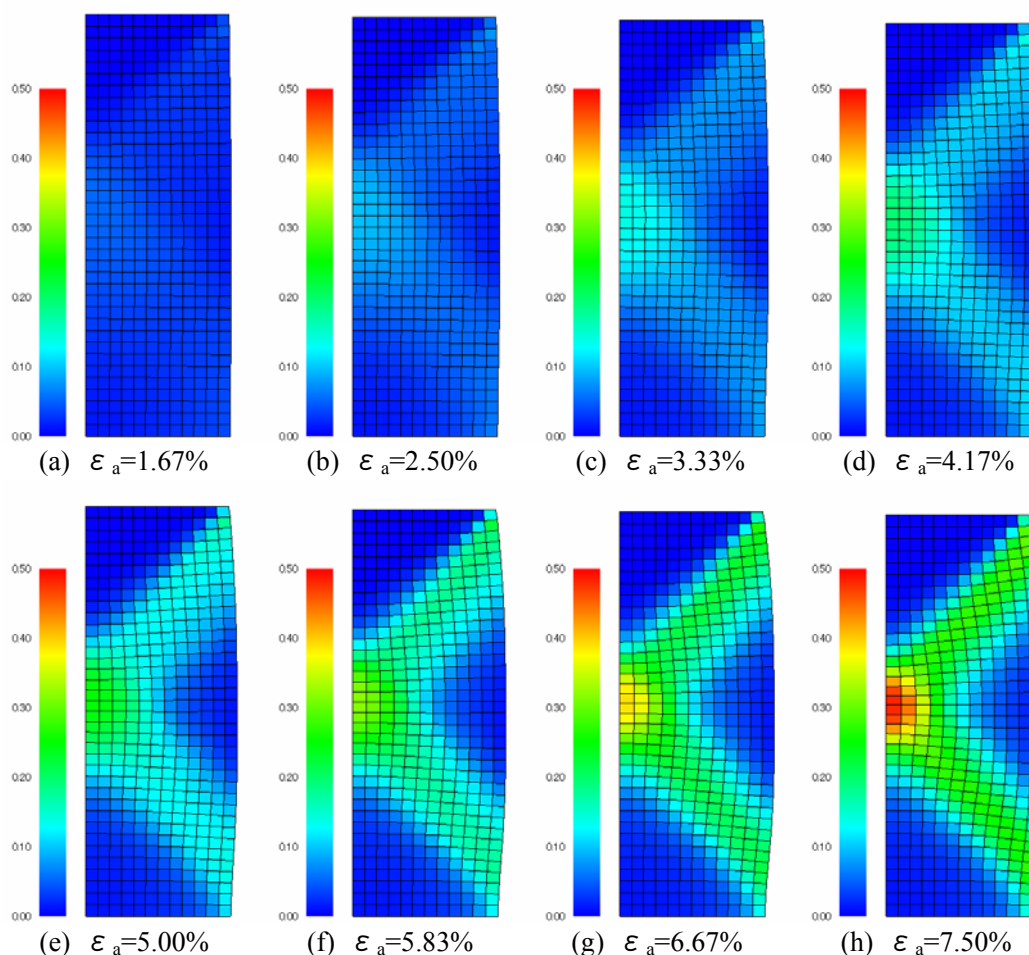


図 6.57 最大せん断ひずみ分布図 (大変形解析 TL 法)

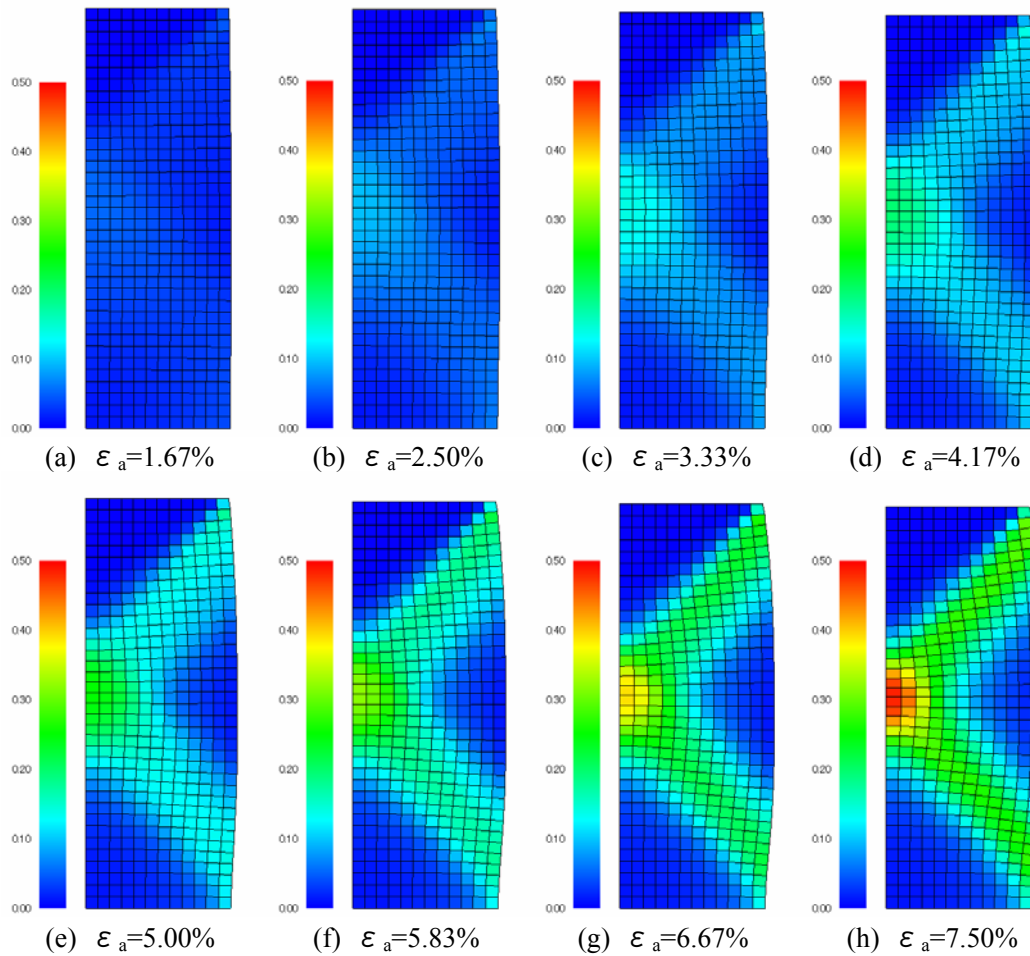


図 6.58 最大せん断ひずみ分布図 (大変形解析 UL 法)

6.5 まとめ

本章では、第 3 章で述べた大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式を用いて、各種の要素シミュレーション解析を実施した。数値解析では、第 4 章で示した間隙水で満たされた多孔質体の大変形理論に基づく支配方程式を適用することとし、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の両者により要素シミュレーションを実施した。ここで対象としたのは、砂の非排水単調せん断試験、非排水繰り返しせん断試験、および、非排水平面ひずみ圧縮試験の 3 種である。大変形解析との比較のため、第 2 章で述べた微小変形理論に基づく多重せん断モデル構成式を用いた要素シミュレーションもあわせて実施した。以下に各シミュレーションにより得られた結論を簡潔に示す。

まず、一要素モデルを用いて砂の非排水単調せん断試験に対する要素シミュレーションを実施した。解析では排水条件下で等方圧密を行った後、非排水条件で変位制御により単調せん断変形を与えた。多重せん断モデル構成式が実際の砂における種々の定常状態を考

慮できるか検証するため、入力パラメータとしての非排水せん断強度を複数に変化させて解析を行った。単調せん断条件下において、微小変形解析ではせん断応力および最大せん断応力（せん断応力と軸差応力との二乗和平方根）のいずれで整理した場合も、目標として設定した非排水せん断強度において定常状態に至ることが確認された。一方、大変形解析では、最大せん断応力で整理した場合は微小変形解析と同様に目標とした非排水せん断強度において定常状態へと至ることがわかった。それに対してせん断応力は、せん断変形の進展に伴う幾何学的非線形性の影響により減少傾向を示し、一方で軸差応力成分は徐々に増加する結果となった。設定した非排水せん断強度や圧密後の初期拘束圧、また用いたパラメータによらず、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の結果はほぼ一致することが確認された。また、定常状態へと至る有効応力経路は種々のパラメータにより制御が可能であり、適宜パラメータを調節することで室内試験で得られるピーク強度や変相領域での挙動を精度よく再現することができた。

次に、一要素モデルを用いて砂の非排水繰返しせん断試験に対する要素シミュレーションを実施した。まずモデルに対して排水条件下で等方圧密を行い、その後、非排水条件のもとで応力制御により繰返しせん断を与えた。繰返しせん断応力比は 0.23 とし、慣性項の影響は無視できるものとして静的環境下で解析を行った。解析では定常状態における非排水せん断強度を変化させ、それが有効応力経路や応力-ひずみ関係に及ぼす影響について検討を行った。液状化抵抗曲線を求める際に用いる両振幅ひずみ 5%に満たないひずみ領域では、有効応力経路やせん断ひずみ時刻歴などの解析結果に対して、微小変形解析と大変形解析における明瞭な差異は認められず、このことより液状化抵抗曲線の算定に関しては微小変形解析でも十分な精度での結果が得られることが確認された。それに対して、ひずみが（片振幅で）10%を超えるような領域においては、両者の結果の差が顕在化するようになり、このような大ひずみ領域での現象を取り扱う場合には大変形解析が必要不可欠であることもあわせて示された。一方、定常状態における非排水せん断強度の値は、繰返しせん断条件下でも特に変相領域から破壊線へと至る過程において、有効応力経路や応力-ひずみ関係に大きな影響を与えることが確認された。それに対し、非排水せん断強度の差が液状化判定基準としての両振幅 5%ひずみを発生させるのに必要な繰返し回数に及ぼす影響は、繰返しせん断応力比が 0.23 の条件ではせいぜい 2,3 回程度であった。しかし、これは与えた繰返しせん断応力比にも依存するものと思われ、なおかつひずみの伸び方には明瞭な差異が認められることから、基本的には定常状態での非排水せん断強度を考慮した上で繰返しせん断試験のシミュレーションを行うべきであるとの結論が示された。

最後に、非排水条件下における砂の平面ひずみ圧縮試験に対する要素シミュレーションを実施した。まずモデルに対して排水条件下で等方圧密（98.0kPa）を行い、その後、非排水条件のもとで変位制御により平面ひずみ圧縮状態を再現した。要素シミュレーションは、高さとの比が 3 : 1 の基本モデル、高さとの比を 3 : 2 に変更した低アスペクト比モデル、基本モデルの軸対称性を考慮した 1/4 モデルの 3 種類のモデルを用いて行った。まず、

基本モデルに対して微小変形解析を適用した場合、モデルの変形形状および最大せん断ひずみ分布は軸対称であり、ひずみが局所的に増大する傾向は見られなかった。一方、大変形解析を適用した場合は、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の両者において、モデルに与える軸ひずみの増加とともに最大せん断ひずみの局所化が顕著になり、明瞭なせん断帯が形成されるに至った。ただし、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の最大せん断ひずみの分布形状は、中心軸に対して鏡像の位置関係になっており、これは数値解析における打ち切り誤差などの微小な差異によるものと考えられる。次に、低アスペクト比モデルを用いた場合、微小変形解析では基本モデルと同様に明瞭なひずみの局所化は見られなかった。それに対して Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法による大変形解析では、最大せん断ひずみはクロス型 (X 字型) に局所化する傾向にあり、モデルの対角頂点を結ぶような 2 本のせん断帯が形成された。これより、アスペクト比の違いによりひずみの局所化の分布に明らかな差が生じ、異なった形状のせん断帯が形成されることが示された。最後に、1/4 モデルを用いた場合、微小変形解析では最大せん断ひずみの局所化およびせん断帯の形成は確認できなかった。これは基本モデルの結果と整合するものであり、最大せん断ひずみの分布形状も両者においてほぼ一致していることから、微小変形解析では軸対称性を考慮した 1/4 モデルを適用すれば十分であることが示された。しかし、これらは本質的にひずみの局所化やそれに伴うせん断帯の発生は考慮できないため、変形から破壊に至るような現象を数値解析により追跡するためには、微小変形解析は不適であることが併せて明らかとなった。一方、大変形解析では、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の両者において、最大せん断ひずみの局所化が顕著に見られ、せん断帯の形成が確認された。しかし、その分布形状は明らかに基本モデルとは異なるものであり、ひずみの局所化やそれに伴うせん断帯の形成を数値解析において再現するためには、1/4 モデルではなく全体系としての基本モデルを用いるべきであることが示された。

第 7 章 大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式の地震応答解析における適用性

7.1 概要

本章では、前章での要素シミュレーションに続いて、各種形式の地盤・構造物系のモデルに対する有限要素法による地震時の被災事例解析を行う。数値解析に用いる土の構成モデルとしては、第 2 章および第 3 章で述べた新たなストレス-ダイレイタンスー関係に基づく多重せん断モデルを、他方、ケーソンのように弾性体としてモデル化される物質には、第 5 章で述べた多重せん断モデル型の線形弾性体構成式を適用することとした。また、有限要素法による数値解析においては、第 4 章で述べた間隙水で満たされた多孔質体の大変形理論に基づく支配方程式を適用することとした。ただし、前章での要素シミュレーションが静的解析であったのに対し、本章に示す地震応答解析は、慣性項の影響を考慮した動的解析であるため、数値解析では第 4 章で述べた時間積分法が用いられている。ここでも、前章と同様に、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の両者により数値解析を行うとともに、比較のために微小変形解析もあわせて実施した。

以上の方針に従って、液状化地盤の上に構築された盛土構造物、ケーソン式岸壁などを対象にした被災事例解析を行い、前章までに示したモデルを用いた場合、どの程度まで地震による被害状況（変形量や変形モードなど）を再現しうるかを検討する。また、大変形理論に基づく構成モデルおよび支配方程式を用いることで、微小変形解析により得られた結果との間にどのような差異が生じるかを検証し、地震時の地盤・構造物系の被害程度予測における大変形解析の適用性に関して論じることとする。

7.2 解析結果に影響を及ぼす諸要因

有限要素法による地震応答解析の結果を示す前に、ここでは、地盤・構造物系の解析精度に影響を与える要因をいくつか取り上げ、それらについて述べることとする。

(1) 間隙水の移動の効果

本章で示す解析では、間隙水の移動は考慮せず、最も基本的な非排水条件もしくは完全排水条件を課すこととした。すなわち、地盤・構造物系の自重解析では、自重に伴う砂の圧密現象に対して間隙水の透水係数が十分に大きいとして完全排水条件を、一方、地震動の作用下での液状化解析では、加振中の排水の効果は無視できるとして非排水条件を用い

て解析を行った。

実際には、間隙水の移動の効果を無視できないような事例も存在する。例えば、埋設管模型の振動台による浮上実験（中瀬ら，2003）では、間隙水の移動は砂のせん断変形特性に影響を及ぼし、その結果、埋設管の浮上量を左右するとされる（小堤ら，2003）。また、1995年の兵庫県南部地震の際のポートアイランドで見られたように、砂の負のダイレイタンスによる体積収縮の効果で排水が生じ、地盤の沈下が生じることもある（稲富ら，1997）。さらには、今後その発生が予想される東南海・南海地震などの海溝型地震では、長周期かつ継続時間が長時間に及ぶ地震波が地盤に加わるため、これまでのように非排水条件が成立しないことも考えられる。

これらの点は、今後、より厳密に考慮していく必要があると思われるが、本章で対象とする地盤・構造物系モデルでは、入力地震動の作用時間が十数秒から数分と短いこともあり、排水の影響は小さいものと思われる。一般に、地震時の排水による沈下量はせん断による変形量に比べて小さいので、前者を無視する場合が多い。排水沈下量は、液状化層の最大せん断ひずみと体積ひずみの関係（長瀬ら，1986）を用いて見積ることができる。例えば、1995 兵庫県南部地震の際に沈下した防波堤の被災事例解析では、上記の方法で求めた排水沈下量は、非排水条件下の解析で求めたせん断変形による沈下量よりかなり小さく、無視し得る程度であった（佐藤ら，2001）。以上のことを考慮して、本章に示す適用例では、非排水条件の仮定のもとで地震応答解析を行うこととした。

(2) Shear Locking 現象

これについては、4.6 節で具体的に述べたとおりである。本章で示す地震応答解析においても SRI 法を適用することとし、等方成分に対しては 1 次、偏差成分に対しては 2 次のガウス積分を用いて解析を行った。

なお、地盤・構造物系の解析では、その他にも、減衰定数の与え方や地盤・構造物間のジョイント要素の滑り挙動、また、粘性土や捨石など砂以外の要素のモデル化など、様々な要因が結果に影響を及ぼすとされる。これらについては、解析精度向上に関する既往の研究（小堤，2003）を参考にし、数値解析への適用を図った。

7.3 盛土遠心模型実験に対する検討

7.3.1 動的遠心模型実験の概要

ここでは、第 2 章および第 3 章で示した新たなストレス-ダイレイタンス関係を組み込んだ多重せん断モデルを用い、建設省土木研究所（現独立行政法人土木研究所）の動土質

研究室にて実施された盛土の動的遠心模型実験（建設省土木研究所，2000）に対する適用性を検証する。この動的遠心模型実験では，液状化が発生が想定される地盤上の盛土構造物に対して，法先固化補強の効果を確認するために，固化体の幅などを変化させることで一連の実験が行われた。ここでは，その一連の実験の中で，無対策断面に対して大加速度の地震波を入力したケース（Case11-7 と呼ばれている）を対象として，有限要素法による動的解析を実施する。Case11-7 の模型断面を図 7.1 に，入力地震動を図 7.2 に示す。これらに示される寸法は，モデルスケールを 1G 場のプロトタイプスケールに換算したものであり，数値解析も 1G 場のもとで実施した。

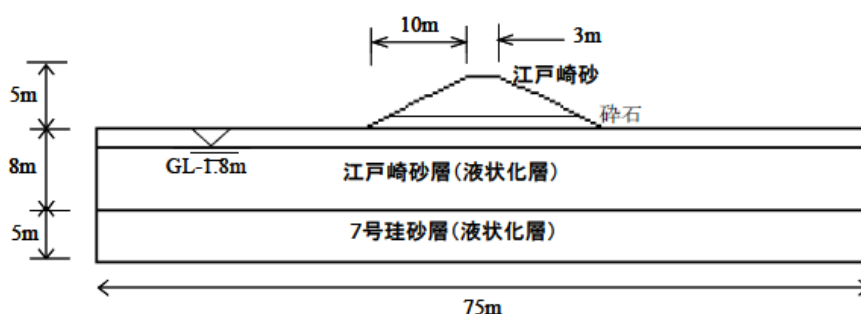


図 7.1 遠心盛土断面図（プロトタイプスケール）
（建設省土木研究所（2000）による）

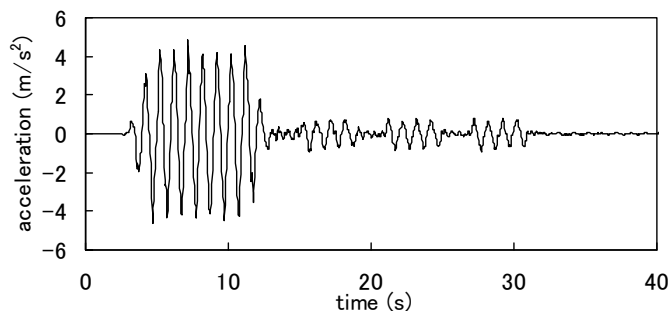


図 7.2 入力地震動（プロトタイプスケール）
（建設省土木研究所（2000）による）

遠心模型実験は，剛な土層内に作成された盛土模型を，50G の遠心加速度場において加振することにより行われた。土層の寸法は，幅 150cm，奥行き 30cm，深さ 50cm であり，側壁は剛となっている。盛土の基礎地盤の作成においては，下部層には密詰めの 7 号珪砂が，上部層には緩詰め江戸崎砂が用いられている。それぞれの層厚は，プロトタイプスケールで 5.0m および 8.0m である。その基礎地盤の上に，江戸崎砂により高さ 5m（プロトタイプスケール）の盛土が作成されている。各土層に対しては，物理試験および力学試験が実

施されており、模型地盤においては、50G 場での S 波速度も観測されている。表 7.1 に江戸崎砂と 7 号珪砂の物性について示す。

入力地震動は、図 7.2 に示すとおり、最初に振幅 400gal 程度の主要動が存在し、その後は 100gal 未満の余震が続いている。主要動による加振終了時の盛土天端沈下量は 204cm であり、余震終了時の同沈下量は 230cm であった。

表 7.1 江戸崎砂と 7 号珪砂の物性（建設省土木研究所（2000）による）

	江戸崎砂	7号珪砂
土粒子の密度 (g/cm^3)	2.684	2.642
細粒分含有率 F_c (%)	10.8	0.7
平均粒径 D_{50} (mm)	0.181	0.169
相対密度 D_r (%)	60.7	90.8

7.3.2 解析モデル

本解析において用いる解析モデルの土層分割、および、有限要素分割を図 7.3 に示す。本解析で対象とする模型実験に対しては、既にシミュレーション解析（国土技術研究センター，2002）が行われており、本解析で用いる図 7.3 のモデルは、そのときのデータを参考にして設定した。解析モデルの境界条件は、遠心模型実験の状態を模擬し、底面を固定境界、側方を鉛直ローラーとした。

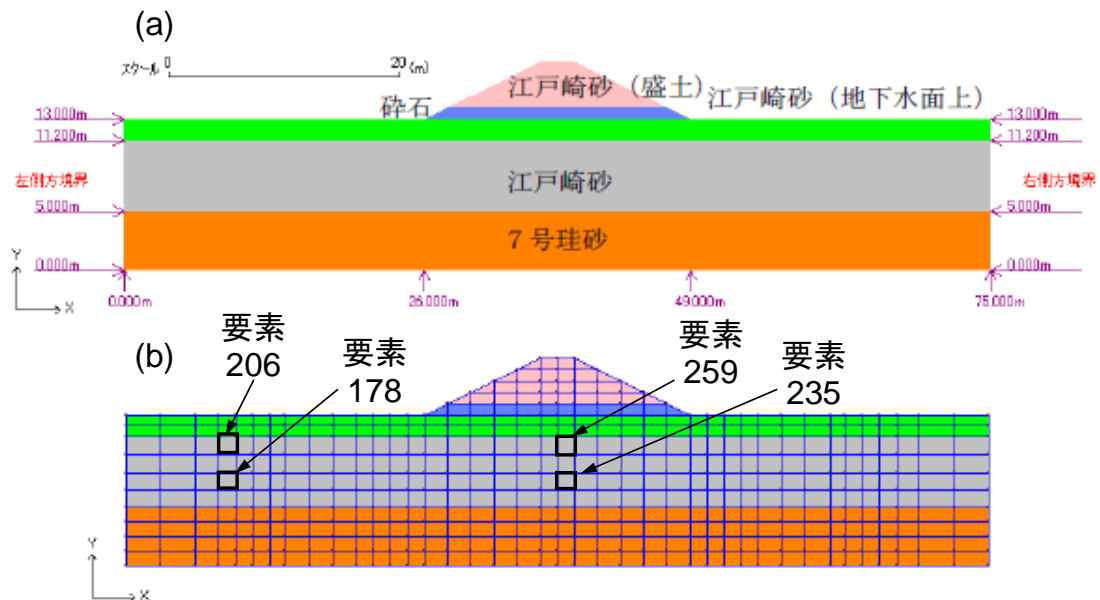


図 7.3 解析モデル：(a) 土層分割図；(b) 有限要素分割図

各土層に対する多重せん断モデルの変形特性を規定するパラメータを表 7.2 に示す。同表に示すパラメータは、前述のシミュレーション解析の際に設定されたものである。一方、多重せん断モデルにおけるダイレイタンス特性のパラメータは、非排水繰返し三軸試験に対する要素シミュレーションを行うことにより決定した。設定したダイレイタンス特性パラメータを表 7.3 に、これらのパラメータを用いて要素シミュレーションにより得られた液状化抵抗曲線を図 7.4 に示す。なお、液状化判定基準は、江戸崎砂および7号珪砂のいずれの場合も、軸ひずみ両振幅5%としている。表 7.3 における Sus 値は、第6章での要素シミュレーションで用いた定常状態を規定する非排水せん断強度であり、この値は既往の文献（兵頭ら，2008）を参照して間隙比および細粒分含有率から算定した。なお、Sus 値は盛土の変形に寄与する江戸崎砂層に対してのみ設定し、7号珪砂に対しては定常状態を考慮せず、非排水せん断強度として限りなく大きな値を用いている。

表 7.2 多重せん断モデルにおける変形特性パラメータ

土層名	区分	変形特性								
		湿潤密度	基準初期せん断剛性	基準体積弾性係数	基準拘束圧	拘束圧依存係数	間隙率	内部摩擦角	粘着力	履歴減衰上限値
		ρ t/m ³	G_{ma} kPa	K_{ma} kPa	σ_{ma}' kPa	m_G, m_K	n	ϕ_f (°)	c kPa	h_{max}
江戸崎砂 (盛土)	非液状化層	1.70	84000	218000	98.0	0.5	0.49	34.0	0.0	0.26
江戸崎砂 (地下水面下)	非液状化層	1.68	41000	107000	98.0	0.5	0.49	34.0	0.0	0.26
江戸崎砂 (地下水面下)	液状化層	1.86	41000	107000	98.0	0.5	0.49	34.0	0.0	0.26
7号珪砂 (地下水面下)	液状化層	1.98	86000	224000	98.0	0.5	0.40	48.0	0.0	0.24

表 7.3 多重せん断モデルにおけるダイレイタンス特性パラメータ

土層名	区分	ダイレイタンス特性										Sus値 簡易設定法
		変相角 ϕ_p (°)	ダイレイタンスパラメータ									
			ϵ_d^{cm}	r_{edc}	r_{ed}	q1	q2	lk	r_k	S_I	c_i	
江戸崎砂 (盛土)	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
江戸崎砂 (地下水面下)	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
江戸崎砂 (地下水面下)	液状化層	28.0	0.10	15.00	0.10	1.00	3.00	2.00	0.50	0.005	1.00	17.0
7号珪砂 (地下水面下)	液状化層	33.0	0.10	5.00	0.10	1.00	3.50	2.00	0.50	0.005	1.00	-

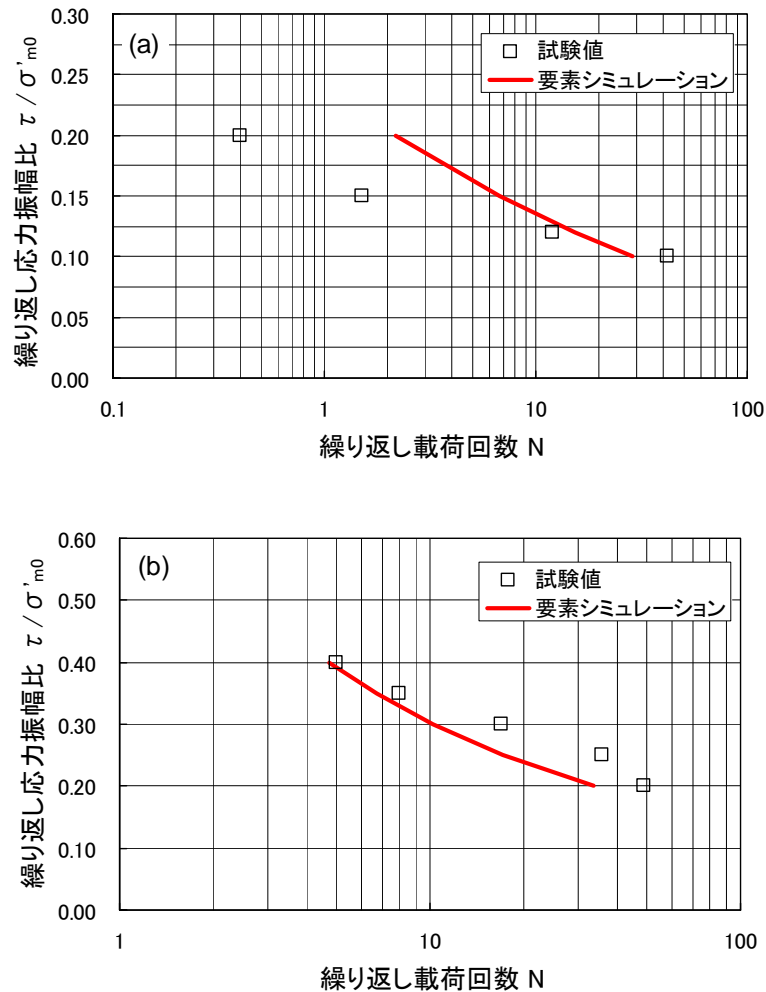


図 7.4 液状化抵抗曲線 : (a) 江戸崎砂 ; (b) 7 号珪砂

7.3.3 解析条件と解析ケース

有限要素法による数値解析では、まず排水条件で初期自重解析を行い、その結果を引き継いで動的解析である地震応答解析を実施した。両解析フェーズにおいて、第 2 章および第 3 章で述べた多重せん断モデル構成式を用い、等しい変形特性パラメータを適用した。ダイレイタンス特性に関するパラメータは、自重解析では考慮せず、地震応答解析においてのみ適用した。初期自重解析では荷重として自重（地下水面下では水中重量）の影響を考慮し、一方の地震応答解析では、非排水条件のもとで図 7.2 に示す地震動の 2.6 秒～13.6 秒（主要動の終了時まで）の部分を入力した。慣性項の影響を考慮する地震応答解析では、時間積分法として Wilson の θ 法を用い、時間積分間隔を 0.01 秒に設定した。

地震応答解析では、数値計算を安定させる目的も含め、初期接線剛性比例型のレーレー減衰行列を用いた。基礎地盤部の 1 次元土層構造により自由地盤部の土層構造を表すもの

とし、これに対して過剰間隙水圧の上昇を考慮しない条件のもとで、複数の剛性比例係数 β を用いて地震応答解析を行った。解析により得られた水平相対変位の最大値分布を図 7.5 に示す。同図より、それ以上 β の値を小さくしても、最大水平変位分布が変化しないような臨界値としての β が存在する。ここでは、 β を 0.001 より小さくしても最大水平変位にほとんど変化が見られないことから、液状化を考慮した地震応答解析では、 β を 0.001 とし、与えることとした。このような β の与え方に関しては、小堤 (2003) を参照のこと。

解析法としては、微小変形解析、次項で述べる簡易大変形解析、Total Lagrangian 法による大変形解析、Updated Lagrangian 法による大変形解析の4種類を用いた。また、それぞれの解析法に対して、定常状態の非排水せん断強度 (江戸崎砂で 17.0kPa) を考慮したケース、および、比較として定常状態を考慮しないケースの2種類、すなわち合計で8ケースの解析を実施した。解析ケースの一覧を表 7.4 に示す。

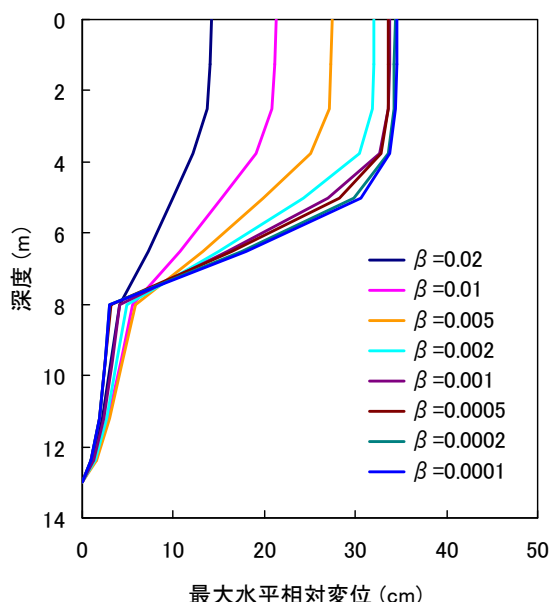


図 7.5 レーレー減衰行列剛性比例係数 β の感度 (非液状化解析)

表 7.4 解析ケースの一覧

ケース	解析法	江戸崎砂のSus値
ケースA-1	微小変形解析	未考慮
ケースA-2		17.0kPa
ケースB-1	簡易大変形解析	未考慮
ケースB-2		17.0kPa
ケースC-1	大変形解析TL法	未考慮
ケースC-2		17.0kPa
ケースD-1	大変形解析UL法	未考慮
ケースD-2		17.0kPa

7.3.4 簡易大変形解析の概要

既往の研究（小堤，2003）では，盛土の天端が大きく沈下する場合には，それに伴う基礎地盤の応力軽減が変形に与える影響が無視できないと考え，盛土などの解析において簡易大変形解析と呼ばれる方法を用いている。一方，本研究における大変形解析では，有限ひずみ理論に基づき定式化がなされているため，上述の盛土天端の変形（幾何学的非線形性）による影響が自動的に考慮される。表 7.4 に示すように，大変形解析に加えてここで改めて簡易大変形解析を行う理由は，厳密に大変形の影響を考慮した解析を用いて得られた結果との間に，どの程度の差が生じるかを検証するためである。以下に，簡易大変形解析の手順を示す。

簡易大変形解析の解析手順

- ① 通常の初期自重解析を行う。

第4章での式(4.316)に準じて，微小変形解析では以下のように自重解析の定式化を行う。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{st} dv = -\mathbf{M}' g \mathbf{L} \quad (7.1)$$

ここに， \mathbf{B} は微小変形解析での \mathbf{B} マトリクス， $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{st}$ は初期自重解析により得られる有効応力， g は重力加速度， \mathbf{M}' は水中重量密度に基づく質量マトリクス， \mathbf{L} は重力加速度の作用方向を規定するベクトルである。

- ② 初期自重解析の結果を受け継いで，地震応答解析を1時間ステップ，もしくは，適当な時間ステップ実行する。

微小変形解析における定式化は，式(4.343) (4.344)に準じて以下のとおりとなる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' dv - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{m}} p^* dv + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{st} dv \quad (7.2)$$

ここに，左辺第2項は非排水状態の間隙水の体積剛性に関する項， \mathbf{C} は減衰マトリクス， \mathbf{M} は湿潤密度に基づく質量マトリクス， \ddot{u}_g は基盤における入力加速度である。

- ③ 上記②により算定された相対変位 \mathbf{u} を用いて，初期自重解析用の節点座標を更新する。
④ 更新された節点座標に基づき，再度自重解析を実行する。

$$\int_{\Omega_{new}} \mathbf{B}_{new}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{new} dv = -\mathbf{M}'_{new} g \mathbf{L} \quad (7.3)$$

ここに， Ω_{new} は節点座標の更新に伴う新しい積分領域， \mathbf{B}_{new} および \mathbf{M}'_{new} は，節点座標の更新に伴い変更された \mathbf{B} マトリクスと質量マトリクスである。なお，節点座標の変更に伴うみかけの体積変化により各要素の質量が変わらないよう，各要素に対して密度の調整を行う。

- ⑤ 上記の式(7.3)により与えられる応力荷重ベクトル $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{\text{new}}$ を用いて、動的解析における式(7.2)の右辺第2項を更新する。ここで、動的解析では \mathbf{B} マトリクスや積分範囲の更新は行わないため、動的解析に引き渡す応力荷重ベクトルは、初期の \mathbf{B} マトリクスと初期の積分範囲に基づき、以下の式により算定する。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{\text{new}} \, dv \quad (7.4)$$

式(7.4)の応力荷重ベクトルを用い、②に示す地震応答解析を再開する。

上述のとおり、簡易大変形解析では、地震応答解析が適当な時間ステップ実行されるたびに、それに引き続いて再度自重解析が行われるため、解析に要する時間が微小変形解析に比べて増大する。特に、地震応答解析の1時間ステップ毎に自重解析を行う場合、解析時間は4~5倍にも増大し、これは簡易大変形解析の欠点であるとも言える。一方、Total Lagrangian 法もしくは Updated Lagrangian 法による大変形解析では、解析に要する時間は微小変形解析の1.5~2倍程度である。また、簡易大変形解析はあくまで微小変形理論の枠組みにおいて実施されるものであり、大変形現象に伴う幾何学的非線形性は考慮されていない。そのため、後で示す図7.20(d)や図7.54(c)に見られるように、条件によっては実際には起こり得ないような変形状をとり得るため注意が必要である。

7.3.5 解析結果

ここでは、前述の盛土の動的遠心模型実験に対して、微小変形解析、前項で述べた簡易大変形解析、第3章および第4章で述べた大変形解析を適用した場合の解析結果を示す。まず、主要動終了時の盛土天端の沈下量を表7.5に、同表に基づく沈下量の比較図を図7.6に示す。主要動終了時の実験結果は204cmであったため、同表および同図より、ケースA-1やケースA-2に示す微小変形解析では、沈下量を過大評価していることがわかる。定常状態での非排水せん断強度を考慮した場合(ケースA-2)は特にその差が顕著であり、実験値の5倍程度の沈下量となっている。それに対し、簡易大変形解析を用いた場合、微小変形解析と比較して沈下量が抑制されており、定常状態を考慮した場合(ケースB-2)でも、実験値の2倍程度まで値が減少しているのがわかる。一方、大変形解析を用いた場合は、さらに沈下量が実験値に近づく傾向が見られ、定常状態を考慮しない場合(ケースC-1, D-1)では、沈下量が実験値とほぼ等しい。また、定常状態を考慮した場合(ケースC-2, D-2)でも、実験値と比較して、Total Lagrangian 法で1.4倍、Updated Lagrangian 法で1.6倍程度の値に収まっている。これらの値は安全側の評価であり、なおかつ実験値から大きく乖離しているわけでもない。ここで、大変形解析における Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の結果を比較すると、その差は実験値に対して、定常状態を考慮しない場合で約8%、定常状態を考慮する場合で約16%である。数値解析における打ち切り誤差や丸め込み誤差な

どの影響により、1要素でのシミュレーションのように両者が一致する結果とはならないが、盛土堤体高さ 5m に対して、沈下量の差が最大でも 30cm 程度であることを考えれば、いずれの解析手法を用いるかは特に大きな問題ではないと思われる。以上をまとめると、沈下量に関してみれば、実験結果と最も整合していたのは大変形解析において定常状態を考慮しないケース（C-1, D-1）である。しかし、大変形解析において定常状態を考慮した場合でも、沈下量の過小評価とはならず、やや安全側の結果が得られることを考えれば、もし定常状態での非排水せん断強度が既知であるならば、やはりその値を解析に用いるべきであろう。また、簡易大変形解析を適用すれば、微小変形解析と比較して沈下量は実験値に近づくものの、解析に要する時間は微小変形解析の 4~5 倍にも増大する。一方、大変形解

表 7.5 主要動終了時の盛土天端沈下量

ケース	備考	沈下量 (cm)
ケースA-1	微小変形解析	478
ケースA-2	微小変形解析+Sus値	1011
ケースB-1	簡易大変形解析	293
ケースB-2	簡易大変形解析+Sus値	411
ケースC-1	大変形解析TL法	197
ケースC-2	大変形解析TL法+Sus値	290
ケースD-1	大変形解析UL法	213
ケースD-2	大変形解析UL法+Sus値	323
実験値	主要動終了時	204
	余震終了時 (参考)	230

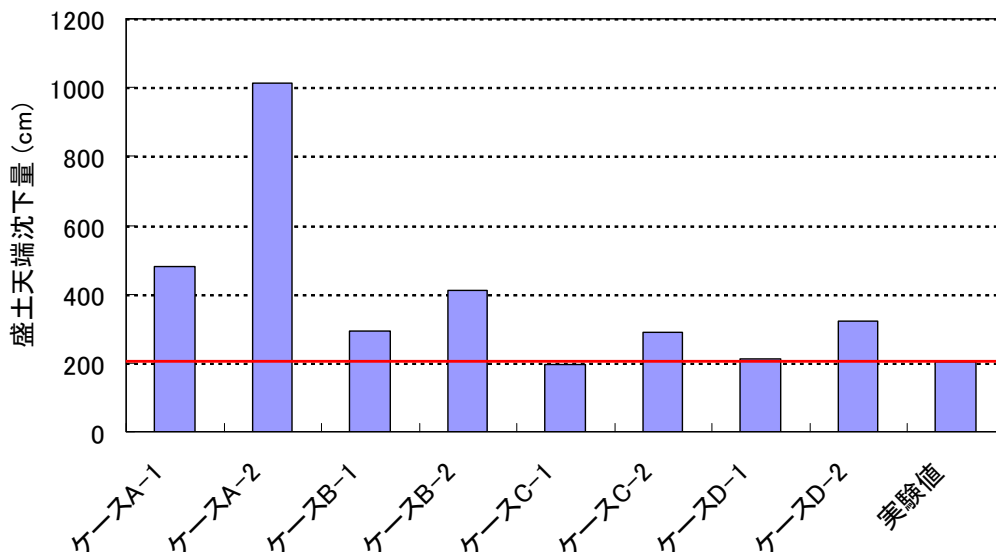
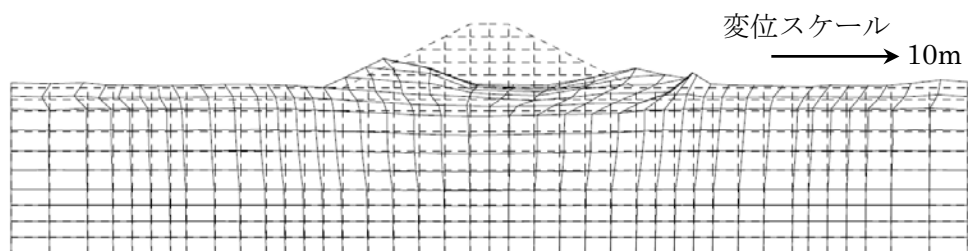


図 7.6 主要動終了時の盛土天端沈下量

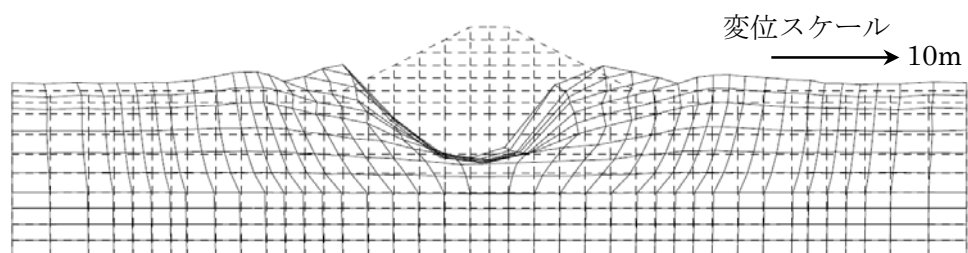
析では、微小変形解析の1.5～2.0倍程度の時間で結果が得られるため、この点から見ても、大変形解析を適用することが望ましい。なお、上述の解析時間の比較は一例であり、解析モデルや入力地震動が変われば、それらに伴い変動する。しかし、概ねの傾向はここで述べたとおりである。

次に、各ケースにおける主要動終了時の変形図を図7.7に示す。同図には、実験結果である余震終了時（沈下量230cm）の変形図もあわせて示してある。なお、解析で対象とするのは主要動終了時（沈下量204cm）であるが、この時点での変形図が得られていないため、ここでは余震終了時のものを用いた。沈下量に違いはあるものの、その差は26cmと小さく、概ねの変形形状の比較はこの図を用いることにより可能であると思われる。まず、微小変形解析、特に同図(b)に示す定常状態を考慮したケース(A-2)では、盛土堤体が大きく沈み込む結果となり、同図(i)の実験結果とは変形形状が異なることがわかる。それに対し、簡易大変形解析では、比較的实验結果に近い形状を示しているが、例えば同図(d)では、盛土天端が下に向かいめり込むような形状がまだ見られる。一方、同図(e)～(h)に示す大変形解析では、盛土堤体の変形形状は実験結果とかなり類似したものとなっている。さらに、基礎地盤部の変形に着目すると、定常状態を考慮しないケース(C-1, D-1)では、盛土直下の基礎地盤の変形があまり見られず、沈下量は堤体自身の変形に大きく依存する傾向にある。それに対し、定常状態を考慮したケース(C-2, D-2)では、盛土直下の基礎地盤が水平方向に広がる様子が確認でき、これが堤体の変形および沈下量にも影響を与えている。同図(i)に示す実験結果においても、盛土直下の基礎地盤の変形が顕著に見られることを考慮すれば、定常状態における非排水せん断強度を適切に与えることは、多重せん断モデルを用いて解析を行う場合には必要不可欠であると言える。

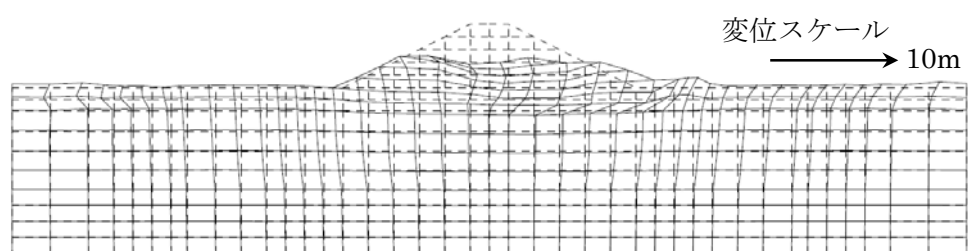
(a) ケース A-1



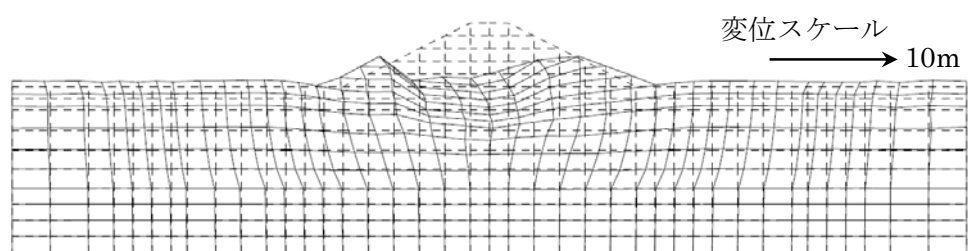
(b) ケース A-2



(c) ケース B-1



(d) ケース B-2



(e) ケース C-1

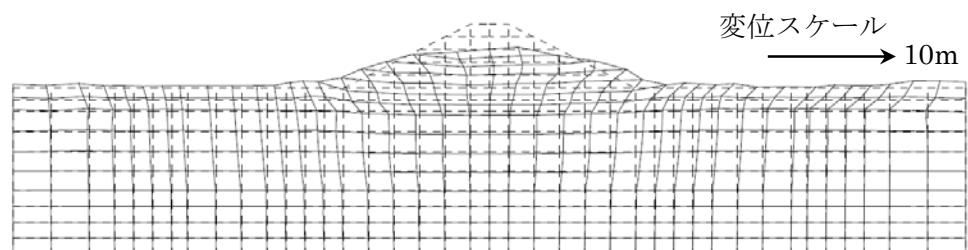
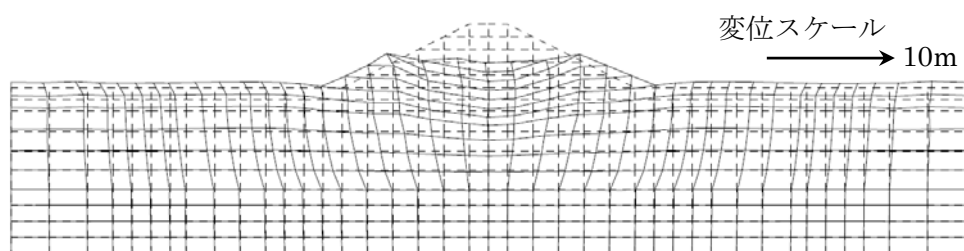
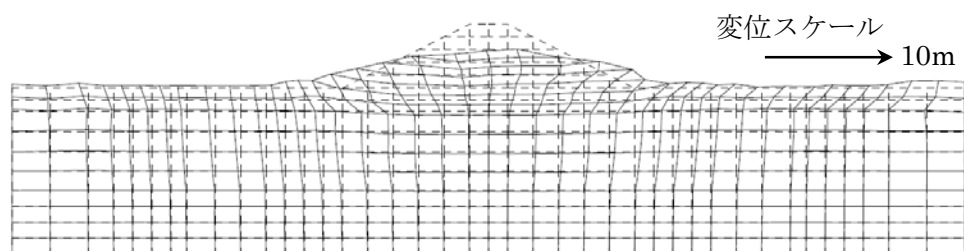


図 7.7 主要動終了時の変形図の比較（実験結果は余震終了後）

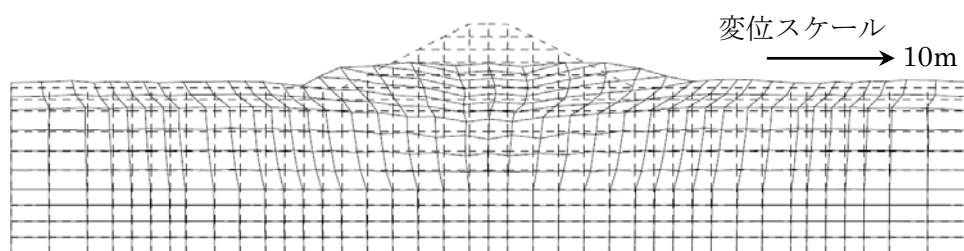
(f) ケース C-2



(g) ケース D-1



(h) ケース D-2



(i) 実験結果 (余震終了後)

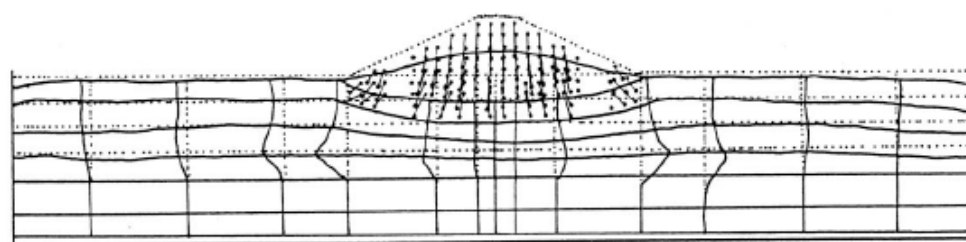
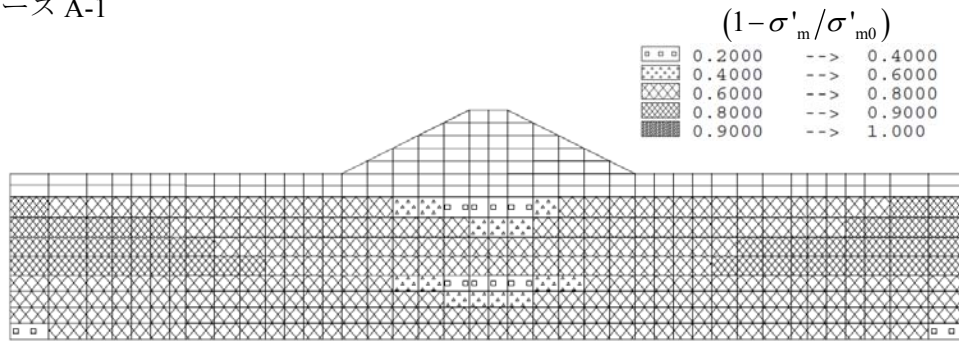


図 7.7 主要動終了時の変形図の比較 (実験結果は余震終了後) (続き)

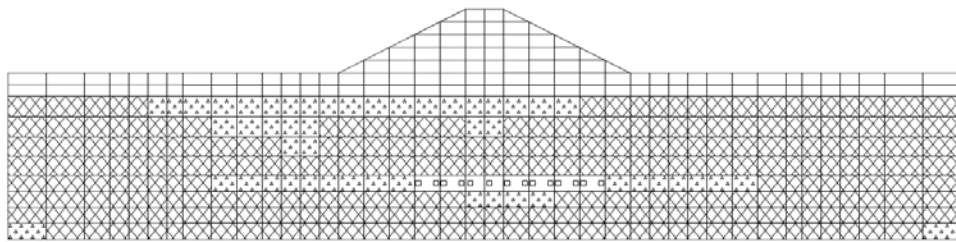
続いて、図 7.8 に各ケースにおける有効応力減少比の時間最大値の分布図を示す。微小変形解析、大変形解析といった解析手法の違いによる影響は、有効応力減少比の分布に関しては小さく、明瞭な差異は確認できない。一方、定常状態の考慮の有無は、有効応力減少比に影響を及ぼすことが同図より見てとれる。すなわち、定常状態を考慮しない場合 (同図(a)(c)(e)(g)) は、堤体直下の基礎地盤上部の有効応力減少比が周辺に比べてやや小さく、また、境界周辺でやや大きく算出されている。一方の定常状態を考慮したケース (同図

(b)(d)(f)(h) では、基礎地盤における有効応力減少比の分布は比較的均一なものとなっている。比較対象となる実験データが存在しないため、ここではどちらが正しいかという議論はできない。しかし、定常状態における非排水せん断強度が、図 7.7 に示す変形状に加えて、図 7.8 に示す有効応力減少比分布に対しても影響を及ぼすことは確かめられた。

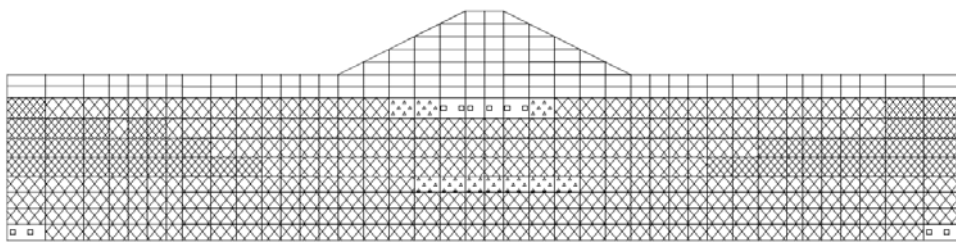
(a) ケース A-1



(b) ケース A-2



(c) ケース B-1



(d) ケース B-2

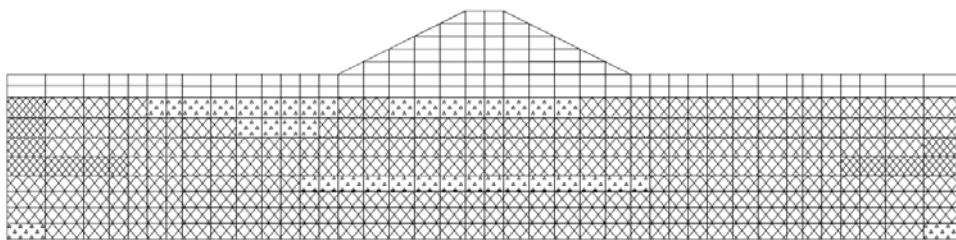
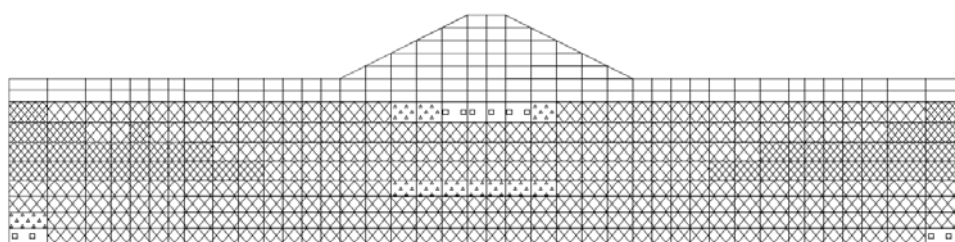
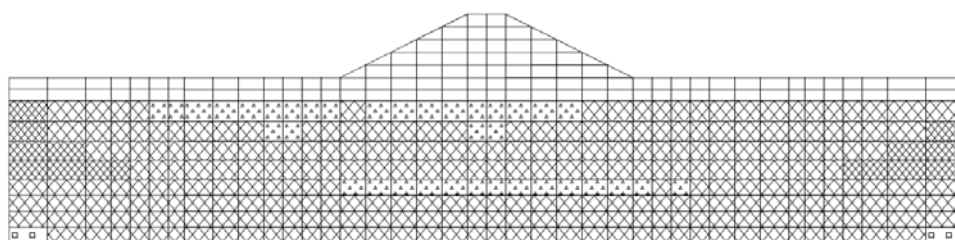


図 7.8 有効応力減少比 ($= 1 - \sigma'_m / \sigma'_{m0}$) の時間最大値の分布図

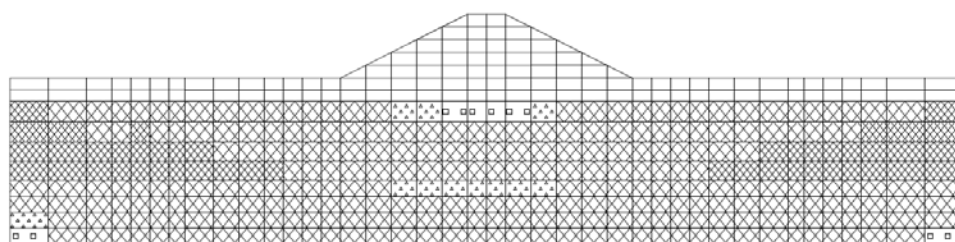
(e) ケース C-1



(f) ケース C-2



(g) ケース D-1



(h) ケース D-2

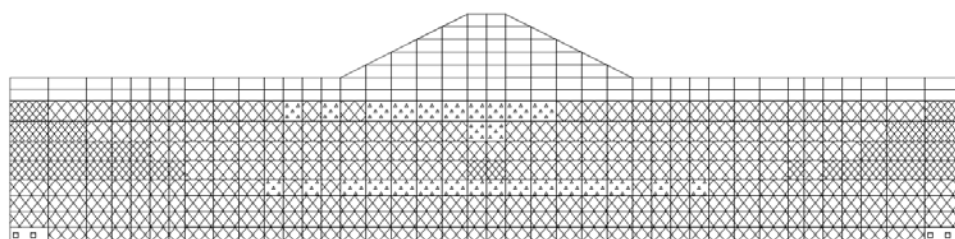


図 7.8 有効応力減少比 ($=1 - \sigma'_m / \sigma'_{m0}$) の時間最大値の分布図 (続き)

次に、液状化層である地下水面下の江戸崎砂層における有効応力経路を図 7.9～図 7.16 に示す。対象とした要素は盛土直下の基礎地盤で 2 つ、側方境界に比較的近い基礎地盤で 2 つ、合計 4 つであり、それぞれの位置は図 7.3(b)に示されている。図 7.9, 図 7.10 は微小変形解析, 図 7.11, 図 7.12 は簡易大変形解析, 図 7.13, 図 7.14 は Total Lagrangian 法による大変形解析, 図 7.15, 図 7.16 は Updated Lagrangian 法による大変形解析の結果である。図 7.9～図 7.16 において, 図中の丸印 (●) は初期自重解析終了後の有効応力経路の位置

を、一方の三角印 (▲) は地震応答解析終了時の位置を表している。まず、定常状態を考慮しないケース (図 7. 9, 図 7. 11, 図 7. 13, 図 7. 15) を比較すると、境界寄りの要素 (No.206,178) では、用いる解析法に関わらず有効応力経路はほぼ一致している。これは、これらの要素の変形が小さく、有効応力経路に対する幾何学的な非線形性の影響が無視できる程度であったことを意味している。一方、盛土直下の地盤要素 (No.259,235) では、簡易大変形解析と大変形解析の結果はほぼ一致しているものの、微小変形解析ではそれらに比べて最大せん断応力の値が大きく算出される傾向にある。例えば、大変形解析 TL 法における図 7. 13(c)では、せん断応力の最大値は約 60kPa であるのに対し、微小変形解析では図 7. 9(c)より 100kPa 程度のせん断応力を有していることがわかる。同図(c)より、有効拘束圧の値も微小変形解析では 200kPa 程度と大きくなっており、これは、微小変形解析では盛土の変形に伴う荷重軽減の効果が考慮されていないことを意味する。次に、定常状態を考慮したケース (図 7. 10, 図 7. 12, 図 7. 14, 図 7. 16) を比較すると、いずれの解析手法を用いても有効応力経路に明瞭な差が存在しないことがわかる。例えば、図 7. 10 (d)と図 7. 14(d)における破壊線近傍 (定常状態) の挙動がやや異なる程度である。これは、定常状態における非排水せん断強度を規定しているため、および、有効応力経路を最大せん断応力で整理していることによるものである。もし有効応力経路を、軸差応力成分を考慮せずに純せん断応力を用いて整理すれば、第 6 章で示した非排水単調せん断の要素シミュレーションのように、大変形解析と微小変形解析との結果は定常状態に向かうにつれてさらに異なる経路を示すものと思われる。定常状態を考慮しない場合と考慮する場合では、例えば図 7. 9 と図 7. 10 に示すように、特に破壊線に近い領域における有効応力経路が大きく異なる。このことから、より解析の精度を高めるためには、幾何学的非線形性を考慮した大変形解析を行うとともに、その際に非排水せん断強度を用いて定常状態を考慮する必要があると言える。

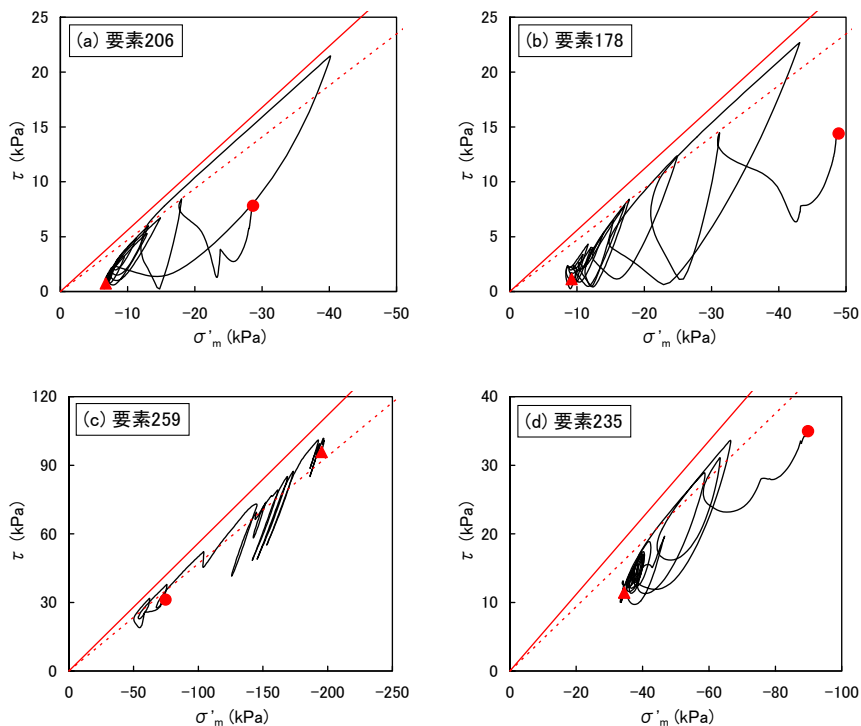


図 7.9 有効応力経路 (ケース A-1)

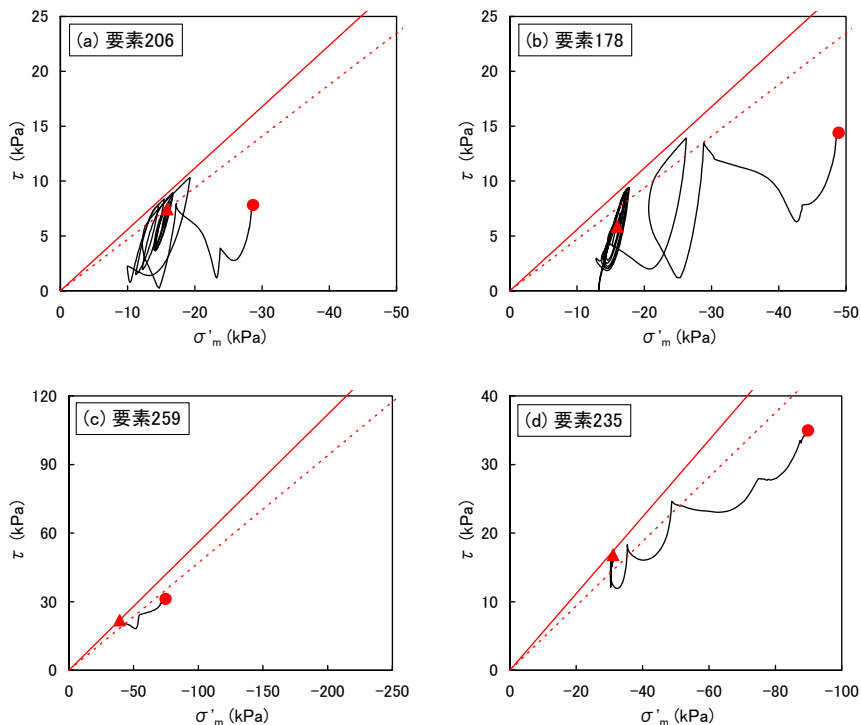


図 7.10 有効応力経路 (ケース A-2)

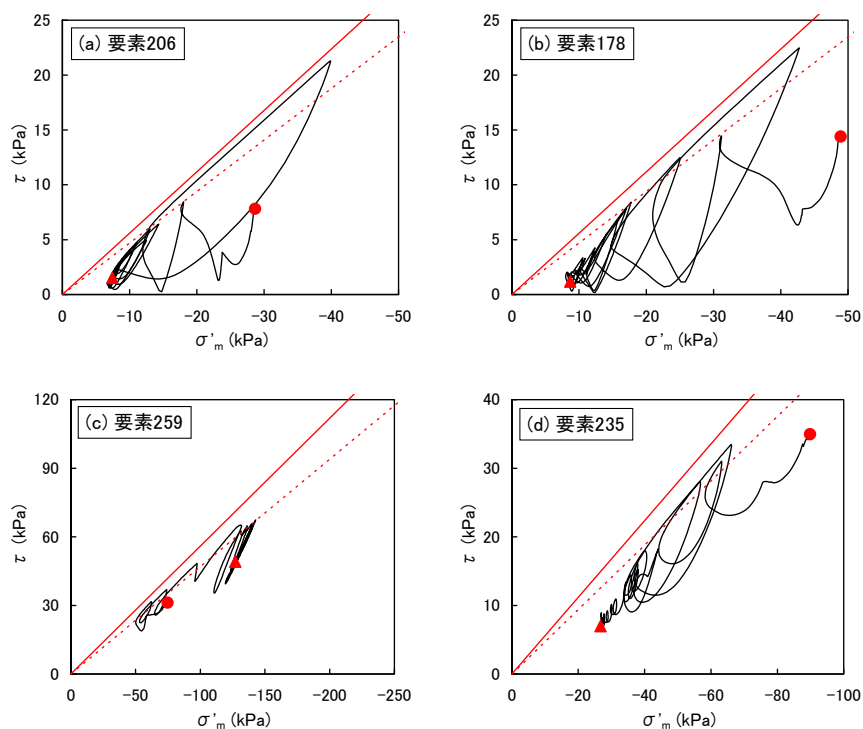


図 7.11 有効応力経路 (ケース B-1)

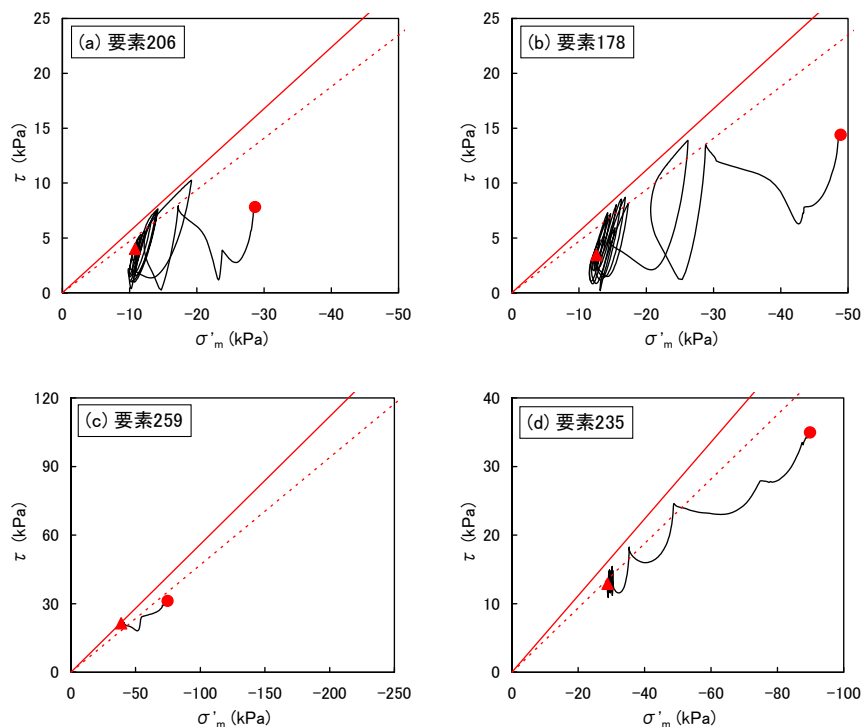


図 7.12 有効応力経路 (ケース B-2)

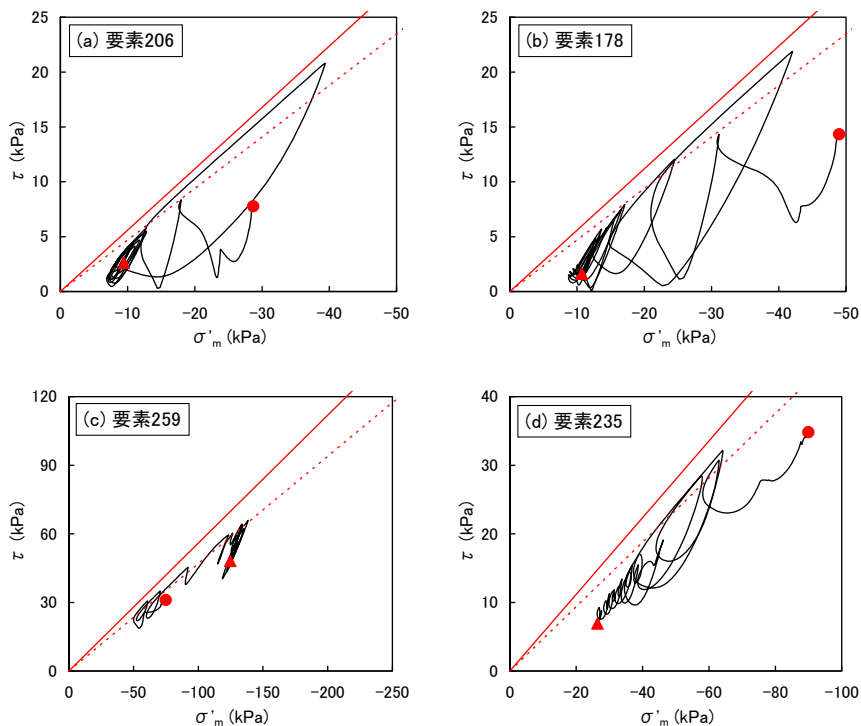


図 7.13 有効応力経路 (ケース C-1)

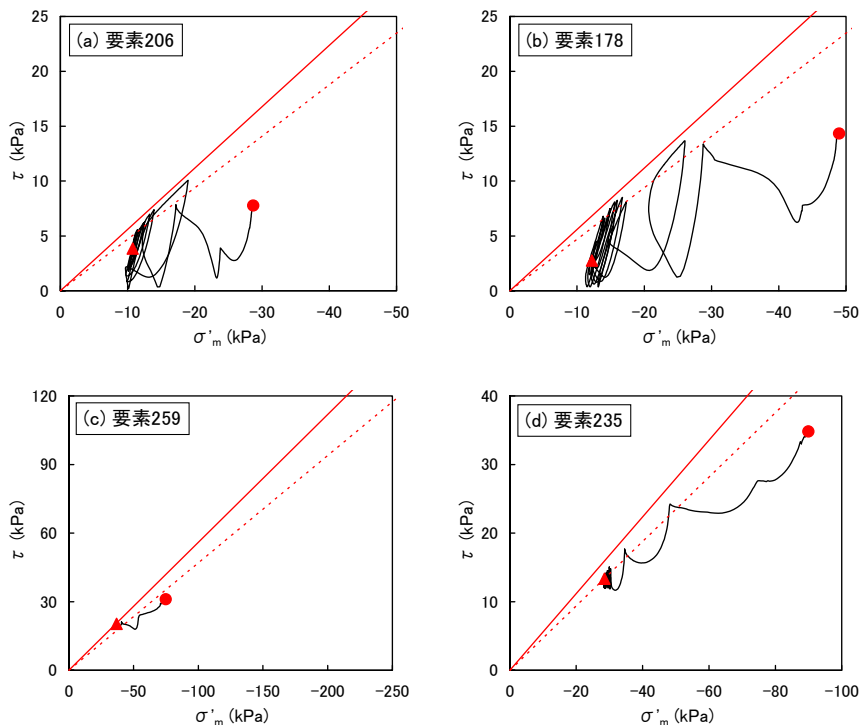


図 7.14 有効応力経路 (ケース C-2)

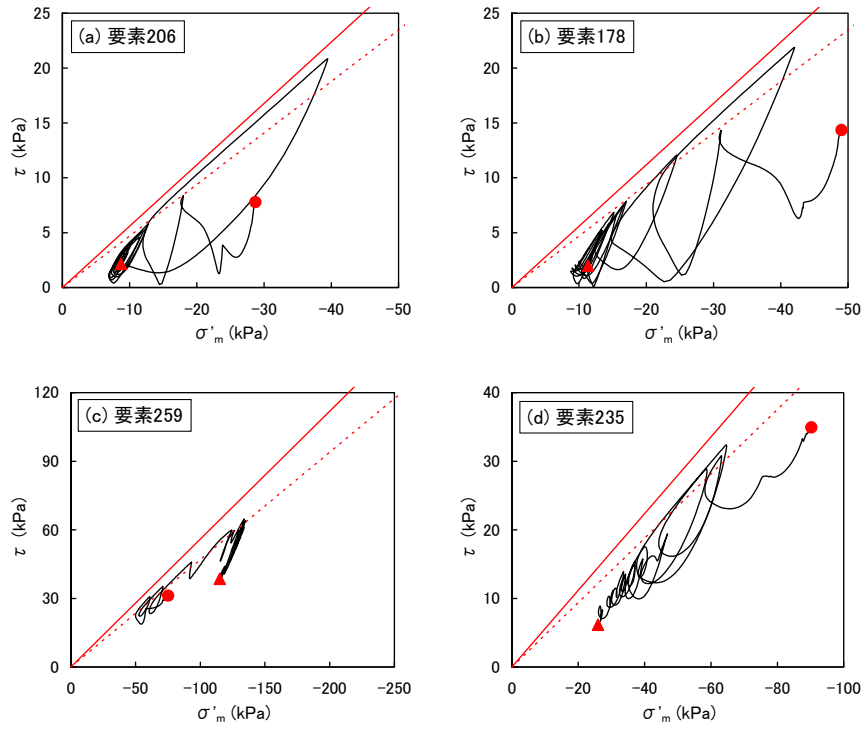


図 7.15 有効応力経路 (ケース D-1)

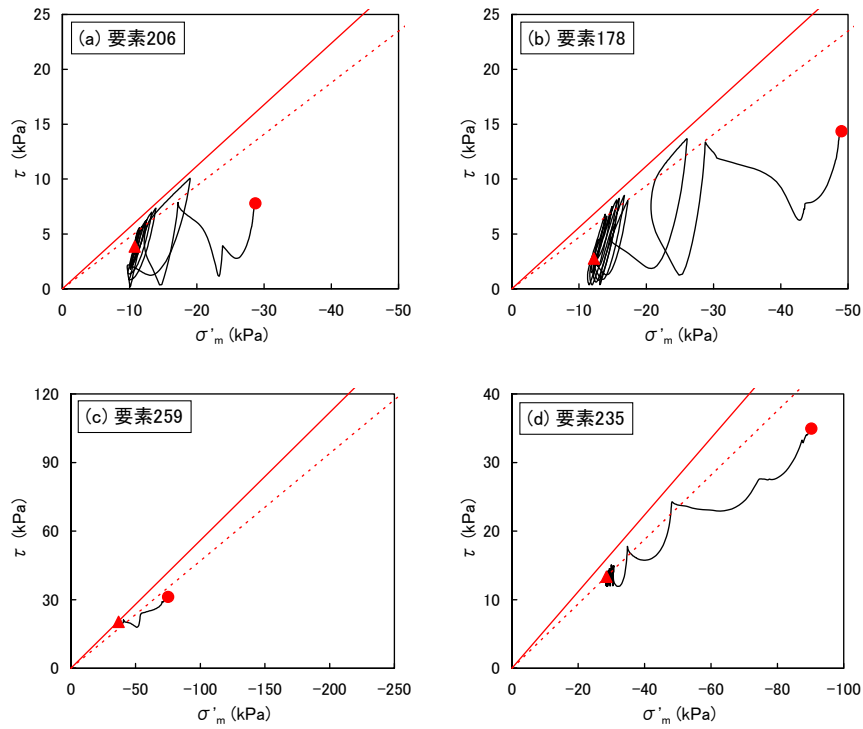


図 7.16 有効応力経路 (ケース D-2)

ここまでの議論をまとめると、盛土構造物の動的遠心模型実験に対する数値解析では、微小変形解析では過大評価されていた沈下量や変形形状が、大変形解析を適用することにより大きく改善される結果となった。また、大変形解析において、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法、いずれの手法を用いても解析結果にそれほど大きい差は生じず、実験結果を精度良く再現できることが確認された。

7.3.6 正弦波加振による変形挙動

ここでは、先に述べた動的遠心模型実験で用いた解析モデル（図 7.3）に対して、図 7.17 に示す加速度振幅が約 100gal、周期が 1 秒の正弦波を 200 秒間与え続け、そのときの挙動に関して考察を行う。解析に用いたモデルパラメータは表 7.2、表 7.3 に示すとおりとし、解析ケースも表 7.4 と同様に設定することとした。ここでの解析は、特定の実験結果や被災事例を対象としたものではなく、盛土堤体に大きな沈下を引き起こすであろう地震動、ここでは図 7.17 に示される正弦波振動、を与え続けた場合の盛土の挙動に関して考察を行うことを目的とする。

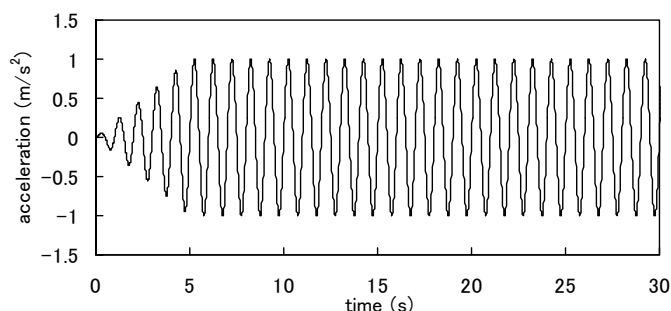


図 7.17 入力正弦波

加振終了後の各ケースの盛土天端沈下量を図 7.18 にまとめて示す。既往の資料（国土技術研究センター，2002）によれば、過去の地震被害において堤体高さを完全に消失するような事例は存在せず、堤体高さの 25%程度は残留するとされている。すなわち、盛土の沈下量は最大でも堤体高さの 75%程度であり、本解析で対象とした盛土モデルでは堤体高さが 5.0m であることより、生じうる最大沈下量は 3.75m 程度であると推定される。図 7.18 には、この想定最大沈下量のラインが併せて示されている。同図より、微小変形解析（ケース A-1,A-2）および簡易大変形によるケース B-2 では、盛土堤体高さを大きく上回る沈下量が発生しており、これらは現実には生じえない値である。それ以外のケースでは沈下量は概ね現実的な値であり、特に大変形解析を適用した場合、入力パラメータとしての非排水せん断強度の値に関わらず、解析により得られた沈下量は想定される最大値までの範囲

に収まっていることがわかる。続いて、図 7.19 に大変形解析における盛土天端沈下量の時刻歴を示す。同図より、各ケースにおいておよそ 200 秒付近で沈下がそれ以上生じなくなり、沈下量が一定値に収束していることが確認できる。

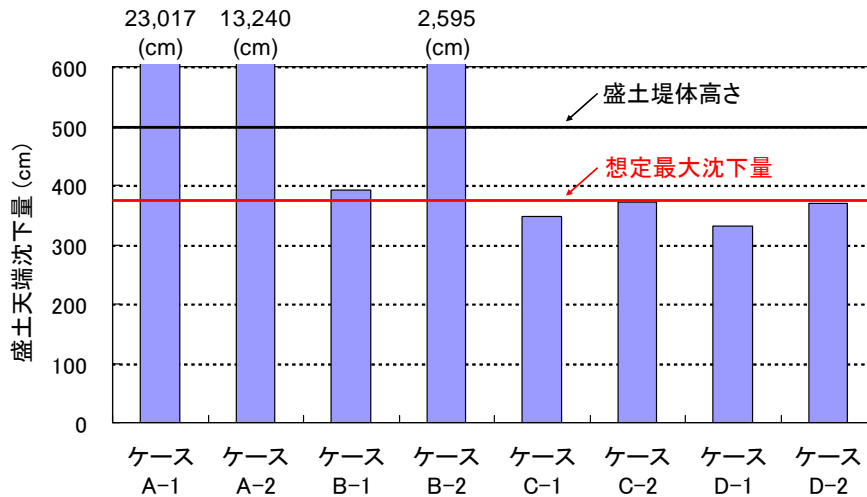


図 7.18 加振終了時の盛土天端沈下量

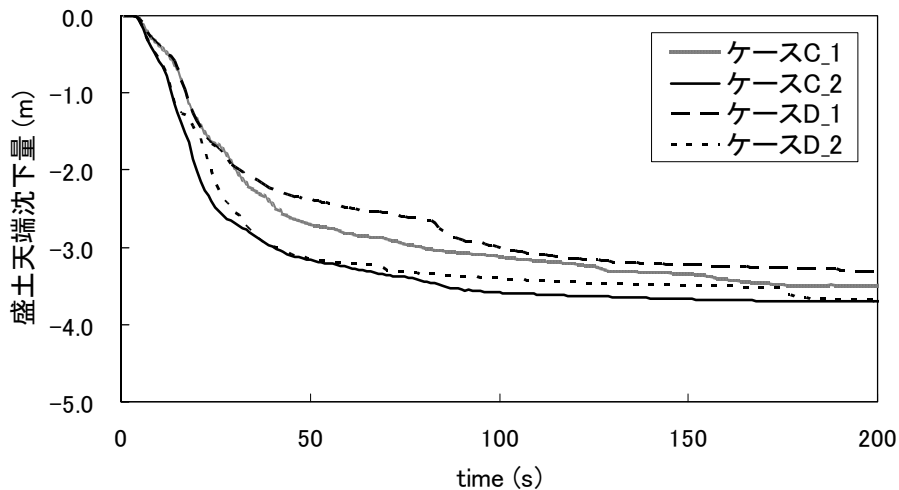
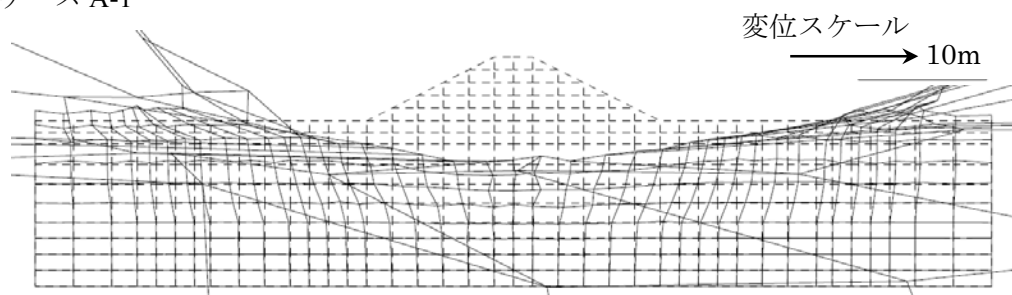


図 7.19 盛土天端沈下量の時刻歴（大変形解析）

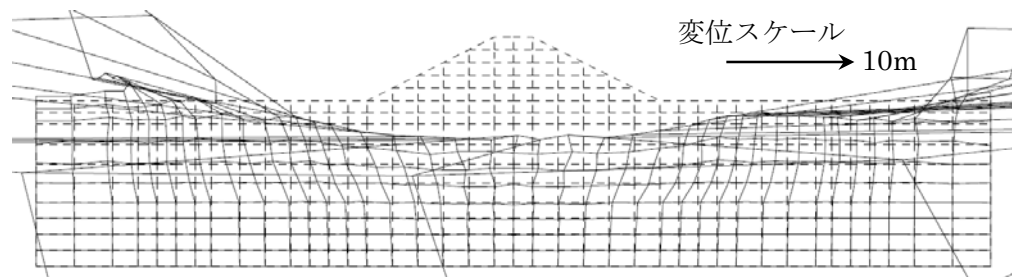
次に、数値解析により得られた加振終了時の変形図を図 7.20 に示す。同図(a)(b)に示す微小変形解析の場合、盛土堤体が基礎地盤側に反転する形で大きく変形し、実際には生じ得ない変形形状となっている。これは、大ひずみ、大変形が発生しようとする段階においても、微小変形理論に基づき構成式および支配方程式が解かれているためである。それに対して簡易大変形解析においては、非排水せん断強度を限りなく大きくした同図(c)では変形

は抑制されているものの、定常状態を考慮した同図(d)では、やはり基礎地盤にめり込む形で堤体が大きく変形している。簡易大変形解析においても、立脚している理論は微小変形理論であるため、このように非常に大きな外力が加わった場合、実際には幾何学的に起こり得ないような変形モードが出現する結果となる。一方、同図(e)~(h)に示す大変形解析では、定常状態の有無に関わらず、変形形状としては現実に許容できるものとなっている。これは、第3章および第4章で述べたように、物体の変形に伴う幾何学的非線形性を適切に考慮しているためであり、これにより得られた結果は、ここで対象とするモデルに対して振動を加え続けた場合、盛土が堤体高さの75%程度まで沈下したその後においては、変形がほとんど進行しないという極めて現実的なものである。

(a) ケース A-1



(b) ケース A-2



(c) ケース B-1

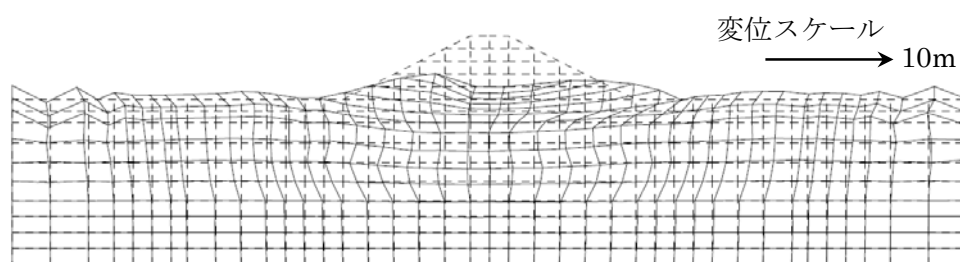
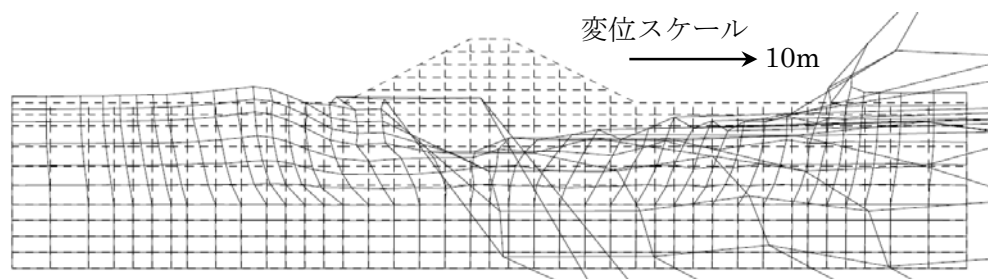
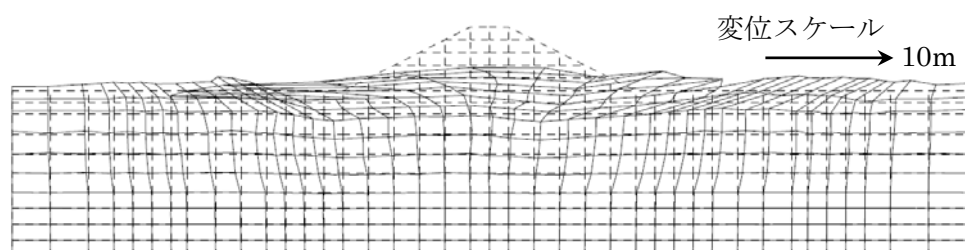


図 7.20 正弦波加振終了時の変形図の比較

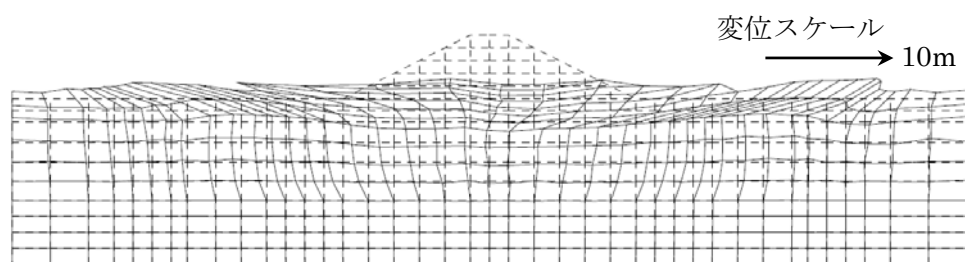
(d) ケース B-2



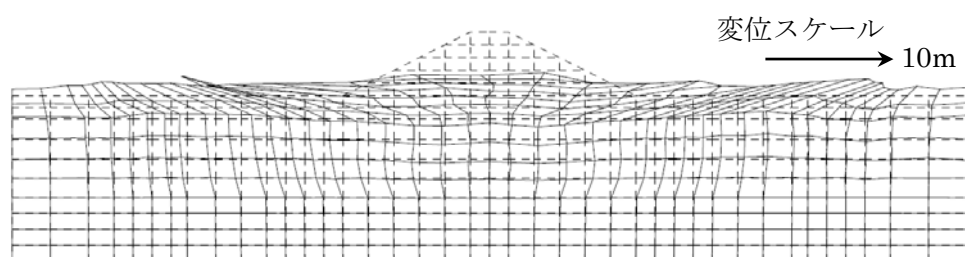
(e) ケース C-1



(f) ケース C-2



(g) ケース D-1



(h) ケース D-2

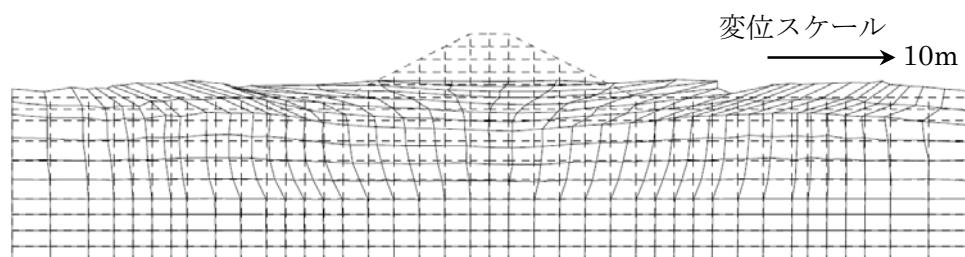


図 7.20 正弦波加振終了時の変形図の比較 (続き)

7.4 後志利別川堤防に対する検討

7.4.1 概要

ここでは、1993年北海道南西沖地震の際に被災した後志利別川堤防のうち、堤体天端の沈下量が267cmと最も大きかったNo.1断面を対象として、有限要素法による地震応答解析を行った。図7.21に解析対象とした後志利別川の位置を、表7.6に被災状況として堤体天端の沈下量を示す。また、図7.22に解析対象地点の地層構成を示す。

後志利別川堤防No.1断面の解析に用いる入力地震動の加速度時刻歴を図7.23に、そのフーリエスペクトルを図7.24に示す。後志利別川堤防の入力地震動は、重複反射理論に基づく1次元地震応答計算により、工学的基盤面から図7.22に示すAc2層の下面に立ち上げたE+F波である。工学的基盤面の波形は、北海道南西沖地震の際に寿都測候所で観測された地表面加速度波形を工学的基盤に引き戻し、距離減衰を考慮して振幅を調整したものである(松尾ら, 1999)。

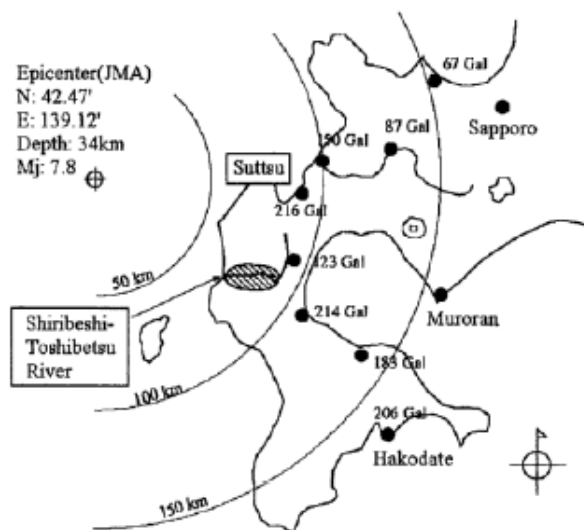


図 7.21 後志利別川位置図 (勝山ら, 1994)

表 7.6 被災状況 (松尾ら, 1999)

No.	河口からの距離	天端沈下量
1	4.44km (左岸)	267cm
2	5.00km (左岸)	ほぼ0cm
3	1.71km (左岸)	126cm
4	2.00km (右岸)	ほぼ0cm
5	2.49km (左岸)	63cm

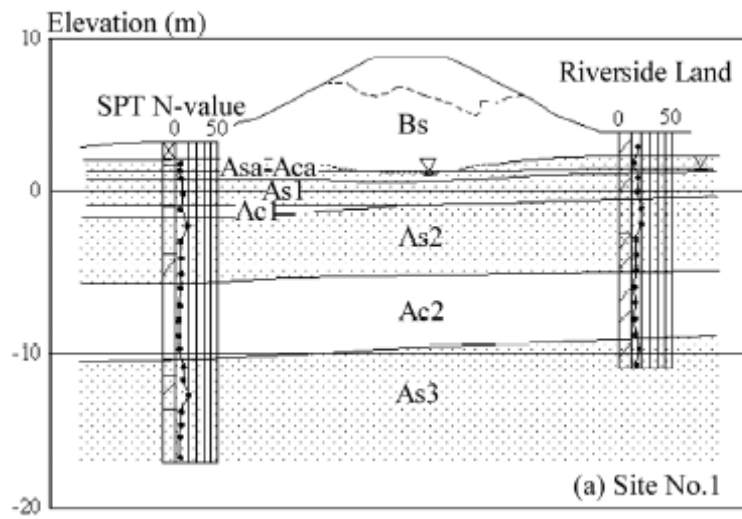


図 7.22 No.1 断面の地層構成図 (松尾ら, 1999)

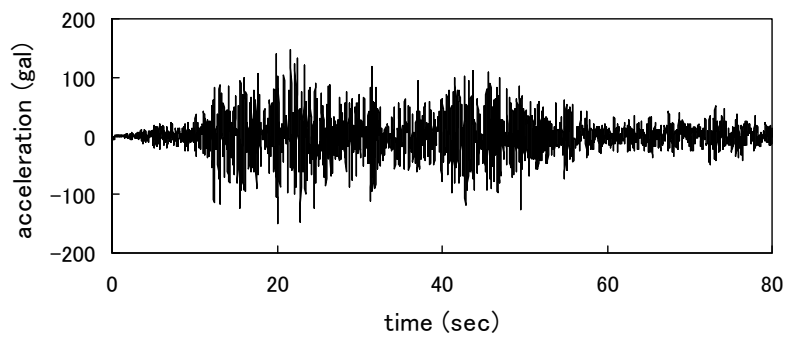


図 7.23 入力加速度時刻歴

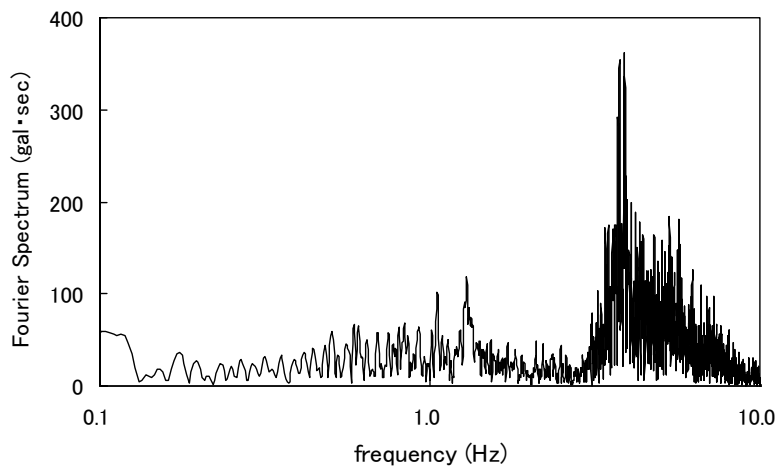


図 7.24 加速度フーリエスペクトル

7.4.2 解析モデル

本解析において用いる解析モデルの土層分割、および、有限要素分割を図 7. 25 に示す。ここで用いたメッシュは、芋野ら (2008) を参考にして設定した。解析モデルの境界条件は、底面を固定境界、側方を粘性境界とし、自由地盤部の解析もあわせて実施した。なお、地下水面は Asa～Aca 層の上端の位置に存在する。

各土層に対する多重せん断モデルの変形特性に関するパラメータを表 7. 7 に示す。同表に示すパラメータは、既往の文献 (芋野ら, 2008) を参考にして設定されたものである。一方、多重せん断モデルにおけるダイレイタンシー特性のパラメータは、不攪乱採取試料を用いて行われた非排水繰返し三軸試験 (建設省土木研究所動土質研究室他, 1995) に対する要素シミュレーションを行うことにより決定した。設定したダイレイタンシー特性パラメータを表 7. 8 に、これらのパラメータを用いて要素シミュレーションにより得られた液状化抵抗曲線を図 7. 26 に示す。なお、液状化判定基準は、いずれの場合も軸ひずみ両振幅 5%としている。表 7. 8 に示す定常状態での非排水せん断強度としての Sus 値に関しては、(せん断中に試料の間隙水圧を測定する) 圧密非排水三軸圧縮試験 (CUB 試験) に基づく値と、間隙比および細粒分含有率を用いて非排水せん断強度を簡易的に推定する方法 (本島ら, 2008) による値の 2 種類を設定した。試験結果に基づく Sus 値の設定においては、As2 層の途中から細粒分含有率が大きく変化するにも関わらず、細粒分の少ない上部 (As2-U 層に相当) の試料に対してのみ非排水せん断強度の値 (116.0kPa) が測定されており、As2-L 層に対しては実際よりも過大評価した値を適用しているものと思われる。一方、間隙比などから簡易的に非排水せん断強度を推定する方法では、それらの層における細粒分含有率の違いを考慮して非排水せん断強度を与えている。ここでの解析では、この間隙比および細粒分含有率により推定される値を採用することとした。

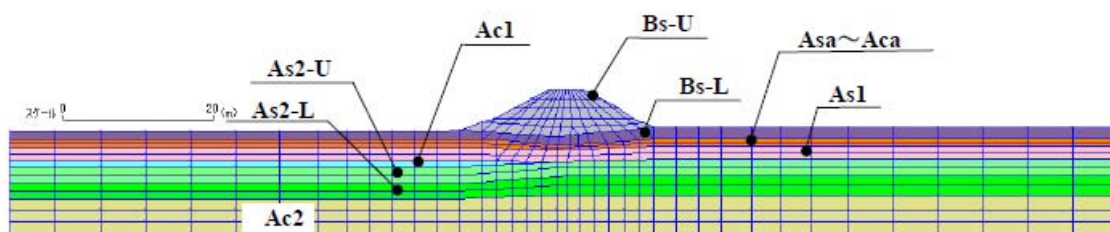


図 7.25 解析モデル

表 7.7 多重せん断モデルにおける変形特性パラメータ

土層名	区分	変形特性									
		湿潤密度	基準初期せん断剛性	基準体積弾性係数	基準拘束圧	拘束圧依存係数	間隙率	内部摩擦角	粘着力	履歴減衰上限値	せん断波速
		ρ t/m ³	G_{ma} kPa	K_{ma} kPa	σ_{ma}' kPa	m_G, m_K	n	ϕ_f (°)	c kPa	h_{max}	V_s m/s
Bs-U(堤体)	非液状化層	1.80	28573	76024	46.4	0.5	0.45	25.0	0.0	0.24	126
Bs-L(一般部)	非液状化層	1.80	28573	76024	46.4	0.5	0.45	37.0	0.0	0.24	126
Asa~Aca	液状化層	1.50	34643	90344	32.6	0.5	0.54	34.1	0.0	0.24	80
As1	液状化層	1.85	35356	92202	34.8	0.5	0.52	34.4	0.0	0.24	153
Ac1	非液状化層	1.50	23811	63353	54.2	0.5	0.45	55.0	0.0	0.21	126
As2-U	液状化層	1.80	50196	130903	46.6	0.5	0.45	36.0	0.0	0.24	129
As2-L	液状化層	1.80	30043	78347	60.7	0.5	0.58	31.6	0.0	0.24	129
Ac2	非液状化層	1.45	14500	38580	68.1	0.5	0.45	39.0	0.0	0.21	100

表 7.8 多重せん断モデルにおけるダイレイタンス特性パラメータ

土層名	区分	ダイレイタンス特性										Sus値	
		変相角 ϕ_p (°)	ダイレイタンスパラメータ									簡易設定法	CUB試験結果
			ϵ_d^{cm}	r_{edc}	r_{ed}	q1	q2	lk	r_k	S_1	c_1		
Bs-U(堤体)	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Bs-L(一般部)	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Asa~Aca	液状化層	28.0	0.20	1.50	0.08	1.00	1.50	2.00	0.50	0.005	1.00	6.0	53.0
As1	液状化層	28.0	0.20	1.20	0.15	1.00	0.80	2.00	0.50	0.005	1.00	12.0	180.0
Ac1	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
As2-U	液状化層	28.0	0.20	1.00	0.05	1.00	1.00	2.00	0.50	0.005	1.00	11.0	116.0
As2-L	液状化層	28.0	0.20	1.50	0.05	1.00	0.80	2.00	0.50	0.005	1.00	2.0	116.0
Ac2	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

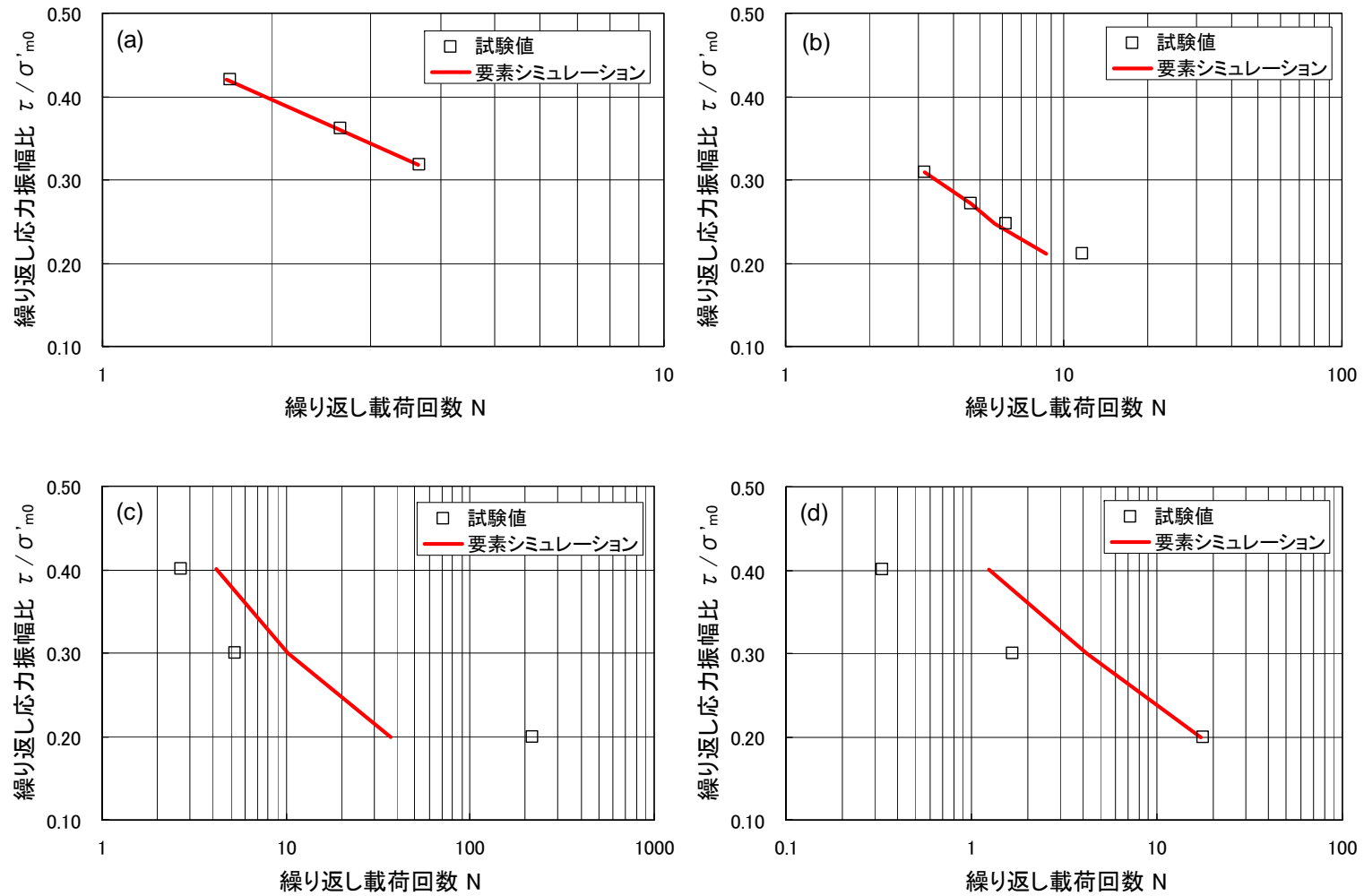


図 7.26 液状化抵抗曲線 : (a) Asa~Aca 層 ; (b) As1 層 ; (c) As2-U 層 ; (d) As2-L 層

7.4.3 解析条件と解析ケース

有限要素法による数値解析では、まず排水条件のもとで解析対象とする不規則領域の初期自重解析を行う。本解析で対象とするモデルでは、側方境界として鉛直ローラーではなく粘性境界を設定しているため、それに引き続いて、不規則領域の外側に存在する自由地盤部の自重解析および地震応答解析を行う必要がある。それらの解析の後、初期自重解析により得られた結果を引き継ぎ、さらに自重地盤部の解析により得られた自由地盤部の速度応答を考慮して、不規則領域の地震応答解析を非排水条件のもとで実施する。いずれの解析フェーズにおいても、土の構成モデルとしては第2章、第3章で述べた多重せん断モデル構成式を適用し、表7.7に示す変形特性パラメータは各フェーズにおいて共通とした。表7.8のダイレイタンス特性に関するパラメータは、自重解析の段階では考慮せず、地震応答解析においてのみ適用した。地震応答解析における時間積分法にはWilsonの θ 法を用い、時間積分間隔を0.01秒に設定した。

前節で述べたとおり、地震応答解析では初期剛性比例型のレーレー減衰行列を用いた。ここでも、剛性比例係数 β の算定のため、基礎地盤部の1次元土層構造により自由地盤部の土層構造を表現するものとし、これに対して過剰間隙水圧の上昇を考慮しない条件のもと地震応答解析を行った。解析により得られた最大水平相対変位分布を図7.27に示す。同図(a)は左方自由地盤部による解析結果、同図(b)は右方自由地盤部による解析結果である。いずれの場合も、 β を0.0005より小さくしても最大水平変位にほとんど変化が見られないことから、液状化を考慮した地震応答解析では、 β を0.0005として与えることとした。

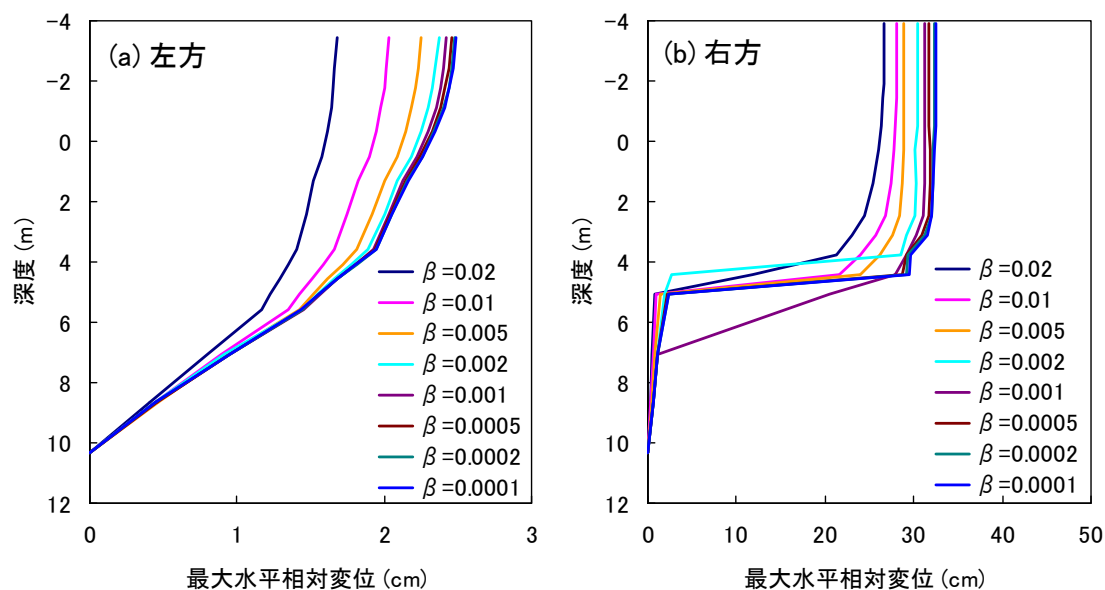


図 7.27 レーレー減衰行列剛性比例係数 β の感度（非液状化解析）：(a) 左方自由地盤部；
(b) 右方自由地盤部

用いた解析手法は、微小変形解析、簡易大変形解析、および、Total Lagrangian 法もしくは Updated Lagrangian 法による大変形解析の 4 種類である。なお、後で述べるように、図 7.25 の有限要素メッシュをそのまま適用した場合、盛土堤体部に存在する三角形メッシュが極端に大きく変形する傾向が見られたので、堤体部のメッシュに修正を加えた場合（後述の図 7.29 参照）の解析も実施した。すなわち、合計で 8 ケースの解析を行っており、表 7.9 にその一覧を示す。

表 7.9 解析ケースの一覧

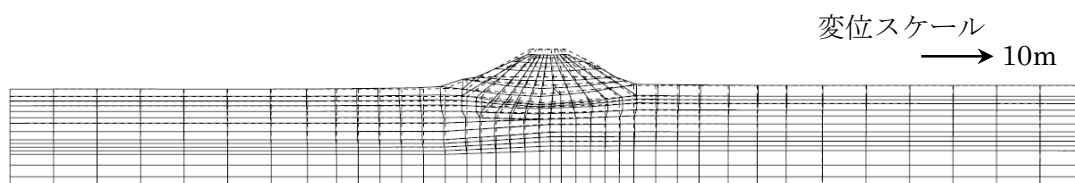
ケース	メッシュ	解析法
ケースA	オリジナル メッシュ	微小変形解析
ケースB		簡易大変形解析
ケースC		大変形解析TL法
ケースD		大変形解析UL法
ケースE	修正メッシュ	微小変形解析
ケースF		簡易大変形解析
ケースG		大変形解析TL法
ケースH		大変形解析UL法

7.4.4 解析結果と考察

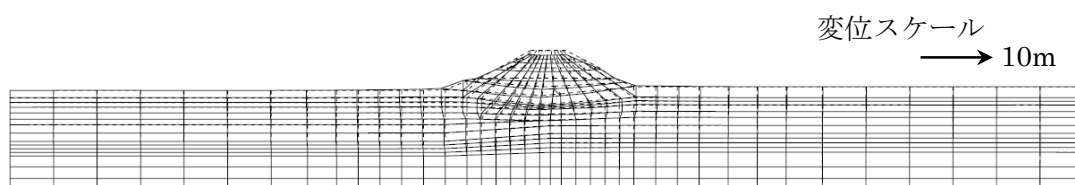
ここでは、後志利別川堤防モデルに対して、微小変形解析、簡易大変形解析、第 3 章および第 4 章で述べた大変形解析を適用した場合の地震応答解析結果を示す。まず、図 7.25 に示すメッシュを用いた場合（ケース A～D）の加振終了後の変形図を図 7.28 (a)～(d)に示す。なお、Updated Lagrangian 法による大変形解析を用いたケース D では、非線形反復計算が収束せず、加振終了時点での結果が得られていない。そのため、同図(d)では、解析が終了した 56 秒の時点での変形形状を示してある。解析手法の違いによる変形形状の比較を行うと、同図(a)に示す微小変形解析の結果と、同図(b)に示す簡易大変形解析の結果に大きな違いは見られない。いずれの場合も堤体の変形量は小さく、盛土直下の地盤もわずかに水平方向に広がるような変形を示すのみである。一方、同図(c)に示す Total Lagrangian 法によるケース C では、盛土堤体およびその直下の基礎地盤の双方において、微小変形解析より大きな変形が確認できる。ただし、図 7.28(c)(d)に示す大変形解析の結果では、盛土堤体の右法面の変形が極端に大きくなっており、この挙動は現実的なものとは言えない。この原因としては、図 7.29(a)に示すように、この部分の表面に三角形メッシュが存在しているためと考えられる。そのため、同図(b)に示すように右法面部のメッシュに修正を加え、この修正メッシュを用いて再度地震応答解析を行った。これが表 7.9 に示すケース E～H であり、これにより得られた変形図が図 7.28 に示されている。同図(e)(f)に示す微小変形解析、簡易大変形解析の変形形状は、メッシュを修正する前の結果（同図(a)(b)）とほぼ等しい。一方、

同図(g)(h)に示す大変形解析での変形図を見ると、元のメッシュを用いた際に見られた同図(c)(d)における盛土堤体の右法面部の過大な変形が抑えられているのが確認できる。また、これに伴い、盛土堤体および基礎地盤の変形も幾分小さく見積もられている。このことより、特に同図(c)における盛土堤体部の比較的大きな変形は、堤体右法面部の三角形メッシュの過大变形により引き起こされたものであると思われる。このように、大変形解析では、用いるメッシュによって解析結果が大きく左右されるため、その意味でも、適切な有限要素メッシュを用いて解析を実行する必要がある。どのような形状のメッシュ分割が適切かについては、さらに検討の余地を残すところであるが、少なくとも斜面表面において部分的に三角形メッシュを用いることは避けた方がよいと思われる。なお、前節の遠心盛土の解析では、斜面上の表面全体を三角形メッシュで構築しており、妥当な結果が得られている。この差は、三角形メッシュが局所的に存在するか、もしくは（斜面表面の）全域に存在するかの違いにより生じた可能性もあるが、その他のパラメータなどの解析条件の差に依存しているとも考えられ、より詳細な要因に関しては今後の検討課題と言える。

(a) ケース A



(b) ケース B



(c) ケース C

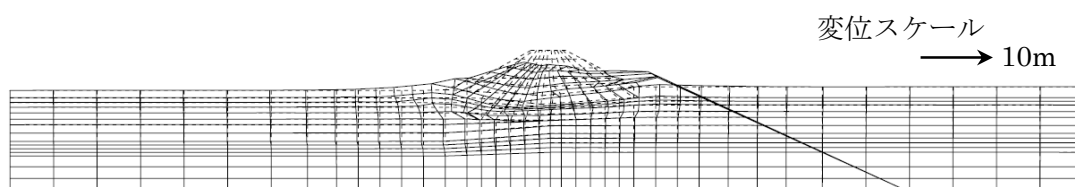
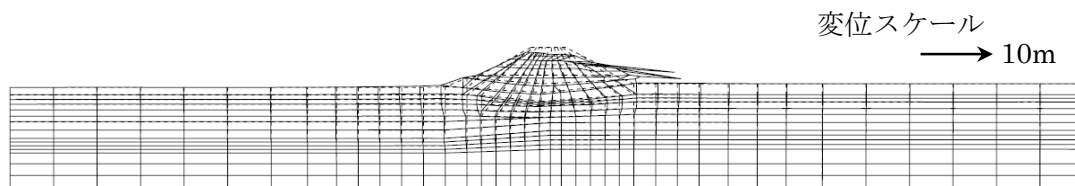
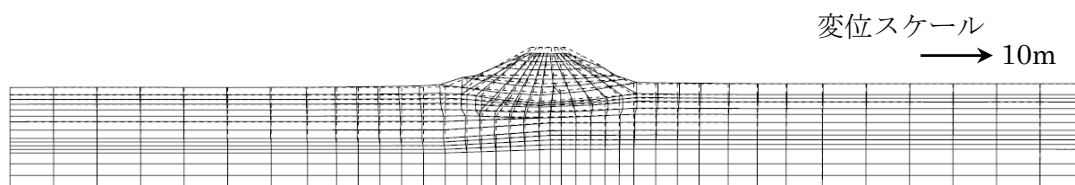


図 7.28 加振終了時の変形図の比較

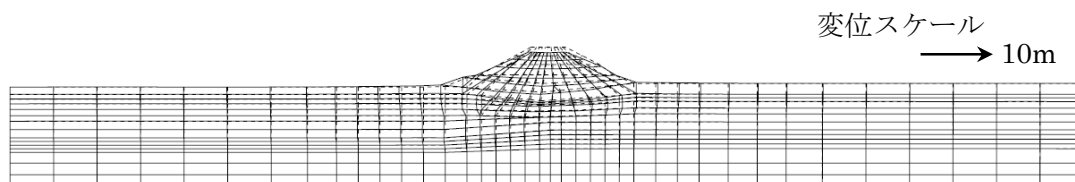
(d) ケース D (56 秒における変形図)



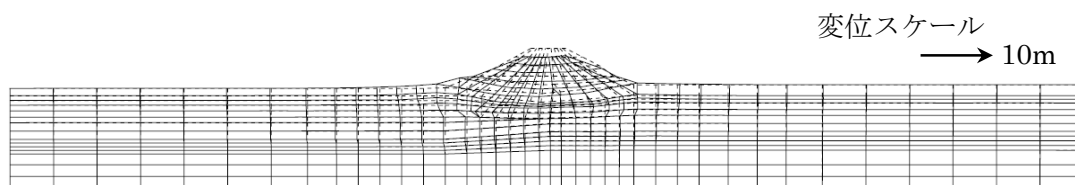
(e) ケース E



(f) ケース F



(g) ケース G



(h) ケース H

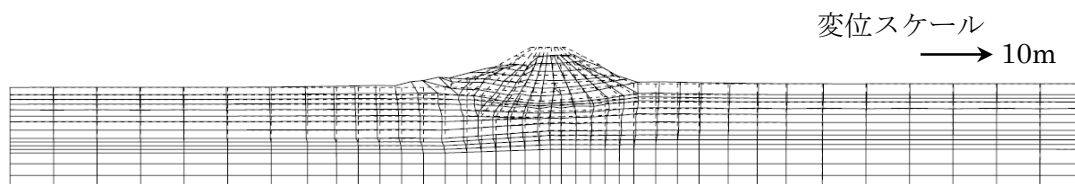


図 7.28 加振終了時の変形図の比較 (続き)

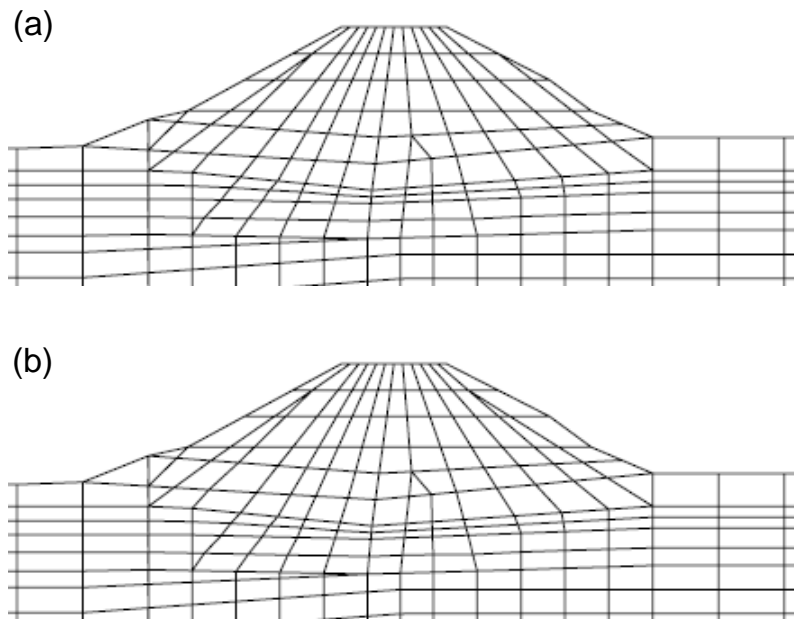


図 7.29 盛土堤体部の有限要素メッシュ : (a) オリジナルメッシュ ; (b) 修正メッシュ

続いて、解析により得られた盛土天端の沈下量を表 7.10 に、同表に基づく沈下量の比較図を図 7.30 に示す。実測による盛土天端の沈下量は約 267cm であった。まず、図 7.25 (および図 7.29(a)) に示すオリジナルのメッシュを用いた場合、微小変形解析 (ケース A) および簡易大変形解析 (ケース B) では、盛土天端の沈下量はそれぞれ観測値の 30%、25%程度であり、実測に対して大きく過小評価した結果となっている。大変形解析を用いた場合、Total Lagrangian 法 (ケース C) による沈下量は観測値の 72%であり、比較の実測に近いように思われるが、前述のとおり盛土右法面が極端に変形する傾向が見られるため、この値をそのまま信用することは難しいと思われる。また、Updated Lagrangian 法 (ケース D) では、先に述べたとおり加振終了時の結果が得られていないため、表 7.10 には参考として 56 秒における沈下量を載せてある。一方、図 7.29(b)に示す修正メッシュを用いた場合、微小変形解析 (ケース E) および簡易大変形解析 (ケース F) における沈下量は、元のメッシュを用いた場合とほとんど変わらず、その差は観測値に対して 2~3%程度である。大変形解析を用いた場合 (ケース G, H)、変形量は微小変形解析や簡易大変形解析よりも大きくなる傾向にあるが、それでも実測と比較すれば 42~45%と過小評価に変わりはない。以上より、大変形解析を用いることで実測値に近づく傾向はあるものの、実測のように 2m を超える沈下は再現できていない。これは、解析手法の問題というよりは、むしろ用いたパラメータに依るものであると思われ、この点に関しては今後さらに検討を行う必要がある。なお、微小変形解析と大変形解析とにおける沈下量の大小が、前節の遠心模型実験の解析における傾向 (表 7.5 や図 7.6) とは逆の傾向を示しているが、これは用いた有限要素メッシュ、入力地震動、モデルパラメータなど、種々の解析条件の影響を受けるものと思われ、

一概に大変形解析における変形量が微小変形解析のそれよりも小さくなるとは限らないことがわかる。

表 7.10 加振終了時の盛土天端沈下量
(ケース D は 56 秒での値)

ケース	沈下量 (cm)
ケースA	81
ケースB	66
ケースC	193
ケースD	(108)
ケースE	88
ケースF	75
ケースG	120
ケースH	113
観測値	267

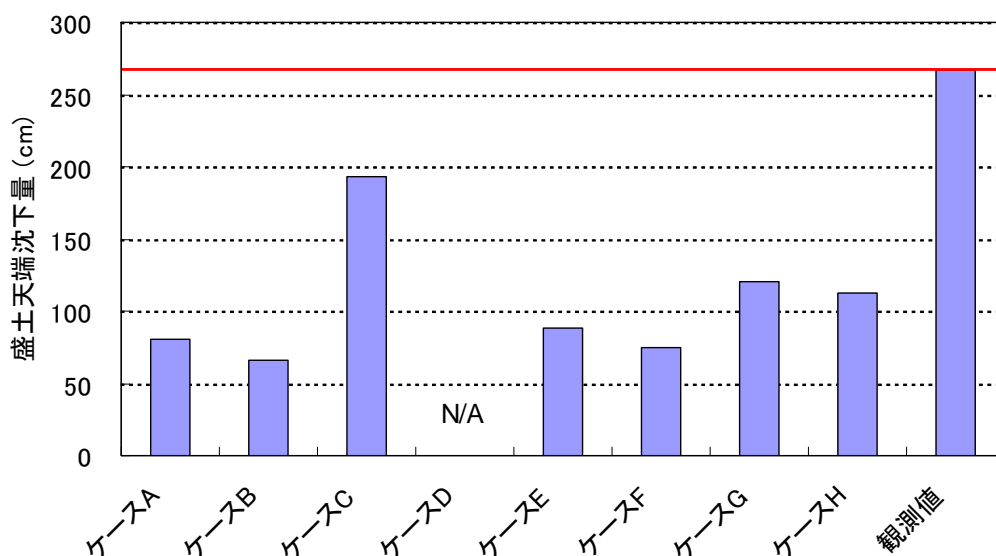
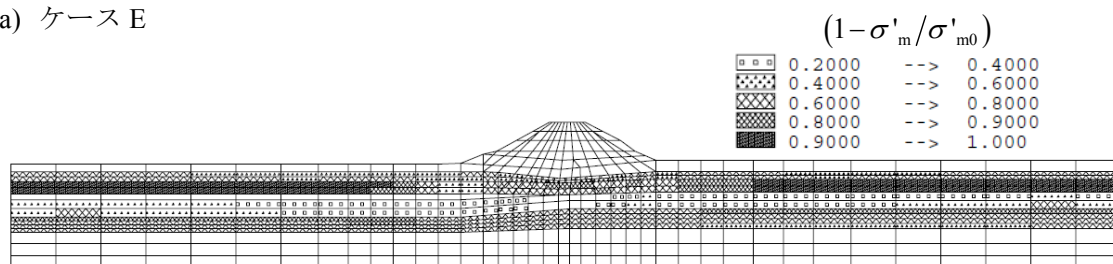


図 7.30 加振終了時の盛土天端沈下量

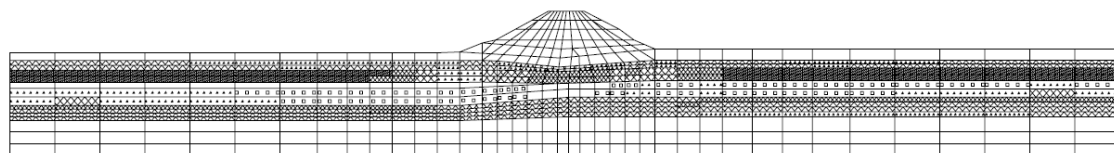
次に、加振中の液状化層における有効応力減少比の最大値分布を図 7.31 に示す。いずれも修正メッシュを用いた場合の解析ケース (E~H) の結果である。それぞれ比較を行うと、同図(d)に示すケース H において、盛土左法面の下方地盤での有効応力減少比分布に他のケースと異なる結果が見られるが、それ以外に関しては各ケースの分布状況は概ね等しい。このことより、ここで対象としたモデルにおいては、微小変形解析や大変形解析といった

解析手法が有効応力減少比分布に及ぼす影響は大きくないと言える。ここでは、各ケース間の微小な違いは無視することとし、層ごとの有効応力減少比に関して考察を行う。まず Asa~Aca 層および As2-L 層では 0.4~0.8 程度の値となっており、部分的に比較的高い有効応力減少比となっていることがわかる。Asa~Aca 層の直下に位置する As1 層においては、盛土脇から左右の両境界部までの広域にわたって有効応力減少比がおおよそ 1.0 まで上昇し、全応力一定と仮定して有効応力減少比を過剰間隙水圧比と見なせば、広い範囲で液状化が発生していることが確認できる。同層では、盛土直下においても 0.8~0.9 程度の高い有効応力減少比を示している。それに対し As2-U 層では、最も大きいところでも 0.6 程度の有効応力減少比しか発生しておらず、盛土直下においてはほぼ 0.0 に近い値となっている。つまり、この層では液状化の発生に全く至っていない。このことより、解析において盛土天端の変形および沈下量が実測より過小評価の結果となったのは、この As2-U 層の影響によるものと考えられる。

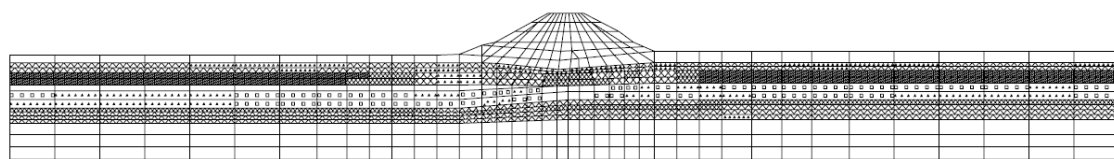
(a) ケース E



(b) ケース F



(c) ケース G



(d) ケース H

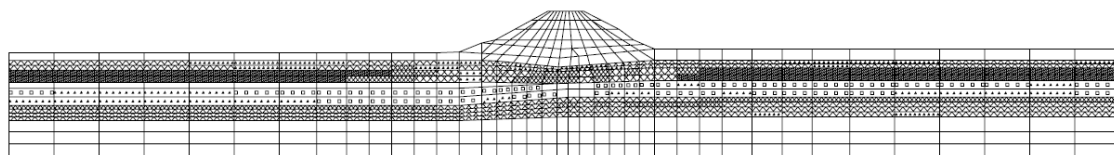


図 7.31 有効応力減少比 $(=1 - \sigma'_m / \sigma'_{m0})$ の時間最大値の分布図 (修正メッシュ)

7.5 神戸港 RF3 岸壁に対する検討

7.5.1 概要

ここでは、新たなストレス-ダイレイタンスー関係を組み込んだ多重せん断モデルを用いてケーソン式岸壁に対する大変形解析を行うことで、構成モデルの地盤・構造物系の地震応答解析に対する適用性を検証する。対象とするケーソン式岸壁は神戸港 RF3 岸壁とし、1995 年に発生した兵庫県南部地震における被害程度の再現を試みる。ここでの地震応答解析は、神戸港六甲アイランドの RF3 岸壁（水深-8.5m，設計震度 0.15，床掘置換改良）の断面を用いて実施した。この岸壁の位置を図 7. 32 に、岸壁の標準断面図を図 7. 33 に、岸壁の諸元を表 7. 11 に示す。また、岸壁の被災状況の平面図を図 7. 34 に、同図に示す A-A 断面の被災状況を図 7. 35 に示す。さらに、被災状況の平面図に示したケーソン No.21～No.7 の間の上部工天端の前出し量，沈下量およびケーソン傾斜角の分布の様子を図 7. 36 に、これらの被災状況をまとめたものを表 7. 11 に示す。

入力地震動としては、神戸港ポートアイランドの鉛直アレー地震観測網により得られた 1995 年の兵庫県南部地震の際の観測記録を用いた。この鉛直アレー地震観測網では、GL±0m，-16m，-32m および-83m の各深度において、三成分方向の加速度計が設置されている。ここでの解析においては、GL-32m に設置された地震計により、1995 年の兵庫県南部地震の際に観測された NS 成分と UD 成分の加速度波形を用いる。なお、対象とした岸壁の向きを考慮して、NS 成分に関しては、得られた加速度記録の符号を反転させることにより適用することとした。GL-32m の地震計は、第 1 洪積砂礫層（天満砂礫相当層）の上部に設置されている。この砂礫層の上部（GL-27m～-33m）におけるせん断波速度 V_S は 245m/s，平均 N 値は 13.5（最小 N 値 4.2，最大 N 値 38）である。解析対象岸壁では、GL-26.4m で N 値が 10～30 の砂質土層が現れるため、この土層が上述の第 1 洪積砂礫層に対応するものと想定し、解析モデルの底面をこの深度（GL-26.4m）に設定することとした。この底面を固定境界とし、上記の観測記録地震動を入力として与えた。GL-32m において記録された兵庫県南部地震の加速度波形を図 7. 37 に示す。同図は得られた観測記録から主要な 20 秒間の波形を抽出したものである。本解析ではこの波形を用いることとし、解析時間を同図のとおり 20 秒間とした。

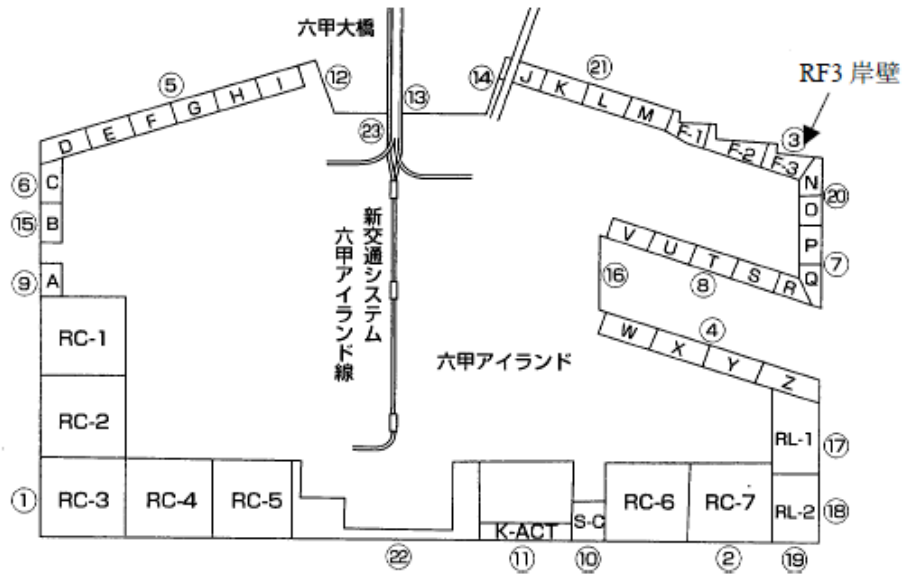


図 7.32 神戸港六甲アイランド RF3 岸壁の位置 (稲富ら, 1997)

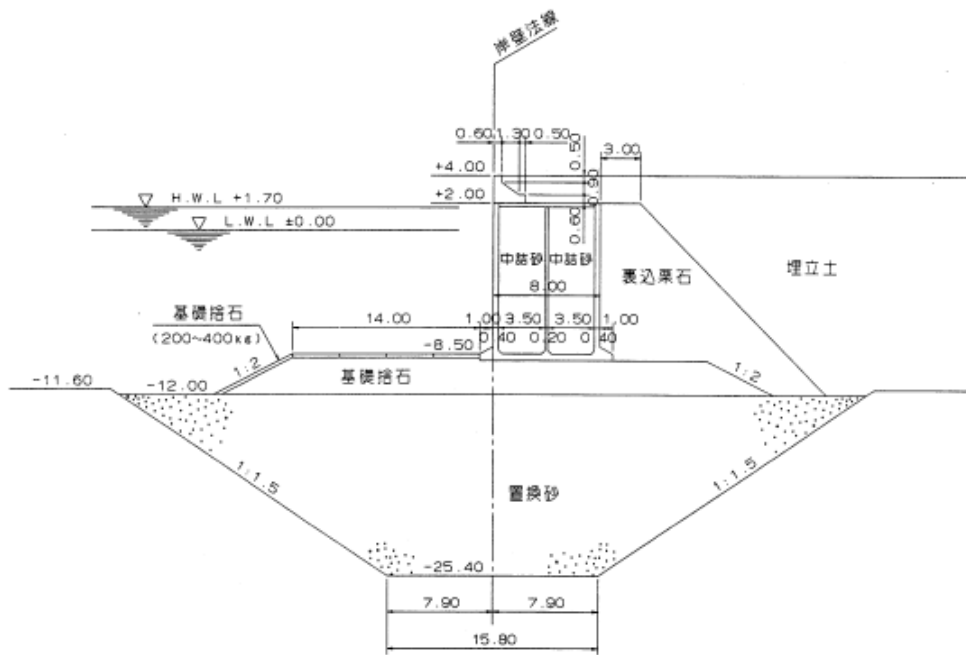


図 7.33 神戸港 RF3 岸壁標準断面図 (稲富ら, 1997)

表 7.11 ケーソン式岸壁の諸元と被災状況（稲富ら（1997）に基づき作成）

水深 (m)	設計 震度	ケーソン 幅 (m)	ケーソン 高さ (m)	置換砂 の層厚 (m)	はらみ 出し量 (cm)	天端 沈下量 (cm)	ケーソン 傾斜角 (度)	被災 変形率 (%)	法線 方向
-8.5	0.15	8	11.5	13.4	464 / 370	198 / 158	6.4 / 3.1	34	東西 方向

※1 被災変形率：最大はらみ出し量 / (ケーソン高さ + 2m) × 100%

※2 各変形量や傾斜角は、図 7.35 に示す No.7~No.21 ケーソンの最大値と平均値を表す

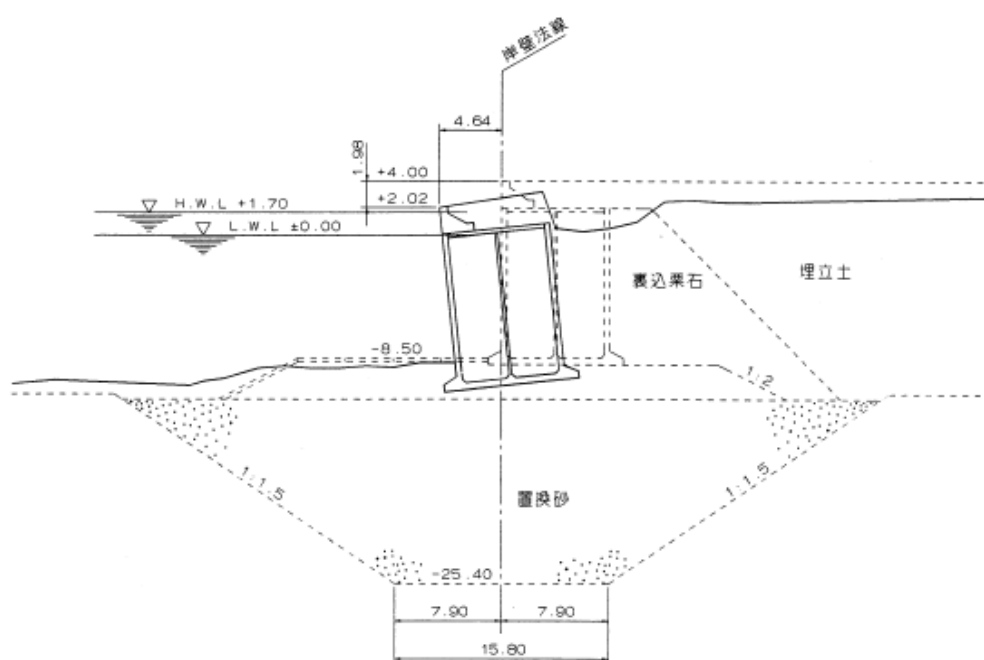


図 7.34 神戸港 RF3 岸壁被災状況断面図（稲富ら，1997）

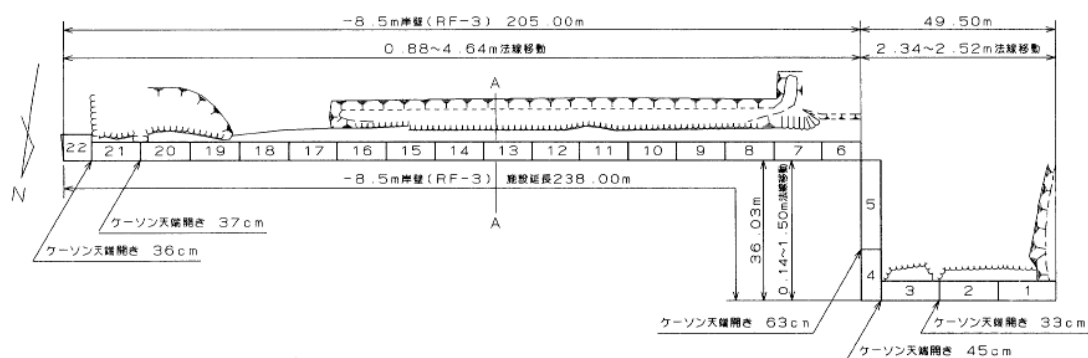


図 7.35 神戸港 RF3 岸壁被災状況平面図（稲富ら，1997）

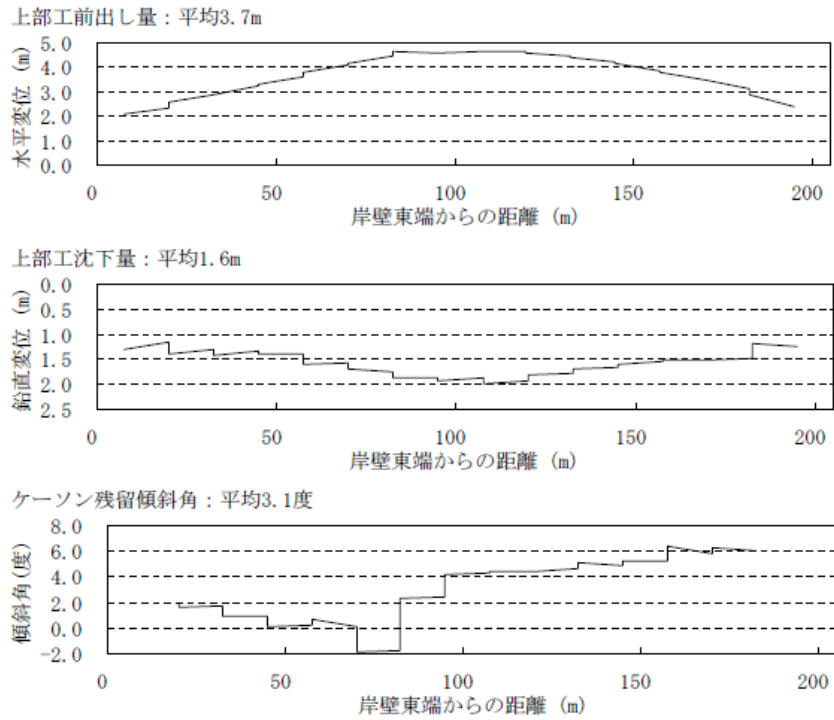


図 7.36 ケーソン No.21～No.7 (図 7.35) を対象とする (上から順に) 上部工前出し量, 上部工沈下量 (原設計天端からの値), ケーソン残留傾斜角 (海側への傾斜を正) の各分布 (稲富ら (1997) に基づき作成)

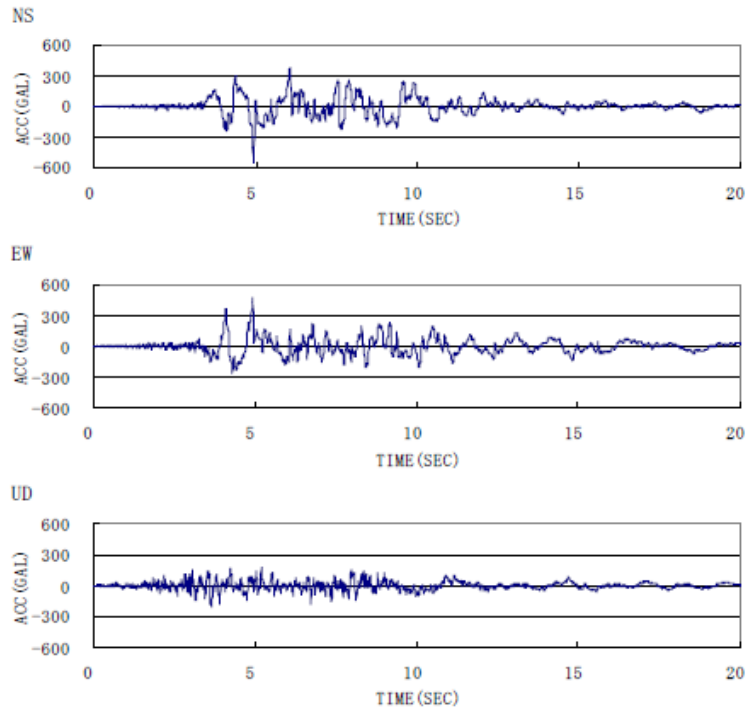


図 7.37 1995 年兵庫県南部地震の際の観測加速度記録

7.5.2 解析モデル

解析対象とする神戸港 RF3 岸壁の断面モデルの土層区分を図 7.38 に、有限要素メッシュ分割を図 7.39 に示す。ここで用いたメッシュは、小堤 (2003) を参考にして設定した。解析モデルの境界条件は、底面を固定境界、側方を粘性境界とし、自由地盤部の解析もあわせて実施した。

各土層に対する多重せん断モデルの変形特性に関するパラメータを表 7.12 に示す。同表に示すパラメータは、小堤 (2003) を参考にして設定されたものである。図 7.38 においてケーソン下方に設置されている基礎捨石、および、ケーソン背後の裏込石の物性値に関しては、表 7.12 に示すような 2 種類の設定方法が提案されている (小堤, 2003)。一方は粘着力を考慮せず、間隙水は非排水条件下での体積剛性を発揮する (井合ら, 1995) とした方法であり、もう一方は内部摩擦角の拘束圧依存性を表現するために見かけの粘着力を与える (小林ら, 1987) とともに、間隙水が発揮する体積剛性として非排水条件下での値を低減させたものを用いる (佐藤ら, 2001) とした方法である。小堤 (2003) は前者を捨石旧定数、後者を捨石新定数と称しており、ケーソン岸壁の地震応答解析では捨石新定数の使用を推奨している。しかし、第 2 章および第 3 章で示した多重せん断モデル構成式では、粘着力が存在しない砂質土を基本対象としているため、粘着力を考慮する必要のある捨石新定数の適用が困難である。そのため、ここでは粘着力をゼロとする捨石旧定数を用いて、基礎捨石および裏込石のモデル化を図った。なお、捨石新定数の適用に関しては、本研究で提案した新たなストレス-ダイレイタンスー関係に基づく多重せん断モデル構成式を、粘着力の影響が考慮できるように拡張する必要がある、この点に関しては今後の研究課題と言える。一方、多重せん断モデルにおけるダイレイタンスー特性のパラメータに関しては、神戸港六甲アイランド GL-10m 岸壁 (図 7.32 の⑥の位置) で採取された置換砂と埋立土の凍結サンプリングを用いた非排水繰返しせん断試験試験 (運輸省第三港湾建設局他, 1997) に対する要素シミュレーションを行うことにより決定した。このようにして求められたダイレイタンスー特性パラメータを表 7.13 に、これらのパラメータを用いた要素シミュレーションにより得られた液状化抵抗曲線を図 7.40 に示す。要素シミュレーションにおける液状化判定基準は、室内試験と同様に軸ひずみ両振幅 5%としている。表 7.13 に示す Sus 値に関しては、(せん断中に試料の間隙水圧を測定する) 圧密非排水三軸圧縮試験 (CUB 試験) に基づく値と、間隙比および細粒分含有率を用いて非排水せん断強度を簡易的に推定する方法 (本島ら, 2008) による値の 2 種類を設定した。

次に、ケーソン各部の解析定数を表 7.14 に、ケーソンと土要素の間に設けられているジョイント要素の解析定数を表 7.15 に示す。ケーソン各部は線形弾性体としてモデル化し、幾何学的非線形性を考慮した大変形解析においては、第 5 章で述べた多重せん断モデル型の線形弾性体モデルを適用した。小堤 (2003) にならい、ケーソンのフーチングの存在はモデル化の際に考慮することとし、ケーソン前面のフーチングについては、その幅を実際

の値と等しくとり、厚さは前方に存在する流体要素（海水）の厚さに合わせることにした。なお、前面フーチングに関しては、慣性項の影響を無視するためにゼロ質量としてモデル化を行っている。一方、ケーソン背後のフーチングに関しては、直接フーチング要素としての有限要素分割は行わず、フーチングの背面（港内側）に接する形で存在する裏込石の剛性をケーソンの値と等しくとることにより表現した。すなわち、図 7.39 に示すメッシュ分割図において、ケーソン背面を 1.0m だけ港内側に拡張した構造を考え、この拡張部分には裏込石の密度を与えることとした。ケーソンおよびフーチングの底部と基礎捨石の間の接触面においては、滑りおよび剥離挙動が生じうるものと考え、この影響をジョイント要素を適用することで表現した。ケーソン背面と裏込石との間の接触面についても、上記と

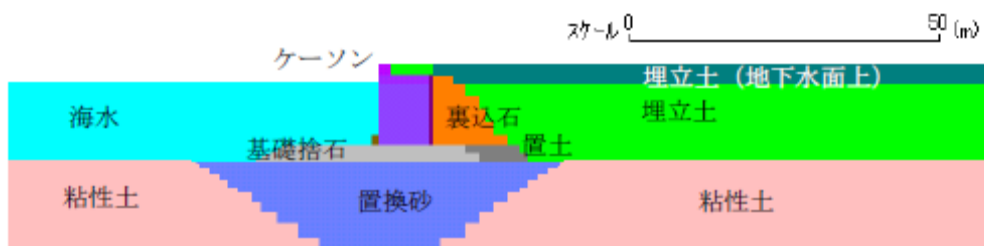


図 7.38 神戸港 RF3 岸壁モデルの土層分割

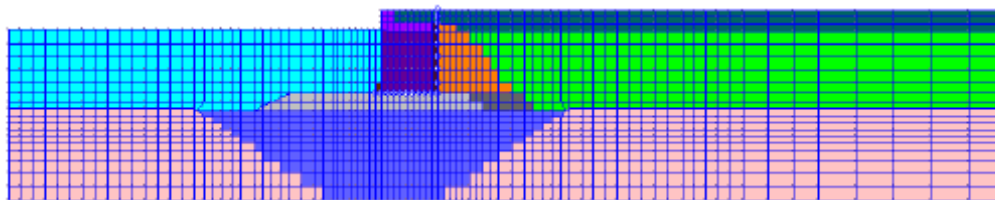


図 7.39 神戸港 RF3 岸壁モデルの有限要素分割

表 7.12 多重せん断モデルにおける変形特性パラメータ

土層名	区分	変形特性									せん断波速
		湿潤密度	基準初期せん断剛性	基準体積弾性係数	基準拘束圧	拘束圧依存係数	間隙率	内部摩擦角	粘着力	履歴減衰上限値	
		ρ t/m ³	G_{ma} kPa	K_{ma} kPa	σ_{ma}' kPa	m_G, m_K	n	ϕ_f (°)	c kPa	h_{max}	
埋立土 (地下水面上)	非液状化層	1.80	79380	207000	63	0.5	0.45	36.0	0.0	0.30	197
埋立土・置土	液状化層	1.80	79380	207000	63	0.5	0.45	36.0	0.0	0.30	197
置換砂	液状化層	1.80	58320	152000	44	0.5	0.45	37.0	0.0	0.30	205
粘性土	非液状化層	1.70	74970	195500	143	0.5	0.45	30.0	0.0	0.30	135
基礎捨石・裏込石 (捨石旧定数)	非液状化層	2.00	180000	469000	98	0.5	0.45	40.0	0.0	0.30	297
基礎捨石・裏込石 (捨石新定数)	非液状化層	2.00	180000	469000	98	0.5	0.45	35.0	20.0	0.30	297

同様にモデル化を行った。なお、小堤（2003）に準じ、ケーソン底面と基礎捨石の間の滑り摩擦角は31度、ケーソン背面と裏込石の間は15度に設定した。

表 7.13 多重せん断モデルにおけるダイレイタンス特性パラメータ

土層名	区分	ダイレイタンス特性										Sus値		
		変相角 ϕ_p (°)	ダイレイタンスパラメータ									簡易 設定法	CUB 試験 結果	
			ε_d^{cm}	r_{edc}	r_{ed}	q1	q2	lk	r_k	S_1	c_1			
埋立土 (地下水面上)	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
埋立土・置土	液状化層	31.0	0.10	0.45	0.10	0.50	0.08	2.00	0.50	0.005	1.00	30.0	100.0	
置換砂	液状化層	30.0	0.10	0.80	0.09	0.50	0.10	2.00	0.50	0.005	1.00	51.0	100.0	
粘性土	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
基礎捨石・裏込石 (捨石旧定数)	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
基礎捨石・裏込石 (捨石新定数)	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

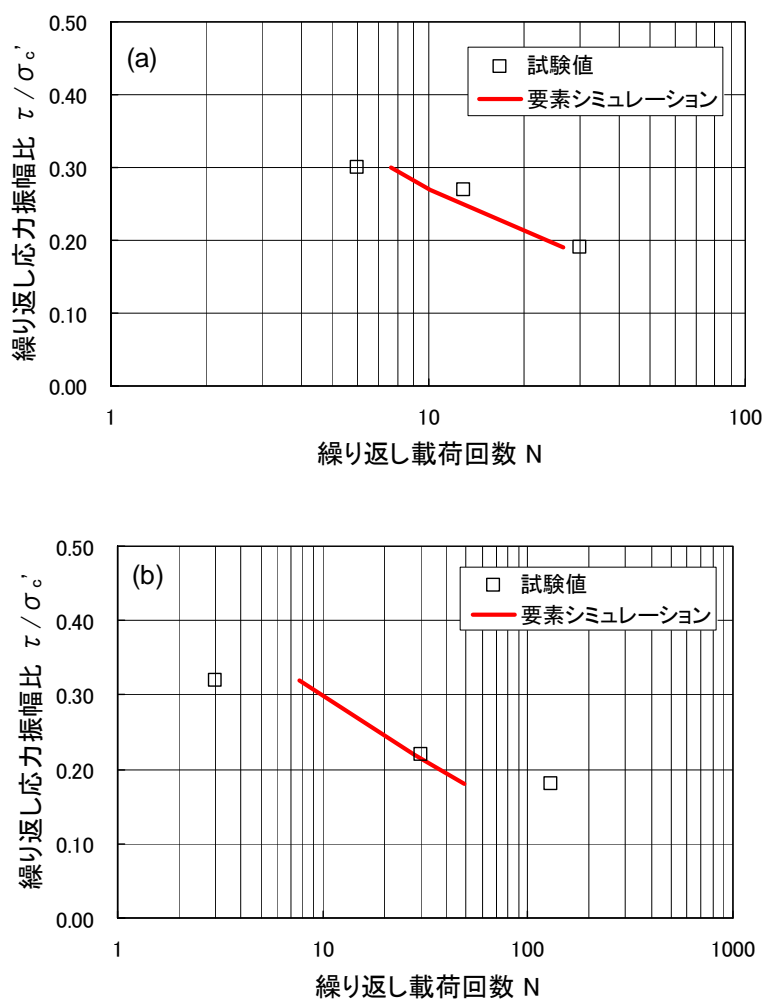


図 7.40 液状化抵抗曲線：(a) 置換砂；(b) 埋立土

表 7.14 構造物の解析定数（線形平面要素）

構造物	ヤング率 E (kPa)	ポアソン比 ν	密度 ρ (t/m ³)
ケーソン	2.23×10^7	0.17	2.1
上部コンクリート	2.94×10^7	0.17	2.3
フーチング	2.94×10^7	0.17	0.0
ケーソン拡張部	2.23×10^7	0.17	2.0

表 7.15 ケーソン周囲のジョイント要素の解析定数

ジョイント位置	法線方向剛性 K_n (kPa/m)	接線方向剛性 K_s (kPa/m)	粘着力 c_J (kPa)	摩擦角 ϕ_J (度)
ケーソン底面	1.0×10^6	1.0×10^6	0.0	31.0
ケーソン背面	1.0×10^6	1.0×10^6	0.0	15.0

7.5.3 解析条件と解析ケース

ここでの解析は実際の被災事例を対象とするため、半無限に続く自由地盤部の存在を考慮する必要がある。前節で述べた後志利別川堤防の解析手順と同様に、まず排水条件下で対象とする不規則領域の自重解析を行う。それに続いて、不規則領域の外側に存在する自由地盤部の自重解析および地震応答解析を実施する。それらの解析結果を引き継ぎ、最終的に対象とする不規則領域の地震応答解析を非排水条件下で行うこととする。いずれの解析フェーズにおいても、土の構成モデルには第2章および第3章で述べた新たなストレス-ダイレイタンスー関係に基づく多重せん断モデル構成式を、ケーソンの構成モデルには第5章で述べた多重せん断モデル型の線形弾性体構成式を用いることとした。表7.12に示す変形特性パラメータは各解析フェーズにおいて共通とし、表7.13のダイレイタンスー特性に関するパラメータは地震応答解析においてのみ適用する。地震応答解析での時間積分法はWilsonの θ 法とし、時間積分間隔は0.01秒とした。

前節で述べたとおり、地震応答解析での計算安定のために初期剛性比例型のレーレー減衰行列を用いた。小堤(2003)によれば、過剰間隙水圧の上昇を考慮せずに種々の剛性比例係数 β に対して自由地盤部の地震応答解析を行った場合、得られた最大水平変位分布がそれ以上変化しなくなるような臨界値としての β が存在し、ここで対象とするモデルでは、陸側の自由地盤部で $\beta = 0.002$ 、海側の自由地盤部では $\beta = 0.001$ がそれに該当する。ここでは、海側の自由地盤部における値 $\beta = 0.001$ を採用することとし、減衰の影響を低く見積もることで地震応答解析を実施した。

ここでの有限要素解析では、微小変形解析、および、Total Lagrangian法もしくはUpdated Lagrangian法による大変形解析を適用することとし、各解析手法に対して定常状態における

非排水せん断強度の違いによりそれぞれ3 ケースずつ、合計で9 ケースの解析を実施した。定常状態に関しては、埋立土、置換砂のいずれにおいても非排水せん断強度が限りなく大きいとした（定常状態を考慮しない）ケース、前述の圧密非排水三軸圧縮試験により得られた非排水せん断強度を与えるケース、間隙比および細粒分含有率に基づく値を適用するケースの3 種類である。表 7.16 に解析ケースの一覧を示す。

表 7.16 解析ケースの一覧

ケース	解析法	Sus値	
		埋立土	置換砂
ケースA-1	微小変形解析	未考慮	
ケースA-2		100kPa	
ケースA-3		30kPa	51kPa
ケースB-1	大変形解析TL法	未考慮	
ケースB-2		100kPa	
ケースB-3		30kPa	51kPa
ケースC-1	大変形解析UL法	未考慮	
ケースC-2		100kPa	
ケースC-3		30kPa	51kPa

7.5.4 解析結果と考察

ここでは、神戸港 RF3 岸壁モデルに対して実施した地震応答解析の結果について述べることにする。まず、表 7.17 に各ケースにおける加振後のケーソン残留変位および残留傾斜角の一覧を示す。同表には、実測による残留変位と傾斜角の最大値および平均値が併せて記されている。なお、ケーソン底部前出し量に関しては、実測による平均値が与えられていない。この表に基づき作成されたのが、図 7.41 に示す残留変位および傾斜角の比較図である。各残留値についての詳細な考察の前に、解析手法の違いが結果に及ぼす影響を見ると、Total Lagrangian 法による解析結果と Updated Lagrangian 法による結果の間にはほとんど差が生じていないことが確認できる。Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法は拠り所としている表示方法（前者では物質表示，後者では空間表示）が異なるのみで、本質的には等価であることを考えれば、ここでの結果は理に適ったものであると言える。微小変形解析と大変形解析の結果を比較すると、いずれの残留値に対しても、また定常状態での非排水せん断強度の値に関わらず、微小変形解析による結果が大変形解析よりもやや大きく見積もられる傾向がある。これは幾何学的非線形性の考慮の有無に依るものであり、概ね変形量が大きくなるにつれてその差も大きくなる傾向にある。

次に各残留値について順に見ていくと、まずケーソン上部工前出し量に関しては、図 7.41(a)よりケース A-3 で実測値（平均値）に対して 92%程度の再現性の高い値が得られている。大変形解析においても、定常状態の非排水せん断強度の値を小さく設定したケース (B-3,

C-3) が実測値に最も近く、観測された平均前出し量の約 73%となっている。前述のとおり、大変形解析を適用することで前出し量は小さく見積もられる結果となり、例えば、Total Lagrangian 法によるケース B-3 と微小変形解析におけるケース A-3 とを比較すると、微小変形解析での前出し量 (339cm) に対して約 20%、また実測での平均値 (370cm) に対して約 19%の差異を生じている。ケーソン前出し量は、解析に用いたジョイントの物性やレーレー減衰パラメータなどの影響を受けるため、いずれのケースが絶対的に正しいという議論は難しいが、微小変形解析では理論的に厳密な定式化を行った場合より前出し量を過大に評価するという点には注意が必要である。

続いて、ケーソン上部工の沈下量を比較すると、いずれのケースも実測値に対して過小評価した結果となっている。ただし、定常状態を考慮しない場合 (ケース A-1, B-1, C-1)、解析での沈下量が実測値 (平均値) の 35%程度の値にとどまっているのに対し、圧密非排水三軸圧縮試験 (CUB 試験) により得られた非排水せん断強度を考慮すると、微小変形解析 (ケース A-2) で実測値 (平均値) の約 71%、大変形解析 (ケース B-2, C-2) で約 60%にまで沈下量が増加している。大変形解析を適用することにより、微小変形解析の場合と比較すると、実測値 (平均値) に対して概ね 10%ほど沈下量が小さく見積もられている。ケーソン上部工は図 7.33 (もしくは図 7.34) に示すようにケーソンの左上に設置されており、この沈下量はケーソン自身の変形モードの影響を大きく受ける。すなわち、裏込石の土圧の増大に伴い捨石マウンド上を滑動するような変形が卓越していれば沈下はあまり生じず、一方、海側の捨石マウンドにケーソン前面底部が沈み込むような転倒モードが卓越している場合はそれに伴い沈下量も大きくなる。表 7.17 および図 7.41(d)において、解析で得られたケーソン残留傾斜角が実測値に対して概ね過小評価された結果であることより、解析においてケーソンの転倒モードが実際ほど発現されていないことが沈下量の過小評価にも影響したものと考えられる。

次に、ケーソン底部の前出し量であるが、実測値の最大値が 238cm であるのに対し、大変形解析におけるケース B-3 で 230cm (約 97%)、ケース C-3 で 226cm (約 95%) と再現性の高い結果が得られている。実測の平均前出し量が得られていないため、明確な結論付けは難しいが、概ね定常状態を考慮したうえで大変形解析を適用することにより精度の高い値が得られるものと思われる。

最後に図 7.41(d)に示すケーソンの残留傾斜角であるが、これは前に述べたように、解析による値が実測値 (最大値および平均値) に対して過小評価された結果となっている。すなわち、実際の被災形態は図 7.34 に示すようにケーソンの滑動モードと転倒モードが混在した形であるのに対し、解析では後に示すように (図 7.42)、水平方向の滑動モードが卓越した結果であることを意味している。大変形解析を適用した場合、微小変形解析の場合と比較してさらにわずかではあるが転倒モードが抑制されるようである。解析において転倒モードが実測ほど現れない理由としては、まず裏込石および捨石マウンドの物性値の影響が考えられる。さらに、ケーソンと裏込石および捨石マウンド間に設置したジョイント要

素の物性値もこれに影響を及ぼすものと思われる。裏込石および捨石の物性値としては、表 7.12 に示す捨石旧定数を用いており、これらの値に対して捨石新定数を適用することで解析結果の精度向上につながる可能性があるものと考えられる。実際、小堤（2003）により行われた地震応答解析では、被災事例との比較から捨石新定数の使用が推奨されている。ジョイント要素、特にケーソン底部と捨石間に設置した要素は、ケーソンの滑り挙動を大きく左右する可能性があり、この物性の違いが変形モードに及ぼす影響に関してはさらに詳しく検討する必要があると思われる。ケーソンの変形モードに影響を及ぼす因子としては、図 7.41(d)より定常状態における非排水せん断強度もその一つに挙げられる。比較的大きなせん断強度（埋立土、置換砂の双方で 100kPa）を設定した場合、定常状態を考慮しないケースの 1.3~1.9 倍程度の傾斜角となるのに対し、それよりも小さな値（埋立土で 30kPa、置換砂で 51kPa）を用いた場合、定常状態を考慮しないケースの 82~89% 程度の値となる。この傾向は、微小変形解析および大変形解析の両者に共通で見られるものである。

ここで、再度図 7.41 の(a)~(d)を見てみると、定常状態における非排水せん断強度の差が残留値に及ぼす傾向として、同図(a)と同図(c)の間に、また、同図(b)と同図(d)の間に類似性が確認できる。このことは、同図(a)(c)の前出し量が水平方向におけるケーソンの滑り挙動に主に依存し、一方、同図(b)の沈下量および同図(d)の傾斜角はケーソンの回転挙動の影響を強く受けるものであることを示唆している。

表 7.17 ケーソンの残留変位および残留傾斜角

ケース	ケーソン 上部工 前出し量	ケーソン 上部工 沈下量	ケーソン 底部 前出し量	ケーソン 残留傾斜角
	(cm)	(cm)	(cm)	(度)
ケースA-1	188	55	131	2.38
ケースA-2	290	113	208	4.45
ケースA-3	339	111	291	2.03
ケースB-1	183	55	129	2.03
ケースB-2	245	94	179	2.6
ケースB-3	269	88	230	1.67
ケースC-1	182	55	128	2.01
ケースC-2	247	96	178	2.66
ケースC-3	268	90	226	1.79
実測値(最大値)	464	198	238	6.4
実測値(平均値)	370	158	—	3.1

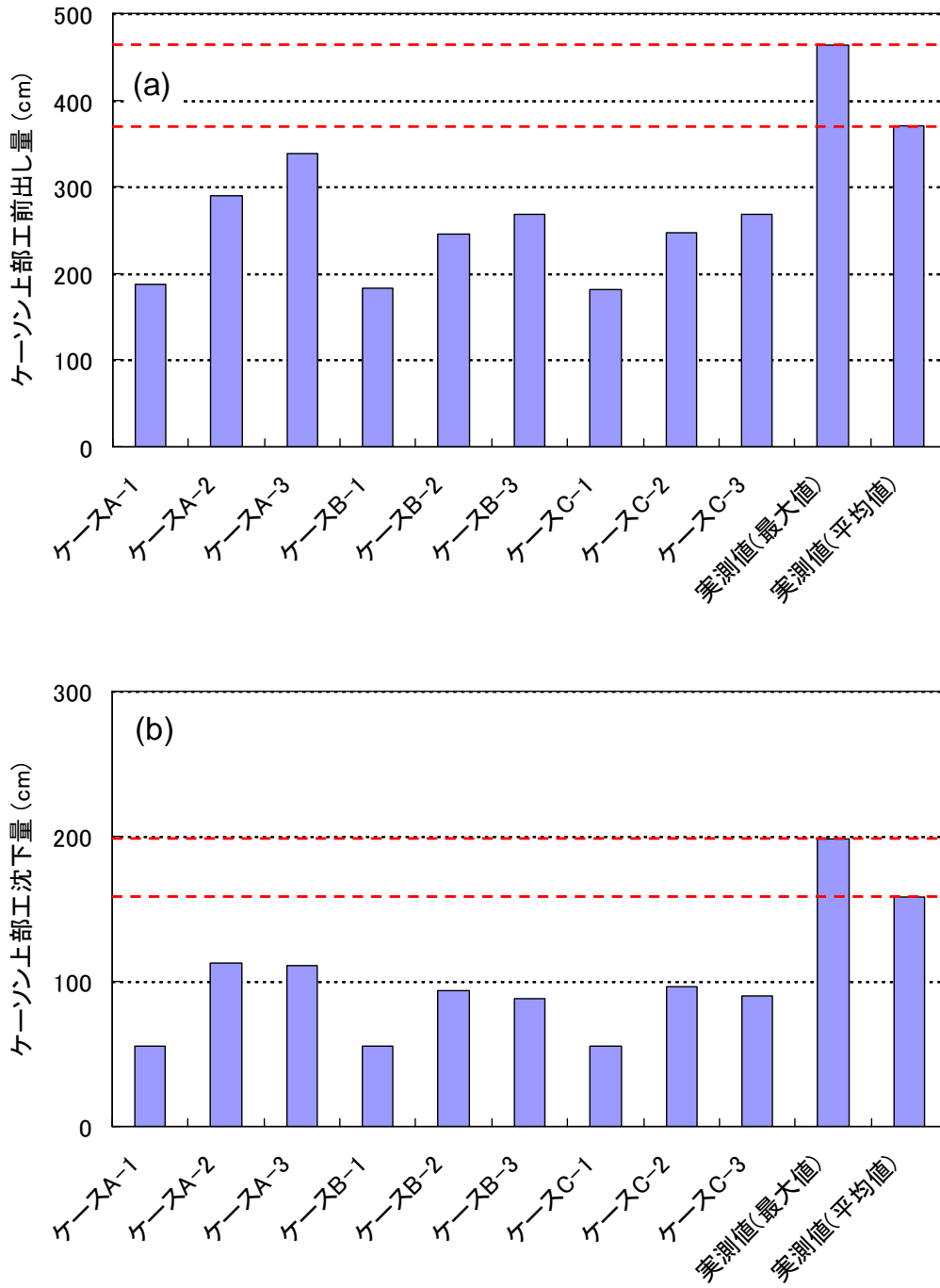


図 7.41 ケーソンの残留変位および残留傾斜角

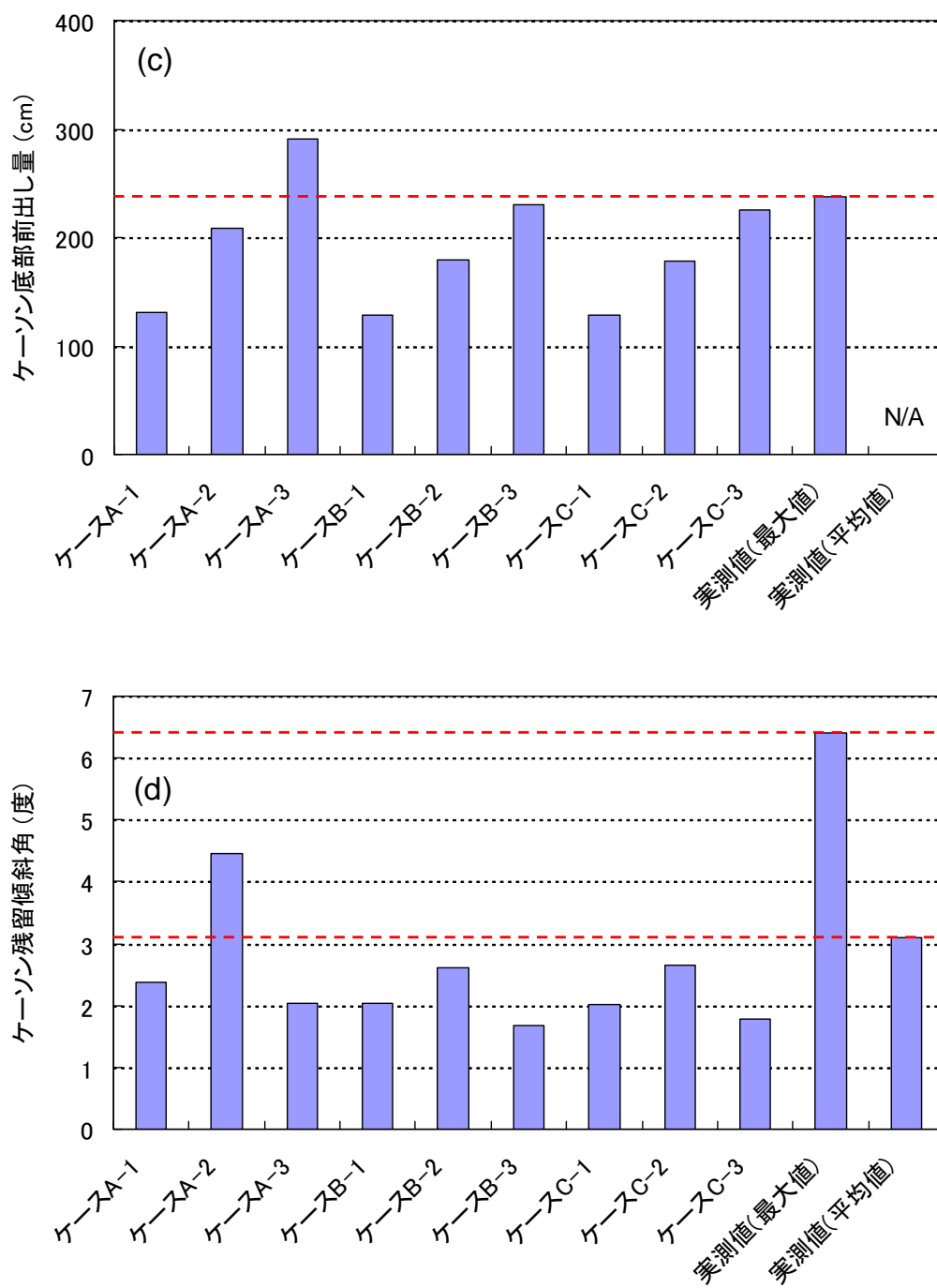
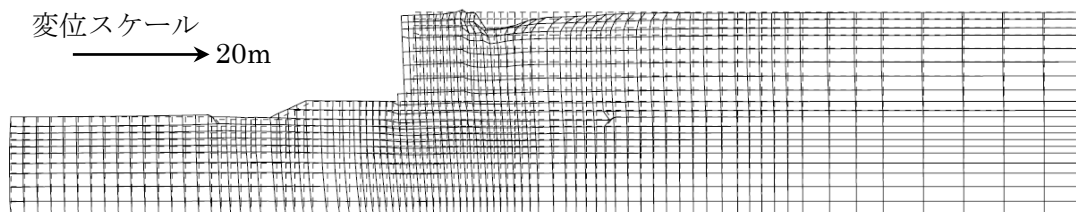


図 7.41 ケーソンの残留変位および残留傾斜角 (続き)

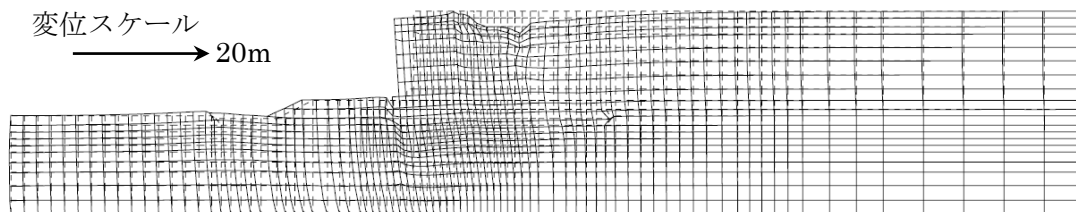
次に、図 7.42 に解析により得られた加振終了後の残留変形図を示す。同図(a)～(c)に示す微小変形解析による結果では、ケーソンのはらみ出しに伴い背後の地下水面上の埋土部が 1～3m ほどの沈下を生じている。一方、同図(d)～(i)に示す大変形解析では、最大でも 1.5m 程度の沈下にとどまっている。この差は、第 3 章および第 4 章で述べた幾何学的非線形性の考慮の有無によるものである。このように解析手法による差が存在する一方で、いずれの解析手法を用いた場合でも、定常状態を考慮しないケース（同図(a)(d)(g)）では置換砂の変形がそれほど見られないのに対し、非排水せん断強度により定常状態を考慮したケース（同図(b)(c)(e)(f)(h)(i)）では、ケーソン直下の置換砂上部層においてケーソンの滑動に伴うせん断変形が確認できる。これは、入力として与えた非排水せん断強度の違いによるものである。今回の検討では、図 7.34 に示す実際の被災状況を最もよく表しているのは、図 7.42(b)の微小変形解析において圧密非排水三軸圧縮試験による非排水せん断強度を考慮したケース A-2 であった。同図(b)によると、被災状況でのケーソンの滑りと回転（転倒）による変形モード、および、ケーソン背後の裏込石と埋立土の沈下形状がよく再現されていることがわかる。しかし、このケースでは幾何学的非線形性が考慮されておらず、厳密な意味での定式化に基づいて結果が得られているわけではない。大変形の影響を適切に考慮した場合、微小変形解析において比較の変形が大きいケーソン周辺部の変位量が幾分小さく算出され、実際の状況との乖離はより大きくなってしまふ。ただし今回の検討では、微小変形解析においても前述の各残留値が実測に対して過小評価されていることより、そもそも用いた土やジョイントなどの物性値にまだ改善の余地があるとも考えられる。例えば、先に述べた捨石新定数やジョイントの摩擦角などがその一例である。先に示した表 7.17 より、ケーソン上部工の前出し量がケーソン幅 8m に対して最大で 58%、平均で 46%、またケーソン高さ 11.5m に対して最大で 40%、平均で 32%と比較的大きい値であることを考慮すれば、やはりこのような現象には大変形解析を適用することが妥当であると思われる。

続いて、加振中の液状化層における有効応力減少比の最大値分布を図 7.43 に示す。同図(a)～(c)は微小変形解析、同図(d)～(f)は Total Lagrangian 法による大変形解析、同図(g)～(i)は Updated Lagrangian 法による大変形解析の結果である。まず、解析手法の違いについての詳細な考察を行う前に、定常状態における非排水せん断強度の影響を見ることとする。同図(a)(d)(g)に示す定常状態を考慮しないケースでは、考慮した場合と比較して地下水面上の埋立土における有効拘束圧の減少が抑えられていることが確認できる。加えてケーソン直下の置換砂において、深度に関わらず有効拘束圧がほぼ変化していない。他方、定常状態を考慮したケースでは、埋立土の広範囲にわたって有効拘束圧の減少が見受けられる。特に、間隙比および細粒分含有率に基づく非排水せん断強度を適用した場合（同図(c)(f)(i)）、裏込石近傍を除く埋立土の深部において有効応力減少比が 0.9 を超えほぼ液状化に至っていることがわかる。図 7.41(a)を見ると、この場合のケーソン前出し量がその他のケースに比べて大きく算出されていることより、ケーソン背後の埋立土における有効拘束圧の減少がケーソンの変形に及ぼす影響は大きいものと考えられる。次に置換砂の水圧分布を見る

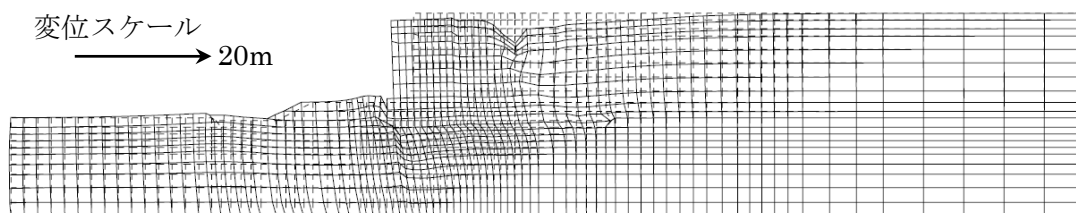
(a) ケース A-1



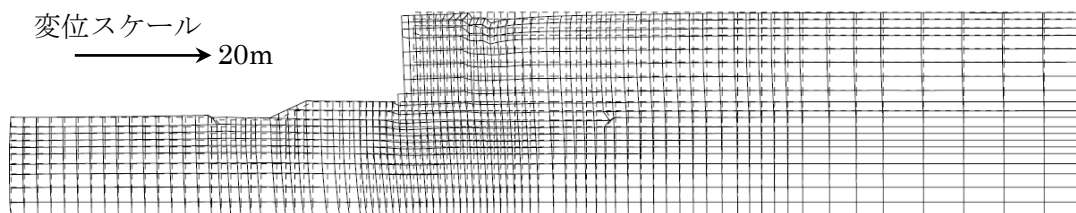
(b) ケース A-2



(c) ケース A-3



(d) ケース B-1



(e) ケース B-2

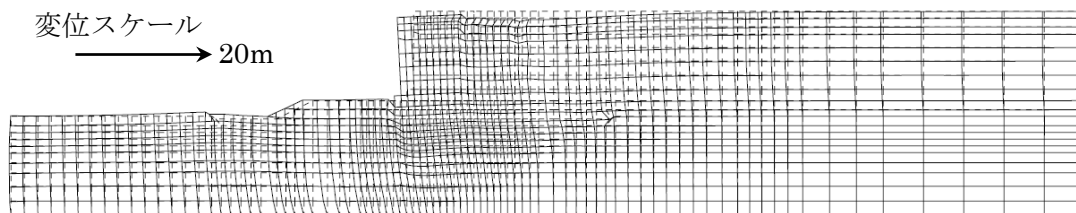
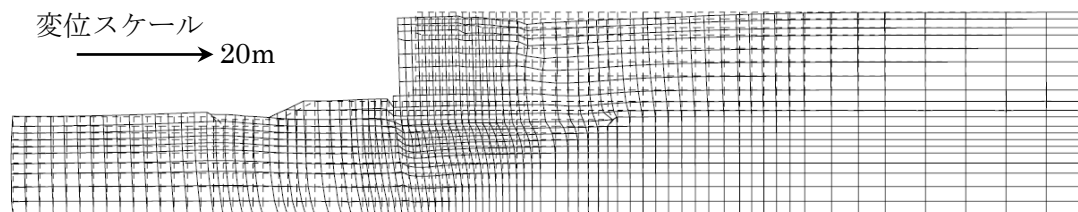
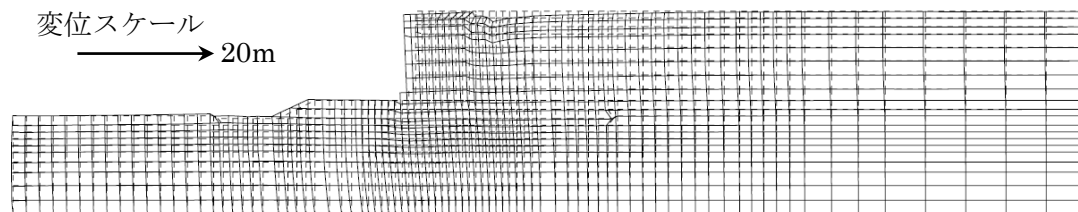


図 7.42 加振終了後の残留変形図

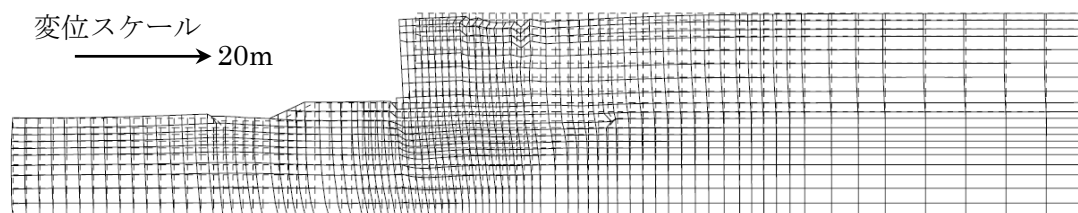
(f) ケース B-3



(g) ケース C-1



(h) ケース C-2



(i) ケース C-3

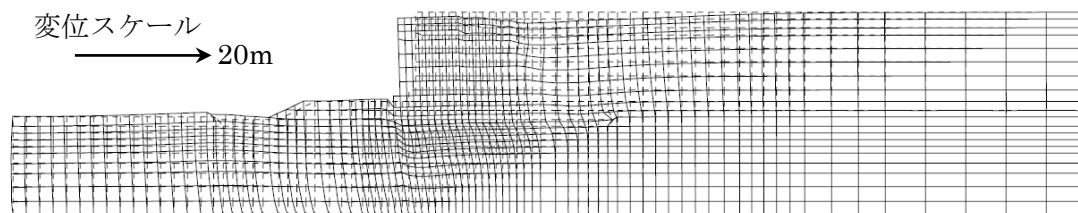
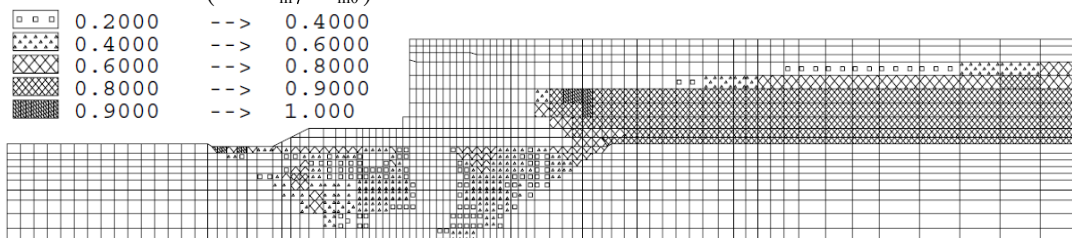


図 7.42 加振終了後の残留変形図 (続き)

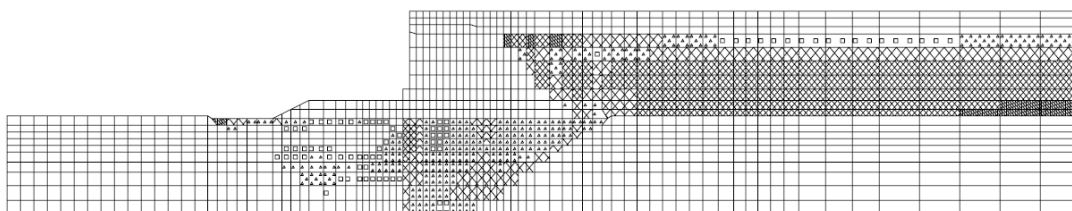
と、非排水三軸圧縮試験による非排水せん断強度、間隙比および細粒分含有率に基づく非排水せん断強度のいずれを用いた場合でも、ケーソン前面位置より港内側における領域で有効拘束圧の減少が見られ、最も高いところで 0.8~0.9 程度の有効応力減少比が生じている。それに対して港外側の置換砂では目立った有効拘束圧の変化が見られず、特に間隙比および細粒分含有率に基づく非排水せん断強度を適用したケース (同図(c)(f)(i)) では、そのほとんどの領域で有効応力減少比がゼロに近い値である。この結果と図 7.41(d)を照らし

合わせると、ケーソンの残留傾斜角に対しては港外側の置換砂の水圧分布が影響を与えることが理解される。

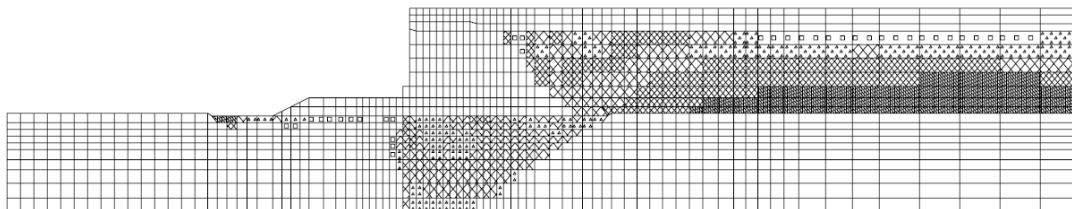
(a) ケース A-1 $(1 - \sigma'_m / \sigma'_{m0})$



(b) ケース A-2



(c) ケース A-3



(d) ケース B-1

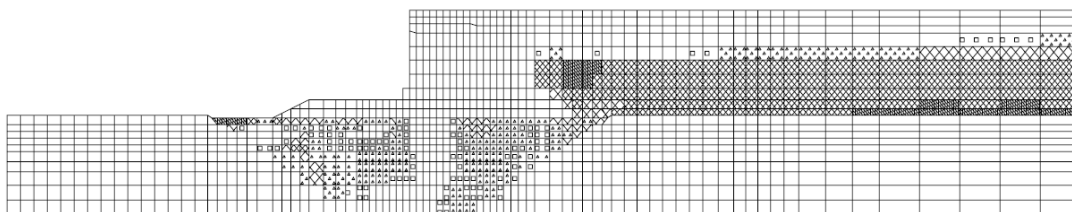
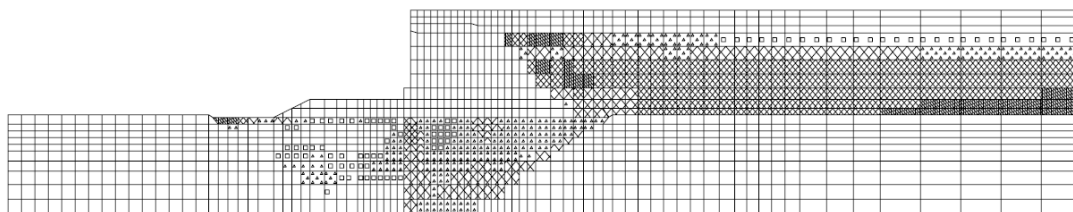
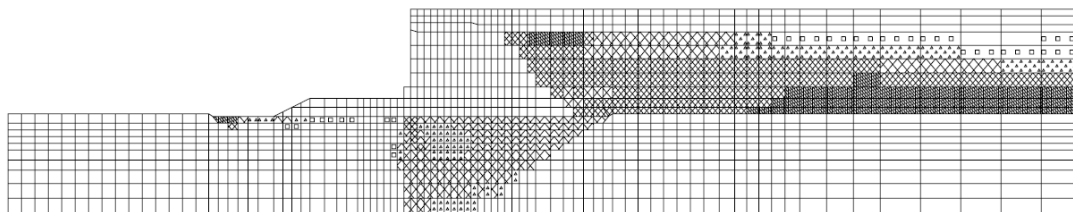


図 7.43 有効応力減少比 $(= 1 - \sigma'_m / \sigma'_{m0})$ の時間最大値分布

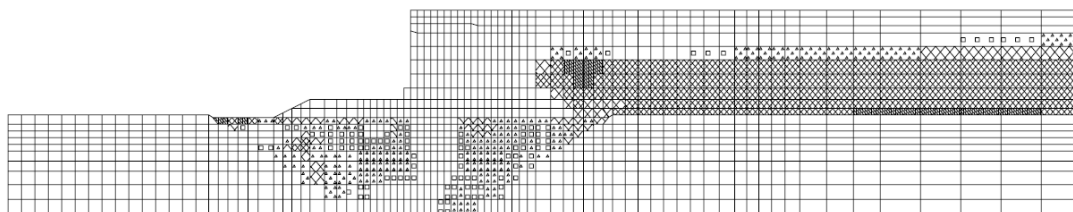
(e) ケース B-2



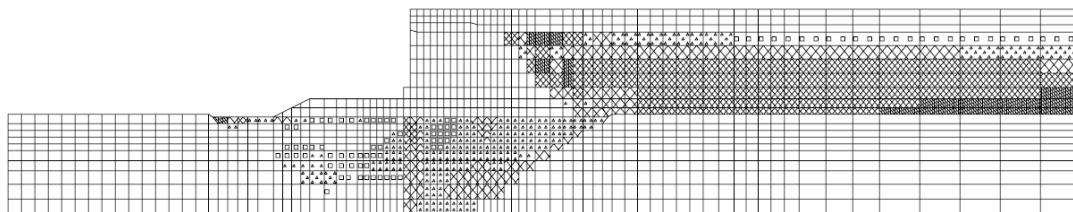
(f) ケース B-3



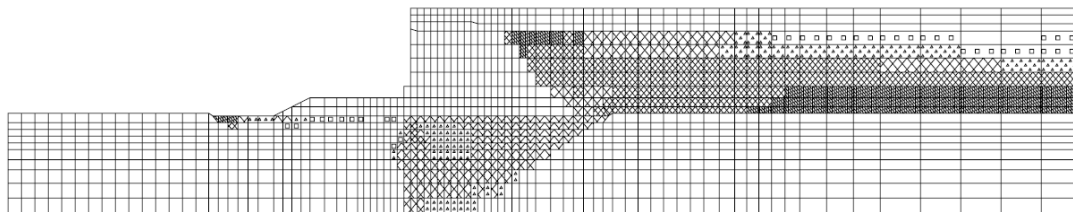
(g) ケース C-1



(h) ケース C-2



(i) ケース C-3

図 7.43 有効応力減少比 $(=1-\sigma'_m/\sigma'_{m0})$ の時間最大値分布 (続き)

続いて、解析手法の違いが有効応力減少比に及ぼす影響について考察する。まず、定常状態を考慮しない場合、図 7.43 (a)(d)(g)において解析手法による有効応力減少比の分布形状に明瞭な差は認められない。次に、定常状態における非排水せん断強度を非排水三軸圧縮試験より求めた 100kPa とした場合、裏込石近傍の埋立土において、同図(e)(h)に示す大変形解析結果では同図(b)の微小変形解析よりやや広範囲にわたり有効応力減少比 0.9 を超える領域が存在する。しかし、それ以外に際立った差異は確認できない。一方、間隙比および細粒分含有率に基づき非排水せん断強度を設定した場合、裏込石近傍の埋立土においては同様の傾向が確認できるが、大変形解析での右方境界寄りの埋立土層における有効応力減少比分布に関しては、微小変形解析ほど顕著な上昇傾向は見られない。以上まとめると、大変形解析を適用することにより、置換砂の有効拘束圧分布にはほとんど差が生じないが、埋立土に関しては定常状態を考慮した条件のもとでは幾分の違いが確認されるようになる。

次に、加振中のケーソン上部工における水平加速度応答波形を図 7.44 に示す。微小変形解析と大変形解析における応答波形に明瞭な差異は確認できないため、ここでは特に区別なく述べることとする。同図より、定常状態において非排水せん断強度を考慮した場合、考慮しない場合と比較して応答加速度振幅はおよそ 7 秒以降において小さい値を示している。これは、7 秒付近において液状化層のいくつかの要素が定常状態へと至る応力状態にあることを表しているものと思われる。定常状態を考慮しないケースでは、図 6.35 の要素シミュレーションに示すように、大ひずみ領域においても要素は十分な剛性を持ちうるため、応答加速度の減衰傾向はほとんど見られず大きな値を維持することとなる。一方の定常状態を考慮した場合は、例えば図 6.31 に示すように、ひずみが大きくなるにつれて剛性は大きく低下する。このため、例えば図 7.44(b)(c)では、途中から加速度応答振幅が減衰する結果となる。なお、より小さい非排水せん断強度を用いると、加速度振幅の減衰傾向はより大きくなる傾向にある。

最後に、置換砂のある要素における有効応力経路、応力-ひずみ関係について述べる。出力対象とした要素の位置を図 7.45 に、当該要素の有効応力経路を図 7.46 に、せん断応力-せん断ひずみ関係を図 7.47 に、軸差応力-軸差ひずみ関係を図 7.48 に示す。図 7.46 において、図中の丸印 (●) は初期自重解析終了後の有効応力経路の位置を、一方の三角印 (▲) は地震応答解析終了時の位置を表している。まず、図 7.46 に示す有効応力経路より、定常状態を考慮した場合、微小変形解析と大変形解析における応力経路はほぼ等しくなることがわかる。これは、最大せん断応力で縦軸を整理しているためであり、第 6 章での単調および繰り返しせん断の要素シミュレーション結果と軌を一にするものである。一方、定常状態を考慮しない場合は、微小変形解析 (同図(a)) で得られた最大せん断応力の最大値は大変形解析 (同図(d)(g)) の値より 12kPa ほど過大評価されている。解析手法に依らない概ねの傾向として、定常状態を考慮することにより最大せん断応力の値は小さく見積もられ、有効拘束圧の減少とともに原点近傍へと応力経路が進行している。このため当該要素の過剰間隙水圧は逆に増加することとなり、この傾向が図 7.43(b)(c)におけるケーソン直下の水

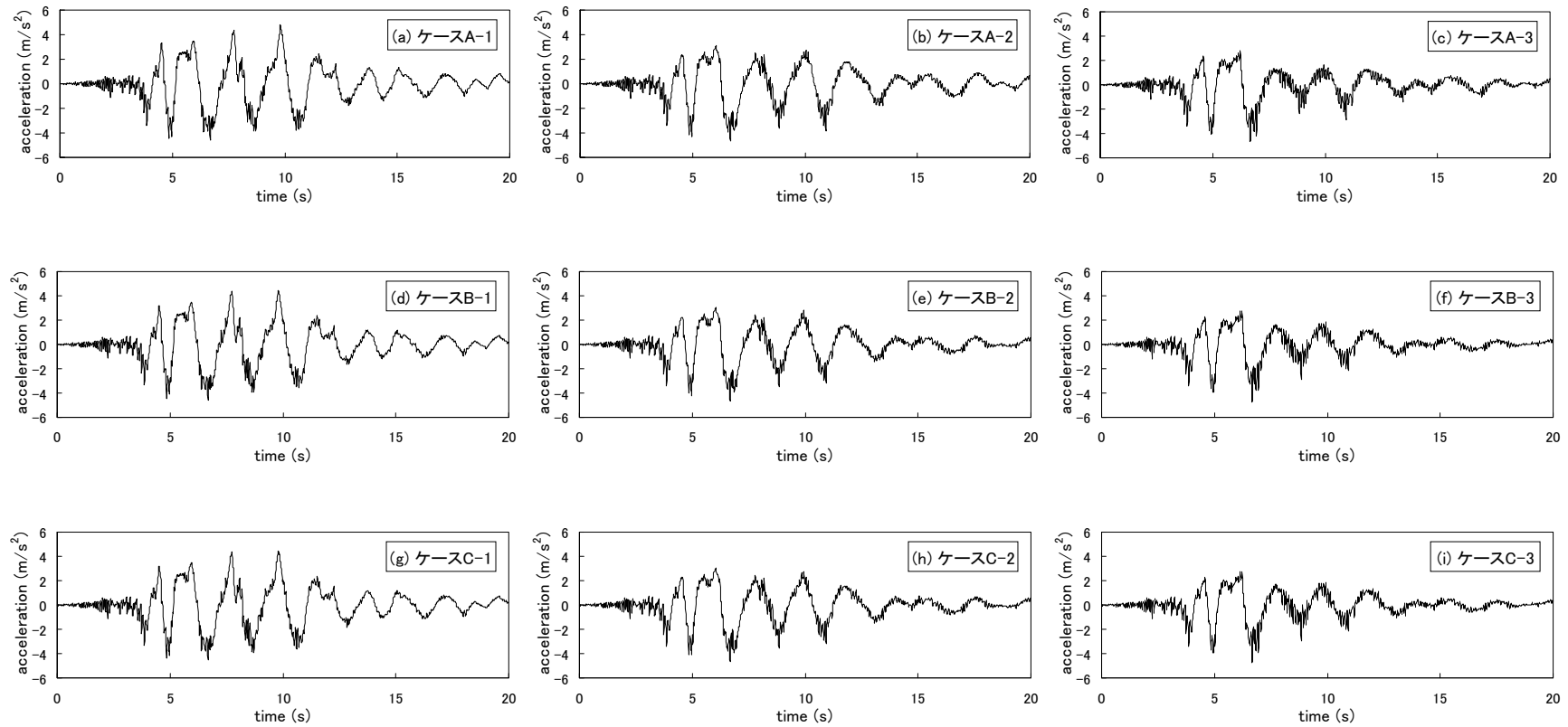


図 7.44 ケーソン上部工における水平加速度応答波形

圧比分布図の形で示されている。一方、定常状態を考慮しない場合では、有効拘束圧が比較的大きな値を保つために過剰間隙水圧の上昇には至らない。この結果が、図 7. 43(a)に示すケーソン直下の水圧比分布として表されている。

図 7. 47 に示すせん断応力-せん断ひずみ関係を見ると、定常状態を考慮しない場合のせん断ひずみは、解析手法に依らず 5%程度である。それに対し定常状態を考慮したケースでは、約 20%もしくはそれ以上のせん断ひずみが生じている。微小変形解析と大変形解析の結果を比較すると、有効応力経路ではほぼ差を生じていなかったのに対し、ケース A-2 ではケース B-2 および C-2 の約 1.28 倍、ケース A-3 ではケース B-3 および C-3 の約 1.62 倍の最大せん断ひずみを生じており、微小変形解析ではせん断ひずみを過大評価していることが確認できる。一方、図 7. 48 に示す軸差応力-軸差ひずみ関係では、間隙比および細粒分含有率に基づく非排水せん断強度を用いた場合、ケース A-3 の最大軸差ひずみはケース B-2 および C-2 の 88%程度の値であり、微小変形解析では過小評価となっている。それに対し、非排水三軸圧縮試験により求められた非排水せん断強度を適用した場合は、解析手法による軸差ひずみの差は最大でも 1%程度である。

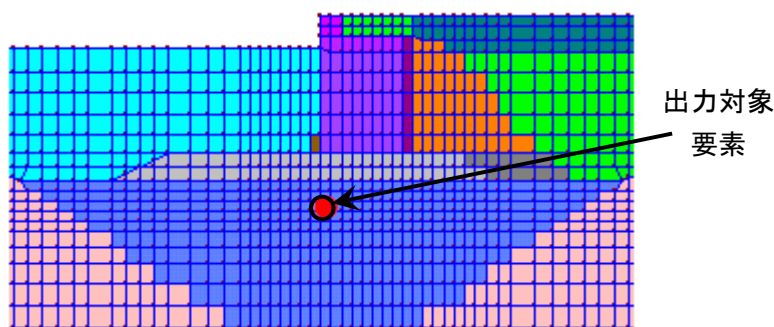


図 7. 45 置換砂における出力対象要素

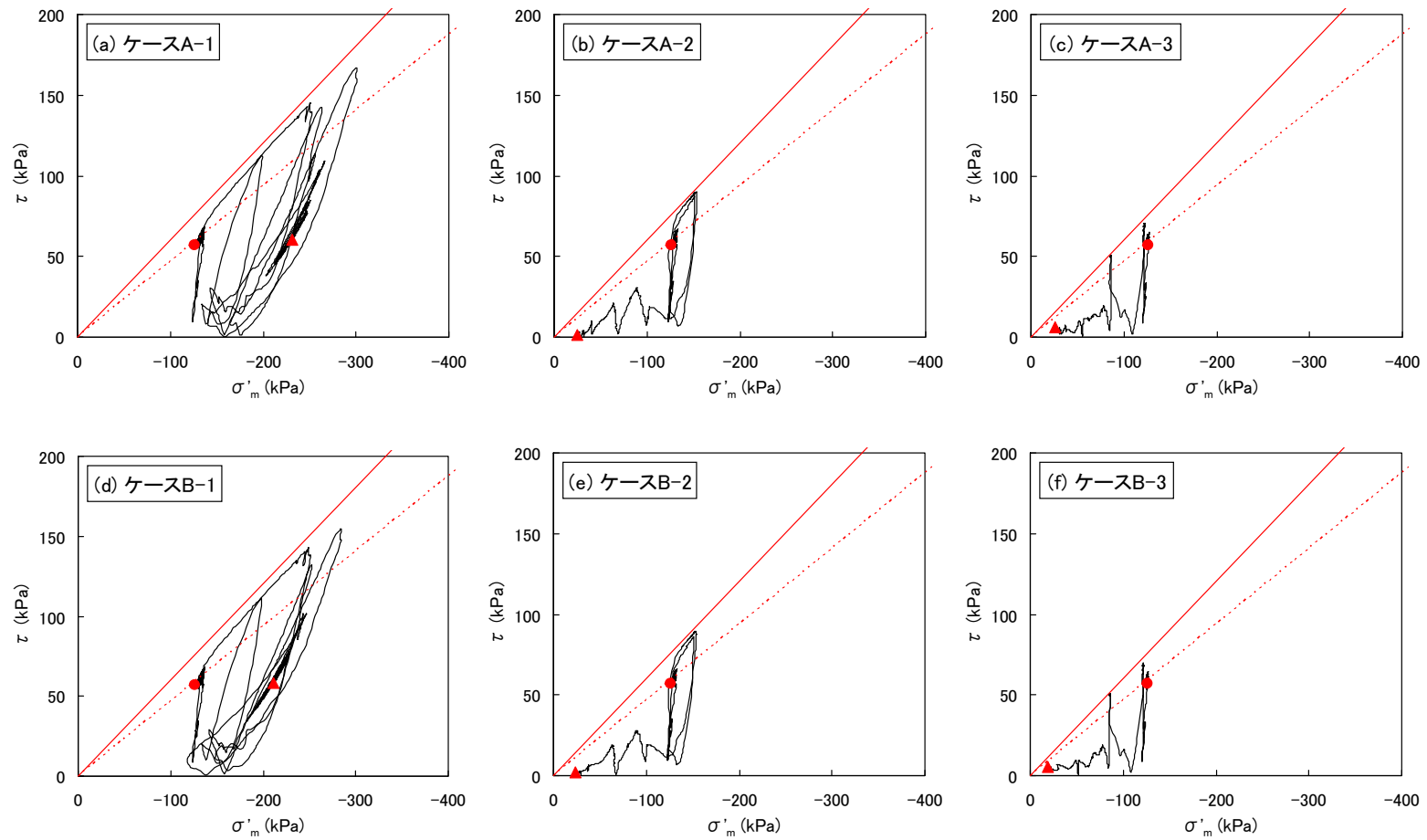


図 7.46 置換砂における有効応力経路

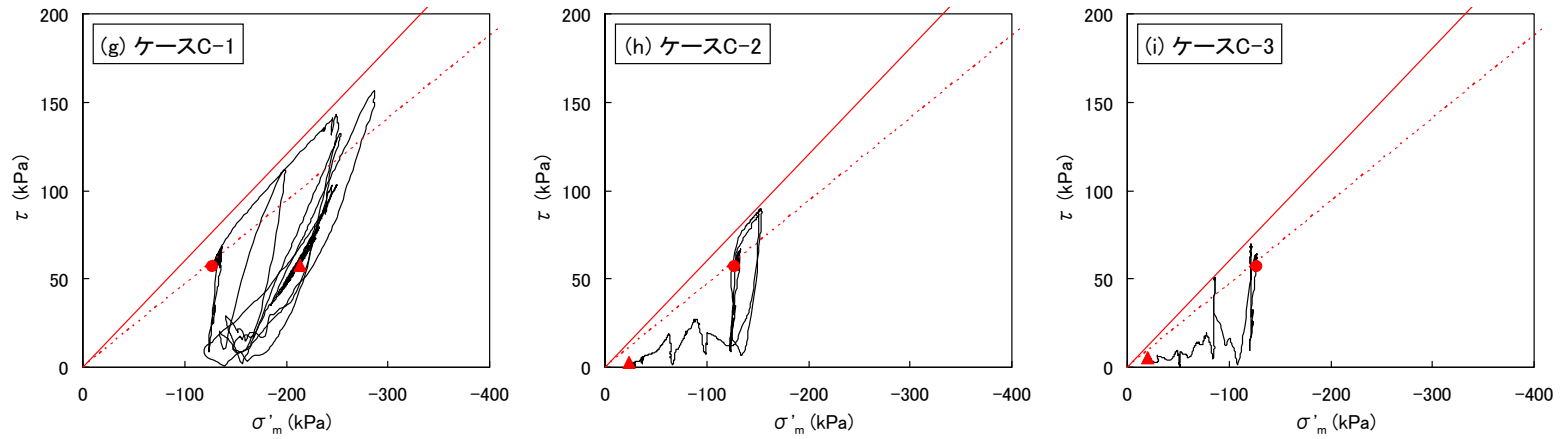


図 7.46 置換砂における有効応力経路（続き）

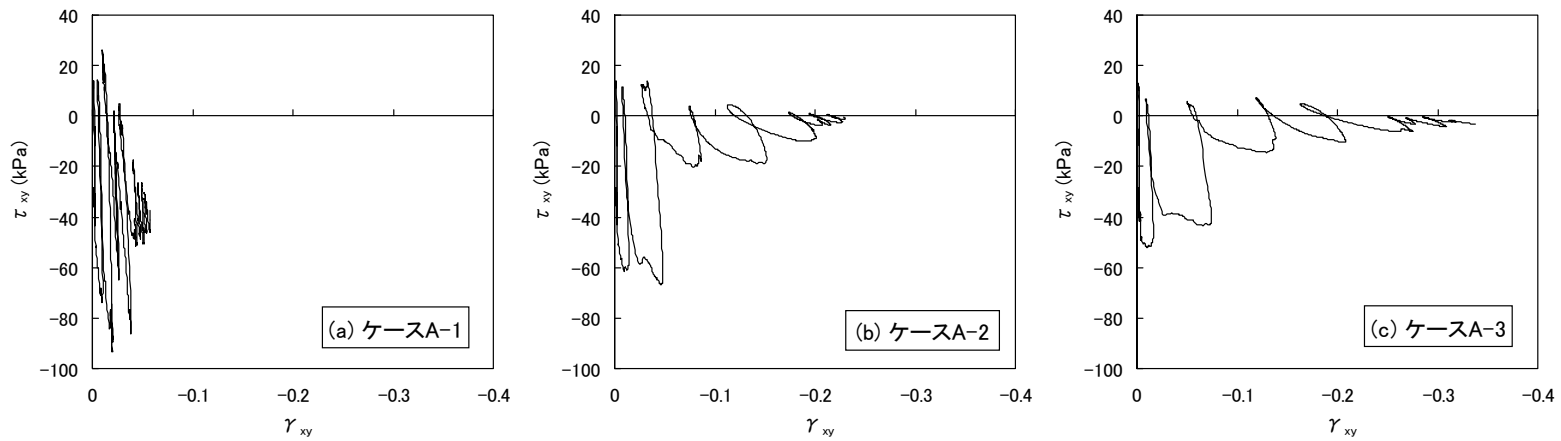


図 7.47 置換砂におけるせん断応力-せん断ひずみ関係

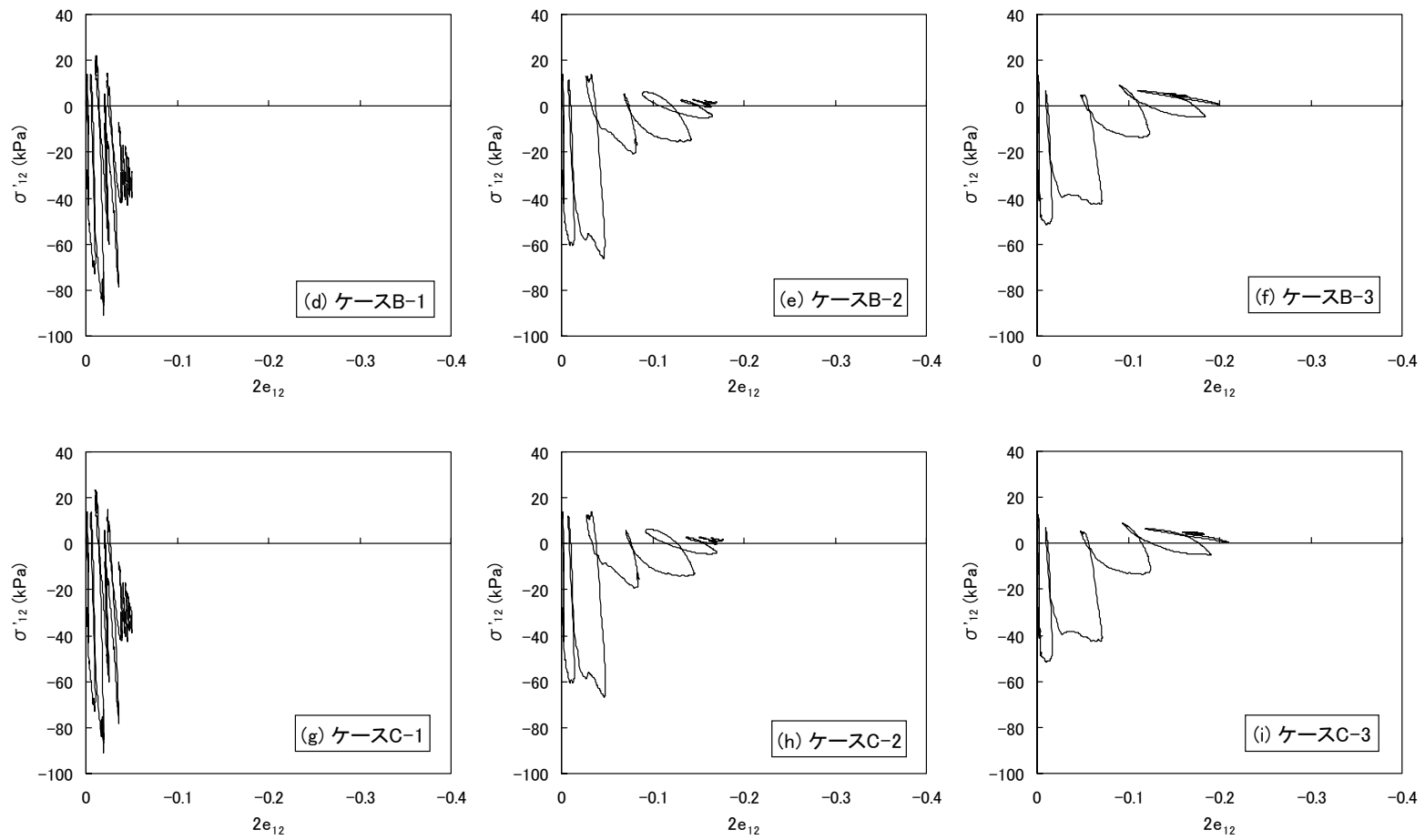


図 7.47 置換砂におけるせん断応力-せん断ひずみ関係 (続き)

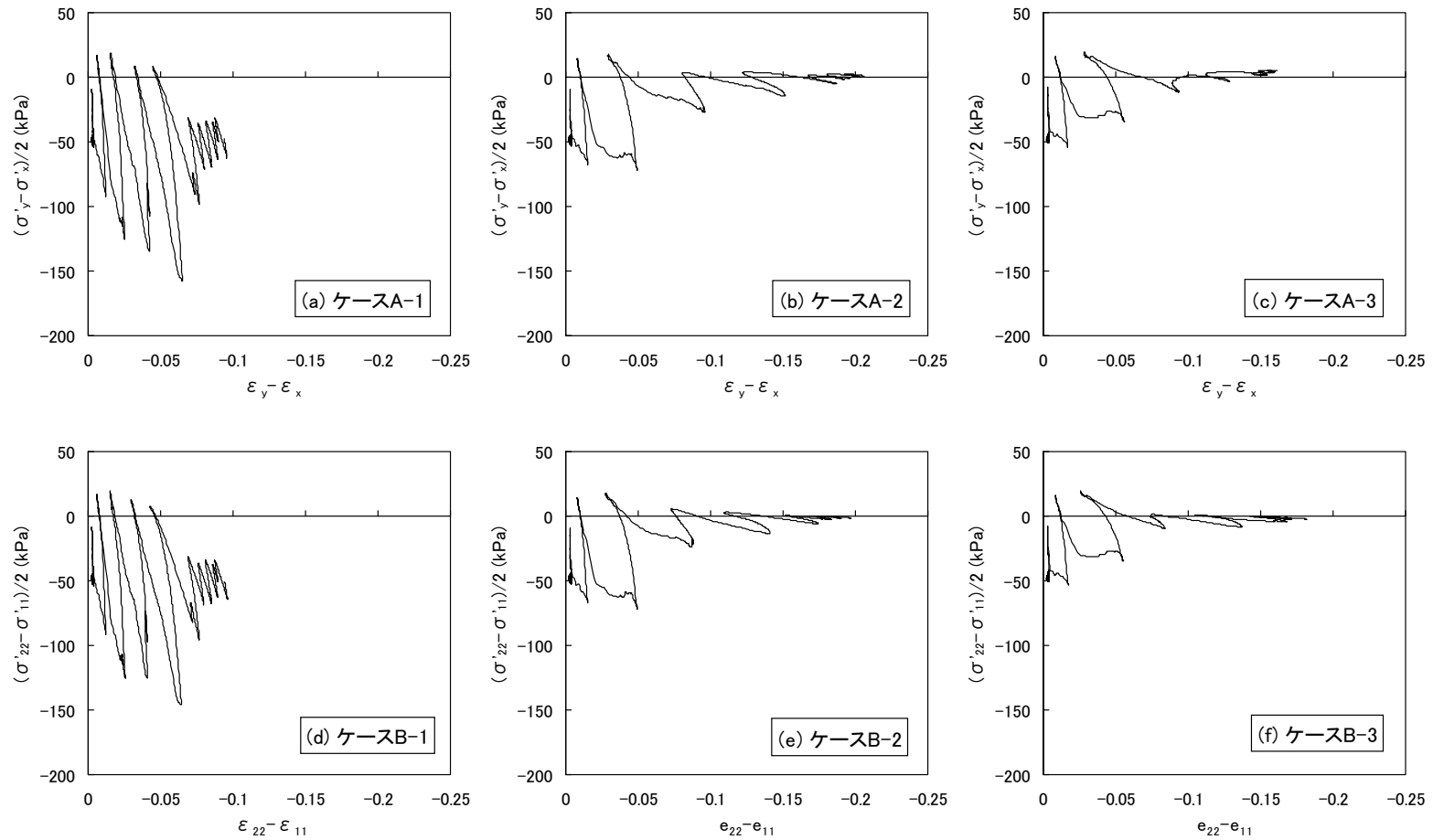


図 7.48 置換砂における軸差応力-軸差ひずみ関係

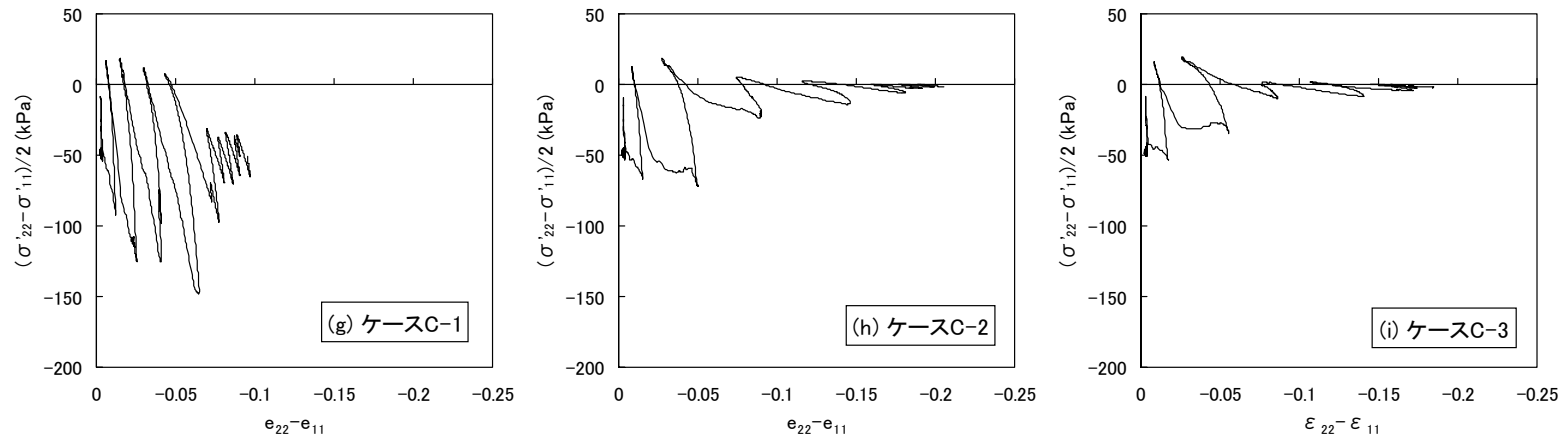


図 7.48 置換砂における軸差応力-軸差ひずみ関係 (続き)

7.6 神戸港第7防波堤に対する検討

7.6.1 概要

ここでは、第2章および第3章で述べた多重せん断モデルを適用して、1995年兵庫県南部地震の際に被災した神戸港第7防波堤の地震応答解析を実施する。対象とした神戸港第7防波堤の位置を図7.49に、土層断面図を図7.50に示す。神戸港では、図7.50に示すとおり、軟弱な粘性土からなる海底地盤を床掘りし、まさ土による置換を行っている。第7防波堤における置換層の層厚は25m程度である。1995年兵庫県南部地震の際、神戸港では水平最大加速度0.54Gの強い地震動を受けたものの、表7.18に示すとおり、防波堤の法線方向の移動量はわずか数10cm程度にとどまっている。一方、沈下量に関しては、同表より1~2.5m程度の値が観測されており、対象とする第7防波堤の天端沈下量は最大で2.6mとなっている。神戸港第7防波堤の地震後の被災変形断面を図7.51に示す。同図に示すとおり、第7防波堤の被災形態の特徴としては、ケーソンが捨石マウンドの中にめり込むような形で沈下し、捨石マウンドもそれに引き込まれるように変形している点が挙げられる。このような防波堤の挙動は、前節で示したケーソン式岸壁の挙動とは対照的なものである。すなわち、岸壁の場合はケーソン背後の裏込石や埋立土からの影響を受けるのに対し、防波堤の場合はそれらの影響が存在しないために、両者の挙動は異なったものとなる。ここでは、図7.51のような被災形態を有する防波堤に対して、地震時の変形挙動の再現性という観点から、提案する多重せん断モデルの適用性を検討する。

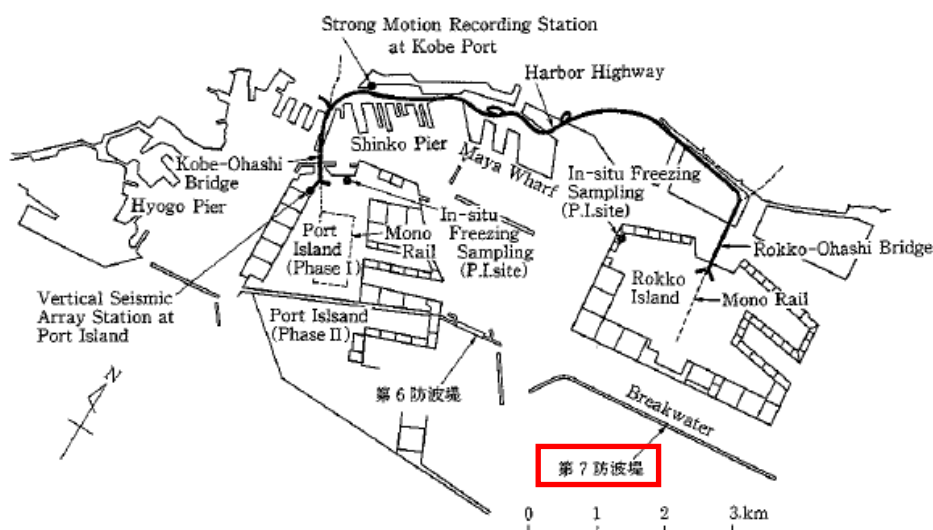


図7.49 神戸港第7防波堤の位置図（阪神・淡路大震災調査報告編集委員会，1998）

入力地震動としては、前節の神戸港 RF3 岸壁に対する検討と同様に、図 7.37 に示す神戸港ポートアイランドの鉛直アレー地震観測網により得られた 1995 年の兵庫県南部地震の際の観測記録を用いた。解析には図 7.37 に示す NS 成分と UD 成分の加速度波形を用いることとし、解析時間は 20 秒間とした。

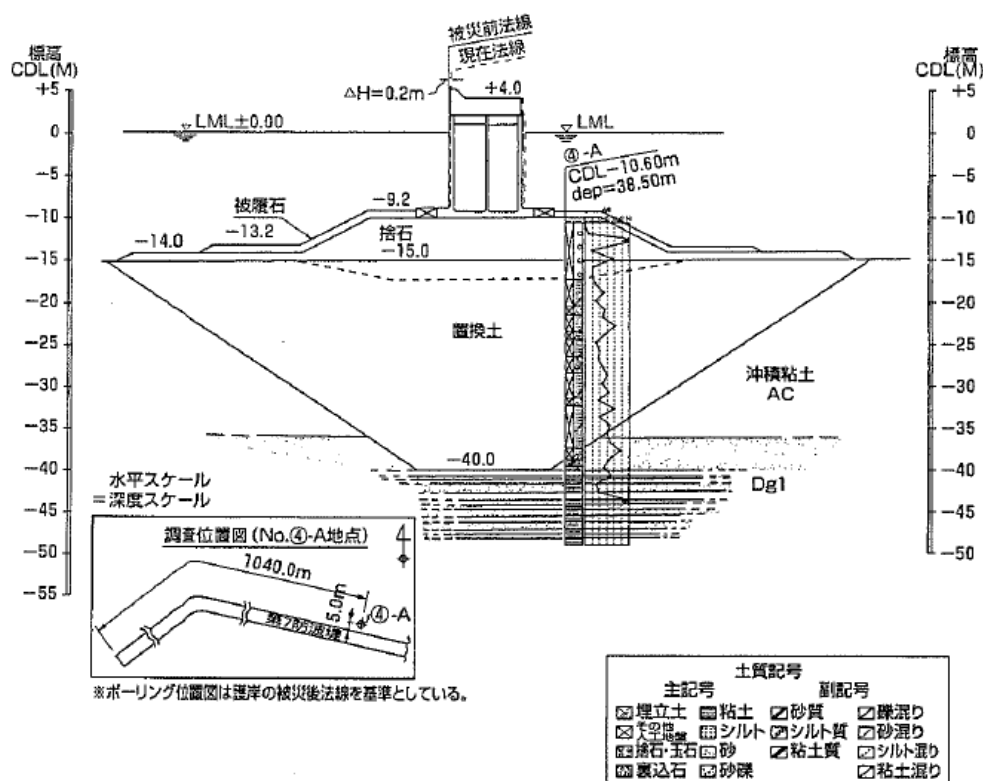


図 7.50 神戸港第7防波堤の標準断面図と標準貫入試験結果（阪神・淡路大震災調査報告編集委員会，1998）

表 7.18 防波堤の被災状況（阪神・淡路大震災調査報告編集委員会（1998）を基に作成）

防波堤	延長 (m)	天端高 (m)	法線の出入り (m)	天端沈下量 (m)
第1防波堤	1,220	+4.0	約 1.0	1.1~1.4
第1南防波堤	300	+4.0	約 0.2	1.0~1.6
和田岬防波堤	252	+3.0	約 0.1	0.1~1.2
第2防波堤	109	+2.5	約 0.5	1.1~1.7
第3防波堤西	128	+1.8	約 0.2	1.9~2.7
第3防波堤東	112	+3.0	約 0.3	1.7~2.6
第4防波堤	617	+3.0	約 0.6	0.2~1.7
第5防波堤	1,276	+5.0	約 0.4	1.3~2.1
第6防波堤	1,052	+5.0	約 0.1	1.2~1.7
第6南防波堤	830	+5.0	約 0.4	1.2~2.1
第7防波堤	4,180	+5.0	約 0.6	1.4~2.6

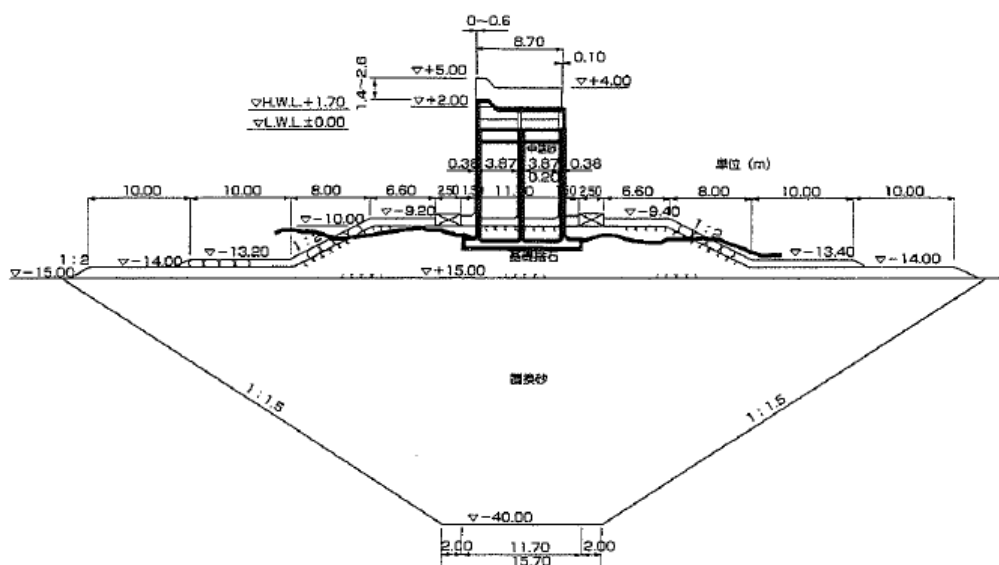


図 7.51 神戸港第7防波堤の被災変形断面（阪神・淡路大震災調査報告編集委員会，1998）

7.6.2 解析モデル

解析対象とする神戸港第7防波堤の断面モデルの土層区分および有限要素分割を図 7.52 に示す。ここで用いたメッシュは、藤井ら（2008）を参考にして設定した。解析モデルの境界条件は、底面を固定境界，側方を粘性境界とし，自由地盤部の解析もあわせて実施した。

各土層に対する多重せん断モデルの変形特性に関するパラメータを表 7.19 に，ダイレイタンス特性に関するパラメータを表 7.20 に示す。これらのパラメータは，既往の文献（藤井ら，2008）を参考にして設定した。なお，前節の場合と同様に，捨石マウンドのパラメータとしては捨石旧定数（小堤，2003）を用いて解析を実施している。ここで対象とする置換砂層に対しては，液状化抵抗曲線を求めるための非排水繰り返し三軸試験は実施されていない。そこで，場所は少し異なるが前節での六甲アイランドの置換砂について実施された液状化試験結果を用い，要素シミュレーションを行うことにより表 7.20 に示すダイレイタンス関連のパラメータを設定した（図 7.40(a)）。同表における定常状態での非排水せん断強度は，圧密非排水三軸圧縮試験（CUB 試験），または，間隙比および細粒分含有率に基づく簡易的な方法（本島ら，2008）により設定されており，それぞれ 100kPa, 19.0kPa となっている。次に，ケーソン各部の物性値を表 7.21 に，ケーソンと捨石マウンドの間に設けられているジョイント要素の物性値を表 7.22 に示す。なお，ケーソン各部の構成モデルには，第 5 章で述べた多重せん断モデル型の線形弾性体モデルを適用することとした。

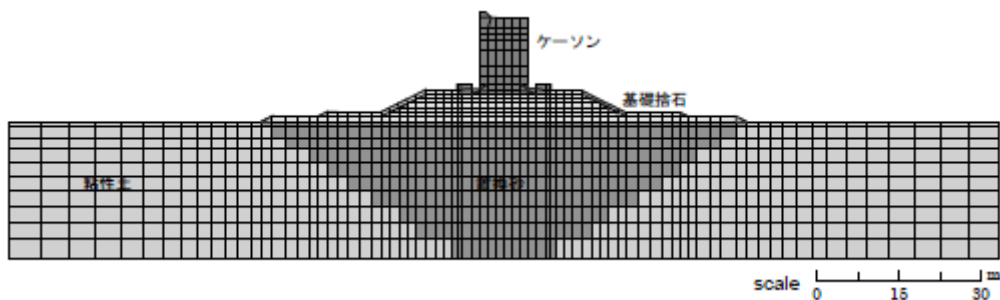


図 7.52 神戸港第7防波堤の有限要素分割図

表 7.19 多重せん断モデルにおける変形特性パラメータ

土層名	区分	変形特性									せん断波速 Vs
		湿潤密度	基準初期せん断剛性	基準体積弾性係数	基準拘束圧	拘束圧依存係数	間隙率	内部摩擦角	粘着力	履歴減衰上限値	
		ρ t/m ³	G_{ma} kPa	K_{ma} kPa	σ_{ma} kPa	m_G, m_K	n	ϕ_r (°)	c kPa	h_{max}	
置換砂	液状化層	1.80	84695	220872	98	0.5	0.45	39.7	0.0	0.24	205
粘性土	非液状化層	1.70	74970	195500	143	0.5	0.45	30.0	0.0	0.21	135
基礎捨石・裏込石 (捨石旧定数)	非液状化層	2.00	180000	469000	98	0.5	0.45	40.0	0.0	0.30	297
基礎捨石・裏込石 (捨石新定数)	非液状化層	2.00	180000	469000	98	0.5	0.45	35.0	20.0	0.30	297

表 7.20 多重せん断モデルにおけるダイレイタンス特性パラメータ

土層名	区分	ダイレイタンス特性										Sus値	
		変相角 φ_p (°)	ダイレイタンスパラメータ									簡易設定法	CUB試験結果
			ε_d^{cm}	r_{edc}	r_{ed}	q1	q2	lk	r_k	S_1	c_1		
置換砂	液状化層	30.0	0.10	0.80	0.09	0.50	0.10	2.00	0.50	0.005	1.00	19.0	100.0
粘性土	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
基礎捨石・裏込石 (捨石旧定数)	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
基礎捨石・裏込石 (捨石新定数)	非液状化層	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

表 7.21 構造物の解析定数 (線形平面要素)

構造物	ヤング率E (kPa)	ポアソン比 ν	密度 ρ (t/m ³)
ケーソン	2.23×10^7	0.17	2.1
上部コンクリート	2.94×10^7	0.17	2.3
フーチング	2.94×10^7	0.17	2.1
ケーソン拡張部	2.23×10^7	0.17	2.0

表 7.22 ケーソン周囲のジョイント要素の解析定数

ジョイント位置	法線方向剛性 K_n (kPa/m)	接線方向剛性 K_s (kPa/m)	粘着力 c_J (kPa)	摩擦角 ϕ_J (度)
ケーソン-フーチング間	1.0×10^6	1.0×10^6	0.0	15.0
ケーソン-捨石間	1.0×10^6	1.0×10^6	0.0	31.0

7.6.3 解析条件と解析ケース

解析の手順は前節の 7.5.3 項で述べたとおりである。まず不規則領域の自重解析を行い、自由地盤部の自重解析および地震応答解析を行った後、それらの結果を引き継いで不規則領域の地震応答解析を実施する。土の構成モデルには第 2 章および第 3 章で述べた新たなストレス-ダイレイタンスー関係に基づく多重せん断モデル構成式を、ケーソンの構成モデルには第 5 章で述べた多重せん断モデル型の線形弾性体構成式を用いている。表 7.19 の変形特性パラメータは各解析フェーズにおいて共通とし、表 7.20 に示すダイレイタンスー特性に関するパラメータは地震応答解析で考慮することとした。地震応答解析での時間積分法には Wilson の θ 法を用い、時間積分間隔は 0.01 秒とした。また、地震応答解析では計算安定のために初期剛性比例型のレーレー減衰行列を用いることとし、剛性比例係数 β には既往の資料（藤井ら，2008）を参考に $\beta = 0.002$ を適用することとした。

有限要素法による地震応答解析では、微小変形解析、簡易大変形解析、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法による大変形解析の 4 種類の解析手法を用いている。ここでは各解析手法に対して、置換砂の非排水せん断強度を表 7.20 に示すように 19kPa もしくは 100kPa として解析を実施しており、合計で 8 ケースの検討を行った。表 7.23 に実施した解析ケースの一覧を示す。なお、前節のケーソン式岸壁では行わなかった簡易大変形解析による検討を追加している理由は、本節で対象とする防波堤の変形が主に沈下により表現されるためであり、純粋に土要素のみで構成された盛土モデル以外の地盤・構造物系の沈下現象に対する適用性を検討することとする。

表 7.23 解析ケースの一覧

ケース	解析法	置換砂Sus値
ケースA-1	微小変形解析	19kPa
ケースA-2		100kPa
ケースB-1	簡易大変形解析	19kPa
ケースB-2		100kPa
ケースC-1	大変形解析TL法	19kPa
ケースC-2		100kPa
ケースD-1	大変形解析UL法	19kPa
ケースD-2		100kPa

7.6.4 解析結果と考察

ここでは、神戸港第7防波堤モデルに対する地震応答解析の結果について述べる。まず、加振後のケーソン天端における残留沈下量を表7.24に、同表に基づく沈下量の比較を図7.53に示す。実測でのケーソン天端の平均沈下量は、神戸港第7防波堤におけるNo.64~77の各ケーソンに対して観測された沈下量の平均値である。一方、解析におけるケーソン天端の沈下量は、港外側および港内側のケーソン天端での値を平均することにより求めることとした。表7.24もしくは図7.53より、定常状態における非排水せん断強度として19kPaを採用した場合、微小変形解析（ケースA-1）および簡易大変形解析（ケースB-1）では実測最大値の4.1倍、実測平均値の5.6倍程度の非常に大きな値を示している。それに対して大変形解析（ケースC-1, D-1）では、実測最大値の約1.2倍、実測平均値の約1.7倍の沈下量にとどまっており、過大評価というよりはむしろやや安全側の解析結果であると考えられる。なお、微小変形解析と簡易大変形解析の結果はほぼ等しく、また、Total Lagrangian法とUpdated Lagrangian法の結果も互いにほぼ等しいものである。後者の関係に関しては、大変形理論におけるpush-forwardおよびpull-backの概念を用いて理論的に立証することが可能であり、解析における収束誤差などを含むものの、それらが非常に小さく無視できる程度であることを示している。それに対し前者の結果は、先に述べた遠心盛土解析のものと大きく異なる。すなわち、図7.6に示す盛土天端の沈下量では、簡易大変形解析の適用により微小変形解析で過大に評価されていた値が実測値に近づく傾向を示している。この原因としては、盛土構造物では堤体の変形に伴い基礎地盤に及ぼす上載荷重としての影響が減少するのに対し、防波堤のようなケーソン構造物ではケーソン自体の変形が土要素に比べて非常に小さく、地震動の加振中においても上載荷重としてのケーソンの自重による影響がほぼ変化しないことが考えられる。簡易大変形解析は、7.3.4項で述べたように上載荷重としての自重の影響を地震応答解析の各時間ステップにおいて適宜考慮する方法であり、変形に伴う幾何学的非線形性を厳密に定式化に組み込んでいるわけではない。そのため、ここで示したケーソン式防波堤のように、上部構造物として剛な物体を有する地盤の沈下問題には簡易大変形解析を適用することは不可能であり、このことが図7.53によっても示されている。さて、続いて定常状態における非排水せん断強度として100kPaを採用した場合の結果について考察を行う。この場合はいずれの解析手法を用いても沈下量に大きな差は生じず、実測最大値の0.7~0.9倍、実測平均値の0.95~1.25倍と整合性のよい結果が得られている。この場合も微小変形解析と簡易大変形解析、および、Total Lagrangian法とUpdated Lagrangian法の間にも明瞭な差は生じておらず、微小変形解析ではわずかに50cmほど大変形解析よりも大きな沈下量が算出されている。これはケーソン高さと比較すると4%程度の小さな差異であり、定常状態における非排水せん断強度を大きくとると、ここで対象とするモデルにおいては解析手法の違い（すなわち幾何学的非線形性の影響）はほぼ顕在化しなくなる。しかし、どの程度の非排水せん断強度であれば対象とするモデルにお

いて解析手法の影響が生じなくなるかは未知であるため、基本的には幾何学的非線形性を考慮した大変形解析を適用すべきであると考えられる。なお、大変形解析における解析手法としては、Total Lagrangian 法、Updated Lagrangian 法のいずれを用いても本質的な違いはなく、数値解析により得られる結果についても工学上問題となるような差異は生じないものと思われる。

表 7.24 ケーソン天端の残留沈下量

ケース	ケーソン 港外側 沈下量	ケーソン 港内側 沈下量	ケーソン 天端 沈下量
	(cm)	(cm)	(cm)
ケースA-1	1031	1072	1052
ケースA-2	225	232	228
ケースB-1	1025	1067	1046
ケースB-2	228	237	232
ケースC-1	330	302	316
ケースC-2	180	179	180
ケースD-1	320	294	307
ケースD-2	176	176	176
実測値(最大値)	—	—	260
実測値(平均値)	—	—	187

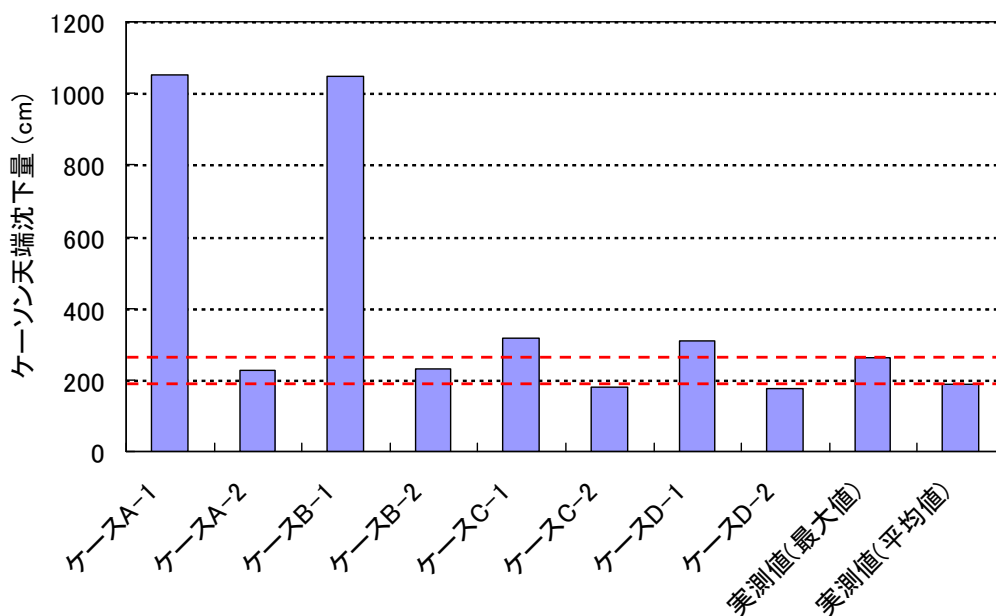
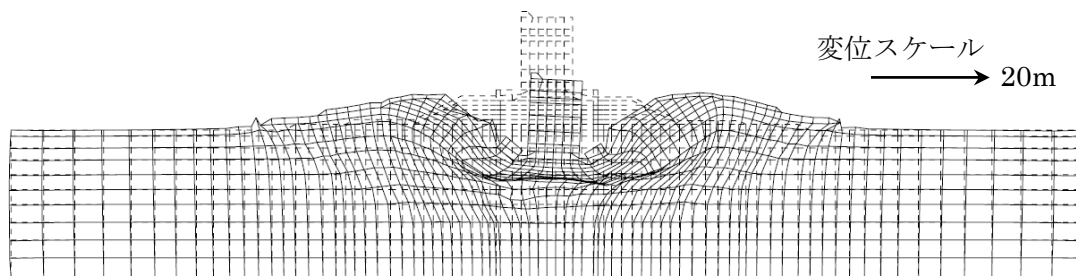


図 7.53 ケーソン天端の残留沈下量

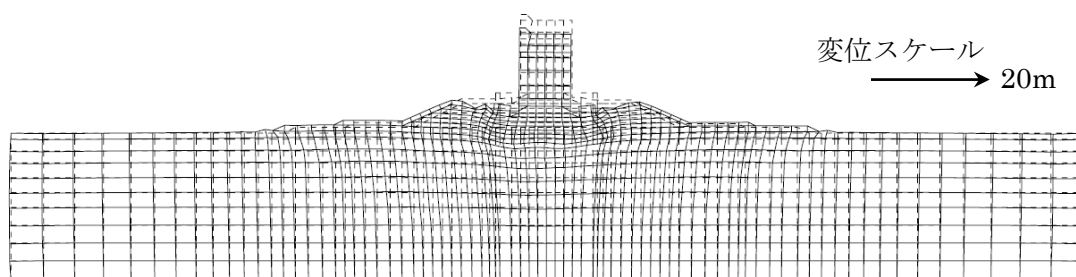
続いて、図 7. 54 に加振終了後の防波堤モデルの残留変形図を示す。同図(a)に示すケース A-1 および同図(c)に示すケース B-1 では、ケーソンが基礎地盤に大きくめり込むように沈下しており、それに伴いケーソン近傍の捨石マウンドも引きずられる形で沈下している。逆に、ケーソンから側方に少し離れた位置の捨石マウンドは大きく隆起していることが確認できる。これらの変形形状を図 7. 51 に示す実際の被災状況と比較すると、解析ではケーソンの沈み込みおよび周辺の捨石マウンドの隆起の様子が過大に評価されていると言える。それに対して、図 7. 54 (a)(c)以外の解析ケースにおいては、同図(e)(g)でケーソンがやや傾きながら沈下している点を除けば、図 7. 51 の変形形状が概ね再現されている。なお、図 7. 54(e)(g)、すなわち、置換砂の非排水せん断強度を 19kPa として大変形解析を適用したケース (C-1, D-1) におけるケーソン天端の水平変位量はおよそ 0.8m であり、これは被災状況における法線の出入り 0.0~0.6m と比較すればやや大きめの値である。しかし、ケーソンのスケールを考慮すればその差はわずかなものであり、特に問題視する必要はないと思われる。傾斜モードの出現は、置換砂の非排水せん断強度をやや小さめに設定することで生じており、これは先にピーク強度に達した置換砂層のある要素のひずみが局所的に進展することに起因するものと考えられる。また、反時計回りの回転モード（左側への傾斜）にはケーソン左端に設置された上部工の重量が影響している可能性もある。ただし、図 7. 37 に示す入力地震動の（左右）非対称性もケーソンの変形モードに影響を及ぼすため、一概に回転モードが上部工の影響のみによるものではないと考えられる。

次に、図 7. 55 に加振中の液状化層における有効応力減少比の最大値分布の様子を示す。同図(a)(b)の微小変形解析と同図(c)(d)の簡易大変形解析の結果には、ほとんど差が見られない。また、同図(e)(f)の Total Lagrangian 法と同図(g)(h)の Updated Lagrangian 法の間にも明瞭な差は認められない。さらに、定常状態における非排水せん断強度として三軸試験による値 100kPa を採用した場合（同図(b)(d)(f)(h)）、各解析手法における水圧の分布形状にほとんど違いがないことが確認できる。他方、非排水せん断強度として間隙比および細粒分含有率に基づく値 19kPa を採用した場合、同図(a)の微小変形解析では置換砂層の一部にほぼ有効拘束圧が変化していない領域が存在するのに対し、同図(e)(g)に示す大変形解析結果では置換砂層の全域にわたって有効拘束圧の減少が認められる。特に、捨石マウンド付近の置換砂層では高いところで 0.9~1.0 の有効応力減少比を生じており、部分的に液状化に至っている。なお、同図(a)と図 7. 54(a)を照らし合わせると、微小変形解析におけるケーソンの 10m を超える過大な沈下は、置換砂の液状化現象により引き起こされたわけではなく、幾何学的な非線形性を考慮していないことに起因するものであると言える。

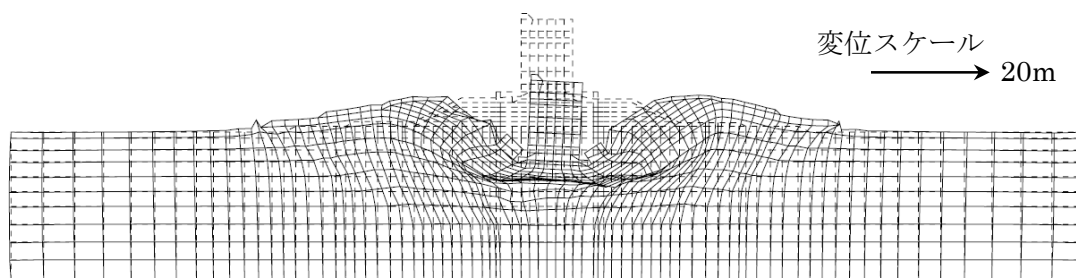
(a) ケース A-1



(b) ケース A-2



(c) ケース B-1



(d) ケース B-2

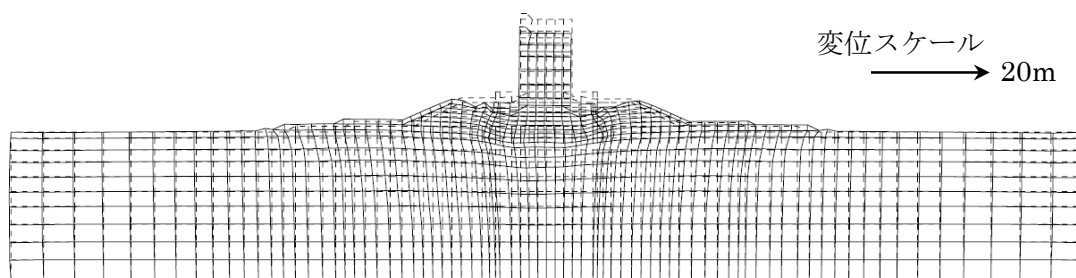
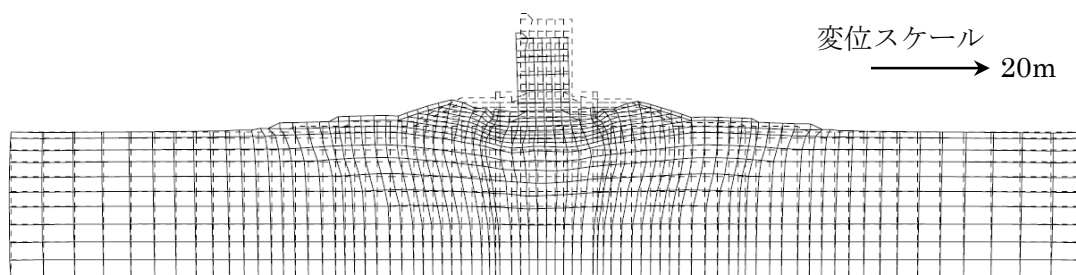
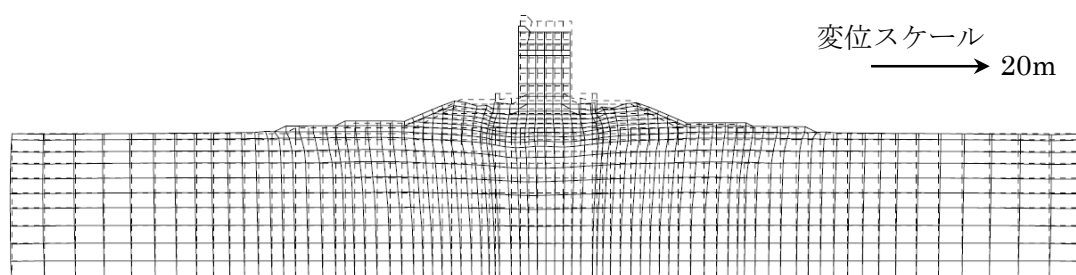


図 7.54 加振終了後の残留変形図

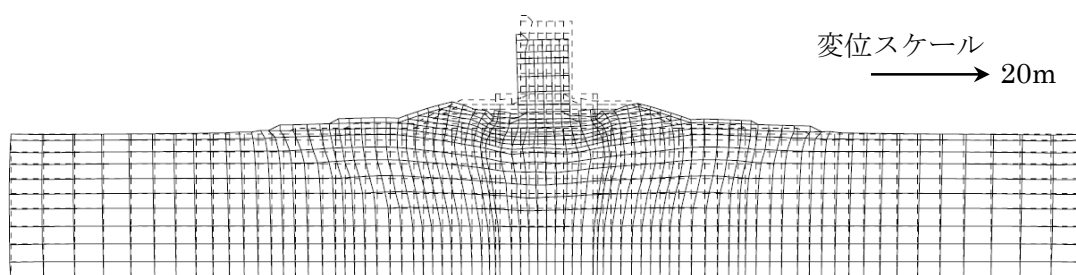
(e) ケース C-1



(f) ケース C-2



(g) ケース D-1



(h) ケース D-2

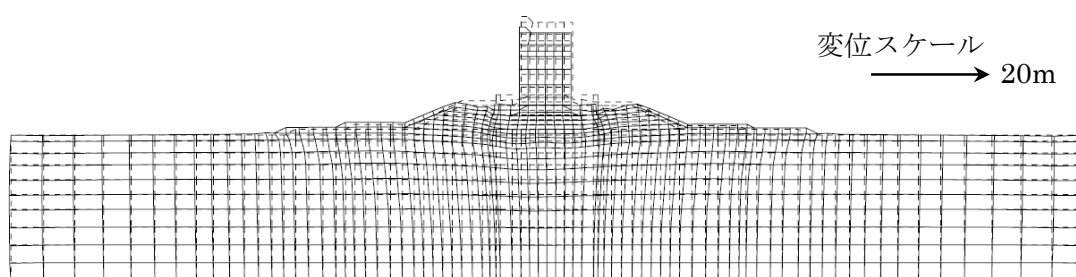
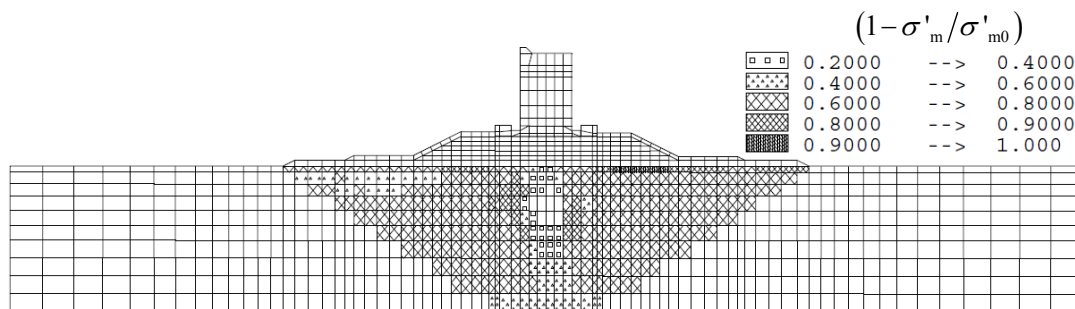
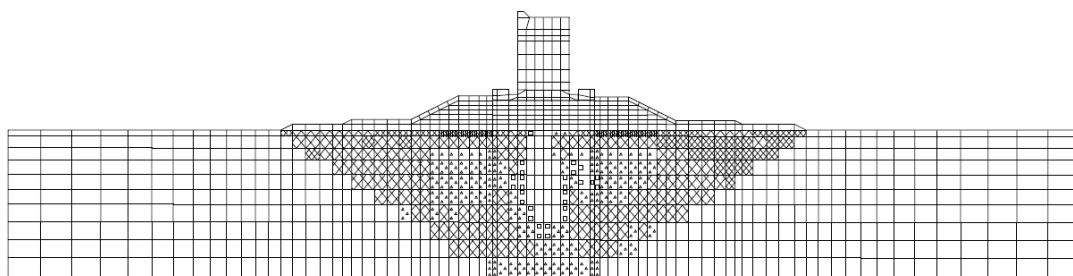


図 7.54 加振終了後の残留変形図 (続き)

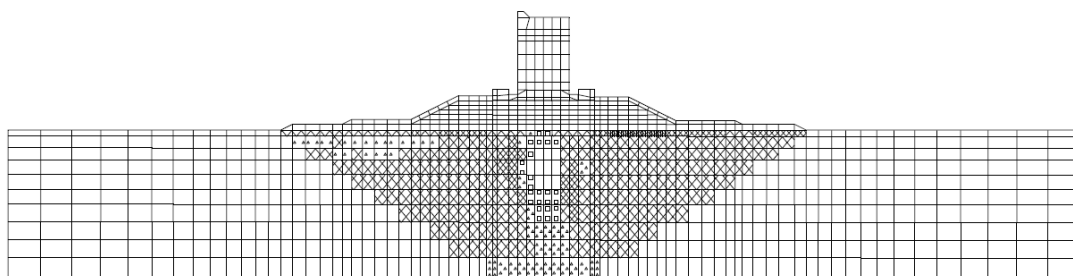
(a) ケース A-1



(b) ケース A-2



(c) ケース B-1



(d) ケース B-2

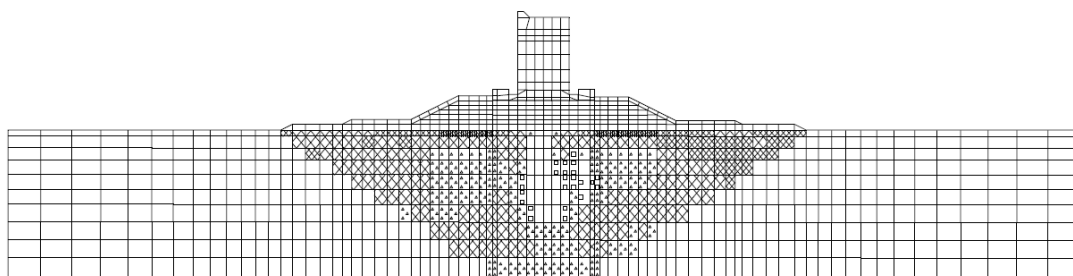
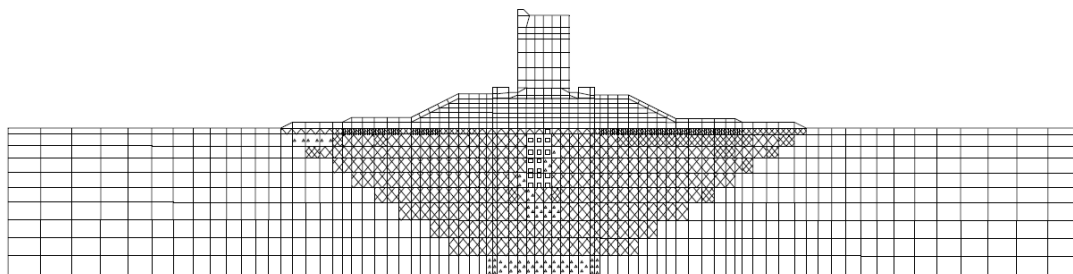
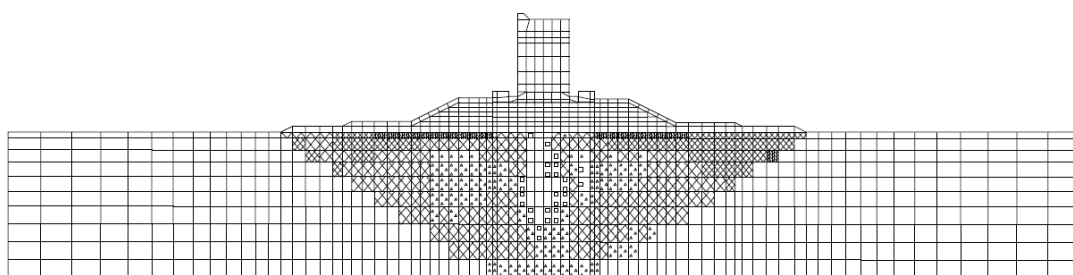


図 7.55 有効応力減少比 $(= 1 - \sigma'_m / \sigma'_{m0})$ の時間最大値分布

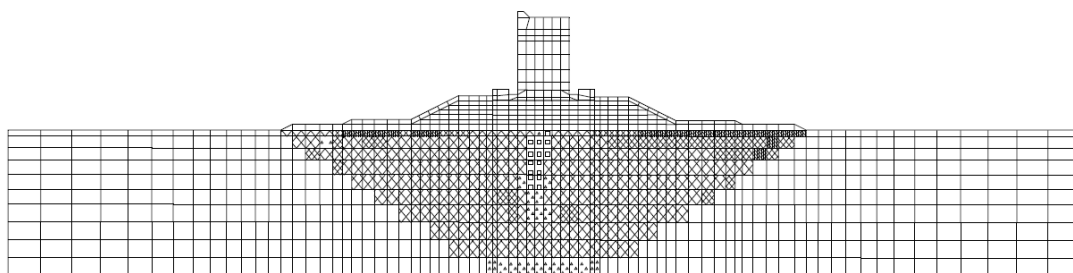
(e) ケース C-1



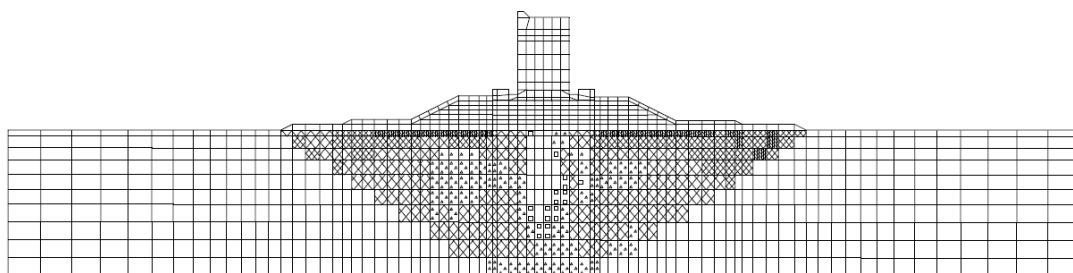
(f) ケース C-2



(g) ケース D-1



(h) ケース D-2

図 7.55 有効応力減少比 ($=1 - \sigma'_m / \sigma'_{m0}$) の時間最大値分布 (続き)

次に、図 7.56 に示されている置換砂の要素において求められた有効応力経路および応力-ひずみ関係を示す。図 7.57 は各ケースにおける有効応力経路であり、図中の丸印 (●) は初期自重解析終了後の有効応力経路の位置を、一方の三角印 (▲) は地震応答解析終了時の位置を表している。同図より、定常状態における非排水せん断強度を 19kPa とした場合、微小変形解析 (同図(a)) および簡易大変形解析 (同図(c)) では、最終的に最大せん断応力がほぼ非排水せん断強度に等しくなっており、応力経路が破壊線に至ることでせん断破壊が生じていることがわかる。それに対して大変形解析の結果 (同図(e)(g)) では、最終的な応力状態は変相線より下の領域に位置し、せん断破壊には至っていない。また同図より、図 7.53 のケーソン天端の残留沈下量および図 7.54 の残留変形図と同様に、有効応力経路に関しても微小変形解析と簡易大変形解析の両者の結果はほぼ等しい。同時に、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の両者の結果に関しても、ほとんど差異は生じていない。このことより、ここで対象とするようなケーソン式防波堤に対しては、簡易大変形解析ではなく幾何学的非線形を考慮した大変形解析を適用するべきであり、その際に用いる手法は Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法のいずれでも問題ないと言える。一方、定常状態における非排水せん断強度を 100kPa とした場合、いずれの解析手法においても最終的な応力経路は破壊線に至っておらず、その際の最大せん断応力の値は、微小変形解析 (図 7.57(b)) および簡易大変形解析 (同図(d)) で非排水せん断強度の 5 割程度、大変形解析 (同図(f)(h)) では 3 割程度となっている。ここでも、Total Lagrangian 法 (同図(f)) と Updated Lagrangian 法 (同図(h)) の結果はほぼ等しく、このことは両者が理論的には等価であることを数値解析的に裏付けるものである。

続いて、対象とする要素のせん断応力-せん断ひずみ関係を図 7.58 に示す。同図より、定常状態における非排水せん断応力の値がせん断ひずみの発生に大きく影響を及ぼすことがわかる。非排水せん断強度を 100kPa としたケースでは、各解析手法における応力-ひずみ関係はほぼ等しく、微小変形解析 (同図(b)) および簡易大変形解析 (同図(d)) におけるせん断ひずみの絶対最大値は約 10.9%、一方の大変形解析 (同図(f)(h)) では約 11.6%であり、その差は非常に小さいものである。それに対して非排水せん断強度を 19kPa としたケースでは、微小変形解析 (同図(a)) および簡易大変形解析 (同図(c)) において 80%を超えるせん断ひずみが生じている。これは図 7.57 に示した有効応力経路から説明することができ、微小変形解析 (同図(a)) および簡易大変形解析 (同図(c)) では、有効応力経路が定常状態に至ることで非常に大きなせん断ひずみが誘発されている。一方、大変形解析を適用した場合は、図 7.58(e)(g)よりせん断ひずみの最大値は 35%程度に抑えられていることがわかる。ここで示したせん断応力-せん断ひずみ関係においても、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の両者の結果はほぼ一致しており、これは両者における構成式および支配方程式の定式化が本質的に等価であることと整合するものである。

最後に、図 7.59 に対象要素の軸差応力-軸差ひずみ関係を示す。同図より、ここで対象としたケーソン脇の置換砂領域では、図 7.58 に示すせん断ひずみの値と比較すると発生する

軸差ひずみは小さいことがわかる。これは当該要素においてせん断変形が卓越していることを示しており、軸差ひずみの絶対最大値は非排水せん断強度を 19kPa とした場合で概ね 8～11%、100kPa とした場合で 3～4%となっている。いずれの場合も、大変形解析の結果と比較すると、微小変形解析および簡易大変形解析では軸差ひずみを過小評価する傾向にあるが、例えば図 7. 58(a)と同図(e)のせん断ひずみに見られるような数十%のオーダーでの差異ではない。また、これまで同様、軸差応力-軸差ひずみ関係においても Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の結果はほぼ一致しており、大変形解析においていずれの定式化法を用いても結果には明瞭な差が生じないことが改めて示された。

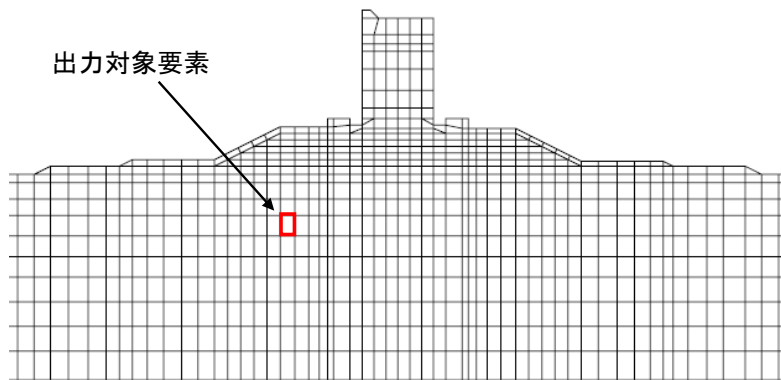


図 7.56 置換砂における出力対象要素

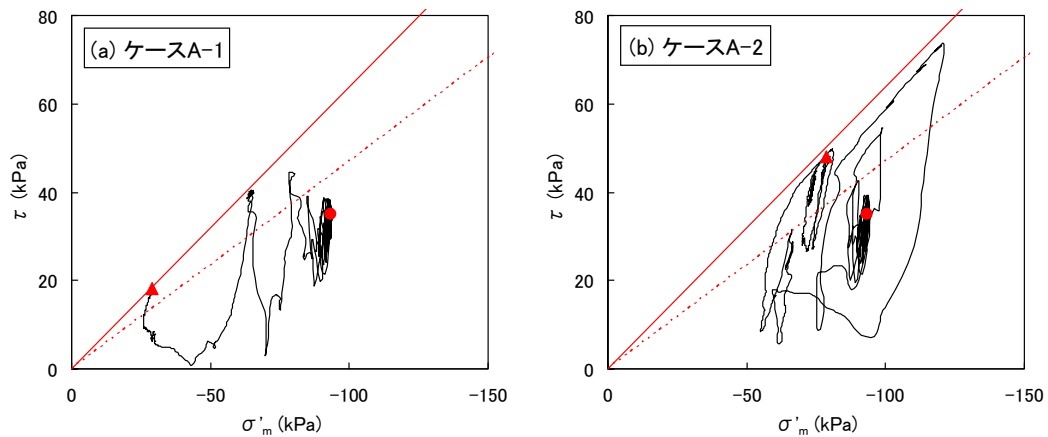


図 7.57 置換砂における有効応力経路

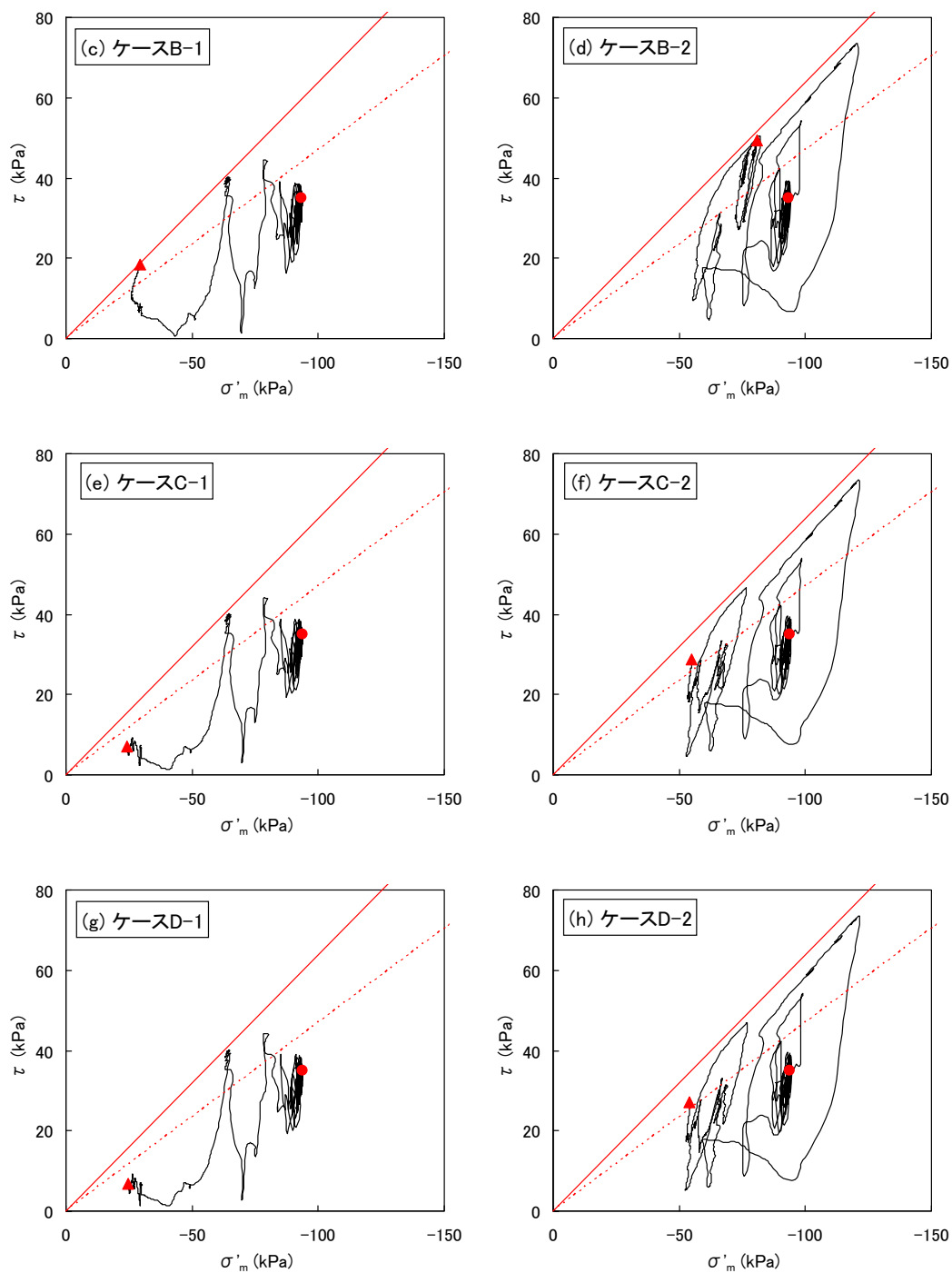


図 7.57 置換砂における有効応力経路（続き）

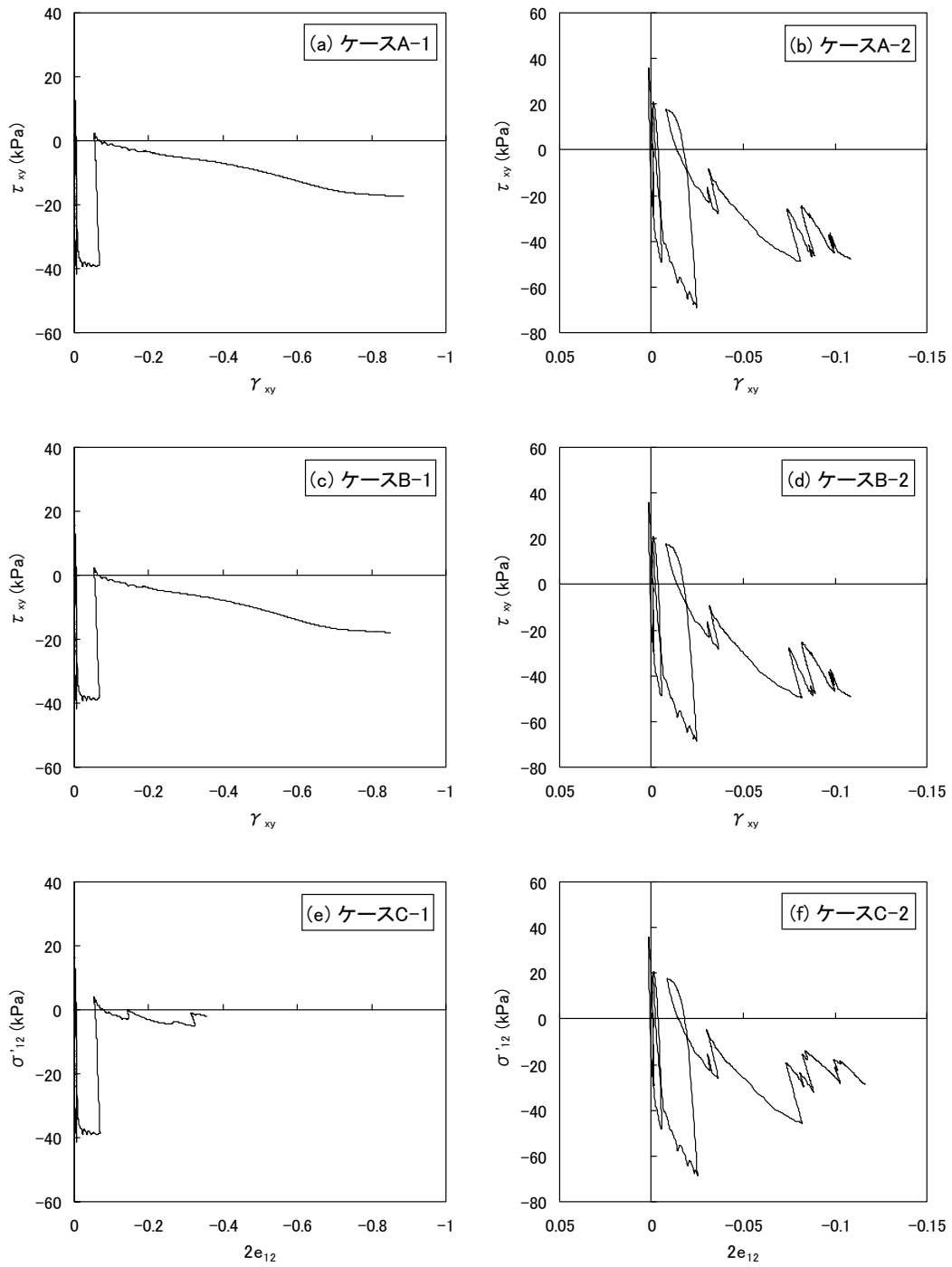


図 7.58 置換砂におけるせん断応力-せん断ひずみ関係

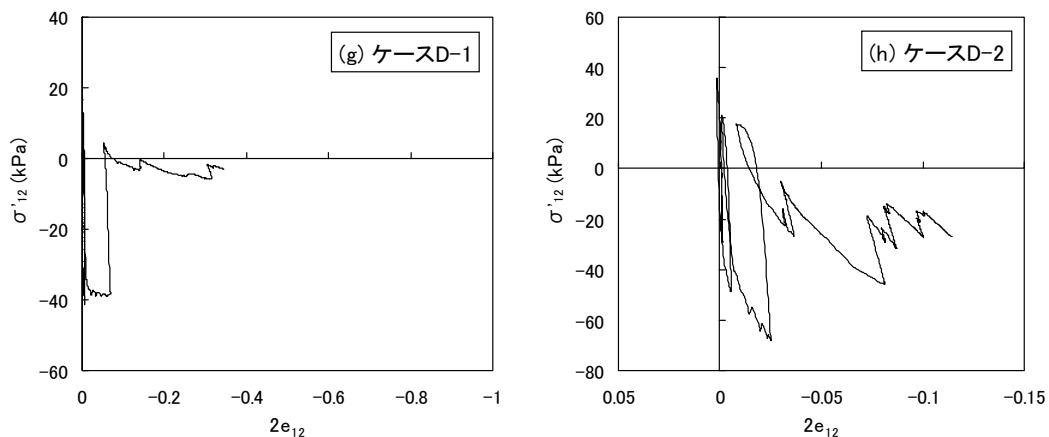


図 7.58 置換砂におけるせん断応力-せん断ひずみ関係 (続き)

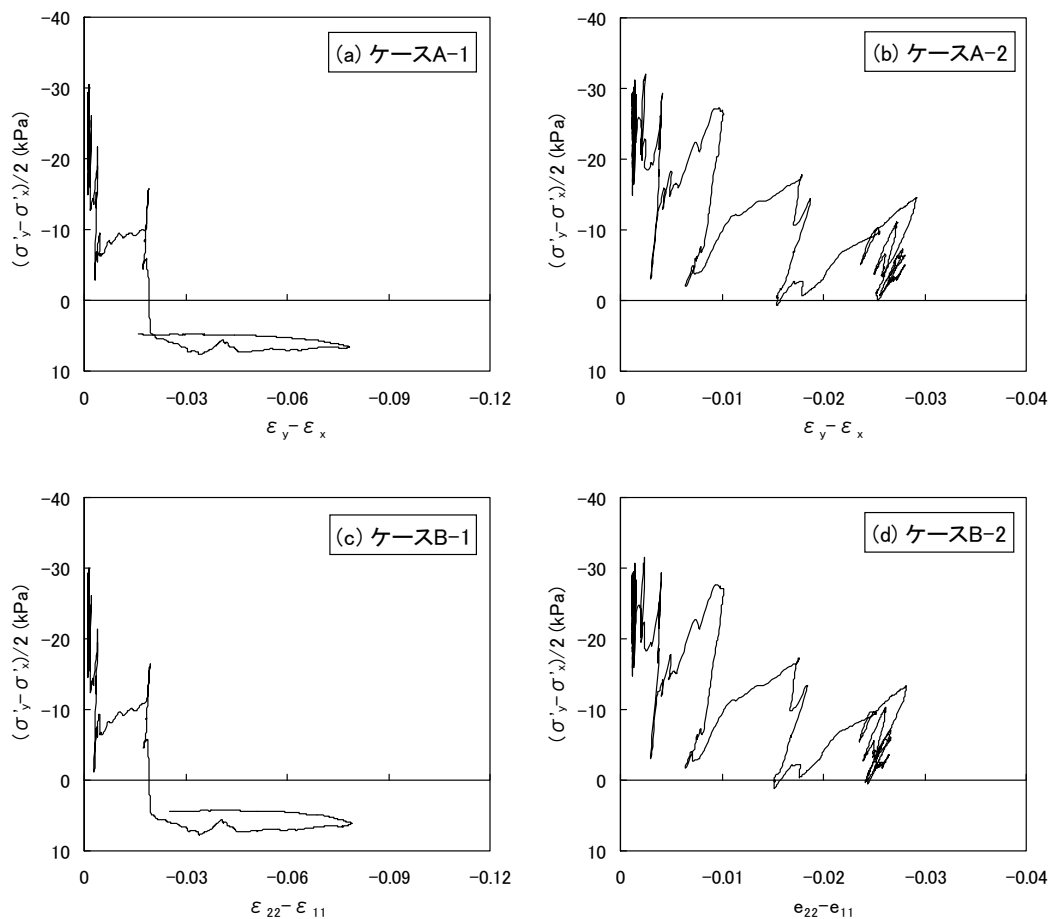


図 7.59 置換砂における軸差応力-軸差ひずみ関係

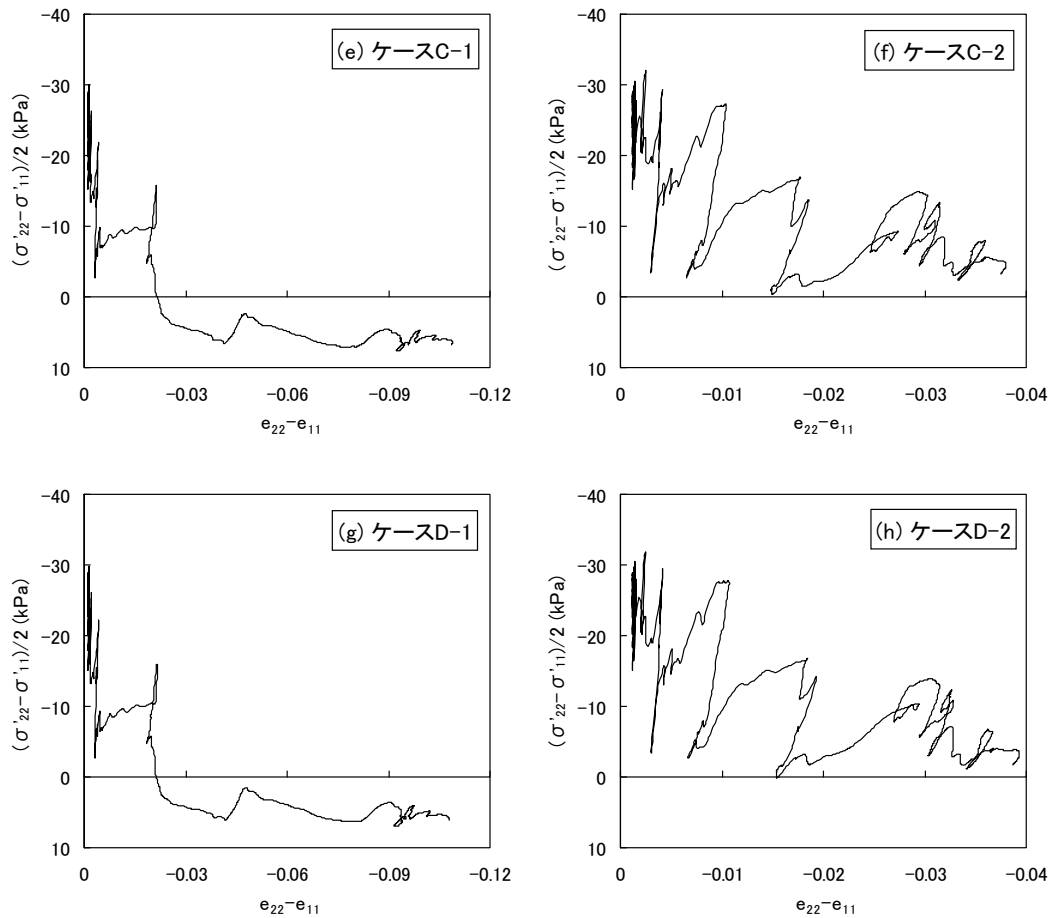


図 7.59 置換砂における軸差応力-軸差ひずみ関係 (続き)

7.7 まとめ

本章では、各種形式の地盤・構造物系のモデルに対して大変形解析による地震時の被災事例解析を実施した。数値解析においては、土の構成モデルには第2章および第3章で述べた新たなストレス-ダイレイタンスー関係に基づく多重せん断モデル構成式を、ケーソンなどの弾性体には第5章で述べた多重せん断モデル型の線形弾性体構成式を適用した。数値解析は Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の両者に加え、比較のために微小変形解析もあわせて実施した。また、対象モデルによっては簡易大変形解析と呼ばれる手法を適用し、解析結果の比較を行った。

土木研究所で実施された盛土の動的遠心模型実験に対して、多重せん断モデル構成式を用いた大変形解析の適用性を検討した結果、以下のことが明らかになった。微小変形解析では砂の非排水せん断強度の考慮の有無に関わらず、得られた盛土天端沈下量は実験値よりも大きく、非排水せん断強度を考慮した場合には基礎地盤に大きくめり込むような沈下形状が見られた。それに対し簡易大変形解析を適用すると、沈下量は微小変形解析に比べ

て抑えられ実験値に近づく傾向が示された。さらに大変形解析を用いた結果では、得られた沈下量は実験値と最も整合性がよく、非排水せん断強度を考慮することで盛土堤体および基礎地盤の変形形状を精度良く再現できることがわかった。ここに、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の両者により得られた解析結果はほぼ等しいものであった。また、同じ盛土モデルに対して長時間にわたり正弦波加振を与え続けた場合、微小変形解析や簡易大変形解析では堤体が基礎地盤側に反転し実際には起こり得ないような変形形状であったのに対し、大変形解析では幾何学的非線形性を考慮しているため現実的な変形挙動を示すことが確認された。

1993年北海道南西沖地震の際に被災した後志利別川堤防の No.1 断面を対象として、大変形解析により地震時の被災状況の再現を試みた。既往の資料に準じた有限要素メッシュを用いた場合、大変形解析において盛土堤体部の三角形メッシュの局所的な大変形が見られた。これを改善するために有限要素メッシュを微修正し再度解析を行ったところ、先に見られたような堤体部の局所変形は解消された。後志利別川堤防の解析では、各解析手法により得られた盛土天端沈下量は観測値に対して過小評価の結果となり、最も観測値に近い Total Lagrangian 法の場合でも実測の半分程度の値であった。この原因としては、盛土下の As2-U 層において過剰間隙水圧がほとんど上昇していないことが考えられ、この点に関しては今後の検討課題である。ここでも Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の両者の間には明瞭な差が存在せず、大変形解析を行う際にはいずれの定式化法を用いても問題ないことが確認された。

ケーソン式岸壁に対する多重せん断モデルの適用性について検討するため、1995年兵庫県南部地震の際に被災した神戸港六甲アイランド RF3 岸壁に対して地震応答解析を実施した。ケーソン沈下量、残留傾斜角、変形モードなどに関して、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法による解析結果にほとんど差は見られなかった。実測値との比較では、間隙比および細粒分含有率により求められた非排水せん断強度を考慮することで、ケーソンの滑動量を精度良く再現することができた。一方、ケーソンの転倒（回転）モードの再現性に関しては、非排水三軸圧縮試験より求められた非排水せん断強度を用いた方が良好な結果が得られた。このことより、非排水せん断強度の値はケーソンの変形モードに影響を与えることが確認された。大変形解析を適用することにより、ケーソン下部の液状化層における有効応力経路に関しては微小変形解析の場合とほぼ差異がないものの、発生するせん断ひずみは用いる非排水せん断強度の値に関わらず微小変形解析よりも小さい値となった。それに対し軸差ひずみに関しては、用いる非排水せん断強度により微小変形解析と大変形解析におけるひずみ量の大小関係が変化することが確認された。

多重せん断モデルを用いた大変形解析の適用性を検証するため、1995年兵庫県南部地震の際に被災した神戸港第7防波堤の地震応答解析を実施した。間隙比および細粒分含有率に基づく非排水せん断強度の値を用いた場合、微小変形解析および簡易大変形解析では実測値に対して過大なケーソン天端沈下量が算出されているのに対し、大変形解析では実測

値と整合性の良い結果が得られた。ここでも Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法による解析結果にほとんど差は見られなかった。一方、非排水三軸圧縮試験により求められた非排水せん断強度を適用した場合は、いずれの解析手法でも実測に近い沈下量が得られており、大変形解析と微小変形解析の差はそれほど大きいものではなかった。微小変形解析および簡易大変形解析において、間隙比および細粒分含有率に基づく非排水せん断強度の値を用いた場合、ケーソン脇の置換砂層では応力経路が定常状態に至ることで 80%を超える大きなせん断ひずみが発生し、これが過大なケーソン天端の沈下を引き起こす一因となっていることが確認された。

以上より、微小変形解析では変形が過大に評価されてしまうような事例に関しても、第3章で述べた大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式を適用することにより、地震時の被災事例を十分な精度で再現できることが示された。また、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法のいずれを用いてもほぼ等価な結果が得られていることから、地盤・構造物系のモデルに対して大変形解析を適用して地震応答解析を行う際には、用いる手法は問題とはならないことが示された。

第 8 章 結論

本研究は、地震時において液状化の発生が危惧される地盤上に構築された地盤・構造物系に対して、その地震被害を高い精度で再現もしくは予測できるような土の構成モデル、および、そのような構成モデルを用いた有限要素法に基づく有効応力解析手法の開発を目的としたものである。地盤の液状化に代表されるような非線形性が顕著に現れる現象を数値解析により再現しようとする場合、土質材料が有する材料非線形性を構成関係において正確に表現する必要がある。本研究では、砂のような粒状体の力学モデルとしてのひずみ空間における多重せん断モデル (Iai & Ozutsumi, 2005) に対して、新たなストレス-ダイレイタンスー関係を組み込むことで、液状化地盤における砂の力学的挙動の再現を試みた。さらに、地震時の液状化現象に伴う地盤・構造物系の大変形挙動を取り扱うにあたっては、発生するひずみを微小なものと仮定した微小変形理論では不十分であり、大変形に伴う幾何学的な非線形性を的確に考慮する必要がある。このような観点から、新たなストレス-ダイレイタンスー関係を適用した多重せん断モデル構成式を大変形理論に基づき拡張し、材料非線形性のみならず幾何学的非線形性をも考慮できる砂の力学モデルとしての構成式を構築した。また、ここで提案された構成モデルを有限要素法による数値解析に導入するため、間隙水で満たされた多孔質体としての土の支配方程式を大変形理論の枠組みで与えるとともに、その離散化を行った。大変形理論に基づく上述の構成モデルおよび支配方程式を地震応答解析に適用した結果、微小変形解析において見られた過大な変形が抑制されるようになり、実験値や実際の被災事例と整合性の高い精度のよい解析結果が得られることが確認された。以下に、各章ごとに順を追って、その内容を示す。

第 1 章では、液状化地盤上の地盤・構造物系の地震時の被害予測に関して、性能規定型の耐震設計の観点から、変形量を高い精度で推定できる手法の確立が求められていることを述べた。さらに、精度向上のためになされた既往の研究について簡潔に述べ、地震時の液状化現象に伴う地盤・構造物系の挙動をより正確に予測するためには、大変形に起因する幾何学的な非線形効果を的確に考慮する必要があることを論じた。

第 2 章では、砂のような粒状体の力学モデルとしてのひずみ空間における多重せん断モデルに対して、新たなストレス-ダイレイタンスー関係を組み込むことで、より一般化された多重せん断モデル (カクテルグラスモデルと称す) の定式化を行った。ここで用いたストレス-ダイレイタンスー関係は、ダイレイタンスーによる体積ひずみ成分が、仕事をしないせん断機構 (Taylor, 1948) として表現される膨張的成分と、累積塑性せん断ひずみに比例する収縮的成分の和として与えられるという仮定に基づくものである。ここでは微小変形理論に基づき、3次元および2次元平面ひずみ条件での定式化を示した。定式化では、多重せん断モデルにおける粒状体の粒子構造を特徴づける **branch vector** と、それに直交する **tangential vector** との **dyad** 積に基づき、砂の誘導異方性を考慮できる仮想単純せん断機構を

用いて構成関係が規定されている。膨張的ダイレイタンスの定式化においては、Taylor (1948) に従い、偏差成分とダイレイタンスの膨張的成分から構成されるひずみが、骨格曲線に沿う載荷時には仕事をしない成分であると仮定した。一方、収縮的ダイレイタンスは、累積塑性せん断ひずみに比例する成分であると仮定し、塑性せん断ひずみ増分に応じて規定される増分形としての定式化を行った。ここで提案された多重せん断モデル構成式では 15 個のパラメータを与える必要があり、うち 3 個は体積成分 (圧縮伸張変形)、3 個は偏差成分 (せん断変形)、残りの 9 個はダイレイタンス成分を制御するものである。

第 3 章では、第 2 章で示した微小変形理論によるひずみ空間での多重せん断モデル構成式を、大変形理論に基づき幾何学的非線形性を考慮できるように拡張した。大変形理論に基づく定式化では、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の 2 種類の定式化法が存在し、それぞれ基準配置に基づく物質表示、および、現配置に基づく空間表示で表された応力、ひずみ系を用いる。ここでは、これらの両者により定式化を行い、物質表示では第 2 Piola-Kirchhoff 応力および Green-Lagrange ひずみを、また、空間表示では Cauchy 応力および Euler-Almansi ひずみを用いて構成式を記述した。大変形解析に必要な定式化においては、圧縮性を考慮した超弾性体の大変形解析理論 (Holzapfel, 2000) を参考にして、これに多重せん断機構および砂のような粒状体に特有のダイレイタンス効果を盛り込んだ形での定式化を行った。大変形理論に基づく構成式の定式化の方向性としては、空間表示における Cauchy 有効応力を用いた積分形の構成式を、微小変形理論と同様の形で表せるものと仮定した。第 2 章で示した多重せん断モデルの基礎概念としての branch vector や tangential vector などのベクトル類は、物質の変形に伴いその方向とともに大きさを変えるため、物質表示における基準状態のベクトル類に変形勾配を作用させることにより、空間表示のベクトル類を与えることとした。また、物質表示における積分形構成式は、空間表示の積分形構成式を pull-back することにより定式化を行った。このようにして求められた物質表示および空間表示での積分形構成式は、そのままでは等方成分 (体積変化成分) と偏差成分 (体積一定成分) とが混在した形となっているため、本研究では構成式としての利便性を考慮し、Holzapfel (2000) の超弾性体理論に準じて、4 階の projection tensor により等方成分と偏差成分とに分離した形で構成関係を与えることとした。増分形の構成式に関しては、物質表示では積分形の構成式の物質時間微分をとることにより、一方の空間表示においては積分形構成式の Lie 時間微分により与えられるものとした。

第 4 章では、第 3 章で述べた大変形理論に基づくひずみ空間での多重せん断モデルを、2 次元平面ひずみ条件での有限要素解析に適用するため、大変形理論の枠組みで支配方程式を表すとともに、有限要素法のための離散化を行った。対象とした支配方程式は、間隙水で満たされた多孔質体に対する運動方程式、および、水流の収支バランス式であり、ここでも、現配置に基づく空間表示により表される Updated Lagrangian 法、および、基準配置に基づく物質表示により表される Total Lagrangian 法の両者により定式化を行った。さらに、離散化された基本方程式に基づき、有限要素法における自重解析などの静的解析、および、

地震応答解析に代表される動的解析のそれぞれに対する解法を、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の双方の枠組みにおいて示した。

第 5 章では、第 3 章で示した砂の力学モデルとしてのひずみ空間における多重せん断モデルの概念を基に、大変形理論に基づく新たな線形弾性体の構成式を提案した。ここで提案する構成式は、微小変形理論における線形弾性体の構成式が、体積弾性係数およびせん断剛性が定数で与えられる（ばねが 2 本の）多重せん断モデルと等価であるという事実に基づいている。この考え方のもと、第 3 章での多重せん断モデルの構成式を参考にし、等方圧力と体積ひずみ、および、仮想単純せん断応力と仮想単純せん断ひずみの間に線形関係を仮定することで、大変形理論に基づく新たな線形弾性体の定式化を行った。ここで提案する多重せん断モデル型の線形弾性体構成式は、物質表示（第 2Piola-Kirchhoff 応力、Green-Lagrange ひずみ）および空間表示（Cauchy 応力、Euler-Almansi ひずみ）の双方において定式化がなされているが、表現方法が異なるのみで、両者の間に本質的な違いはない。このことは、本モデルを用いた一軸圧縮引張試験の要素シミュレーションからも明らかにされており、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の両者により得られた荷重-変位関係は等価なものであった。また、ここでの提案モデルにより得られた荷重-変位関係は、微小変形解析の構成関係をそのまま大変形解析において適用した構成モデルと比較して、より現実的な挙動を示すことが明らかとなった。

第 6 章では、第 3 章で述べた大変形理論に基づく多重せん断モデル構成式を用いて、各種の要素シミュレーション解析を実施した。砂の非排水単調せん断試験を対象とした要素シミュレーションでは、非排水せん断強度およびその他のモデルパラメータを適切に調節することで、室内試験で得られるピーク強度や変相領域での挙動を精度よく再現することができた。また、設定した非排水せん断強度や圧密後の初期拘束圧、また用いたパラメータによらず、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の結果はほぼ一致することが確認された。さらに、有効応力経路などを最大せん断応力で整理した場合、大変形解析と微小変形解析の結果はほぼ一致するものの、せん断応力および軸差応力に関しては、せん断変形の進展に伴う幾何学的非線形性の影響により、大ひずみ領域において大変形解析と微小変形解析で異なる結果となることが示された。繰り返しせん断試験に対するシミュレーションでは、液状化判定基準としての両振幅ひずみ 5%に満たないひずみ領域では、有効応力経路やせん断ひずみ時刻歴などの解析結果における微小変形解析と大変形解析の明瞭な差異は認められず、このことより液状化抵抗曲線の算定に関しては微小変形解析でも十分な精度での結果が得られることが確認された。一方、ひずみが（片振幅で）10%を超えるような領域においては、両者の結果の差が顕在化するようになり、このような大ひずみ領域での現象を取り扱う場合には大変形解析が必要不可欠であることもあわせて示された。非排水条件下における砂の平面ひずみ圧縮試験に対する要素シミュレーションでは、微小変形解析を適用した場合、解析対象モデルの変形形状および主せん断ひずみ分布は軸対称であり、ひずみが局所的に増大する傾向は見られなかった。一方、大変形解析を適用した場

合は、Total Lagrangian 法および Updated Lagrangian 法の両者において、モデルに与える軸ひずみの増加とともに主せん断ひずみの局所化が顕著になり、明瞭なせん断帯が形成されるに至った。ただし、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の主せん断ひずみの分布形状は、中心軸に対して鏡像の位置関係になっており、これは数値解析における打ち切り誤差などの微小な差異によるものと考えられる。また、解析対象モデルのアスペクト比を低くした場合、大変形解析では主せん断ひずみはクロス型（X字型）に局所化する傾向にあり、モデルの対角頂点を結ぶような 2 本のせん断帯が形成された。これより、アスペクト比の違いによりひずみの局所化の分布に明らかな差が生じ、異なった形状のせん断帯が形成されることが示された。

第 7 章では、各種形式の地盤・構造物系のモデルに対して大変形解析による地震時の被災事例解析を実施した。土木研究所で実施された盛土の動的遠心模型実験に対する解析では、大変形解析を適用することにより微小変形解析で見られた過大な盛土堤体の変形が抑えられ、得られた沈下量は実験値と最も整合する結果となった。さらに、非排水せん断強度を考慮することにより盛土堤体および基礎地盤の変形形状を精度良く再現できることが示された。また、Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の両者により得られた解析結果はほぼ等しくなることが確認された。1993 年北海道南西沖地震の際に被災した後志利別川堤防の No.1 断面を対象とした解析では、大変形解析を適用することで盛土天端沈下量は観測値に近づくものの、実測の半分程度の過小評価された値であった。この原因としては、盛土下のある層において過剰間隙水圧がほとんど上昇していないことが考えられ、この点に関しては今後の検討課題である。ここでも Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法の両者の間には明瞭な差が存在せず、大変形解析を行う際にはいずれの定式化法を用いても問題のないことが確認された。1995 年兵庫県南部地震の際に被災した神戸港六甲アイランド RF3 岸壁に対する解析では、微小変形解析および大変形解析におけるケーソンの滑動量や傾斜角にそれほど大きな差は生じない結果となった。これは、実測値と比較して全体的に変形量を過小評価しているためであると思われる。なお、液状化層における要素レベルでのひずみに関しては、最大で 10%程度の差を生じていることが確認された。1995 年兵庫県南部地震の際に被災した神戸港第 7 防波堤に対する解析では、微小変形解析において実測値に対して過大なケーソン天端沈下量が算出されているケースに対しても、大変形解析では実測値と整合性の良い結果が得られることが示された。ここでも Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法による解析結果にほとんど差は見られなかった。以上の結果より、砂の力学モデルとしての多重せん断モデルを用い、幾何学的非線形性を考慮した大変形解析を適用することにより、液状化地盤上に構築された地盤・構造物系の地震時の被害程度や被災状況を概ね精度よく再現できることが示された。

参考文献

- [1] Akiyoshi,T. and Matsumoto,H. : Cyclic mobility behaviour of sand by the three-dimensional strain space multimechanism model, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.18, pp.397-415, 1994.
- [2] Asaoka,A. and Noda,T. : Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-Clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, Vol.35, No.1, pp.83-100, 1995.
- [3] Asaoka,A., Nakano,M. and Noda,T. : Soil-water coupled behavior of heavily consolidated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, Vol.37, No.1, pp.13-28, 1997.
- [4] Bagi,K. : Stress and strain in granular assemblies, *Mechanics of Materials*, Vol.22, pp.165-177, 1996.
- [5] Bathe,K.J. : *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- [6] Been,K., Jefferies,M.G. : A state parameter for sands, *Geotechnique*, Vol.35, No.2, pp.99-112, 1985.
- [7] Cook,R.D., Malkus,D.S., Plesha,M.E., Witt,R.J. : *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Fourth edition, John Wiley&Sons, 2002.
- [8] Cubrinovski,M. and Ishihara,K. : Modelling of sand behaviour based on state concept, *Soils and Foundations*, Vol.38, No.3, pp.115-127, 1998.
- [9] 土木学会耐震基準等基本問題検討会議 : 土木構造物の耐震基準等に関する第二次提言, *土木学会誌*, Vol.81, 1996.
- [10] (財)沿岸開発技術研究センター : 埋立地の液状化対策ハンドブック (改訂版), 1997.
- [11] Finno,R.J., Harris,W.W., Mooney,M.A. and Viggiani,G. : Shear bands in plane strain compression of loose sand, *Geotechnique*, Vol.47, No.1, pp.149-165, 1997.
- [12] 藤井紀之, 井合進, 納見昭広, 小堤治, 澤田俊一 : 砂質土の定常状態を考慮したケーソン式防波堤の被災事例解析, 第43回地盤工学研究発表会発表講演集, pp.1809-1810, 2008.
- [13] Gutierrez,M. : Modeling of the steady-state response of granular soils, *Soils and Foundations*, Vol.43, No.5, pp.93-105, 2003.
- [14] Han,C. and Vardoulakis,I.G. : Plane-strain compression experiments on water-saturated fine-grained sand, *Geotechnique*, Vol.41, No.1, pp.49-78, 1991.
- [15] 阪神・淡路大震災調査報告編集委員会 : 阪神・淡路大震災調査報告 土木構造物の被害 港湾・海岸構造物 河川・砂防関係施設, 丸善, 1997.
- [16] 阪神・淡路大震災調査報告編集委員会 : 阪神・淡路大震災調査報告 土木構造物の被害原因の分析 地盤・土構造物 港湾・海岸構造物等, 丸善, 1998.
- [17] Hardin,B.O., Drnevich,V.P. : Shear modulus and damping in soils: design equation and curves, *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, 98(SM7), pp.667-692, 1972.

- [18] 肥後陽介 : Instability and strain localization analysis of water-saturated clay by elasto-viscoplastic constitutive models, 京都大学博士学位論文, 2003.
- [19] 久田俊明 : 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 1992.
- [20] Holzapfel,G.A. : Nonlinear Solid Mechanics, John Wiley&Sons, 2001.
- [21] Hughes,T.J.R. : Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media, Int.J.Num.Meth.Eng., Vol.15, pp.1413-1418, 1980.
- [22] 兵頭順一, 井合進, 横山伸幸, 小堤治, 吉川茂樹 : 砂質土の定常状態を考慮した遠心模型実験の有効応力解析, 第43回地盤工学研究発表会発表講演集, pp.1807-1808, 2008.
- [23] 井合進 : FLIPによる解析, 地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム, 土質工学会, pp.94-103, 1989.
- [24] Iai,S. : Micromechanical background to a strain space multiple mechanism model for sand, Soils and Foundations, Vol.33, No.1, pp.102-117, 1993.
- [25] Iai,S. : Three dimensional formulation and objectivity of a strain space multiple mechanism model for sand, Soils and Foundations, Vol.33, No.1, pp.192-199, 1993.
- [26] Iai,S. : Concept of effective strain in constitutive modeling of granular materials, Soils and Foundations, Vol.33, No.2, pp.171-180, 1993.
- [27] 井合進 : 大地震時の地震・構造物系の変形解析, 平成8年度港湾技術研究所講演会講演集, pp.1-17, 1996.
- [28] 井合進, 一井康二, 森田年一 : 兵庫県南部地震による港湾施設の被害考察(その7)ケーソン式岸壁の有効応力解析, 港湾技研資料, No.813, pp.253-279, 1995.
- [29] Iai,S. and Kameoka,T. : Finite element analysis of earthquake induced damage to anchored sheet pile quay walls, Soils and Foundations, Vol.33, No.1, pp.71-91, 1993.
- [30] Iai,S., Kameoka,T. and Matsunaga,Y. : Numerical (Class A) prediction of Model No.12, Verification of Numerical Procedures for the Analysis of Soil Liquefaction Problems (VELACS), Balkema, pp.1035-1040, 1993.
- [31] Iai,S. and Matsunaga,Y. : Analysis of liquefaction induced uplift of underground structures, Proceedings from the Fourth Japan-U.S. Workshop on Earthquake Resistant Design of Lifeline Facilities and Countermeasures for Soil Liquefaction, Technical Report NCEER-92-0019, pp.425-438, 1992.
- [32] Iai,S., Matsunaga,Y. and Kameoka,T. : Strain space plasticity model for cyclic mobility, Report of the Port and Harbour Research Institute, 29(4), pp.27-56, 1990a.
- [33] Iai,S., Matsunaga,Y. and Kameoka,T. : Parameter identification for a cyclic mobility model, Report of the Port and Harbour Research Institute, 29(4), pp.57-83, 1990b.
- [34] Iai,S., Matsunaga,Y. and Kameoka,T. : Strain space plasticity model for cyclic mobility, Soils and Foundations, 32(2), pp.1-15, 1992a.
- [35] Iai,S., Morita,T., Kameoka,T., Matsunaga,Y and Abiko,K. : Response of a dense sand deposit

- during 1993 Kushiro-Oki earthquake, *Soils and Foundations*, Vol.35, No.1, pp.115-131, 1995.
- [36] Iai,S. and Ozutsumi,O. : Yield and cyclic behaviour of a strain space multiple mechanism model for granular materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29(4), pp.211-240, 2005.
- [37] 井合進, 杉山弥, 小堤治, 竹島康人, 沢田俊一 : 1993 年北海道南西沖地震で被災した河川堤防の解析検証事例, 第 26 回地震工学研究発表会講演論文集, pp.545-548, 2001.
- [38] 井合進, 竹島康人, 沢田俊一, 杉山弥, 小堤治 : 1995 年兵庫県南部地震で被災した河川堤防の解析検証事例, 第 26 回地震工学研究発表会講演論文集, pp.549-552, 2001.
- [39] 井合進, 龍田昌毅, 小堤治, 溜幸生, 山本裕司, 森浩章 : 地盤の初期応力条件が矢板式岸壁の地震時挙動に与える影響の解析的検討, 第 26 回地震工学研究発表会講演論文集, pp.809-812, 2001.
- [40] 井合進, 飛田哲男, 小堤治 : 砂の繰返し載荷時の挙動モデルとしてのひずみ空間多重モデルにおけるストレスダイレイタンスー関係, 京都大学防災研究所年報, 第 51 号, pp.291-304, 2008.
- [41] 井合進, 上田恭平, 飛田哲男, 小堤治 : 砂の力学モデルとしての多重せん断モデルの有限ひずみ (大変形) 解析の定式化, 京都大学防災研究所年報, 第 52 号, 2009.
- [42] 一井康二, 井合進, 森田年一 : 兵庫県南部地震におけるケーソン式岸壁の挙動の有効応力解析, 港湾技術研究所報告, 第 36 卷, 第 2 号, pp.41-87, 1997.
- [43] 芋野智成, 井合進, 納見昭広, 小堤治 : 砂質土の定常状態を考慮した河川堤防の被災事例解析 (その 1), 第 43 回地盤工学研究発表会発表講演集, pp.1801-1802, 2008.
- [44] 稲富隆昌, 善功企, 外山進一, 上部達生, 井合進, 菅野高弘, 寺内潔, 横田弘, 藤本健幸, 田中祐人, 山崎浩之, 小泉哲也他 : 1995 年兵庫県南部地震による港湾施設等被害報告, 港湾技研資料, No.857, 1997.
- [45] 石原研而 : 土質力学の基礎, 鹿島出版会, 1976.
- [46] Ishihara,K. : Liquefaction and flow failure during earthquakes, *Geotechnique*, Vol.43, No.3, pp.351-415, 1993.
- [47] 石原研而 : 土質力学 (第 2 版), 丸善, 2001.
- [48] Ishihara,K.and Towhata,I. : Dynamic response analysis of level ground based on the effective stress method, *Soil Mechanics – Transient and Cyclic Loads*, John Wiley&Sons, pp.133-172, 1982.
- [49] Ishihara,K. and Yoshimine,M. : Evaluation of settlements in sand deposit following liquefaction during earthquakes, *Soils and Foundations*, Vol.32, No.1, pp.173-188, 1992.
- [50] 地震調査研究推進本部地震調査委員会 : 全国地震動予測地図 (基準日 : 平成 21 年 (2009 年) 1 月 1 日), 2009.
- [51] 勝山明雄, 金子正之, 田村圭司, 佐々木康, 佐藤謙司 : 平成 5 年北海道南西沖地震による河川堤防被害について, 第 29 回土質工学研究発表会, pp.971-972, 1994.
- [52] 建設省土木研究所動土質研究室他 : 不攪乱試料の室内力学試験業務報告書, 1995.

- [53] 建設省土木研究所：盛土液状化対策としての矢板締め切り工法に関する振動台実験報告書，土木研究所資料，第 3539 号，1998.
- [54] 建設省土木研究所：法先固化改良による盛土の耐震対策効果に関する動的遠心模型実験報告書，土木研究所資料，第 3688 号，2000.
- [55] 小林正樹，寺師昌明，高橋邦夫，中島謙二郎：捨石マウンドの支持力の新しい計算法，港湾技術研究所報告，Vol.26，No.2，1987.
- [56] (財)国土技術研究センター：河川堤防の地震時変形量の解析手法，JICE 資料第 102001 号，2002a.
- [57] (財)国土技術研究センター：河川堤防の構造検討の手引き，JICE 資料第 102002 号，2002b.
- [58] Koseki,J., Kawakami,S., Nagayama,H., Sato,T. : Change of small strain quasi-elastic deformation properties during undrained cyclic torsional shear and triaxial tests of Toyoura sand, *Soils and Foundations*, Vol.40, No.3, pp.101-110, 2000.
- [59] Liu Hanlong, 井合進，一井康二，森田年一，岡下勝彦：Evaluation of deformation to the pneumatic caisson foundations of the Kobe Ohashi bridge, 港湾技術研究所報告，第 36 卷，第 2 号，pp.3-23, 1997.
- [60] 松尾修，岡村未対，島津多賀夫，渦岡良介：有限要素法による後志利別川堤防の地震被害事例解析，液状化メカニズム・予測法と設計法に関するシンポジウム発表論文集，地盤工学会，pp.445-450, 1999.
- [61] 南兼一郎，高橋邦夫，園山哲夫，横田弘，川端規之，関口宏二，辰見ター：神戸港における横棧橋の被害調査と動的相互作用解析，第 24 回地震工学研究発表会，土木学会地震工学委員会，pp.693-696, 1997.
- [62] Miwa,S., Nozu,M., Ozutsumi,O., Iai,S., Yashima,A., Yasuda,S. : Effective stress analysis for evaluating the effect of the sand compaction pile method during the 1995 Hyogoken-Nambu earthquake, *Proceedings : Fourth International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, Paper No.4.42, 2001.
- [63] 三輪滋，岡由剛，中山裕章，石倉克真，平岡慎司，松田英一，吉田晃，井合進，小堤治，森浩章：初期応力状態を考慮したモデル化による鋼矢板岸壁の被災事例の有効応力解析，第 46 回地盤工学シンポジウム，pp.19-24, 2001.
- [64] 三輪滋，小堤治，池田隆明，岡由剛，井合進：初期応力状態を考慮した有効応力解析手法による鋼矢板岸壁の地震被害の評価，構造工学論文集，Vol.49(A), pp.369-380, 2003.
- [65] Mokni,M. and Desrues,J. : Strain localization measurements in undrained plane-strain biaxial tests on Hostun RF sand, *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, Vol.4, pp.419-441, 1998.
- [66] Molenkamp,F.,Kidger,D.J.,Smith,I.M. : Accuracy of four-node standard finite element, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* , Vol.16, pp.323-333, 1992.

- [67] 本島一宏, 井合進, 横山伸幸, 澤田俊一: 砂質土の定常状態に対する細粒分含有率や間隙比などの影響について, 第43回地盤工学研究発表会発表講演集, pp.1799-1800, 2008.
- [68] 長瀬英生, 石原研而, 田部元太: 多方向の不規則荷重を受ける砂の沈下特性, 土質工学研究発表会発表講演集, pp.615-618, 1986.
- [69] 中瀬仁, 毛利栄征, 安田進, 末広俊夫: 大型振動台による地中埋設構造物の浮上実験と浮上予測解析-液状化による地中埋設構造物の浮き上がり被害に関する研究委員会-, 第38回地盤工学研究発表会発表講演集, pp.1847-1848, 2003.
- [70] 日本地震工学会 性能規定型耐震設計法に関する研究委員会: 性能規定型耐震設計 現状と課題, 鹿島出版会, 2006.
- [71] (社)日本機械学会: 固体力学におけるコンピュータアナリシス, 株式会社コロナ社, 1986.
- [72] Oda,M., Nemat,N.S., Mehrabadi,M.: A statistical study of fabric in a random assembly of spherical granules, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.6(1), pp.77-94, 1982.
- [73] 小堤治: 液状化地盤上の地盤・構造物系の地震時被害推定に関する数値解析法の研究, 京都大学博士学位論文, 2003.
- [74] Ozutsumi,O., Sawada,S., Iai,S., Takeshima,Y., Sugiyama,W., Shimazu,T.: Effective stress analyses of liquefaction-induced deformation in river dikes, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.22, pp.1075-1082, 2002.
- [75] 小堤治, 塩崎禎郎, 一井康二, 井合進, 森玄: 二次元有効応力解析法の解析精度向上に関する検討, 土木学会海洋開発論文集, Vol.20, pp.443-448, 2004.
- [76] 小堤治, 山本裕司, 足立雅樹, 関谷千尋, 川中政実, 北出圭介, 土屋智穂, 島津多賀夫, 井合進, 田河祥一: 地中埋設管浮上実験の有効応力法による実験解析に基づく浮上メカニズムの検討, 第48回地盤工学シンポジウム論文集, 2003.
- [77] Poulos,S.J., Castro, G. and France,J.W.: Liquefaction evaluation procedure, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol.111, No.6, pp.772-792, 1985.
- [78] 佐武正雄: 地盤と土の異方性, 土と基礎, Vol.32, No.11, pp.5-12, 1984.
- [79] 佐藤成, 林家祥, 亀山和弘, 佐藤靖彦, 飯田典生, 大塚夏彦, 森浩章, 小堤治, 井合進, 安田進: 非排水有効応力地震応答解析における捨石材のモデル化に関する検討(その2), 第26回地震工学研究発表会講演論文集, pp.681-684, 2001.
- [80] Sawada,S., Ozutsumi,O. and Iai,S.: Analysis of liquefaction induced residual deformation for two types of quay walls: Analysis by "FLIP", *Proc.12WCEE*, 2000.
- [81] Seed,H.B.: Design problems in soil liquefaction, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol.113, No.8, pp.827-845, 1987.
- [82] Shahnazari,H. and Towhata,I.: Torsion shear tests on cyclic stress-dilatancy relationship of sand, *Soils and Foundations*, Vol.42, No.1, pp.105-119, 2002.

- [83] 竹島康人, 沢田俊一, 杉山弥, 小堤治, 井合進 : 河川堤防を対象とした地震時変形解析の適用事例, 第 46 回地盤工学シンポジウム, pp.89-94, 2001.
- [84] Tatsuoka,F., Nakamura,S., Huang,C.C. and Tani,K. : Strength anisotropy and shear band direction in plane strain tests of sand, *Soils and Foundations*, Vol.30, No.1, pp.35-54, 1990.
- [85] Taylor,D.W. : *Fundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, 1948.
- [86] Thevanayagam,S., Ravishankar,K. and Mohan,S. : Effects of fines on monotonic undrained shear strength of sandy soils, *Geotechnical Testing Journal*, ASTM, Vol.20, No.4, pp.394-406, 1997.
- [87] Towhata,I. and Ishihara,K. : Modelling soil behaviour under principal stress axes rotation, *Proc. of 5th International Conf. on Numerical Methods in Geomechanics*, Nagoya, Vol.1, pp.523-530, 1985.
- [88] 運輸省第三港湾建設局, 基礎地盤コンサルタンツ株式会社 : 神戸港土質試験業務報告書, 1997.
- [89] Verdugo,R. and Ishihara,K. : The steady state of sandy soils, *Soils and Foundations*, Vol.36, No.2, pp.81-91, 1996.
- [90] 吉田総仁 : 弾塑性力学の基礎, 共立出版株式会社, 1997.
- [91] Yoshimine,M. and Ishihara,K. : Flow potential of sand during liquefaction, *Soils and Foundations*, Vol.38, No.3, pp.189-198, 1998.
- [92] Zienkiewicz,O.C. and Bettess,P. : Soil and other saturated media under transient, dynamic conditions ; general formulation and the validity various simplifying assumptions, *Soil Mechanics – Transient and Cyclic Loads*, John Wiley&Sons, pp.1-16, 1982.
- [93] Zienkiewicz,O.C., Chang,C.T. and Bettess,P. : Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils, *Geotechnique*, Vol.30, No.4, pp.385-395, 1980.
- [94] Zienkiewicz,O.C., Taylor,R.L. and Zhu,J.Z. : *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*, Sixth edition, Elsevier, 2000.
- [95] Zienkiewicz,O.C. and Taylor,R.L. : *The Finite Element Method : For Solid and Structural Mechanics*, Sixth edition, Elsevier, 2000.

謝辞

本論文は、京都大学大学院工学研究科博士課程に在籍していた3年間にわたる研究成果をまとめたものです。この期間、いつも暖かく、かつ厳しくご指導をいただきました皆様に深く感謝いたします。

本研究を進めるにあたりまして、京都大学防災研究所井合進教授には、研究全般にわたり熱心にご指導いただきました。京都大学防災研究所の地盤防災解析分野に配属されて以来、先生には有効応力解析法に基づく液状化解析プログラムのいろはをきめ細かく教えていただきました。また、本論文をまとめる際には、一字一句に至るまで懇切丁寧なご指導を賜りました。ここに、心より御礼申し上げます。

本論文の審査にあたり、京都大学大学院工学研究科岡二三生教授、田村武教授には誠に注意深く拙稿を読んでいただきました。岡二三生教授には、有限要素法を用いた数値解析法における種々の問題点に関して有益なご指導をいただきました。田村武教授には、主に連続体および粒状体としての構成モデルに関して熱心なご指導をいただきました。ここに、深く感謝いたします。

FLIP研究会の委員である明窓社の小堤治氏には、プログラミングで行き詰った時、親身になって相談にのっていただき、数値解析手法に関する有益な助言を数多くいただきました。また、小堤氏をはじめとして、FLIP研究会の委員の方々から、提案モデルを用いた解析手法の検証のためのデータとして、室内試験や被災事例の種々のデータをご提供いただきました。これらの生データなしでは、本研究の実施は不可能であり、貴重なデータを提供していただいた皆様に深く感謝いたします。

また、井合進教授の研究室の皆様には、三村衛准教授、飛田哲男助教、清水博樹技術職員、富阪和秀技術職員をはじめとして、研究から日常生活に至るまで大変お世話になりました。誠にありがとうございました。

以上、お名前を挙げさせて頂いた方以外にも、非常に多くの方々の暖かいご支援とご指導があっはじめて本論文を完成することができました。ここに、深く感謝いたします。

本研究の成果が、今後耐震設計の実務に生かされ、地震による被害の軽減に少しでも貢献できるよう、これまで以上に研究に邁進いたしたいと思います。

最後に、多くの励ましと協力をもたらした家族に感謝します。ありがとうございました。