

新制

理

1503

学位審査報告書

(ふりがな)	やまな しゅんすけ
氏名	山名 俊介
学位(専攻分野)	博士(理学)
学位記番号	理博 第 3450 号
学位授与の日付	平成21年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科 数学・数理解析専攻
(学位論文題目)	Determination of holomorphic modular forms by primitive Fourier coefficients (正則保型形式の原始的フーリエ係数による決定)
論文調査委員	教授 池田 保 教授 吉田 敬之 教授 齋藤 裕

理学研究科

(論文内容の要旨)

近年の整数論の発展において保型形式といわれるクラスの関数の研究は重要な役割をはたしている. とくにジークル保型形式などのように正則な保型形式は古くから研究されており, 現在でも保型形式論の中心的な研究テーマである.

山名俊介氏は本論文において「正則保型形式はどれだけのフーリエ係数により特定されるか?」という問題を考察した.

これ問題対して, 山名氏は本論文で次のような一般的な結果を得た. 正確に述べるために, 少し記号を準備する. $J = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, n 次のシンプレクティック群 $Sp_n(\mathbb{Z})$ は $Sp_n(\mathbb{Z}) = \{\gamma \in M_{2n}(\mathbb{Z}) \mid \gamma J \gamma = J\}$ により定義される. シンプレクティック群 $Sp_n(\mathbb{Z})$ はジークル上半空間 $\mathfrak{H}_n = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{Im}(Z) > 0\}$ に $\gamma Z = (aZ + b)(cZ + d)^{-1}$ で作用する.

n 次のシンプレクティック群の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で c の各成分がすべて N で割り切れるようなもの全体からなるシンプレクティック群の部分群をレベル N の合同部分群といい, $\Gamma_0^n(N)$ で表わす. χ をディリクレ指標とし, κ を任意の整数とする. ただしディリクレ指標 χ の導手 f_χ は N の約数であるものとする. n が 2 以上の自然数とき, n 次のジークル上半空間上の正則関数 F は, 全ての $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^n(N)$ に対して,

$$F(\gamma Z) = \chi(\det d) \det(cZ + d)^\kappa F(Z)$$

を満たすとき, $\Gamma_0^n(N)$ と χ に関する重さ κ のジークル保型形式と呼ばれる. 半整数対称行列 h に対して, h の対角成分と, 非対角成分の 2 倍全体の最大公約数を $\varepsilon(h)$ と表す. このとき, 本論文の主定理は以下のように述べられる.

定理. $n \geq 2$ とし, $\Gamma_0^n(N)$ と χ に関する重さ κ のジークル保型形式 F のフーリエ展開を

$$F(Z) = \sum_h A(h) \exp(2\pi\sqrt{-1}\text{tr}(hZ))$$

とする. もし $\varepsilon(h)$ が N/f_χ を割るような全ての半正定値半整数対称行列 h に対して $A(h) = 0$ ならば, $F = 0$ である.

山名氏の定理はリフティングの構成の問題を考察する過程で得られたものであるが, その結果の簡明さによりより広い応用が期待されるものである.

(論文審査の結果の要旨)

山名氏の定理はジークル保型形式のフーリエ・ヤコビ係数のテーラー展開の係数を解析することによって証明される。これは次数2の場合に Zagier が用いた方法を拡張したものである。

山名俊介氏が本論文において考察した問題に関しては、S. Breulmann と W. Kohnen は、 $Sp_2(\mathbb{Z})$ に関する尖点的なジークル同時固有関数は $\varepsilon(h)$ が平方因子を持たないフーリエ係数だけで定まることを主張している。この結果は初歩的な代数的議論のみで証明される。

また、 $n=2$ の場合、山名氏の定理は実質的に Zagier により以前に証明されているが、Zagier が考察したのは次数2のジークル保型形式だけであったが、山名氏は類似の結果を重さ半整数のジークル保型形式のやユニタリ群や直交群上の正則保型形式に対しても拡張できることを示した。

このように山名氏が今回示した定理は過去に知られていた結果よりもはるかに一般的なものである。

保型形式のなす空間には Hecke 作用素といわれる作用素が作用することが知られている。山名氏の定理はとくに保型形式が Hecke 作用素の同時固有関数であるときに威力を発揮するものと思われる。

たとえば保型形式の理論において重要な問題の一つにリフティングの問題をあげることができる。リフティングの問題とは Hecke 作用素の同時固有関数であるような保型形式が一つ与えられた時に別の保型形式の空間の同時固有関数で Hecke 作用素の固有値がもとの保型形式の固有値であらわされるようなものを構成する問題である。この問題の難しさは次数も変数も異なるような保型形式をあらたに構成しなくてはならないことにある。山名氏の定理はリフティングの構成の問題を考察する過程で得られたものであるが、その結果の簡明さにより広い応用が期待されるものである。

本論文は雑誌 *Mathematische Annalen* に掲載されることが決定している。以上の理由により、大学院在学5年未満であるが、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認めた。また、論文内容に関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。