学　位　審　査　報　告　書

（ふりがな） 氏　　　　名	ひらい　ひろし 平井　広志
学位（専攻分野）	博　　士　（　理　学　）
学位記番号	論　理　博　　第　　　　　号
学位授与の日付	平成　　年　　月　　日
学位授与の要件	学位規則第４条第２項該当

（学位論文題目）

Tight spans of distances and the dual fractionality of undirected multiflow problems

(距離空間のタイトスパンと無向多品種流問題の双対フラクショナリティ)

論文調査委員	（主査）　藤重　悟　　教授 岩田　覚　　教授 玉川　安騎男　教授

理　学　研　究　科

氏　名	平井　広志

（論文内容の要旨）

本論文は、整数値容量付き無向グラフ G=(V,E)（点集合 V, 枝集合 E）とターミナルの集合 S ⊆ V および S 中のターミナル対の全体を表すターミナルグラフ H =(S,F) （点集合 S, 枝集合 F）が与えられたときの最大多品種流問題を考察している。ターミナルグラフ H を固定したとき、任意のグラフ G と整数値容量に対して、最大多品種流で、その各枝上の流量値が 1/k の整数倍となるものが存在するような正整数 k の最小値（そのような k が存在しないときは+∞）をフラクショナリティと呼び、frac(H)と記す。フラクショナリティ frac(H)がどのようなターミナルグラフ H に対して有限となるかについては、多品種流理論における基本的問題であるが、ターミナルグラフ H が二つの枝の直和であるような２品種流の場合に frac(H)=2 となるなどのような特殊な場合や、かなり限定された一般化を除いて、未解決である。

本論文では、二つのターミナル s, t ∈ S 間の G 中の流れの、s と t に依存して定まる単位流量当たりの整数値重みμ(s,t)を考えて、各ターミナル対の間の流量によって定まる重みの全点対（s, t）に亘る総和として多品種流の重みを定義する。このようにして定式化される総重み最小の多品種流を見出す問題（μ-重み付き最大多品種流問題と呼ぶ）は、最大多品種流問題の一般化になっている。μ-重み付き最大多品種流問題は一つの線形計画問題であり、その双対線形計画問題を考えることができる。この主問題であるμ-重み付き最大多品種流問題のフラクショナリティ（μの主フラクショナリティと呼び、frac(μ)と記す）と双対問題のフラクショナリティ（μの双対フラクショナリティと呼び、frac*(μ)と記す）を上記と同様に定義する。そのとき、frac*(μ)≤ frac(μ)の関係を示すことができて、μの双対フラクショナリティ frac*(μ)の有限性は主フラクショナリティ frac(μ)の有限性の必要条件になっている。本論文の主結果は、μの双対フラクショナリティが有限となるための一つの幾何学的な必要十分条件を示したことである。その必要十分条件は，μによって決まる非有界凸多面体

$$\{ p \in \mathbf{R}^S \mid p(s) + p(t) \geq \mu(s,t) \quad (s,t \in S) \}$$

の極小点からなる有界面の和集合---これはμのタイトスパンと呼ばれる---の次元が２以下であることである。さらに、双対フラクショナリティの取り得る値は 1,2,4,＋∞であることも示している。これは，Karzanov（1991, 1998）によって示された 0-1 重みとメトリック重みについての結果の共通の一般化になっている。

本論文の主定理の証明法は、μ-重み付き最大多品種流問題の双対問題をタイトスパン上の施設配置問題に帰着させるもので、1970 年代より知られている「多品種流と距離空間の双対性」の精密化にあたり、この方法論自体が多品種流理論において基本的重要性を持っている。これにより、Ford-Fulkerson の最大流・最小切断定理はもとより、Hu の最大２品種流・最小切断定理や Lovász-Cherkassky の定理などをはじめとする多品種流理論において知られている様々な組合せ的最大最小定理の関係式を、タイトスパンの幾何を用いて統一的に導出することが可能となった。

氏　名	平井　広志

（論文審査の結果の要旨）

整数値容量の最大多品種流問題は、整数値の流れに解を制約すると一般的にはいわゆる NP 困難と呼ばれる問題であって、取り扱いが大変難しい問題である。そこで、この問題の数理的構造として、有理数値の流れを考えたときの最適解のフラクショナリティを考えることは問題の難しさの尺度を与えるという意味で重要である。また、最大多品種流問題の双対問題のフラクショナリティ（双対フラクショナリティ）の有限性は、有理数流れの場合の最適解を特徴付ける、単なる線形計画における双対定理の書き換えではない、組合せ的な最大最小定理の存在に関係していて重要である。

本学位論文においては、ターミナル対に非負整数値重みを考えて、最大多品種流問題を一般化した重み付き最大多品種流問題を定式化して、そのような重み付き最大多品種流問題に対する最適解のフラクショナリティを考察した。本研究の成果は大きく分けて次の二点である。

第一に、Isbell(1964)と Dress(1984)によってメトリックに対して導入されたタイトスパンに注目し、それを一般化して重みで決まる距離のタイトスパンを考えて、その次元が２以下であることが、重み付き最大多品種流問題の双対フラクショナリティが有限であるための必要十分条件であることを示した。さらに、双対フラクショナリティとして取り得る値が 1,2,4,＋∞であることも示している。この双対フラクショナリティの特徴づけは、主問題である最大多品種流問題のフラクショナリティが有限であるための綺麗な必要条件を与えたことになっており、Karzanov(1991)によって提示された未解決問題である最大多品種流問題のフラクショナリティの解明に向けた大きな前進である。

第二に、重み付き最大多品種流問題の双対問題をタイトスパン上の施設配置問題に帰着して双対フラクショナリティの完全な特徴づけを与えた。この証明法によって、現在までに得られている Hu の最大２品種流・最小切断定理や Lovász-Cherkassky の定理などをはじめとする多品種流理論において知られている様々な組合せ的最大最小定理の関係式を、タイトスパンの幾何を用いて統一的に導出することが可能となった。この点での貢献も大きい。このアプローチによる理論的枠組みの、他の関連する多品種流問題への適用可能性について、今後の研究の展開が期待される。

以上により、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。