

学位審査報告書

新制
理
1507

氏名	(ふりがな) ながお ともあき 長尾 有晃
学位(専攻分野)	博士(理学)
学位記番号	理博 第 3466 号
学位授与の日付	平成21年9月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科 数学・数理解析専攻
(学位論文題目)	
On Samelson products in $Sp(n)$ ($Sp(n)$ のSamelson積について)	
論文調査委員	准教授 岸本 大祐 教授 河野 明 准教授 浅岡 正幸

(論文内容の要旨)

位相空間 X から位相群 G への写像のホモトピー類全体のなすホモトピー集合 $[X, G]$ は、 G の積により自然に群となる。一般に、このホモトピー集合を集合として具体的に計算して求めることは困難であり、その群構造を記述するのはさらに難しい。実際、具体的に記述されているのは $X=G$ で G が階数 2 以下のホップ空間であるというような、非常に特殊な場合のみである。このような一見容易な場合ですらその計算は複雑で難しい。しかしながら、群 $[X, G]$ は G の積構造を非常によく反映することから様々な応用に用いられ、重要なものである。したがって、この群の群構造、特に、その交換子を具体的に与えることは重要である。

位相群 G を n 次のシンプレクティック群 $Sp(n)$ とし、 X が CW 複体の場合を考える。 $Sp(n)$ を $Sp(\infty)$ へ埋め込む包含写像は、群 $[X, Sp(n)]$ と X の被約シンプレクティック K 理論を含む完全列を誘導する。したがって、この完全列を解析することにより群 $[X, Sp(n)]$ を計算することが原理的に可能となる。 X の次元が $4n+2$ 以下の場合には実際にこの完全列を解析することが可能であることを示し、特に、 $Sp(n)$ の交換子写像のある持ち上げを具体的に与えることにより、群 $[X, Sp(n)]$ の交換子を具体的に与えた。

位相群 G への写像 $f: X \rightarrow G$ と $g: Y \rightarrow G$ の Samelson 積とは、 $f \wedge g: X \wedge Y \rightarrow G \wedge G$ と G の被約交換子写像 $\gamma: G \wedge G \rightarrow G$ との合成のホモトピー類であり、 $\langle f, g \rangle$ と表される。Samelson 積は、 G の積構造を知る上では非常に重要な量となる。しかしながら、上記のホモトピー集合 $[X, G]$ と同様、実際に計算することは非常に困難である。

シンプレクティック群 $Sp(n)$ に対して、準射影空間と呼ばれる部分複体 Q_n が存在し、 $Sp(n)$ のセル分割はこの Q_n を用いて与えられることが古典的に知られている。ホモロジーにおいては、 $Sp(n)$ のポントリャギン環は n 個の元により生成される外積代数となっており、 Q_n のホモロジーはこの n 個の生成元に対応することが知られている。すなわち、 Q_n は $Sp(n)$ をホモトピー論的に生成する空間である。写像 i を、 Q_n を $Sp(n)$ に埋め込む包含写像とする。古典群の Samelson 積に関する結果はこれまで球面からの写像に関するものがほとんどであったが、主論文では Samelson 積 $\langle i, i \rangle$ の位数を上記の群 $[X, Sp(n)]$ の計算の応用として求めている。これにより、 $Sp(2)$ の素数 3 による局所化がホモトピー可換であるという C.A. McGibbon の結果の別証明を得ており、また、 n が小さいときには $\langle i, i \rangle$ が自明であることと $Sp(n)$ がホモトピー可換であることが同値であることを示した。その延長として、この結果が任意の n で成り立つという予想をたてている。Samelson 積 $\langle i, i \rangle$ を上記の方法を用いて計算する際の鍵となるのはホモトピー集合 $[Q_n \wedge Q_n, Q_n]$ が自由アーベル群、もしくは、その素数 p での局所化が自由 Z_p 加群であることを示すことにあり、球面のホモトピー群の p 成分がアルファ列のみで記述できる範囲において証明されている。

(論文審査の結果の要旨)

申請者は、位相空間 X から位相群 G への写像のホモトピー類全体のなすホモトピー集合 $[X, G]$ を、 G の積により自然に群とみなしたものを考える。一般に、このホモトピー集合を集合として具体的に計算して求めることは困難であり、その群構造を記述するのはさらに難しい。群 $[X, G]$ は G の積構造を非常によく反映する。実際、任意の X に対して $[X, G]$ が可換であるとき、 G はホモトピー可換であり、任意の X で $[X, G]$ がクラス n の冪零群であるとき、 G はクラス n のホモトピー冪零である。したがって、この群の群構造、特に、その交換子を具体的に与えることは重要である。しかしながら、 $[X, G]$ は集合として求めることですら非常に困難であり、その群構造を決定することはそれ以上に難しい。

位相群 G を n 次のシンプレクティック群とし、 X が CW 複体の場合を考える。 $Sp(n)$ を $Sp(\infty)$ へ埋め込む包含写像は、群 $[X, Sp(n)]$ と X の被約シンプレクティック K 理論を含む完全列を誘導する。この完全列を X の次元が $4n+2$ 以下の場合に解析し、具体的かつ系統的に $[X, Sp(n)]$ を計算する方法を与えた。特に、 $Sp(n)$ の交換子写像のある持ち上げを具体的に与えることにより、群 $[X, Sp(n)]$ の交換子を具体的に与えた。

位相群 G への写像 $f: X \rightarrow G$ と $g: Y \rightarrow G$ の Samelson 積とは、 $f \wedge g: X \wedge Y \rightarrow G \wedge G$ と G の被約交換子写像 $\gamma: G \wedge G \rightarrow G$ との合成のホモトピー類であり、 $\langle f, g \rangle$ で表される。明らかに、Samselson 積は、 G の積構造を知る上では非常に重要な量となる。しかしながら、上記のホモトピー集合 $[X, G]$ と同様、実際に計算することは非常に困難である。

シンプレクティック群 $Sp(n)$ に対して、準射影空間と呼ばれる部分複体 Q_n が存在し、ホモロジーにおいては、 $Sp(n)$ のポントリヤギン環は n 個の元により生成される外積代数となっており、 Q_n のホモロジーはこの n 個の生成元に対応することが知られている。すなわち、 Q_n は $Sp(n)$ をホモトピー論的に生成する空間である。 i を、 Q_n を $Sp(n)$ に埋め込む包含写像とする。古典群の Samelson 積に関する結果はこれまで球面からの写像に関するものがほとんどであったが、主論文では i の Samelson 積 $\langle i, i \rangle$ の位数を上記の群 $[X, Sp(n)]$ の計算の応用として求めている。これにより、 $Sp(2)$ の 3 による局所化がホモトピー可換であるという C. A. McGibbon の結果の別証明を得ており、また、 n が小さいときには $\langle i, i \rangle$ が自明であることと $Sp(n)$ がホモトピー可換であることが同値であることを示した。その延長として、この結果が任意の n で成り立つという予想をたてている。

以上の結果はホモトピー論において極めて重要な内容であり、大学院在学 5 年未満であるが、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認めた。また、論文内容とそれに関連した諮問の結果合格と認めた。