京都帝國大學經濟學會

經濟論叢

第四十五巻　第二號

昭和十二年八月一日發行

大正四年六月二十一日第三種郵便物認可（毎月一回一日發行）

論叢

時論

研究

説苑

附錄

說苑

カレッキの數學的動態理論

青山秀夫

目次

今「マクロダイナミック」の標語の下に數學的方法の適用に於て、從來の景氣理論を淸算的に再編制し、理論を統計的驗證に耐へ得る形に於て展開する試みが爲されつつある。[1] これは恐らく數理經濟學の、而して經濟理論一般の劃期的進步を意味するものと見らるべきであらう。以下に於て紹介を試みんとする M. Kalecki の論文 "A Macrodynamic Theory of Business Cycles." は "Econometric Society" の第三次歐洲部會に於て讀まれ、雜誌 "Econometrica." Vol. III, No. 3.— July, 1935. に發表されたものであるが、それは異色ある數學的動態理論として吾々の注目に値する。

一

カレッキが考察の對象とするのは、孤立的にして長期變動なき經濟系（エコノミック・システム）であるが、それは次の方程式によつて近似的に表現されるものと考へられる。

第一。彼が問題とするのは資本家所得、その消費と貯蓄とへの振分け、それと關係する投資注文、生產高の變動であるが、彼は資本家（企業者及私的資本家）の實質所得全體（償却を含む）を「總實質所得」(real gross profit) と呼び之を B で表はす。[2] 此の所得は消費と貯蓄とに振分けられるが、先づ C を以て資本家消費に充てられる消費財總量を表す。次に勤勞階級の貯蓄並びにその資本家的所得を無視すれば、資本家の貯蓄（所得の非消費部分）は「固定資本の再生產及び擴張に使用される凡ゆる種類の資本財」プラス「在荷（ストック）の增分」に等しいが、これを「總蓄積」(gross accumulation) と呼んで A で表はす。從つて

(1) $B=A+C$

茲に彼は一の根本的假定を置く。卽ち、C は(1) constant な部分 C_1 と(2) B に比例する variable な部分（λ を比例常數とすれば λB）とに分れる。從つて

(2) $C=C_1+\lambda B;\ B=C_1+\lambda B+A$

(3) $B=\dfrac{C_1+A}{1-\lambda}$

となる。此の假定の結果たる(3)は B が C_1 プラス A に比例する（總所得の增分と貯蓄＝投資の增分とが比例するといつてもよからう！）ことを表はすが、後に重要な役割を演ずる。(10)を見よ。）定義によつて總蓄積 A は（資本財生產總額）プラス（凡ゆる種類の在荷（ストック）の增分）に等しい。[3] 今、景氣の循環を通じて在荷總量に變化なしとの假定をとり入れれば、[4] 先に凡ゆる在荷の增分

1) さしあたり、拙稿「景氣理論の統計的驗證」（日本統計學會年報第六年）を參照されたい。若干の文獻は以下で引用されるであらう。

2) 此の B は「或る時點の」それ或は「單位期間の」それであるとされてゐる。他の變數についても同樣であるが、數學的表現に適する爲には前者が、統計的驗證に耐へる爲には後者がとらるべきである。今の所此の惱みは未解決に屬する。

3) 未完成資本財 (industrial equipment in course of construction) は「凡ゆる種類

と云へるものは實は零であり、總蓄積 A = 資本財生產となる。然し此の關係は更に「懷姙期間」(gestation period) をとり入れて考へられねばならぬ。

第二。彼は投資の懷姙期間を問題にとり入れる。資本財の再生產又は擴張の計畫が樹立され注文が出されても、それが實際完成して引渡されるまでには相當時日を要する。此の期間、然もその社會的平均が所與であると假定し、これを θ で表す。しからば、明かに t 時點で引渡される完成資本財 (finished industrial equipment) は $t-\theta$ 時點に於て注文されたものである。依つて完成資本財引渡量を L、その注文量を I とすれば、

(4) $L(t)=I(t-\theta).$

ところで彼に於ては A と I、謂はば貯蓄と投資との關係は、各時點に於て等し $A=I$ と置かれずして、各單位期間に於て等し、とされる。卽ち彼は、注文されたが今の所生產中で未だ引渡されるに到らぬ資本財 (the total volume of investment orders at the moment t) に注目してこれを W で表す。明かに $t-\theta$ 時點以後注文されたもののみが、(而してその凡てが) t 時點に於て生產中であるから、

(5) $W(t)=\int_{t-\theta}^{t} I(\tau)d\tau.$

所で投資はそれが實現される迄に θ 期間要するから、此の W の θ 分の1だけ單位期間に生產活動を加へられることになる。卽ち單位期間當りの資本財生產は W/θ である。卽ち

(6) $A=\frac{1}{\theta}W,$

∴(7) $A(t)=\frac{1}{\theta}\int_{t-\theta}^{t} I(\tau)d\tau.$

かくて時點 t に於ける A は期間 $(t-\theta, t)$ 中に約定せられた投資注文 I の平均であり、當然 A は I に「遲れる」ことになる。5)

第三。彼は既成資本財總量 (the volume of the existing industrial equipment) の變動に注目し、此總量を K で表す。ところで $K(t)$ の increment = (the volume of deliveries of finished equipment) − (equipment coming

の stock」に含まれず、資本財生產に含まれる。後の W の定義を參照せよ。

4) 世界全體又は米國の如く孤立に近い經濟系を考へる。不況中は完製品ストックは多いが、半製品原料品ストックは少い。好況期は正に逆であるから、ストック全體にあつては變動は少い。これが假定の現實的根據である。

5) 實際この A は Frisch の所謂 "carry-on-activity" に全く同じい。Cf. R. Frisch; Propagation problems and impulse problems in dynrmic economics. Reprinted

out of use) である。(此の點重要である。) 從つてK'でKの導函數を、Uで消耗資本財修復の爲の需要（單位期間當りの固定資本償却量）を表せば、

$$(8)\quad K'(t) = L(t) - U.$$

彼は茲でUを常數と見るが、理由はかうである。——成程此の間Kは變動し、例へば景氣上昇期にはKは平均以上に上る(第三圖Iを見よ)が、添加された設備は若く "rate of morality" は極めて低く、又資本財の存續年限は景氣の週期より遙かに長いから、此の消耗消却の爲の需要の變動は無視して差支へない。

第四。投資活動は將來どれだけ純收益が得られるかの見込み (the expected net yield) に懸る。手續きを省略して簡單に云へば、既存の固定資本一單位當りの平均的總利潤B/Kと貨幣利子率pとに依つて投資量は定まる。此の關係を彼は

$$(9)\quad \frac{I}{K} = f\left(\frac{B}{K},\ p\right)$$

で表はす。ここで左邊に單なるIでなく、I/Kが現はれてゐるのは次の考慮による。今BとKとが同一歩調で

増加したとすれば、B/Kは不變だが、此際Iは増加せぬかといふに實際は然らず、夫故に此現實と一致する爲にはIのみをB/K及びpの函數と見るべきではない。尚fはB/Kの遞増函數、pの遞減函數である。

方程式(9)の意味するところは貨幣的景氣論の主張に近いが、彼は進んで「貨幣利子率pは總收益B/Kの遞増函數である」との假定によつて、I/KをB/Kのみの函數と見る。かくて貨幣利子率はその作用力を失ひ、既に注意した如くBは(C_1+A)に比例するから

$$(10)\quad \frac{I}{K} = \varphi\left(\frac{C_1+A}{K}\right)$$

を得る。φは勿論遞増函數である。

數學的動態理論にとつて重要なる closed system が以上で構成せられたが、此の方程式を解くことは、(10)がかゝる形では不可能である。此の目的より彼は「φはリネアルな函數である」と假定する。即ち

$$\frac{I}{K} = m\frac{C_1+A}{K} - n$$

と置く。これに於てm nは常數、然もmは正とする。(φは遞増函數であつた。)更に分母を拂つて(11)を得る。

from 'Economic Essays in honour of G. Cassel.' p. 12. 但しフリッシュでは此の「續行活動」と「貯蓄」とは無關係である。

I = investment orders

A = gross accumulation equal to the prodnction of capital goods

L = deliveries of industrial equipment

K = volume of the existing industrial equipment

表式を以て以上の要約に代へよう。これに於て未知數と方程式數とが一致してゐることに留意されたい。

$$
\begin{cases}
(4) & L(t)=I(t-\theta) \\
(7) & A(t)=\dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_{t-\theta}^{t} I(\tau)d\tau \\
(8) & K'(t)=L(t)-U \\
(11) & I=m(C_1+A)-nK
\end{cases}
$$

二

以上の變數の時の函數としての形を明かならしめるため、數學的操作を次の順序で行ふ。第一段、(4)(7)(8)(11)より L A K を消去して未知函數として $I(t)$ のみを殘す。第二段、定差方程式と微分方程式との混合形とでもいふべきものを、週期解を得るべく解く。第三段、特殊の場合について、initial interval に於ける函數の形から解を獨立ならしめる。

第一段。(11)を t に關して微分すれば、

$$(12)\quad I'(t)=mA'(t)-nK'(t)$$

(7)を t に關して微分すれば、

$$(13)\quad A'(t)=\frac{I-(t)I(t-\theta)}{\theta}$$

又(4)と(8)とより

$$(14)\quad K'(t)=I(t-\theta)-U$$

(12)に(13)(14)に於ける K' A' の値を代入すれば、

$$(15)\quad I'(t)=\frac{m}{\theta}[I(t)-I(t-\theta)]-n[I(t\theta)-U]$$

となる。これが目的とした方程式であつて、此中に懷姙期間が投資注文に及す作用が表現されてゐる。今

$$(16)\quad J(t)=I(t)-U$$

と置く。此の J は「投資注文の經常償却以上の超過或は不足」である。然るとき(15)は變形されて $J'(t)=\frac{\theta}{m}[J(t)-J(t-\theta)]-nJ(t-\theta)$ 或は

$$(17)\quad (m+\theta n)J(t-\theta)=mJ(t)-\theta J'(t)$$

なる稀らしい形の方程式、フリツシユの所謂 "Maxed Difference and Differential Equation" となる。[6] 彼に於ては、「此の方程式の解は $J(t)$ を t の函數として表現し得せしめ、吾々の經濟系に於ける內生的循環變動が何であるかを發見せしめる」と理解されてゐる。

第二段。此の樣な定係數の線形常微分定差方程式を解くには

6) R. Frisch and H. Holme; The characteristic solution of a mixed and differential equation occurring in economic dynamics. Econometrica, Vol. 3, No. 2, April, 1935. p. 225. 尙物理學ではかかる lag を difference としてでなく differeutial として取扱ふことが多い樣に思はれる。それゆゑにかかる形の方程式は稀である。

よく知られてゐる樣に、先づ式中の $f(t)$ を $De^{\alpha t}$ で置換して得た補助方程式を α について解かねばならぬ。但し D は任意常數、α は未定の常數である。かくて補助方程式として

(18) $D(m+\theta n)e^{\alpha(t-\theta)}=Dme^{\alpha t}-De^{\alpha t}$

i.e. (19) $(m+\theta n)e^{-\alpha\theta}=m-\alpha\theta$

を得る。(19)は、

(20) $m-\alpha\theta=z$. (21) $e^{-m}(m+\theta n)=b$.

と置けば、一層簡單に、

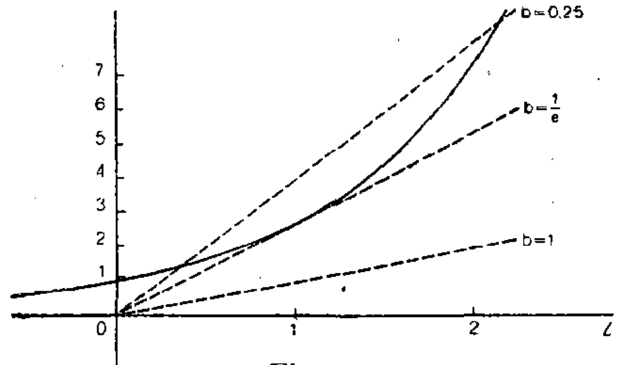

Fig. 1

(22) $be^z=z$ or $e^z=\frac{z}{b}$

となり、(18)の代りに(22)を解けばいいことになる。[7]

（Ⅰ） **實根の有無とbの値との關係。** (22)は $b\leqq\frac{1}{e}$ ならば實根をも有ち得、$b>\frac{1}{e}$ ならば複素數根しかもたない。このことは、z を實變數と看做して b の値の大小に從つて曲線 e^z と直線 z/b との交點（その橫座標は(22)の實根を示す筈だ）が如何に變るかを數へる第一圖によつて明かにされる。即ち $b=(1:e)\sim0.37$ に於て(22)は等根を持ち、$b<(1:e)$ ならば相異る實根を有し、$b>(1:e)$ に於ては實根はない。

（Ⅱ） **複素數根の分布。** 先づ(22)の複素數根を考へる爲に、$z=x+iy$ と置けば

(23) $\alpha=\frac{m-x}{\theta}-i\frac{y}{\theta}$ 〔(20)による〕

(24) $x+iy=be^x(\cos y+i\sin y)$ 〔(22)による〕

を得る。實數部分と虛數部分とを比較して

$$x=be^x\cos y;\ y=be^x\sin y$$

$$\therefore\ x=y/\tan y$$

即ち $$b\frac{\sin y}{y}=e^{-\frac{y}{\tan y}}$$

を得る。今此の最後の等式の兩邊の函數のグラフを描く。第二圖に於て右邊の函數のグラフは實線で示され、左邊の函數のグラフは點線で示されてゐるが、その際 b の三つの異る値に應じて曲線が描かれてゐる。いふまでもなく $y<0$ に於けるグラフは對稱的となるから不要である。

此の第二圖より次のことが知れる。(i) $y=2\pi, 4\pi, \dots\dots$ は兩曲線の交點であるが、そこでは $x=\infty$ となるから、その解は使用できない。(ii)圖に見る如く開區間 $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ …

7) 此の變換は實は問題を、既にティンベルゲンが解いた方程式に歸着せしめんが爲に行はれる。Vgl. J. Tinbergen: Ein Schiffbauzyklus? Weltw. Archiv, Bd. 34 Heft. 1, S. 152 ff. 以下しばらくは此論文による。

……に於て一個づつ解があり、從つてその解の數も無限に多い。(定差方程式であるから。)これを y_1 y_2 ……とすれば

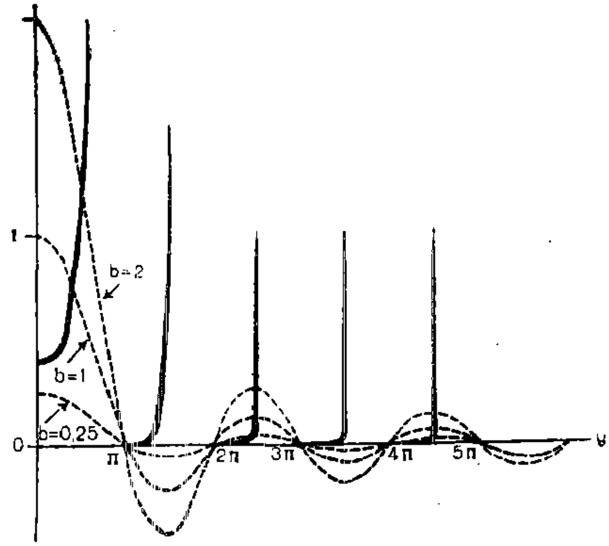

Fig. 2

$$(n-1)\pi < y_n < n\pi;\ y_1 < y_2 < y_3 < \cdots\cdots$$

である。(iii) $b \leqq (1:e)$ なるときは y_1 が存在しない。勿論 y_2 y_3 ……は存在する。(iv) y_k を b の函數と見れば b の遞增函數である。)

(Ⅲ) 第二圖より知られる如く(22)の根は無數に多いが、今既述の如く y_k を取つてこれを

$$\cdots\cdots x_k - iy_k,\ \cdots\cdots x_2 - iy_2,\ x_1 - iy_1,\ x_1 + iy_1,\ \cdots\cdots,\ x_k + iy_k \cdots\cdots$$

なる如く並べる。此際 (i) x_k, $y_k > 0$ (ii) $x_k + iy_k$ が(22)の根ならばそれと共軛なる $x_k - iy_k$ も亦その根であることに注意すべきである。かくて先づ(23)によつて

$$\alpha_k = \frac{m - x_k}{\theta} - i\frac{y_k}{\theta};\quad \alpha_{-k} = \frac{m - x_k}{\theta} + i\frac{y_k}{\theta}$$

を得、從つて

$$D_k e^{\alpha_k t} = D_k e^{(m - x_k)t/\theta}\left(\cos y_k \frac{t}{\theta} - i \sin y_k \frac{t}{\theta}\right)$$

$$D_{-k} e^{\alpha_{-k} t} = D_{-k} e^{(m - x_k)t/\theta}\left(\cos y_k \frac{t}{\theta} + i \sin y_k \frac{t}{\theta}\right),$$

なる週期函數は(17)を滿足する。一般解はよく知られてゐる樣に

$$J(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(D_k e^{\alpha_k t} + D_{-k} e^{\alpha_{-k} t}\right)$$

であるが、それは實變數の函數たるべきものであるから D_k と D_{-k} とは共軛であつて

$$(25)\quad J(t) = e^{(m - x_1)t/\theta}\left(F_1 \sin y_1 \frac{t}{\theta} + G_1 \cos y_1 \frac{t}{\theta}\right) + e^{(m - x_2)t/\theta}\left(F_2 \sin y_2 \frac{t}{\theta} + G_2 \cos y_2 \frac{t}{\theta}\right) + \cdots$$

となる。これに於て任意常數 F_i G_i は函數 $J(t)$ の最初の區間 (o, θ) に於ける形が與へられて始めて定まるのであるから、今の所函數 $J(t)$ の形について何事も語り得ない。

第三段。 (Ⅰ) $b > (1:e)$ の場合。第二圖と y_k の性質とから知られることであるが、$x_1 < x_2$; $x_1 < x_3$; ……… である。今(25)の右邊第一項を以て $J(t)$ を除してその商を $1+\varepsilon$ と置けば、此の性質より

(26) $\lim_{t\to\infty} \omega=0$

なることが證明される。從つて最初の區間より充分に遠い時點に於ては、

(27) $J(t)=e^{(m-z_1)t/\theta}\left(F_1 \sin y_1\dfrac{t}{\theta}+G_1 \cos y_1\dfrac{t}{\theta}\right)$

が近似解となる。これは明かに調和振動を示すが、その振幅は此の右邊の第一因子で定まり、$z_1>m$ ならば減衰振動が、$z_1=m$ ならば單一振動が、又 $z_1<m$ ならば非減衰振動が起ることになる。又周期 y_1 は $0<y_1<\pi$ であつたから、$T=\dfrac{2\pi\theta}{y_1}>2\theta$ 即ち懷姙期間の二倍より尙長いことになる。かくて振動の周期及び振幅の變化は最初の區間に於ける函數の形から自由となつた。

更に亦簡單の爲原點を $[J(t)]_{t=0}=0$ なる如くとれば、(16) を參照して

(28) $I(t)-U=F_1e^{(m-z_1)t/\theta} \sin y_1\dfrac{t}{\theta}.$

(Ⅱ) $\theta\leqq(1:e)$ なる場合には、實數根（それを z_1' z_1'' とする）が存在し、$t\to\infty$ の所では

$$J(t)=D_1'e^{(m-z_1')t/\theta}+D_1''e^{(m-z_1'')t/\theta}$$

が解となり、非週期運動しか示さない。

要約。 (i) 吾々の經濟系內部に周期的振動が存在する爲には、

(29) $m+\theta n>e^{m-1}$ 〔(20) 參照。〕

なることを要する。$m>0$ であるから、(29) 成立の爲には $m>0$ なることが充分ではないが必要である。(ii) 最初の區間から充分遠い所では I の振動は (28) で與へられ、振幅の減增は $z_1\gtreqless m$ に應じて定まる。

三

以上に得た結果を現實に適用して假設的構想を驗證し、經濟學的意味を明かにすることが、今殘されてゐる問題である。

此の研究に當つてカレッキは

(30) $z_1=m$

即ち振幅が定常なる單一振動 (simple harmonic motion) の場合を選んだ。勿論これは經濟系內部に振動を減衰せしめ以て安定均衡を成立せしむべき要素が存在せぬと假定することを意味するものに他ならぬが、然しそれにも拘はらず、彼にあつては「此の場合は現實の狀態に最も近いから最も重要である」實際吾々は振幅の增減を見ない、といふ理由から此の假定が正當視されるのである。さて此の場合には、直ちに計算の結果として次式を得る。

$$(31)\quad I(t)-U=a\sin y_1\frac{t}{\theta},\qquad\text{〔(28)による〕}$$

$$(32)\quad A-U=a\frac{\sin\frac{y_1}{2}}{\frac{y_1}{2}}\sin y_1\frac{t-\frac{\theta}{2}}{\theta},$$

〔(31)を(7)に代入して積分する〕

$$(33)\quad L-U=a\sin y_1\frac{t-\theta}{\theta},$$

〔(31)を(4)に代入する〕

$$(34)\quad K-K_0=-a\frac{\theta}{y_1}\cos y_1\frac{t-\theta}{\theta}.$$

〔(8)と(33)とより $K'(t)$ を求め積分する、これに於て K_0 は積分常數である〕

今や、若し y_1 の値が與へられるならば、從つてその爲に m n の値が與へられるならば、I A L K などの函數は t の函數としてその形が確定され得よう。しからば此の m n y_1 などの數値は如何にして與へられるか。それは單純になまの構造係數としては與へられない。彼はその算出の爲に次式を利用する。先づ(30)(21)(24)より

$$(35)\quad \cos y_1=\frac{m\theta+n}{m};\qquad (36)\quad \frac{\tan y_1}{y_1}=m$$

を得る。更に同一週期の單一振動が問題であるから、I 及び A の一週期當りの平均値は U に等しく、從つて此限に於て(11)は $U=m(C_1+U)-nK_0$ と書改められる。從つて、

$$(37)\quad n=(m-1)\frac{U}{K_0}+m\frac{C_1}{K_0}$$

吾々はここに三個の係數 m n y_1 に對して(35)(36)(37)の三箇の條件式を得た。ところでこれに於て、先づ θ は懐姙期間でなまの構造係數として一應問題はない。K_0 は、今は K の單一振動が考へられてゐるから、K の一週期當りの平均量である。(第三圖を見よ。) 從つて U/K_0 は固定資本償却率に他ならぬ。又 C_1 は資本家消費の恒常部分であるから、C_1/K_0 は大體知り得る。かくて m n y_1 の數(35)(36)(37)より知られることになる。

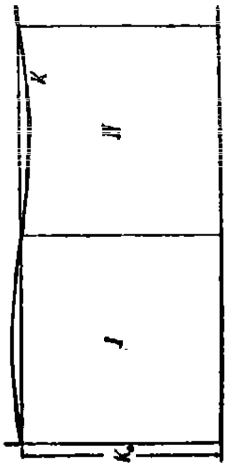

Fig. 3

(i) $\theta=0.6$年。伯林景氣研究所の調査によれば、建築業の着手の曲線と完成の曲線とのラグは約八ヶ月、機械製造業では

上記の如くにして定められた數字を(35)(36)(37)に代入して今、

$$m=0.95\,;\ n=0.121\,;\ y_1=0.378.$$

$$T=\frac{2\pi}{y_1}\theta=\frac{2\pi}{0.378}\times 0.6=10.0$$

を得る。これに於て注意すべきは此の十年といふ週期である。此結果は現實との高度の一致を示すものであるが、彼は、以上の構造係數の計算は不正確であり「理論と現實との相似は偶然の一致に過ぎぬ」といふ非難を恐れて、それに答ふべく、そのさまざまの値に應ずる週期の大さを研究して上掲の表を作成する。

θ	$\frac{U}{K_0}$	$\frac{C_1}{K_0}$	T
0.6	0.05	0.13	10.0
0.6	0.03	0.13	10.0
0.6	0.07	0.13	10.0
0.6	0.05	0.07	13.2
0.6	0.05	0.19	8.5
0.3	0.05	0.13	7.2
0.9	0.05	0.13	12.5

これによつて「循環の週期は現實では八年から十二年の間であるから、θ U/K_0 C_1/K_0 の評價が不精確であると否とに拘はらず、吾々の理論と現實との間にはそんなに酷い不調和はないと云へよう、」と主張する。

注文から完成までのラグは約六ケ月である。これを基礎とする。

(ii)　$U/K_0=0.05$.　獨乙の資料では償却と國民所得との比率が約八%、米國(一九二三年)では、固定資本總額(土地を除いて)120×10^9國民所得總額 70×10^9 從つて $0.08\times\frac{70}{120}\sim0.05$ といふ結果に達する。

(iii)　$C_1/K_0=0.13$.　これは最も問題の多い點であらう。先づ既述の如く米國(一九二三年)では $K_0=\$\,120\times10^9$ ところでキングの計算によれば、米國(一九〇九―一九一八)の年當りの利潤總額及び總資本增加額は、夫々一九一三年の購買力で測つて、$\$\,16\times10^9$ 及び $\$\,5\times10^9$ である。(勤勞階級のものが入つてゐるが、それは兩方に含まれるから差引すれば消える。)かくて上記の資本家消費 C に相當するのは差引き $\$\,11\times10^9$ である。然るに此の期間の年當りの國民所得は、同じく戰前の購買力で、$\$\,36\times10^9$ であるから、資本家消費が國民所得で占める割合は約三割となる。從つて國民所得 $\$\,70\times10^9$ の一九二三年に於て $C=\$\,21\times10^9$ となる。然し問題は此年の C_1 にあるが、ここで彼は B の二〇%の增加は C の五%の增加しかもたらさぬ、即ち C は B の四分の一しか增加しない、と假定し、從つて(と彼は結論する) $C_1=\frac{3}{4}C$ 故に今の場合資本家消費不變部分は $\$\,21\times10^9\times\frac{3}{4}=\$\,16\times10^9$ 依つて亦 $C_1/K=16/120\sim0.13$ といふ結果を出す。(假定と結果との關係は必ずしも明瞭でないが、ここでは默認して次に進まう。)

さて $\theta=0.6\,;\,y_1=0.378$ を(31)(32)(33)(34)に代入すれば、(振幅の決定を度外視する限り) 景氣變動の理論的圖式を示す方程式が得られ、更にそれより均衡水準からの偏差を示す次式を得る。

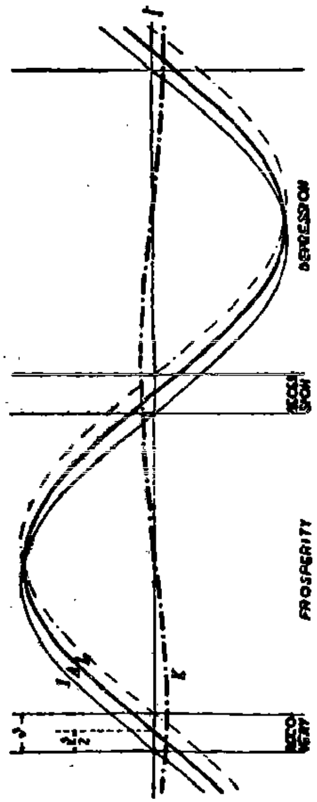

Fig. 4

$$(38)\quad \frac{I-U}{U}=\frac{a}{U}\sin 0.63\,t$$

$$(39)\quad \frac{A-U}{U}=\frac{a}{U}0.98\sin 0.63(t-0.3)$$

$$(40)\quad \frac{L-U}{U}=\frac{a}{U}\sin 0.63(t-0.6)$$

$$(41)\quad \frac{K-K_0}{K_0}=-\frac{a}{U}0.08\cos 0.63(t-0.6)$$

$\left[\frac{U}{K_0}=0.05\right.$ による。$\left.\right]$

第四圖はそのグラフであつて中央の直線は均衡水準(U及びK_0)を示してゐる。

今や吾々は(4)(7)(8)(11)で理論的に規定したところの經濟的數量(但し macroscopic な考察であるから總量がとられてゐるが)の相互依存關係(但し macrodynamic であるから非同時的・異時的相互依存關係も含まれてゐるが)を、構造係數の現實の數値に從つて、現實化することに成功したと云へよう。即ち、景氣の各段階に於ける變數の變動の姿は圖に見られる如くであつて說明不要であるが、此等の變動そのものの・此等の曲線そのものの間の關係が(4)(7)(8)(11)に規定されたところに從つてゐることは當然とは云へ注意に値する。(i) I A L の曲線はラグを置いて動くがそれは(4)及び(7)に規定されたところであつた。(ii)現存資本設備Kが增加しつつあるか減少しつつあるかは、$L\gtreqless U$ に(即ち資本設備引渡量が經常的償却の爲の需要を超えるかどうかに) かかる。Lが水準を突破して上へ出る點(恢復の終り)に於てKは極小であり、それが水準を破つて下降し始める點(衰頽の終り)でKは極大に達する。茲で注意すべきは、此迄の方程

式(4)(7)(8)では或る量が進み過ぎると他の量が逆に反作用してその增加を抑制する關係は現はれてゐないことである。例へば曲線Aが何らかの仕方で常に上昇する如く與へられたとすれば、それに併行して凡ての曲線が限りなく上昇を續けることになり振動は最早現はれぬであらう。然し(iii)方程式(11)によれば、既存設備Kの增加は逆に投資注文Iの增加を抑制する。(IはAの增加と共に增加しKの增加と共に減少にする。)Kが餘りにも大となるときはIは水準以下に下り出す。(衰頽)。又逆にKが餘りに少いときはIは(Aが水準下でも)償却需要以上に出る。(恢復。[9]) 此際先に$m<0$が必要である(さうでなければ振動が生ぜぬから)とされたことが併せて想起されねばならぬ。

第四圖に於て以上の展開の成果が集中的に表現されたが、そこに描かれた機構は今說明された如くである。これに於て投資と見込み利潤との同時的相關關係を規定する方程式(11)の重要性、及び構造係數(なまのままでなく變形されてゐるが)の數値が振動に及ぼす影響力を看取すべきである。然しその故に(4)(7)(8)の意義を無視することは許されぬ。なぜなれば、そこでは經濟的數量相互間の相互依存關係、然かも異時的相互依存關係が規定されて居り、此の異時的相互依存關係なくしては(吾々のシステムには二次以上の微係數は現はれてゐない)、定差方程式なくしては、複素數根に應ずる週期解なくしては、求める正弦波は現はれ得ないからである。此の點に於て第二節の數學的操作は重要なる經濟學的意味を有つてゐる。

附記。 以上を以て此の冗長な紹介を終る。*1.* 價格を無視して財の世界だけでシステムをつくつたこと、[10] *2.* 資本財生產のみ需要を中心にシステムを形成したこと、*3.* ヤ→δ によつて多くの波動中の唯一つの波動だけを取出して、然も單一振動を假定したこと、[11] などに於て異色を見出し得ると共に、總蓄積Aの定義及び(7)に於けるその規定は果して經濟的現實に照應するかどうかに疑問が存在し得るが、此等の省察[12]は別の機會に讓られねばならぬ。

9) 此の點に Tinbergen は疑問をもつ Cf. Tinbergen; Annual survey, Suggestions on quantitative business cycle theory. Econometrica, Vol. 3, No. 3, p. 269.

10) 反之 Tinbergen は價格中心的であつた。 Vgl. Tinbergen; Der Einfluss von Kaufkraftregulierung auf den Konjunkturverlauf. Zeitschrift für Nationalökonomie, Bd. V, Heft 3. S. 289. 又既に注意した如く同一方程式を有つ Frisch では »encaisse désirée« に "a tension which counteracts further expansion" が求められてゐる。即ち消費方程式が(11)の代りの役割を演ずる。 上揭拙稿九六頁前後參照。

11) Cf. Frisch; Characteristic solution etc.

12) 既述の Tinbergen, Frisch の他に Theiss の試みも注意に値しよう。Cf. E. Theiss; Dynamics of saving and investment. Econometrica, Vol. 3. No. 2.