經濟論叢

第八十一巻　第六號

昭和三十三年六月

京都大學經濟學會

第八十一巻　三九二　第六号　五六

代替定理について

森口親司

は し が き

W・レオンチェフが始めた投入産出分析において全ての投入係数はそれぞれ固定したものと見なされるが、この仮定はレオンチェフ自身では単に一般均衡理論の現実への近似的適用という観点からなされたと思われる。しかしこの見解を離れて、投入係数一定の仮定を理論的に正当化しようとする試み（あるいはこの仮定の射程を見きわめる試み）が行われ、その成果は通常代替定理と呼ばれている。この場合、代替定理を伝統的な生産の均衡理論から導き出す方式と、アクティビティ・アナリシスの理論から導き出す方式とがある。この小論では、第一の方式に従って導かれる代替定理が考察の対象である。[1)]

小論の目的は二つある。第一はサミュエルソンの導いた代替定理がワルラス的均衡で妥当するものであることを明示すること、第二は、森嶋教授の導かれた代替定理を検討して、若干の修正を行うことこれである。

(1) 第一の方式に従って考察したものにはサミュエルソン〔8〕、森嶋〔7〕があり、第二の方式に従ったものとしては、アロー〔1〕、ジョルジュスクレーゲン〔2〕、古谷〔3〕、クープマンズ〔5〕〔6〕がある。アクティビティ・アナリシスでの代替定理は既に完結した形を

備えていて、特に言及すべき点はないように思われる。

I　サミュエルソンの証明とその図解

順序として、サミュエルソンの導いた代替定理を述べる。$x_1 \cdots x_n$を財$X_1 \cdots X_n$の生産量、$C_1 \cdots C_n$を最終需要量とする。X_{n+1}を（生産によって増加させることのできないという意味で）根源的生産要素とする。各財の生産量と投入量との関係は

(1·1)　$x_i = f_i\,(x_{i1}, \cdots x_{ii}, \cdots x_{in}, \cdots x_{i,n+1})$　$(i=1,\cdots\cdots,n)$

なる一次同次の生産函数で与えられる。x_{ij}はx_iの生産に用いられる財X_jの投入量である。投入量は負値を与えられる。[1] 結合生産物は考慮されない。長期的均衡を問題とするから、(1·1)で与えた生産函数をX_i産業全体のものとみなすことができる。最終需要量C_iに対して、$f_i(x_{i1}, \cdots x_{i,n+1}) + \sum_{j=1}^{n} x_{ji}$ なる純産出量が見合わなければならない。

さて、均衡では、生産が社会全体として有効に[2]（efficient）行われていなければならぬということから[3]、サミュエルソンは次のように問題を設定する。[4] $C_2 \cdots C_n$が与えられる時X_1産業は

$$\bar{C}_i = f_i(x_{i1} \cdots x_{in}, x_{i,n+1}) + \sum_{j=1}^{n} x_{ji} \qquad (i=2,\cdots\cdots,n)$$

又$\bar{C}$,　$-\bar{x}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} x_{j,n+1}$

なる制限条件の下で、$f_1(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1,n+1}) + \sum_{j=1}^{n} x_{j1}$ を最大にするような生産を行わなければならぬ。問題は条件附き極大の問題となり、ラグランジュの乗数を$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}$とすると

(1·2)　$\lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial x_{ij}} + \lambda_j = 0$　$(i=1,\cdots\cdots,n.\ \ j=1,\cdots\cdots,n+1)$

を得る。$\lambda_1 \cdots \lambda_{n+1}$を消去し、更に簡単な演算によって、次の$n^2$コの式を得る。

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{11}} = -1$$

(1·3)　$\frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_{i1}}=1$　$\frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_{i2}}=-\frac{\partial f_1}{\partial x_{12}},\cdots\cdots,\frac{\partial f_i}{\partial x_{ii}}=-1,\cdots\cdots,\frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_{i,n+1}}=-\frac{\partial f_1}{\partial x_{1,n+1}}$　$(i=2,\cdots\cdots,n)$

制限条件として与えられたnコの式と合わせて、方程式の数は(n^2+n)コとなり未知数$x_{ij}(i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,n+1)$の数と一致する。

ところで、よく知られているように一次同次函数の第一次偏導函数は零次同次函数である。そこで$y_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_{i,n+1}}$　$(i=1,\cdots,n.\ j=1,\cdots,n)$とおいて見る。偏導函数$\frac{\partial f_i}{\partial x_{ij}}$は$x_{ij}$$(j=1,\cdots,n+1)$の相対的な比率が一定であるかぎり一定である。つまり$y_{ij}$$(j=1,2,\cdots,n)$が一定であれば一定である。$\frac{\partial f_i}{\partial x_{ij}}$は生産の規模とは関係なく、生産要素間の結合比率の函数なのである。従って(1·3)の方程式だけでも、n^2コの未知数y_{ij}を決定することはできる。

以上の推論の過程を見れば明らかなように、方程式(1·3)は制限条件として、$C_2\cdots C_n$或いはx_{n+1}にどのような値を与えようと変りがない。y_{ij}の値は、それらの大きさと関係なく、生産函数f_iの形状から、従って、与えられた技術の状態からだけで決まっていることが分る。他方、生産の均衡条件から、各財の相対価格も決定される。

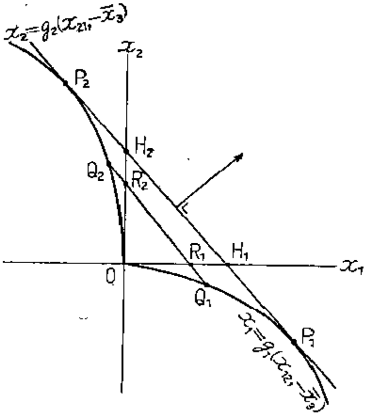
このようにして、生産要素間に代替の可能性があるにもかかわらず均衡状態では常に一定の結合比率、従って一定の投入係数だけが存在し、代替の可能性は可能性であるにとどまる。これがサミュエルソンの証明した代替定理である。これを二生産物の簡単な場合について図解しよう。自家消費を控除した、次のような生産函数を考える。[5]

(1·4)　$x_1=g_1(x_{12},x_{13})$　$x_2=g_2(x_{21},x_{23})$

これらも又一次同次である。X_3を根源的生産要素とし、今$\bar{x}_3$が与えられたとする。二次元の直角座標の横軸にx_1を、縦軸にx_2を取る。$x_1=g_1(x_{12},-\bar{x}_3)$及び$x_2=g_2(x_{21},-\bar{x}_3)$のグラフは夫々第二象限、第四象限に描かれる。曲線は、限界変形率逓減という性質に従って図のような形をとる。曲線$x_1=g_1(x_{12},-\bar{x}_3)$及び$x_2=g_2(x_{21},-\bar{x}_3)$上に夫々点$Q_1$及び点$Q_2$をとり、座標を夫々$(g_1,x_{12})$$(x_{21},g_2)$とする。直線$Q_1Q_2$と横軸との交点を$R_1$縦軸との交点を$R_2$とする。点$Q_2$或いは$Q_1$に対応して、各産業での投入係数がき

まる。即ち生産方法がきまる。投入係数は点Q_1及びQ_2が曲線上を動くにつれて変化する。そこでわれわれは、アクティビティ・アナリシスで用いられている意味での一つの生産プロセスを曲線上の点Q_1及びQ_2に夫々対応させることができる。函数g_1及びg_2が一次同次であるからこのように考えても矛盾を生じない。

二つの産業が夫々Q_1Q_2に対応する生産プロセスを採用する時、$-\bar{x}_3$なる純投入量によって得られるX_1X_2の純産出量の組合わせは線分R_1R_2上の点であらわされる。或いはプロセスOQ_1とOQ_2との凸一次結合であらわされると云ってもよいだろう。



第一図

ところで、$-\bar{x}_3$なる生産要素を有効に使用しているためには、線分R_1R_2の右上の点であらわされる純産出量の組合わせが$-\bar{x}_3$なる純投入量によってはもはや獲得できないというのでなければならない。第一図でのR_1R_2なる線分はそのような条件をみたしていない。図から直ちに分るように、二曲線$x_1=g_1(x_{12},-\bar{x}_3)$, $x_2=g_2(x_{21},-\bar{x}_3)$に同時に接するように直線をひき、接点を$P_1$及び$P_2$とし、又線分$P_1P_2$と横軸及び縦軸との交点をそれぞれ$H_1$及び$H_2$とする時、線分$H_1H_2$が右の条件を満足している。線分$H_1H_2$の右上方の点であらわされる純産出量を得るにはもはや$-\bar{x}_3$なる純投入量では不足しており、H_1H_2の左下方の点であらわされる純産出量を得るには$-\bar{x}_3$の純投入量を必要としない。

さて任意に選んだ線分R_1R_2がH_1H_2に一致するための条件を解析幾何学の初歩的な知識を利用して求めよう。点(g_1,x_{12})及び(x_{21},g_2)を通る直線の方程式は次の通り。

$$x_2-g_2(x_{21},-\bar{x}_3)=\frac{g_2(x_{21},-\bar{x}_3)-x_{12}}{x_{21}-g_1(x_{12},-\bar{x}_3)}(x_1-x_{21}) \tag{1·5}$$

x_2軸の切片の長さは、次のように与えられる。

$$x_2 = \frac{x_{11} - g_2(x_{21}, -\bar{x}_3)}{x_{21} - g_1(x_{12}, -\bar{x}_3)} x_{21} + g_2(x_{21}, -\bar{x}_3) \qquad (1 \cdot 6)$$

点Q_1及びQ_2が夫々点H_1及びH_2に一致するには次の二つの条件が必要かつ充分である。(1)点Q_1及びQ_2での夫々の曲線の接線の勾配が相等しい。(2)直線 Q_1Q_2 で切られるx_2軸の切片の長さが極大である。[6)]

(1)から直ちに $\frac{\partial g_1}{\partial x_{12}} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_{21}} = 1$ を得る。

(2)の条件に従って (1·6) をx_{12}で微分し、$\frac{\partial x_2}{\partial x_{12}} = 0$ から、$\frac{\partial g_1}{\partial x_{12}} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_{23}} = -\frac{\partial g_1}{\partial x_{13}}$ を得る。[7)]

自家消費をインプリシットに考慮している点に注意すれば、今導いた二つの方程式が、(1·3) と同じものであることが確かめられる。

以上のようにして$\bar{x}_3$が与えられるとそれに対応するX_1X_2二財の純産出量の有効な組の集合が定まりこれは直線である。これをX_1X_2の有効なフロンティアと呼ぶことにしよう。有効なフロンティアが直線（生産物がn種類の時には有効なフロンティアは$(n-1)$次元の超平面）になるという事実、及びX_1及びX_2の相対価格がこのフロンティアの正の法線ベクトルの勾配で与えられ、フロンティア及びこの法線ベクトルの夫々の勾配はx_3（n生産物の場合には$\bar{x}_{n+1}$）の与え方には関係しないという事実、これが代替定理の基本的な内容である。実際、生産の均衡点では、$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\partial g_1}{\partial x_{12}} \Big/ \frac{\partial g_2}{\partial x_{21}}$ という条件がみたされていなければならない。この時、$\frac{p_2}{p_1}$なる勾配をもつ直線はフロンティア H_1H_2 と直交していることは第一図で明らかである。

(1)　サミュエルソン〔8〕では投入量をプラスで扱っている。本節では以下の分析との関係でマイナスとして扱う。断わるまでもなくこれは分析の便宜上の問題で分析の内容に影響はない。

(2)　〃有効〃という言葉の定義はクープマンズ〔4〕で与えられている。以下では、この定義に従う。

(3)　勿論資本主義経済組織下の各企業の生産活動が、常に全体として資源の有効な使用を保証するものではない。この点につい

て森嶋〔7〕で厳しい批判がなされている。Ⅱ節では、この点について考察する。

(4) 問題を次のように設定しよう。$C_1 C_2 \cdots C_n$を与え、その制限のもとに$\sum_{j=1}^{n} x_{j,n+1}$を（代数的に）最大にする。この問題を解くことによってやはり同一の結果を得る。資源の有効な利用という意味は、このように設定された問題を考察することによって一層はっきりするように思われる。

(5) 自家消費について次の点を指摘しておくことは無意味ではないと思われる。$x_1=f_1(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1,n+1})$で$x_{12}$から$x_{1,n+1}$までそれぞれ或る値を与えた時、$x_{11}$は、$x_1+x_{11}=f_1(x_{11}, \bar{x}_{12}, \cdots, \bar{x}_{1,n+1})+x_{11}$を最大にするようにきめられる筈である。$x_1=f_1(x_{11}, \bar{x}_{12}, \cdots, \bar{x}_{1,n+1})$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_{11}}=1$ とからx_1とx_{11}とは決定される。更に$\frac{\partial f_1}{\partial x_{11}}=1$を利用して$x_{11}$を消去し、$x_1=g_1(\bar{x}_{12}, \cdots, \bar{x}_{1,n+1})$という自家消費を控除した後の関係を得る。$g_1$が一次同次であることは簡単に分る。他方、例えば、$x_{12}$以外の投入量を与えても、$x_1=f_1(\bar{x}_{11}, x_{12}, \bar{x}_{13}, \cdots, \bar{x}_{1,n+1})$だけからは$x_2$も$x_{12}$もきまらない。この点に自家消費の特殊な性質が見られる。

(6) x_2切片が最大になることとx_1切片が最大になることとは同値である。どちらを選んでもよい。

(7) 又 $\frac{\partial x_2}{\partial x_{11}}=0$ と $\frac{\partial x_2}{\partial x_{12}}=0$ とは、条件(1)がみたされる限りで同値な関係にある。

Ⅱ　ワルラス的均衡で代替定理はなりたつ

森嶋教授はサミュエルソンの証明した代替定理で、資本主義経済での各企業が利潤率極大をめざして行動するということが、明示的に考慮されていないという理由で、これをしりぞけられた（森嶋〔7〕）。しかし、これをしりぞけてしまう前に、サミュエルソンの証明が、この企業の行動原理とどういう関係にあるのかということを考察するのが常道だと思われる。

前と同様に一次同次の生産函数を考える。考察されるのは個々の投入量ではなく投入係数であるから以下の分析では、

$$(2\cdot1)_i \qquad 1=f_i(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{i,n}, x_{i,n+1}) \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

を考える。各財の価格を$p_1\, p_2 \cdots p_n\, p_{n+1}$とする。

各企業は利潤率極大（従って平均生産費極小）をめざしているのであるから均衡では、次の式が成り立っていなければならない。

$$(2\cdot2)_i\qquad \frac{p_i}{p_{n+1}}=\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{1,n+1}}}=\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{2i}}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{2,n+1}}}=\cdots\cdots=\frac{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_{ni}}}{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_{n,n+1}}}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

次に、自由競争下の長期的均衡を仮定し、均衡では超過利潤はゼロとなり、従って、価格と平均生産費とが一致するとしよう。

即ち

$$(2\cdot3)_i\qquad -p_i=\sum_{j=1}^{n+1}p_j\,x_{ij}\qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

以上（2·1）（2·2）（2·3）の方程式が分析の出発点である。

同次函数についてのオイラーの定理によって（2·1）はそれと同値な次の式でおきかえられる。

$$(2\cdot1)'_i\qquad 1=\frac{\partial f_i}{\partial x_{i1}}x_{i1}+\frac{\partial f_i}{\partial x_{i2}}x_{i2}+\cdots\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial x_{i,n+1}}x_{i,n+1}\qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

$(2\cdot3)_i$ 式の両辺を p_{n+1} で割り、$(2\cdot2)_i$ に従って、価格比を偏導函数の比でおきかえると、

$$(2\cdot4)_i\qquad -\frac{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{ii}}}{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i,n+1}}}=\frac{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i1}}}{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i,n+1}}}x_{i1}+\frac{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i2}}}{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i,n+1}}}x_{i2}+\cdots\cdots+\frac{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{in}}}{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i,n+1}}}+x_{i,n+1}\qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

これを $(2\cdot1)'_i$ と比較することによって

$$(2\cdot5)_i\qquad \frac{-1}{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i,n-1}}}=\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{1,n+1}}}=\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{2i}}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{2,n+1}}}=\cdots\cdots=\frac{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{ii}}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{i,n+1}}}=\cdots\cdots=\frac{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_{ni}}}{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_{n,n+1}}}\qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

これから直ちに次式を得る。

$$(2\cdot6)_i \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_{ii}}=-1 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

更に、$(2\cdot5)_1$ の各項を $(2\cdot5)_i$ の対応する夫々の項でわることによって次の式を得る。

$$(2\cdot7)_i \qquad \frac{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i,n+1}}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{1,n+1}}}=\frac{-1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}}=\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{21}}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{2i}}}=\frac{\dfrac{\partial f_3}{\partial x_{31}}}{\dfrac{\partial f_3}{\partial x_{3i}}}=\cdots\cdots=\frac{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i1}}}{-1}=\cdots\cdots=\frac{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_{n1}}}{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_{ni}}} \qquad (i=2,\cdots\cdots,n)$$

この関係から次の式を得る。

$$(2\cdot8)_i \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_{i1}}=1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}\,\frac{\partial f_i}{\partial x_{i,n+1}}=-\frac{\partial f_1}{\partial x_{1,n+1}} \qquad (i=2,\cdots\cdots,n)$$

こうして得た $(2\cdot6)_i$, $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 及び $(2\cdot8)_i$, $(i=2,\cdots\cdots,n)$ はサミュエルソンが導いた方程式 $(1\cdot3)$ の一部分である。残りの部分も、関係式 $(2\cdot5)_i$ と $(2\cdot7)_i$ から先と同様に単純な演算の繰り返しによって得ることができるから省略する。

われわれは、一次同次の生産函数を仮定したワルラス的均衡体系から出発して、他に何の仮定をも置くことなしにサミュエルソンの方程式系 $(1\cdot3)$ に到達することができた。このことは、ワルラス的均衡に対応する方程式 $(2\cdot1)_i$, $(2\cdot2)_i$ $(2\cdot3)_i$ の解がサミュエルソンの導いた方程式 $(1\cdot3)$ をみたし、又逆も、一次同次の生産函数を仮定する限りにおいて、真であることを保証する。従って、均衡においては経済全体として資源を有効に利用していなければならないと仮定して代替定理を導いたサミュエルソンの考え方は、均衡において利潤率が零となる完全競争下の長期的均衡を仮定して代替定理を導く考え方と本質的に同じである。サミュエルソンの代替定理は、その証明で資本主義経済での企業の行動原則を明示的には考慮していないけれども、一次同次の生産函数を仮定したワルラス的体系での代替定理としては、これを受け入れることができよう。

Ⅲ　資源の最適利用と完全競争下の均衡

Ⅰ、Ⅱでの分析の結果を利用して、資源の最適利用の問題を考察することができる。[1] ワルラス的均衡では、有効なフロンティアの上で生産が行われ、資源が最適に利用されていることが明示された。しかし、現実との関連で、この命題は語るべきものを殆んどもっていない。そこで、一歩進んで、均衡において正の超過利潤が存在するモデルを考察することにする。考察に先き立って、コンシステントなモデルを構成することが何よりも必要なことであるが、ここでは森嶋〔7〕第四章におけるモデルで考えることにする。しかも、超過利潤率（以下簡単に利潤率と呼ぶ）がいかに決定されるかを問わず[2]、比較静学的に、利潤率をパラメターとして、投入係数及び相対価格の動きを考察することだけに問題を限定する。

利潤率 r が与えられた時、均衡においては次の方程式がなりたたねばならない。

$$(3\cdot1)_i \qquad 1=f_i(x_{i1}\cdots x_{in},\ x_{i,n+1}) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

$$(3\cdot2)_i \qquad \frac{p_i}{p_{n+1}}=\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{1,n+1}}}=\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{2i}}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{2,n+1}}}=\cdots\cdots=\frac{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_{ni}}}{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_{n,n+1}}} \qquad (i=1,2\cdots\cdots,n)$$

$$(3\cdot3)_i \qquad p_i=(1+r)\sum_{j=1}^{n+1}p_j\,x_{ij} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

r が正であるならば、この方程式の解は、Ⅰ、Ⅱで得た均衡解とは異る筈である。$\bar{x}_{n+1}$ に対応する生産のフロンティアも異るし、又そのフロンティアの正の法線ベクトルの方向余弦も異なるであろう。投入係数及び相対価格の変化の方向は利潤率 r の大きさとどのような関係にあるであろうか。

$n=2$ という単純な場合には明確な結論を得ることができる。自家消費を背景に押しやって、$x_1=g_1(x_{12},x_{13})$, $x_2=g_2(x_{21},x_{23})$ なる生産函数を導入する（Ⅰの註(5)参照）。このように単純化すると方程式 $(3\cdot1)_i$, $(3\cdot2)_i$, $(3\cdot3)_i$ は次のようになる。

$$(3\cdot1') \qquad 1=g_1(x_{12},x_{13}),\quad 1=g_2(x_{21},x_{23})$$

(3·2′)　$\frac{p_1}{p_3}=\frac{\partial g_2}{\partial x_{21}}\Big/\frac{\partial g_2}{\partial x_{23}}$　　$\frac{p_2}{p_3}=\frac{\partial g_1}{\partial x_{12}}\Big/\frac{\partial g_1}{\partial x_{13}}$

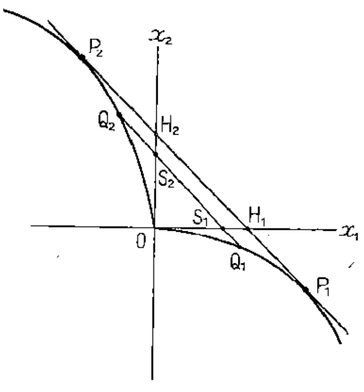
(3·3′)　$-p_1=(1+r)(p_2x_{12}+p_3x_{13}),\quad -p_2=(1+r)(p_1x_{21}+p_3x_{23})$

これより次の方程式を得る。

(3·4)　$\frac{p_1}{p_3}=\frac{\frac{\partial g_2}{\partial x_{21}}}{\frac{\partial g_2}{\partial x_{23}}}=\frac{1+r}{\frac{\partial g_1}{\partial x_{13}}},\quad \frac{p_2}{p_3}=\frac{\frac{\partial g_1}{\partial x_{12}}}{\frac{\partial g_1}{\partial x_{13}}}=\frac{1+r}{\frac{\partial g_2}{\partial x_{23}}}$

(3·1′) と (3·4) とによって、$\frac{p_1}{p_3}$、$\frac{p_2}{p_3}$、x_{12} x_{13} x_{21} x_{23} は決定される。これらの解と r との関係はどうか。紙数の関係で分析の詳しい報告をすることができないので、結果だけを示すと次の通りである。

r が増加するにつれて、x_{13} と x_{23} の絶対値は大きくなり、x_{12} と x_{21} の絶対値は小さくなる。それにつれて、相対価格 $\frac{p_1}{p_3}$ 及び $\frac{p_2}{p_3}$ は共に上昇する。[3)]



第　二　図

この結果を利用して資源の最適利用及び生産の有効なフロンティアと利潤率 r との関係を明らかにすることができる。Iで与えたグラフを利用する。$\bar{x}_3$ を与えると二つの生産曲線を得る。線分 H_1H_2 が利潤率ゼロの時の有効なフロンティアであることは既に見た。利潤率 r が正の値を取る時、先に述べた結果によって、x_{12} 及び x_{21} は共に増加する。従って生産の均衡点は、P_1 及び P_2 から夫々の生産曲線上を原点に向って移動することになる（例えば点 Q_1 及び Q_2）。そうしてこの時の生産のフロンティアは線分 S_1S_2 となり、線分 H_1H_2 よりも原点寄りに位置することになる。r が増加するに従ってこのフロンティアは原点寄

りにシフトすることが分る。換言すると、rが増大するにつれて、財X_1及びX_2の獲得し得る純産出量の範囲が次第に縮少する。生産のフロンティア上の点であらわされる純産出量をそのフロンティアに対応する均衡価格によって純産出額に換算しよう。一つのフロンティア上ではどの点の価額も同一である。[4] p_1を1とすれば線分H_1H_2上のすべての点のX_1財表示の価額は線分OH_1に等しい。同様にフロンティアS_1S_2上の点の価額はOS_1である。従って、rが増加するにつれて、$\bar{x}_3$の純投入量によってもたらされるX_1財表示の純産出額は減少することは明らかである。以上のことから、利潤率が正の場合には資源の利用が非能率的になっているということができる。利潤率が正の場合の生産のフロンティアを、有効なフロンティアと呼ぶことは許されないであろう。

(1) 生産が有効に行われていることと資源が有効に利用されていることとは既に見て来たように同じである。資源の最適利用とは資源の有効な利用ということにほかならない。

(2) 正の利潤率の原因を利用量の限られた運転資本に求め得る。異った利潤率に対応する均衡投入係数及び均衡価格体系を考察する限りでは、このモデルで考察して差し支えない。しかし代替定理をこのモデルで主張しようとする場合に問題が起る。(V節参照)

(3) 方程式(3・4)をグラフィカルに解くことによって以上の結論を導くことができる。

(4) 相対価格がフロンティアの法線ベクトルの勾配に等しいことから確められる。

Ⅳ　根源的生産要素が二種類以上ある場合

代替定理は根源的生産要素がただ一つであることを必要条件としている。この条件がみたされない場合、問題の性質はどのように変るであろうか。根源的生産要素がm種類あるとしよう。サミュエルソンの方法に従っても、或いはワルラス的均衡の仮定から出発しても同様に、次の方程式体系に到達することはすぐに確かめられる。

$$(4\cdot1)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_{11}}=-1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_{ii}}=-1,\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}\frac{\partial f_i}{\partial x_{i2}}=-\frac{\partial f_1}{\partial x_{12}},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial f_i}{\partial x_{ii}}=-1,\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_{i,n}}=\frac{-\partial f_1}{\partial x_{1,n}},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}\frac{\partial f_i}{\partial x_{i,n+m}}$$

$$=\frac{-\partial f_1}{\partial x_{1,n+m}}\qquad (i=2,\cdots\cdots,n)$$

方程式の数は $\{(n-1)(m+n)+1\}$ コであるのに対し、未知数 y_{ij} $(i=1,\cdots,n,\ j=1,2\cdots,n+m-1)$ は $\{n(n+m-1)\}$ コあり方程式の総数よりも $(m-1)$ コだけ多い。$m\geqq2$ なる限り $(4\cdot1)$ だけからでは y_{ij} はきまらない。この点で、もはや代替定理は成立しなくなる。

そこで根源的生産要素間の相対価格を与えると、次の $(m-1)$ コの方程式で $(4\cdot1)$ を補うことができる。

$$(4\cdot2)\qquad \frac{p_{n+k}}{p_{n+m}}=\frac{\partial f_1}{\partial x_{1,n+k}}\Big/\frac{\partial f_1}{\partial x_{1,n+m}}\qquad (k=1,2,\cdots\cdots,m-1)$$

$(4\cdot1)$ と $(4\cdot2)$ とから、y_{ij} がきまり、それと同時に相対価格体系が決定する。[1] 故に根源的生産要素間の相対価格が一定である限り投入係数及び相対価格体系は一定である。根源的生産要素の相対価格一定という条件の下に、代替定理を修正した形で述べることができる。しかしこの時、生産の有効なフロンティアは一般に $(n-1)$ 次元の超平面を形成しない。[2][3] 又有効なフロンティアの法線ベクトルと生産物間の相対価格との明確な関係も失われる。

次に一つの特異な場合について言及しておこう。森嶋教授は正の均衡利潤率が存在するようなモデルで、代替定理を導こうと試みられた。正の利潤率の存在を意味附けるために社会全体として一定量の運転資本が存在すると仮定された(森嶋[7]，五七ページ)。次節で、われわれは森嶋教授の代替定理を検討するが、その準備として、ここでは、一定量の労働と一定量の運転資本が存在する時生産の有効なフロンティアはどのような形を取るであろうかという点を明確にしておこう。

われわれは、以下で、ニュメレールとして財X_1を取る。そうして、一定量の運転資本としてニュメレールX_1の一定量のストック

$\overline{W}_1$を考えることとする。[4] 均衡利潤率 r とともに一定の投入係数及び相対価格体系が与えられているとしよう。更に、最終需要量 $\overline{C}_1$ $\overline{C}_2\cdots\overline{C}_n$ に見合う純産出量を生産するのに、$-\overline{x}_{n+1}$ の純投入量及び $\overline{W}_1$ だけの運転資本が必要であるとしよう。

$$(4\cdot3)\qquad \begin{pmatrix}\overline{C}_1\\ \overline{C}_2\\ \vdots\\ \overline{C}_n\end{pmatrix}=\overline{\lambda}_1\begin{pmatrix}\overline{x}_1+\overline{x}_{11}\\ \overline{x}_{12}\\ \vdots\\ \overline{x}_{1n}\end{pmatrix}+\overline{\lambda}_2\begin{pmatrix}\overline{x}_{21}\\ \overline{x}_2+\overline{x}_{22}\\ \vdots\\ \overline{x}_{2n}\end{pmatrix}+\cdots\cdots+\overline{\lambda}_n\begin{pmatrix}\overline{x}_{n1}\\ \vdots\\ \overline{x}_{n,n-1}\\ \overline{x}_n+\overline{x}_{n,n}\end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{\lambda}_i=1,\ \overline{\lambda}_i\geqq 0$$

$$(4\cdot4)\qquad -\overline{x}_{n+1}=\overline{\lambda}_1\overline{x}_{1,n+1}+\overline{\lambda}_2\overline{x}_{2,n+1}+\cdots\cdots+\overline{\lambda}_n\overline{x}_{n,n+1}$$

$$(4\cdot5)\qquad -\overline{W}_1=\overline{\lambda}_1\sum_{j=1}^{n+1}\overline{p}_j\,\overline{x}_{1j}+\overline{\lambda}_2\sum_{j=1}^{n+1}\overline{p}_j\,\overline{x}_{2j}+\cdots\cdots+\overline{\lambda}_n\sum_{j=1}^{n+1}\overline{p}_j\,\overline{x}_{nj}$$

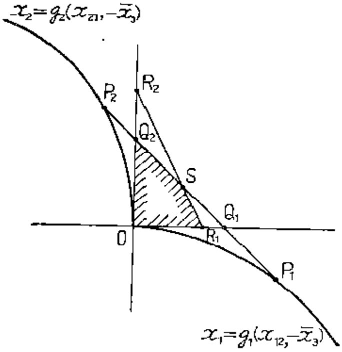
$$(p_1\equiv 1)$$

$-\overline{x}_{n+1}$ に対して純産量のフロンティアが定まっている。点 $(\overline{C}_1,\overline{C}_2,\cdots,\overline{C}_n)$ はそのフロンティア上にある。逆にこのフロンティア上の任意の最終需要量の組合わせは $-\overline{x}_{n+1}$ の純投入によって生産される。他方、このように最終需要をフロンティアに沿って変化させる時、必要運転資本額はどのように変るであろうか。これは先の方程式系で $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ を $\sum_{i+1}^{n}\lambda_i=1$　$\lambda_i\geqq 0$ という制限の下で変化させることによって考察できる。(4·5) の右辺を書きかえると次の式を得る。

$$(4\cdot5')\qquad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n}\overline{p}_j\,\overline{x}_{i,j}\Big)=\sum_{j=1}^{n}\overline{p}_i\,\overline{C}_i+\overline{p}_{n+1}\ \overline{x}_{n+1}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\,p_i\,\overline{x}_i=-W_1$$

W_1が必要運転資本である。W_1は$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$が変化するに従って変化することはすぐに分る。($\overline{W}_1$が一定であるのは$\overline{x}_1=\overline{p}_2\overline{x}_2=\cdots=\overline{p}_n\overline{x}_n$ の場合だけである。この条件がみたされる必然性は全くない。) では必要運転資本量を一定にたもつような純産出量の組の集合はどのようなものであろうか。これも又、一つの $(n-1)$ 次元の超平面になることが容易に確かめられる。[5] $n=2$ の場合を図示すれ

ば上のようになる。線分 Q_1Q_2 は $-\bar{x}_3$ に対応する生産のフロンティア、線分 R_1R_2 は $\overline{W}_1$ だけの運転資本をちょうど必要とするだけの純産量の組の集合である。$-\bar{x}_3$ 及び $\overline{W}_1$ が与えられた時、純産出量の獲得可能領域は四辺形 OR_1SQ_2 となる。



第　三　図

(1)　方程式 (4·1) を補うべきものとして、根源的生産要素についての m コの制限条件を加わえるとどうかということが一応考えられるであろう。しかし、$-\bar{x}_{n+k}=\sum_{j=1}^{n+1}x_{j,n+k}$ ($k=1,2,\cdots\cdots,m$) を補っても γ_{ij} は決定されない ($m=2$, $n=2$ の場合について考えて見られたい。) このことは、二種類以上の根源的生産要素の利用可能量を与えた時それに対応して定まる生産の有効なフロンティアが ($n-1$) 次元の超平面にならないことを示している。

(2)　古谷教授が指摘されたように、相対価格が与えられた m 種類の根源的生産要素を、単一の合成財にまとめ、この合成財の利用可能量を与えて、それに対応する有効なフロンティアを考えることができる (古谷〔3〕3 d. 2.3)。この時フロンティアはたしかに ($n-1$) 次元の超平面となる。そうして、このフロンティアの法線ベクトルはやはり生産物の相対価格をあらわしている点に注意しよう。

(3)　森嶋教授は不動点定理を利用してこのことを証明された。ただ均衡利潤率が非負であるためには「賃銀率」の変域に若干の制限が必要であろう。更に、森嶋教授の代替定理は一定量の運転資本を仮定したために定理の妥当する範囲をみずからせばめることになった。この点をVで説明する。

(4)　システムの中に運転資本を導入するためには、まずシステムの中に「貨幣」を導入しなければならない。ここではニュメレールを貨幣とみなしてそれに一般的受領性を仮定する。運転資本のそれぞれの部分は各企業家に所有されていると仮定し、利子率を考慮外におく。分析のこの抽象の段階では、運転資本についての右の仮定は許されるであろう。

(5)　$-\overline{W}_1=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(\sum_{j=1}^{n+1}p_j\bar{x}_{ij}\right)$, ($\mu_i\geqq 0$) をみたすような $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ の組の集合は ($n-1$) 次元超平面と正の象限との交わりである。これを M とする。M は ($n-1$) 次元の単体となっている。さて、

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1+\bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \cdots\cdots & \bar{x}_{n1} \\ \bar{x}_{12}, & \bar{x}_2+\bar{x}_{22} & \cdots\cdots & \bar{x}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{x}_{1n} & \bar{x}_{2n} & & \bar{x}_n+\bar{x}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \bar{X}\mu \quad 但し \begin{cases} \mu\in M \\ \bar{X} のランクを n とする。\end{cases}$$

で与えられる純生産出量の組の集合Sが求めるものである。Sは一次変換XによるMのn次元空間への写像であり、やはり$(n-1)$次元の単体である。

V　森嶋教授の代替定理

正の均衡利潤率が存在するようなシステムで、代替定理を導くために森嶋教授は社会全体として一定量の、自由に移動し得る運転資本の存在を仮定される（森嶋〔7〕）。運転資本量が一定であるところに正の利潤率が生ずる原因があり、自由な移動性によって産業間の利潤率均等化が説明される。

既に見たように（ⅢⅣ）生産物と根源的生産要素を含めた全体の相対価格体系とともに投入係数、利潤率がきまっている。[1] もし根源的生産要素間の相対価格、或いはニュメレールではかった根源的生産要素価格が変れば、投入係数も利潤率も変化する。従って投入係数が一定であるためにはX_1財表示の根源的生産要素価格が一定でなければならぬ。そこで森嶋教授は各々の根源的生産要素の供給函数について或る価格以下では供給量がゼロであると仮定する。労働についていえば、ケインズ的労働供給函数を仮定するのである。この仮定の下では、どの根源的生産要素も不完全雇傭の状態にあるかぎり相対価格体系に変化なく利潤率も投入係数も一定である。運転資本量一定、各根源的生産要素の不完全雇傭、これが投入係数一定のための充分条件である——というのが森嶋教授の導かれた代替定理の内容である。しかし、次に示すように、この定理には若干の修正が必要である。端的に云えば、一定量の運転資本と各根源的生産要素の不完全雇傭、これだけでは投入係数の一定は保証されない。このことを次に示そう。

前節の第三図を見ていただきたい。この図の基盤となっている単純なモデルで森嶋教授の代替定理を解釈すると次のようになる。

最終需要量が四辺形 OR_1SQ_2 の内部の任意の点で表わされるようなものであるかぎり利潤率、投入係数は不変にとどまる。

だが図から明らかなように、最終需要量が線分 Q_2S の中間にある時、それに見合うだけの純産出量を得るのに $\overline{W}_1$ だけの運転資本を必要としない。ここに遊休運転資本が発生することになる。自由競争下の経済では、企業家は遊休資本をもったまま事態を傍観してはいないであろう。彼はより低い利潤率に甘んずる覚悟の下に生産活動に参加する。このようにして、われわれは遊休資本の側からのはたらきかけによって利潤率、投入係数、相対価格体系に変化が生ずると期待することができる。実際われわれはこの変化の筋道を、二生産物、一根源的要素及びコブ・ダグラス生産函数を仮定した単純なモデルで明確に示すことができる。結果だけを述べる。均衡利潤率がより低い場合には、高い場合に比して、

(1) 同じ純産出量を得るのに必要な運転資本が増加する。[2)]

(2) 同じ純産出量を得るのに必要な根元的要素の投入量（絶対値）は減少し、ニュメレール表示の価格は上昇する（Ⅲ節参照）。

従って、このモデルでは、最終需要が変化して、運転資本に剰余が生じた時、利潤率は減少し、生じた遊休資本が再び生産活動に吸収されようとする――と考えてよいだけの充分な根拠がある。根源的要素への需要が減少して要素価格が上昇することは、要素の供給函数についての仮定及び、不完全雇傭の仮定と決して矛盾しない。このモデルでは森嶋教授の代替定理はもはやそのままではなりたたない。投入係数一定であると主張できるのは、例えば第三図で最終需要が線分 SR_1 の上を動く限りにおいてである。この範囲内では遊休資本は生ぜず従って投入係数は一定であろう。

しかし、最終需要の動き得る範囲についてのこの限定は厳しいものであり、その限定の下で成り立つ代替定理も又極めて力弱いものでしかあり得なくなる。

(1) Ⅳ節での分析では m コの根源的要素間の相対価格を与えると全体の各未知数がきまった。しかし、この場合正の利潤率 r が入っているから利潤率 r を与えるか或いはニュメレール表示の要素価格を与えるかしなければ全体の均衡解は得られない。

(2)　投入係数が問題だから　(1)　$1=Ax_{12}^{\alpha}x_{13}^{1-\alpha}$　　(2)　$1=Bx_{21}^{\beta}x_{23}^{1-\beta}$　$(A, B>0,\ 1>\alpha, \beta>0)$ を考える。投入量をプラスに取る。Ⅲでの分析に従って正の利潤率 r の下での均衡条件から

(3)　$x_{12}=\dfrac{1}{A}V^{\beta(1-\alpha)}W^{1-\alpha}(1+r)^{\frac{(\alpha-1)(\beta+1)}{1-\alpha\beta}}$　　(4)　$x_{13}=\dfrac{1}{A}V^{-\alpha\beta}W^{-\alpha}(1+r)^{\frac{\alpha(1+\beta)}{1-\alpha\beta}}$

(5)　$x_{21}=\dfrac{1}{B}V^{1-\beta}W^{\alpha(1-\beta)}(1+r)^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{1-\alpha\beta}}$　　(6)　$x_{23}=\dfrac{1}{B}V^{-\beta}W^{-\alpha\beta}(1+r)^{\frac{\beta(1+\alpha)}{1-\alpha\beta}}$

(7)　$p_2=\dfrac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}V^{1-\beta}W^{\alpha-1}(1+r)^{\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha\beta}}$　　(8)　$p_3=\dfrac{(1-\beta)}{\beta}VW^{\alpha}(1+r)^{\frac{-1-\alpha}{1-\alpha\beta}}$

但し、$p_1\equiv 1$,　$V=\left\{\dfrac{A\cdot\beta(1-\alpha)}{1-\beta}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha\beta}}$,　$W=\left\{\dfrac{B\cdot\alpha(1-\beta)}{1-\alpha}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha\beta}}$

採用されている生産プロセスは $(1, x_{12}, x_{13})$ と $(x_{21}, 1, x_{23})$ である。最終需要 C_1、C_2 が与えられると、(9)　$(C_1, C_2)=k_1(1, -x_{12})+k_2(-x_{21}, 1)$ によって生産活動の水準が決定される。必要運転資本を K とすると、(10)　$K=k_1(p_2x_{12}+p_3x_{13})+k_2(x_{21}+p_3x_{23})$ で与えられる。利潤率 r が r' に変化した時投入係数及び価格は(3)(4)(5)(6)(7)(8)で r を r' におきかえることによって得られる。この結果新たに採用されたプロセスは $(1, x'_{12}, x'_{13})$ と $(x'_{21}, 1, x'_{23})$。C_1C_2 に見合うだけの純産出量を得るための活動水準 $k'_1k'_2$ は、$(C_1, C_2)=k'_1(1, -x'_{12})+k'_2(-x'_{21}, 1)$ で与えられる。必要資本 K' は、(11)　$K'=k'_1(p'_2x'_{12}+p'_3x'_{13})+k'_2(x'_{21}+p'_3x'_{23})$ で与えられる。(10)を利用して $k'_1k'_2$ を消去し、更に(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)をそれぞれ代入して $K'-K$ を計算すると、次の式を得る。

(12)　$K'-K=\dfrac{1}{1-x'_{12}x'_{21}}[H_1(r')+H_2(r')+H_3(r')+H_4(r')+H_5(r')]$

ここに　$H_1(r')=\dfrac{k_1(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)A}V^{1-\alpha\beta}\{(1+r')^{-1}-(1+r)^{-1}\}$

$H_2(r')=\dfrac{k_2}{\beta B}V^{1-\beta}\cdot W^{\alpha(1-\beta)}\cdot\left\{(1+r')^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{1-\alpha\beta}}-(1+r)^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{1-\alpha\beta}}\right\}$

$$H_3(r')=\frac{k_2(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)AB}\cdot V^{2-\beta-\alpha\beta}\cdot W^{\alpha(1-\beta)}\cdot(1+r')\left\{(1+r')^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{1-\alpha\beta}}-(1+r)^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{1-\alpha\beta}}\right\}$$

$$H_4(r')=\frac{k_1}{\beta\cdot AB}\cdot V^{1-\alpha\beta}\cdot W^{1-\alpha\beta}\cdot(1+r)^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{1-\alpha\beta}}\left\{(1+r')^{\frac{(\alpha-1)(\beta+1)}{1-\alpha\beta}}-(1+r)^{\frac{(\alpha-1)(\beta+1)}{1-\alpha\beta}}\right\}$$

$$H_5(r')=\frac{k_1(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)A^2B}\cdot V^{2(1-\alpha\beta)}\cdot W^{1-\alpha\beta}\cdot(1+r)^{-1}(1+r')^{-2}\left\{1-(1+r)^{\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}}(1+r')^{\frac{-\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}}\right\}$$

正の純産出高を得ることができるためには、$1-x'_{12}x'_{21}>0$ でなくてはならない。$r=r'$ の時、$H_1(r')=H_2(r')=\cdots\cdots=H_5(r')=0$ であり、$r>r'$ の時、$H_1(r')>0$, $H_2(r')>0$, $H_3(r')>0$, $H_4(r')>0$, そうして、$\alpha<\beta$ なら $H_5(r')>0$, $\alpha=\beta$ なら $H_5(r')=0$, $\alpha>\beta$ なら $H_5(r')<0$ となる。従って、$\alpha\leqq\beta$ と仮定すると、$r'<r$ なら必ず $K'>K$ であり、r が小さくなればなる程 K' が増加する。よって本文におけるような結論を得る。

（一九五七・十一・八）

参 考 文 献

〔1〕 K. J. Arrow: Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the general case, in *Activity Analysis of Production and Allocation*, T. C. Koopmans, ed. John Wiley, 1951.

〔2〕 N. Georgescu-Roegen: Some Properties of a Generalized Leontief Model, in *Activity Analysis.*

〔3〕 古谷 弘「現代経済学」弘文堂、一九五七。

〔4〕 T. C. Koopmans: Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities, in *Activity Analysis.*

〔5〕 ———— : Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the Case of Three Industries, in *Activity Analysis.*

〔6〕 ———— : Maximization and Substitution in Linear Models of Production, in *Input-Output Relations*, The Netherlands Economic Institute, ed. 1953.

〔7〕 森嶋通夫「産業連関論入門」創文社、一九五六。

〔8〕 P. A. Samuelson: Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models, in *Activity Analysis.*