經濟論叢

第九十六卷　第一號

昭和四十年七月

京都大學經濟學會

ネットワーク・フロー問題と輸送問題

小林　清晃

まえがき

線型計画法における輸送問題 (transportation problem) は，本来の輸送計画問題のみならず，人員配置問題 (personnel assignment problem)，倉庫問題 (warehouse problem)，巡回セールスマン問題 (travelling salesman problem)，ネットワーク・フロー問題 (network flow problem) 等を含むものと考えられている。それぞれの問題には，その構造的特徴によって独自の解法（例えば，人員配置問題に対する Hungarian method）が工夫されている。

本稿では，いくつかのタイプの輸送問題の構造とネットワーク・フロー問題の構造との共通性，関連性を観ること，および解法としての primal-dual algorithm（ネットワーク・フロー法と呼ぶことにする）の解釈を述べたいと思う。

I　ネットワーク・フロー問題

本節では，ネットワーク・フロー問題の定式化およびその構造について若干ふれてみよう。問題は二つにわけることができる。一つは最短距離問題 (shortest path problem)，もう一つは最大流量問題 (maximal flow problem) である。

1)　最短距離問題　n 個の地点およびそれらの地点を結ぶ線の集合がある[1]。その集合はネットワークを構成する。各地点を結ぶ線にはそれぞれ地点間の距離を示す数値が与えられている。出発点と定められた地点から目的地と定められた地点への最短距離ルートを発見することが問題となる。抽象的に地点と表現されてはいるが，実際上それらは都市，港，駅等であり，またそれらを結ぶ線は道路・路線等の輸送路あるいは通信路と考えられる。線に付される数値は，距離にかわってその線における走行時間，消費燃料量，走行経費等を考えることもできるであろう。そうすれば，出発地から目的地までの総走行時間，総燃料消費量，総走行経費等を最小にするようなルートを求める問題になる。一般的にいえば，各線にそれぞれ評価係数というべきものを与えて総評価値を

1)　地点を node, vertice, point, 線を arc, line 等とも呼ぶ。

最小にするようなルートを発見する問題といいあらわせる。

近時開発されつつある新しい経営管理技術の PERT[2] や CPM[3] も，ネットワーク（その場合アロー・ダイアグラムと呼ばれる）をえがき，合理的な作業計画，日程計画を見い出そうとするものである。そこでは矢線はひとつの作業 (activity)，点はひとつの作業が終り次の作業に移ろうとする時点(event) を示している。各矢線には各作業の所要日数あるいは所要コストが与えられ，システム全体の仕事を完成させるための総所要時間に影響を与える作業はクリティカル(critical)であるといわれ，ネットワーク上，始点から終点に至る経路の中，それに含まれる１つの作業でも少しでも遅く開始したり，遅く完了したりすれば，仕事全体が遅れてしまう時，その径路(path)をクリティカル・パスという。そのように隘路となっているクリティカル・パスを求めて，仕事全体を能率的に進行させるためには，どの作業工程を改良することが最適かを知るのが PERT や CPM の技法である。これは最短距離問題よりも広いネットワーク問題と考えられる。

さて，最短距離問題の定式化を行なおう。地点が点０から点 n まで $n+1$ 個あるとし，点０が始点，点 n が終点とする。

x_{ij}：点 i から点 j への財貨の流量 $(i \neq j)$[4]

x_{ii}：点 i における財貨の通過量。

c_{ij}：点 i から点 j への距離。$i=j$ ならば $c_{ij}=0$ とする。

$$(1)\quad \begin{aligned} &\sum_{j \neq i} x_{ij} - x_{ii} = 0 && i=0,\ 1,\ 2, \cdots\cdots,\ n-1 \\ &\sum_{i \neq j} x_{ij} - x_{jj} = 0 && j=1,\ 2, \cdots\cdots,\ n \\ &x_{00} = x_{nn} = 1 && \\ &x_{ij} \geqq 0 && i,\ j=0,\ 1,\ 2, \cdots\cdots,\ n \end{aligned}$$

$$(2)\quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$$

(1)の制約の下に(2)を最小にせよ。

ここで x_{ij} は結果としては０か１でなければならない。それは次の理由でまもられている。この問題は後述するように，仲継輸送問題を通して，標準型輸送問題に変換され，かつ標準型輸送問題の最適解を与える変数は整数値をとる[5]。また $0 \leqq x_{ij} \leqq 1$ は(1)の制約式全体から当然のことである。

(1)の最初の２組の制約式の集合は，始点と終点を除いて，各点における流入量＝流出量を示している。勿論これは各点における流量の漏出がないことの仮定 (conservation

2) Program Evaluation and Review Technique の略。
3) Critical Path Method の略。
4) i, j が隣接点 (adjacent point) でないならば $x_{ij}=0$ と考える。
5) 標準型輸送問題において a_i, b_j が整数であれば，最適解を構成する x_j は整数である。文献(2)，305ページ。(3)，121ページ。

の仮定）からくる。

$\sum_{j\neq i} x_{ij}-x_{ii}=0\ (i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,\ n-1),\ \sum_{i\neq j} x_{ij}-x_{jj}=0 (j=1,\ 2,\cdots\cdots,n)$ を見易くするために表にあらわそう。そのために上記の制約式を次のように変形しておく。

$$\sum_{j\neq i} x_{ij}+1-x_{ii}=1$$
$$\sum_{i\neq j} x_{ij}+1-x_{jj}=1.$$

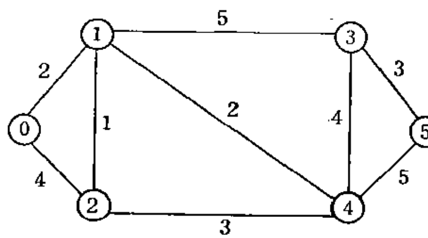
$1-x_{ii}\geqq 0$であることは容易にわかる。

$x_{i0}=0(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n),\quad x_{nj}=0\ (j=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,\ n-1)$ であるから，I表で，0列，n行を除けば各行各列の和がそれぞれの計の行，列の数値（$=1$）に等しいとおけば，それらは上記の制約式を示していることになる。さらに0列，n行をI表から落して考えれば，それは人員配置問題[6]と同じものになるであろう。ただその際に(2)の目的関数にマイナスをつけ，$-\sum\sum c_{ij}x_{ij}\to \max$ とすれば，形式的には，人員配置問題の目的関数と全く同じである。われわれはここで，最短距離問題は人員配置問題に変換されることを知った。

	0	1	2	……	$n-1$	n	計
0	$1-x_{00}$	x_{01}	x_{02}	……	$x_{0,n-1}$	x_{0n}	1
1	0	$1-x_{11}$	x_{12}	……	$x_{1,n-1}$	x_{1n}	1
2	0	x_{21}	$1-x_{22}$	……	$x_{2,n-1}$	x_{2n}	1
⋮		⋮			⋮	⋮	⋮
$n-1$	0	$x_{n-1,1}$	$x_{n-1,2}$	……	$1-x_{n-1,n-1}$	$x_{n-1,n}$	1
n	0	0	0		0	$1-x_{nn}$	
計		1	1	……	1	1	

I 表

以下で本節の補足として具体例を示そう（I図）。点0が始点，点5が終点である。線に付せられた数値は c_{ij} であり，ここでは $c_{ij}=c_{ji}$ と仮定されている。また，点 i と点 j を直接結ぶ線がなければ $x_{ij}=0$ とみなす。II表ではすでに $x_{00}=x_{55}=1$ を満足している故，制約式としてはII表及び $x_{ij}\geqq 0$ であり，最小化すべき目的関数は $\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5} c_{ij}x_{ij}$ である。



I 図

実際的な解法においては，大規模な問

6) 人員配置問題は次のように定式化される。

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ j=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n$$
$$x_{ij}=x_{ij}^2,\ i,\ j=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n$$

の制約の下で

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ を最大にせよ。c_{ij} は人 i を仕事 j に割りつけたときの有効さを示す。

題では，後述するように仲継輸送問題として，あるいは前述したように人員配置問題としてシステマティックにコンピューターにかけて解くことができるであろうが，この例題のように小規模な問題であれば，手解法 (handsolution) の方が能率的である。それは付録で示しておく。一応例題の最適ルートを示せば，⓪→①→④→⑤となり，最短距離は9である。

i	0	1	2	3	4	5	計
0	0	x_{01}	x_{02}	0	0	0	1
1	0	$1-x_{11}$	x_{12}	x_{13}	x_{14}	0	1
2	0	x_{21}	$1-x_{22}$	0	x_{24}	0	1
3	0	x_{31}	0	$1-x_{33}$	x_{34}	x_{35}	1
4	0	x_{41}	x_{42}	x_{43}	$1-x_{44}$	x_{45}	1
5	0	0	0	0	0	0	
計		1	1	1	1	1	

Ⅱ 表

2) 最大流量問題　各線上に流量制限 (flow capacity limit) があり，その制約の下に始点から終点への最大流量はいくらで，それを実現するためには，どのようなルートが選ばれ，それらのルートに沿っての流量はいくらであるか。これを扱うのが最大流量問題である。

最短距離問題の場合と同様に，点とそれらを結ぶ線の集合より成り立つネットワークを考える。実際問題との対応関係をみるならば，点は，都市，駅，倉庫等を，また線はそれらを結ぶ輸送路を抽象的に表現するのは前と同じである。

今日の都市交通という一つのネットワークの場をみるならば，そこでの財貨の流れの渋滞は，経済活動の円滑化をさまたげているボトルネックの一つであることを知る。道路には容量制限が存在し，輸送活動がスムーズに行われるためには，各道路における輸送量がその容量を超えてはならない。日常茶飯事と化している都市における交通マヒは，輸送量の最適配分という基礎的な解析を経て解決されなくてはならない。このことはおのずから，最大流量問題に通じるのである。

ここで定式化は次のようになされる。点は0からnまで$n+1$個あるとし，点0は始点，点nは終点としよう。

x_{ij}：点iから点jへの流量 ($i \neq j$)

x_{ii}：点iにおける通過量 ($i \neq 0, n$)

r_{ij}：線($i \to j$)における輸送容量

x_{00}：始点からの流出量

x_{nn}：終点への流入量

(3) $\sum_{j \neq i} x_{ij} - x_{ii} = 0$ $i=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$

$\sum_{i \neq j} x_{ij} - x_{jj} = 0$ $j=1, 2, \cdots\cdots, n$

(4) $0 \leqq x_{ij} \leqq r_{ij}$ $i \neq j$

(5) $x_{00} (= x_{nn}) \to \max.$

輸送される財貨は単一財(single commodity)と仮定し，また各地点や輸送ルートにおいて漏出はないという conservation の仮定も成り立つとする。(4)で，$i=j$ の場合を含める方が一般的ではあるが，簡単化のために $i \neq j$ としておく。$i=j$ を含めるならば，r_{ii} は点 i における通過容量と解釈すればよい。勿論，そのような場合を含めても定式化及び解法には何ら変りはない。

(3)のかわりに(3)と同値な制約式として，$\sum_{k \neq i} x_{ik} = \sum_{j \neq i} x_{ji}$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, n-1$) でもよいが，後の問題との関連上(3)の形をとっておく。また，もし点 i と点 j が隣接していなければ，$r_{ij}=0$ と解釈する。

i	0	1	2	3	4	5	計
0	$L-x_{00}$	x_{01}	x_{02}	0	0	0	L
1	0	$L-x_{11}$	x_{12}	x_{13}	x_{14}	0	L
2	0	x_{21}	$L-x_{22}$	0	x_{24}	0	L
3	0	0	0	$L-x_{33}$	x_{34}	x_{35}	L
4	0	0	0	x_{43}	$L-x_{44}$	x_{45}	L
5	0	0	0	0	0	$L-x_{55}$	
計		L	L	L	L	L	

表 II

I表と対応させるために(3)の両辺に正の数 L を加えると

(3)′ $\sum_{j \neq i} x_{ij} + L - x_{ii} = L$ $i=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$

$\sum_{i \neq j} x_{ij} + L - x_{jj} = L$ $j=1, 2, \cdots\cdots, n$

が得られる。ここで L は $L - x_{ii} \geqq 0$ となるようなものが選ばれる。例えば，$L = \sum_{j \neq 0} r_{0j}$ とすることができる。かくて (3)′ の制約式を表にすれば，I表で右と下の縁の数値を1のかわりに L とするだけである。

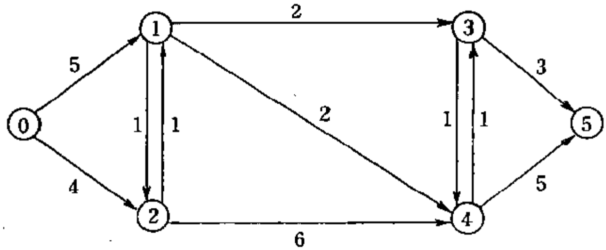
ここでも具体例を提示しよう(II図)。始点は0，終点は5であり，各線上に付せられ

た数値は矢印の方向への輸送容量 r_{ij} とする。

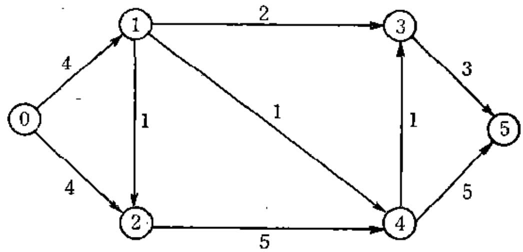
Ⅱ図にもとづいて制約式 (3)' を表にあらわすとⅢ表のようになる。

行和及び列和がそれぞれの計 ($=L$) に等しくなければならない。但し 0 列目と 5 行目はその列和，行和を考えないことにする。

この表では，例えば x_{13} のように点 2 から点 3 へ直接結びつける線がないときには，予めそこに対応する変数を 0 にしてある。また，L に対しては $L=5+4=9$ とすればよい。



Ⅱ　図



Ⅲ　図

(4)に対応する制約式は容易にわかるので省略する。

この例題の解法は付録に示し，ここでは，最適解だけをのべると，最適解はいくつかあるが，その中の一つは $x_{02}=4$. $x_{01}=4$. $x_{12}=1$. $x_{24}=5$. $x_{45}=5$. $x_{13}=2$. $x_{14}=1$. $x_{35}=3$. 最大流量 = 8 である。これを図示するとⅢ図のようになり，矢印の方向へ，矢印に付した数値だけ流れることになる。

Ⅱ　いくつかの特殊型輸送問題

ある財について，m 個の供給地と n 個の需要地があり，それぞれの供給地から需要地への財 1 単位あたりの輸送費が与えられているとしよう。そのとき，需要地における需要をみたすべく供給地から財を輸送する際に，総輸送費を最小にするような輸送計画を立てよ。これがいわゆる輸送問題である。次のように定式化ができる。

a_i : 供給地 i における供給量 ($i=1, 2, \cdots\cdots, m$)

b_j : 需要地 j における需要量 ($j=1, 2, \cdots\cdots, n$)

c_{ij} : i から j への財 1 当りの輸送費[7]

---

7) c_{ij} は比例費であり，以下の問題では固定費を考慮しないが，固定費を含むケースは文献(14)を参照のこと。

x_{ij}：i から j への輸送量

(6) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

$$x_{ij} \geqq 0$$

(7) $$\sum\sum c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

(6)の制約の下で(7)を最小にせよ。ここで(6)を行列表にあらわすと理解が容易である。Ⅳ表にそれを示し，$\sum_j x_{ij} = a_i$ を行方程式 $\sum_i x_{ij} = b_j$ を列方程式と呼ぶことにする。

x_{11}	x_{12}	……	x_{1n}	a_1
x_{21}	x_{22}	……	x_{2n}	a_2
⋮	⋮		⋮	⋮
x_{m1}	x_{m2}	……	x_{mn}	a_m
b_1	b_2	……	b_n	

Ⅳ 表

最も古典的な輸送問題は F. L. Hitchcock と T. C. Koopmans が開発したもので，それは(6)で，

(8) $$\sum_i a_i = \sum_j b_j$$

が成立する場合である。従って，(6)，(8)の制約の下で(7)を最小にせよ，という問題を，通常，Hitchcock-Koopmans 型の輸送問題と呼ぶ。併し本稿では，それにかわって標準型輸送問題（standard transportation problem）と呼ぶことにする。次に特殊型輸送問題（非標準型輸送問題）のいくつかを示そう。なお以下では特にことわらない限り，(8)の関係が成立しているものとする。

1）仲継輸送問題（transshipment） 標準型輸送問題では，m 個の供給地および n 個の需要地において，財の一方的な流出および流入のみを考えるが，仲継輸送問題では，供給地，需要地がそれぞれ仲継地としての役割をすることをみとめるケースである。

標準型輸送問題におけると同じ記号を用いて定式化すると次のようになる。

(9) $$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m+n} x_{ij} - x_{ii} = a_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m,\ m+1, \cdots\cdots,\ m+n$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m+n} x_{ij} - x_{jj} = b_j \qquad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m,\ m+1, \cdots\cdots,\ m+n$$

$$x_{ij} \geqq 0$$

(10) $$\sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

x_{ii} は地点 i における通過量をあらわし，c_{ii} は地点 i における通過時の費用を示すと考えられる。もし i から j へのルートが存在しないならば，$x_{ij}=0$ とおくか，あるいは c_{ij} に極めて大きい数値をつければよい。地点は $m+n$ 個あると仮定しているが，それらは供給地，需要地，単なる仲継地から成り立っているはずであり，それらについては

次のように約束することができる。

- 地点 i が供給地であれば, $a_i>0,\ b_i=0$
- 〃 需要地 〃 $a_i=0,\ b_i>0$
- 〃 単なる仲継地 〃 $a_i=0,\ b_i=0$

以上で仲継輸送問題の定式化が与えられたが，ここで(1), (2)は(9), (10)の特殊ケースであることがわかるであろう。換言すれば，最短距離問題は仲継輸送問題の特殊な場合であるということができるであろう。

次に簡単に仲継輸送問題が標準型輸送問題に変換されることを示そう。前者と後者の相違は(6)と(9)にあらわれている。つまり(6)では変数の係数は全て1であるのに対し，(9)では x_{ii} の係数のみが -1 としてあらわれている。この点の相違をなくするためには(9)の両辺に大なる正数 L を加えてやればよい。

(9)′
$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m+n} x_{ij}+L-x_{ii}=a_i+L$$
$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m+n} x_{ij}+L-x_{jj}=b_j+L$$

(9)′ で $L-x_{ii}=\bar{x}_{ii}$ と考えれば，(6)と同じように変数は全て1の係数をもつことになる。勿論 $\bar{x}_{ii}\geqq 0$ でなければならないゆえ，そうであるような L を与えなければならないが，そのためには例えば $L=\sum_{i=1}^{m+n} a_i$ とすればよい[8]。

2) 容量制限付輸送問題 (capacitated transportation problem, transportation problem with bounded variables) 輸送問題の実際的な適用においては，いくつかの特定のルートに容量の制限があると見なすことが現実的である。この型の問題を容量制限付輸送問題といい，それは次のように定式化される。

(11)
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \qquad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$
$$x_{ij}\geqq 0$$

(12)
$$x_{ij}\leqq r_{ij}$$

(13)
$$\sum_{i}\sum_{j} c_{ij}\,x_{ij}\to \min.$$

(11), (12)の下に(13)を最小にせよ。r_{ij} は i から j へのルートに対する容量リミットである。i から j へのルートが存在しないならば，$r_{ij}=0$ とするか，または c_{ij} に極めて高い輸送コストを付することにすればよい。

このような問題は，常に解をもつとは限らない。例えば，$a_i>\sum_j r_{ij}$ あるいは $b_j>$

8) 仲継輸送問題の解法は文献(7), (14)を参照のこと。

$\sum_i r_{ij}$ にあれば明らかに問題には解が存在しない。従って，以下では $a_i \leqq \sum_j r_{ij}$. $b_j \leqq \sum_i r_{ij}$ が満たされて解が存在すると仮定しよう。

ここで(3)，(4)，(5)の最大流量問題を想起したい。(3)と(3)′が同値であり，また(5)が $-x_{00} \to \min.$ と同値であることを考慮すれば，(3)，(4)，(5) は (11)，(12)，(13) の特殊ケースであることがわかる。いいかえれば，最大流量問題は容量制限付輸送問題の特殊ケースであることが，それぞれの定式化を通して示された。

仲継輸送問題と同じく，これも標準型輸送問題に変換されうることを以下で見よう。

各変数 x_{ij} は行方程式 $(\sum_j x_{ij}=a_i)$，列方程式 $(\sum_i x_{ij}=b_j)$，および容量制限不等式 $(x_{ij} \leqq r_{ij})$ の中に零でない係数をもってあらわれていることに予め注意したい。(12)はスラック変数 y_{ij} を導入すれば，

(12)′　　$x_{ij}+y_{ij}=r_{ij}, \qquad (y_{ij} \geqq 0)$

と変形される。標準型輸送問題では各変数は行方程式と列方程式にそれぞれ一つずつ零でない係数をもってあらわれていた。従って当問題においても，各変数が行方程式と列方程式に各々一つずつ零でない係数をもってあらわれてくるように，行方程式と列方程式を構成すればよい。それは次のようにあらわされる。

$$\left.\begin{aligned} &(14.1) \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &&= a_i \\ &\qquad\qquad y_{ij}+x'_{ij} &&= r_{ij} \end{aligned}\right\} \text{行方程式}$$

$$\left.\begin{aligned} &(14.2) \quad x_{ij}+y_{ij} &&= r_{ij} \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} &&= b_j \end{aligned}\right\} \text{列方程式}$$

これを視覚的に理解するため行列表で示すとV表のようになる。

勿論(11)，(12)と (14.1)，(14.2) は同値である。従って(11)，(12)の下に(13)を最小にする問題は (14.1)，(14.2) の下に(13)を最小にする問題といいかえることができ，しかも後者の体系では，各変数は行方程式，列方程式に一度ずつ係数1をもってあらわれている。ここにおいて容量制限付輸送問題が標準型輸送問題に変換されたことがみられる[9]。

3)　総供給量が総需要量より多い場合　　$\sum_i a_i > \sum_j b_j$ のとき，(6)の制約の下に(7)を最小にする問題である。このとき，架空(fictitious)の需要地（$n+1$ 番目の需要地）を想定し，それが $\sum_i a_i - \sum_j b_j$ だけ需要しているとみなすことによって，この問題が標準型輸送問題に変換されるが，その定式化は次のようにすればよい。

(6)′　　$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij}=a_i \qquad i=1, 2, \cdots\cdots, m$　　行方程式

9)　容量制限付輸送問題の解法は文献(2)，377-380 ページ参照のこと。

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x_{11}\ x_{12}\cdots\cdots x_{1n} & & & & & a_1 \\
y_{11} & & & & x'_{11} & r_{11} \\
\quad y_{12} & & & & \quad x'_{12} & r_{12} \\
\quad\quad \ddots & & & & \quad\quad \ddots & \vdots \\
\quad\quad\quad y_{1n} & & & & \quad\quad\quad x'_{1n} & r_{1n} \\
 & x_{21}\ x_{22}\cdots\cdots x_{2n} & & & & a_2 \\
 & y_{21} & & & x'_{21} & r_{21} \\
 & \quad y_{22} & & & \quad x'_{22} & r_{22} \\
 & \quad\quad \ddots & & & \quad\quad \ddots & \vdots \\
 & \quad\quad\quad y_{2n} & & & \quad\quad\quad x'_{2n} & r_{2n} \\
 & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & x_{m1}\ x_{m2}\cdots\cdots x_{mn} & & a_m \\
 & & & y_{m1} & x'_{m1} & r_{m1} \\
 & & & \quad y_{m2} & \quad x'_{m2} & r_{m2} \\
 & & & \quad\quad \ddots & \quad\quad \ddots & \vdots \\
 & & & \quad\quad\quad y_{mn} & \quad\quad\quad x'_{mn} & r_{mn} \\
\hline
r_{11}\ r_{12}\cdots\cdots r_{1n} & r_{21}\ r_{22}\cdots\cdots r_{2n} & \cdots\cdots & r_{m1}\ r_{m2}\cdots\cdots r_{mn} & b_1\ b_2\cdots\cdots b_n &
\end{array}
$$

V 表

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \qquad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\\ &\sum_{i=1}^{m} x_{in+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i-\sum_{j=1}^{n} b_j\end{aligned}\right\}\ \text{列方程式}$$

$$x_{ij}\geqq 0$$

(7)′ $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m} c_{in+1}x_{in+1}\rightarrow \min.$$

(6)′ の下に (7)′ を最小にせよ。

c_{in+1} は $n+1$ 番目の需要地は架設的なものであるため，単位当り輸送コストとは解釈できない。従って単純に $c_{in+1}=0$ としてもよいが，より一般的には c_{in+1} は供給地 i において，余剰物1単位当りの倉庫費用とみれば，$c_{in+1}>0$ のときの説明がつくであろう。

4) 総需要量が総供給量より多い場合。3) のケースとは逆に $\sum_j b_j>\sum_i a_i$ のときには，架空の $m+1$ 番目の供給地を想定し，それは $\sum_j b_j-\sum_i a_i$ の供給能力をもっていると考えることによって，標準型輸送問題に変換される。定式化は

(6)″ $$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m\\ &\sum_{j=1}^{n} x_{m+1j}=\sum_j b_j-\sum_i a_i\end{aligned}\right\}\ \text{行方程式}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij}=b_j \qquad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \qquad \text{列方程式}$$

$$x_{ij} \geqq 0$$

$$(7)'' \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{m+1j}x_{m+1j} \to \min.$$

$(6)''$ の下に $(7)''$ を最小にせよ。

厳密には，この問題は各需要地の需要要請をみたすことができないという意味で，解は存在しないといえるが，柔軟的に次のように考えることもできるであろう。一つあるいはそれ以上の需要地がその需要量だけのものを受けとることができない。そのことによって生まれる商取引上の犠牲を評価し，それを c_{m+1j} に結び付けて考えてみる。そうすれば，c_{m+1j} が全ての j について極めて大きい値をとる場合には最適解は存在しないが，そうでなければ，最適解が存在し得るといえるであろう。

以上本節では，いくつかの非標準型輸送問題がネットワーク・フロー問題といかに対応しているか，またそれらが標準型輸送問題に変換し得ることを示した。

Ⅲ　ネットワーク・フロー法[10]による標準型輸送問題の解法（標準型輸送問題の最大流量問題への変換）

Ⅵ表に与えられているような問題を具体例としてみていこう。Ⅵ表には4つの供給地と6つの需要地についての供給量，需要量，輸送コストが記入されている。この問題を最大流量問題と結び付けて考えるために，Ⅵ図のようなネットワークをえがく。

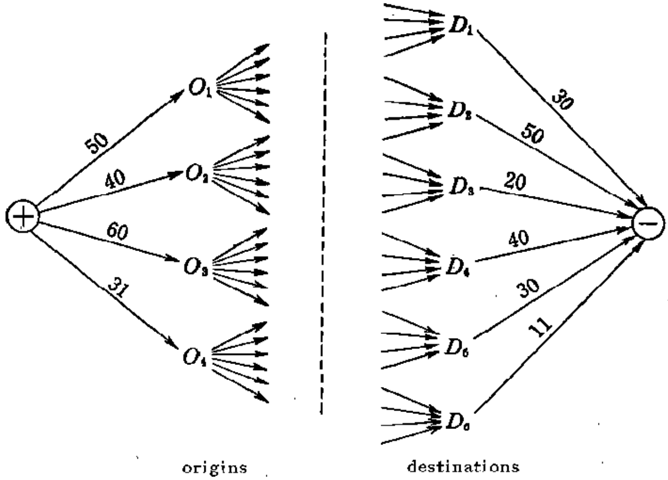
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	a_i
O_1	2	1	3	3	2	5	50
O_2	3	2	2	4	3	4	40
O_3	3	5	4	2	4	1	60
O_4	4	2	2	1	2	2	31
b_j	30	50	20	40	30	11	181

Ⅵ　表

図では省略しているが，O_i の一つ一つと D_j の一つ一つと結び付けているルートが存在していると考え，それらのルート上の容量制限は極めて大なる値が付せられているとみる。また⊕と各供給地 D_i を結ぶルート上には a_i，需要 D_j と⊖を結ぶルート上には b_j の容量制限が付せられているとする。

このネットワークで⊕から⊖への最大流量をもとめる問題を考えることができる。そしてその解はⅥ表の標準型輸送問題の一つの可能解（制約条件をみたす解）を与えるものである。併しその場合，総輸送費用の最小化はなんら考慮されていない。この点の補足をする前に例題を解く方向に向かうことにする。

10)　primal-dual algorithm と同じものであるが，本稿ではネットワーク・フロー法と呼ぶことにする。本節は文献(2)，第20章に負うところが多い。



Ⅳ 図

Step 1. 誘導費用行列 (reduced cost matrix) の計算　Ⅵ表の費用行列において，先ず各行の最小値を u_i とし，各行の数値から u_i をひく。そのようにして得られた行列について，今度は各列の最小値を v_j とし，各列の数値から v_j をひく。ここで得られた行列を誘導費用行列と呼ぶ。(イ)表に得られた誘導費用行列と u_i, v_j が示される。新しく得られた費用を c'_{ij} とすると，c_{ij} のかわりに c'_{ij} を用いて輸送問題を解いても最適解は同じである[11)]。勿論，総輸送費は同じでないが，最適解 x_{ij}^* は変らない。

							$u_i\downarrow$
	0	0	2	2	0	4	1
	0	0	0	2	0	2	2
	1	4	3	1	2	0	1
	2	1	1	0	0	1	1
$v_j\rightarrow$	1	0	0	0	1	0	

(イ) 表

(14)　$u_i=\min_j c_{ij}$　　$v_j=\min_i (c_{ij}-u_i)$

(15)　$c'_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j\geqq 0$

(イ)表について集合 S_i, T_j を定義する。

11)　一般に費用行列の各行から，α_i, 各列から β_j をさし引いても最適解を構成する x_{ij} には変りがない。何故ならば，　$\sum_i \sum_j (c_{ij}-\alpha_i-\beta_j)x_{ij}$
$=\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}-\sum_i (\alpha_i \sum_j x_{ij})-\sum_j (\beta_j \sum_i x_{ij})$.
$=\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}-\sum_i \alpha_i a_i-\sum_j \beta_j b_j$　と変形され最後の式の第2項と第3項は定数であるから，
$\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}$ の min. は $\sum_i \sum_j (c_{ij}-\alpha_i-\beta_j)x_{ij}$ の min. に対応する。

$$S_i=\{j\,|\,c_{ij}-u_i-v_j=0\}$$
$$T_j=\{i\,|\,c_{ij}-u_i-v_j=0\}$$

(イ)表についていえば,

$$S_1=\{1,\ 2,\ 5\}\quad S_2=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}\quad S_3=\{6\}$$
$$S_4=\{4,\ 5\}$$
$$T_1=\{1,\ 2\}\quad T_2=\{1,\ 2\}\quad T_3=\{2\}\quad T_4=\{4\}$$
$$T_5=\{1,\ 2,\ 4\}\quad T_6=\{3\}$$

(14)で定義された u_i, v_j は(15)をみたす故,それらはVI表に与えられた原(primal)問題に対する双対問題の一つの可能解を構成するものである[12]。この双対問題の可能解に対応して,原問題の解を求めるには次の問題を解けばよい。これを修正原問題(modified primal problem)と呼ぼう。

(16) $$\sum_{j\in Si} x_{ij}+s_i=a_i$$
$$\sum_{i\in Tj} x_{ij}+t_j=b_j$$
$$x_{ij}\geqq 0$$ の下で

(17) $$\sum_{i\in Tj} s_i+\sum_{j\in Si} t_j \rightarrow \min.$$

あるいは目的関係(17)のかわりにそれと同値である

(17)′ $$\sum_i \sum_{j\in Si} x_{ij} \rightarrow \max$$

を考えてもよい。(16), (17)′ の問題で $x_{ij}>0$ であれば,その双対解は $u_i, v_j, c_{ij}-u_i-v_j=0$ を必ずみたしている[13]。従って $\sum_{i\in Tj} s_i+\sum_{j\in Si} t_j=0$. あるいは同じことであるが, $\max\left(\sum_i \sum_{j\in Si} x_{ij}\right)=\sum_i a_i$ になれば,そのときの x_{ij} は原問題の可能解を構成する。ここで双対問題の一つの可能解に対応する原問題の解も可能解を与える故に,そのような x_{ij} は最適解といえる[14]。併し $\max\left(\sum_i \sum_{j\in Si} x_{ij}\right)<\sum_i a_i$, i. e. $\sum_i s_i+\sum_j t_j>0$ であればそのような x'_{ij} は原問題の可能解ではない。

さて,例題について説明すれば, (16), (17)′ の問題は明らかにV図のようなネットワークにおける最大流量問題である。

さて, (16), (17)′ の問題は明らかに最大流量問題である。例題でいえば,V図のようなネ

12) 標準型輸送問題の双対問題は次のようにあらわせる。

$$c_{ij}\geqq u_i+v_j \qquad \begin{array}{l} i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m \\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \end{array}$$

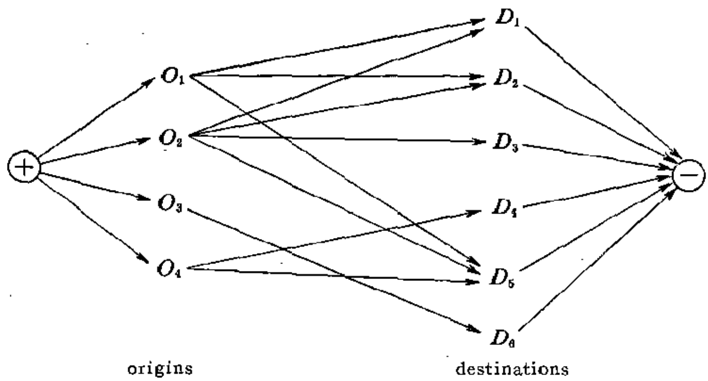
の制約の下に

$$\sum_i a_i u_i+\sum_j b_j v_j$$

を最大にせよ。

13) 文献(2),第6章第4節参照。

14) 同上。



Ⅴ 図

ットワークにおける最大流量問題といえる。つまり，Ⅴ図のネットワークで $c_{ij}-u_i-v_j \neq 0$ であるようなルート $(i\to j)$ を落したものである。

Step 2. (イ)表で $c'_{ij}=0$ であるような (i, j) について $\max(\sum_i \sum_{j\in S_i} x_{ij})$ を計算する。それが $\sum_i a_i$ に等しければ，最適解に到達したことになり，$\sum_i a_i$ より小であれば，それは可能解ではないので，可能解を求める方向へ進むために u_i, v_j の双対解を修正する。それが後の Step 3 である。

なおここで $\max(\sum_i \sum_{j\in S_i} x_{ij})$ の表を用いての計算を説明しよう。

先ず，供給量・需要量をそれぞれ余剰，不足として左縁，上縁に記入する。$c'_{ij}=0$ の (i, j) を□印でかこむ。(ロ表)□印の $(i,$

不足→ 余剰↓	30	50	20	40	30	11
50	□	□			□	
40	□	□	□		□	
60						□
31				□	□	

(ロ) 表

			10	9	30	
	$\boxed{30}$	$\boxed{20}$			□	
	□	$\boxed{30}$	$\boxed{10}$		□	
49						$\boxed{11}^{+}$
				$\boxed{31}$	□	

(ハ) 表

j)についているのに，余剰，不足を調整するようにいわゆる北西隅のルール[15]を適用する。余剰，不足の残りを左縁，上縁に記入する。余剰のある行の□印のところに＋印をつける。＋印を付されたところを1単位増すときの他の□印に与える影響をいわゆる stepping-stone 法により－印，＋印をつける。そうすることにより余剰，不足の残りを小さくするようにルートを改良する。これらを順次くり返すことにより $\max(\sum_i \sum_{j \in Si} x_{ij})$ が計算される(ハ)表)。

Step 3.　余剰をもつ行について□印の (i, j) に＋印を付し，stepping-stone 法により，できるところまで＋，－印を□印の項につける(ハ)表)。

＋，－の付された行と付されない列の交叉する項の集合をと E し，＋，－の付されない行と付された列の交叉する項の集合を E' とする。

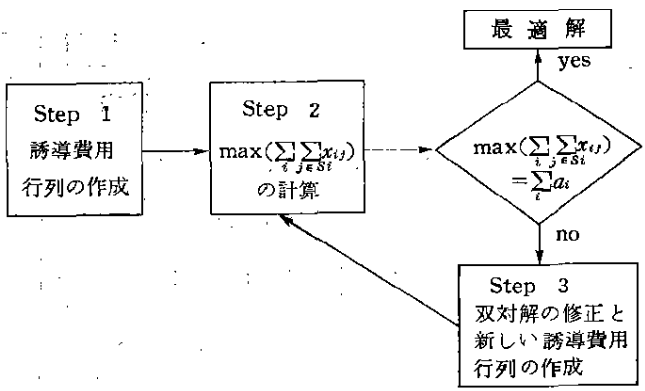
また，$\triangle = \min_{(i,j) \in E} c'_{ij}$ と定義し，

$$
c''_{ij} = \begin{cases} c'_{ij} - \triangle & (i, j) \in E \\ c'_{ij} + \triangle & (i, j) \in E' \\ c'_{ij} & (i, j) \in E, E' \end{cases} \tag{18}
$$

とすると新しい誘導費用行列 c''_{ij} が得られる。これに対応して新しい u'_i, v'_j は次のように修正される。

$$
u'_i = \begin{cases} u_i + \triangle & (i, j) \in E \quad \text{i. e. ＋あるいは－の付された行について} \\ u_i & (i, j) \in E \quad \text{i. e. ＋あるいは－の付されない行について} \end{cases} \tag{19}
$$

$$
v'_j = \begin{cases} v_j - \triangle & (i, j) \in E' \quad \text{i. e. ＋あるいは－の付された列について} \\ v_j & (i, j) \in E' \quad \text{i. e. ＋あるいは－の付されない列について} \end{cases} \tag{20}
$$



Ⅵ 図

15) 表の北西の隅から出発して，需要条件，供給条件をみたすように x_{ij} に数値を与えていく。

0	0	2	2	0	4
0	0	0	2	0	2
1	4	3	1	2	0
2	1	1	0	0	1

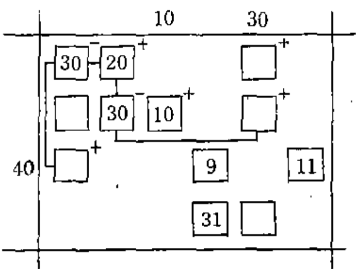
(ニ) 表

: E　$\triangle=1$

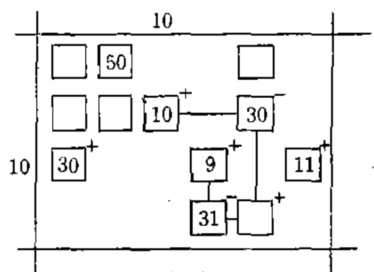
: E'

							u'_i
	0	0	2	2	0	5	1
	0	0	0	2	0	3	2
	0	3	2	0	1	0	2
	2	1	1	0	0	2	1
v'_j	1	0	0	0	1	-1	

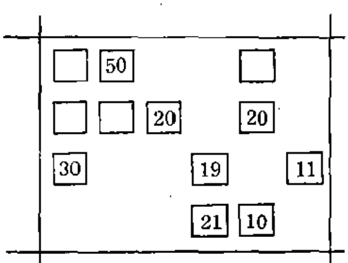
(ホ) 表 C''_{ij}



(ヘ) 表



(ト) 表



(チ) 表

このように修正された u'_i, v'_j, c''_{ij} についても $c''_{ij}=c_{ij}-u'_i-v'_j\geqq 0$ が成立するのは明らかである故，u'_i, v'_j は双対問題の新しい可能解を与えるものである。ここでまた，さきほどと同じく，この新しい双対解に対応する修正原問題を考え，最大流量問題

を解くことになる。

以上のステップを繰り返すことにより，双対可能解から原問題の可能解に到達すれば，そこで最適解が得られたことになる。

このステップを簡単にフロー・チャートに示せば，Ⅵ図のようになる。

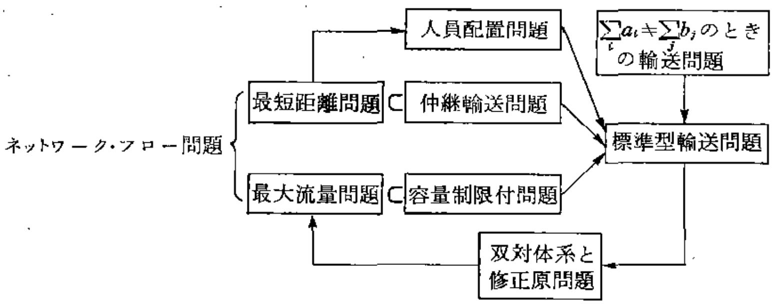
(イ)→(チ)の表はこのステップで例題を解いたものである。

(チ)表で余剰，不足は解消し，従って $\sum_i s_i+\sum_j t_j=0$，　すなわち $\sum_i \sum_{j\in S_i} x_{ij}=\sum_i a_i$，がみたされる故，最適解に到達したことになる。そのときの総輸送費は 330 である。

本節を要約しよう。標準型輸送問題を直接的には最大流量問題に変換できないが(その場合には単に可能解を求めているにすぎない)，いろいろな双対可能解を求めて，それに応じて原問題を修正原問題に変形し，それを通して最大流量問題に変換することができる。

Ⅳ む す び

Ⅰ節ではネットワーク・フロー問題の構造を，Ⅱ節では，それらと非標準型輸送問題の関連性と標準型輸送問題への変換を，Ⅲ節では，標準型輸送問題を，双対体系を通して最大流量問題に変換されることをみてきた。これらを全てまとめて視覚化すると，Ⅶ図のような関係図式が得られるであろう。矢印は変換の方向を示し，A⊂B は A は B に属する。あるいは A は B の特殊ケースであることを意味する。



Ⅶ 図

解法としてのネットワーク・フロー法を stepping-stone 法，MODI 法等と比較してみると次のようなことがいえる。

stepping-stone は原問題を直接に解くものであり，双対体系を明示的には考えていない。MODI 法[16]は，原問題の一つの可能解から出発し，それに対応する双対解をも

16) 文献(13)，20ページ参照。なお文献(1)および文献(13)には双対変数 u_i，v_j の経済的解釈が加えられている。

とめて，それが双対体系における可能解であるかどうかを吟味して，最終的には原問題の可能解に対応して双対解も可能解になるような方向へ進む。ネットワーク・フロー法は MODI 法とは逆の関係にあると云える。すなわち，それは双対体系の可能解から，それに対応する原問題の可能解を発見するためのプロセスである。

付　　録

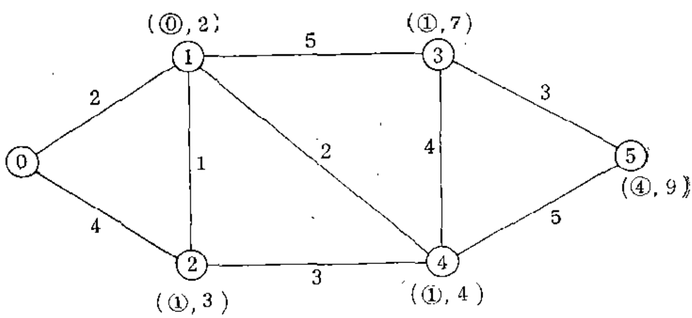
1)　最短距離問題の手解法

始点⓪との直接ルートをもつ点のうち最短距離のものを選び，それにラベルをつける。そのラベルは第1に始点の番号0を記入し，第2に始点からの距離を記入する。I図の例題でいえば，点①に（⓪，2）とラベルをつける。

次にラベルのつけられた点と直接ルートで結ばれた点のうち，ラベルされた点のラベルの中の距離とそのルートの距離の和が最小の点を選び，そこにラベルをつける。その場合のラベルは，第1に相手の番号を，第2に相手のラベルの第2の数値にそのルートの距離を加えたものを記入する。I図では点②に（①，3）とラベルをつける。

以下同様にして，点④には（①，4）とラベルがつけられる。順次ラベルをつけて，終点⑤にラベルされるとそれで解が求まったことになる。各点の始点からの最短距離は，その点のラベルの第2の数値で示され，始点への最短ルートは，ラベルに記された第1の番号を逆にたどって行けばよい。I図では終点⑤に（④，9）とラベルが付され，従って最短ルートは⓪→①→④→⑤であり，最短距離は 2+2+5=9 である。

I′ 図にラベルされたネットワークの図を示しておく。



I′　図

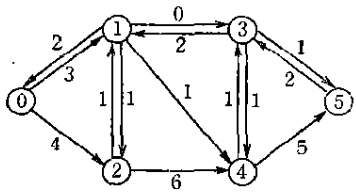
2)　最大流量問題の手解法

II図において，輸送路の矢印の方向をたどり，始点⓪から終点⑤までの任意の可能なルートをとり，そのルートにおける各輸送路の輸送容量の最小値をそのルートで輸送する。

次にこの輸送量を，各輸送路の容量から差し引くと同時に，反対方向の容量に加える。

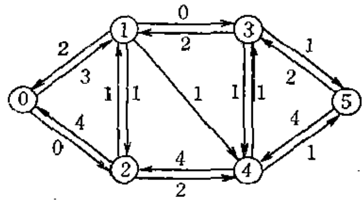
Ⅱ図では，先ず⓪→①→③→⑤のルートをとりだし，そのルートで最小容量の２だけ輸送する。そのときのネットワークはII_1図となる。

以下同様にして，矢印の方向を進み，終点に着くルートが選べる限り続ける。II_1～II_4図までがその手順である。II_4図で終点⑤へ入る輸送容量は０であるから，これで最大流量が実現したことになる。II_5図には，最大流量の輸送計画が示されている。



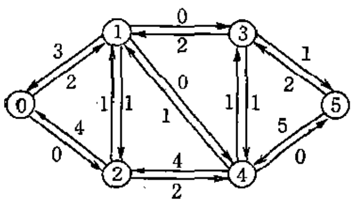
II_1図

⓪→①→③→⑤：2



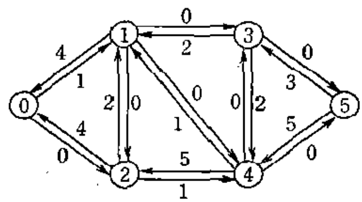
II_2図

⓪→②→④→⑤：4



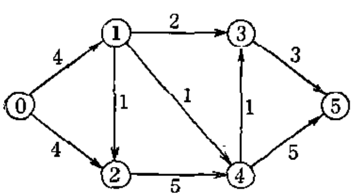
II_3図

⓪→①→④→⑤：1



II_4図

⓪→①→②→④→③→⑤：1



II_5図

参考文献

(1) von Boventer, E., "The Relationship between Transportation Costs and Location Rent in Transportation Problems", *Journal of Regional Science*, No. 27, 1961.

(2) Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, 1963.

(3) Dantzig, G. B., "On the Shortest Route through a Network", *Management Science*, Vol. 6, No. 2, 1960.

(4) Dantzig, G. B., Ford, L. R., Jr., and Fulkerson, D. R., A Primal-Dual Algorithm for Linear Programming, in *Linear Inequalities and Related Systems*, 1956.

(5) Ford, L. R., Jr., and Fulkerson, D. R., "Solving the Transportation Problem", *Management Science*, Vol. 3, No. 24, 1956.

(6) Fulkerson, D. R., Flows in Networks, in *Recent Advances in Mathematical Programming*, 1963.

(7) Orden, A., "The Transshipment Problem", *Management Science*, Vol. 2, No. 3, 1956.

(8) Vajda, S., *Mathematical Programming*, 1961.

(9) Vajda, S., *Readings in Mathematical Programming*, 1962.

(10) 小野勝章, PERT, CPM のあらまし, 「数理科学」2巻7号, 1964年。

(11) 加藤　晃, 交通流配分による幹線街路網の検討, 「都市問題研究」15巻11号, 1963年, 16巻1号, 1964年。

(12) 人見勝人, PERT とCPM,「経営研究会モノグラフ」1964年12月。

(13) 前田義信, 位置価値と運送費, 甲南大学「経済学論集」4巻2号。

(14) 山田浩之, 輸送問題における中継ぎ輸送と固定費, 「現代交通の諸問題」1963年。