經濟論叢

第144巻　第3·4号

平成元年9・10月

京都大學經濟學會

確率的割当問題に対する統計力学的手法の応用

――ミクロ経済学のマクロ的基礎への試み――

秋　田　次　郎

I　モティベーション

マクロ経済学とミクロ経済学との関係を考える議論は，これまでに多くなされてきている[1]。しかし，それらは主にマクロ経済学のミクロ的基礎の問題として，ミクロから出発してその集計としてのマクロを考えるという方向のものだった様に思われる。本稿のモティベーションは，この方向を逆転し，ミクロ経済学のマクロ的基礎を考える事にある。すなわち，マクロから出発してミクロを考える，あるいはマクロ的レヴェルで課された制約が，ミクロの主体に対して如何なる形でたち現われるのかという問題を考察することが目的である。さて，この目的の為に有用な手段を与えるのが，物性物理学に於ける統計力学の手法である[2]。そこで本稿では，ミクロのマクロ的基礎を追求すべく，統計力学的手法により，特に市場需給不均衡下の確率的数量割当問題[3]に焦点を絞って議論する。すなわち，マクロ的に供給を下回る需要が割当てられる時，ミクロの主体が直面すべき需要割当確率分布について論じる。

1) 例えば根岸〔1〕およびそこに掲げられた参考諸文献。
2) かつて，杉本〔2〕はいわゆるマクロの集計問題に関連して統計力学的手法の利用を示唆している。
3) マクロ不均衡理論に於ける確率的割当問題については伊藤〔3〕を参照。しかし本稿のモデルは，よりプリミティブなものにとどまる。

II モデル

1　ミクロ的状態とマクロ的状態，および先験的等確率の原理

いま，経済は（N）個の同質的ミクロ的供給主体から成り立っており，それらが集計的あるいはマクロ的に（E）だけの所与の需要に直面しているものとする。問題は，このEだけの需要がN個の主体に如何に割り当てられるかである。先ず本稿のモデルでは，個々の供給主体が定める需要吸収能力水準（y）を所与としよう。この場合，主体の直面する需要（D）はyを下限とし，Eを上限とする実数値となる。そこで，このDのとり得る値の区間を幅（h）だけの微小区間に分割し，添字（j）によって識別する。そして，ある需要幅（D_j）内の需要を割り当てられる主体が（N_j）だけ存在するとすれば，当然にマクロ集計的制約として $N=\sum N_j$ と $E=\sum N_jD_j$ とが満たされねばならない。

さて，すべてのjについて（N_j）が指定されれば，それがこの経済に於けるマクロ的状態の記述となる。では，今度は事態をミクロ的状態の観点から眺めてみよう。経済にはN個の供給主体が存在し，その各々がいずれかの需要幅（D_j）内の需要を割り当てられるのであるから，ミクロ的状態を完全に特定するには，第 i 番目（添字jと混同されないよう注意されたい）の主体が，いずれの需要幅（D_j）の需要割当を受けるかを定める必要がある。さて，本稿では極めてダイナミックな需要移動の存在する市場を想定し，企業がアクティブに需要に対して働きかける結果，市場が一種の極限的混沌状態に陥っているものと考える。つまり，供給主体は受動的に需要主体サイドのサーチを待つのではなく，ありとあらゆる手段を用いての需要獲得競争に臨むものと考え，その結果，可能なミクロ的状態はいずれも等しい生起確率を持つに至ると仮定する。そして，これを「先験的等確率の原理」と呼ぶことにする。

では，上の様に定義されたマクロ的状態とミクロ的状態の相互の関係を考えてみよう。設定を振り返れば明らかな様に，ミクロ的状態の指定はマクロのそれに比してより多くの情報を含んでおり，一つのマクロ的状態に対応するミク

ロ的状態は一般に多数存在する。そして，「先験的等確率の原理」の教えるところによって，すべてのミクロ的状態は等確率なのであるから，実際に観測されるであろうマクロ的状態は，その対応するミクロ的状態の最も多数を背後に持つマクロ的状態であることになる。これが統計力学的観点の中核ともいうべき考え方なのである[4]。

2 最も確からしいマクロ的状態

従って，特定のマクロ的状態（$\{N_j\}$）に対応するミクロ的状態がどれだけ存在するかを明らかにする必要があるが，これは実は単純な組合せ理論[5]の問題であるに過ぎない。すなわち，第一にN個の主体を所与の（$\{N_j\}$）に配分する場合の数を考え，第二に各jについてN_j個の主体が需要幅D_jの幅hのいずれの部分に割り当てられるかが等確率であるとして，その場合の数はhのN_j乗に比例すると考えれば，求めるミクロ的状態の数$W(\{N_j\})$が得られる。そして，観測さるべき最も確からしいマクロ的状態は次のような最大化問題の解として得られる。

$$\underset{(\{N_j\})}{\text{Maximize}} \quad W(\{N_j\}) = \frac{N!}{N1!\,N2!\,N3!} h^{N1} h^{N2} h^{N3} \tag{1}$$

$$\text{subject to } N = \sum_j N_j \tag{2}$$

$$E = \sum_j N_j D_j \tag{3}$$

ここで，対数関数の連続性と単調増加性により，上の目的関数の代わりに，その対数たる $\ln[W(\{N_j\})]$ を用いることができる。更に，スターリングの近似式

$$\ln X! \fallingdotseq X \ln X - X \tag{4}$$

を用いると，ラグランジュ関数Lは次のようになる。（α，β は乗数）

4) 統計力学的手法については戸田〔4〕あるいは Reif〔5〕を参照。
5) 組合せ理論については Feller〔6〕を参照。

$$L \equiv \{N \ln N - N\} + \sum_j \{N_j \ln N_j - N_j\} + \sum \{N_j \ln h\}$$
$$+ \alpha\{N - \sum_j N_j\}$$
$$+ \beta\{E - \sum_j N_j D_j\} \tag{5}$$

よって最大化の為の一階の条件により

$$N_j = f(D_j)h \tag{6}$$
$$f(D_j) \equiv \exp\left[-(\alpha + \beta D_j)\right] \tag{7}$$

が要請される。即ち，問題の解たる最も確からしいマクロ的状態（$\{N_j\}$）は指数関数で表わされることがわかる。

3　乗数 α と β の決定条件

問題を完全に解くためには，更に(7)式に於ける二つの乗数 α と β とを決定しなければならないが，そのためには再び二つの制約条件(2)(3)式を用いる。なお計算の便宜上，以下では連続型で議論を行なう。すなわち

$$f(D) \equiv \exp[-(\alpha + \beta D)] \tag{8}$$

に対して，(2)(3)式の連続型たる次の二つの条件が課される。

$$\int_0^y [f(D)]dD = N \tag{9}$$

$$\int_0^y [Df(D)]dD = E \tag{10}$$

これらを実行することにより乗数 α, β に関する次の諸条件が得られる。

$$\exp(-\alpha) = -\frac{N}{y}\ \frac{z}{1-\exp(z)} \qquad : \beta \neq 0 \tag{11}$$

$$\exp(-\alpha) = \frac{N}{y} \qquad : \beta = 0 \tag{11$'$}$$

$$\mu = 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{1-\exp(z)} \qquad : \beta \neq 0 \tag{12}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad : \beta = 0 \tag{12$'$}$$

$$\mu \equiv \frac{E}{Ny}, \quad z \equiv \quad -\beta y \tag{13}$$

4 $g(z)$ 関数の性質

上の方程式に於いて，E, N, y は外生的に所与であるので，μ もまた所与となり，$\beta\neq 0$ の場合，(12)式が β を決定すべき条件式である。そして，このとき(11)式によって同時に α の値も決定される。従って(12)式の右辺に現れる関数に注目する必要があり，これを改めて $g(z)$ と定義する。

$$g(z)\equiv 1-\frac{1}{z}-\frac{1}{1-\exp(z)} \tag{14}$$

先ず残念ながら $g(z)$ 関数の逆関数は初等関数によって記述することができない。(12)式を z（あるいは β）について明示的に解くことは断念せざるを得ない。しかし，$g(z)$ は双曲線関数を用いて，更に次のごとくに変形することができる。先ず双曲線正接関数およびその逆数関数は

$$\tanh(x)=\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\frac{1-\exp(-2x)}{1+\exp(-2x)}$$

$$\coth(x)=\frac{1}{\tanh(x)}$$

と定義されるものであり，これによって(14)式は

$$\begin{aligned} g(z)&=\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{1-\exp(z)}\right]-\frac{1}{z}\right\}-\frac{1}{2}\\ &=\left\{\left[-\frac{1}{2}\ \frac{1+\exp(z)}{1-\exp(z)}\right]-\frac{1}{z}\right\}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} g(z)&=\left\{-\frac{1}{2}\coth\left(-\frac{z}{2}\right)-\frac{1}{z}\right\}+\frac{1}{2}\\ &=\left\{\left[-2\tanh\left(-\frac{z}{2}\right)\right]^{-1}-z^{-1}\right\}+\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{15}$$

と変形される。

(15)式の右辺の第一項は，双曲線正接関数と z 自身からなり，これらの性質によりこの部分は z の奇関数である。更に図1に示される両者の関係により，この関数の性質を直観的に捉えることができる。特に，z の絶対値がある程度以上に大きい場合には双曲線関数は殆ど定数値となることから，$g(z)$ 関数は

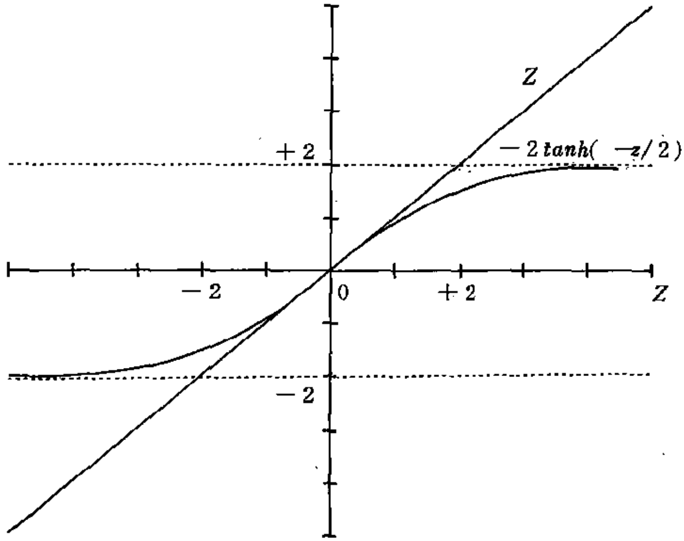

図 1

近似的にではあるが極めて単純化される。即ち

$$\mu \fallingdotseq -\frac{1}{z}+1 \qquad : \beta \gg 0 \tag{16}$$

$$\mu \fallingdotseq -\frac{1}{z} \qquad : \beta \ll 0 \tag{17}$$

(15)式を満たす z と μ とをプロットしたのが図2である。$z \neq 0$ の場合には(12)式によって，また $z=0$ の場合には(12)'式によって，μ と z とは関係づけられているのだ。

5　マクロ的分布関数 $n(D)$

また，z（すなわち β）が決定されれば，(10)(11)'式により α もまた決定され，(7)式が完全に特定される。

ところで，ここで次のごとく $n(D)$ と定義する

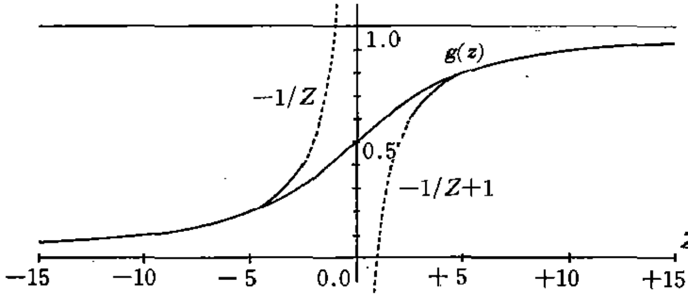

図 2

$$n(z) \equiv \frac{f(z)}{N}$$

すると，この $n(D)$ 関数は，Dだけの需要割当を受ける主体数を表わすマクロ的分布密度関数となる。また実際(9)(10)式から直ちに次の関係が導かれる。

$$\int_0^y [n(D)]dD = 1 \tag{18}$$

$$\int_0^y [Dn(D)]dD = \frac{E}{N} \tag{19}$$

すなわち(14)は規格化条件であり，(15)は分布の平均が E/N となることを意味している。さて $n(D)$ 関数は，第一義的には，観察される蓋然性のもっとも高いマクロ的状態の記述を与えるものであるが，更に個別の主体の立場から見るならば，この分布は，自分達がEだけの総需要量に対して，yという需要吸収能力を設定した場合に直面すべき実現需要割当あるいは実現販売のプロファイルとしての意味を持つ。そして，この $n(D)$ の分布を，μ のいくつかの値に対して描くならば図3のごとくとなる。

5　マクロ的分布関数 $n(D)$ の解釈

この図3について注目すべきことは，先ず第一に分布が平均を中心にピークを持つような形状ではなく，むしろ(5)式の示す様な指数関数の密度を持つことから概してフラットなものとなる点であろう。第二に，図中のいくつかの特

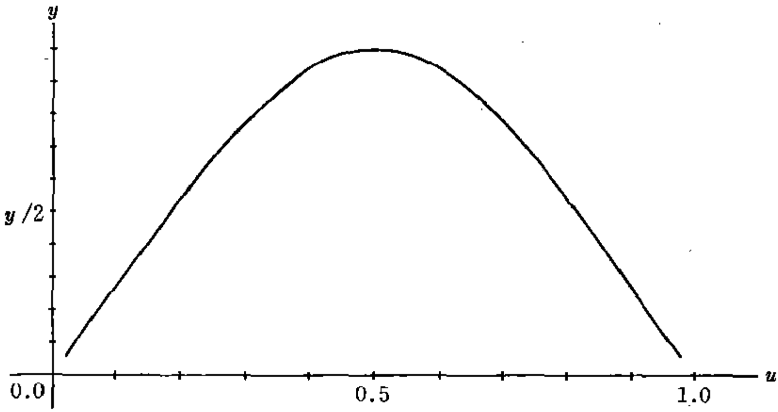

図　3

殊ケースについての直観的理解は次の様なものである。

［$\mu \to 1$ のケース］

先ずパラメータであるμ の意味を考えると，(11)式の定義によって，これは供給主体全体の総需要吸収能力（Ny）に対する総需要量（E）の比率である。従ってμ が 1 に近付くにつれ，総吸収能力に対する総需要量不足がゼロに接近する訳であり，$n(D)$ 関数が $D=y$ の水準で立つ逆L字型となる。なお，需要量が総吸収能力を上回るケースは本稿では基本的に考察の埒外としたが，その場合がここでの $\mu \to 0$ の極限に対応することは明らかだろう。

［$\mu=1/2$ のケース］

次に特殊ケースとして $\mu=1/2$ の場合を考えてみよう。すなわち，総需要量が総吸収能力の半分しかない場合であるが，この場合には $n(D)$ 分布は何と完全にフラットとなり，［0, y］での一様分布になってしまう。これは完全に売れる確率も，全く売れない確率も同じである事を意味しているのであるから，およそ物凄い事態である。ダイナミックに需要が移動する仮想的混沌状態の市場では，数量割当の面に限って考えるとしても，この様な熾烈な状況が立ち現わ

れる。だからこそ，そうした顧客を確保する等，供給主体は一層の需要獲得努力を迫られることにもなるのだ。

[$\mu=1/N$,（$y=E$）のケース]

さて，以上はμの構成要素のうちの総需要量Eの大小に比較的にウエイトをおいて図3を解釈してきた訳だが，今度は供給主体の需要吸収能力yの方に注目してみよう。すなわち，これまでは主体は自らの吸収能力yを超えた割当を受けることは不可能であるとして議論してきたが，そもそも吸収能力などという天井が存在しないとすればどうなるであろうか？ この問いに対する答えとなるのが，$\mu=1/N$ なる特殊ケースである。何故ならば，吸収能力天井の不在とは，yが割当の可能最大値たるEと等しい事に他ならないからである。この場合，図2から明らかな様に，$\beta \ll 0$ となることから，(17)式によって $z=-N$ となり，更に(13)式によって $\beta=N/E$ となる。結局(11)式および(12)式によって(7)式は特定され，$n(z)$ は次の様になる。

$$n(z)=\frac{N}{1-\exp(-N)}\exp\left(-\frac{N}{E}D\right)$$
$$\fallingdotseq N\exp\left(-\frac{N}{E}D\right) \tag{20}$$

この場合も依然として平均は E/N なのであるが，密度関数は図の様な急激な減衰を持つ形状となる。マクロ的に見た場合，ある供給主体にとって，他の供給主体の需要吸収能力の如何が，どれほどに重要な意義を持つものであるかをこのカーブは如実に物語っている。

6 ミクロ経済学のマクロ的基礎

上の第一の極限的ケース以外の場合，すなわち $\mu<1$ の場合には，個別主体は非零の確率で極めて低い割当に甘んじねばならない危険が存在する。その基本的理由は要するに，平均需要割当（E/N）が吸収能力（y）を下回ることにより，主体がまた平均割当を上回る需要割当を享受する可能性をも享受することとなった点にある。すなわち，私の割当が平均を下回る時，あなたの，ある

いはまた別の主体の割当が必ず平均を上回るものとなっている訳であって，言わばマクロの椅子取りゲーム的状況がここに表現されているのである[6]。

そもそも本稿の基本的モティベーションは，マクロから出発してミクロを考える，あるいはマクロ的レヴェルで課された制約が，ミクロの主体に対して如何なる形でたち現われるのかという問題を考察することであり，上の特定のモデルに関して言うならば，マクロレヴェルの制約を表わすパラメータ μ の如何がミクロレヴェルの個別供給主体が直面する実現販売確率分布を決定するという形での「ミクロのマクロ的基礎」が示されているのである。

7　最大値関数 max W

以上でモデルの基本的要素はほぼ全て登場し，(1)(2)(3)式の問題の解も完全に解かれた訳であるが，最後に以上のごとく得られた「最も確からしいマクロ状態」の背後にあるミクロ状態の数の指標が，「マクロ的制約」のパラメータ μ に如何に依存するかについて論じておきたい。即ちモデルの最大化問題に於ける目的関数(1)式の最大値関数 max W を求める。

先ず(1)式は(2)(3)(4)式を用いて

$$\ln W = N\ln N + \alpha N + \beta E \tag{21}$$

と表わすことができる。更にこれに最大化の必要条件たる(11)—(13)式を用いるとWの最大値関数 max W が次のごとく得られる。

$$\max W = [\Phi]^N \tag{22}$$

$$\Phi \equiv y \qquad : \beta = 0 \tag{23}$$

$$\Phi \equiv -y\frac{1-\exp z}{z}\exp\left[(1-z)+\frac{z}{1-\exp z}\right] \qquad : \beta \neq 0 \tag{24}$$

さて，$\beta \neq 0$ の場合，この Φ 関数は残念ながらやはり μ について明示的に書き表わすことができない。しかし(14)式の $g(z)$ 関数に関する議論から，Φ は z 経由で μ に依存するものと考えることができる。つまり(12)式を用いて，

6) Schelling〔7〕を参照，更に岩井〔8〕のモデルの主要な結論は，基本的にこうした状況に依存して導かれているものと考えられる。

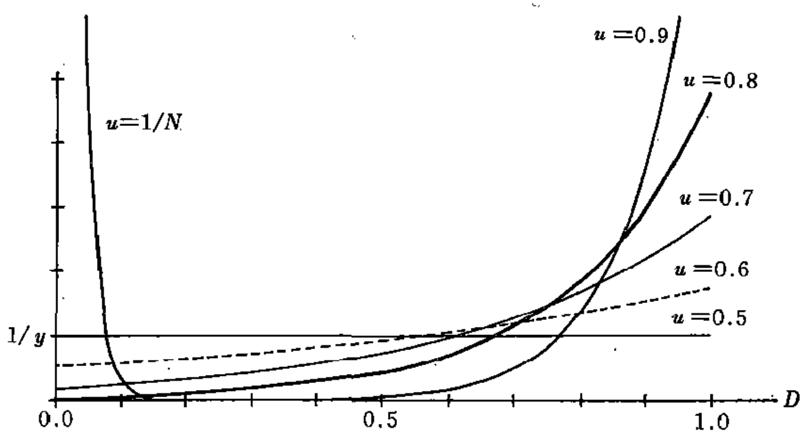

図 4

(24)式はμの関数と考えることができる。この関係を図示したのが図4である。

図からも明らかな様に，Φは $\mu=1/2$ の場合にピークを持ち，そこで左右対称となっている。また ln(max W) は，μ 最も確からしいマクロ状態が指定されたとして，その背後にあるミクロ状態の数を表わすものであり，いわゆるエントロピー概念[7]に関係する量である。よって，$\mu=1/2$ の場合には個別主体の直面する分布が図3に見られる様な当たるも八卦当たらざるも八卦という状況となることに対応して，マクロ的に経済全体の乱雑さも最大となることがわかるのである。

III 先験的等確率の原理再論

以上の分析の妥当性の如何は当然いつに先験的等確率の原理のそれにかかっている。すなわち，可能なミクロ的状態のすべてが各々等しい生起確率を持つという原理の如何である。この原理の妥当性に対しては，現実性のレヴェルおよび原理的レヴェルの両方から批判が予想される。そこで，本稿の立場からこ

7) エントロピー概念については前掲〔4〕〔5〕を参照。

れらに対して一応のディフェンスを行なっておきたい。

先ず第一に現実的妥当性を疑う批判として，現実の市場はむしろある種の顧客管理を伴ったカスタマーマーケット[8]なのであって，先験的等確率原理の成り立つとされるダイナミック需要移動など存在しないとするものがあろう。しかし，需要獲得競争は元来，市場のあらゆる機会を捉えての需要争奪戦であり，本来的に動的な性格のものであると考えられる。むしろ，個別供給主体の主体均衡プロパーの問題としてのみ，需要管理の最適水準などを議論することが果して適切であるのか，必ずしも疑問なしとしない。

第二に，より原理的なレヴェルの問題として，こうした極限的混沌状態を表わすものとして果して先験的等確率原理がもっともらしいかという疑問が生じるであろう。すなわち，何故に当該状態に於いては全ての可能なミクロ的状態を等確率とみなしうるのかという問題である。もとより，需要割当機構に関しては様々なものを考え得る。そして，ある機構によれば本稿で定義されたミクロ状態のあるものには他のそれよりも高い生起確率が付与されることになり，またあるものによればより低い生起確率が付与されることとなるだろう。しかし，様々な機構が並存し，それらの効果が相乗した場合の帰結はどうなるのかという問題については，機構のメカニックスから出発していたのではとうてい解答を与えることが出来ない。そこで，むしろ結果に注目し，様々なマッチング機構および供給主体の競争的な需要獲得努力が，結果として生じるべき全てのミクロ的状態の生起確率を均等せしめると考えるのが本稿の立場なのである。

IV 結　　語

本稿の分析は，冒頭に掲げた基本的なモティベーションたるミクロのマクロ的基礎構築の一つのデモンストレーションであるに過ぎない。また，モデルの展開の方向も様々なものが考えられようが，ここでは最も単純なケースを取り上げるにとどめた。ただ，基本モデルを展開するべき方向を一つだけ示唆して

8) カスタマーマーケットについては Okun〔9〕参照。

おくと，本稿の分析枠組が基本的に組合せ理論に依存していることから，単一の経済よりは，むしろ内部に部分経済をもつ複式構造の経済の分析に本来的威力を示すものと予想される。すなわち，その場合の経済全体に於ける「場合の数」は部分経済毎の「場合の数」の積であるに過ぎないからである。だが，そうしたモデルの複雑化によるまでもなく，統計力学的手法によるマクロからのアプローチの基本的性格は本稿の基本的モデルに於いて既に十分理解し得るものと信ずる。

参考文献

〔1〕 根岸 隆,「ケインズ経済学のミクロ的基礎」, 日本経済新聞社, 1980。
〔2〕 杉本栄一,「近代経済学の解明」, 岩波書店, 1981。
〔3〕 伊藤隆敏,「不均衡の経済分析」, 東洋経済新報社, 1985。
〔4〕 戸田和盛,「熱, 統計力学」, 岩波書店, 1983。
〔5〕 F. Reif, *Statistical Physics*, Berkeley Physics Course Volume 5, McGraw-Hill, 1965. 久保亮五監訳「統計物理」, 丸善, 1970。
〔6〕 W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1957. 河田龍夫監訳「確率論とその応用」, 紀伊国屋書店, 1960。
〔7〕 T. Schelling, *Micromotives and Macrobehavior*, W. W. Norton & company, Inc., 1978.
〔8〕 岩井克人,「不均衡動学の理論」, 岩波書店, 1987。
〔9〕 A. Okun, *Price and Quantities : A Macroeconomic Analysis*, Basic Blackwell, 1981.