氏　　　名	鍛冶静雄（かじ しずお）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第 3098 号
学位授与の日付	平成 19 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	On the nilpotency of rational H-spaces （有理 H 空間の冪零度について）
論文調査委員	（主　査）教授 河野　明　　教授 森脇　淳　　講師 岸本大祐

論文内容の要旨

H-空間とは位相群のホモトピー論的アナロジーで，ホモトピー結合的な積と，ホモトピー逆元を持つ空間である。H-空間 G の不変量として，ホモトピー冪零数，nil(G) という非負整数が Berstain と Ganea によって定義された。この数は位相群の冪零数と同じく H-空間の非可換性をはかる不変量であるが，一般には計算することは非常に難しい。

H-空間の中で特に重要な空間は，ある空間 X のループ空間 ΩX となっているものである。ループ空間のクラスは位相群のクラスと，H-空間として等しいことが知られている。

ループ空間 X のホモトピー冪零数について，最も有効な評価は Berstain と Ganea による古典的な次の不等式である。

$$\mathrm{WL}(X) \leqq \mathrm{nil}(\Omega x),$$

ここで，WL(X) は X の多重 Whitehead 積の最長の長さをあらわすホモトピー不変量である。ここでは，上の不等式に現れる 2 つの不変量と，ある代数的な不変量の関係を調べることで，上の不等式は有理化すると等式になることを示す。

その代数的な不変量は，Sullivan による，有理ホモトピー論を用いて定義される。極小モデルとは，有理数体上の free commutative differentia1 graded algebra で，いくつかの性質を持つものである。冪零空間 X に対して，極小モデルを対応させることができる。この対応により，極小モデルの同型類は，X の有理ホモトピー型と一対一対応がつくことが知られている。

与えられた極小モデルに対し，d1-depth という不変量をその極小モデルのあるフィルトレーションの長さとして，代数的に定義できる。与えられた空間 X の極小モデルの d1-depth は，幾何学的には，X に付随する coformal 空間の，一般 Postnikov tower の最小の高さととらえることができる。以上の不変量の間には，次の主定理にあげる関係が成り立つ。

Theorem 1. 単連結空間 X について，

$$\mathrm{WL}(X_0) = \mathrm{nil}(\Omega X_0) = X \text{ の極小モデルの d1-depth}$$

ただし，ここで X_0 は X の有理化を意味する。

ある空間 X が与えられたとき，$\mathrm{WL}(X_0)$ や $\mathrm{nil}(\Omega X_0)$ を実際に計算することは非常に難しいが，X の極小モデルを構成できれば，その d1-depth を求めることは原理的に可能である。

また，この定理の簡単な帰結として，任意の自然数 n について，$\mathrm{nil}(X_0) = n$ となる空間 X を構成することができる。

さらに，一般の連結 H-空間 G について，G は無限ループ空間と H-同値であることを示し，上の定理とあわせて以下の等式が得た。

Theorem 2. $\mathrm{nil}(G_0) = \mathrm{nil}(\pi(G_0))$,

ここで，ホモトピー群 $\pi(G_0)$ は Samelson 積によって Lie 環の構造を持つとする。

論文審査の結果の要旨

申請者は，位相群のホモトピー論的アナロジーで，ホモトピー結合的な積と，ホモトピー逆元を持つH空間を考える。H空間Gの不変量として，ホモトピー冪零数，nil(G）という非負整数がBerstainとGaneaによって定義された。この数は位相群の冪零数と同じくH-空間の非可換性をはかる不変量であるが，一般には計算することは非常に難しい。

H-空間の中で特に重要な空間は，ある空間Xのループ空間ΩXとなっているものである。Milnorによりループ空間のクラスは位相群のクラスと，H空間として等しいことが知られている。

ループ空間Xのホモトピー冪零数について，最も有効な評価はBerstainとGaneaによる古典的な次の不等式である。

$$WL(X) \leqq nil(\Omega X),$$

ここで，WL(X)はXの多重Whitehead積の最長の長さをあらわすホモトピー不変量である。申請者は，上の不等式に現れる2つの不変量と，ある代数的な不変量の関係を調べることで，上の不等式は有理化すると等式になることを示している。

この代数的な不変量は，Sullivanによる，有理ホモトピー論を用いて定義される。極小モデルとは，有理数体上のfree commutative differential graded algebraで，いくつかの性質を持つものである。冪零空間Xに対して，極小モデルを対応させることができる。この対応により，極小モデルの同型類は，Xの有理ホモトピー型と一対一対応がつくことが知られている。

与えられた極小モデルに対し，d1-depthという不変量をその極小モデルのあるフィルトレーションの長さとして，代数的に定義できる。与えられた空間Xの極小モデルのd1-depthは，幾何学的には，Xに付随するcoformal空間の，一般Postnikov towerの最小の高さととらえることができる。単連結空間について，その有理化のWhitehead lengthとその有理化のループ空間のホモトピー冪零数と，極小モデルのd1-depthは全て等しいことを示し，この応用として全ての自然数nについて，ホモトピー冪零数がnになる空間の存在を示した。

以上の結果は有理ホモトピー論で極めて重要な内容であり，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また，論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果，合格と認めた。