翻訳

『解析力学』（抄）
——釣りあいと運動の一般公式——

J・L・ラグランジュ
有賀 暢迪* 訳

Méchanique analitique (part):
General formulas for equilibrium and motion

J. L. Lagrange
Translated by Nobumichi ARIGA

訳者前書き

ここに訳出したのは，十八世紀を代表する数学者の一人であるラグランジュ（Joseph Louis Lagrange, 1736–1813）の主著，『解析力学』（*Méchanique analitique*, 1788）の一部である．同書はおそらく，力学の歴史上，ニュートン（Isaac Newton, 1642–1727）の『プリンキピア』（自然哲学の数学的諸原理，*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687）と並んで有名だが，後者と同じく，今日ではまず読まれることのない本であると言ってよい．今回，一部分ではあるが翻訳を試みたのは，名前ばかり有名なこの本が実際にはどのようなものなのかを関心のある方々に広く知っていただきたいと考えたからでもある．以下ではまず，同書の特徴や今回の翻訳について，基本的なことがらを述べておく[1]．

『解析力学』という書物について普通最も強調されるのは，それが徹底的に「解析的」だということであろう．とはいえこの形容詞には若干の説明が必要である．今回訳出した「緒言」でラグランジュ自身が述べているように，この本には「図がまったく見出され」ず，必要とされるのは「代数的な操作のみ」である．このことの意味は

* 日本学術振興会特別研究員（京都大学大学院文学研究科）
ariga.nobumichi@gmail.com

[1] ここでは『解析力学』の全容について述べる余裕がない．同書の概要を知るには，ひとまず Pulte 2005 の概説と 山本 1997, 第 16 章・第 17 章の解説に当たるのがよい．

たとえば，本書をニュートンの『プリンキピア』と比べてみれば歴然とする．後者にはそもそも，方程式というものが登場しない．一切の論証は幾何学によってなされており，問題を解くには作図が不可欠であった（したがって，いわゆる「ニュートンの運動方程式」をニュートンは使っていない）．しかしながら十八世紀のあいだに，力学は代数的な手法で，とりわけニュートンとライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716）によって創始された微積分を用いて論じられるようになっていく．この，力学の解析化とも称されるプロセスの推進役を担ったのはオイラー（Leonhard Euler, 1707–1783）やダランベール（Jean le Rond d’Alembert, 1717–1783）といった数学者たちであり，『解析力学』はそうした運動の頂点と見ることができる[2]．したがって『解析力学』の「解析」とは，当時最先端の数学であった**代数的な**微積分のことであると了解されねばならない．そして「緒言」で言われている通り，力学の解析化が高じて力学をほとんど解析そのものにしてしまったのが，『解析力学』という書物であった．

とはいえ，本書の歴史的重要性はその数学的側面にのみあるわけではない．内容面から見ると，『解析力学』は，静力学（物体の釣りあい）を扱った第 1 部と，動力学（物体の運動）を論じた第 2 部からなっている．そこで重要なのは，この二つの題材が同一の基本原理を出発点にして論じられているという点である．ラグランジュはそれを「仮想速度の原理」principe des vitesses virtuelles と呼ぶが，これは今日の物理学で仮想変位の原理ないし仮想仕事の原理と呼ばれているものである．この原理は本来，静力学の原理であるが，ラグランジュは動力学の理論も静力学に帰着させ，そこにこの原理を適用する．このようにして静力学と動力学を同一の原理から出発して統一的・体系的に論じた点が，歴史的に見て，『解析力学』の大きな特徴であった．訳者はこの事情を特に重視して，今回の翻訳では，静力学および動力学の基本原理とその数式表現である「一般公式」を扱っている二つの節（第 1 部第 2 節および第 2 部第 2 節）をそれぞれ訳出することにした[3]．言わば『解析力学』の土台部分であり，同書ではこれに続く諸節で，さまざまな力学法則やいわゆるラグランジュ方程式が「一般公式」から導出されることになる（したがって，今日の一般的な「ラグランジュ形式」とは議論の仕方が異なる）．また，『解析力学』では力学の歴史に関する記述にも相当の紙幅が割かれており，この分野における歴史研究の出発点を与えたということも付記しておこう．

[2] 十八世紀の力学については 山本 1997 が詳しい．また，一般向け記述だが 中澤 2009 も参照．

[3] 『解析力学』では，「部」partie の下が「節」section となっており，「章」chapitre に相当するものがない．なお，「節」の下にある番号付けされた内容上のまとまりは「項」article と呼ばれている．

訳出にあたっては，通常参照される『著作集』所収の版（第 4 版）ではなく，初版からの翻訳を試みた．これには理由がある．実際，著作集版が依拠しているのは 1811 年と 15 年に二分冊形式で出版された第 2 版（およびそれに基づく第 3 版）であるが，この第 2 版というのは初版から四半世紀近くを経ての増補改訂版であった[4]．問題は，第 2 版では内容が相当追加されているだけでなく，初版の記述が書き改められている箇所が数多く存在するという点にある．今回訳出した範囲では，第 1 部第 2 節は部分的な書き換えといくらかの追記で済んでいるが，第 2 部第 2 節に関しては第 4 項以降が全面的に書き直されているのが確認できる．そうした版による異同の詳細については今後の研究を待たねばならないが，まさにこの異同のために，初版はそれ自体で歴史的価値を有していると言えるであろう．

最後に，『解析力学』を読み進める上で必要な数学について若干の注意を述べておく．先に，十八世紀の力学では微積分が用いられるようになったと書いたが，実はこの時代の微積分は今日のものと相当違っている[5]．おそらく最大の違いは，現代では dy/dx が一つの記号となっており（関数 y を x で微分したものを表す），dy や dx だけでは意味をなさないのに対して，十八世紀の微積分はむしろ，dy や dx を単独で扱うという点であろう．この時代には，微分 dx とは有限量 x の無限小部分であるとされ，それに対してさまざまな演算がなされていたのである（それが十九世紀には「厳密でない」と非難されるようになるが，そのことの当否は目下問題ではない）[6]．このほか，偏微分の概念も確立されてくる途上にあったし，ベクトルの表記も使われていないなど，当時の力学文献を読みこなすのは決して簡単ではない．それでも，以下に提示する邦訳では，数学用語や記法を現代のものに翻訳することはあえて行わなかった．数学は一種の言語であり，それを別のもので置き換えることは思考回路を少なからず変更することにつながると思われたためである．

[4] 第 2 版の第 1 巻が出版された後，1813 年にラグランジュが没したため，第 2 巻は遺稿に基づいて編集された．ちなみに，初版の表題は *Méchanique analitique* であったが，第 2 版以降は *Mécanique analytique* と改められている．後者が普通の綴りである．

[5] 十八世紀の微積分については，Bos 1974 がまず参照されるべき基本的研究である．また，どちらかと言えば一般向けの本だが，高瀬 2009 の特に第 1 章も参考になる．

[6] 無限小概念をめぐっては十八世紀にもすでに議論があった．その一端については有賀 2010 を参照されたい．

凡例

1. 翻訳の原典は，ラグランジュ『解析力学』初版（パリ，1788 年）である[7]．ただし必要に応じて適宜，第 2 版（同，1811–1815 年）と著作集版（同，1888–1889 年）も参照した．
2. 訳出したのは同書中，次の箇所である．
   （a）Avertissement [pp. 5–6]
   （b）Première Partie, Section II : “Formule générale pour l’équilibre d’un systême quelconque de forces ; avec la maniere de faire usage de cette formule” [pp. 12–24]
   （c）Seconde Partie, Section II : “Formule générale pour le mouvement d’un systême de corps, animés par des forces quelconques” [pp. 189–198]
3. 本文中，［　］で示したのは訳者による補足・注記である．特に，各項冒頭には内容を表す小見出しを掲げた．
4. 数式の表記は原則として原文を踏襲し，内容に影響しないごく軽微な変更を施すにとどめた．また，便宜上，原典にはない数式番号を付した．

緒言

力学の論考はすでに多々あるが，本書の構想はまったく新しいものである．私はこの学問［science］の理論と，これに関わる問題の解法とを，一般的な公式に帰着させ，それを単に展開することで各々の問題を解くのに必要な方程式すべてが与えられるようにしようと考えた．この目的を達成しようとした私の方法が，望むべきことがらを一切残さないことを期待している．

この著作にはさらにもう一つ別の有用性があろう．すなわち同一の視点の下に，力学の問題を容易に解くためにこれまで見出されてきたさまざまな原理を統一して提示し，それらの結び付きと相互依存関係を示し，それらの正確さと広がりについての判断に手が届くようにすることであろう．

私はこれを二つの部に分割している．静力学すなわち釣りあいの理論と，動力学す

[7] ファクシミリ版が 1989 年に Edition Jaques Gabay から出ているが，今日ではフランス国立図書館の電子図書館サイト（Gallica）を始めとする複数のウェブサイト上で閲覧可能となっている．

なわち運動の理論である．そしてこれらの部それぞれが別々に固体と流体を扱うことになる．

この著作には図がまったく見出されないであろう．私がここで提示する方法は作図も，幾何学的または力学的な推論も要求せず，ただ規則的で一様な歩みに則った代数的操作のみを要求するのである．解析を愛好する人たちは，力学がその新たな一分野となるのを喜んで目にし，このようにその領域を広げたことに対して私に感謝することであろう．

第 1 部第 2 節　力の任意の系の釣りあいに対する一般公式，ならびにこの公式の利用法

1.［仮想速度の原理とその数式表現］

機械における釣りあいの一般法則とは，力［forces］ないし動力［puissances］が互いに，それが加えられる点の，その動力の方向において測られた速度［速度の力方向成分］に反比例するというものである[訳注 1]．

この法則にこそ，一般に**仮想速度の原理**と呼ばれる原理，我々が前節で示したように[訳注 2]，ずっと以前から釣りあいの基本原理と認められてきた原理があり，したがってこれを力学の一種の公理［axiome］と見なすことができる[訳注 3]．

この原理を式に帰着させるために，与えられた直線に沿った向きの動力 $P, Q, R, \ldots$ が釣りあいをなしていると想定しよう．これらの動力が加えられている諸点から，$p, q, r, \ldots$ に［長さが］等しくて，これらの動力の方向に置かれた線分が引かれると考えよう．そして一般に，$dp, dq, dr, \ldots$ によって，変分［variations］を，つまり系の諸物体ないし点の位置における何らかの無限小変化から生じうるだけのこれらの線分の差分［différences］を，指し示すことにしよう[訳注 4]．

訳注 1 “force” と “puissance” はどちらも「力」と訳しうるが，後者には「機械に対して加えられ，運動を生み出そうとする」という意味合いがあった（『百科全書』におけるこの語の説明（d’Alembert [1765]2010）を参照）．実際，『解析力学』においても，静力学では “puissance” の語が頻出するのに対して，動力学ではほとんど “force” しか用いられていないという指摘がある（Capecchi 2002, p. 82）．こうした点を考慮して，本稿では “puissance” に「動力」の語を充てた．

訳注 2 第 1 部第 1 節「静力学のさまざまな原理について」の中では，てこの原理や力の合成と並んで，仮想速度の原理の歴史が述べられている．

訳注 3 公理とは伝統的には，誰もが正しいと認めるべき自明な真理のことを言った．20 世紀以降の数学における用語法（単に議論の前提となる規約を指す）とは意味合いが異なる．

訳注 4 変分は δ で表すのが通例だが（実際，この記号を導入したのはラグランジュである），ここでは d が使われている．後に第 1 部第 4 節第 10 項で δ 記号に置き換えられるが，意味は同じである．

これらの差分が，ある同一の瞬間における動力 $P, Q, R, \ldots$ の通過距離を，すなわち，これらの動力のその方向において測られた速度を表すことになるのは明らかである．

こう置いたところで，まず三つの動力 P, Q, R が釣りあっていると想像してみると，これらの動力のうち任意の一つを，ほかの二つの共同した努力［effort commun］に抵抗しうる固定された支点で置き換えても，釣りあいが依然として維持されることになるのは明らかである．私はそれゆえ二つの動力 P および Q のあいだの釣りあいの法則を探求することから始めることにし，［ひとまずは］第三の動力の作用する点が固定されていて，そのため線分 p および q が $p+dp, q+dq$ ないし $p-dp, q-dq$ になるあいだ線分 r は同じままであると想定する．［上述の］一般原理によれば，動力 P, Q は互いに dp, dq に反比例せねばならないであろう．だが容易にわかるように，二つの動力のあいだには，それらの一方がその本来の方向に動くとき他方が強制的にそれと反対の向きに動くように配置されていない限り，釣りあいはありえないであろう．そこから結果として差分 dp および dq の値は符号が逆でなければならないということになる．それゆえ，力 P, Q の値は二つとも正と想定されているのだから，釣りあいに対して[訳注 5] $\frac{P}{Q} = -\frac{dq}{dp}$, すなわち $Pdp + Qdq = 0$. これが二つの動力の釣りあいに関する一般公式である．

同じようにして，動力 Q を固定点に加えられたものと見なせば，動力 P と R のあいだの釣りあいに関する条件として方程式 $Pdp + Rdr = 0$ が見出されるであろう．同じく二つの動力 Q と R の釣りあいに対しては方程式 $Qdq + Rdr = 0$ が得られることになる．

それゆえ三つの動力 P, Q, R に対しては，三つの方程式

$$Pdp + Qdq = 0, \qquad Pdp + Rdr = 0, \qquad Qdq + Rdr = 0 \tag{1}$$

が得られるが，その際これらの方程式のうち第一のものにおいては r が一定，第二のものでは q が一定，第三のものでは p が一定と想定しているのである．

そこから一般に，p, q, r を同時に変化させると，結果として方程式 $Pdp+Qdq+Rdr = 0$ が得られるであろうということになる．

実際［(証明)］，動力 P, Q, R のあいだに釣りあいがあるためには，これらの動力は一つがほかの二つと独立に動くことができないように配置されている必要がある．

それゆえ差分 dp, dq, dr のあいだ，したがってまた有限量 p, q, r のあいだには，与

訳注 5 原文は初版では “par l’équilibre” だが，第二版で “pour l’équilibre” となっているので，誤植と見なして後者を採用する．

えられた関係がなければならない．それゆえ，何であれこの関係のおかげで，変量［variable］ p はほかの二つの変量 q および r の関数と見なすことができるであろう．そしてその微分 dp は，それゆえに，一般に $dp = mdq + ndr$ によって表されうるであろう．ところで r を一定とすれば，単に $dp = mdq$ が得られたであろうし，q を一定とすれば，$dp = ndr$ が得られたことであろう．それゆえ［式 (1) において］最初の二つの方程式中に見出されることになる項 Pdp は，これらの方程式のうち第一のものにおいては $Pmdq$ で，第二のものでは $Pndr$ で表現されうることになる．それでこれら二つの項の和は $P(mdq + ndr) = Pdp$ となる．同じようにして，q を p と r の関数と見なすことで，第一の［方程式］と第三の方程式に入ってくる二つの Qdq という項の和が，dq において p と r を同時に変化すると見なせば，単に Qdq に帰着させられるということが証明されるであろう．また同様に最後の二つの方程式に見出される二つの Rdr という項は，Rdr へと帰されるであろう（dr において p と q が同時に変化するとすれば）．したがって上で見出された個々の三つの方程式の和は，p, q, r を同時に変化するものと見なせば，$Pdp + Qdq + Rdr = 0$ となるであろう．［これは］すなわち任意の三つの動力 P, Q, R の釣りあいの式である［(証明終わり)］．

もし，線分 s の方を向いた第四の動力 S があったとすれば，似たような推論によって，四つの動力 P, Q, R, S の釣りあいは $Pdp + Qdq + Rdr + Sds = 0$ という式に包摂されるということが見出されたことであろう．

釣りあっている動力の数がどれだけでも，以下同様である．

2.［釣りあいの一般公式，およびモメントについて］

それゆえ一般に，線分 $p, q, r, \dots$ の方を向いていて，何らかの仕方で互いに配置された物体ないし点の任意の系に加えられている任意の数の動力 $P, Q, R, \dots$ に対して，次の形の方程式が得られる．

$$Pdp + Qdq + Rdr + \cdots = 0. \tag{2}$$

これが動力の任意の系に関する釣りあいの一般公式である．

我々はこの公式の各項，Pdp といったものを，力 P の**モメント**[*moment*] と呼ぶことにするが，その際モメントという言葉をガリレオがそれに与えた意味で，すなわち力と仮想速度の積として採用している[訳注 6]．したがって釣りあいの一般公式というのは，すべての力のモメントの和がゼロに等しいということにある．

訳注 6 ここで「モメント」と言われているのは力のモーメントではなく，むしろ仮想仕事に相当する量である．なお，ラグランジュは第 1 部第 1 節で，仮想速度の原理の歴史に関連して次のように書いている

3.［釣りあいの一般公式の利用法］

この公式を利用することに関しては，厄介なことは，与えられた系の本性に応じて，微分［différentielles］ $dp, dq, dr, \ldots$ の値を確定することに帰されるであろう[訳注 7].

それゆえ，異なっているが無限に近接した二つの位置にある系を考察し，問題となっている差分の最も一般的な表式［expressions］を探求することにするが，その際これらの表式には，系の位置の変分の中にあるのと同数の不定量［quantités indéterminées；未知数］が持ち込まれている[訳注 8]．次いで，$dp, dq, dr, \ldots$ のこうした表式を，提示された方程式［釣りあいの一般公式 (2)］に代入することにすると，この方程式は，系の釣りあいが一般にあらゆる向きにおいて維持されるには，あらゆる不定量と独立に成り立たねばならないであろう．それゆえ，同じ不定量それぞれの係数の和を別々にゼロに等しいとする．すると，この手法によって，これらの不定量があるのと同数の，個々の方程式が得られるであろう．ところでその数はつねに系の位置の中にある未知量の数に等しいはずであると納得するのは難しくない．それゆえこの方法で，系の釣りあい状態を決定するのに必要となるだけの方程式が得られるであろう．

まさにこのように，これまで仮想速度の原理を静力学の問題の解に適用した著述家たちは皆それを用いていたのである．だがこの原理を用いるそうしたやり方は，作図や幾何学的考察を要求しかねず，それが解を，静力学の通常の諸原理から導いたとした場合と同じくらい長いものにしてしまう．このことがたぶん今日までこの原理が十分尊重されず，その単純性と一般性からすれば当然であったように思われる利用を妨げてきた主な理由である．

4.［力の中心について］

(p. 8)．「ガリレオは機械に加えられた重さまたは動力の**モメント**［という言葉］によって，機械を反対向きに動かそうとする二つの動力のモメントが等しいときにはそれらのあいだに釣りあいがあるような，そういった仕方で機械を動かそうとするこの動力の努力，作用，エネルギー，**インペトゥス**［l'effort, l'action, l'énergie, l'*impetus*］のことを了解している．そして彼はモメントがつねに，動力の作用する仕方に依存した仮想速度を動力に乗じたものに比例するということを示して見せている」．ラグランジュはこのパラグラフの直前で，ガリレオの『機械学』（1649）と『新科学論議』（1638, 特に「第三日の命題 2 の註解」）に言及しているが，ラグランジュのガリレオ解釈にどれだけの正当性があるかは検討の余地があるように思われる．少なくともガリレオ自身は「仮想速度」という言葉を使っていない．

訳注 7　ラグランジュは差分（différence）と微分（différentielle）という言葉をそれほど厳密には使い分けていないが，後者が用いられる場合には，それが無限に（極めて）小さいという含みがあるように思われる．ラグランジュの無限小理解については，有賀 2010 を参照されたい．

訳注 8　「正誤表」（“ERRATA,” p. x）に従って，本文の “quantités déterminées” を “quantités indéterminées” と読み替えた．

系の諸物体ないし点に作用している力 $P, Q, R, \ldots$ が何であるにせよ，それらはこうした力の方向［の延長線上］に置かれた点に向かっているといつでも想定できるのは明らかであり，それを我々は力の**中心**と呼ぶことにしよう[訳注 9].

そうすると力 $P, Q, R, \ldots$ の方向を表現する線分 $p, q, r, \ldots$ を得るには，力の作用している物体ないし点と，まさにその力の中心とのあいだに，直線距離を取りさえすればよいことになる．ところでこうした中心は系の外に置かれることも，あるいはまたその一部をなすことも可能である．

第一の場合には差分 $dp, dq, dr, \ldots$ が系の配置の変化に依存した線分 $p, q, r, \ldots$ の変分全体を表すのが見て取れる．したがってそれらは量 $p, q, r, \ldots$ の完全微分［difféntielles complettes］であるが[訳注 10]，その際ここでは系の配置に関わるあらゆる量は変化するものと見なされ，力の諸中心の位置に関係付けられているものは一定と見なされる．

第二の場合では，系の物体のうちいくつかはそれ自体が同じ系のほかの物体に作用する力の中心となり，さらに作用と反作用が等しいことから，これら後者の物体は同時に前者に作用する力の中心となる．

それゆえ任意の力 P で互いに作用する二つの物体を考察することにし，この力はこれらの物体の誘引または反発［l’attraction ou de la répulsion］から来るのであっても，あいだに置かれたばねからでも，ほかの何らかの仕方によってでもよいとして，p をこれら二つの物体間の距離とし，dp' はそれらの物体のうち一方の配置の変化による限りでのこの距離の変分を表すものとする．この物体に関して，力 P のモメントとして Pdp' が得られることになるのは明らかである．同様に dp'' で，他方の物体の配置の変化から生じる同じ距離 p の変分を指し示せば，この第二の物体に関して，同じ力 P のモメント Pdp'' が得られるであろう．それゆえこの力に依存する合計のモメントは，$P(dp' + dp'')$ によって表現されることになる．だが $dp' + dp''$ は我々が dp で指し示そうとする p の完全微分であることが見て取れる，というのも距離 p は二物体の移動によってしか変化しえないからである．それゆえ問題のモメントは単に Pdp で表されることになる．この推論は好きなだけ多くの物体に拡張できる．

訳注 9　中心に向かう力という概念はニュートンに由来する．『プリンキピア』の定義 5 には次のようにある．「向心力とは，中心とするある一点に向ってあらゆる方向から，物体が引きよせられたり，押しやられたり，またはなんらかの形でそのほうに向かわされるところのものである」（Newton 1971, 61 頁）.

訳注 10　ここで「完全微分」と呼ばれているのは，今日の全微分のことであると考えてよさそうに思われる．全微分の概念の出現については Katz 2005, pp. 623–628 を参照.

5.［釣りあいの一般方程式を得る方法についてのまとめ］

そこから結果として，与えられた系のあらゆる力のモメントの和を得るには，系の諸物体ないし点に作用する力のそれぞれを個別に考察し，これら諸々の力の各々に，それぞれの力の両端のあいだ，すなわちこの力が作用する点とそれが発する点とのあいだの相対距離の微分を乗じたものの和を取りさえすればよいであろうということになるが，その際これらの微分においては，系の配置に依存する量はすべて変化するものと見なし，［系の］外部にある点または中心に関連付けられているものは一定と見なす，すなわち系の配置を変化させるあいだ，これらの点は固定されているものと考える．この量がゼロに等しいとされれば，釣りあいの原理の一般公式が与えられることになる．

6.［直交座標の導入］

その同じ量を解析的に表すのに，極めて単純に見えるのは，与えられた系のあらゆる点の位置を空間中に固定された三つの軸に平行な直交座標［coordonnées rectangles］に関係付けることである[訳注 11]．

我々は一般に，力が加えられる点の座標を x, y, z と名付けることにし，次いでそれらを，系の諸々の点に関して，一つないしそれ以上のダッシュで［x, x', x'' のように］区別することにしよう．

我々は同様に a, b, c で，力の中心に関する座標を指し示すことにしよう．

距離 $p, q, r, \ldots$ は，一般に式

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} \tag{3}$$

で表されることになるのが見て取れるが，この中で量 a, b, c は，それらが系の外に置かれた固定点に関係付けられている場合には，x, y, z が変化するあいだ，一定となるか少なくともそう見なされるべきであろう．しかし力が系自体の物体のどれかから発している場合には，こうした量 a, b, c は $x'''^{\cdots}, y'''^{\cdots}, z'''^{\cdots}, \ldots$ となり，したがって変量であろう．

こうして有限量 $p, q, r, \ldots$ の表式が，系の諸物体の座標の既知の関数として得られたら，あとは通常通り微分すればよいことになり，その際これらの座標を変化するも

訳注 11 座標とは本来，与えられた点の位置を表す数値の組というよりは，その点から座標軸に下ろした線分そのもののことを指していた．なおその際，座標の「方向」は与えられた点から座標軸への向き，すなわち負の方向になる．

のと見なせば，その結果釣りあいの一般公式に入ってくる微分 $dp, dq, dr, \ldots$ の求める値が得られる．

だが力 $P, Q, R, \ldots$ を与えられた［各］中心に向かうものとつねに見なしうるのだとはいえ，こうした中心についての考察は問題にとって無縁のものであり，そこでは通常，与えられたものとして考えるのは，各々の力の量［大きさ］と方向だけなので，微分 $dp, dq, dr, \ldots$ を表すより一般的な手法が次である．

7.［角（方向余弦）を用いた表現］

それでまず，これはつねに許されることだが，力 P がある固定中心に向かっていると想定すると，

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \tag{4}$$

が得られ，そしてそこから，a, b, c を変化させずに微分すると，

$$dp = \frac{x-a}{p}dx + \frac{y-b}{p}dy + \frac{z-c}{p}dz. \tag{5}$$

ところが容易にわかるように $\frac{x-a}{p}, \frac{y-b}{p}, \frac{z-c}{p}$ は線分 p が座標 x, y, z となす角の余弦にほかならない．それゆえ一般に力 P の方向が x, y, z の軸またはこれらの軸に平行なものとなす角を α, β, γ と名付けると，$\frac{x-a}{p} = \cos\alpha$, $\frac{y-b}{p} = \cos\beta$, $\frac{z-c}{p} = \cos\gamma$ が得られることになり，したがって

$$dp = \cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz. \tag{6}$$

ほかの微分 $dq, dr, \ldots$ についても同様である．

角 α, β, γ に関しては，まず $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ に気付くであろうが，このことは先の式から明白である．第二に線分 p の xy 平面への射影が x の軸となす角を ϵ と名付ければ，$\pi = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ としておくと，$\frac{x-a}{\pi} = \cos\epsilon$, $\frac{y-b}{\pi} = \sin\epsilon$ が得られることになるのは明らかである．それゆえ $x-a$, $y-b$ にそれらの値 $p\cos\alpha$, $p\cos\beta$ を入れると，$\pi = p\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta} = p\sqrt{1-\cos^2\gamma} = p\sin\gamma$ も得られることになる．それゆえ $\frac{x-a}{p} = \sin\gamma\cos\epsilon$, $\frac{y-b}{p} = \sin\gamma\sin\epsilon$. したがって，$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\epsilon$, $\cos\beta = \sin\gamma\sin\epsilon$.

8.［力はある平面に対して垂直に作用すると考える］

私は次に，dp は力 P の加えられる物体ないし点がこの力の方向に通過しうる小さな距離を表現しているのだから，$dp = 0$ とすれば，この点はまさにその力の方向に垂

直な方にしか動くことができなくなると考える．それゆえ $dp = 0$ は力 P の方向がそれに対して垂直となる平面の微分方程式となる．

いま一般に力 P は微分方程式 $du = 0$ で表現される平面に対して垂直に作用するものと想定し，du は完全微分でもそうでなくてもよいとしよう．この方程式は方程式 $dp = 0$ と等価のはずなので，V を座標 x, y, z の有限の関数として，$du = Vdp$ が必然的に得られることになる．そしてこの関数を見出すには，前項から $dp = \cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ を得ているのだから，偏微分［différences partielles］に関して受け入れられている表記に従うと，$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dz}\right)^2 = 1$ が得られることになるということに注意すれば十分であろう[訳注 12]．それゆえさらに $\left(\frac{du}{Vdx}\right)^2 + \left(\frac{du}{Vdy}\right)^2 + \left(\frac{du}{Vdz}\right)^2 = 1$. そこから

$$V = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2} \tag{7}$$

が引き出される．それゆえ

$$dp = \frac{du}{V} = \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}. \tag{8}$$

同じようにして，力 $Q, R, \ldots$ の方向と垂直な平面の微分方程式に基づいて，ほかの微分 $dq, dr, \ldots$ の値が決定されるであろう．

9.［一般公式から，必要な方程式すべてが得られる］

微分 $dp, dq, dr, \ldots$ の値が系の諸物体の座標の微分関数［fonctions differentielles］として知られたなら，あとはそれらを一般公式

$$Pdp + Qdq + Rdr + \cdots = 0 \tag{9}$$

に代入し，次にこの方程式を最も一般的で，それに含まれる微分とは独立なやり方で，精査しさえすればよいであろう．

それゆえ系がまったく自由で，諸物体の座標のあいだにも，したがってそれらの微分のあいだにも与えられた関係が一切ないとすれば，先の方程式は，こうした微分とは独立に満たされねばならないことになり，またそのためには各々の微分が乗ぜられているであろう項［係数］の総和を別々にゼロに等しくせねばならないことになる．

訳注 12 Cajori（[1928–29]2007, vol. 2, pp. 221–222) によれば，偏微分を $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ のように括弧で表す方式はオイラーが『微分計算教程』（*Institutiones calculi differentialis*, 1755）で提示し，広く用いられた．

このことによって，変化する座標［座標変数］があるのと同数の，したがってこれらすべての変量を確定し，それによって釣りあい状態にある系全体の配置を知るのに必要なだけの，方程式が得られるであろう．

10.［条件方程式の利用］

しかし系の本性が物体はその運動の際に特別な条件下にあるというようなものであるならば，これらの条件を我々が**条件方程式**［équations de condition］と名付けることにする解析的な方程式によって表すことから始めねばならなくなる．このことはつねにたやすい．たとえば，もし物体のうちのいくつかが与えられた線または面の上を動くようにされていたならば，これらの物体の座標間で，与えられた線または面の方程式それ自体が得られたことであろう．［あるいは］もし二つの物体が，必ず一方から他方までつねに同じ距離 k を隔てて見出されるというふうに結合されていたならば，明らかに方程式 $k^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$ が得られたことであろうし，そのほかについても同様である．

条件方程式がこのようにして見出されたなら，それを用いて，$dp, dq, dr, \ldots$ の表式中にある微分を可能なだけ消去し，残っている微分が互いに完全に独立で，もはや系の配置の変化に際して随意なものしか表さないようにする必要があろう．そのとき釣りあいの一般公式は，この変化がどのようなものでありうるにせよ成り立たねばならないので，各々の不定な微分に掛かることになる項［係数］の総和を，そこで別々にゼロに等しくせねばならないことになる．そこからまさにこうした微分があるのと同数の個々の方程式が出てくるであろう．そしてこれらの方程式は与えられた条件方程式と結び付けられると，系の釣りあい状態の決定に必要なすべての条件を含むことになる[訳注 13]．なぜなら容易にわかるようにこれらの方程式をすべてまとめたものは系の物体すべてに対して座標の役割をする諸々の変量とつねに同じ数となり，したがっていつでもこうした変量それぞれを確定するのに十分となるからである．

11.［極座標などの利用］

さらに我々がつねに直交座標によって物体の場所を定めてきたのは，それはこの手法が単純さと計算の容易さにおいて優れているからである．しかしこれは，先の方法を用いる際にほかのものは利用できないということではない．なぜならこの方法にお

訳注 13 「正誤表」に従い，“...conditions nécessaires par la détermination...” を “...conditions nécessaires pour la détermination...” に読み替えた．

いて，物体の場所に関し，ほかの線ないし量よりも直交座標を用いるように強制するものが一切ないことは明らかだからである．たとえば二つの座標 x, y の代わりに，状況がそれを要求すると見えるときには，動径［rayon vecteur］ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ と，正接が $\frac{y}{x}$ であるような角 ϕ（これは $x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi$ を与えることになる）とを用い，第三の座標 z はそのままにしておくことができるであろう．またあるいは動径 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ならびに $\tan\phi = \frac{y}{x}, \tan\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ であるような二つの角 ϕ および ψ を用いることになるが，これは $x = \rho\cos\psi\cos\phi, y = \rho\cos\psi\sin\phi, z = \rho\sin\psi$ を与えることになる[訳注 14]．またはそのほかの何らかの角や線でもよい．

さらに，問題の方法に入ってくるのは厳密には微分 dx, dy, dz の考察だけなので，これらの代わりに直接，何らかのほかの微分表現を導入することが許されるのであり，それらはそれ自体で積分可能であってもなくてもよく，また x, y, z の値をまったく考慮せずにであるということを注意しておこう．

第 2 部第 2 節　任意の力で動かされている，物体の系の運動に対する一般公式

1.［力とその効果について］

物体の系に作用する力が本書の第一部で提示された法則に従って配置されているときには，これらの力は相互に打ち消し合い，系は釣りあったままである．しかし釣りあいが成り立たないときには，物体は必然的に運動するはずであり，全体としてであれ部分的にであれそれらに働きかける［sollicitent］力の作用に服従する．与えられた力によって生み出される運動の決定が，この第二部の目的である．

我々はここでは主として加速力ないし減速力［forces accélératrices ou rétardatrices］を考察することにするが，その作用というのは連続的で，重さ［gravité］のそれのようなものであり，各瞬間に無限に小さな等しい速度を，すべての物質粒子に込めようとするものである［tendent à imprimer］[訳注 15]．

訳注 14 今日の一般的な三次元極座標（球座標）とは角の取り方が異なっている．

訳注 15 十八世紀の力学文献においては，加速度ではなく加速力という用語が頻出する．現代の力学用語に翻訳すれば，これは加速度あるいは単位質量あたりに作用する力のことである．歴史的にはこの表現はニュートンに由来しており，『プリンキピア』では定義 7 で次のようにして「向心力の加速量」が定義された後，これを「簡単のため」加速力と呼ぶとされている．「向心力の加速量とは，この力が与えられた時間内に生ずる速度に比例する，向心力の測度［尺度］である」（Newton 1971, 63 頁）．なお，減速力という表現はニュートンにはない．

こうした力が自由にかつ一様に作用するときには，それは必然的に時間に比例して増大する速度を生み出す．そしてこのようにして与えられた時間に生成された速度を，この種の力の最も単純な効果［effets；結果］であると，したがってその尺度として役立つ最も適切なものと，見なすことができる．力学においては，力の単純な効果は既知のものとして受け取らねばならない．そしてこの学問の技法はただ，まさにそういった力の結合して変容した作用から生じるはずの複合的効果をそこから導き出すことにあるのである．

2.［力，距離，時間，速度の尺度について］

我々はそれゆえ各々の加速力について，我々が時間の単位として取ることにする一定の時間のあいだ，それがずっと同じように作用することで運動体に込めることのできる速度を知っていると想定することにしよう．そして我々は単に**加速力**［という言葉］でまさにその速度のことを了解するようにしよう．それは，もし一様に続いたとしたならば，運動体がまさにその［単位］時間で通過したであろう距離によって測られねばならない．そしてガリレオの諸定理によって，この距離は物体が加速力の一定の作用によって実際に通過した距離のつねに二倍であることが知られている[訳注 16]．

さらに既知の一つの加速力を単位に取り，それにほかのすべてのものを関係付けることができる．そのときには空間の単位としては，等しく続いたまさにその力が時間の単位に取ろうとする時間で［物体を］通過させたであろう距離の二倍を取らねばならないことになり，この時間でまさにその力の連続的な作用によって獲得される速度が，速度の単位となる．このようにして力，距離，時間，速度は，通常の数学的な量の，単純な比にすぎなくなる．

たとえば，（これはとても自然なことだが）パリの緯度における重み［gravité；重力加速度］を加速力の単位に取り，時間を秒で計るならば，そのときには通過距離の単位として 30.196 パリ・ピエを取るべきであろう，というのは 15.098 ピエが，放って

訳注 16 敢えて現代の物理学の言葉に翻訳すれば次のようなことである．加速度 a が単位時間（$t = 1$ と考える）に与える速度は（$v = at$ より）a であり，この速度による等速運動で単位時間に通過される距離も（$s = vt$ より）a となる．一方，加速度 a による静止からの等加速度運動によって単位時間に通過される距離は（$s = at^2/2$ より）$a/2$ であるから，先の通過距離はこの二倍となっている．なお，「ガリレオの諸定理」が具体的に何を指すかは必ずしも明確でないが，ここで述べられているような主張は『二大世界系対話（天文対話）』（1632）や『新科学論議』（1638）に散見される（詳細は高橋 2006, 255–260 および 300–307 頁を参照．同書では「倍距離則」と呼ばれている）．この点に関しては伊藤和行氏から詳しいご指摘をいただいた．

おかれた物体がこの緯度において一秒間に落下する距離だからである[訳注 17]．そして速度の単位は重さのある物体がこの高さから落下して獲得する速度ということになる．

3.［物体の位置と速度の表現］

これらの予備的概念が想定されたところで，互いに好きなように配置され，任意の加速力によって動かされている物体の系を考察しよう．

m をこれらの物体のうち任意の一つの質量とし，点と見なされるとする．そして x, y, z を任意の時間 t の終わりにおいてまさにこの物体の絶対的な位置を定める三つの直交座標とする．これらの座標は，空間中に固定され，座標の原点と呼ばれる点で垂直に交差する三つの軸につねに平行であると想定されている．それらはしたがって物体からまさにこれらの軸を通る三つの平面までの直線距離を表している[訳注 18]．

そうするとこれらの平面の直交性のために，座標 x, y, z はまさにこれらの平面から遠ざかりつつ物体が通過する距離を表現している．したがって $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ はこの物体がそうした面の各々から遠ざかろうとして任意の瞬間に有する速度を表現することになる．これらの速度は，もし物体がそれに続いて放っておかれたとしたならば，運動の理論の基本原理［慣性の法則］により，それ以降の瞬間において一定のままであったことであろう．

4.［運動の法則を釣りあいの法則に帰着させる］

いま $P, Q, R, \ldots$ は加速力であり，同じ瞬間において質量 m の各点に，与えられた方向に働きかけるものとするが，これはすなわち，こうした力の各々が質量 m に，もし単位として取られた時間において別々にかつ同じように作用したならば込めたことであろう速度のことである．こうした力の作用がどのような変量でありうるにせよ，それでもそれは瞬間においては一定と見なすことができる．したがって結果として，一定の加速力によって生成される速度は時間に比例するので，力 $P, Q, R, \ldots$ が瞬間 dt において物体 m に込めるあるいは込めようとする速度は，$Pdt, Qdt, Rdt, \ldots$ で表され，かつこれらの力と同じ方向を有するということになる．

それゆえ次の瞬間には物体は同時に速度 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, Pdt, Qdt, Rdt, \ldots$ で運動しようとすることになる．そして，もし自由になったのであれば，これらから合成された運

[訳注 17] 1 パリ・ピエは約 32.4 センチメートルなので，30.196 パリ・ピエは約 9.78 メートル．なお，ここで挙げられているのと非常に近い値が『プリンキピア』で与えられているが（第三篇命題 4, Newton 1971, 426 頁），それが直接の出典かどうかは不明である．

[訳注 18] 「座標」については前出の 訳注 11 を参照.

動を実際に取ったことであろう．だがこの運動は物体相互の結び付きによって変化させられたのである．

ところで $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ は一般に時間 t 後における物体の実際の速度を表しているのだから，時間 $t+dt$ 後における速度は $\frac{dx}{dt}+d\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}+d\frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}+d\frac{dz}{dt}$ で表されることになる．そうすると物体は速度 $Pdt, Qdt, Rdt, \ldots$ を失い，その代わりに座標 x, y, z を増大させようとする速度 $d\frac{dx}{dt}, d\frac{dy}{dt}, d\frac{dz}{dt}$ を得たことになる．あるいは，同じことになるが，速度 $Pdt, Qdt, Rdt, \ldots$ と，反対方向すなわち線分 x, y, z 自体の方を向いた速度 $d\frac{dx}{dt}, d\frac{dy}{dt}, d\frac{dz}{dt}$ とを同時に失ったことになる[訳注 19]．

それゆえこうした諸々の速度を生み出すことのできる加速力もまた打ち消されたことになり，したがって互いに釣りあわされたことになる．それゆえ結局のところ系においては，それを構成する各物体 m が，与えられた加速力 $P, Q, R, \ldots$ と，さらに線分 x, y, z の方を向いた加速力 $\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt}, \frac{d\frac{dy}{dt}}{dt}, \frac{d\frac{dz}{dt}}{dt}$ すなわち（dt を一定として[訳注 20]）$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ とによって同時に動かされていると想定すれば，釣りあいがあったことになる．そこから系の運動の法則は釣りあいのものと，x, y, z の方を向いた新しい加速力 $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ を単に加えれば，同じであるということがわかる[訳注 21]．

5. ［運動の一般公式を見出す］

それゆえ運動に対する一般公式も，釣りあいに対するものを見出したようにして，見出すことができるであろう．そしてこの運動の公式は釣りあいのものにほかならないことになるが，それは系の各物体 m が，それを動かすと想定されている加速力 $P, Q, R, \ldots$ の方向に力 $mP, mQ, mR, \ldots$ で，さらに座標 x, y, z の方向に力 $m\frac{d^2x}{dt^2}, m\frac{d^2y}{dt^2}, m\frac{d^2z}{dt^2}$

訳注 19　前のパラグラフとこのパラグラフで言われていることをまとめておく．(1) 物体間の相互作用がなければ $t+dt$ 後における速度は $\frac{dx}{dt}$ 等と Pdt 等の合成であったはずだが，実際には相互作用があるためにそうならない．(2) $t+dt$ 後における実際の速度は一般に（形式上）$\frac{dx}{dt}+d\frac{dx}{dt}$ 等と書くことができる．(3) したがって両者を比較すると，物体は相互作用の結果 Pdt 等を失って $d\frac{dx}{dt}$ 等を得た，あるいは Pdt 等および逆向きの $d\frac{dx}{dt}$ 等を失ったことになる．

訳注 20　dt を一定にするといった操作は十八世紀の微積分で頻出するもので，技術的には $ddt = 0$ と設定することに帰着する．これは t を一定の刻みで変化させたときの x 等の変化を考えることを意味し，したがって t を独立変数として扱うことにつながる．Bos 1974 はこの点に，関数概念に基づく微積分が確立していく契機を認めている．

訳注 21　前のパラグラフの結果を，ラグランジュは Pdt 等と $d\frac{dx}{dt}$ 等が互いに打ち消しあうと解釈している．これを現代的に述べ直せば，作用している力と慣性力（逆向きの加速度と質量の積）とが釣りあうという，いわゆるダランベールの原理になる．ただし「ダランベールの原理」をめぐっては歴史的にも概念的にも相当込み入った事情があるため，ラグランジュがここでダランベールの原理を用いている，といった物言いには注意する必要がある．この点についてはひとまず，山本 1997, 第 13 章・第 17 章の議論を参照.

で，同時に引かれると想定することによってである．

そのために，系の諸物体の位置が無限にわずかだけ変化し，その結果座標 x, y, z が $x-\delta x, y-\delta y, z-\delta z$ になり，量 $\delta x, \delta y, \delta z$ は無限小であると考えよう．こうした量は物体 m が線分 x, y, z に沿って通過したことになる小さな距離を表すのが見て取れる，というのはこれらの線分が互いに垂直であるために，その一つと平行に通過された距離はそれの変分にのみ依存し，ほかのものにはまったく依存しないからである．

そうするとまず力 $m\frac{d^2x}{dt^2}, m\frac{d^2y}{dt^2}, m\frac{d^2z}{dt^2}$ の**モメント**に関して $m\frac{d^2x}{dt^2}\times\delta x, m\frac{d^2y}{dt^2}\times\delta y, m\frac{d^2z}{dt^2}\times\delta z$ が得られることになる．

6.［承前］

いま加速力 $P, Q, R, \ldots$ を，与えられた中心に向かうものと見なすことにしよう．そして $p, q, r, \ldots$ は各物体 m から各中心までの距離とする．$\delta p, \delta q, \delta r, \ldots$ は線分 x, y, z の変分 $\delta x, \delta y, \delta z$ に由来する，線分ないし量 $p, q, r, \ldots$ の変分を表現しているものとする．こうした量 $\delta p, \delta q, \delta r, \ldots$ が物体 m の線分 $p, q, r, \ldots$ に沿った通過距離を同時に表すことになるのは明らかである．それゆえ $mP\times\delta p, mQ\times\delta q, mR\times\delta r, \ldots$ はまさにこれらの線分 $p, q, r, \ldots$ に沿って作用する力 $mP, mQ, mR, \ldots$ の**モメント**となる．

ところで釣りあいの一般公式というのは系のすべての力の**モメント**の和がゼロでなければならないということにある（第 1 部第 2 節第 2 項）．それゆえ求める公式は，提示された系の各物体に関する量

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)+m\left(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\cdots\right) \tag{10}$$

の総和をゼロに等しくすれば得られることになる．

7.［運動の一般公式，および変分について］

それゆえこの和を積分記号［signe intégral］ **S** で指し示し，これは系のすべての物体を包含すべきものであるとするならば[訳注 22]，点と見なされ，任意の加速力 $P, Q, R, \ldots$ によって動かされている物体の任意の系に関する運動の一般公式として

$$\mathbf{S}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z+P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\cdots\right)m=0 \tag{11}$$

が得られることになる[訳注 23]．

訳注 22 ラグランジュが **S** で表しているのは系を構成する粒子についての総和であり，場合によって有限和にも無限和にも解釈される．本節第 9 項を見よ．

訳注 23 現代的な式に書き直せば $\sum((\mathbf{F}-m\mathbf{a})\cdot\delta\mathbf{r})=0$ となる．ラグランジュの議論では力 P 等が単位質量あ

この公式の利用にあたっては，釣りあいの公式に関するのと同じ規則に従うことになる．そうするとここで，第 1 部第 2 節の第 3 項から最後までで言われたことをすべて適用する必要があることになるが，その際，先の［運動の］公式において表記記号 δ で示された微分は釣りあいの公式において通常の記号 d で示された微分に対応しており，同じ規則と同じ操作［演算］によって定められているということを指摘しておく．

以下では δ で示されたそうした微分を**変分**と名付けることにするが，これは同じ公式中に見出され，時間と物体の運動とに応じた変量の継起的な増大または減少を表す，d で示されるほかのもの［微分］からそれを区別するためである．対して**変分**は，物体の瞬間的な位置に持ち込まれ，その実際の運動とはまったく独立な，恣意的な変化に関わっている．

8.［運動の一般公式の書き換え］

一般に，$\delta p, \delta q, [\delta r,] \ldots$ の値を $\delta x, \delta y, \delta z$ に即して求めることから始める必要があろう．このことはたやすい，というのは，力 P の中心の位置を定める直交座標を a, b, c と名付けると，

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \tag{12}$$

が得られるからである．そこから，x, y, z だけを変化させると

$$\delta p = \frac{x-a}{p}\delta x + \frac{y-b}{p}\delta y + \frac{z-c}{p}\delta z \tag{13}$$

が引き出されるが，この表式は，我々が引用箇所［第 1 部第 2 節第 7 項］ですでに注意したように，一般的で力の中心の位置とは独立な次の形に帰着されうる．

$$\delta p = \cos\alpha\delta x + \cos\beta\delta y + \cos\gamma\delta z \tag{14}$$

（この際，力 P の方向が座標 x, y, z となす角を α, β, γ と名付ける），あるいはさらに次のものになる．

$$\delta p = \sin\gamma(\cos\epsilon\delta x + \sin\epsilon\delta y) + \cos\gamma\delta z, \tag{15}$$

ϵ は x, y 平面上に射影されたその［力 P の］方向が x の軸となす角度である．そしてほかの変分 $\delta q, \delta r, \ldots$ についても同様である．

このようにして項 $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots$ は次の形 $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ に帰着させられることになる．そして量 X, Y, Z は座標 x, y, z の軸に平行で力 $P, Q, R, \ldots$ のすべてと

たりの量であり，また中心に向かう方向にとられているために符号が逆になることに注意．

等価な三つの力の値になるが，それは我々が第 1 部第 5 節第 5 項において証明した通りである[訳注 24]．

次いで，提示されている系の本性によって与えられた，諸物体の座標間の条件方程式を考慮すると，こうした座標の**変分**はできるだけ少ない数に減らされ，残った変分は互いにまったく独立で完全に任意というようになるであろう．そうしたらこれら後者の変分それぞれの係数の総和をゼロに等しくすることになる．すると系の運動の決定に必要な方程式がすべて得られるであろう．

9.［連続体への拡張］

運動を求める系が連続体［corps continu］で，固体［corps solides；剛体］のように不変の形状であるか，柔軟体［corps flexible；可撓体］や流体［fluides］のように可変のものであれば，そのときには m で物体の質量全体を，dm でその要素の任意の一つ，すなわち物体の任意の粒子を指し示すことにして，この物体を，加速力 $P, Q, R, \ldots$ でそれぞれ動かされている無限に多くの微小物体［corpuscules］dm の集まりまたは系として考えることになる．そして第 7 項の一般公式において，m の代わりに dm とし，同時に記号 **S** を物体の広がり全体に関する積分の記号であると，すなわちその粒子すべての瞬間的な位置には関係するが，各粒子の継起的な位置とは独立なものと見なしさえすればよいであろう．

10.［変分に関する注意］

一般に，**変分**に関しては，空間にのみ関係していて時間的持続には関係せず，したがって δ で示される微分操作において，時間を表す変量 t はつねに一定と見なされねばならないということに注意する必要がある．ところで問題の状況設定によっては条件方程式がそれ自体で時間 t を含むことが起こりうるが，その場合それは，厳密に言えば，ある瞬間から別の瞬間にかけて変化することになる．そのときには座標のうちいくつかがほかの座標と変量 t の関数として見出されるであろう．そして d で示される微分操作においては t の可変性を考慮せねばならないが，δ で示される微分操作においては t を不変と想定することになる．

同じ想定は各瞬間における物体の広がりにのみ関係する積分記号 **S** に関しても成り立たねばならないであろう．

訳注 24 すなわち現代的に言えば，系に作用している力の全体は x, y, z の三成分を持つ一つの力に合成できるということである．

［この節終わり］[8]

参考文献

Alembert, Jean le Rond d'. [1765]2010. PUISSANCE. In *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, ed. Denis Diderot and Jean le Rond d'Alembert, t. 13 [pub. in 1765], p. 555–556. University of Chicago: ARTFL Encyclopédie Projet (Spring 2010 Edition), ed. Robert Morrissey, http://encyclopedie.uchicago.edu/.

Bos, H. J. M. 1974. Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for the History of Exact Sciences* 14: 1–90.

Cajori, Florian. [1928–29]2007. *A history of mathematical notations*. 2 vols. Chicago: Open Court; Repr. New York: Cosimo.

Capecchi, Danilo. 2002. *Storia del principio dei lavori virtuali: La meccanica alternativa*. Benevento: Helvetius.

Katz, Victor. 2005. 『カッツ　数学の歴史』上野健爾・三浦伸夫監訳．東京：共立出版.

Newton, Isaac. 1971. 『自然哲学の数学的諸原理』河辺六男訳．同責任編集『ニュートン』（世界の名著）47–568 頁．東京：中央公論社.

Pulte, Helmut. 2005. Joseph Louis Lagrange, *Méchanique analitique*, first edition (1788). Ch. 16 of *Landmark writings in western mathematics, 1640–1940*, ed. I. Grattan-Guinness, pp. 208–224. Amsterdam: Elsevier.

有賀暢迪．2010 年．「若きラグランジュと数学の「形而上学」：フランスにおける無限小論争を背景として」『科学哲学科学史研究』第 4 号，21–43 頁.

高瀬正仁．2009 年．『無限解析のはじまり：わたしのオイラー』（ちくま学芸文庫）．東京：筑摩書房.

高橋憲一．2006 年．『ガリレオの迷宮：自然は数学の言語で書かれているか？』東京：共立出版.

[8] 本稿は，（独）日本学術振興会科学研究費補助金（特別研究員奨励費「十八世紀中葉における力学理論の形成過程の解明」）による研究成果の一部である．また，翻訳にあたっては，京都大学文学部での十八世紀力学文献を読む会から得るところが大きかった．伊藤和行，稲葉肇，中田良一，山本彰良の各氏（敬称略）にはこの場を借りてお礼を申し上げたい．ただし訳文に関する一切の責任は当然のことながら訳者にある．

中澤聡．2009 年．「ニュートンは運動方程式 *F*=*ma* を書いたのだろうか？」中根美知代ほか『科学の真理は永遠に不変なのだろうか：サプライズの科学史入門』第 4 章，81–102 頁．東京：ベレ出版．

山本義隆．1997 年．『古典力学の形成：ニュートンからラグランジュへ』東京：日本評論社．