

岩石の圧裂試験に関する研究

1968年9月

木 山 英 郎

岩石の圧裂試験に関する研究

1968年9月

木 山 英 郎

目 次

岩石の圧裂試験に関する研究

第 1 章	結 論	1
1・1	緒 言	1
1・2	従来の研究の展望	1
1・2・1	単軸引張試験	1
1・2・2	圧裂試験	2
1・2・3	非整形試験片を用いる圧裂試験	4
1・3	筆者の観点と研究内容の概観	6
第 2 章	単軸引張試験と円板圧裂試験の実験的検討	13
2・1	緒 言	13
2・2	単軸引張試験法の改良	13
2・2・1	試験片の支持	13
2・2・2	引張試験片の作成	16
2・2・3	試験片に発生する曲げモーメントと振りモーメント	18
2・2・4	曲げモーメントの影響	20
2・2・5	振りモーメントの影響	24
2・2・6	検 討	26
2・3	岩石の単軸引張試験と円板圧裂試験との結果の比較	27
2・3・1	試 料	27
2・3・2	試験結果	30
2・3・3	検 討	33
2・4	結 言	37
第 3 章	各種の圧裂試験における試験片内の応力の解析	39
3・1	緒 言	39
3・2	円板圧裂試験	39

3.2.1	解 析	39
3.2.2	応力分布	42
3.3	有孔円板圧裂試験	44
3.3.1	解 析	44
3.3.2	応力分布	48
3.4	角板圧裂試験	49
3.4.1	数学解析	49
3.4.2	数値解析	61
3.4.3	応力分布	67
3.5	結 言	74
第 4 章	圧裂試験法の検討	76
4.1	結 言	76
4.2	理論的検討	76
4.2.1	問題点	76
4.2.2	荷点付近の大きな圧縮応力の影響	80
4.2.3	破断面上の2軸応力状態の影響	81
4.2.4	破断面上の応力の不均一分布の影響	82
4.2.5	検 討	83
4.3	実験的検討	84
4.3.1	有孔円板圧裂試験の実験的検討	84
4.3.2	角板圧裂試験の実験的検討	88
4.4	結 言	93
第 5 章	不規則塊状試験片を用いる点荷重圧裂試験法の理論的検討	95
5.1	結 言	95
5.2	3次元光弾性実験による検討	95
5.3	弾性球に点荷重を行なったときの応力の解析	99
5.4	弾性円柱に点荷重を行なったときの応力の解析	108

5.5	点載荷試験による岩石の強さの決定の可能性の検討	115
5.5.1	応力分布	115
5.5.2	問題点	123
5.5.3	強さの算定式	124
5.6	結 言	125
第 6 章	不規則塊状試験片を用いる点載荷圧裂試験法の実験的検討	127
6.1	結 言	127
6.2	不規則塊状の岩石試験片を用いた実験による検討	127
6.3	コンクリート試験片を用いた実験による検討	129
6.3.1	試験片	130
6.3.2	試験条件	133
6.3.3	検 討	135
6.4	可搬式の不規則塊圧裂試験機	140
6.4.1	構造および材質	140
6.4.2	設計のための基礎資料	141
6.4.3	設 計	144
6.4.4	可搬式試験機とペレット強さ試験機	147
6.5	結 言	150
第 7 章	荷重の不均等分布と摩擦拘束力の影響	152
7.1	結 言	152
7.2	角板圧裂試験の検討	152
7.2.1	接触面の圧力分布の仮定	152
7.2.2	数学解析	154
7.2.3	数値解析	158
7.2.4	応力分布	161
7.2.5	検 討	167
7.3	点載荷圧裂試験の検討	168

7.3.1	不均等分布荷重を考慮した応力解析	168
7.3.2	摩擦拘束力を考慮した応力解析	170
7.3.3	検 討	171
7.4	結 言	174
第 8 章	円板圧裂試験による弾性定数の決定法	177
8.1	結 言	177
8.2	弾性理論による解析	177
8.2.1	弾性定数計算式の誘導	177
8.2.2	E および m の簡易計算式	182
8.3	解析結果の実験的検討	184
8.4	単軸引張試験および円板圧裂試験による弾性定数の比較 検 討	186
8.4.1	測 定	186
8.4.2	測定結果	188
8.4.3	検 討	193
8.5	結 言	195
第 9 章	結 論	196

記号の一覧表

- a : 円板の半径, 有孔円板の外半径, 球の半径
 b : 有孔円板の内半径
 d : 円形断面の直径
 E : Young 率
 G : 剛性率
 h : 角板の高さ, 円柱の高さ, 試験片の高さ
 I : 断面 2 次モーメント
 $I_n(x)$: 変形された第 1 種 Bessel 関数
 $J_n(x)$: 第 1 種 Bessel 関数
 k : ばね定数
 k_d : 円板圧裂試験による強さの算定式の係数
 k_i : 角板圧裂試験による強さの算定式の係数
 k_{ir} : 点載荷圧裂試験による強さの算定式の係数
 k_r : 有孔円板圧裂試験による強さの算定式の係数
 l : 電気抵抗線ひずみ計ゲージの長さ
 (l, m, n) : 方向余弦
 M : 曲げモーメント
 m : Poisson 数
 P : 総荷重, 破壊荷重
 $P_n(x)$: 第 1 種 Legendre 関数
 p : 等分布荷重
 $p(x)$: 不均等分布荷重
 \bar{p} : 不均等分布荷重の平均値
 p_0 : 不均等分布荷重の最大値
 (r, θ) : 極座標

(r, θ, ϕ) : 球座標

(r, θ, Z) : 円柱座標

S : 標準偏差

\bar{S} : 標準偏差係数

S_t, \bar{S}_t : 引張強さとその平均値

$(S_t)_d, (\bar{S}_t)_d$: 円板圧裂試験による強さとその平均値

$(S_t)_i, (\bar{S}_t)_i$: 角板圧裂試験による強さとその平均値

$(S_t)_{ir}, (\bar{S}_t)_{ir}$: 点載荷圧裂試験による強さとその平均値

$(S_t)_r, (\bar{S}_t)_r$: 有孔円板圧裂試験による強さとその平均値

s : 長さ

T : 振りモーメント

t : 円板試験片, 有孔円板試験片, 角板試験片の厚さ

(u, v) : (x, y) 座標で表わした変位, (r, θ) 座標で表わした変位

(u, v, w) : (r, θ, ϕ) 座標で表わした変位

w : 角板試験片の横の長さ, 円柱試験片の直径

w_0 : 載荷幅 (角板圧裂試験), 円柱形圧板の直径 (点載荷圧裂試験)

\bar{X} : x 方向の外力

(x, y, z) : 直角座標

\bar{Y} : y 方向の外力

ε : 直ひずみ

$\bar{\varepsilon}_h$: 円板試験片中央の水平方向の直ひずみのゲージ長 l にわたる平均値

$\bar{\varepsilon}_v$: 円板試験片中央の垂直方向の直ひずみのゲージ長 l にわたる平均値

λ, μ : Lamé の定数

ν : Poisson 比

θ_0 : 載荷幅の中心角の半分 (極座標 ; 円板圧裂試験, 有孔円板圧裂試験),
載荷板の立体角の半分 (球座標, 円柱座標 ; 点載荷圧裂試験)

σ : 直応力

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: 主応力

σ_M : 曲げモーメントによって生ずる引張応力

σ_T : 振りモーメントによって生ずる引張応力

σ_t : 軸力によって生ずる引張応力

σ_r, σ_θ : 極座標で表わした直応力

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\phi$: 球座標で表わした直応力

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$: 円柱座標で表わした直応力

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: 直角座標で表わした直応力

τ : せん断応力

$\tau_{r\theta}$: 極座標で表わしたせん断応力

τ_{xy} : 直角座標で表わしたせん断応力

$\tau_{\theta\phi}, \tau_{\phi r}, \tau_{r\theta}$: 球座標で表わしたせん断応力

$\tau_{zr}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$: 円柱座標で表わしたせん断応力

ϕ : Airy の応力関数, Michell の応力関数

ψ : 応力関数 ($= \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2$)

第 1 章 緒 論

1・1 緒 言

近年，鉱山や土木の分野において，岩盤を対象とする大規模な工事が盛んに行なわれるようになり，工事の合理的な設計・施行および保安が重要な問題となってきた。また一方，岩盤を破碎する爆破や選鉱における鉱石の粉碎，磨鉱の能率向上も強く要望されている。そのためこれらの技術の基礎となる岩石力学の研究が盛んになるとともに，岩石の強さを試験する必要性が高まって来た。しかし，岩石はぜい性材料であるため，その強さの試験は金属のそれに比べて難しく，正しい強さの決定は困難であった。また試験片の作成が面倒であるため，従来岩石の強さ試験は省略されがちであった。

最近，岩石の引張強さを求めるのに円板圧裂試験が行なわれるようになった。しかしこの試験法にもなお研究の余地は残されている。またこれ以外の方法で岩石の引張強さを試験することも提案されている。さらに岩石の強さを迅速に決定する方法が強く要望されている。

そこで筆者はまず従来から実施がむずかしいとされていた岩石の単軸引張試験の技術改良を試み，つぎに円板圧裂試験，有孔円板圧裂試験および角板圧裂試験について理論的，実験的に検討した。さらに迅速に試験を行なえる新しい試験法の開発を試みた。

報告に先立ち，内外の文献にもとずきこの分野における従来の研究を展望し，最後に筆者のとった立場を明らかにしておきたい。

1・2 従来の研究の展望

1・2・1 単軸引張試験

単軸引張試験では，試験片はその軸に直交する面に生ずる均一な引張応力によ

って分離破壊を起こすから、この試験法は理想的である。しかし岩石のようなぜい性材料に対しては、少しでも偏心荷重がかかると大きな誤差を生じ、また試験片の加工整形も難かしいから、この試験はやりにくいとされている。

この試験法については、岩石の丸棒の両端部を杵金具の中にはめ込み、モルタルや接着剤で接着して試験片とし、これを試験に供することにより良好な結果を得ようとする研究が行なわれている。¹⁾

1・2・2 圧裂試験

円板形の試験片を2枚の平行な圧板の間にはさみ、試験片を直径方向に圧縮すると、試験片はその直径を境に分離破壊を起こす。このとき円板中央に発生している引張応力から試験片の強さを算定しようとするのが円板圧裂試験である。

この試験法は赤沢²⁾によって最初にコンクリートの引張強さを求めるために考案された。その後、堀部³⁾や平松・岡⁴⁾らは岩石の引張強さを求めるのにこの方法を用い、その後わが国ではこの方法が普及した。1949年に Carniero および Barcellos は同様の方法を発表した。これは今日 Brazilian test^{5,6)}と呼ばれている。しかしこの試験法は引張強さの試験法としては完全なものではないから、その後この方法の適用性について理論的ならびに実験的研究が盛んに行なわれてきた。

Berenbaum および Brodie⁷⁾ は、円板圧裂試験では試験片は載荷点付近において非常に強いせん断応力に耐えなければならない点に不安があることを強調している。もっとも、ぜい性材料は通常試験片の中央付近における引張応力によって破壊するようであると述べている。そこで、角板試験片を一定幅の圧板で部分圧縮して破断させる indentation test (角板圧裂試験と呼ぶことにする)を提案している。かれらは試験片内の応力分布を光弾性実験により解析している。そして、円板圧裂試験や角板圧裂試験では、破断面に引張応力が生ずるほか、それに直角をなす面に大きい圧縮応力を生ずる欠点があることに注目し、角板圧裂試験で圧板の幅を種々変えて検討した結果、載荷幅がある程度広ければ破壊は最

大引張主応力に基づくものであると述べている。

Hobbs⁸⁾ は、円板圧裂試験や角板圧裂試験では、載荷点付近に高いせん断応力が生じ、往々ここから破壊が始まることが認められるから、この方法を適用できる岩石は限られているとし、円板の中央に円孔をあけた試験片による圧裂試験では、円孔の上下に大きい1軸引張応力が生じ、破壊は載荷点ではなく、この最大引張応力の生じている点から始まるから、この圧裂試験（ring test と呼ばれる。本論文では有孔円板圧裂試験と呼ぶことにする。）が望ましいと述べている。また最近Hobbs⁹⁾ は有孔円板圧裂試験における孔の偏心と強さとの関係や成層岩の円板試験における載荷方向と層方向のなす角と強さとの関係を理論的、実験的に検討している。

Addinall およびHackett¹⁰⁾ も円板圧裂試験について研究し、まず圧板と試験片との間にクッションとして薄板を当てるとき、その材質によって強さは影響を受け、その材料が軟いほど強さは高く出ることを見出している。しかし試験片の破壊の原因が引張応力にあるか、あるいは載荷点付近に見られる強い圧縮を受けた部分の楔作用にあるのかまだ十分明らかではない。それゆえ、試験片の中の応力状態が光弾性実験によって調査されているのとできるだけ同様となるように、鋼の圧板を用いるのが望ましいと述べている。しかしながら、円板圧裂試験では、破壊面上で2軸応力状態にあることと、圧板と試験片との接触面において側方の拘束力が生ずることなどのために、引張強さより小さい値を得る傾向があるから、この試験法は信頼できないとし、有孔円板圧裂試験が望ましいと述べている。

Fairhurst¹¹⁾ は、Griffith 材料（圧縮強さが引張強さの8倍である材料）では、載荷幅が狭いと引張強さは過小に求まる傾向があると述べている。例えば載荷幅の中心角が $9^{\circ}30'$ のとき引張強さの70%の値が得られるが、この傾向は圧縮強さと引張強さの比が大きくなると弱くなると述べ、また載荷幅の中心角 2θ 。としては 14° 程度が望ましいとしている。一般の岩石に対しては、圧縮強さと引張強さの比率を考慮してMohrの破壊包絡線を描き、この図の上に試験片内

の載荷直径上の2つの主応力から求めたMohrの応力円を描いて検討し、円板圧裂試験の破壊を論じている。

Hoek^{12,13)}は、Griffithの理論^{14,15)}およびBrace¹⁶⁾やMcClin-tokとWalsh¹⁷⁾によるGriffith理論の修正論を用い、岩石の破壊を一般的に論じている。Colback¹⁸⁾はHoekの理論を応用して集中応力下の円板圧裂試験片の破壊を説明している。

1・2・3 非整形試験片を用いる圧裂試験

岩石の試験片の製作には多くの時間と労力を必要とする。また軟弱な岩石や岩目のある岩石では試験片の製作が不可能な場合もある。したがって工事現場などにおいて手軽に試験することはほとんど不可能である。そこで採取したままの岩石試料について、すなわち非整形試験片をもって強さを試験できれば非常に有利であろうと考えられる。

非整形試験片を用いて岩石の強さを試験することはProtodyakonov sr.^{19, 20, 21)}によって試みられた。彼はこのような試験片を用い、落槌試験により岩石の衝撃強さを求め、圧縮強さと関連のあることを見出している。この強さは、現在もプロトジャコノフ指数として、石炭の掘りやすさや岩石の切削しやすさあるいは作孔しやすさを判定するための一つの指数として用いられている。

Protodyakonov jr.^{22, 23)}らは不規則塊状の試験片を平板の間にはさんで圧縮し、強さ指数を求めた。この試験はほぼ卵形の試験片を選んでこれを長手方向に圧縮して破壊させる試験である。破壊荷重を P 、試験片の体積を V 、中央部の横断面積を A_m とすると、強さ指数 S_p は、

$$S_p = P / V^{\frac{2}{3}} = P / A_m \quad (1 \cdot 1)$$

で与えられるものとした。実験の結果から S_p と圧縮強さ S_c との間には、

$$S_p \doteq 0.19 S_c \quad (1 \cdot 2)$$

の関係があるとしている。

その後もソ連においては多くの研究者によってこの方面の研究がなされ、寸法効果のあることや、破壊の主因が引張応力にもとづくものであることや、実験結果は必ずしも式(1・2)を満足しないことなどが報告^{24,25,26)}されている。しかし、International Bureau for Rock Mechanics, Berlin²⁷⁾ではProtodyakonov jr.らの研究に基づく非整形試験片の破壊試験を一応認めている。

ソ連においては、Ilinitzukaya²⁸⁾やYagodkin²⁹⁾らにより、不規則塊状の岩石をセメントモルタルに埋込んで試験片を作成し、せん断強さや引張強さを求めようとする研究も行なわれている。しかしこの試験でも試験片作成にやや手数を要し、純粋な非整形試験片を用いる試験とはいえない。

Pomeroyは^{30,31)}Protodyakonov sr.の方法に似た衝撃試験法を、主として石炭に対して、試みた。この試験によって求められる衝撃強さ指数は、圧縮強さに対して直線関係にあることが実験によって認められ、英国においてISI (Impact Strength Index)と呼ばれている。

また、Evans, Pomeroy およびBerenbaum³²⁾はProtodyakonov jr.らの方法と同様の試験によって石炭の強さ指数を求めた。しかし、Protodyakonovが破壊荷重と試験片の体積から強さ指数 S_p を求めたのに対し、Evansらは試験片と圧板との間にカーボン紙と方眼紙をはさんで破壊時の荷重 P と接触面積 A_c を測定し、強さ指数 S_E を次式によって決定した。

$$S_E = P / A_c \quad (1 \cdot 3)$$

Hobbs^{33,34,35)}は種々の岩石の強さ指数 S_E をこの方法によって試験し、 S_E と圧縮強さ S_c との間につきの実験式が成立し、

$$S_c \cong 0.91 S_E - 3180 \text{ (lb/in}^2\text{)}, \quad (1 \cdot 4)$$

この式はProtodyakonov jr.らの式(1・2)よりよく実際と合うと述べている。

以上述べた非整形試験片を用いる種々の強さ指数の試験法では、破壊荷重から強さ指数を求める算定式がまちまちである。またこれらの提案者の中には試験片の破壊に引張応力が強く影響していることに気付いているものもあるが、いずれも強さ指数と圧縮強さとの関係を実験的に検討しているに過ぎない。

非整形試験片を用いる試験の分類には入れ難いが、円柱試験片（直径 $d = 13 \sim 30$ mm のポーリングコア）を軸と直交する 2 本のローラーではさんで加圧する Reichmuth³⁶⁾ の試験法では、強さ指数はむしろ引張強さ S_t と関係があるとし、

$$S_t \approx 0.96 P / d^2 \quad (1.5)$$

の実験式を提案しているのに注目される。

1.3 筆者の観点と研究内容の概観

この研究で筆者は、岩石力学の視野を微視的と巨視的とに大別すれば、巨視的立場に立って行なった応力解析に基づき、測定や観測の結果を解釈し、必要に応じて微視的な立場から検討を加えることにした。その理由は、岩石は構造が、複雑で、現在の段階ではその破壊現象を微視的に追求しきれないからである。

従来、岩石の圧裂試験に関する研究は数多く発表されているが、前記のすべての圧裂試験を理論的ならびに実験的に比較検討したものはない。あるものは実験結果だけに頼って議論を行ない、あるものは一つの問題点だけに注目して議論を進めている。

そこで筆者は、まず岩石を均質等方性弾性体と仮定して、各圧裂試験を受けている試験片内の応力の厳密な解析を行ない、つぎに求めた応力状態と岩石の機械的性質を考慮して、試験片の破壊を理論的に検討し、最後に種々の岩石を試料として各試験を実施し、総合的に各試験法を検討することにした。

第 2 章^{37, 39)}においては、岩石の単軸引張試験のやり方に工夫を加え種々の岩石を試料として、単軸引張試験によって求めた引張強さと円板圧裂試験によって求めた強さとを比較し、両試験法の信頼度を検討し、以後の実験的検討には円板圧

裂試験による強さを基準とすることを述べる。

第3章^{37,38,39)}では、円板圧裂試験、有孔円板圧裂試験および角板圧裂試験における試験片内の応力分布を弾性理論により解析した結果を述べる。この解析は破壊を論ずるための資料とするのであるが、とくに従来十分明らかにされていなかった載荷点付近の応力状態を明らかにする。

第4章^{37,38,39)}では、まず岩石の機械的性質、とくに引張強さと圧縮強さとの関係を考慮し、上述の応力状態のもとで、果して引張強さに等しい強さが算定できるか否かを種々の観点から検討する。ついで2, 3の岩石を試料として、種々の試験法により強さを試験し、理論的検討の結果を実験的に検証する。

第5章^{40,41,42)}では、不規則な塊状の試験片を用いて強さを決定する可能性の有無を理論的に検討し、筆者らが開発した不規則塊状の試験片の点載荷圧裂試験法について述べる。

第6章^{40,41,42)}では、不規則塊状の試験片の点載荷圧裂試験法の岩石およびコンクリートへの適用性を実験によって検討する。また筆者らの開発した携帯し得る不規則塊圧裂試験機についても述べる。

第7章^{39,41,42)}では、実際の試験において圧板と試験片の接触面の圧力分布の影響について考察し、荷重が等分布すると仮定して応力を解析した結果を補正し、これを基礎として第6章までの理論および実験結果を再検討する。

第8章⁴³⁾では、円板圧裂試験により弾性定数を決定することもできることを述べ、岩石への適用性について検討する。

参 考 文 献

- 1) たとえば、L.Obert, S.L.Windes and W.I.Duvall: Standardized Test for Determining the Physical Properties of Mine Rock, U.S.Bureau of Mines, R.I.3891(1946)

- 2) 赤沢常雄：コンクリートの圧縮による内部応力を求める新試験法，土木学会誌 29 卷 11 号，昭和 18 年 11 月，777 頁
- 3) 堀部富男：円壩試料による一二の水成岩の圧縮並に引張強さについて，日本鉱業会誌 66 卷 747 号，昭和 25 年 8 月，355 頁
- 4) 平松良雄，西原正夫，岡 行俊：岩石の引張試験に関する検討，日本鉱業会誌 70 卷 793 号，昭和 29 年 9 月，285 頁
- 5) F.L.L.B. Carniero and A. Barcellos: Instituto Nacional de Tecnologia. Rio de Janeiro, (1949), Resistance la Traction Des Batons
- 6) F.L.L.B. Carniero and A. Barcellos: Tensile Strength of Concrete, R.I.L.E.M. Bull. 13, (1953)
- 7) R. Berenbaum and I. Brodie: Measurement of Tensile Strength of Brittle Materials, British Jour. of Appl. Phys., Vol. 10, (1959), pp.281~287
- 8) D.W. Hobbs: The Tensile Strength of Rocks, Int. J. Rock Mech. Mining Sci. Vol. 1, (1964), pp.385~396
- 9) D.W. Hobbs: Rock Tensile Strength and Its Relationship to a Number of Alternative Measures of Rock Strength, Int. J. Rock Mech. Mining Sci. Vol. 4, (1967), pp.115~127
- 10) E. Addinal and P. Hackett: Rock in Tension, Colliery Guardian, April 3 (1964), January 8 (1965) and February 19 (1965)
- 11) C. Fairhurst: On the Validity of the 'Brazilian' Test for Brittle Materials, Int. J. Rock Mech. Mining Sci. Vol. 1, (1964), pp.535~546
- 12) E. Hoek: Rock Fracture around Mining Excavations, Proc. 4th International Conf. on Strata Control and Rock Mech., New York, (1964), pp.334~348

- 13) E. Hoek and Z.T. Bieniawski: Fracture Propagation Mechanism in Hard Rock, The First International Congress on Rock Mechanics, in Lisbon, September (1966)
- 14) A.A. Griffith: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A. Vol. 221 (1921) pp. 163~198
- 15) A.A. Griffith: The Theory of Rupture, Proceeding of the First International Congress for Applied Mechanics, Delft (1924), Berlin, pp. 55~63
- 16) W.F. Brace: An Extension of the Griffith Theory of Fracture to Rocks, J. Geophys. Res. 65, (1960), pp. 3477~3480
- 17) F.A. McClintock and J.B. Walsh: Friction on Griffith Cracks in Rock under Pressure, Proc. Fourth U.S. Congress Appl. Mech., Berkeley, (1962), pp. 1015~1021
- 18) P.S.B. Colback: An Analysis of Brittle Fracture Initiation and Propagation in the Brazilian Test, The First International Congress on Rock Mechanics, in Lisbon, September (1966)
- 19) M.M. Protodyakonov sr.: Grundlagen für die einheitliche Durchführung von Bergarbeiten, T. 1. Moskau, Zk Gornorabochich (1926)
- 20) M.M. Protodyakonov sr.: Der Gebirgsdruck auf den Grubenausbau, Diss Ekaterinoslav (1907)
- 21) M.M. Protodyakonov sr.: Gesteinsfestigkeit vom Standpunkt der Bergbaukunst. Arbeiten des Arbeitskreises für Bergbau, Metallurgie und Maschinenbau, Ekaterinoslav (1911)

- 22 M.M. Protodyakonov jr. and V.S. Voblikov: Determining Rock Strength with Specimens of Irregular Shape, Ugol, № 4 (1957)
- 23 M.M. Protodyakonov jr.: New Methods of Determining Mechanical Properties of Rocks, International Conference on Strata Control, Paris, 16~20 May, Paper C2 (1960)
- 24 I.G. Melekidze: A Study of the Physico-mechanical Properties of the Rock of some Georgian Ore Deposits, Mechanical Properties of Rocks, Ugletekhizdat, Moscow (1959)
- 25 G.V. Tokhtuyev and V.G. Borisenko: Some Results of an Investigation into the Mechanical Strength of Rocks and Ores of Krivoy Rog with Irregular-shaped specimens, Mechanical Properties of Rocks, Ugletekhizdat, Moscow (1958)
- 26 A.A. Ilivitskii and V.I. Nickolin: Determining the Strength of Rock Strata on Irregularly-shaped Specimens, Ugol 36, № 1., pp. 34~36
- 27 International Bureau for Rock Mechanics, Group II, Strength Research, Appendix H, Prague, March (1961)
- 28 E.I. Ilinitzkaya: Determining the Shear and Separation Resistance of Coal, Collection of Works of the Institute of Mining of the Academy of Sciences of the USSR, Vol. 1, Academy of Sciences Press, Moscow (1954)
- 29 G.I. Yagodkin, A.N. Chekanov and A.M. Terpigirev: Determination of Mechanical Characteristics of Coals with Specimens of Arbitrary Shape. Disruption of Coals and Rocks, Ugletekhizdat, Moscow (1958)

- 30 C.D.Pomeroy: A Simple Method for the Assessment of Coal Strength, J. Inst. Fuel 34, (1957) pp.50~54
- 31) C.D.Pomeroy: Routine Strength Test of Coal, Steel & Coal 186, (1963) pp.640~645, pp.698~704
- 32 I. Evans, C.D. Pomeroy and R. Berenbaum: The Compressive Strength of Coal, Colliery Engng. 38, (1961), pp.75~80, pp.123~127, pp.172~178
- 33 D.W.Hobbs: Rock Compressive Strength, Colliery Engr., Lond., 41, (1964), pp.287~292
- 34 D.W.Hobbs: A Simple Method of Assessing the Uniaxial Compressive Strength of Rock, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 1, (1964), pp.5~17
- 35 D.W.Hobbs: 前出 9
- 36 D.R.Reichmuth: Correlation of Force-Displacement Data with Physical Properties of Rock for Percussive Drilling Systems, Rock Mechanics, Pergamon (1963), pp.33~60
- 37 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎: 岩石の圧裂試験における試験片の破壊の機構について, 水曜会誌第15巻第10号, 昭和41年3月, 479頁~482頁
- 38 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎: 岩石の引張強度を決定する各種試験法の検討, 日本鉱業会誌83巻947号(講演要旨), 昭和42年3月, 460頁~461頁
- 39 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎: 岩石の圧裂試験に関する研究, 日本鉱業会誌(投稿中)
- 40 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎: 非整形試験片による岩石の引張強さの迅速試験, 日本鉱業会誌81巻932号, 昭和40年12月, 1024頁~1030

頁

- 41) 岡 行俊，平松良雄，木山英郎：コンクリートの点載荷圧裂試験による引張強度の決定，材料学会第17期総会講演要旨集，昭和43年5月，
- 42) 平松良雄，岡 行俊，木山英郎：コンクリートの点載荷圧裂試験による引張強度の決定，材料（投稿中）

- 43) 平松良雄，岡 行俊，木山英郎：圧裂試験による弾性定数の決定法，水曜会誌第15巻第8号，昭和40年8月，363頁～366頁

第 2 章 単軸引張試験と円板圧裂試験の実験的検討^{1) 2)}

2・1 緒 言

各種の圧裂試験法を実験的に検討するには基準となる引張強さを知らなければならぬ。それはいうまでもなく単軸引張試験で求めた値でなければならぬ。しかしこの試験を正確に行なうことが難かしいことは広く認められている。そこで筆者はまず単軸引張試験によってできるだけ正しく引張強さを求め得るように試験のやり方の研究を行なうことにした。つぎに種々の岩石について、単軸引張試験と円板圧裂試験によって求めた強さを比較検討し、単軸引張試験のかわりに円板圧裂試験によって基準となる引張強さとし得るか否かを検討することにした。

2・2 単軸引張試験法の改良

2・2・1 試験片の支持

引張試験における岩石試験片の平行部の直径を約 30 mm とすると、岩石の引張強さの最大値を 200 kg/cm^2 と見積れば、破壊時の引張力は約 1500 kg となる。また筆者が使用した試験機（島津製作所製、電子管平衡式 50 t 万能試験機）ではチャックからチャックまでの距離は最大 75 cm である。ストロークを 5 cm と見込めば、チャックからチャックまでの有効距離を 70 cm までとることができる。これらの点を考慮して、無理のない引張試験片支持器を工夫した。図 2・1 および図 2・2 は設計・試作した支持器を示す。

本器では、振りモーメントの発生を防ぐために、耐圧 3 t の単式スラスト玉軸受(4)を上下に挿入することにした。これにより破壊直前の荷重においても、試験片を含む(5)から(10)までの部分は軽く回転できることが確かめられた。

曲げモーメントの発生を防ぐためにはピン結合による鎖機構を取入れた。すなわち、上下おのおの 2 段に互いに直角をなしてピン結合部(6)、(9)および(15)、(9)を

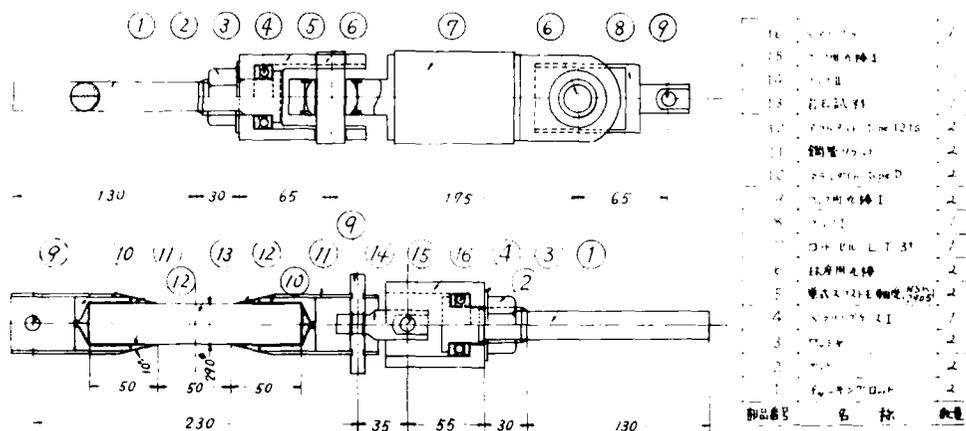


図 2・1 引張試験片支持器

設け、さらに上部には容量 3 t の引張荷重計（新興通信工業製，LT-3 t）(7) を挿入した。その 2 つの球面軸受は捩りモーメントや曲げモーメントの発生を防ぐのに役立つ。

この試験片支持器により、試験片を軸方向に引張ることができ、試験片を直接取付けるときに起こりがちな無理はないものと考えられる。

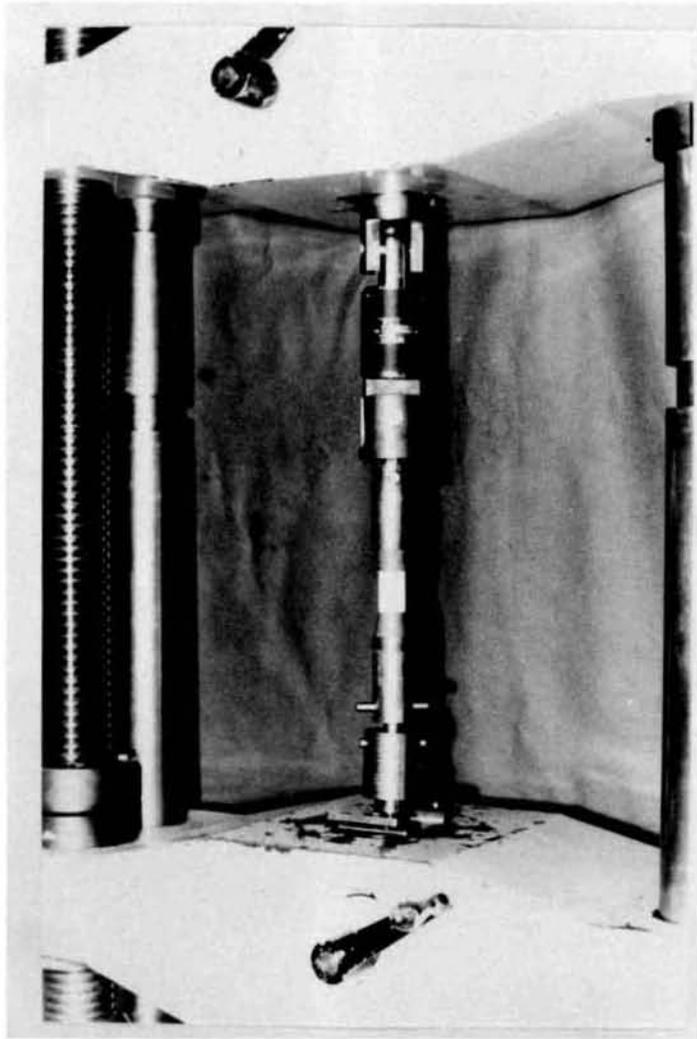


図 2・2 引張試験

2.2.2. 引張試験片の作製

岩石試験片は、塊状試料から内径30mmのコアビットでせん孔することによって採取したコアを、長さ約15cmにダイヤモンドカッターで切断して作る。その側面は鋼製の半円筒形型枠と120# 研磨粉を用いて研磨し、直径29mmに仕上げる。

一方、図2・3(i)に示すように、外径42.7mm、厚さ2.4mmの普通鋼管を、長

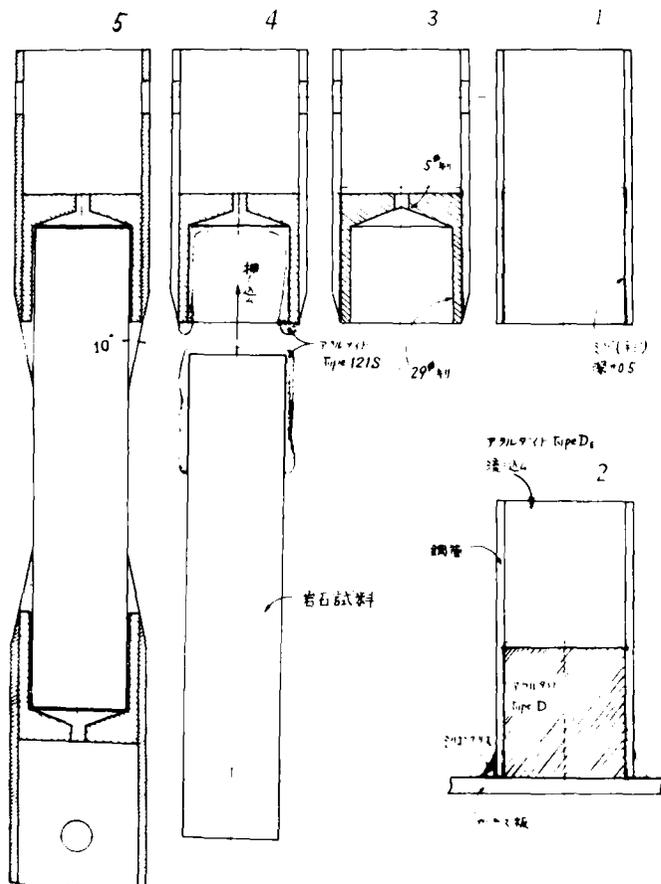


図2・3 引張試験片の製作手順

さ 85 mm に切断し、これを旋盤にて両端面を軸に直角に仕上げ、さらに外壁面を同じ軸に対して正確に円筒面となるように仕上げる。この管の内部に岩石試験片を接着するのであるが、アラルダイトと鋼管の接着をよくするために、深さ約 0.5 mm のら旋状のみぞを軸方向の長さ約 40 mm だけ切る。それを(ii)に示すようにシリコングリスを塗布したガラス板の上にみぞのある方を下にして立て、みぞの上端までアラルダイト D を流し込む。シリコングリスの塗布はガラス板から鋼管を離し易くし、かつ漏れを防ぐためである。アラルダイトを流し込んで 1 昼夜放置した後、(iii)に示すように、固まったアラルダイトの中心に、旋盤で、直径 29 mm 深さ 30 mm の孔を明け、さらにその孔底に直径 5 mm の孔を明ける。後の孔は岩石試験片を押込むときの空気抜きとなる。

また鋼管のアラルダイト側の外壁には 10° のテーパーをつける。最後にボール盤で鋼管軸に直角に直径 10 mm のピン孔をうがつことにより試験片ソケットの用意は完了する。

つぎに、(iv)に示すように、直径 29 mm に仕上げた岩石試験片を上記のソケットの孔に挿入し、強力な接着剤であるアラルダイト 121S をもって両者を接着する。このときソケットに設けた直径 29 mm の孔が岩石試験片のガイドとなり、鋼管ソケットおよび岩石試験片の軸は一致するわけである。最後にはみ出したアラルダイトを(v)に示すようにヘラで試験片に塗り付け、ソケットのテーパーに合わせて滑らかな外形に仕上げるのである。

こうしてでき上がった試験片は図 2・4 の写真に示すようである。

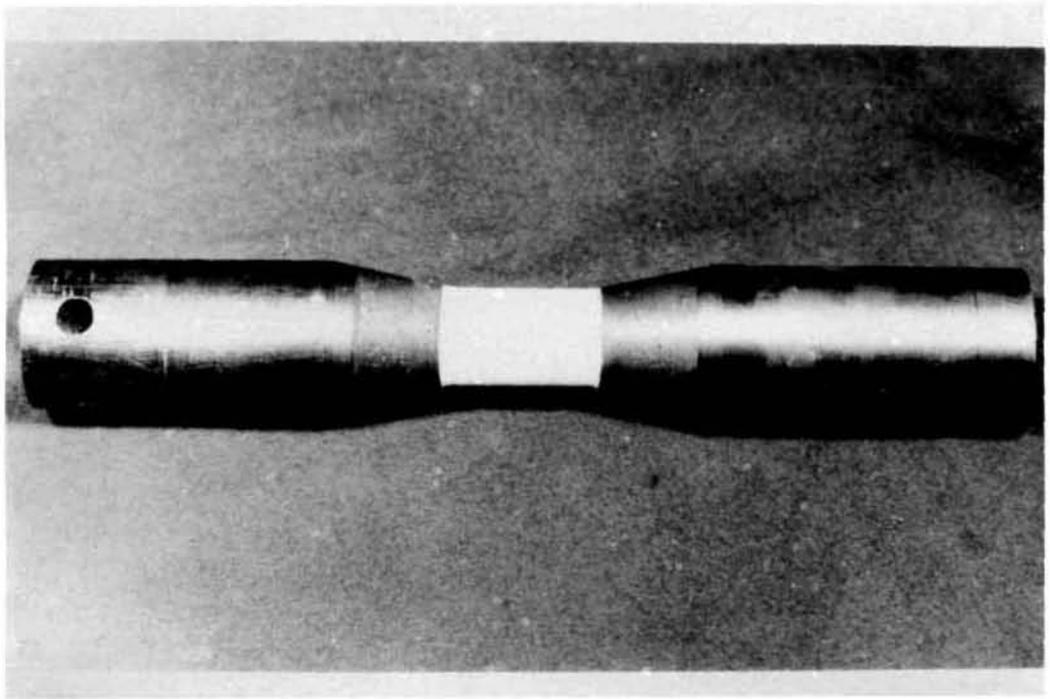


図 2・4 引張試験片

2・2・3 試験片に発生する曲げモーメントと振りモーメント

単軸引張試験において、試験片の上下の着力点に偏心した引張力 P が作用したとし、上部の着力点に作用する引張力 P を図 2・5 に示すようであるとする。すなわち、引張力 P は、試料中心軸とそれに垂直な水平断面の交点 O から距離 s だけ離れた点 O' ($\overline{OO'} = s$) に、中心軸に対し 3 次的に傾いて作用するとする。点 O を原点に、中心軸に沿って z 軸、 O と O' とを結ぶ半径方向に y 軸、 x 軸と y 軸とに直交して z 軸をとる。そして、 P の x, y, z 方向の成分をそれぞれ P_1, P_2, P_3 、さらに P が x, y, z 軸となす角をそれぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とすると、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned}
 P_1 &= P \cos \theta_1 \rightleftharpoons P \\
 P_2 &= P \cos \theta_2 \\
 P_3 &= P \cos \theta_3
 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 1)$$

このとき、軸力には P_1 成分、曲げモーメントには P_1, P_2, P_3 各成分、振りモーメントには P_3 成分がそれぞれ関与することになる。

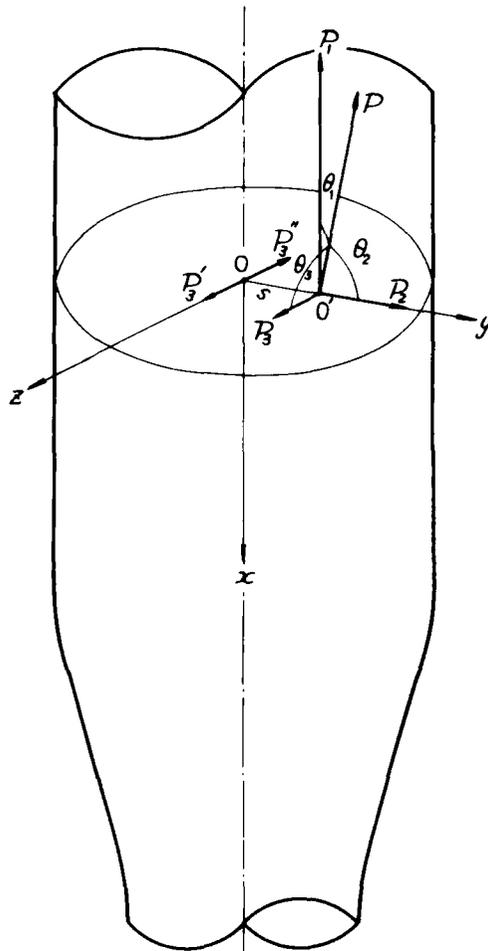


図 2・5 引張試験における偏心荷重

まず、 P_1 成分と、作用点の中心軸からのずれ s によって生ずる中立軸 z のまわりの曲げモーメント M_1 は x 軸上では一定であって、次式で与えられる。

$$M_1 = P_1 \cdot s \quad (2 \cdot 2 a)$$

P_2 成分による、中心軸上 x における z 軸のまわりの曲げモーメント M_2 は次式のようなのである。

$$M_2 = P_2 \cdot x \quad (2 \cdot 2 b)$$

P_3 成分による、中心軸上 x における y 軸のまわりの曲げモーメント M_3 を考える。いま O 点において、 P_3 と大きき等しく方向が一致するものと反対の力とを考え、それらをそれぞれ P_3' 、 P_3'' とすると、 M_3 は次式で与えられる。

$$M_3 = P_3 \cdot x \quad (2 \cdot 2 c)$$

一方、中心軸のまわりの捩りモーメント T は P_3 と P_3'' によって生ずる。すなわち、次式が成立する。

$$T = P_3 \cdot s \quad (2 \cdot 3)$$

以上に求めた曲げモーメントおよび捩りモーメントを考慮して、引張試験において偏心荷重が作用したとき生ずる最大の引張応力の値と位置と方向を決定する方法は次のようである。

まず、 x 軸に垂直な断面に作用する引張応力を、軸力 P_1 による引張応力と、曲げモーメント M_1 、 M_2 、 M_3 のおのおのによってこの面に作用する引張応力とを重ね合せて求める。これより x 軸と任意の傾きをなす断面に作用する引張応力成分を計算し、これと捩りモーメント T によってこの面に作用する引張応力成分とを重ね合せる。以上ですべての応力成分は考慮されたから、これより引張応力の最大値と位置と方向が決定される。

2・2・4 曲げモーメントの影響

任意の断面において、中立軸のまわりに曲げモーメント M が作用するとき、この断面における最大引張応力 σ_M は部材外縁に生じ、その大ききは次式で与えら

れる。

$$\sigma_M = \frac{M_i}{I} \cdot \frac{d}{2} \quad (2.4)$$

ここに、 I は中立軸に関する断面 2 次モーメントであって、試験片が直径 d の円柱のとき、 $I = \pi d^4 / 64$ である。

一方、引張力 P によって x 軸に垂直な断面に生ずる一様な引張応力 σ_t の値は次式で与えられる。

$$\sigma_t = \frac{4P}{\pi d^2} \quad (2.5)$$

したがって、式 (2.4) を σ_t の倍数として表わすと次式のようなになる。

$$\sigma_M = \frac{8}{d} \cdot \frac{M_i}{P} \cdot \sigma_t \quad (2.6)$$

曲げモーメントによる影響は式 (2.6) を用いて調べることができる。

筆者の行なった引張試験において、試験片の破壊にとって最も危険な曲げモーメントの生ずる断面の位置は平行部の両端であり、式 (2.2 b) および (2.2 c) の $x = \ell = 140 \text{ mm}$ となる。また試験片の直径 d は 29 mm である。

まず、フック (図 2.1 の (8) と (9)) で挿入棒 (9) を吊るときの中心線のずれ s (図 2.6 (a) 参照) を考える。フックおよび挿入棒は一度作成しておけば何度も使用できるものであり、十分精度を上げて作成しておけば良い。筆者の試験における実績では s は 0.1 mm 以下である。したがって式 (2.2 a) より、

$$M_i = P_i \times 0.1$$

上式を式 (2.6) に代入して、

$$\sigma_M = 0.028 \sigma_t$$

となる。この曲げモーメントによる影響は実際上問題とならない。

いま一つのずれ s の発生の原因として、ソケットのピンホールが左右にずれて

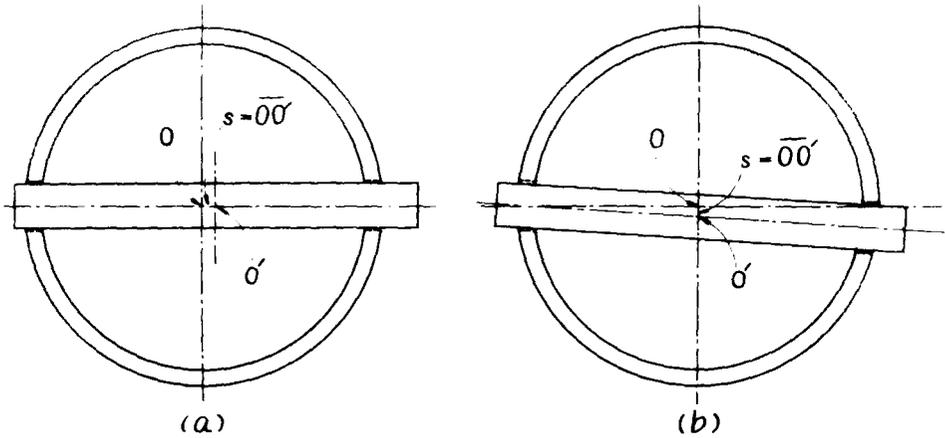


図 2・6 偏心荷重の発生（その 1）

挿入棒(9)が中心Oを通らない場合がある。(図2・6b参照) ソケットは試験片ごとで作成する必要があり、ボール盤を使用して作成する場合には精度を上げることが難しく、 s の最大は0.25mm程度と考えられる。この場合の曲げモーメントによって生ずる引張応力は、次のようになる。

$$\sigma_M = 0.069 \sigma_f$$

つぎに図2・7に示すように、ソケットのピンホールが上下にずれて挿入棒(9)が試験片の中心軸に対して直角でなくなるために生ずる曲げモーメントを検討する。ソケットの直径40mmに対して、ボール盤加工の場合最大0.25mmのピンホール位置の上下方向の喰違いが考えられる。このとき図2・5の θ_2 は次式で与えられる。

$$\theta_2 = \cos^{-1} (0.25 / 40)$$

この θ_2 を式 (2・2b) に代入して、さらに式 (2・6) を用いて σ_M はつぎのような値をとる。

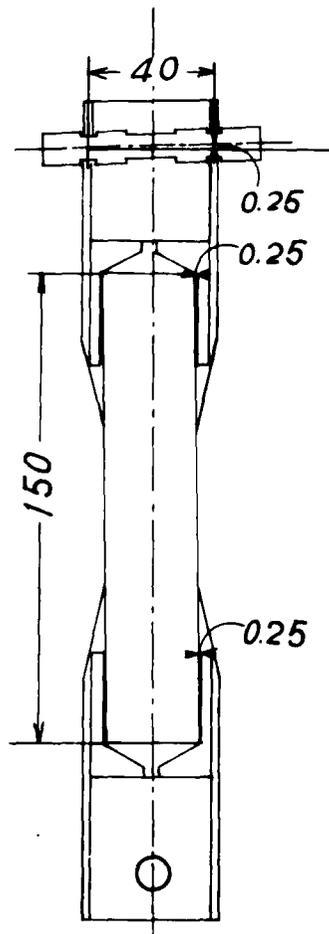


図 2・7 偏心荷重の発生 (その 2)

$$\sigma_M = 0.242 \sigma_t$$

上式からわかるように、この応力はかなり大きく、試験の精度に大きく影響する。したがってこのピンホールの加工は旋盤加工等によることにして、ずれ s を 0.025 mm 程度にする必要があると考えられる。

最後に、アラルダイト 121S で岩石試験片をソケットに接着するときの中心軸のずれにもとづく曲げモーメントの発生について考えておく。(図 2・7 参照) この場合のずれは岩石試験片の全長 150 mm に対して、上下のソケットでのずれを合せて最大 0.5 mm 程度と考えられる。したがって θ_2 は、

$$\theta_2 = \cos^{-1} (0.5 / 150)$$

となる。この値を式 (2・2 b) に代入し、さらに式 (2・6) を用いて σ_M は次のような値をとる。

$$\sigma_M = 0.129 \sigma_t$$

以上の考察によれば、試験片の中心軸に対する挿入棒の左右および上下のずれと、岩石試験片をソケットに埋込むときのずれとにもとづく曲げモーメントの影響はいずれもかなり大きくなる可能性があることがわかる。そこで筆者の方法では、上下各 2 段の鎖式吊具、引張荷重計の球面軸受の順応性およびアラルダイトや鋼管や挿入棒の変形によるダンパーの役目によってこの影響を緩和するように工夫してある。

2・2・5 振りモーメントの影響

式 (2・3) に求めた偶力 T が作用すると、試験片は中心軸 x のまわりに振られて内部にせん断応力 τ を生ずる。この応力は試験片の表面において最大となる。したがって振りモーメント T による最大引張応力 σ_T は試験片の表面において、 x 軸方向と 45° をなす方向に生じ、その大きさはせん断応力の値に等しい。すなわち次式で与えられる。

$$\sigma_T = \tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \cdot \frac{d}{2} \quad (2.7)$$

ここに、 I_p は断面 2 次極モーメントで、試験片の直径を d とすると $I_p = \pi d^4 / 32$ である。上式を式 (2.5) の σ_t の倍数で表わすと、つぎのようになる。

$$\sigma_t = \frac{4}{d} \cdot \frac{T}{P} \cdot \sigma_T \quad (2.8)$$

これに式 (2.1) および (2.3) を代入すると、

$$\sigma_T = \frac{4}{d} \cdot s \cdot \cos \theta_s \cdot \sigma_t \quad (2.9)$$

となる。

いま、 $s = 1 \text{ mm}$ と仮定して、 P の接線方向への鉛直からの傾き ($= 90^\circ - \theta_s$) を $30'$ とすると、

$$\sigma_T = 0.0012 \sigma_t$$

1° とすると、

$$\sigma_T = 0.0024 \sigma_t$$

となる。

しかし、この振りモーメントによって生ずる引張応力の最大値は軸と 45° の方向に働くので、この振り応力が破壊に影響するときは、試験片の破断面は軸と直角をなす面から少しふれて、しかもその面に働く引張応力の大きさは $(\sigma_t + \sigma_T)$ より小さい。この引張応力 σ は次式で示される。

$$\sigma = \frac{\sigma_t}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_t^2 + 4\sigma_T^2} \quad (2.10)$$

また破断の生ずる面は、中心軸 x からの傾きを θ とすると、 θ は次式で与えられる。

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\sigma_T}{\sigma_t} \quad (2 \cdot 11)$$

したがって、たとえば σ_T / σ_t を 0.1, 0.5 および 1.0 の場合について σ および θ の値を示すと次のようである。

表 2・1

σ_T / σ_t	σ / σ_t	θ
0.1	1.0025	2° 50'
0.5	1.0587	13° 20'
1.0	1.2071	22° 30'

筆者の方法では、 $\sigma_T / \sigma_t \ll 0.1$ であるから捩りモーメントの影響は極めて少ない。さらに、スラスト玉軸受、鎖式吊具およびアラルダイトのダンパーの役目等を考慮すると捩りモーメントの影響は無いといえる。

2・2・6 検 討

従来の方法に比べて、筆者の方法の改良点を挙げると次のようである。

i) 従来試験片は、平行部・肩部・つかみ部の複雑な形状を直接岩石に研磨あるいは旋盤加工したのに対し、コアボーラーで採取した円柱形試料と鋼管およびアラルダイトとを用いて簡単に作る事ができる。また、ii) 試験片を試験機に取付けるには、試験片の上下のソケットのピンホールにフックの丸棒を挿入するだけの簡単な操作でできる。さらにiii) 試験片支持器には鎖機構の吊金具とスラスト玉軸受を採用して、曲げモーメントおよび捩りモーメントによる偏心荷重の影響を極めて小さくした。

実際、この方法で試験した結果の一例として、岩石試験片の平行部中央の一つの直径の両端にあたる位置に2枚の電気抵抗線ひずみ計ゲージを軸方向に貼りつけX-Yレコーダで記録した荷重・ひずみ線図を示せば図2・8のようである。こ

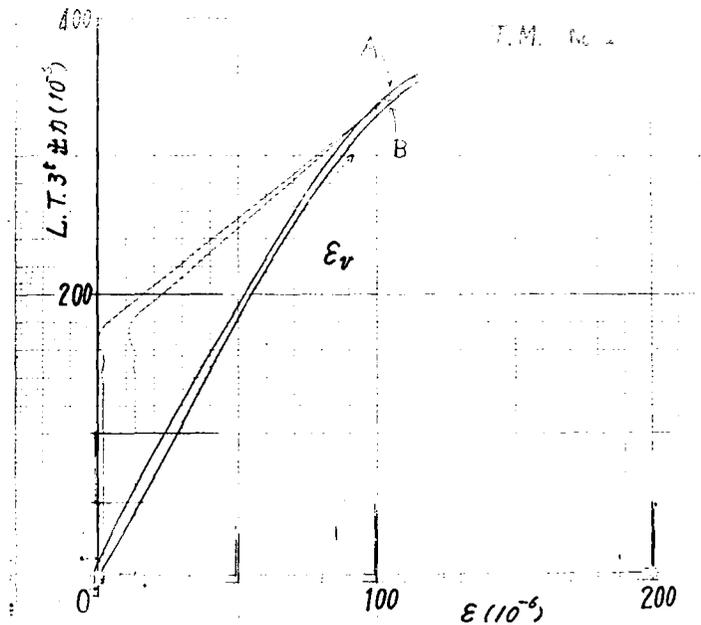


図 2・8

れら 2 枚のひずみ計ゲージによる測定値に差がなく、試験片はほぼ軸に平行に引張られていることが認められる。また、岩石試験片の肩部で破断するものがなく、大部分が平行部の中央付近で起っていることも曲げモーメントの影響の少ないことを裏付けるものと思われる。さらに破断後の試験片を観察して、軸方向とある角度をなしたら旋状の破断面を呈したものは皆無であった。このことは捩りモーメントの影響が無かったものと思われる。

2・3 岩石の単軸引張試験と円板圧裂試験との結果の比較

2・3・1 試料

試験に供した岩石は、試験片ごとに強度の異なることのないようにできるだけ均質なものであることが望ましい。しかも、引張強さと圧縮強さの比率やヤング

率およびその他の機械的性質の違いが両試験の結果に異なった影響を与えるものと考えられるので、できるだけ性質の異なる種々の岩石について、数多くの試験片を用いて比較検討することが必要である。筆者はとりあえず安山岩（宮城県紫田郡村田町産，通称村田石），凝灰岩（福島県耶麻郡高郷村産，通称荻野石）および大理石（山口県美祿市産）を選んで用いた。また試験片の作成に当って，強度を比較する単軸引張試験片と円板圧裂試験片は同一のブロックからとることにし，方向性の影響もできるだけ除くように，両試験片の破断面を同一平面になるようにした。（図 2・9）

試験片の標準寸法は，単軸引張試験片では直径 29.0 mm，長さ 150 mm とし，円板圧裂試験片では直径 35.0 mm，長さ 35.0 mm および 17.5 mm の 2 種類とした。

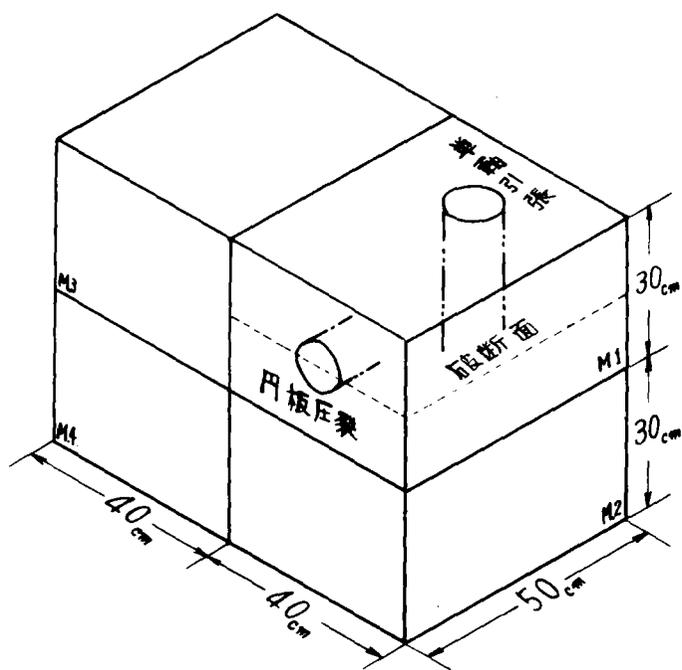


図 2・9 岩石のブロックと試験片の採取方向と破断面との関係

両試験片は、図2・9に示すように、大きな岩石の塊りをダイヤモンドコアビットでせん孔し、得られたコアの両端面をダイヤモンドカッターで切断し、ついでその側壁を鋼製の半円筒形型枠と120#研磨粉を用いて研磨して仕上げた。円板圧裂試験片は、さらにその両端面を軸と直角にするため、長さ35.0mmの鋼製の円筒型枠と120#研磨粉を用いて、回転式研磨台で研磨仕上げした。このようにして準備した両試験片の一例は写真(図2・10(a), (b))に示すようである。

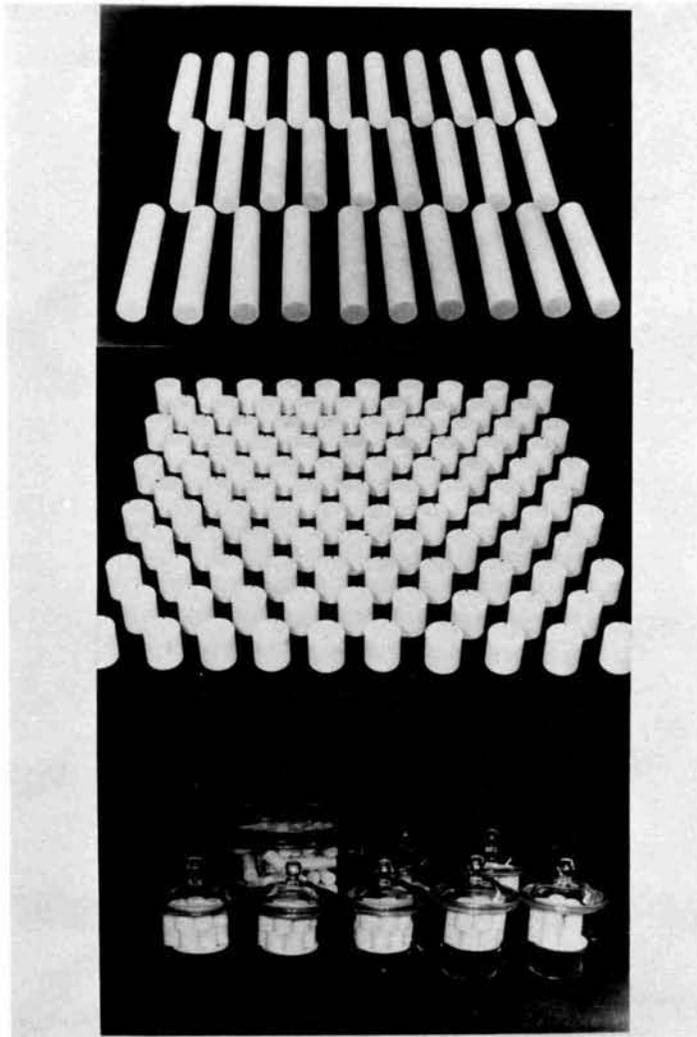


図2・10 (a)上段：引張試験片，(b)中段：円板試験片，(c)下段：試験片の乾燥

これを3日間室内乾燥させた後、デシケータ中に2週間置いて乾燥させた。(図2・10(c))。その後、引張試験片は前節で述べたような手順で製作した。その一例は図2・11の写真に示すようである。

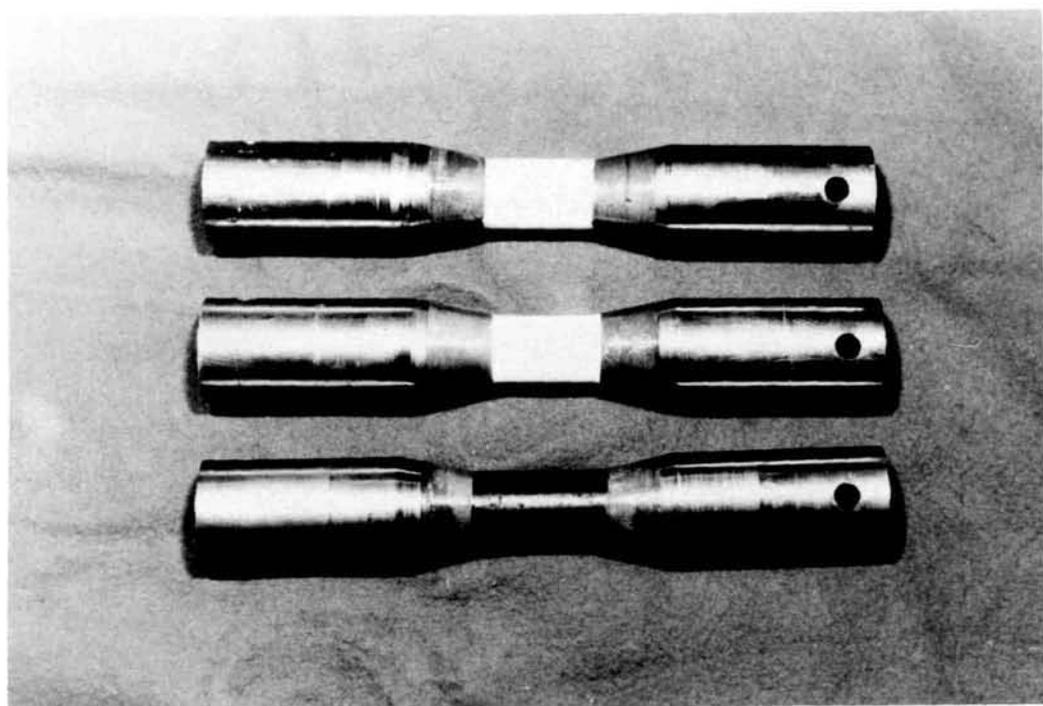


図 2・11 引張試験片(上から順に大理石, 凝灰岩, 安山岩)

2・3・2 試験結果

単軸引張試験には安山岩試験片26個, 凝灰岩試験片24個, 大理石試験片48個を供した。また円板圧裂試験には, 直径と長さの比が1:1のもの(以後, 記号 d_1 で示すことにする)上記の3種の岩石のそれぞれから取った31個, 50個, 31個の試験片, 直径と長さの比が2:1のもの(以後, 記号 d_2 で示すことにする)47個, 69個, 96個をそれぞれ供した。

単軸引張試験および円板圧裂試験における破壊後の試験片の一例を示せば, そ

れぞれ図 2・12 および図 2・13 のようである。

すべての試験片についての試験結果を用いて、岩種別、試験法別に計算した引張強さの平均値 \overline{S}_t 、標準偏差 S 、標準偏差係数 $\overline{S} (= S/\overline{S}_t)$ を示すと表 2・2 のようである。

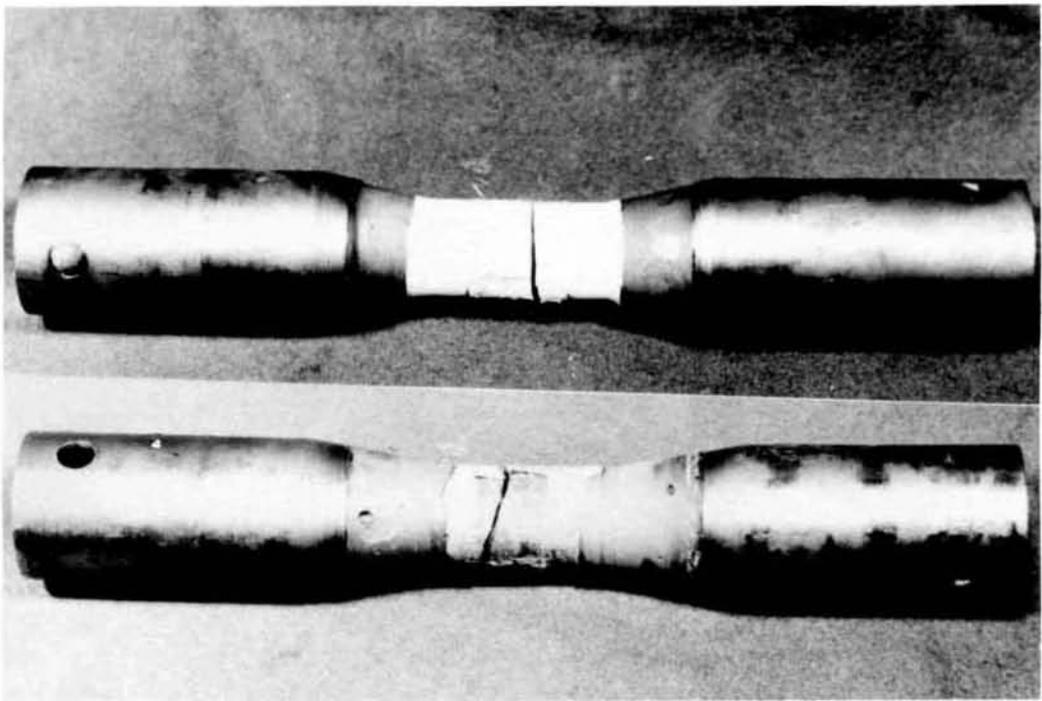


図 2・12 試験後の引張試験片

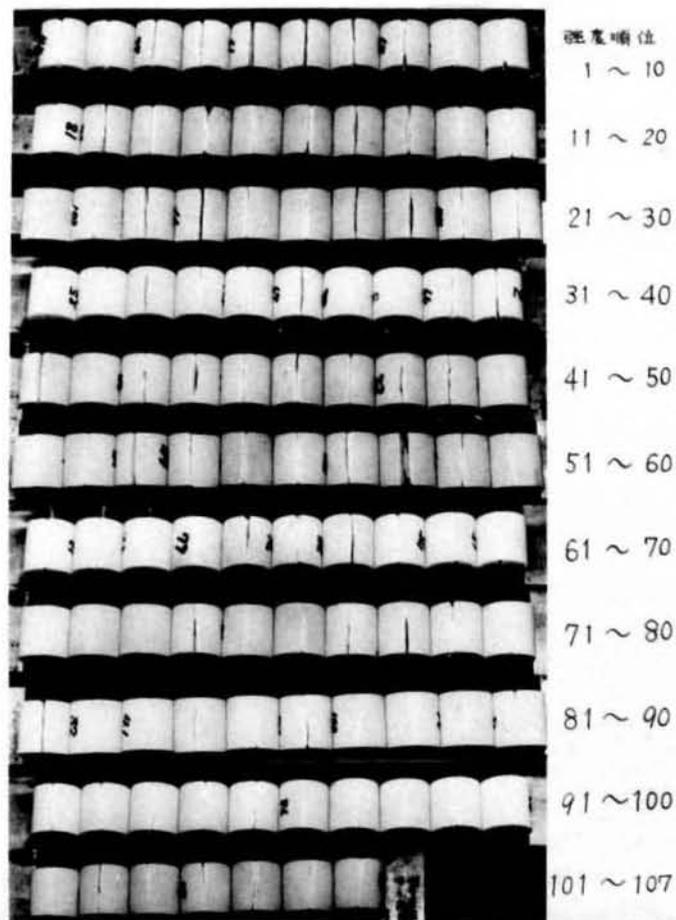


図 2・13 試験後の円板圧裂試験片

表 2・2

	試験法	個数	引張強度平均値 \overline{S}_f (kg/cm ²)	標準偏差 S (kg/cm ²)	標準偏差係数 \overline{S}
安山岩	単軸引張	26	136.6	17.50	0.128
	円板圧裂 (d_1)	31	146.4	22.55	0.154
	円板圧裂 (d_2)	47	150.1	28.82	0.192
凝灰岩	単軸引張	24	59.5	7.36	0.124
	円板圧裂 (d_1)	50	54.6	5.35	0.098
	円板圧裂 (d_2)	69	61.2	5.34	0.087
大理石	単軸引張	48	72.7	16.82	0.231
	円板圧裂 (d_1)	107	68.4	12.55	0.182
	円板圧裂 (d_2)	96	67.4	13.48	0.200

2・3・3 検 討

まず、表2・2によれば円板圧裂試験による強さと単軸引張試験による引張強さとの差は後者の±10%以内にあることがわかる。この点からいえば引張強さを求めるのに単軸引張試験の代わりに円板圧裂試験を用いても差し支えないものと思われる。

つぎに、両者の強さの標準偏差係数を比べると、これにも大差がなく、むしろ円板圧裂試験の方が散らばりが少く良好でさえある。

さらに、統計学的に実験結果を検討してみよう。一般に岩石試験のように標本となる試験片数が少ない場合には、標本集団の正規分布を規定する必要のないt分布による検討が優れているとされている³⁾。そこで、前節の試験結果についてt分布検定を行なって単軸引張試験による強さと円板圧裂試験による強さに有意な差があるかどうかを見ることにする。その手順は次のようである。

1) まず、単軸引張試験による引張強さの平均値 (S_f)_T と円板圧裂試験による

引張強さの平均値 $(S_t)_d$ には本来差がなく等しいものであるという仮説をたてる。すなわち $(S_t)_T = (S_t)_d$ Ⅱ) 実験結果では、表 2・2 に示すように、両者の平均値 $(\overline{S_t})_T$, $(\overline{S_t})_d$ には差がある。そこで、これらの値とそれぞれの標準偏差 S_T および S_d とを用いて次の値を計算する。

$$t_0 = \frac{|(\overline{S_t})_T - (\overline{S_t})_d|}{\sqrt{(n_1-1)S_T^2 + (n_2-1)S_d^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \quad (2 \cdot 12)$$

ただし、

n_1 : 単軸引張試験片の個数、

n_2 : 円板圧裂試験片の個数、

$n_1 + n_2 - 2$: 自由度 ϕ

Ⅲ) t 表から、自由度 ϕ における t_0 に対して

$$P = P(|t| \geq t_0) \quad (2 \cdot 13)$$

なる確率を求める。このとき P は上記仮説 $(S_t)_T = (S_t)_d$ のもとで先の実験結果(表 2・2) が起こり得る確率を表わす。

Ⅳ) この P と、ある選定した有意水準 α との大小を比較して、

$P \leq \alpha$ なら仮説棄却、すなわち $(S_t)_T$ と $(S_t)_d$ には本来有意な差があるとする。

$P > \alpha$ なら仮説採択とする。

したがって、この検定で $P \leq \alpha$ となり仮説棄却した場合に犯かす誤まり(単軸引張試験および円板圧裂試験の強さの平均値が本来は等しいのに、等しくないと判定すること)の確率が α となる。その意味で α のことを危険率、 $(1-\alpha)$ の値を信頼係数ともいわれる。

この検定においては、仮説を棄却できるかどうかを問うものであるから、有意水準 α を小さく取るほど仮説棄却する場合の精度は高まるが、逆に仮説採択する

場合に犯かす誤まりの確率は増加する。

いま $\alpha = 0.05$ にとって検定してみよう。岩種別に、単軸引張試験結果 $(\overline{S_t})_T$ と2種類の円板圧裂試験結果 $(\overline{S_t})_{d_1}$ と $(\overline{S_t})_{d_2}$ のそれぞれについて、すなわち合計6例について、式(2・12)を用いて計算した t_0 および次式を満足する $t_{\alpha, \phi}$ を示すと表2・3のようである。

表 2・3

	仮 説	自由度 ϕ	$t_{\alpha, \phi}$ $\alpha=0.05$	t_0	仮 説 棄 却
安山岩	$(S_t)_T = (S_t)_{d_1}$	5 5	2.0 1	1.8 0	否
	$(S_t)_T = (S_t)_{d_2}$	7 1	2.0 0	1.8 3	否
凝灰岩	$(S_t)_T = (S_t)_{d_1}$	7 2	2.0 0	4.6 8	可
	$(S_t)_T = (S_t)_{d_2}$	9 1	1.9 9	1.2 3	否
大理石	$(S_t)_T = (S_t)_{d_1}$	1 5 3	1.9 8	1.7 8	否
	$(S_t)_T = (S_t)_{d_2}$	1 4 2	1.9 8	2.0 7	可

$$P(|t| \geq t_{\alpha, \phi}) = 0.05 \quad (2 \cdot 14)$$

$t_{\alpha, \phi}$ は自由度 ϕ 、危険率 α に対して上式を満足する値として t 表から求められる。

式(2・12)および式(2・14)から、 t_0 と $t_{\alpha, \phi}$ を比較して、 $t_0 \geq t_{\alpha, \phi}$ なら $P \leq \alpha$ となり仮説棄却となる。検定結果は表2・3に示すように仮説棄却は6例中2例であって、しかもその内1例は $P \simeq \alpha$ であり棄却と採択の境にある。したがって、全体としては、有意水準5%では $(S_t)_T = (S_t)_d$ という仮定を棄却しがたいと言える。

結局、単軸引張試験で決定される引張強さと円板圧裂試験で決定される強さとは、統計学的に見て、有意な差があるとは認められない。しかも、先に述べた

ように実験によって決定された両試験による強さの平均値は、その差が引張強さの±10%以内にあること、および決定した強さの分散の点でも円板圧裂試験が単軸引張試験に劣らないことが認められた。これらの事実から、引張強さを決定するに当って、円板圧裂試験が単軸引張試験と同程度の精度を持つと考えて良いであろう。したがって、今後各種の試験法による強さを比較検討するに当って、単軸引張試験の代わりに円板圧裂試験を行なって引張強さを決定することにする。

最後に円板圧裂試験における試験片の直径と長さの比 d/t について触れておきたい。以前は圧縮試験片と同じく $d/t = 1/2 \sim 1/1.5$ の円柱試験片が用いられていたが、それでは上下の加圧板との接触が一様にゆかずそれが原因で強さを小さく評価したり、また散ばりが大きいとして、最近では $d/t = 1/1$ とか $2/1$ とか極端な場合 $4/1$ のようなできるだけ薄い円板試験片を用いる傾向がある。そこで筆者も今回の単軸引張試験と円板圧裂試験との比較の際、 $d/t = 1/1$ および $2/1$ の2種の円板試験片を選んでその良否を検討してみた。

その結果、i) 表 2・2 から、強さの値は $d/t = 2/1$ の円板試験片の方が僅かだが大きくでる傾向が認められた。ii) 標準偏差係数によって両者の強さのばらつきを見ると差はなかった。また iii) 表 2・3 から、単軸引張試験で求めた引張強さとの関係においては両者に差は認められなかった。したがって円板圧裂試験において、試験片の直径と長さの比が $1/1 \sim 2/1$ の範囲では d/t による影響はほとんど無いと結論できる。図 2・13 は $d/t = 1/1$ の円板圧裂試験片を強さの大きなものから順に並べた接触面の写真である。円板圧裂試験によって決定される強さは試験片と加圧板の接触の良否から大きな影響を受けていることがわかる。したがって、以後円板圧裂試験によって基準となる岩石の引張強さを決定するときにはこの点に十分注意することにした。

2・4 結 言

岩石の円柱形試験片とアラルダイトと鋼管とを用いて応力集中の少ない引張試験片を製作し、回転機構を上下各2～3段に組合せた鎖方式の吊金具を考案し、これらを用いて曲げおよび捩りの影響のない信頼できる引張強さを決定し得る方法を開発した。

つぎに、数種の岩石試料を用いてこの単軸引張試験と円板圧裂試験とを実施し、統計学的検討を加え両者の強さには有意な差がないことを認めた。この実験結果によると、両試験による強さはその差が±10%以内にあり、しかも円板圧裂試験の方が測定値のばらつきが小さくて良好であり、単軸引張試験のかわりに円板圧裂試験をもって基準となる引張強さを決定できることがわかった。

また、円板試験片の直径と長さの比が1：1から2：1までの範囲では、その比率が強さにあまり影響しないことがわかった。

参 考 文 献

- 1) 平松良雄・岡 行俊・木山英郎：岩石の圧裂試験における試験片の破壊の機構について，水曜会誌第15巻第10号，昭和41年3月，
479頁～482頁
- 2) 平松良雄・岡 行俊・木山英郎：岩石の圧裂試験に関する研究，日本鉱業会誌（投稿中）
- 3) たとえば，岸根卓郎：理論応用統計学，養賢堂，昭和41年1月

第3章 各種の圧裂試験における試験片内の 応力の解析^{1, 2, 3)}

3・1 緒 言

円板圧裂試験，有孔円板圧裂試験および角板圧裂試験によつて求めた強さが引張強さと充分等しいか否かを論ずるためには，まず試験を受けている試験片内の応力状態を知る必要がある。そこで弾性理論を用いてこの応力を解析してみることにした。岩石は均質，等方性弾性体ではない。また試験片の破壊は，弾性理論によつて求められた応力と強さとから十分説明できないことはいうまでもない。しかし大抵の岩石は，短時間のうちに載荷されると，著しい弾性と僅かな塑性を示す。したがつて，弾性理論による応力解析結果は，試験片の破壊を論ずる上に有力な資料となるものと考えられる。それゆゑ弾性理論によつて応力解析を試みた次である。

解析に當つては，境界条件を表わす式を Fourier 級数に展開することにより，これをでき得る限り忠実に考慮に入れることに努めた。そのかわりこのようにすれば数値計算に手数を要する。そこで電子計算機を使用して計算時間の短縮を計り，結果の精度を高めるように努めた。

3・2 円板圧裂試験

3・2・1 解 析

円板試験片内の応力分布については，載荷幅が非常に狭い場合も，そうでない場合も，すでに二三の発表⁴⁾がある。しかし，試験片の破壊の機構を論ずる上に，載荷点付近の応力状態をとくに正確に知る必要があるにもかかわらず，この点についてはまだあまり研究されていない。そこで従来発表されている解析方法と異なる方法，すなわち Fourier 級数を用いる方法で，あらためて応力解析を試みた。

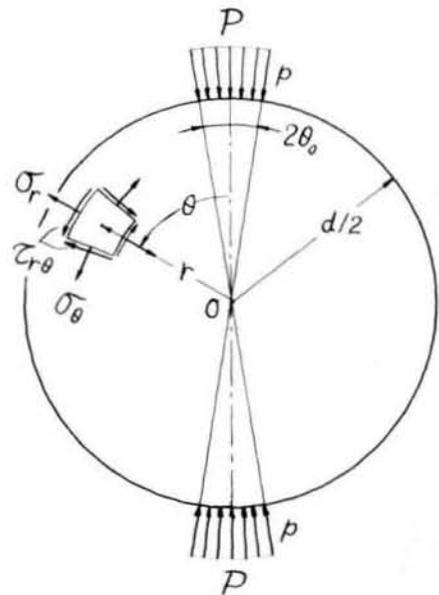
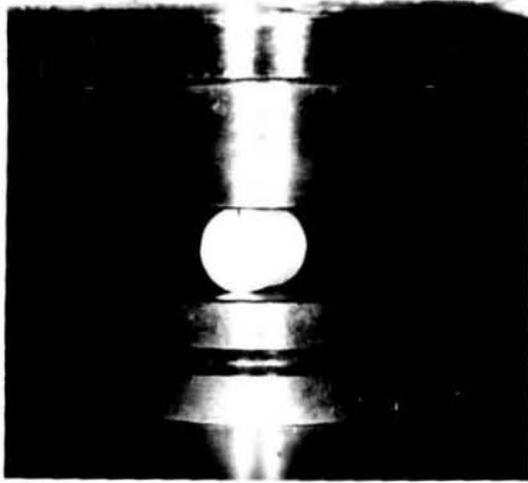


図 3 . 1 円板圧裂試験と極座標

図 3 . 1 に示すように、半径 a 、厚さ t の円板試験片の中心に原点をもつ極座標をとる。便宜上、この試験片は、一つの直径の両端の点 A 、 B を中心として、狭い幅 ($2\theta_0$ 、 a) に一様な強さ p で求心的に圧縮されるものとして、解析することにする。しかし実際には、試験片は平行な 2 つの圧板の間にはさまれて圧縮される。それゆえ上記の仮定は厳密には実情に合致しないが、載荷幅は狭いことを考慮すれば大きな誤差はないものと思われる。なお総荷量 P と p の間につきの関係が成立するものとする。

$$P = pt 2a \sin \theta_0 \quad (3 \cdot 1)$$

試験片内の応力は直径 AB およびこれに直角をなす直径のどちらに関しても対称であり、かつ $r=0$ の点においても有限でなければならない。これらの事柄を考慮すれば、Airy の応力関数 ϕ はつぎのような簡単な形となる。

$$\phi = A_0 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{2n} r^{2n-1} + C_{2n} r^{2n}) \cos 2n\theta \quad (3 \cdot 2)$$

ここで、 A_0 、 A_{2n} および C_{2n} は境界条件によつて決定される任意定数である。
また各応力成力は ϕ を用いて次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 3)$$

境界条件は次のようである。

$$(\tau_{r\theta})_{r=a} = 0,$$

$$(\sigma_r)_{r=a} = \begin{cases} -p & (-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0, \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0) \\ 0 & (\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0, \pi + \theta_0 < \theta < 2\pi - \theta_0) \end{cases}$$

(3 · 4a)

この $(\sigma_r)_{r=a}$ を Fourier 級数で表わすと、

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=a} &= -\frac{2}{\pi} p \{ \theta_0 + \sin 2\theta_0 \cos 2\theta \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\theta_0 \cos 2n\theta \}. \end{aligned} \quad (3 \cdot 4b)$$

以上の条件を考慮して、 A_0 、 A_{2n} および C_{2n} は次のように決定される。

$$A_0 = \frac{-P \theta_0}{2\pi a t \sin \theta_0}$$

$$A_{2n} = \frac{-P}{2\pi a t \sin \theta_0} \cdot \frac{\sin 2n\theta_0}{n(2n+1) a^{2n}}$$

$$C_{2n} = \frac{P}{2\pi a t \sin \theta_0} \cdot \frac{\sin 2n \theta_0}{n(2n-1)a^{2n-2}} \quad (3 \cdot 5)$$

したがって各応力成分は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{-P}{\pi a t \sin \theta_0} (\theta_0 + 2 \sin 2 \theta_0 \cos 2 \theta) \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{n-1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} - \left(\frac{r}{a} \right)^{2(n-1)} \right\} \sin 2n \theta_0 \cos 2n \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{-P}{\pi a t \sin \theta_0} \left\{ \theta_0 + \left[2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right] \sin 2 \theta_0 \cos 2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{n+1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} - \left(\frac{r}{a} \right)^{2(n-1)} \right\} \sin 2n \theta_0 \cos 2n \theta \right\} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{-P}{\pi a t \sin \theta_0} \left\{ \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right] \sin 2 \theta_0 \sin 2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} - \left(\frac{r}{a} \right)^{2(n-1)} \right\} \sin 2n \theta_0 \sin 2n \theta \right\} \quad (3 \cdot 6) \end{aligned}$$

上式から、直径 AB 上では $\tau_{r\theta} = 0$ であり、したがって σ_r と σ_θ は主応力であることがわかる。

3・2・2 応力分布

前項で導いた式 (3・6) によつて、種々の載荷幅の場合について電子計算機を用いて応力分布を計算した。その結果を図示すると図 3・2 のようである。

この図を見れば、直径 AB に沿つて σ_r は圧縮応力で、中心において最も小さく、載荷点に近づくにつれて増加すること、中心 O における σ_r は載荷幅の大小に無関係に $6P/\pi d t$ であること、および中心からの距離 r とともに σ_r が増加する割合は載荷幅が広いほど小さいことなどがわかる。

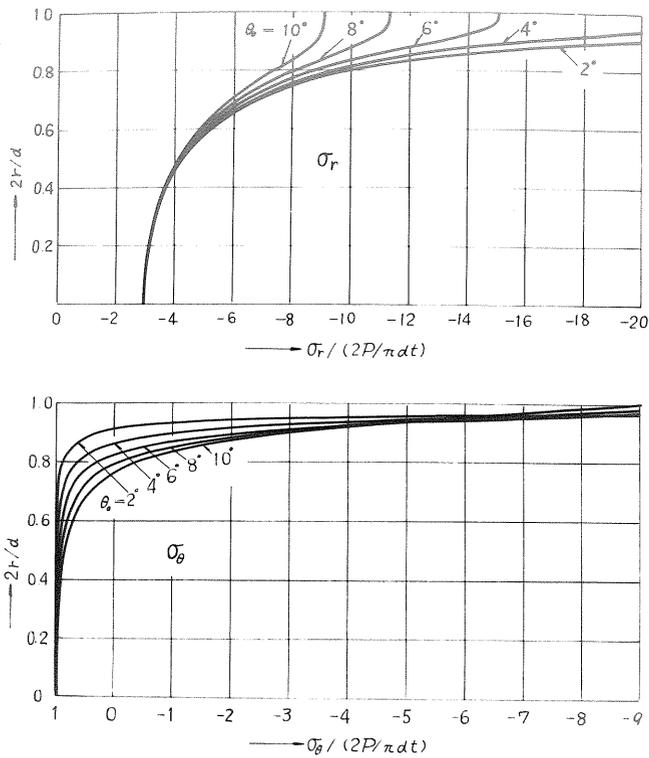


図3・2 円板圧裂試験片内の载荷軸上の σ_r 、 σ_θ と θ_0 との関係

一方、直径AB上の σ_θ の分布は、中心($r=0$)において、载荷幅に関係なく $-2P/\pi dt$ (引張応力)であるが、 r が大きい値をとるにつれてやや減少し、 $r=(0.6\sim 0.9)d/2$ の範囲のどこかで零となり、 r がそれよりさらに大きい値をとると圧縮応力となる。しかも载荷幅が広いほど引張応力の生ずる範囲は狭くかつ r とともに引張応力が減少する割合は大きいことがわかる。

载荷点の極く近傍の応力状態は図3・3に示すようで、 σ_r と σ_θ はともに大きな圧縮応力であり、その値は载荷幅が狭いほど大きい。

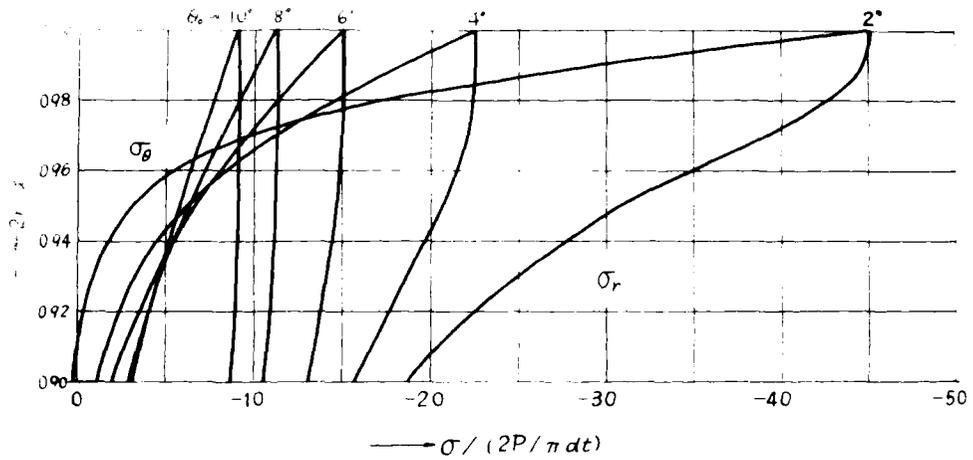


図 3・3 円板圧裂試験片内の載荷点付近の σ_r , σ_θ と θ_0 との関係

3・3 有孔円板圧裂試験

3・3・1 解 析

有孔円板圧裂試験における試験片の破壊を論ずるのに、試験片内の応力状態を正確に知る必要があるが、これを詳細に論じた報告はまだ見ない。そこで平松・岡・萩野の解析によつて、電子計算機を使用して、試験片内の応力状態を厳密に解析することにした。

図 3・4 に示すように厚さ t 、外径 a 、内径 b の有孔円板の中心 O を原点として、極座標 (r, θ) をとる。このとき、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right) = 0$$

(3・7)

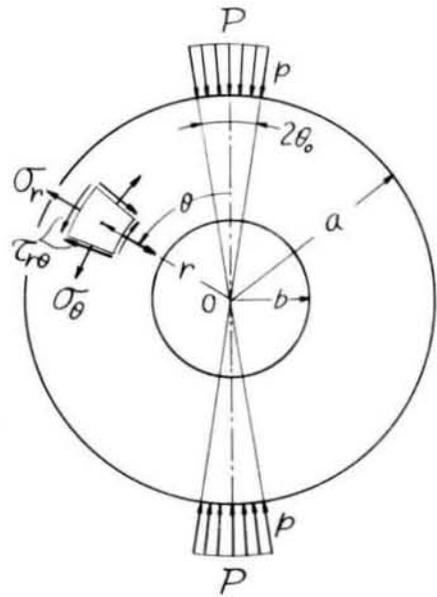
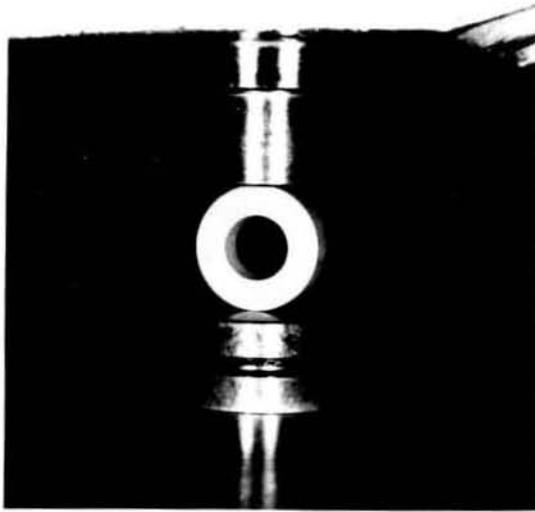


図3・4 有孔円板圧裂試験と極座標

を満足する応力関数 ϕ の一般解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \phi = & A_0 r^2 + B_0 \log r + D_0 r^2 \log r + K_0 r^2 \theta + H_0 \theta + A_1 r^3 \cos \theta \\
 & + B_1 r^{-1} \cos \theta + C_1 r \theta \sin \theta + D_1 r \log r \cos \theta + A_1 r^3 \sin \theta \\
 & + B_1 r^{-1} \sin \theta - C_1 r \theta \cos \theta + D_1 r \log r \sin \theta \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (A_n r^{n+2} + B_n r^{-n} + C_n r^n + D_n r^{-n+2}) \cos n \theta \\
 & \quad + (A_n r^{n+2} + B_n r^{-n} + C_n r^n + D_n r^{-n+2}) \sin n \theta \}
 \end{aligned}$$

(3・8)

前述の円板圧裂試験におけると同様、試験片は狭い幅 ($2\theta_0 a$) に一様な強さ p で求心的に圧縮されるものとして解析することにする。総荷量 P と p との間には

次式の関係が成立する。

$$p = P / 2 a t \sin \theta_0 \quad (3 \cdot 9)$$

応力成分は直径 AB およびこれに垂直な直径に関し対称であることを考慮すると，応力関数は次式のように簡単になる。

$$\begin{aligned} \phi = & A_0 r^2 + B_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_{2n} r^{2n+2} + B_{2n} r^{-2n} \\ & + C_{2n} r^{2n} + D_{2n} r^{-2n+2} \} \cos 2n\theta \end{aligned} \quad (3 \cdot 10)$$

したがって，応力成分は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \sigma_r = & 2A_0 + B_0 r^{-2} - \sum_{n=1}^{\infty} \{ 2(n-1)(2n+1)A_{2n} r^{2n} + 2n(2n+1)B_{2n} r^{-2n-2} \\ & + 2n(2n-1)C_{2n} r^{2n-2} + 2(n+1)(2n-1)D_{2n} r^{-2n} \} \cos 2n\theta, \\ \sigma_\theta = & 2A_0 - B_0 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ 2(n+1)(2n+1)A_{2n} r^{2n} + 2n(2n+1)B_{2n} r^{-2n-1} \\ & + 2n(2n-1)C_{2n} r^{2n-2} + 2(n-1)(2n-1)D_{2n} r^{-2n} \} \cos 2n\theta, \\ \tau_{r\theta} = & \sum_{n=1}^{\infty} 2n \{ (2n+1)A_{2n} r^{2n} - (2n+1)B_{2n} r^{-2n-2} + (2n-1)C_{2n} r^{2n-2} \\ & - (2n-1)D_{2n} r^{-2n} \} \sin 2n\theta \end{aligned} \quad (3 \cdot 11)$$

ここで $A_0, B_0, A_{2n}, B_{2n}, C_{2n}, D_{2n}$ は境界条件によつて決まる定数である。

さて，境界条件はつぎのようである。

$$(\sigma_r)_{r=b} = 0, \quad (\tau_{r\theta})_{r=b} = 0,$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=a} = 0,$$

$$(\sigma_r)_{r=a} = \begin{cases} -p & (-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0, \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0) \\ 0 & (\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0, \pi + \theta_0 < \theta < 2\pi - \theta_0) \end{cases}$$

この最後の条件を Fourier 級数で表わすと,

$$(\sigma_r)_{r=a} = -\frac{2}{\pi} p \left[\theta_0 + \sin 2\theta_0 \cos 2\theta \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\theta_0 \cos 2n\theta \right]$$

これらの境界条件を考慮すると, 各定数はつぎのように決定できる。

$$A_0 = -\frac{p\theta_0}{2\pi} \frac{2a^2}{a^2 - b^2},$$

$$B_0 = \frac{p\theta_0}{\pi} \frac{2a^2 b^2}{a^2 - b^2},$$

$$A_{2n} = \left(\frac{\beta_{2n}}{\alpha_{2n}} \right) \frac{1}{2n+1} \frac{b^{2n}}{a^{4n}} \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^{4n} + 2n \left(\frac{b}{a} \right)^2 - (2n+1) \right\},$$

$$B_{2n} = - \left(\frac{\beta_{2n}}{\alpha_{2n}} \right) \frac{1}{2n+1} b^{2n+2} \left\{ (2n+1) \left(\frac{b}{a} \right)^{4n} - 2n \left(\frac{b}{a} \right)^{4n-2} - 1 \right\},$$

$$C_{2n} = - \left(\frac{\beta_{2n}}{\alpha_{2n}} \right) \frac{1}{2n-1} \frac{b^{2n}}{a^{4n-2}} \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^{4n+2} + (2n-1) \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 2n \right\},$$

$$D_{2n} = \left(\frac{\beta_{2n}}{\alpha_{2n}} \right) \frac{1}{2n-1} b^{2n} \left\{ 2n \left(\frac{b}{a} \right)^{4n+2} - (2n-1) \left(\frac{b}{a} \right)^{4n} - 1 \right\},$$

$$\alpha_{2n} = \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^{4n} - 1 \right\}^2 - \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right\} (2n)^2 \left(\frac{b}{a} \right)^{4n-2},$$

$$\beta_{2n} = -\frac{2p \sin 2n\theta_0}{2n\pi}$$

(3 · 12)

3・3・2 応力分布

上記の解析結果を用い、電子計算機を用いて、 $b/a = 0.1 \sim 0.8$ 、 $\theta_0 = 0 \sim 10^\circ$ の範囲にわたり、試験片の破壊を論ずるに必要と思われる点、すなわち試験片の垂直および水平方向の直径上の応力を計算した。結果の一部を図示すると図3・5 (a), (b), (c) および (d) のようである。この図において σ_r

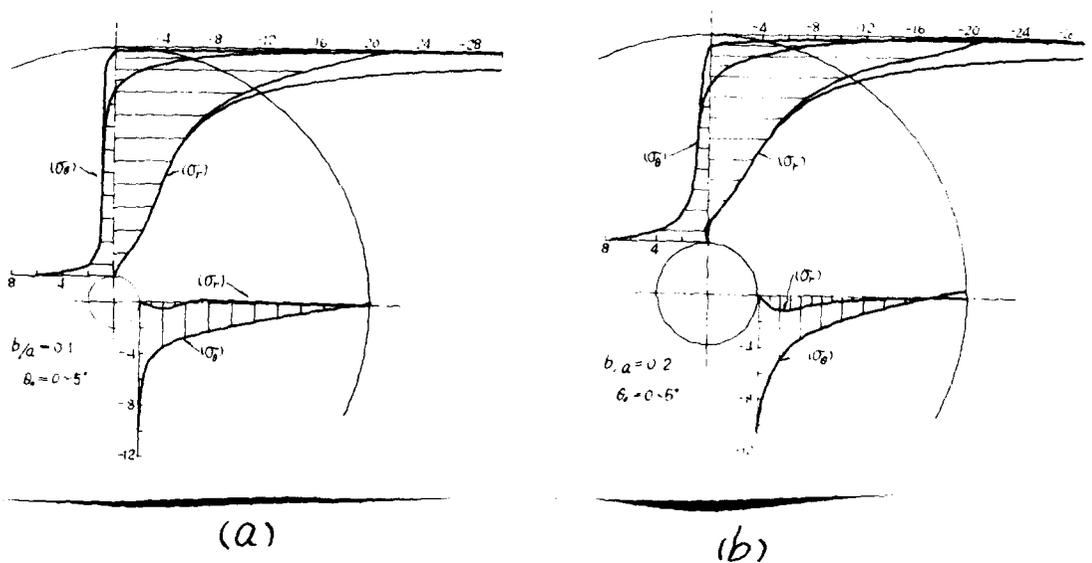
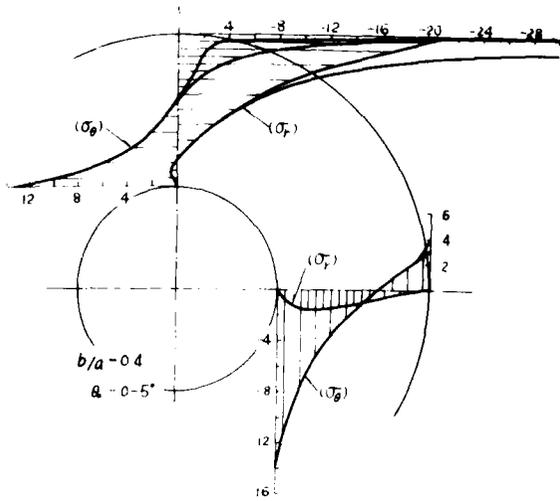


図 3 : 5 有孔円板圧裂試験片内の σ_r 、 σ_θ と b/a との関係 (その1)

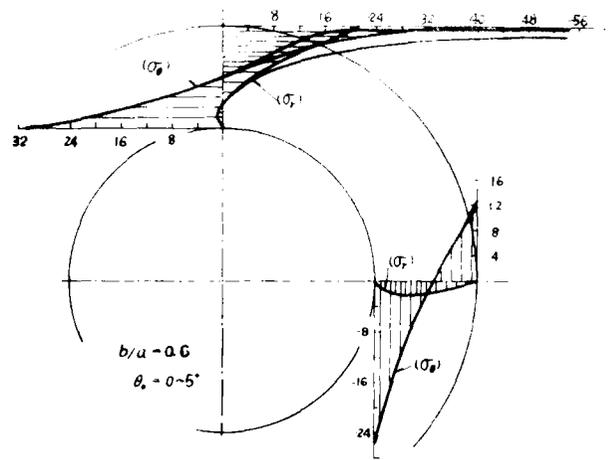
および σ_θ は各点における2つの主応力である。この図から、 $\theta_0 = 0 \sim 10^\circ$ の範囲では、載荷点付近を除けば応力は載荷幅の影響をほとんど受けない。

b/a が小さいとき、すなわち円孔の小さいとき、円孔の真上および真下において σ_θ は円板圧裂試験におけるその3倍 (すなわち $12P/\pi 2at$) 以上である。この応力は r が b からだんだん大きい値をとるとともに急激に減少し、やがて圧縮応力になる。

b/a が大きくなるにつれて、すなわち円孔が大きくなるにつれて、円孔の真上および真下の σ_θ は大きくなる。また σ_θ は r の増加とともに減少し圧縮応力に変



(c)



(d)

図 3・5 有孔円板圧裂試験片内の σ_r , σ_θ と b/a との関係 (その2)

り、その分布は梁の曲げ試験における応力分布とよく似た状態となる。またこのとき、水平な直径上の σ_θ は円孔の真横で大きな圧縮応力であり、 r の増加とともに減少して引張応力に変る。 $r = a$ においてかなり大きな引張応力となる。

3・4 角板圧裂試験

3・4・1 数学解析

この試験は、図3・6に示すように、角板試験片を上下2つの小さな圧板で部分的に圧縮し、試験片を破壊させて、そのときの荷重から強さを決定する方法である。圧板の接触面は平面とする。

このときの角板試験片内の応力状態については、光弾性実験によつて求めた結果⁶⁾が発表されてはいる。しかし、試験片の破壊を論ずるにはさらに精度の高い

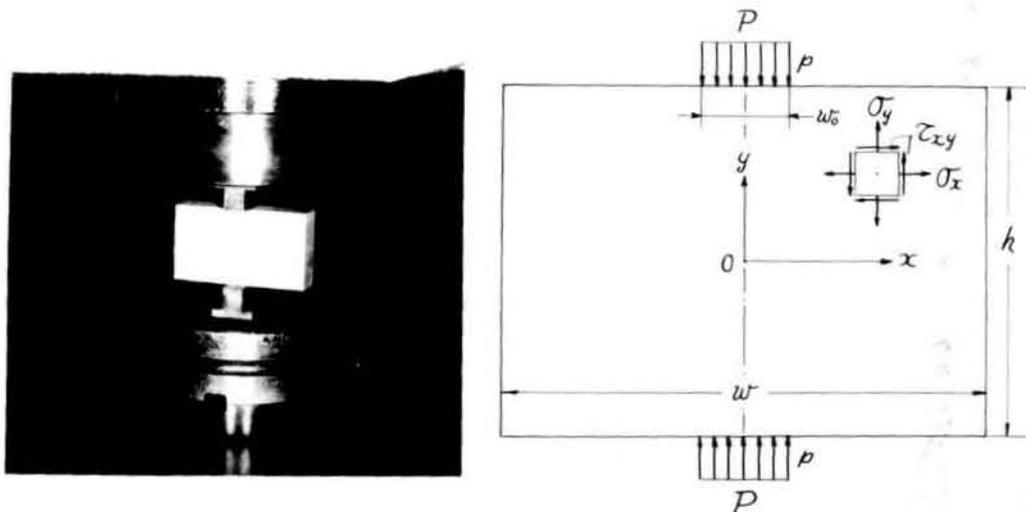


図 3・6 角板圧裂試験と直角座標

応力解析が必要である。そこでつぎに述べる数学的な応力解析を試みた。

平面問題においては Airy の応力関数 ϕ は次式を満足する。

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (3 \cdot 13)$$

また各応力成分は ϕ を用いて次のように表わされる。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3 \cdot 14)$$

図 3・6 に示すように縦 h 、横 w の角板試験片の一般的な境界条件を満足させるために Airy の応力関数はつぎの形で表わすことにする。

$$\phi = \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V \quad (3 \cdot 15)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \phi_I &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n x \cdot f_I(y) \quad , \\
 \phi_{II} &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n x \cdot f_{II}(y) \quad , \\
 \phi_{III} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \beta_n y \cdot f_{III}(x) \quad , \\
 \phi_{IV} &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n y \cdot f_{IV}(x) \quad , \\
 \phi_V &= f_V(x, y) \quad (3 \cdot 16)
 \end{aligned}$$

であり, α_n および β_n は次式で与えられる。

$$\alpha_n = n\pi/w, \quad \beta_n = n\pi/h \quad . \quad (3 \cdot 17)$$

さらに, $f_I(y)$, $f_{II}(y)$, $f_{III}(x)$ および $f_{IV}(x)$ は式 (3・16) からつぎの式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 f_I(y) &= A'_n \cosh \alpha_n y + B'_n \sinh \alpha_n y \\
 &\quad + C'_n y \cosh \alpha_n y + D'_n y \sinh \alpha_n y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{II}(y) &= A''_n \cosh \alpha_n y + B''_n \sinh \alpha_n y \\
 &\quad + C''_n y \cosh \alpha_n y + D''_n y \sinh \alpha_n y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{III}(x) &= A'''_n \cosh \beta_n x + B'''_n \sinh \beta_n x \\
 &\quad + C'''_n x \cosh \beta_n x + D'''_n x \sinh \beta_n x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{IV}(x) &= A''''_n \cosh \beta_n x + B''''_n \sinh \beta_n x \\
 &\quad + C''''_n x \cosh \beta_n x + D''''_n x \sinh \beta_n x \quad (3 \cdot 18)
 \end{aligned}$$

また, $f_V(x, y)$ は式 (3・13) を満足する x, y の多項式である。

式 (3・16) と (3・14) から応力成分の一般解は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_x = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n x \{ A'_n \alpha_n^2 \cosh \alpha_n y + B'_n \alpha_n^2 \sinh \alpha_n y \\
 & + C'_n \alpha_n (2 \sinh \alpha_n y + \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \\
 & + D'_n \alpha_n (2 \cosh \alpha_n y + \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n x \{ A''_n \alpha_n^2 \cosh \alpha_n y + B''_n \alpha_n^2 \sinh \alpha_n y \\
 & + C''_n \alpha_n (2 \sinh \alpha_n y + \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \\
 & + D''_n \alpha_n (2 \cosh \alpha_n y + \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \} \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \sin \beta_n y \{ A'''_n \cosh \beta_n x + B'''_n \sinh \beta_n x \\
 & + C'''_n x \cosh \beta_n x + D'''_n x \sinh \beta_n x \} \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \cos \beta_n y \{ A''''_n \cosh \beta_n x + B''''_n \sinh \beta_n x \\
 & + C''''_n x \cosh \beta_n x + D''''_n x \sinh \beta_n x \} \\
 & + \frac{\partial^2 f_V(x, y)}{\partial y^2} \tag{3・19 a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_y = & - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \sin \alpha_n x \{ A'_n \cosh \alpha_n y + B'_n \sinh \alpha_n y \\
 & + C'_n y \cosh \alpha_n y + D'_n y \sinh \alpha_n y \} \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \cos \alpha_n x \{ A''_n \cosh \alpha_n y + B''_n \sinh \alpha_n y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_n'' y \cosh \alpha_n y + D_n'' y \sinh \alpha_n y \} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \beta_n y \{ A_n' \beta_n^2 \cosh \beta_n x + B_n'' \beta_n^2 \sinh \beta_n x \\
& \quad + C_n''' \beta_n (2 \sinh \beta_n x + \beta_n x \cosh \beta_n x) \\
& \quad + D_n'' \beta_n (2 \cosh \beta_n x + \beta_n x \sinh \beta_n x) \} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n y \{ A_n''' \beta_n^2 \cosh \beta_n x + B_n'''' \beta_n^2 \sinh \beta_n x \\
& \quad + C_n'''' \beta_n (2 \sinh \beta_n x + \beta_n x \cosh \beta_n x) \\
& \quad + D_n'''' \beta_n (2 \cosh \beta_n x + \beta_n x \sinh \beta_n x) \} \\
& + \frac{\partial^2 f_V(x, y)}{\partial x^2} \qquad (3 \cdot 19 b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \alpha_n x \{ A_n' \alpha_n \sinh \alpha_n y + B_n' \alpha_n \cosh \alpha_n y \\
& \quad + C_n' (\cosh \alpha_n y + \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \\
& \quad + D_n' (\sinh \alpha_n y + \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \alpha_n x \{ A_n'' \alpha_n \sinh \alpha_n y + B_n'' \alpha_n \cosh \alpha_n y \\
& \quad + C_n'' (\cosh \alpha_n y + \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \\
& \quad + D_n'' (\sinh \alpha_n y + \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \} \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos \beta_n y \{ A_n'' \beta_n \sinh \beta_n x + B_n'' \beta_n \cosh \beta_n x \\
& \quad + C_n'' (\cosh \beta_n x + \beta_n x \sinh \beta_n x) \\
& \quad + D_n'' (\sinh \beta_n x + \beta_n x \cosh \beta_n x) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \beta_n y \{ A_n''' \beta_n \sinh \beta_n x + B_n''' \beta_n \cosh \beta_n x \\
& \quad + C_n''' (\cosh \beta_n x + \beta_n x \sinh \beta_n x) \\
& \quad + D_n''' (\sinh \beta_n x + \beta_n x \cosh \beta_n x) \\
& \quad - \frac{\partial^2 f_V(x, y)}{\partial x \partial y} \qquad (3 \cdot 19 c)
\end{aligned}$$

ここで、 A_n' , \dots , D_n' ; A_n'' , \dots , D_n'' ; A_n''' , \dots , D_n''' ; A_n'''' , \dots , D_n'''' は境界条件によつて決められる定数である。

境界条件としては種々なものが考えられるが、これらはずぎの 8 種類の基本的な条件の組合せと見なすことができる。

- (1) $y = \pm h/2$ の面に垂直の荷重だけが作用し、
 - i) その荷重が x の偶関数で表わされる場合、
 - ii) その荷重が x の奇関数で表わされる場合、
- (2) $y = \pm h/2$ の面に水平の荷重だけが作用し、
 - i) その荷重が x の偶関数で表わされる場合、
 - ii) その荷重が x の奇関数で表わされる場合、
- (3) $x = \pm w/2$ の面に垂直の荷重だけが作用し、
 - i) その荷重が y の偶関数で表わされる場合、
 - ii) その荷重が y の奇関数で表わされる場合、
- (4) $x = \pm w/2$ の面に水平の荷重だけが作用し、
 - i) その荷重が y の偶関数で表わされる場合、
 - ii) その荷重が y の奇関数で表わされる場合、

したがつて、これらの 8 種類の境界条件のもとにおける角板内の各応力成分が別々に求まると、一般の境界条件のもとにおける解が得られる。

さて、図 3・6 に示すように、縦 h 、横 w 、厚さ t の角板試験片の上下面上の中央に w_0 の幅をもつて一様な強さ p の載荷を行なうものとする。このときの境

界条件はつぎのように表わされる。

$$x = \pm w / 2 \text{ で, } \tau_{xy} = 0 \quad (3 \cdot 20 \text{ a})$$

$$\sigma_x = 0 \quad (3 \cdot 20 \text{ b})$$

$$y = \pm h / 2 \text{ で, } \tau_{xy} = 0 \quad (3 \cdot 20 \text{ c})$$

$$\sigma_y = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \alpha_m x \quad (3 \cdot 20 \text{ d})$$

このとき ϕ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{m=1}^{\infty} \cos \alpha_m x [A_m'' \cosh \alpha_m y + D_m'' y \sinh \alpha_m y] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n y [A_n''' \cosh \beta_n x + D_n''' x \sinh \beta_n x] \\ &+ \frac{A_0}{2} x^2 \end{aligned} \quad (3 \cdot 21)$$

したがって応力成分は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \cos \alpha_m x [A_m'' \alpha_m^2 \cosh \alpha_m y + D_m'' \alpha_m (2 \cosh \alpha_m y \\ &\quad + \alpha_m y \sinh \alpha_m y)] \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \cos \beta_n y [A_n''' \cosh \beta_n x + D_n''' x \sinh \beta_n x] \\ \sigma_y &= - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \cos \alpha_m x [A_m'' \cosh \alpha_m y + D_m'' y \sinh \alpha_m y] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n y [A_n''' \beta_n^2 \cosh \beta_n x + D_n''' \beta_n (2 \cosh \beta_n x \\ &\quad + \beta_n x \sinh \beta_n x)] \\ &+ A_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin \alpha_m x \{ A_m'' \alpha_m \sinh \alpha_m y + D_m'' (\sinh \alpha_m y \\
& + \alpha_m y \cosh \alpha_m y) \} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \beta_n y \{ A_n''' \beta_n \sinh \beta_n x + D_n''' (\sinh \beta_n x \\
& + \beta_n x \cosh \beta_n x) \} \quad (3 \cdot 22)
\end{aligned}$$

ただし、 α_m 、 β_n は境界条件を考慮して次のように選ぶ。

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= 2m\pi/w \quad (m = 1, 2, \dots), \\
\beta_n &= 2n\pi/h \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3 \cdot 23)
\end{aligned}$$

式 (3 · 19 a) および (3 · 22) より

$$\begin{aligned}
A_n''' \beta_n \sinh \beta_n w/2 + D_n''' (\sinh \beta_n w/2 \\
+ (\beta_n w/2) \cosh \beta_n w/2) = 0 \quad (3 \cdot 24)
\end{aligned}$$

式 (3 · 19 b) より

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \{ A_m'' \alpha_m^2 \cosh \alpha_m y + D_m'' \alpha_m (2 \cosh \alpha_m y \\
+ \alpha_m y \sinh \alpha_m y) \} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \cos \beta_n y \{ A_n''' \cosh \beta_n w/2 \\
+ D_n''' w/2 \sinh \beta_n w/2 \} = 0 \quad (3 \cdot 25)
\end{aligned}$$

式 (3 · 19 c) より

$$\begin{aligned}
& A_m'' \alpha_m \sinh \alpha_m h/2 + D_m'' (\sinh \alpha_m h/2 \\
& + \alpha_m h/2 \cdot \cosh \alpha_m h/2) = 0 \qquad (3 \cdot 26)
\end{aligned}$$

式 (3 · 19 d) より

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \cos \alpha_m x \{ A_m'' \cosh \alpha_m h/2 + D_m'' h/2 \sinh \alpha_m h/2 \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{ A_n''' \beta_n^2 \cosh \beta_n x + D_n''' \beta_n (2 \cosh \beta_n x \\
& + \beta_n x \sinh \beta_n x) \} + A_0 \\
& = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \alpha_m x \qquad (3 \cdot 27)
\end{aligned}$$

式 (3 · 24) および式 (3 · 26) より,

$$\begin{aligned}
& \frac{A_n'''}{\sinh \beta_n w/2 \cosh \beta_n w/2} \\
& = \frac{-D_n'''}{\beta_n \sinh \beta_n w/2} = \frac{C_n}{\Delta_n \beta_n^2}, \\
& \frac{A_m''}{\sinh \alpha_m h/2 + \alpha_m h/2 \cosh \alpha_m h/2} \\
& = \frac{-D_m''}{\alpha_m \sinh \alpha_m h/2} = \frac{A_m}{\xi_m \alpha_m^2}
\end{aligned}$$

ただし,

$$\Delta_n = \beta_n w/2 + \cosh \beta_n w/2 \sinh \beta_n w/2,$$

$$\xi_m = \alpha_m h/2 + \cosh \alpha_m h/2 \sinh \alpha_m h/2$$

を得る。すなわち、4つの未知数 A_m'' , D_m'' , A_n'' および D_n'' が2つの未知数 A_m , C_n で表わされたことになる。これを用いて式 (3・25) および (3・27) を書直すと次のようになる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{A_m}{\xi_m} \{ (-\sinh \alpha_m h/2 + \alpha_m h/2 \cosh \alpha_m h/2) \\ \times \cos \alpha_m y - (\alpha_m \sinh \alpha_m h/2) y \sinh \alpha_m y \} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \beta_n y = 0 \quad (3 \cdot 28)$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \alpha_m x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{C_n}{A_n} \{ (-\sinh \beta_n w/2 \\ + \beta_n w/2 \cosh \beta_n w/2) \cosh \beta_n x \\ - (\beta_n \sinh \beta_n w/2) x \sinh \beta_n x \} \\ = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \alpha_m x \quad (3 \cdot 29)$$

さらに、式 (3・28) の両辺を y の関数とみなし、これらに $\cos \beta_n y$ を乗じて、 $-h/2 \leq y \leq h/2$ の範囲について y で積分し、また式 (3・29) の両辺は x の関数とみなし、これらに $\cos \beta_n x$ を乗じて $-w/2 \leq x \leq w/2$ の範囲について x で積分することによつて両式を Fourier 級数に展開する。これらの式からつぎの関係を得る。

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\xi_m} (-1)^m \left[\frac{4 (-1)^n}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \alpha_m \beta_n^2 \sinh^2 \alpha_m h/2 \right] \\ - C_n h/2 = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3 \cdot 30)$$

$$- A_m w/2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{A_n} (-1)^n \left[\frac{4 (-1)^m}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \beta_n \alpha_m^2 \sinh^2 \beta_n w/2 \right]$$

$$= a_m w/2 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3 \cdot 31)$$

いま,

$$Q_{mn} = \frac{4 (-1)^m (-1)^n a_m \beta_n^2 \sinh^2 \alpha_m h/2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 \xi_m h/2}$$

$$R_{nm} = \frac{4 (-1)^n (-1)^m \beta_n a_m^2 \sinh^2 \beta_n w/2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 \Delta_n w/2}$$

と置いて式 (3・30) , (3・31) を書き直すと次式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m Q_{mn} + C_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$A_m + \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_{nm} = -a_m \quad (m = 1, 2, \dots),$$

$$A_0 = a_0 . \quad (3 \cdot 32)$$

定数 A_m および C_n を決定することは, 結局 A_m , C_n に関する多元連立一次方程式 (3・32) を解くことに帰する。

式 (3・22) で与えられる各応力成分を A_m , C_n を用いて表わすとつぎのようになる。

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\xi_m} \cos \alpha_m x \{ (-\sinh \alpha_m h/2$$

$$+ \alpha_m h/2 \cosh \alpha_m h/2) \cosh \alpha_m y$$

$$- (\alpha_m \sinh \alpha_m h/2) y \sinh \alpha_m y \}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\Delta_n} \cos \beta_n y \{ (\sinh \beta_n w/2$$

$$\begin{aligned}
& +\beta_n w/2 \cosh \beta_n w/2) \cos h \beta_n x \\
& - (\beta_n \sinh \beta_n w/2) x \sinh \beta_n x) \\
\sigma_y = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\xi_m} \cos \alpha_m x \{ (\sinh \alpha_m h/2 \\
& + \alpha_m h/2 \cosh \alpha_m h/2) \cos h \alpha_m y \\
& - (\alpha_m \sinh \alpha_m h/2) y \sinh \alpha_m y) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\Delta_n} \cos \beta_n y \{ (-\sinh \beta_n w/2 \\
& + \beta_n w/2 \cosh \beta_n w/2) \cos h \beta_n x \\
& - (\beta_n \sinh \beta_n w/2) x \sinh \beta_n x) \\
& + A_0 \\
\tau_{xy} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\xi_m} \sin \alpha_m x \{ \alpha_m h/2 \cosh \alpha_m h/2 \sinh \alpha_m y \\
& - \alpha_m y \sinh \alpha_m h/2 \cosh \alpha_m y) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\Delta_n} \sin \beta_n y \{ \beta_n w/2 \cosh \beta_n w/2 \sinh \beta_n x \\
& - \beta_n x \sinh \beta_n w/2 \cosh \beta_n x)
\end{aligned}$$

(3・33)

なお、図 3・6 のように総荷重を P ，等分布荷重を p とすると，式 (3・20 d) の a_0 および a_m は次式のようなのである。

$$a_0 = -\frac{p w_0}{w} = -\frac{P}{w}$$

$$\begin{aligned}
 a_m &= -\frac{2}{w} \int_{-w_o/2}^{w_o/2} p \cos \frac{2m\pi}{w} x dx \\
 &= -2p \sin \frac{m\pi w_o}{w} / m\pi \\
 &= -\frac{2P}{w_o} \frac{\sin \frac{m\pi w_o}{w}}{m\pi} \quad (3 \cdot 34)
 \end{aligned}$$

3・4・2 数値解析

前項で述べた数学解析のやり方によれば、角板の平面問題に関する限り、どんな境界条件でも大抵これを考慮に入れて解くことができる。しかし、境界条件がとくに複雑で、これを Fourier 級数に展開しにくい場合も考えられる。このような場合に備えて、どんな境界条件でも満足し得る数値解析法⁷⁾をも用いることにする。

平面問題においては前に述べたように、

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (3 \cdot 13)$$

与えられた境界条件を満足するような式 (3・13) の解を数値解析によつて求めるために、上式を差分方程式に書き直すと、図 3・7 に示す正方格子点においては、

$$\begin{aligned}
 20\phi_0 - 8(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + 2(\phi_6 + \phi_8 + \phi_{10} + \phi_{12}) \\
 + \phi_5 + \phi_7 + \phi_9 + \phi_{11} = 0 \quad (3 \cdot 35)
 \end{aligned}$$

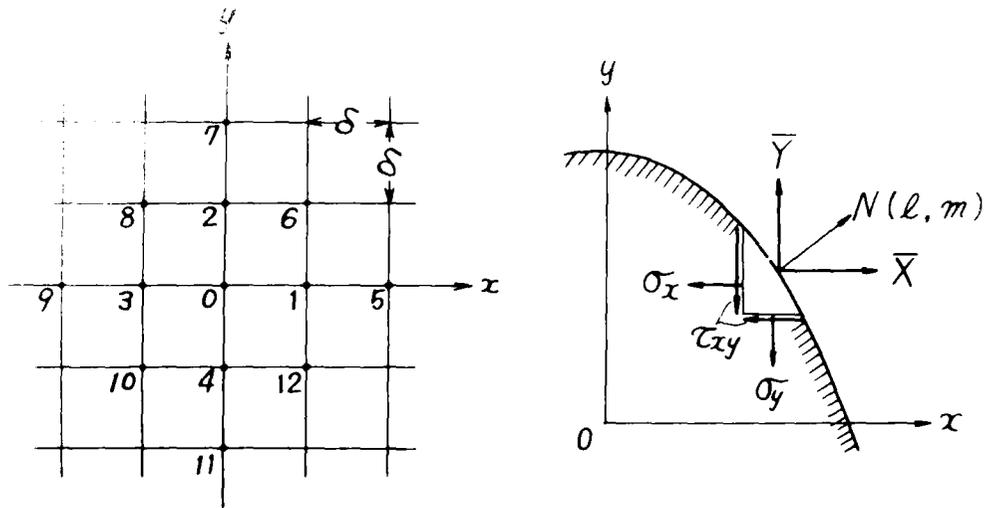


図3・7 数値解析における正方格子と境界線上の外力と応力の模式図

となる。角板の内部にとられたすべての格子点において、式(3・35)と同じ形が独立に成立する。一方、境界面上で外力が与えられれば、その面上の ϕ および $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$ の値が計算でき、境界面より1列外側の格子点の ϕ も解析接続によつて、境界面より1列内側の格子点の ϕ の関数として求めることができる。したがつて、式(3・35)によつて組立てられる多元連立1次方程式は未知数 ϕ の数と条件式の数が一致するので解くことができる。しかし、重調和方程式(3・13)の近似式(3・35)の近似の程度をよくするためには格子点の数を多くとる必要があり、そうすれば大きな元数の連立一次方程式を解かなければならない。また、式(3・35)を逐次近似法で解いてみると収束が悪いことがわかる。

そこで、式(3・13)をつぎの2つの微分方程式に置きかえて計算するWolfの方法によるのがよいと考えられる。この方法では式(3・13)が次式のようになる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (3 \cdot 36)$$

これらの2つの式に対する差分方程式は、つぎのようになる。

$$(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0) = \delta^2 \psi_0, \quad (3 \cdot 37)$$

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 = 0. \quad (3 \cdot 38)$$

しかし、この方法で数値解析を実施する場合、最初から格子点の数を多くとると、収束が遅いので、粗い格子から3~4段階を経て格子間隔を十分小さくする方法をとる。以上は岡・日比野・平松による数値解析の大要である。

つぎに、境界面上の ϕ 、 $\partial\phi/\partial x$ および $\partial\phi/\partial y$ の値の求め方について述べる。図3・7に示すような境界上で外力として \bar{X} 、 \bar{Y} が与えられたものとする。力のつり合いから次式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \ell \sigma_x + m \tau_{xy} = \ell \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \\ \bar{Y} &= m \sigma_y + \ell \tau_{xy} = m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \ell \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3 \cdot 39)$$

一方、境界上にある点から境界に沿って計った距離を s とすると、 $\ell = dy/ds$ 、 $m = -dx/ds$ であるから、

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \\ \bar{Y} &= \frac{-dx}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3 \cdot 40)$$

上式を書き直すと、

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \bar{X} \quad ,$$

$$-\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \bar{Y} \quad . \quad (3 \cdot 41)$$

したがって、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \int \bar{Y} \, ds \quad ,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \int \bar{X} \, ds \quad . \quad (3 \cdot 42)$$

また、

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{であるから、}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \int \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \, ds + \int \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \, ds \\ &= x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} - \int \left(x \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial x} + y \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial y} \right) ds . \end{aligned}$$

(3 · 43)

境界条件として外力 \bar{X} , \bar{Y} が与えられると境界面上の $\partial \phi / \partial x$, $\partial \phi / \partial y$ および ϕ の値は式 (3 · 42) および式 (3 · 43) からそれぞれ計算できる。しかし、この $\partial \phi / \partial x$ および $\partial \phi / \partial y$ を用いるかわりに解析接続の概念を取入れて、境界外の近い点も ϕ の値をもつものと仮定し、その ϕ を用いる。

角板圧裂試験において、図 3 · 8 に示すような等分布荷重が作用する場合を考える。問題の性質上、それらは同図に示すような角板の 1/4 の部分にあたる長方形 ACDOA について考えれば十分である。 s は境界上を点 A から A → B → C →

Dの向きに計るものとする。なお出発点A ($x = w/2, y = 0$) において $\phi = \partial\phi/\partial x = \partial\phi/\partial y = 0$ とする。

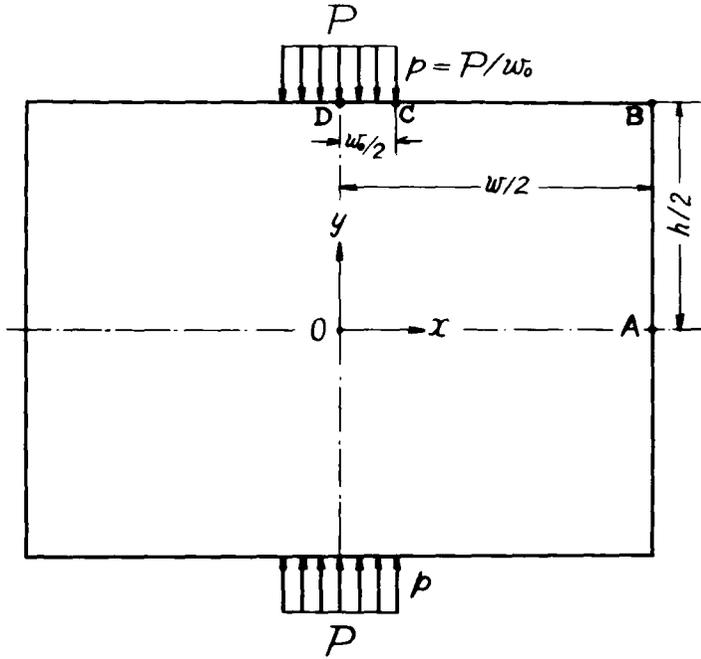


図 3・8 数値解析のための角板圧裂試験の模式図

AB上では $\bar{X} = \bar{Y} = 0$, $ds = dy$ であるから式 (3・42), (3・43) を用いて,

$$\frac{\phi}{\partial x} = - \int \bar{Y} ds = C_1, \quad ,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \int \bar{X} ds = C_2, \quad ,$$

$$\phi = x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \int \left[x \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + y \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] ds = C_3.$$

ここで, C_1, C_2, C_3 は積分定数であつて, 出発点の $\phi, \partial\phi/\partial x$ を 0 とした

ので、

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

となる。

\overline{BC} 上では、 $\overline{X} = \overline{Y} = 0$ 、 $ds = -dx$ であるから、上と同様にして、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = C_4, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = C_5, \quad \phi = C_6.$$

さらに C_4, C_5, C_6 は点 B における $\phi, \partial \phi / \partial x, \partial \phi / \partial y$ の連続性から、

$$C_4 = C_5 = C_6 = 0$$

となる。

\overline{CD} 上では、 $\overline{X} = 0, \overline{Y} = -p$ 、 $ds = -dx$ であるから、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\int (-p)(-dx) = -px + C_7.$$

C 点 ($x = w_0 / 2$) における $\partial \phi / \partial x$ の連続性から C_7 はつぎのように決定される。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=w_0/2} = -\frac{p w_0}{2} + C_7 = 0$$

$$\therefore C_7 = p w_0 / 2.$$

したがって、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -px + \frac{p w_0}{2},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = C_8 \quad ,$$

$$\begin{aligned} \phi &= x \left(-px + \frac{pw_0}{2} \right) - \int x \left(\frac{-\partial}{\partial x} \left(-px + \frac{w_0}{2}p \right) \right) (-dx) \\ &= -\frac{p}{2}x^2 + \frac{w_0}{2}px + C_9 \quad . \end{aligned}$$

C_8, C_9 は C 点における $\partial \phi / \partial y$, ϕ の連続性より $C_8 = C_9 = 0$ と決定される。

3・4・3 応力分布

横と縦の比 $w/h = 0.8, 0.9, \dots, 1.5, \dots, 3.0$ の試験片のそれぞれについて、載荷幅が $w_0/h = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ である各場合について、試験片内の応力を前述の解析法を用いて電子計算機により計算した。得られた結果のうち、垂直軸上の 2 つの主応力 σ_x, σ_y を描くと、図 3・9～11 に示すようである。

まず、 $w/h = 1$ の正方形試験片について応力分布の特徴を見るとつぎのようである。 w_0/h が小さいとき、すなわち載荷幅が狭い（いわば $w_0/h \leq 0.15$ ）とき、試験片の中心付近の σ_x は引張応力で、その値はほぼ $2P/\pi ht$ であり、 σ_y は圧縮応力でその値は $6P/\pi ht$ よりやや小さい。これらの 2 つの応力の分布状態およびそれらに対する w_0/h の影響は円板圧裂試験片における 2 つの主応力 σ_θ および σ_r の場合と極めてよく似ている。一例として載荷幅のほぼ等しい円板圧裂試験片と角板圧裂試験片内の垂直軸上の 2 つの主応力を図示すると図 3・12 のようである。しかし、 $w_0/h \geq 0.15$ の範囲では、垂直軸上の引張応力はそれほど減少しないが、それに直角をなす方向の圧縮応力は著しく減少し、かつ分布が均一に近くなる。この応力分布は角板圧裂試験片に独特である。

円板圧裂試験と角板圧裂試験における試験片内の応力状態の一例を図示すると図 3・13, 14 のようである。

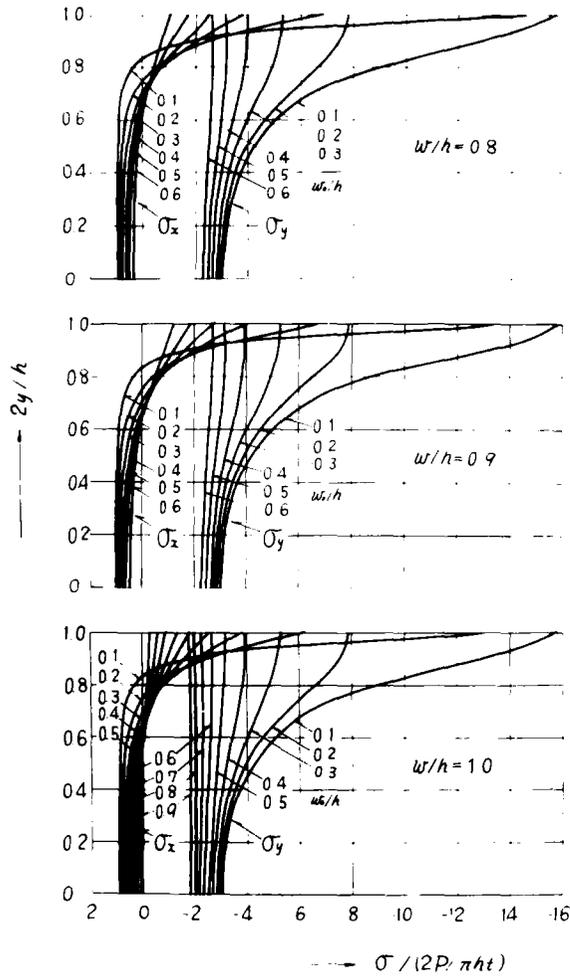


図 3・9 角板圧裂試験片内の荷重軸上の σ_x , σ_y と w/h および w_0/h との関係 (その 1)

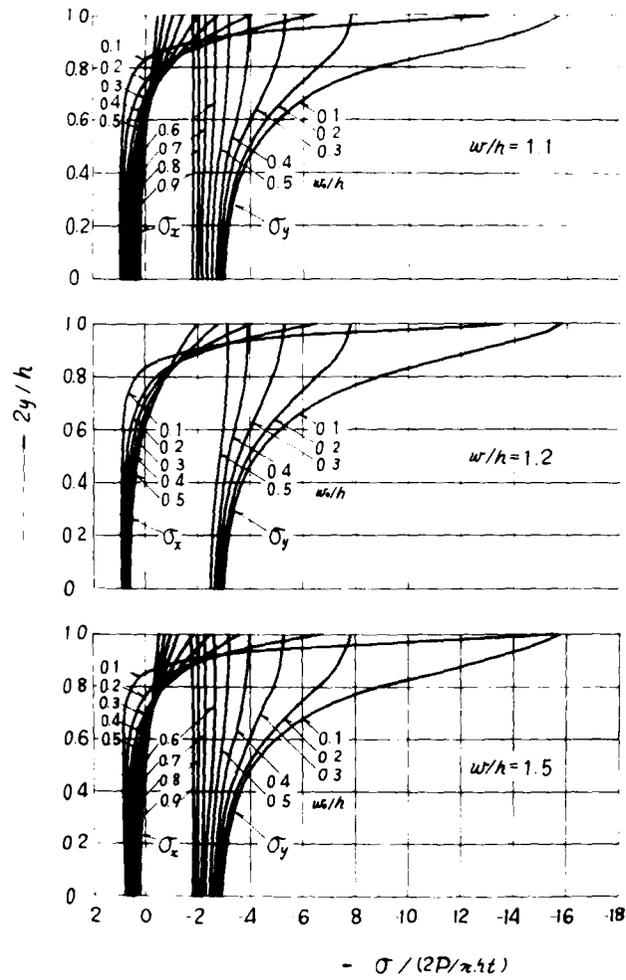


図 3・10 角板圧裂試験片内の載荷軸上の σ_x 、 σ_y と w/h および w_0/h との関係 (その 2)

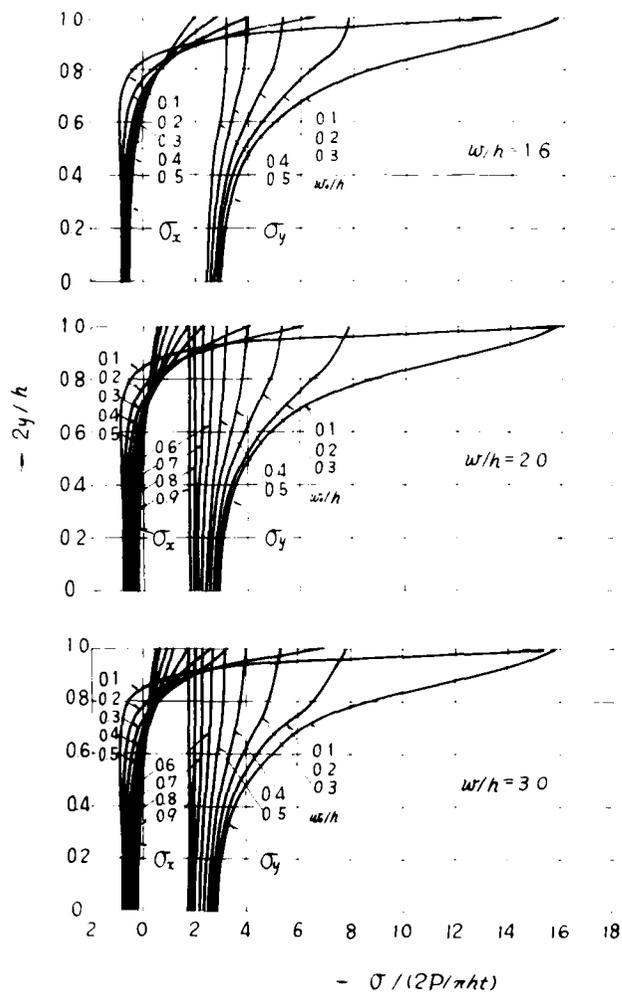


図 3・11 角板圧裂試験片内の载荷軸上の σ_x , σ_y と w/h および w_0/h との関係 (その 3)

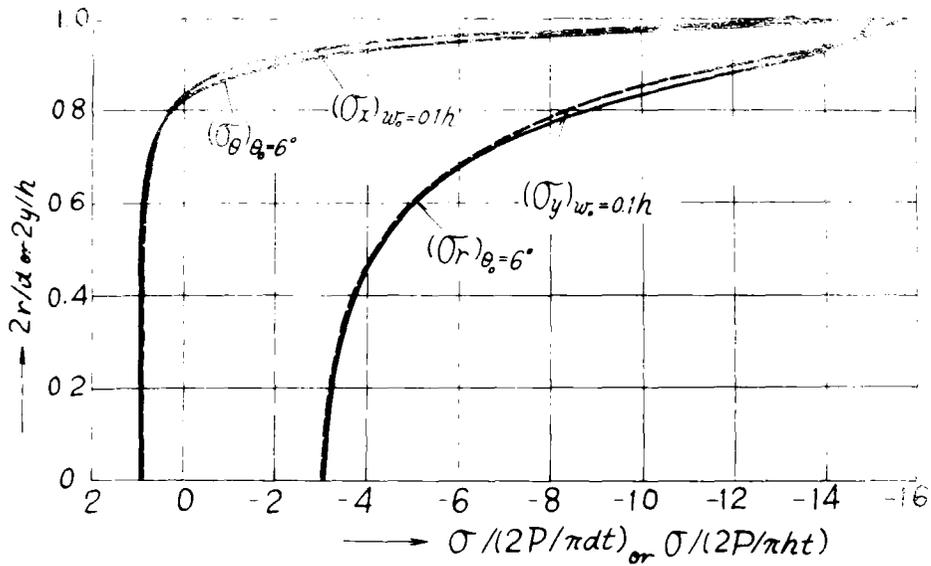


図3・12 円板圧裂試験片と角板圧裂試験片内の載荷軸上の
2つの主応力の比較

w/h が1以上の試験片においては、 w/h が大きくなるほど、すなわち試験片が横に長くなるほど、同じ載荷幅に対する σ_x および σ_y の値は小さくなる。しかし、応力の分布状態はあまり変わらず、その分布域は上下の載荷端を結ぶ左右の2直線をそれぞれ直径とする半円形で囲まれた域に限られ、それより外にはほとんど応力を生じないことは注目に価する。 w/h が1.6以上になると、 w/h によって応力状態にほとんど変化がない。

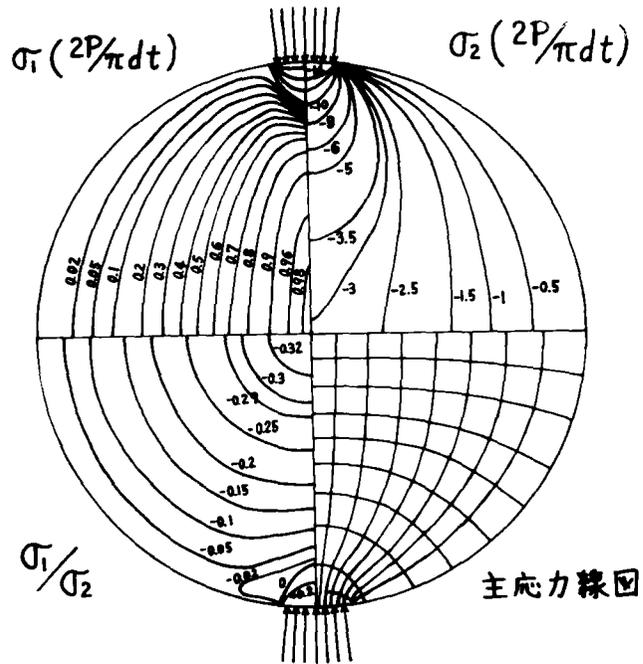


図 3 · 13 円板圧裂試験片内の σ_1 , σ_2 と主応力線図
 ($\theta_0 = 6^\circ$)

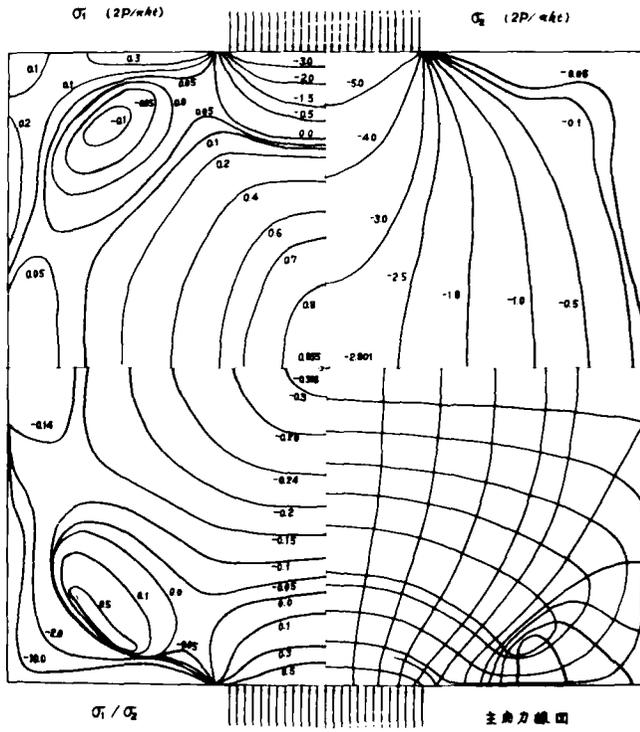


図 3・14 角板圧裂試験片内の σ_1 , σ_2 と主応力線図
 ($w/h = 1$, $w_0/h = 0.3$)

3・5 結 言

本章ではまず，円板圧裂試験，有孔円板圧裂試験および角板圧裂試験における試験片内の応力の解析方法と結果を示した。いずれも Fourier 級数を用いて境界条件を忠実に表現し応力の厳密な解析を行なったことが特徴である。

ついで，これらの解析結果を用い各試験片内の応力成分を電子計算機を利用して精密に計算した。この計算結果により，従来あまり明らかにされていなかった次の諸事項を明らかにした。

すなわち，円板圧裂試験では載荷幅 $2\theta_0$ が試験片内の応力状態に及ぼす影響を明らかにし，載荷点近傍の応力状態を明らかにした。有孔円板圧裂試験では載荷幅 $2\theta_0$ および試験片の内外径比 b/a の変化とともに生ずる応力状態の変化を示した。角板圧裂試験では載荷幅および試験片の幅と高さの比， w_0/h および w/h が試験片内の応力状態に及ぼす影響を明らかにした。

- 1) 平松良雄，岡 行俊，木山英郎：岩石の圧裂試験における試験片の破壊の機構について，水曜会誌才 15 巻 10 号，昭和 41 年 3 月，479 頁～ 482 頁
- 2) 平松良雄，岡 行俊，木山英郎：岩石の引張強度を決定する各種試験法の検討，日本鉱業会誌 83 巻 947 号（講演要旨），昭和 42 年 3 月 460 頁～ 461 頁
- 3) 平松良雄，岡 行俊，木山英郎：岩石の圧裂試験に関する研究，日本鉱業会誌（投稿中）
- 4) たとえば，C. Fairhurst：On the Validity of the 'Brazilian' Test for Brittle Materials, Int. J. Rock Mech. Mining Sci. Vol.1 (1964), pp. 535 ~ 546
- 5) 平松良雄，岡 行俊，萩野正二：円型立抗ライニングに作用する地圧によつてライニング内に生ずる応力について，日本鉱業会誌 77 巻 872 号

昭和36年2月，73頁～79頁

- 6) R.Berenbaum and I.Brodie : Measurement of Tensile Stength of Brittle Materials, British Jour. of Appl. Phys., Vol.10, (1959), pp.281~287
- 7) 岡 行俊, 日比野 敏, 平松良雄 : 電子計算機による弾性岩盤内の応力の数値解析, 材料学会才13期講演, 昭和39年

第 4 章 圧裂試験法の検討^{1, 2, 3)}

4・1 緒 言

引張強さの試験法としては、破断面上の応力が 1 軸性で均一で、しかも試験片内の破断面を含む相当広範囲にわたって応力状態が一様であるような方法が望まれる。しかし、円板圧裂試験、有孔円板圧裂試験および角板圧裂試験においては、試験片内の応力分布はそれぞれ前章の図 3・3、図 3・5 および図 3・9～11 に示したように、上述の条件を満足していない。すなわち、破断面上の応力は 2 軸性で、その引張応力の分布は不均一であり、さらに破断面に平行な面で応力状態が完全に一様である範囲は無い。

既にかなり普及している円板圧裂試験においては、試験片が破壊するときの最大引張応力を強さとしている。しかも、才 2 章で述べたようにこうして求めた強さは単軸引張試験によつて求めた引張強さとほとんど同じ値で、偏差も同程度である。

そこで、前章の解析結果をもとに、Mohr の破壊説が試験片の破壊に当てはまるものと仮定して、円板圧裂試験における試験片の破壊が理論的に説明できるか否かを調べてみよう。つぎに同様な問題点を有する有孔円板圧裂試験や角板圧裂試験について、同じ方法で検討を加え、これらの試験法の適用性を論じよう。

4・2 理論的検討

4・2・1 問題点

各圧裂試験法を検討するに先立つて、これらの試験によつて岩石の強さを求める計算式を明らかにしておく必要がある。

いま仮りに、引張応力の最大値が岩石の引張強さに達するとき試験片が破壊するものとする、破壊荷重 P から岩石の強さを算定する式は、式 (3・6)、式

(3・11) および式(3・33)からつぎのような形の式で表わされることがわかる。

円板圧裂試験による強さ $(S_t)_d$:

$$(S_t)_d = \frac{2P}{\pi d t} \times k_d \quad (4 \cdot 1)$$

有孔円板圧裂試験による強さ $(S_t)_r$:

$$(S_t)_r = \frac{2P}{\pi d t} \times k_r \quad (4 \cdot 2)$$

角板圧裂試験による強さ $(S_t)_i$:

$$(S_t)_i = \frac{2P}{\pi h t} \times k_i \quad (4 \cdot 3)$$

ここで、 k_d 、 k_r および k_i は試験の条件によつて決まる係数である。

前章図3・3、図3・5および図3・9～11に示す応力解析結果に基づき、円板圧裂試験片、有孔円板圧裂試験片および角板圧裂試験片に生ずる最大引張応力を各種の要素——円板については載荷幅を示す θ_0 、有孔円板については載荷幅を示す θ_0 および内外径の比 b/a 、角板については載荷幅を示す w_0/h および試験片の形状を表わす横と縦の比 w/h ——に対して図示すると図4・1、図4・2および図4・3のようである。また参考のために同図には、最大圧縮応力の値や最大圧縮応力/最大引張応力の値も図示しておく。

さて式(4・1)～(4・3)における係数 k_d 、 k_r 、 k_i はそれぞれ図4・1、図4・2、図4・3の最大引張応力を示す曲線の縦軸の値にほかならない。

各圧裂試験の結果からこれらの式で計算した強さが引張強さに近いか否かを以下に検討しよう。この際つぎの3つの点が問題となる。

(i) 載荷点付近には大きな圧縮応力が生ずること、

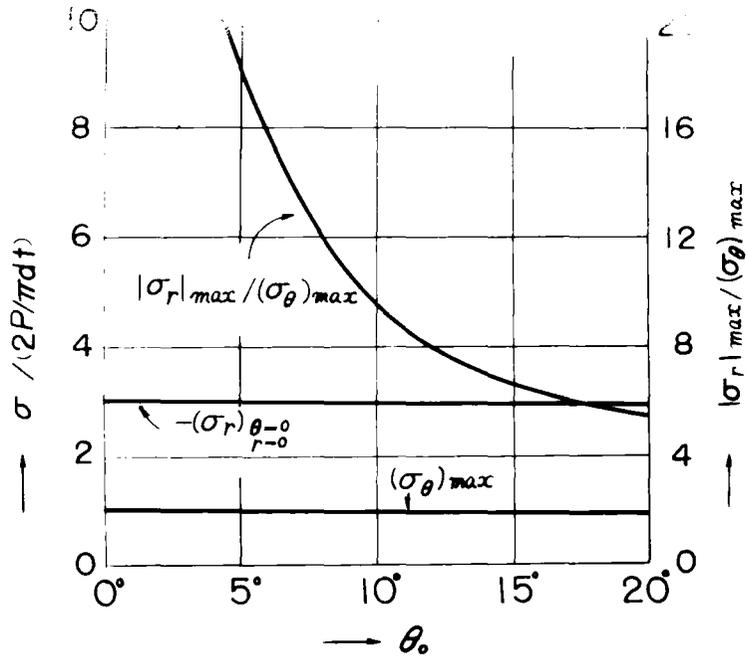


図 4・1 円板圧裂試験における主な応力の値と θ_0 との関係

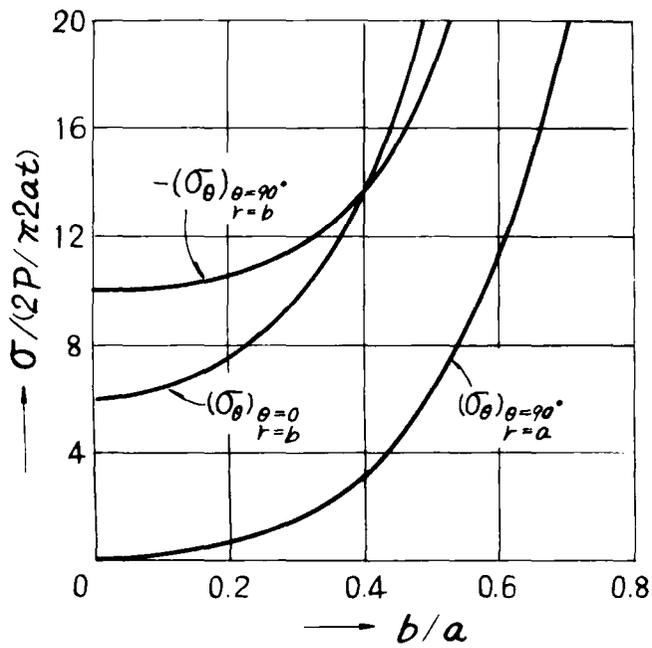


図 4・2 有孔円板圧裂試験における試験片内の主な応力と b/a との関係

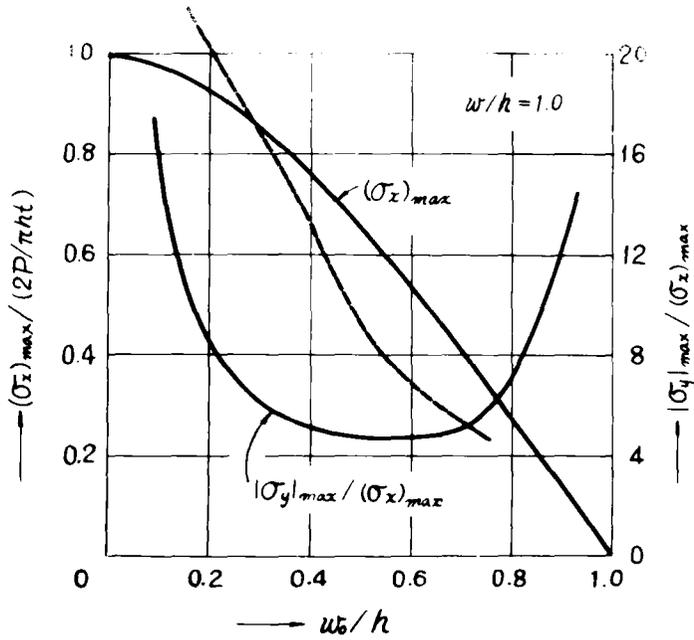


図4・3(a) 角板圧裂試験における試験片内の最大引張応力と w_0/h との関係 (点線 Berenbaum と Brodie による光弾性実験の結果)

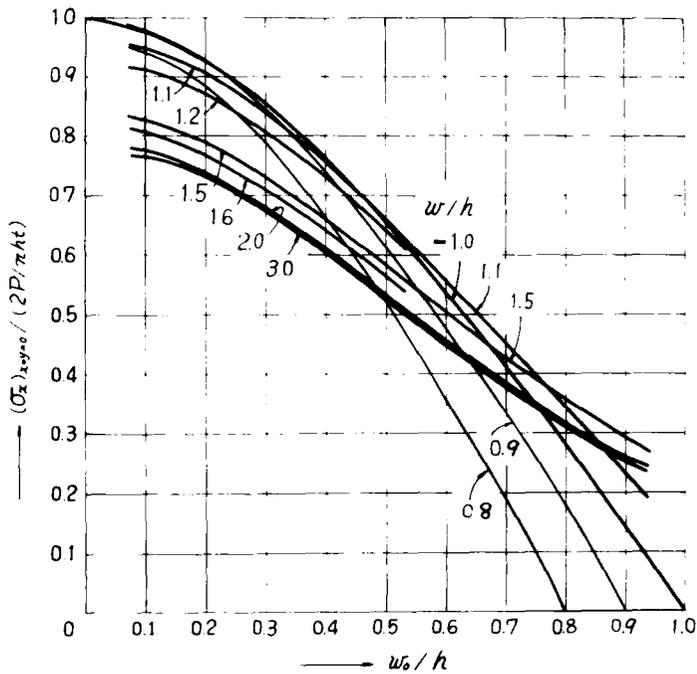


図4・3(b) 角板圧裂試験における最大引張応力と w/h および w_0/h との関係

(ii) 破断面上の各点は 2 軸応力状態にあること、

(iii) 破断面上では応力が不均一分布すること。

4・2・2 載荷点付近の大きな圧縮応力の影響

円板・有孔円板・角板のいずれの試験片においても、載荷幅が狭い場合、載荷点付近に生ずる圧縮応力は大きく、載荷幅の増加とともに減少する。試験片中央に生ずる引張応力に対する圧縮応力の比率がある限度以上に大きい場合（例えば 15 倍以上の場合）には、試験片は引張応力よりもむしろこの圧縮応力に支配される心配がある。

そこでまず円板圧裂試験についてこの点を検討しよう。 $\theta_0 \leq 5^\circ$ の場合は最大圧縮応力と最大引張応力の比率が 15 以上となり、載荷点付近の圧縮破壊が先に起こることになる。また実際、載荷点付近の小範囲にはほとんど常に圧碎圏が観察される。この圧碎圏の生成が破壊を支配するとし、この観点から円板圧裂試験が好ましくないとする研究報告⁴⁾もある。しかし、この部分の破壊はあまり成長せず、載荷幅の半分の角 θ_0 は $6^\circ \sim 8^\circ$ 程度までしか拡大しないことが常に経験される。

いま仮にこのときの破断面上の応力状態が、圧碎圏ができた後も最初からその載荷幅で載荷された場合のものと等しいと仮定すれば、荷重の増加とともに載荷点付近の強い圧縮応力によつてこの部分は順次圧碎され、それによつて載荷幅は次第に広がり、しかも圧碎されていない部分の応力は圧縮強さ以下である。一方、破断面上の引張応力、特に試験片の中心付近の最大引張応力は、荷重の増加とともに、（それによつて起こる載荷幅の拡大にはほとんど影響されずに、）ほぼ比例的に増加する。したがつて円板圧裂試験片の破壊時における θ_0 が $6^\circ \sim 8^\circ$ であるという事実を考慮すると、図 4・1 から最大圧縮応力と最大引張応力の比は 10 以下となり、試験片の終局の破断は最大引張応力によつて起こるものと思われる。したがつてこの試験により岩石の引張強さが決定でき、載荷点付近の大きい圧縮応力はあまり影響しない可能性があることになる。

つぎに、有孔円板圧裂試験では載荷点付近の圧縮応力が円板圧裂試験のそれとほぼ同じ程度の値であるのに、最大引張応力は円板圧裂試験における値の6倍以上である。すなわち円板圧裂試験では最大圧縮応力と最大引張応力の比は、載荷幅が $\theta_0 = 8^\circ$ 以上の場合10倍以下であるが、有孔円板圧裂試験では $\theta_0 = 2^\circ \sim 3^\circ$ の場合でも10倍以下である。この傾向は b/a が大きいほど著しい。したがって、有孔円板圧裂試験では最大引張応力の生じている円孔中心の真上および真下の内壁面上に引張破壊が起こり始めても載荷点付近には圧縮応力による圧砕はほとんど見られないものと考えられる。この点は円板圧裂試験より条件がはるかに良いと考えられる。

角板圧裂試験では、載荷幅を任意の広さにとれることが特徴の1つである。しかし載荷幅が特に狭い場合は、載荷点付近には円板圧裂試験と同様の大きな圧縮応力が生ずる。しかも円板圧裂試験と違って、この付近の圧縮破壊によって載荷幅の増加は起こり得ないから、載荷点付近の大きな圧縮応力は問題であると考えられる。しかし、ある程度の幅、いわば載荷幅の試験片高さに対する比 w_0/h を0.15以上にとると、図4・3 (a) に示すように、最大圧縮応力は破断面上の最大引張応力の10倍以下にとどまるから、この圧縮応力は問題にならないと考えられる。

4・2・3 破断面上の2軸応力状態の影響

円板圧裂試験および角板圧裂試験における試験片では、破断面の中央部の各点において、破断面に引張応力が作用するとともにこれに直交する面には圧縮応力が作用する。もし、引張応力が最大またはそれに近い部分において、圧縮応力が前者に比してある限度以上大きければ試験結果に影響を及ぼす恐れがあるから検討の必要がある。この点については、Fairhurst⁵⁾ は円板圧裂試験の場合に、岩石の脆性度（圧縮強さと引張強さの比）を考慮したMohrの破壊説によって検討している。また、Colback⁶⁾ は同じ問題をGriffithの修正理論によって検討している。

筆者は、円板圧裂試験ばかりでなく有孔円板圧裂試験および角板圧裂試験について、しかも種々の載荷幅の場合の応力を解析した結果を用いて、脆性度を考慮したMohrの破壊説によつてこの問題を検討することにした。

この検討によれば、円板圧裂試験において $\theta_0 < 5^\circ$ であれば圧縮応力の影響で試験片の中心よりも破壊しやすい応力状態の点が、破断面上の載荷点の付近に生ずることがわかつた。したがつてこの場合は問題である。しかし、前項の検討で設けた仮定が成立し、載荷幅が $\theta_0 = 6^\circ \sim 8^\circ$ となる場合には、試験片の中心が最も破壊しやすいことがわかつた。したがつてこの場合表記の影響はないと考えられる。

有孔円板圧裂試験では、最も破壊しやすい所は円孔中心の真上および真下の円孔内壁面上であつて、もしここから破壊が始まるとすればこの付近は1軸応力状態にあるから破断面上の2軸応力状態の影響は問題とならないと考えられる。

角板圧裂試験では、 w_0/h が小さいときは前項と同様試験片中心よりも載荷点近傍に破壊の最も起こりやすい箇所が存在し、問題となると思われる。しかし、 w_0/h が0.15以上とすれば破壊の最も起こりやすい所は試験片の中心にある。したがつてこの場合には破断面上の2軸応力状態の影響はほとんど問題にならないと考えられる。

4・2・4 破断面上の応力の不均一分布の影響

岩石の曲げ試験においては、破断面上の応力が引張から圧縮へ変化し、曲げ破壊係数は引張強さの約2倍に当ることは広く知られている。この点から判断すれば破断面上の応力が不均一に分布すると試験結果に影響を及ぼす恐れがあると考えられる。

さて、円板や角板圧裂試験では、図3・3や図3・13に示されるように、載荷幅が広いほど応力の分布の不均一度は高くなる。しかし、円板圧裂試験では大抵の岩石においては、 $\theta_0 = 6^\circ \sim 8^\circ$ という小さい値をとることが経験されるから、破断面上の応力だけについていえば、その分布はほとんど均一である。

角板圧裂試験では載荷幅 w_0/h が 0.15 以下という狭い場合，破断面上の応力は円板圧裂試験におけるものに近い均一分布をなす。なお載荷幅がそれより増すにつれて不均一度も増す。したがって，載荷幅が広くなると不均一分布の影響があるかも知れない。

有孔円板圧裂試験では試験片の破断面上の応力は，図 3・7 に見るように，上に述べた 2 つの試験法における試験片に比べてはるかにひどい不均一分布をなす。とくに b/a が小さいときに著しい。それゆえ，他の圧裂試験において応力の不均一分布が問題とならなくてもこの試験では問題になる可能性があるものと思われる。

4・2・5 検 討

4・2・2～4 において論じたところから，円板圧裂試験によつて求めた強さは，圧碎圏が狭いという事実と先に設けたいくつかの仮定のもとでは，引張強さと等しいはずであるといえる。一方，才 2 章で述べたように，両者は等しいとして差支えない。以上から，上記の仮定のすべてが成立するとすることは過言であらう。しかし，実験的に確かめた事実を考慮すれば円板圧裂試験における 3 つの問題点は實際上試験結果に影響を及ぼさないと見なして差支えないものと思われる。

角板圧裂試験においては， w_0/h を 0.15 以上の範囲にとれば，載荷点付近の高い圧縮応力の影響や破断面上の 2 軸応力状態の影響は，理論上，円板圧裂試験におけるそれと同程度またはそれ以下であるから，これらの影響は問題とならないものと思われる。しかし，破断面上の応力の分布の不均一度は， w_0/h が 0.15 以下では円板圧裂試験のそれと同程度であるが， w_0/h が増すにつれて不均一度は増す。それゆえこの点から考えると w_0/h はあまり大きくとれないかも知れない。

同様の考え方で，有孔円板圧裂試験を検討すると載荷点付近の最大圧縮応力および破断面上の 2 軸応力状態の影響は問題とならない。しかし，破断面上の応力

の不均一分布は問題となり，この試験により求めた強さが引張強さよりはるかに大きな値をとるものと想像される。

4・3 実験的検討

本節では，前節（4・2・2～4・2・5）において指摘した種々の問題点を実験的に検討した結果を述べることにする。準備した試料は，砂岩（大阪府泉南郡産，通称和泉砂岩）およびセメントモルタル（砂：セメント：水比が3：2：1，空中養生60日）である。試料のブロックから試験片を作製するにあたっては，必ず破断面はある特定の面に平行となるようにした。この特定の面とは，砂岩ではすべての試料を採取した元の一つの大きなブロックの一側面であり，モルタルでは型枠（15 cm × 15 cm × 54 cm）の底面である。

4・3・1 有孔円板圧裂試験の実験的検討

試験片は，円板圧裂試験片，有孔円板圧裂試験片とも外径 $2a$ が同一となるように，同一ダイヤモンドコアビット（内径 7.5 cm）で採取し，厚さ t は 3.5 cm とした。有孔円板の孔（内径 $2b$ ）はダイヤモンドコアビット（外径 2.0 cm および 3.5 cm）であけた。したがって内外径の比 b/a は平均 0.27 および 0.51 となる。図 4・4（a）は準備された試験片，（b）は代表的な破壊の様子を示す写真である。円板圧裂試験による引張強さは式（4・1）で $k_d = 1$ とおいて求めた。砂岩およびモルタルの円板圧裂試験による強さの平均値 $(\overline{s_t})_d$ ，標準偏差 s および標準偏差係数 \overline{s} ($s / (\overline{s_t})_d$) を示すと表 4・1 のようである。これらの結果は，才 2 章で述べた種々の岩石についての大規模な実験結果と同じ程度の精度をもっている。

表 3・1

岩 種	個 数	$(\overline{s_t})_d$ (kg/cm ²)	s (kg/cm ²)	\overline{s}
砂 岩	21	117.6	8.33	0.071
モルタル	20	21.4	2.47	0.115

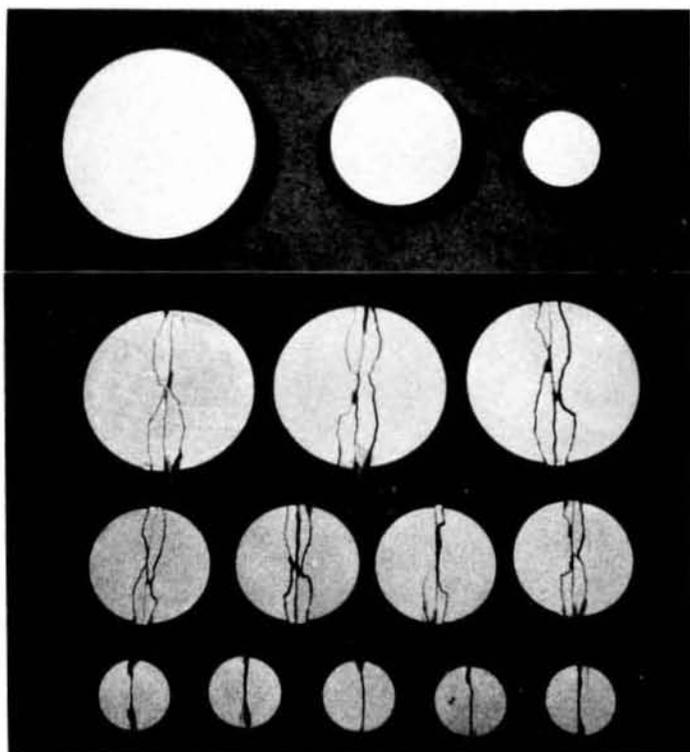


図4・4 円板圧裂試験片，(a) 上段：試験前，(b) 下3段：
試験後

図4・5 (a) は準備された有孔円板試験片，同図(b)(c)は代表的な破壊状況を示す写真である。有孔円板圧裂試験においては，載荷点の近傍に圧碎圏の生成がほとんどなく，破壊は円孔中心の真上ならびに真下の内壁面上から発生することが認められた。とくに b/a が 0.51 の試験片においては，円孔真上および真下の内壁面から発生した引張り裂が外壁まで到達しないで停留している場合 (図4

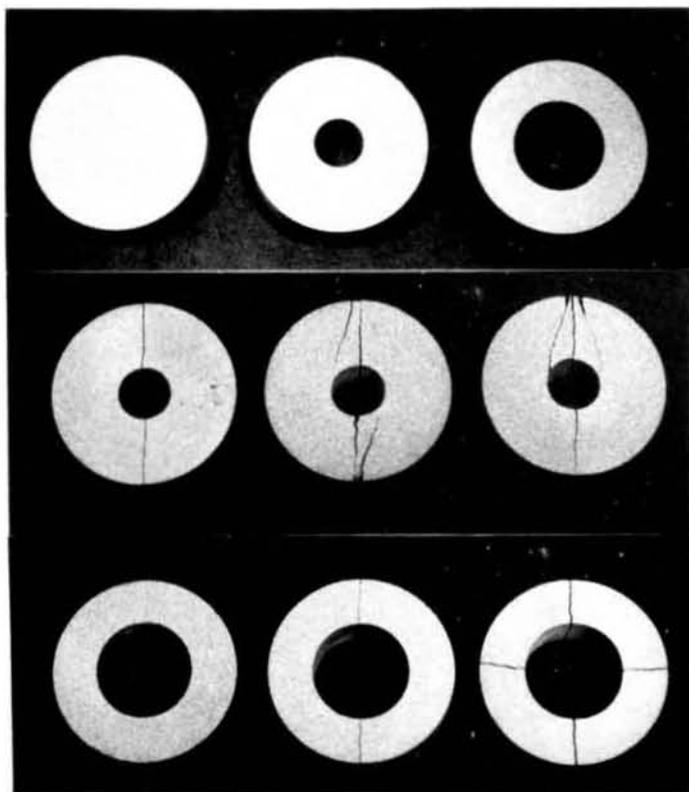


図 4・5 有孔円板圧裂試験片，(a) 上段：試験前，(b) 中段：試験後 ($b/a \approx 0.3$)，(c) 下段：試験後 ($b/a \approx 0.5$)

・5 (c) 左下) が普通である。これらは先に理論的に推定したところ (4・2 節) とよく合う。とにかく有孔円板圧裂試験では、最初に問題点として掲げた載荷点付近の高い圧縮応力と破断面上の 2 軸応力性は問題とならない。

有孔円板圧裂試験結果から岩石の強さ (σ_c)_r を式 (4・2) で計算するのに

当り、係数 k_r は図 4・2 が与える値を採用した。このことは円板圧裂試験において $k_d = 1$ とおいたのと同じ意味をもっている。したがって前記の3つの問題の影響が無視できるならば、有孔円板試験で求めた強さは b/a がいかなる値をとつても常に一定で、円板圧裂試験による強さと等しいはずである。

さて、横軸に内外径比 b/a をとり、縦軸に $(s_t)_r / (\overline{s_t})_d$ をとつて上記の試験結果を示すと図 4・6 のようになる。この図には、参考のため Addinall と Hackett⁷⁾ が plaster (焼石膏) を用いて行なつた試験結果を上述の方法で処理して併せて図示してある。

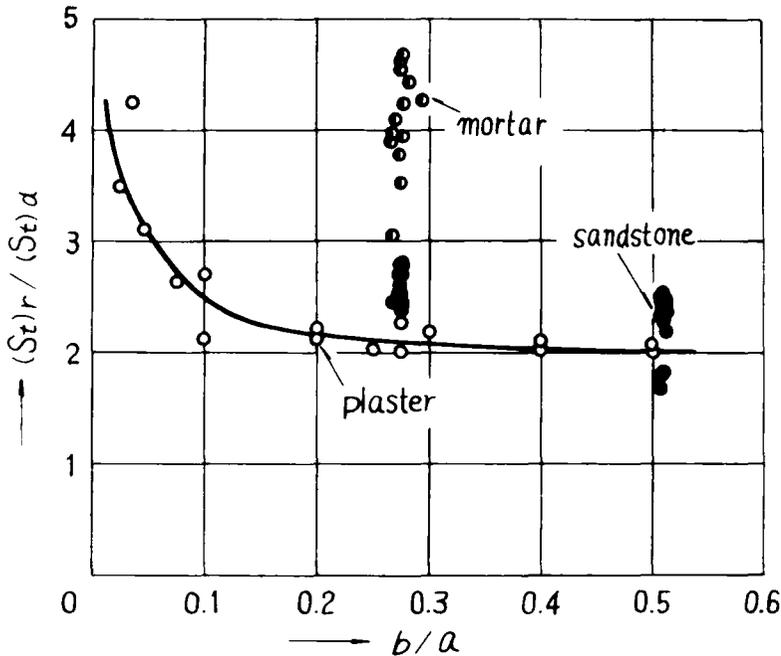


図 4・6 有孔円板圧裂試験結果

この図から、有孔円板圧裂試験によつて求めた強さは円板圧裂試験によつて求めた値よりかなり大きい(2倍以上)ことがわかる。この傾向は内外径の比 b/a

が小さいほど著しい。一方 b/a が小さくなるにつれて破断面上の引張応力の分布が鋭いピークを持つ傾向があることは先に理論的に指摘した。これら2つの傾向は、曲げ破壊係数が引張強さの約2倍であるという事実を考慮すれば、互いに関連があるものと思われる。

有孔円板圧裂試験においては、載荷点付近の高い圧縮応力や破断面上の2軸応力の影響はないが、破断面上の応力の不均一分布の影響により、決定される強さは引張強さとひどく異なる。なおこの試験は曲げ試験と同じ意義しか持たないものと思われる。

4・3・2 角板圧裂試験の実験的検討

この試験に供した試料は砂岩（和泉砂岩）とセメントモルタルである。砂岩の試料は採取箇所異なる2種類であり、これらをⅠ、Ⅱの番号をもつて区別することにする。

砂岩（Ⅰ）から採取した円板圧裂試験片の寸法は $5.0\text{ cm } \phi \times 2.5\text{ cm}$ 、角板圧裂試験片の寸法は $5.0\text{ cm} \times 5.0\text{ cm} \times 2.5\text{ cm}$ 、 $5.0\text{ cm} \times 7.5\text{ cm} \times 2.5\text{ cm}$ および $5.0\text{ cm} \times 10.0\text{ cm} \times 2.5\text{ cm}$ の3種である。砂岩（Ⅰ）の円板圧裂試験片は既に図4・4（a）に、角板圧裂試験片は図4・7（a）の写真に示す通りである。

砂岩（Ⅱ）から採取した円板圧裂試験片の寸法は $7.0\text{ cm } \phi \times 3.5\text{ cm}$ 、角板圧裂試験片の寸法は $7.0\text{ cm} \times 7.0\text{ cm} \times 3.5\text{ cm}$ である。

セメントモルタルの円板圧裂試験片の寸法は $7.5\text{ cm} \times 7.5\text{ cm} \times 4.0\text{ cm}$ である。

砂岩（Ⅰ）、（Ⅱ）およびモルタルの円板圧裂試験の結果を前項と同様に $k_d = 1$ とした式（4・1）を用いて圧裂強さを求めた結果は表4・2に示すようである。

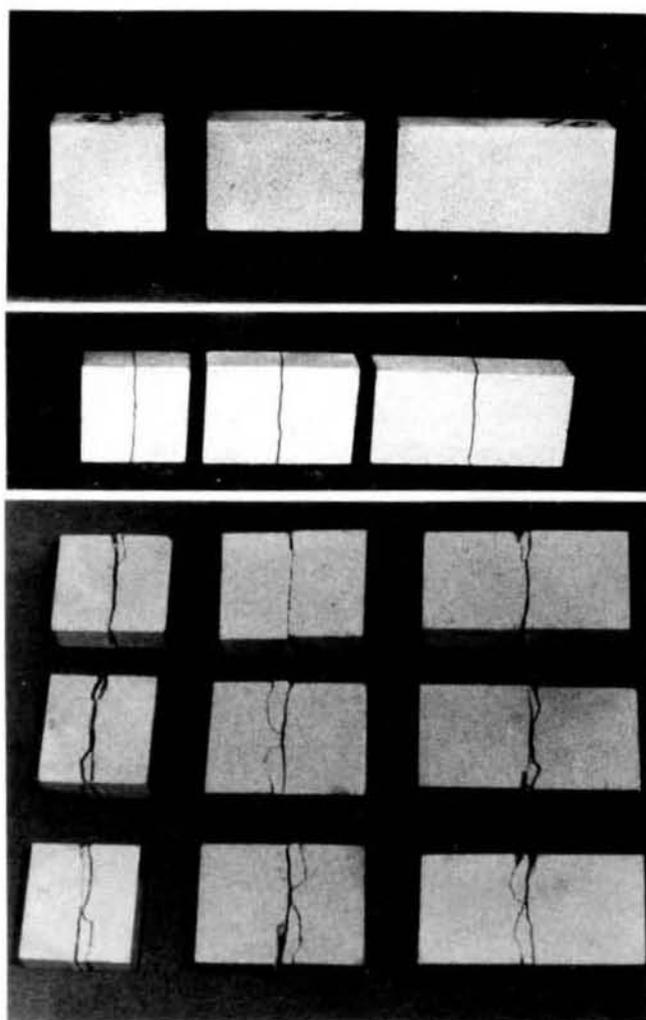


図4・7 角板圧裂試験片，(a)上段：試験前，(b)中段：試験後($w_0/h=0.3$)，(c)下3段：試験後($w_0/h=0.1$)

表4・2

岩種	個数	$(\overline{s_t})d$ (Kg/cm ²)	\overline{s} (Kg/cm ²)	\overline{s}
砂岩(I)	40	137.8	10.6	0.077
砂岩(II)	33	110.2	16.5	0.149
モルタル	98	22.0	2.89	0.130

角板圧裂試験から岩石の強さ $(s_i)_i$ を計算するには式 (4・3) を用いた。この式における係数 k_i は w/h および w_0/h の関数であり、図 4・3 が与える値を採用した。このことは円板圧裂試験で $k_d = 1$ とおいたのと同じ意味を持っている。したがって、この方法が正しければ、これによつて決定される強さは w/h および w_0/h の値にかかわらず一定であり、円板圧裂試験による強さと等しいはずである。

角板圧裂試験における w/h 、 w_0/h 別の試験片個数 n 、強さの平均値 $(\bar{s}_i)_i$ 、標準偏差 s および標準偏差係数 $\bar{s} (= s / (\bar{s}_i)_i)$ は表 4・3 に示す通りである。

また、角板圧裂試験片個々の強さを円板圧裂試験による強さの平均値で除した値 $(s_i)_i / (\bar{s}_i)_d$ を縦軸に、横軸に載荷幅と試験片高さ比 w_0/h をとつて図示すると、図 4・8 に示すようである。同図は砂岩 (I) およびモルタルの全試験結果と w_0/h 別の平均値を示している。

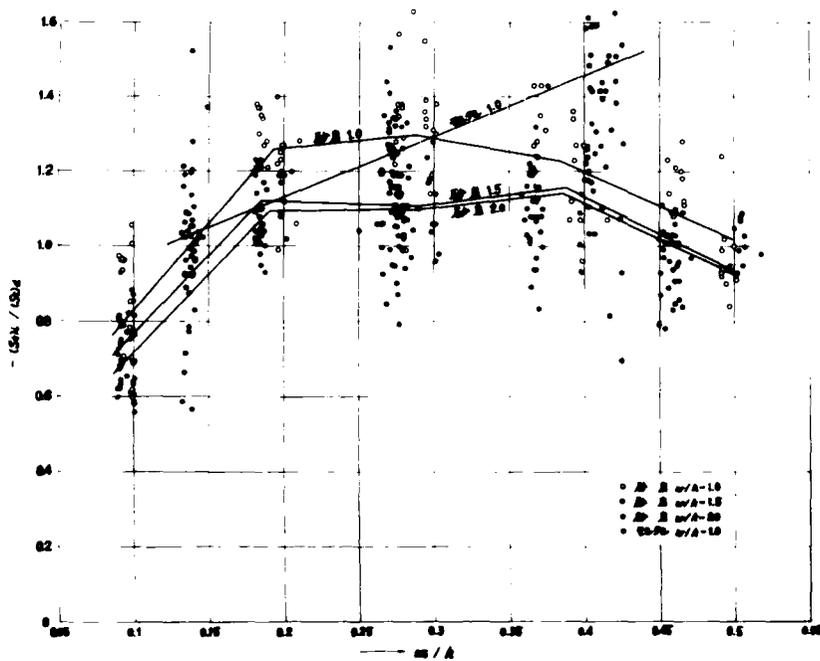


図 4・8 角板圧裂試験の結果

表 4・3

岩種	w/h	w_0/h	個数	$(\bar{s}_t)_i$ kg/cm ²	$(\bar{s}_t)_i / (\bar{s}_t)_d$	s kg/cm ²	$\bar{s} = s / (\bar{s}_t)_i$
砂	1.0	0.10	25	109.8	0.80	22.8	0.217
		0.19	25	171.5	1.25	17.0	0.099
		0.29	25	182.6	1.33	17.5	0.096
		0.38	25	173.5	1.26	19.3	0.111
		0.48	25	155.7	1.13	21.2	0.136
岩	1.5	0.09	25	100.6	0.73	13.7	0.136
		0.18	25	155.0	1.13	12.1	0.078
		0.27	25	150.9	1.10	16.0	0.106
		0.37	25	161.6	1.17	17.0	0.105
		0.46	25	142.9	1.04	14.2	0.099
(I)	2.0	0.10	25	98.7	0.72	13.3	0.135
		0.19	25	150.7	1.09	10.0	0.066
		0.29	25	152.2	1.10	10.8	0.071
		0.39	25	158.5	1.15	12.8	0.081
		0.48	25	135.9	0.99	8.0	0.059
砂岩 (II)	1.0	0.22	16	142.1	1.29	23.0	0.162
		0.29	16	143.4	1.30	20.5	0.143
		0.45	16	150.4	1.37	19.5	0.130
モ ル タ ル	1.0	0.14	56	22.7	1.03	5.17	0.228
		0.21	8	26.5	1.20	3.94	0.149
		0.27	56	27.5	1.25	5.88	0.214
		0.34	8	28.6	1.30	7.43	0.260
		0.41	56	32.4	1.47	10.78	0.333
		0.49	8	34.2	1.56	6.57	0.192

角板圧裂試験においては、 w_0/h が0.15以下の場合、図4・7(c)の写真が示すように、載荷点付近に圧砕圏を生成することが認められた。しかし、 w_0/h が0.15以上になると、図4・7(b)に見られるような引張き裂は明らかに試験片中心部から発生し、試験片の中心線上の載荷点付近には殆んど圧砕圏が生じないことが認められる。 w_0/h が0.3程度になると中心部だけに引張き裂が生じ、これが上下の端面までに発達しないうちに荷重を支える能力を失ない、試験が終了するのが普通である。

4・2節において、 w_0/h がとくに小さいときは載荷点付近の大きな圧縮応力が問題となるが、 w_0/h が0.15以上のときあまり問題とならないこと、さらに w_0/h が0.3以上になれば試験片中央付近に引張き裂だけが起こることなど理論的に予想したがこれらの事柄が実証された。

つぎに図4・8から角板圧裂試験によつて求められる強さについて検討してみよう。円板圧裂試験も角板圧裂試験も同じ仮定の上に立つて強さを決定している。したがつて、この仮定が正しければ両者の強さは等しく、試験結果は w_0/h や w/h の値にかかわらず $(s_t)_i / (\bar{s}_t)_d = 1$ の線上に乗るはずである。

$w_0/h < 1.5$ の範囲では、 w_0/h の減少とともに、 $(s_t)_i / (\bar{s}_t)_d$ の値は1より少し大きい値(1.05程度)から急激に減少することが認められた。これは4・2節で指摘したように、 w_0/h が小さいときは載荷点付近が大きな圧縮応力によつて圧砕され、しかも円板圧裂試験の場合と異なつて載荷幅の拡大が生じないためであるものと考えられる。

w_0/h が0.15から0.50の範囲では、砂岩についてみると $w/h = 1.0$ の場合の $(s_t)_i / (\bar{s}_t)_d$ の平均値は 1.23 ± 0.10 、 $w/h = 1.5$ の場合のそれは 1.11 ± 0.07 、 $w/h = 2.0$ の場合のそれは 1.09 ± 0.10 であり、 $w/h = 1.0$ のモルタルについては w_0/h の増加につれてやや上昇の傾向がみられるが、平均値は 1.30 ± 0.27 であり、 w/h ごとに1より少し大きいほぼ一定の値をとると見なすことができる。したがつて、この結果からも4・2節で理論的に指摘したように、角板圧裂試験では $w_0/h > 0.15$ にとれば載荷点付近の強い圧縮応力や破断面上

の応力の2軸性および不均一分布することの影響が問題とならないことがわかる。

また w/h が試験結果に与える影響をみると、 w/h が1.5以上の場合 $(s_t)_i / (\overline{s_t})_d$ は1に近い一定値をとることが認められる。これは、応力解析の結果、図3・9～11および図4・3(b)に見るように、 w/h が大きい場合応力分布は w/h によつてほとんど変わらないこととよく合う。しかしなぜ角板圧裂試験による強さが円板圧裂試験による強さに比べていくぶん大きくでるかは現在のところ明らかでない。

一方表4・3の標準偏差係数からみると、 $w_0/h > 0.2$ において円板圧裂試験以上に良好である。これは4・2節で指摘したように3つの問題点の影響がなく、とくに載荷点付近の圧縮破壊が起こらないことは円板圧裂試験よりもさらにあいまいな点が少なく、試験片が一定の機構で破壊を起こしていることによるものと思われる。

また試験片の横と縦の比 w/h は大きいほど分散が少なく良好である。この原因の一つは、先に述べたように w/h がある程度以上大きくなると応力分布は w/h によりあまり変化しなくなり、したがつて圧裂強さを式(4・3)で決定する際の誤差が小さいことにあるものと考えられる。

4・4 結 言

本章においては、円板圧裂試験、有孔円板圧裂試験および角板圧裂試験における種々の問題点について理論的、実験的に検討し、つぎの結論を得た。

円板圧裂試験の結果から式(4・1)を用い $k_d = 1$ として求めた強さが引張強さに近いのは、説明がつく。

有孔円板圧裂試験では、圧裂強さは引張強さよりはるかに大きい、これは破断面上の応力の分布が著しく不均一であることによるものと思われる。この試験には曲げ試験以上の利点を期待できない。

角板圧裂試験は、 $w_0/h > 0.15$ の試験片を用いると、理論的にも実験的にも円板圧裂試験に勝るとも劣らない良い方法である。なおできれば試験片の形状は

強さの分散の少ない $w/h > 1.5$ とし、載荷幅は試験片の整形が容易なように $w/h = 0.15 \sim 0.20$ とできるだけ狭くとるのが実用的であると思われる。

参 考 文 献

- 1) 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎: 岩石の圧裂試験における試験片の破壊の機構について, 水曜会誌才 15 卷才 10 号, 昭和 41 年 3 月, 479 頁~482 頁
- 2) 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎: 岩石の引張強度を決定する各種試験法の検討, 日本鉱業会誌 83 卷 (講演要旨), 昭和 42 年 3 月, 460 頁~461 頁
- 3) 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎: 岩石の圧裂試験に関する研究, 日本鉱業会誌, (投稿中)
- 4) たとえば, R. Berenbaum and I. Brodie: Measurement of Tensile Strength of Brittle Materials, British Jour. of Appl. Phys. Vol. 10, (1959), pp. 281~287
D. W. Hobbs: The Tensile Strength of Rock, Int. J. Rock Mech. Mining Sci. Vol. 1, (1964), pp. 385~396
E. Addinal and P. Hackett: Rock in Tension, Colliery Guardian, April 3 (1964)
- 5) C. Fairhurst: On the Validity of the "Brazilian" Test for Brittle Materials, Int. J. Rock Mech. Mining Sci. Vol. 1, (1964), pp. 535~546
- 6) P. S. B. Colback: An Analysis of Brittle Fracture Initiation and Propagation in the Brazilian Test, The First International Congress on Rock Mechanics, in Lisbon, September (1966)
- 7) E. Addinal and P. Hackett: Rock in Tension, Colliery Guardian, February 19 (1965)

第5章 不規則塊状試験片を用いる点載荷

圧裂試験法の理論的検討^{1, 2, 3)}

5・1 緒言

岩石の円板圧裂試験は容易であるといつてもやはり試験片の作製にかなりの手数を要する。また軟弱な岩石やとくに堅い岩石では、整形が困難である。もし採取したままの塊状の岩石を用いて強さが決定できれば大いに役立つであろうと考えられる。そこで、このような試験法について研究し、ほぼ実用に供し得る方法を得た。以下にこの試験法を理論的に検討した結果を述べる。

5・2 3次元光弾性実験による検討

岩石の不規則塊状試験片に対する載荷の簡単な方法としては、試験片をほぼ最短距離にある2点ではさんで、点載荷を行なうことが考えられる。このような載荷によつて、どの試験片も同じような破壊を起こすか否か、また起こすとしてもこの試験によつて岩石の強さを知り得るか否かを検討するには、まず試験片内の応力を知る必要がある。しかし不規則な形の弾性体の内部の応力状態を解析することは難かしい。そこで不規則な形の弾性体のかわりに、図5・1に示すような幾何学的に単純な形をしている球、立方体および直方体を考え、これらの中心を通る最短径に沿つて点載荷を行なう場合に、それぞれの内部に発生する応力状態を3次元光弾性実験により検討することにした。

模型はエポキシ樹脂でつくつた直径9.4 cmの球、9.2 cm × 9.2 cm × 9.2 cmの立方体および8.8 cm × 15 cm × 15 cmの直方体である。これらの模型に52.5 kgの荷重で点載荷を行なつたまま、これを自動温度調節装置および自動徐冷装置のついた電気炉の中に入れ、(130 ± 1)°Cに約17時間保つた後、2.6°C/hの割合で徐冷することにより応力模様を凍結した。冷却の時間的割合は、あ

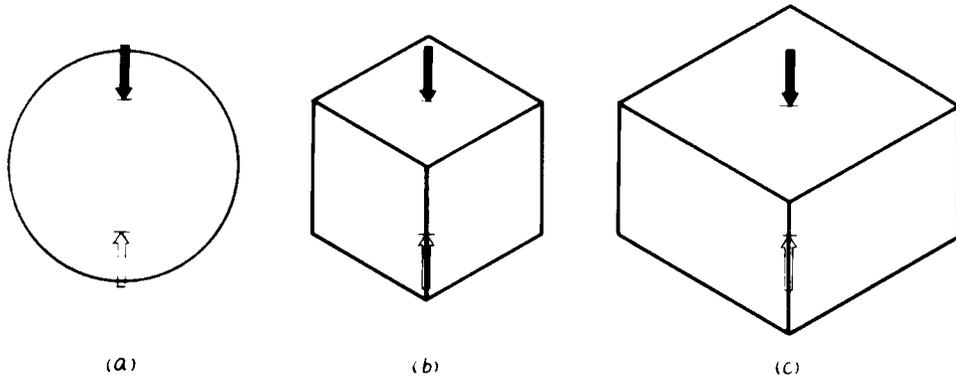


図 5・1 3次元光弾性模型と載荷方向の模式図，(a) 球，
(b) 立方体，(c) 直方体

る限度以下で、しかも均一であることが良好な結果を得るために必要である。それゆえ時間とともに変化する炉内温度を自記温度記録計を用いて記録することにより温度調節の良否を検査した。記録の一例を示せば図 5・2 のようである。

図 5・3 はそれらの模型から上下の載荷点と模型の中心を含むスライスを切り出し、それを円偏光器で観察したとき見られる等色線模様を示す写真で、(a) は球、(b) は立方体、(c) は直方体のそれである。これらのスライスの厚さはそれぞれ 8.2 mm、7.75 mm、6.3 mm で、光弾性感度 α はどれも 2.60 kg/mm である。

この実験から、点載荷を受けた球、立方体および直方体の内部の応力状態は載荷点を結ぶ直線を直径とする球あるいはそれに近い円体に分布し、しかもこの直径の付近ではほとんど同じであることがわかった。この事実から、不規則な塊

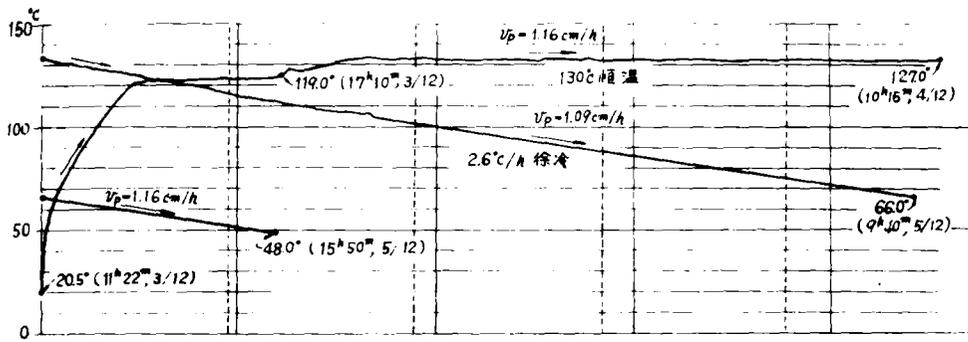


図 5・2 3次元光弾性実験における炉内温度の自記記録例

状試験片に点載荷を行なった場合、その内部に幾何学的に上下2点間の距離に等しい直径の球を含むならば、やはり載荷点を含む直線の付近の応力は球におけるそれと大差がないものと想像される。

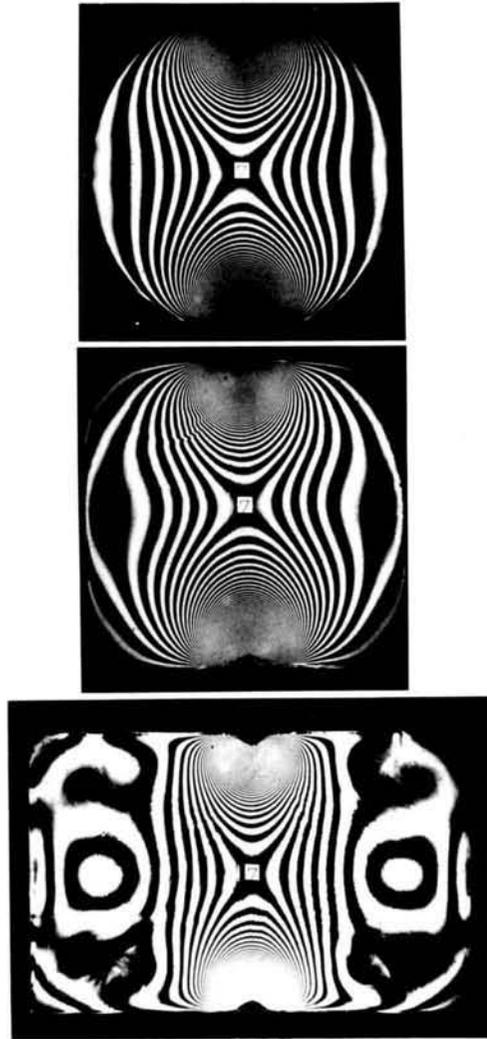


図 5・3 点載荷された (a) 球 (上段) , (b) 立方体 (中段) および (c) 直方体 (下段) のそれぞれ中央断面のスライスの等色線縞模様の写真

5・3 弾性球に点載荷を行なったときの応力の解析

半径 a の弾性球の中心 O を原点として図 5・4 に示すように直角座標 (x, y, z) と球座標 (r, θ, ϕ) をとるものとし、この球に対して z 軸に沿って点載荷が行なわれるものとする。球内の応力成分を球座標に関連して表わし、かつ応力は ϕ に無関係であることを考慮すれば、応力の釣合の条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\phi + \tau_{r\theta} \cot \theta) = 0 \quad (5 \cdot 1 a)$$

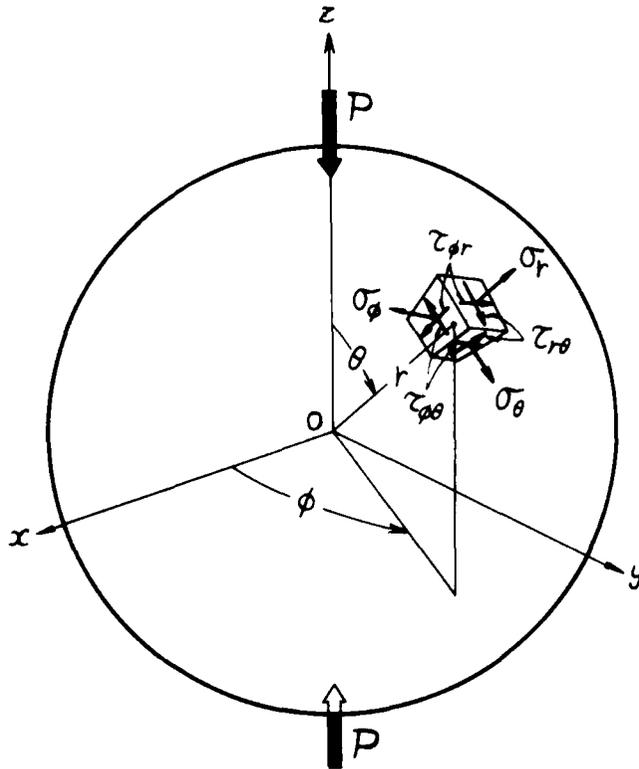


図 5・4 点載荷試験と球座標

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \{ (\sigma_\theta - \sigma_\phi) \cot \theta + 3 \tau_{r\theta} \} = 0 \quad (5 \cdot 1 b)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \{ 3 \tau_{r\phi} + 2 \tau_{\theta\phi} \cot \theta \} = 0 \quad (5 \cdot 1 c)$$

つぎに、載荷前の球内の任意の点は載荷により変位するが、 r 、 θ および ϕ の増加の方向の変位成分をそれぞれ u 、 v および w とすれば、これらの変位も ϕ に無関係である。したがって応力と変位の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r = \frac{\lambda}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r v \sin \theta) \right\} \\ + 2 \mu \frac{\partial u}{\partial r}, \end{aligned} \quad (5 \cdot 2 a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \frac{\lambda}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r v \sin \theta) \right\} \\ + 2 \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right\}, \end{aligned} \quad (5 \cdot 2 b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\phi = \frac{\lambda}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r v \sin \theta) \right\} \\ + 2 \mu \left\{ \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \cot \theta \right\}, \end{aligned} \quad (5 \cdot 2 c)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\}, \quad (5 \cdot 2 d)$$

$$\tau_{\theta\phi} = \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \cot \theta \right\}, \quad (5 \cdot 2 e)$$

$$\tau_{\phi r} = \mu \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right\} \quad (5 \cdot 2 f)$$

式 (5・1 a) および式 (5・1 b) と式 (5・2) とから次式が得られる。

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} - \frac{2\mu}{r} \Omega \cot \theta = 0, \quad (5 \cdot 3 \text{ a})$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \Omega}{\partial r} + 2\mu \frac{\Omega}{r} = 0. \quad (5 \cdot 3 \text{ b})$$

$$A = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r v \sin \theta) \right\}, \quad (5 \cdot 4 \text{ a})$$

$$2\Omega = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (5 \cdot 4 \text{ b})$$

である。式 (5・3 a) および式 (5・3 b) から Ω を消却すれば、

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} = 0. \quad (5 \cdot 5)$$

この式の A の一般解は、

$$A = A_0 + A_0' \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + A_n' \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta). \quad (5 \cdot 6)$$

ここに $P_n(\cos \theta)$ は才 1 種 Legendre 関数、 n は自然数である。この A を式 (5・3 a) または式 (5・3 b) に代入して Ω を解くと、

$$2\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \left(\frac{A_n}{n+1} r^n - \frac{A_n'}{n} \frac{1}{r^{n+1}} \right) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (5 \cdot 7)$$

式 (5・6) および式 (5・7) を式 (5・4 a) および式 (5・4 b) に代入して、 u および v の一般解を求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
u = & \frac{1}{3} A_0 r + \frac{1}{2} A'_0 - C'_0 r^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{n\lambda + (n-2)\mu}{(4n+6)\mu} A_n r^{n+1} \right. \\
& - \frac{(n+1)\lambda + (n+3)\mu}{(4n-2)\mu} \cdot \frac{A'_n}{r^n} + n C_n r^{n-1} \\
& \left. - (n+1) \frac{C'_n}{r^{n+2}} \right\} P_n(\cos \theta), \quad (5 \cdot 8 a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{(n+3)\lambda + (n+5)\mu}{(n+1)(4n+6)\mu} A_n r^{n+1} \right. \\
& + \frac{(n-2)\lambda + (n-4)\mu}{n(4n-2)\mu} \cdot \frac{A'_n}{r^n} \\
& \left. + C_n r^{n-1} + \frac{C'_n}{r^{n+2}} \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta). \quad (5 \cdot 8 b)
\end{aligned}$$

一方，式(5.1c)の $\tau_{\phi r}$ および $\tau_{\theta\phi}$ を，変位を用いて表わすと w に関する偏微分方程式が得られる。これから w の一般解を求めると，

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (D_n r^n + D'_n \frac{1}{r^{n+1}}) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta). \quad (5 \cdot 8 c)$$

ここに， A_n ， A'_n ， C_n ， C'_n ， D_n および D'_n は任意定数である。

上に求めた変位 u ， v および w の一般解を用いて式(5.2)を書きなおすと，応力の一般解として次式を得る。

$$\begin{aligned}
\sigma_r = & \frac{3\lambda + 2\mu}{3} A_0 + \lambda A'_0 r^{-1} + 4\mu C'_0 r^{-3} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(\cos \theta) \left\{ -\frac{(2n^2 - 2n - 6)\lambda + 2(n+1)(n-2)\mu}{4n+6} A_n r^n \right. \\
& \left. + \frac{3n\lambda + (n+3)\mu}{(2n-1)} \frac{A'_n}{r^{n+1}} + n(n-1) 2\mu C_n r^{n-2} \right.
\end{aligned}$$

$$+ (n+1) (n+2) 2\mu \frac{C'_n}{r^{n+3}} \} , \quad (5 \cdot 9 a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \frac{3\lambda+2\mu}{3} A_0 + (\lambda+\mu) A'_0 r^{-1} - 2\mu C'_0 r^{-3} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(\cos \theta) \left\{ \frac{2(n+3)\lambda-2(n-2)\mu}{(4n+6)} A_n r^n \right. \\ & + \frac{2(n-2)\lambda-2(n+3)\mu}{4(n-2)} \cdot \frac{A'_n}{r^{n+1}} \\ & + 2\mu n C_n r^{n-2} - 2\mu(n+1) \frac{C'_n}{r^{n+3}} \} \\ & + 2 \frac{\partial^2 P_n(\cos \theta)}{\partial \theta^2} \left\{ - \frac{(n+3)\lambda+(n+5)\mu}{(n+1)(4n+6)} A_n r^n \right. \\ & + \frac{(n-2)\lambda+(n-4)\mu}{n(4n-2)} \cdot \frac{A'_n}{r^{n+1}} + \mu C_n r^{n-2} \\ & \left. \left. + \mu \frac{C'_n}{r^{n+3}} \right\} \right] , \quad (5 \cdot 9 b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\phi = & \frac{3\lambda+2\mu}{3} A_0 + (\lambda+\mu) A'_0 r^{-1} - 2\mu C'_0 r^{-3} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(\cos \theta) \left\{ \frac{2(n+3)\lambda-2(n-2)\mu}{(4n+6)} A_n r^n \right. \\ & + \frac{2(n-2)\lambda-2(n+3)\mu}{(4n-2)} \cdot \frac{A'_n}{r^{n+1}} \\ & + 2\mu n C_n r^{n-2} - 2\mu(n+1) \frac{C'_n}{r^{n+3}} \} \\ & + 2 \cot \theta \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \left\{ - \frac{(n+3)\lambda+(n+5)\mu}{(n+1)(4n+6)} A_n r^n \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(n-2)\lambda + (n-4)\mu}{n(4n-2)} \cdot \frac{A'_n}{r^{n+1}} \\
& + \mu C_n r^{n-2} + \mu \frac{C'_n}{r^{n+3}} \} , \quad (5 \cdot 9 \text{ c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \left\{ - \frac{2(n+2)n\lambda + 2(n^2+2n-1)\mu}{(n+1)(4n+6)} A_n r^n \right. \\
& - \frac{2(n^2-1)\lambda - 2(n^2-2)\mu}{n(4n-2)} \cdot \frac{A'_n}{r^{n+1}} \\
& \left. + 2(n-1)\mu C_n r^{n-2} - 2(n+2)\mu C'_n \frac{1}{r^{n+3}} \right\} , \quad (5 \cdot 9 \text{ d})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta\phi} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 P_n(\cos \theta)}{\partial \theta^2} \left\{ \mu D_n r^{n-1} + \mu D'_n \frac{1}{r^{n+2}} \right\} \\
& - \mu \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta) \left\{ D_n r^{n-1} + D'_n \frac{1}{r^{n+2}} \right\} \quad (5 \cdot 9 \text{ e})
\end{aligned}$$

$$\tau_{\phi r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu \partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \left\{ (n-1)D_n r^{n-1} - n D'_n \frac{1}{r^{n+2}} \right\} \quad (5 \cdot 9 \text{ f})$$

さて、 $r=0$ において応力は有限の値をとるはずであるから、 $1/r^n$ 、 $1/r^{n+1}$ および $1/r^{n+2}$ を含む項は0でなければならない。したがって、

$$A'_n = C'_n = D'_n = C_0 = 0$$

また、球の表面 $r=a$ では $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi r} = 0$ であるから、

$$D_n = 0 ,$$

$$C_n = \frac{n(n+2)\lambda + (n^2+2n-1)\mu}{(n-1)(n+1)(4n+6)\mu} a^2 A_n. \quad (n \geq 2)$$

さらに載荷は，図 5・5 の断面図に示すように，壁面に直角に中心角 $2\theta_0$ の範囲に等分布するものと仮定しよう。このとき，

$$(\sigma_r)_{r=a} = \begin{cases} -p & (0 \leq \theta \leq \theta_0, \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi) \\ 0 & (\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0) \end{cases} \quad (5 \cdot 10 a)$$

ところで載荷の状態から σ_r ， σ_θ および σ_ϕ は θ に関し偶関数であり， $\tau_{r\theta}$ は

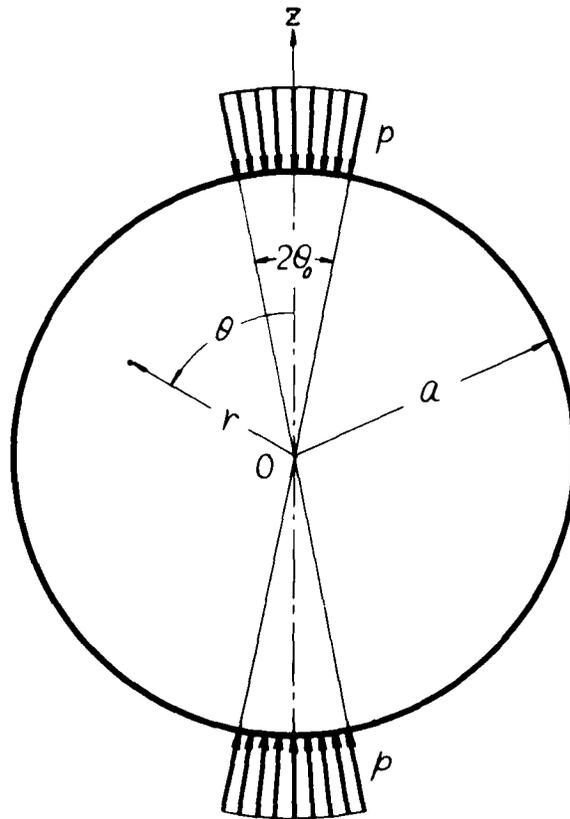


図 5・5 載荷の立体角を示すための球の断面図

θ に関し奇関数でなければならないことがわかる。したがって、 n は偶数でなければならない。この点を考慮し、これまでの式における n をすべて $2n$ で置き換えることにする。さらに Fourier-Legendre 展開を行なつて式 (5・10 a) を書き直すと、

$$\begin{aligned}
 (\sigma_r)_{r=a} &= -p (1 - \cos \theta_0) \cdot P_0(\cos \theta) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2n(2n+1)} p \sin \theta_0 \frac{\partial P_{2n}(\cos \theta_0)}{\partial \theta} P_{2n}(\cos \theta)
 \end{aligned}
 \tag{5・10 b}$$

式 (5・9 a) に $r = a$ と置いた式と式 (5・10 b) との係数を等置することにより A_{2n} を決定することができる。以上の検討によつて得られた結果をまとめて示すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{-3}{3\lambda + 2\mu} (1 - \cos \theta_0) p, \\
 A_{2n} &= \frac{(4n+3)(4n+1) \{ \cos \theta_0 P_{2n}(\cos \theta_0) - P_{2n-1}(\cos \theta_0) \}}{\{ (8n^2 + 8n + 3)\lambda + (8n^2 + 4n + 2)\mu \} a^{2n}} p, \\
 &\hspace{20em} (n \geq 1) \\
 C_{2n} &= \frac{2n(2n+2)\lambda + (4n^2 + 4n - 1)\mu}{(2n-1)(2n+1)(8n+6)\mu} a^2 A_{2n}, \quad (n \geq 1) \\
 C_0 &= A'_{2n} = C'_{2n} = D_{2n} = D'_{2n} = 0.
 \end{aligned}$$

これらの定数を式 (5・2) に代入することにより、各応力成分は次のように求まる。

$$\sigma_r = -(1 - \cos \theta_0) p - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{2n}(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ - \frac{(4n^2 - 2n - 3) \lambda + (2n + 1)(2n - 2) \mu}{(4n + 3)} r^{2n} \right. \\
& + \frac{4n^2 (2n + 2) \lambda + 2n(4n^2 + 4n - 1) \mu}{(2n + 1)(4n + 3)} a^2 r^{2n-2} \\
& \times \left. \frac{-(4n + 3)(4n + 1) \{ \cos \theta_0 P_{2n}(\cos \theta_0) - P_{2n-1}(\cos \theta_0) \}}{\{ (8n^2 + 8n + 3) \lambda + (8n^2 + 4n + 2) \mu \} a^{2n}} \cdot p \right\}, \\
& \hspace{15em} (5 \cdot 12 a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = & - (1 - \cos \theta_0) p - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P_{2n}(\cos \theta) \left(\frac{(2n + 3)\lambda - (2n - 2)\mu}{4n + 3} r^{2n} \right. \right. \\
& + \frac{4n^2 (2n + 2) \lambda + 2n(4n^2 + 4n - 1) \mu}{(2n - 1)(2n + 1)(4n + 3)} a^2 r^{2n-2} \\
& + \frac{\partial^2 P_{2n}(\cos \theta)}{\partial \theta^2} \left(- \frac{(2n + 3) \lambda + (2n + 5) \mu}{(2n + 1)(4n + 3)} r^{2n} \right. \\
& \left. \left. + \frac{2n(2n + 2) \lambda + (4n^2 + 4n - 1) \mu}{(2n - 1)(2n + 1)(4n + 3)} a^2 r^{2n-2} \right) \right\} \\
& \times \frac{-(4n + 3)(4n + 1) \{ \cos \theta_0 P_{2n}(\cos \theta_0) - P_{2n-1}(\cos \theta_0) \}}{\{ (8n^2 + 8n + 3) \lambda + (8n^2 + 4n + 2) \mu \} a^{2n}} \cdot p, \\
& \hspace{15em} (5 \cdot 12 b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\phi = & - (1 - \cos \theta_0) p - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P_{2n}(\cos \theta) \left(\frac{(2n + 3)\lambda - (2n - 2)\mu}{(4n + 3)} r^{2n} \right. \right. \\
& + \frac{4n^2(2n + 2) \lambda + 2n(4n^2 + 4n - 1) \mu}{(2n - 1)(2n + 1)(4n + 3)} \cdot a^2 r^{2n-2} \\
& + \cot \theta \frac{\partial P_{2n}(\cos \theta)}{\partial \theta} \left(- \frac{(2n + 3) \lambda + (2n + 5) \mu}{(2n + 1)(4n + 3)} r^{2n} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2n(2n+2)\lambda + (4n^2 + 4n - 1)\mu}{(2n-1)(2n+1)(4n+3)} a^2 r^{2n-2} \Big\} \\
& \times \frac{-(4n+3)(4n+1)\{\cos\theta_0 P_{2n}(\cos\theta_0) - P_{2n-1}(\cos\theta_0)\}}{\{(8n^2 + 8n + 3)\lambda + (8n^2 + 4n + 2)\mu\} a^{2n}} \cdot p \Big\}, \\
\end{aligned}
\tag{5 \cdot 12 c}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial P_{2n}(\cos\theta)}{\partial\theta} \{-r^{2n} + a^2 r^{2n-2}\} \right. \\
& \times \frac{2n(2n+2)\lambda + (4n^2 + 4n - 1)\mu}{(2n+1)(4n+3)} \\
& \times \left. \frac{-(4n+3)(4n+1)\{\cos\theta_0 P_{2n}(\cos\theta_0) - P_{2n-1}(\cos\theta_0)\}}{\{(8n^2 + 8n + 3)\lambda + (8n^2 + 4n + 2)\mu\} a^{2n}} \cdot p \right\}, \\
\end{aligned}
\tag{5 \cdot 12 d}$$

$$\tau_{\theta\phi} = 0 \quad , \tag{5 \cdot 12 e}$$

$$\tau_{\phi r} = 0 \quad . \tag{5 \cdot 12 f}$$

ただし、総荷重を P とすれば p は次式で計算できる。

$$p = P / \pi a^2 \sin^2 \theta_0 \tag{5 \cdot 13}$$

5 \cdot 4 弾性円柱に点荷荷を行なつたときの応力の解析

この解析は齊藤⁴⁾が発表した一般解を利用して行なうことにする。

直径 w 、高さ h の弾性円柱の中心 O を原点にして、図 5 \cdot 6 に示すように円柱座標 (r, θ, z) をとるものとし、この円柱に対し z 軸に沿つて点荷荷が行なわれるものとする。軸対称変形の場合、応力成分は角 θ に無関係でせん断応力 $\tau_{r\theta}$ 、 $\tau_{\theta z}$ は 0 であるから鉤合方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (5 \cdot 14 a)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (5 \cdot 14 b)$$

いまMichellの応力関数 ϕ を用いると、各応力成分は次のように表わされる。

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right), \quad (5 \cdot 15 a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right), \quad (5 \cdot 15 b)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left((2-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right), \quad (5 \cdot 15 c)$$

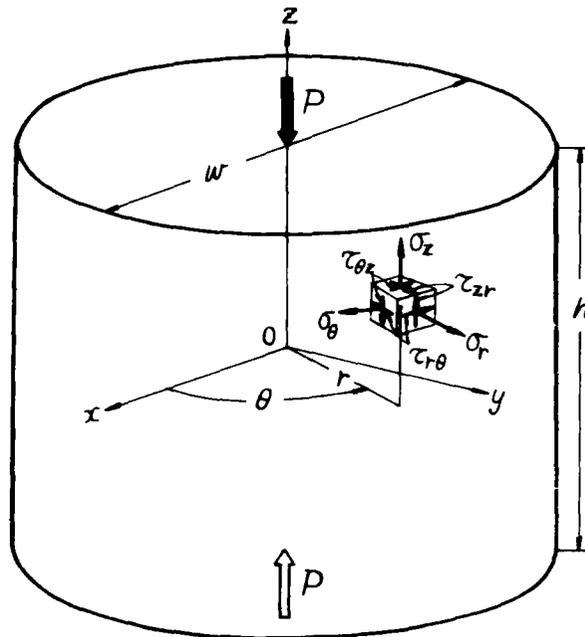


図5・6 点載荷試験と円柱座標

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left((1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right). \quad (5 \cdot 15 d)$$

ここに、 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + \partial / r \partial r + \partial^2 / \partial z^2$ ，また ν は Poisson 比を表わし、 ϕ は次式を満足する。

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0. \quad (5 \cdot 16)$$

式 (5・16) を満足する ϕ として、次式を採用する。

$$\begin{aligned} \phi = & A_0 \frac{z^3}{6} + C_0 \frac{z r^2}{2} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^3} [A'_n I_0(\beta_n r) + B'_n \beta_n r I_1(\beta_n r)] \sin \beta_n z \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{r_s^3} [C'_s \sinh r_s z + D'_s r_s z \cosh r_s z] J_0(r_s r). \end{aligned} \quad (5 \cdot 17)$$

そして、円柱内の応力成分が θ に無関係であること、直応力成分が z の偶関数 (せん断応力は奇関数) であること、円柱の側壁 $r = w/2$ において $\sigma_r = \tau_{rz} = 0$ ，円柱の端面 $z = \pm h/2$ において τ_{rz} ， σ_z はそれぞれ次式を満足することと、

$$\tau_{rz} = 0, \quad (5 \cdot 18 a)$$

$$\sigma_z = a'_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a'_s J_0\left(\frac{2\lambda_s}{w} r\right) \quad (5 \cdot 18 b)$$

を考慮すると各応力成分は式 (5・19) で与えられる。

$$\sigma_r = A_0 \nu + C_0 (2\nu - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{A_n} \left[-(I_1 + \beta_n \frac{w}{2} I_0(\beta_n r)) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \beta_n r I_1 I_1 (\beta_n r) + \left\{ 2(1-\nu) I_1 + \beta_n \frac{w}{2} I_0 \right\} \frac{I_1 (\beta_n r)}{\beta_n r} \cos \beta_n z \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s}{Q_s} \left\{ \left(\sinh r_s \frac{h}{2} - r_s \frac{h}{2} \cosh r_s \frac{h}{2} \right) \cosh r_s z \right. \\
& + r_s z \sinh r_s \frac{h}{2} \sinh r_s z \left. \right\} J_0(r_s r) \\
& + \left\{ -r_s z \sinh r_s \frac{h}{2} \sinh r_s z + \right. \\
& + \left. \left(r_s \frac{h}{2} \cosh r_s h - (1-2\nu) \sinh r_s \frac{h}{2} \right) \right. \\
& \left. \times \cosh r_s z \right\} \frac{J_1(r_s r)}{r_s r} , \quad (5 \cdot 19 a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z = & A_0 \nu + C_0 (2\nu - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{A_n} \left\{ (2\nu - 1) I_1 \cdot I_0 (\beta_n r) \right. \\
& + \left. \left\{ 2(1-\nu) I_1 + \beta_n \frac{w}{2} I_0 \right\} \frac{I_1 (\beta_n r)}{\beta_n r} \right\} \cos \beta_n z \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s}{Q_s} \left\{ 2\nu \sinh r_s \frac{h}{2} \cosh r_s z J_0(r_s r) \right. \\
& + \left. \left\{ ((1-2\nu) \sinh r_s \frac{h}{2} - r_s \frac{h}{2} \cosh r_s \frac{h}{2}) \cosh r_s z \right. \right. \\
& \left. \left. + r_s z \sinh r_s \frac{h}{2} \sinh r_s z \right\} \frac{J_1(r_s r)}{r_s r} \right\} , \quad (5 \cdot 19 b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = & A_0 \nu + C_0 (2\nu - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{A_n} \left\{ (2\nu - 1) I_1 \cdot I_0 (\beta_n r) \right. \\
& + \left. \left\{ 2(1-\nu) I_1 + \beta_n \frac{w}{2} I_0 \right\} \frac{I_1 (\beta_n r)}{\beta_n r} \right\} \cos \beta_n z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s}{Q_s} \left(2\nu \sinh r_s \frac{h}{2} \cosh r_s z J_0(r_s, r) \right. \\
& + \left\{ ((1-2\nu) \sinh r_s \frac{h}{2} - r_s \frac{h}{2} \cosh r_s \frac{h}{2}) \cosh r_s z \right. \\
& \left. \left. + r_s z \sinh r_s \frac{h}{2} \sinh r_s z \right\} \frac{J_1(r_s, r)}{r_s r} \right), \quad (5 \cdot 19 c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\Delta_n} \left\{ \beta_n \frac{w}{2} I_0 \cdot I_1(\beta_n r) - \beta_n r I_1 \cdot I_0(\beta_n r) \right\} \sin \beta_n z \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s}{Q_s} \left\{ -r_s \frac{h}{2} \cosh r_s \frac{h}{2} \sinh r_s z \right. \\
& \left. + r_s z \sinh r_s \frac{h}{2} \cosh r_s z \right\} J_1(r_s, r), \quad (5 \cdot 19 d)
\end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad (5 \cdot 19 e)$$

$$\tau_{\theta z} = 0. \quad (5 \cdot 19 f)$$

ただし、 λ_s は $J_1(\lambda_s) = 0$ の s 番目の正根、 $r_s = 2\lambda_s/w$ であり、 I_0 、 I_1 、 J_0 、 J_1 、 Δ_n および Q_s はそれぞれつぎの値を表わすものとする。

$$I_0 = I_0(\beta_n w/2), \quad I_1 = I_1(\beta_n w/2),$$

$$J_0 = J_0(\lambda_s), \quad J_1 = J_1(\lambda_s),$$

$$\Delta_n = \frac{\{2(1-\nu) + (\beta_n w/2)^2\} I_1^2 - (\beta_n w/2)^2 I_0^2}{\beta_n w/2},$$

$$Q_s = \sinh r_s \frac{h}{2} \cosh r_s \frac{h}{2} + r_s \frac{h}{2}. \quad (5 \cdot 20)$$

また、任意定数 A_0 、 A_n 、 C_0 および C_n は、境界条件を与える式 (5 \cdot 18 a)

および式 (5・18 b) を考慮して、次の多元連立1次方程式を解くことにより決定される。

$$\begin{aligned}
 A_0 \nu + C_0 (2\nu - 1) &= 0, \\
 A_0 (1 - \nu) + C_0 2 (2\nu - 1) &= a'_0, \\
 A_n + \sum_{s=1}^{\infty} C_s \left\{ 4 (-1)^n r_s \frac{h}{2} (n\pi)^2 \sinh^2 r_s \frac{h}{2} J_0 \right\} \\
 &\quad / \left\{ \left(r_s \frac{h}{2} \right)^2 + (n\pi)^2 \right\}^2 \Omega_s = 0, \quad (n=1, 2, \dots) \\
 C_s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ 4 (-1)^{n+1} \beta_n \frac{w}{2} \lambda_s^2 I_1^2 \right\} \\
 &\quad / \left\{ \left(\beta_n \frac{w}{2} \right)^2 + \lambda_s^2 \right\}^2 J_0 \Delta_n = a'_s. \quad (s=1, 2, \dots)
 \end{aligned}
 \tag{5・21}$$

さて、図5・7の断面図に示すように载荷がz軸にそって円柱端面に垂直に半径 $w_0/2$ の円状に等分布するものと仮定する。このとき $(\sigma_z)_{z=\pm h/2}$ は次式で与えられる。

$$(\sigma_z)_{z=\pm h/2} = \begin{cases} -p & (0 \leq r \leq w_0/2) \\ 0 & (w_0/2 < r \leq w/2) \end{cases} \tag{5・22 a}$$

上式を Fourier-Bessel 展開すると、

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_{z=\pm h/2} &= -p \left(\frac{w_0}{w} \right)^2 - 2p \left(\frac{w_0}{w} \right) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{I_1 \left(\lambda_s \frac{w_0}{w} \right)}{\lambda_s J_0^2} \\
 &\quad \times J_0 \left(\lambda_s \frac{2r}{w} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5・22 b}$$

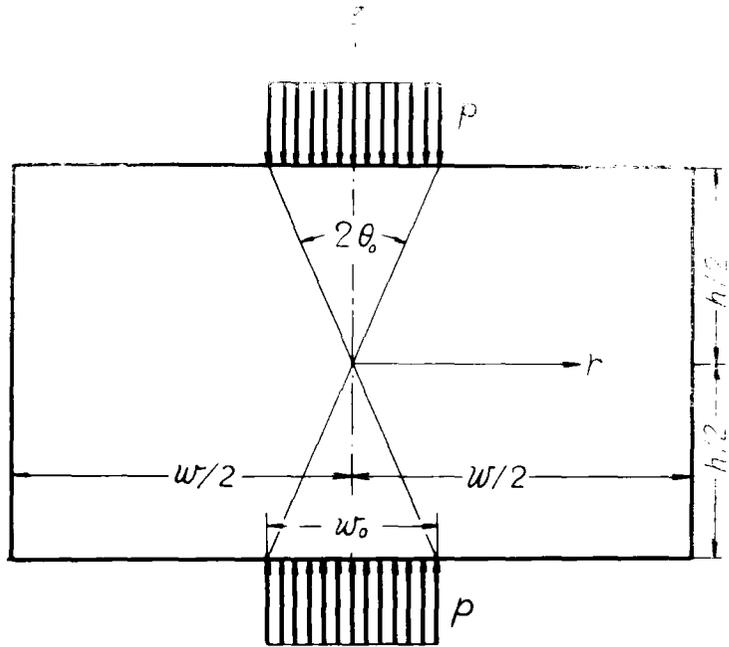


図 5・7 載荷の立体角を示すための円柱の断面図

すなわちこの場合の式 (5・18) おたび式 (5・21) における α'_0 , α'_s はつぎに示すようである。

$$\alpha'_0 = -p (w_0/w)^2,$$

$$\alpha'_s = -2p (w_0/w) J_1(\lambda_s \frac{w_0}{w}) / \lambda_s J_0^2 \quad (5 \cdot 23)$$

一方、円柱端面に作用する総荷重を P とすると、 p は次式で計算できる。

$$p = 4P / \pi w_0^2 \quad (5 \cdot 24)$$

5・5 点載荷試験による岩石の強さの決定の可能性の検討

5・5・1 応力分布

球形および円柱形試験片に点載荷したとき生ずる載荷点を通る軸上の応力成分を、さきの弾性理論解析の結果を用い、電子計算機を利用して計算した。各応力成分は、試験片のポアソン数 m および載荷の中心角 $2\theta_0$ 。(ただし円柱試験片については $\theta_0 = \tan^{-1} \frac{w_0}{h}$ をもつて載荷幅の程度を表わすことにする。)により変化するが、ヤング率 E の影響を受けないことは解析結果から明らかである。また円柱形試験片の直径と高さの比 w/h によつても応力分布は変わるはずである。そこで計算に当つては、 m および θ_0 が表5・1に示すような種々の値の場合について応力分布を求めた。一例として、球および w/h が1/1および2/1の円柱についてそれぞれ $\theta_0 = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ の場合の応力分布を示せば図5・8 (a), (b), (c) のようである。この図からも、さきの光弾性実験で認めたように、上下2点の載荷点を結ぶ軸上の応力状態は試験片の形状の違いによつてはほとんど変わらないことがわかる。

ところでこの軸上において、これに垂直な2つの主応力 σ_θ, σ_r (ただし $\sigma_\theta = \sigma_r$)は $\theta_0 = 5^\circ \sim 15^\circ$ の範囲にわたつて引張応力であり、それからさきは圧縮応力に転ずる。軸に沿うもう1つの主応力 σ_z はつねに圧縮応力である。載荷点付近では3主応力とも高い圧縮応力である。このように、点載荷の場合の3次元的な応力状態も、円板圧裂試験や角板圧裂試験における試験片内の2次元的な応力分布とよく似ている。しかし、両者の間には、圧縮応力や引張応力の値そのものや、圧縮・引張応力比やポアソン数が応力分布に及ぼす影響などに違いがある。そこでさらに詳しく応力分布を検討することにする。

試験片の載荷の軸上の圧縮応力 σ_z は w/h や m によつてほとんど変化せず、試験片中心において最も小さく、この点の圧縮・引張応力比は θ_0 によつてほとんど変わらず約5であり、中心から載荷点に近づくにしたがつて始め徐々に、後にはしだいに急激に増加し、 σ_θ が引張応力である範囲では各点において圧縮・引張

表 5 · 1

$m \backslash \theta_0$	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°
3	ABCD										
4	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
5	ABCD										
6	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
6.5						C		C		C	
7	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
7.5						B		B		B	
8	ABCD										
9	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
10	A	A	A	A	A	A	A	A D	A	A D	A

-116-

A : 等分布荷重を受ける弾性球

B : " " 弾性円柱 ($w/h = 1/1$)

C : " " 弾性円柱 ($w/h = 2/1$)

D : 不均等分布荷重を受ける弾性円柱 ($w/h = 1/1$)

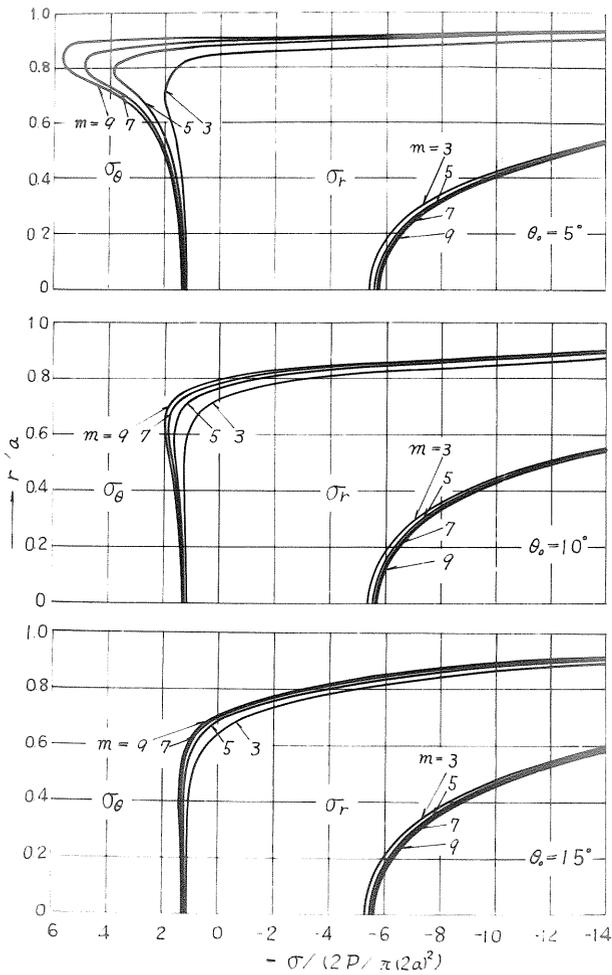


図 5・8 (a) 点載荷を受けた弾性球の z 軸上の σ_r , σ_θ と θ_0 および m との関係。

比は 5~15 である。この比率は θ_0 が大きくなるとともに小さくなる。 σ_z は載荷点近傍では

$$2 \times \left(\frac{h}{w_0}\right)^2 \times \frac{2P}{\pi h^2}$$

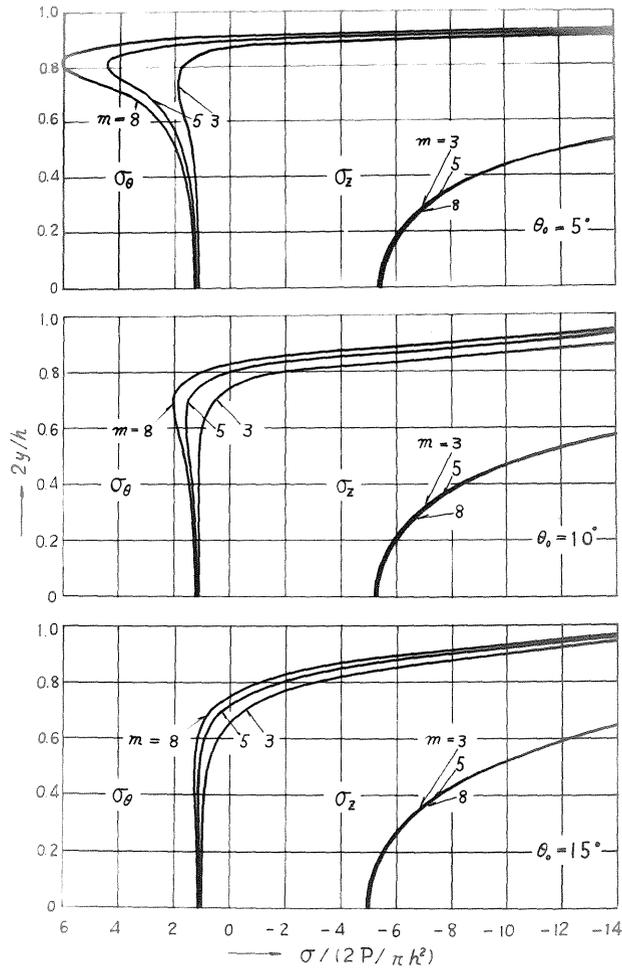


図 5・8 (b) 点載荷を受けた $w/h = 1/1$ の弾性円柱の z 軸上の σ_θ , σ_z と θ_0 および m との関係

に近い大きな圧縮応力になるはずである。したがって θ_0 ($= \tan^{-1} w_0/h$) が大きくなるにつれてこの圧縮応力は急激に減少する。なお上にも述べたように、この付近では他の2つの主応力 σ_θ , σ_r もこれとほぼ等しい大きな圧縮応力となる。

つぎに、載荷の軸上の引張応力についてみると、その最大値は、 θ_0 の小さい

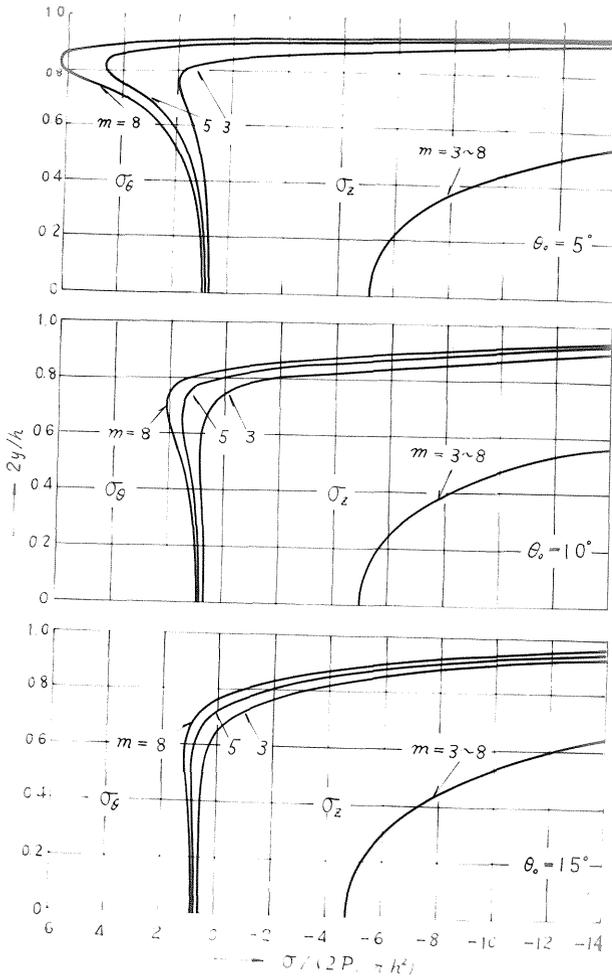


図5・8 (c) 点載荷を受けた $w/h = 2/1$ の弾性円柱の z 軸上の σ_θ , σ_z と θ_0 および m との関係

ときには、 $r = 0.9 \sim 0.7$ ($h/2$) 付近に生じ、 m が大きいほどその値も大きく、引張応力の分布曲線には鋭いピークが現われる。 θ_0 が大きくなるにつれて、この位置は中心方向に移動し、 m の影響も小さくなり、値も小さくなる。 θ_0 が

10° 以上になると引張応力は円板圧裂試験片内の分布に似た均一な分布となる。

とんど一定の値をとる。

以上に述べた引張応力と θ_0 および m との関係を図示すると図 5・9 のようである。(a) は球, (b) は $w/h = 1/1$ の円柱, (c) は $w/h = 2/1$ の円柱試験片に対するものである。各図において, 上段は最大引張応力, 中段は試験片中

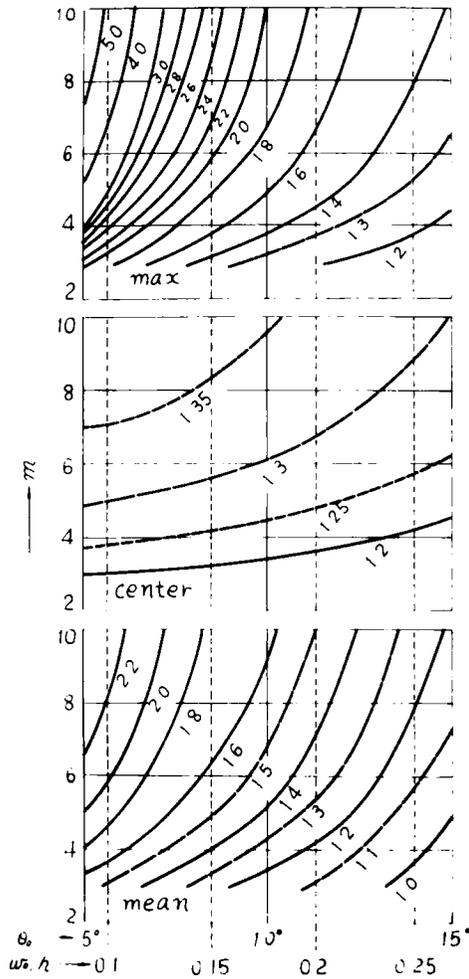


図 5・9 (a) 点載荷を受けた弾性球の引張応力と θ_0 および m との関係, (max : 最大引張応力, center : 試験片の中心の引張応力, mean : 平均引張応力)

心における引張応力，下段は引張応力分布域における引張応力の平均値を示す。
 また図中の数字は応力を $2P/\pi h^2$ で除した値であつて，これは円板圧裂試験に
 おいて応力を $2P/\pi d t$ の倍数として示したのと同様な表わし方である。

試験片の高さに対する直径の比 w/h が増すにつれて引張応力は少しづつ小さ

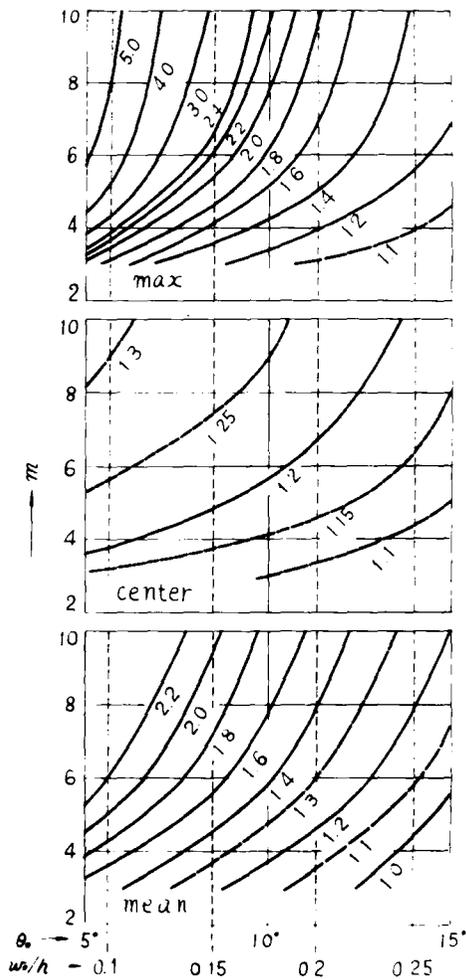


図5・9 (b) 点載荷を受けた $w/h = 1/1$ の弾性円柱の引張応力と θ_0 および m との関係

くなる。応力に対する m や θ_0 や w/h の影響は最大引張応力に対して最も著しく、試験片中心における引張応力や平均引張応力に対してはあまり影響しない。

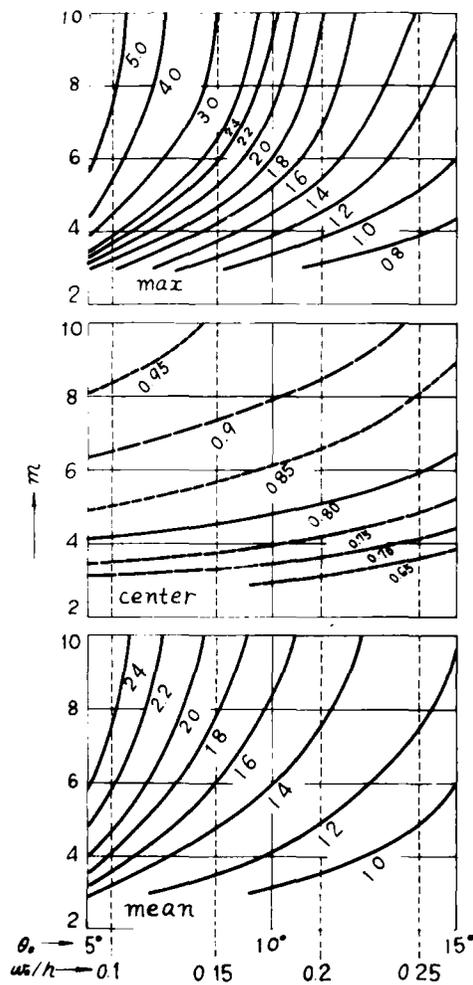


図 5・9(c) 点載荷を受けた $w/h = 2/1$ の弾性円柱の引張応力と θ_0 および m との関係

5・5・2 問題点

前述したように、球形や円柱形試験片に点載荷したとき生ずる応力状態は円板圧裂試験や角板圧裂試験におけるそれとよく似ているから、この方法で岩石の強さを決定する場合には円板圧裂試験や角板圧裂試験において問題となつた点は同様に問題となる。そこで第4章で用いたと同じ方法でこの点載荷試験法を検討してみることにする。

まず、(i) 載荷点付近の高い圧縮応力の影響についてみると、 w_0/h を0.3以上にとれば最大圧縮応力と最大引張応力の比は1.5以下となり、まず影響はないと思われる。さらに、他の圧裂試験と違って、この試験では載荷点付近は3軸ともほぼ等しい大きさの圧縮応力の封圧状態にあるから相当高い応力にも耐え得ると考えられる。したがつて w_0/h が0.3以下においてもこの付近の圧縮応力の影響は大きくはないと考えられる。

つぎに(ii) 試験片の載荷の軸上の応力の2軸性であることの影響についてみよう。先にも述べたように θ_0 が小さいとき(w_0/h が0.1以下の場合)は、引張応力は $r = 0.9 \sim 0.7$ ($h/2$) 付近に鋭いピークをもち、しかもその点の圧縮応力も大きいから、この付近が最も破壊を起こしやすいと考えられる。しかしこの付近では圧縮・引張応力比が5~1.5と大きいから、最大引張応力から岩石の強さを決定するのは問題があると思われる。しかもこの場合、最大引張応力は m や θ_0 や w/h によつて著しく変化するのでこの試験で強さを決定するのは困難である。

θ_0 がある程度大きくなると(たとえば w_0/h が0.13以上)最大引張応力の生ずる点は次第に中心に向つて移動し、しかも m や θ_0 や w/h によつて引張応力の変化が少なくなつて、その点の圧縮・引張応力比は5~1.0程度となり、しかもこの点がやはり最も破壊しやすい状態にある。したがつて応力の2軸性であることの影響が少なくなつてくる。しかし円板圧裂試験や角板圧裂試験に比べるとまだ少し問題があると考えられる。

さらに θ_0 が大きくなると($w_0/h > 0.3$)、最大引張応力の生ずる点は、ほぼ

試験片の中心に近く、しかもこの点が最も破壊しやすい状態にある。またこのときの引張応力は m や θ_0 や w/h によってほとんど変化しなくなり、圧縮・引張応力比は約 5 であり、円板圧裂試験や角板圧裂試験の場合とほとんど条件が等しく、したがって応力の 2 軸性であることの影響は問題にしなくてもよいと思われる。

最後に (iii) 破断面上の応力が不均一に分布することの影響についてみると、 θ_0 が小さいとき ($w_0/h < 0.13$) には、円板圧裂試験や角板圧裂試験に比べると引張応力の分布が不均一であり、最大引張応力から岩石の強さを決定するのは問題があると思われる。しかし θ_0 をある程度の大きさ (いわば $w_0/h = 0.13$ 以上) にすると、角板圧裂試験における、同程度に不均一度はおだやかになってあまりこの影響は問題にならないと考えられる。

5・5・3 強さの算定式

この点載荷試験による岩石の強さ $(S_t)_{ir}$ の算定式としては、応力解析の結果から考えると次の形の式になるものと考えられる。

$$(S_t)_{ir} = k_{ir} \times \frac{2P}{\pi h^2} \quad (5 \cdot 25)$$

ここで、 P は破壊荷重、 h は試験片の高さである。また k_{ir} は第 4 章における k_d や k_i と同様な意味を持つべき係数であって、破壊の機構や試験の条件 (w/h や w_0/h や m) によって定められるものである。

さて、点載荷試験で式 (5・25) を用いて、円板圧裂試験や角板圧裂試験によって決定される強さと等しい強さを求めようと思えば、第 4 章と同じ仮定のもとに同じ方法で行なった前項 (5・5・2) の検討によると、載荷幅は相当広く、 $w_0/h > 0.3$ に、とらなければならないことになる。しかも k_{ir} の値としては厳密に言えば図 5・8 に示す最大引張応力に関する曲線から w/h や w_0/h や m によっていちいち読みとったものを採用する必要がある。

しかしある程度の精度を犠牲にしても、できるだけ容易に岩石の強さを決定す

る方法はないものかと考え、種々検討した。その結果、載荷幅を $w_0/h = 0.1 \sim 0.2$ の範囲に選び、試験片の形状や m の値のいかにかかわらず $k_{ir} = 1.4$ とする案を得た。この案では、載荷幅を上述の範囲にとると前項の3つの問題点の影響が実用上許される程度になると思われ、また普通の岩石では $m = 3 \sim 8$ であり試験片が $w/h = 1 \sim 2$ であることを考慮すると載荷幅が上述の範囲では図5・8の平均引張応力を用いて差支えないと思われるから、 $k_{ir} = 1.4$ ととることにした。したがって、この案では式(5・25)は次のようになる。

$$\begin{aligned} (S_t)_{ir} &= 1.4 \times \frac{2P}{\pi h^2} \\ &\doteq 0.9 \times \frac{P}{h^2} \end{aligned} \quad (5 \cdot 26)$$

5・6 結 言

まず、球、立方体および直方体の弾性体を2点ではさんで圧縮する場合、それらの中に生ずる応力を3次元光弾性実験により解析し、応力の分布の範囲が2つの載荷点を結ぶ線分を直径とする球もしくはそれに近い円体内に限られ、したがってこのような点載荷を行なうときには弾性体の形状が球形から横長の直方体にいたるまで変化しても載荷軸まわりの応力状態はほとんど同じであることを見出した。

そこでつぎに、球形および円柱形の試験片について厳密な弾性理論による解析を行ない試験片内の応力はそのYoung率に無関係であり、Poisson数と載荷幅と試験片の縦横比などの関数であることを見出した。そこでこれらの値を種々変えた場合の試験片内の各応力成分を電子計算機を用いて精密に計算した。

こうして求めた応力分布を基にして、点載荷圧裂試験により岩石の強さが決定できるかどうかを検討した。その結果、円板圧裂試験や角板圧裂試験で得られるのと等しい強さを点載荷圧裂試験で得るためには、載荷幅を相当広く ($w_0/h > 0.3$) しなければならないことがわかった。

そこで、この試験の結果から式(5・26)によつて岩石の強さを決定するのに、ある程度の誤差を覚悟し、できるだけ計算を容易に行えることを目標として、載荷幅を $w_0/h = 0.1 \sim 0.2$ の範囲に選び、 $k_{ir} = 1.4$ をとることを提案した。こうすれば載荷面の整形にほとんど手数を要しないばかりか、試験片の形状が不規則なものにも適用できると考えられるからである。

参 考 文 献

- 1) 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎: 非整形試験片による岩石の引張強さの迅速試験法, 日本鉱業会誌 81 巻 932 号, 昭和 40 年 12 月, 1024 頁~1030 頁
- 2) 岡 行俊, 平松良雄, 木山英郎: コンクリートの点載荷圧裂試験による引張強度の決定, 材料学会才 17 期総会講演要旨集, 昭和 43 年 5 月
- 3) 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎: コンクリートの点載荷圧裂試験による引張強度の決定, 材料 (投稿中)
- 4) 斉藤秀雄: 短円柱および円盤の軸対称変形, 機械学会論文集, 才 18 巻 68 号, 昭和 27 年, 21 頁~27 頁, および才 20 巻 91 号, 昭和 29 年, 185 頁~190 頁

第6章 不規則塊状試験片を用いる点載荷圧裂試験法 の実験的検討^{1,2,3)}

6・1 緒 言

前章の理論的検討において設けたいくつかの仮定は、岩石に対して必ず成立するとは言えないから、点載荷することによって岩石が円板圧裂試験と同じような破壊を起こすかどうか問題である。また精度は最も問題となるところである。

そこで、実際に種々の岩石やコンクリートの試験片を用いて点載荷圧裂試験を実施し、その適用性を詳しく検討することにした。さらに、現場試験への応用を考えて可搬式不規則塊圧裂試験機の試作を行なった。

6・2 不規則塊状の岩石試験片を用いた実験による検討

本節ではまず、点載荷圧裂試験によって岩石がどのような破壊を起こすかを調べるために、種々の岩石についてこの試験を実施し観察した。(図6・1(a))。その結果どの試験片にも載荷点付近の極くせまい範囲に圧砕圏ができるが、最終的には試験片は上下の載荷点を結ぶ軸を含む縦断面を境にして、2つまたは3つに破壊することが観察された(図6・1(b))。破断面は円板圧裂試験におけるそれと同様な引張応力による分離破壊面であることが認められた。したがって前章で述べたようにこの試験によって岩石の強さを決定する可能性があることがわかった。

そこでつぎに、この試験で強さを算定するのに式(5・26)を用いて、円板圧裂試験による強さと等しい強さ、すなわちそれは引張強さとみなし得る値を決定できるか否かを検討することにした。

実験に当っては、載荷板の直径 w_0 と試料の高さ h の比 w_0/h が 0.1～0.2 程度になるように考慮した。すなわち高さ 1.5 cm～3 cm 程度の岩石については直径 3 mm の球面、高さ 3 cm～10 cm 程度の岩石については直径 20 mm の球面をもつ突起状圧板 2 個の間に試験片をはさみ、島津製電子管平衡式 50 t 万能

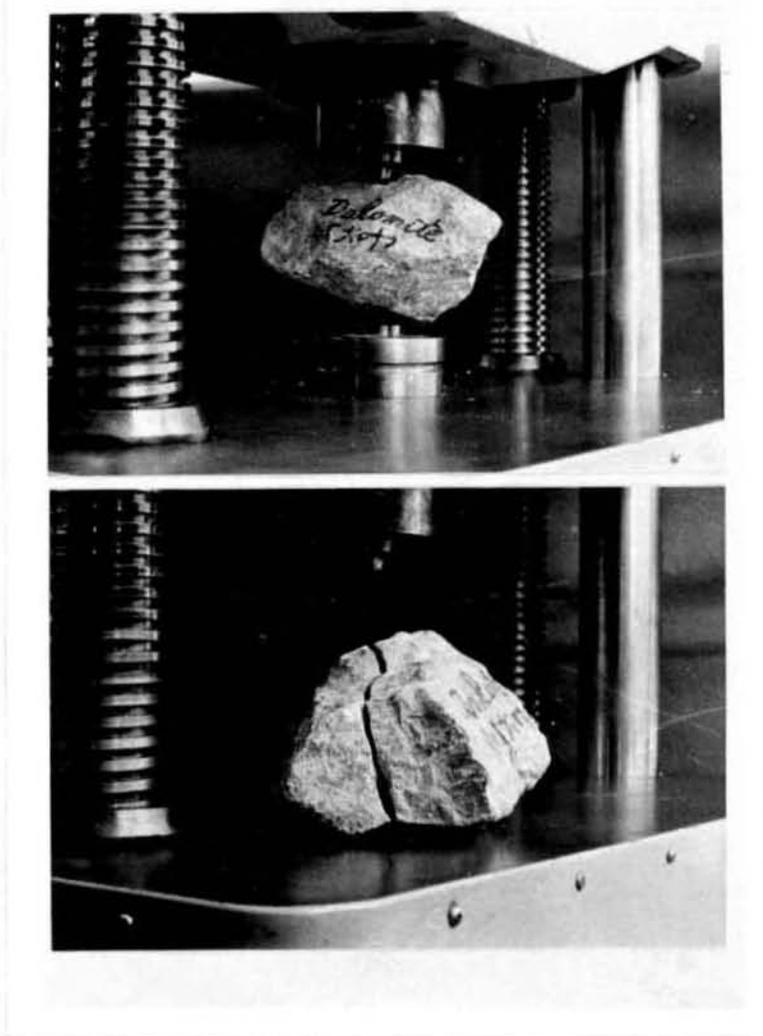


図 6・1 岩石の不規則塊状の試験片の点載荷圧裂試験 (a) と試験後の試験片 (b)

試験機を用いて行なった。

種々の岩石について、円板圧裂試験（試験片の直径と長さの比は約 2 : 1）によって求めた強さ $(St) d$ を横軸に、不規則塊の点載荷圧裂試験により式 (5.26) を用いて求めた強さ $(St) ir$ を縦軸にとって示すと図 6・2 のようである。この図の中に見られるやや大きな小円は両試験とも種々の大きさの約 40 個の試料に

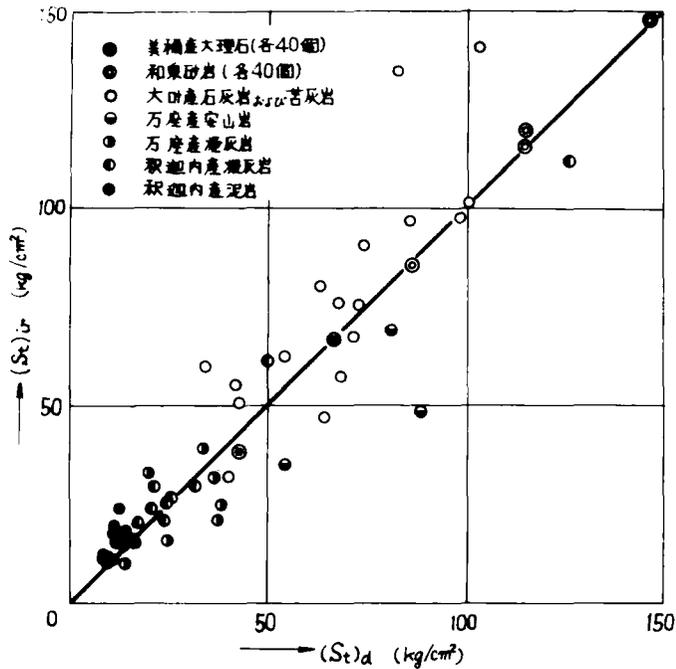


図 6・2 岩石の不規則塊状の試験片の点載荷圧裂試験による強さと円板圧裂試験片による強さの比較

つき求めた強さの平均値を対応させたものであり、小さな円は両試験とも 1 個ずつの試料から求めた結果を対応させたものである。この実験から同一岩石の多くの試験片を用いて求めた $(St)_d$ の平均値と、 $(St)_{ir}$ の平均値とはよく一致し、1 個ずつの試験片によって求めた $(St)_d$ と $(St)_{ir}$ も大体近い値を示すことが認められる。したがって不規則塊の点載荷圧裂試験によって、円板圧裂試験による強さと等しい強さ、すなわち岩石の引張強さと見なし得る値を求めることが可能であり、この目的に式 (5・26) を用い得ることがわかった。

6・3 コンクリート試験片を用いた実験による検討

コンクリートは岩石と違って試験片の注型が容易であり、円板圧裂試験の実施

もそれほど手数を要しないからその点では不規則塊試験片を用いて試験する必要は少ないと思われる。しかし、試験片が不規則塊であるなしにかかわらず点載荷圧裂試験の簡便さには捨て難いものがある。さらにコンクリートには大きな粒子と小さな粒子が混在するが、はたして緻密な粒子の結合体である岩石と同様に、この試験によつて妥当な強さを決定できるかどうかという点に興味がある。またコンクリートは岩石と違って強さをはじめ機械的性質の等しい試験片を多数作り得る。また配合比や水・セメント比等必要な示方書を示しておくことにより他の各種の強さ試験の結果と容易に比較でき、必要に応じて再現できる。

表 6・1 生コンクリート示方配合

配合名	コンクリート名	配合比 (セ:細:粗)	粗骨材料最大寸法、 m/m	スラングの範囲 cm	単位水量 W Kg/m ³	単位セメント量 C Kg/m ³	水セメント比 W/C %	絶体細骨材率 S/a %	単位細骨材量 S Kg/m ³	単位粗骨材量 G 5 $\frac{mm}{12}$ ~25 $\frac{mm}{6}$ Kg/m ³
1:2:4	A, D, I	1:2.32:3.57	25	15	180	320	56.2	40.0	743	1142
1:3:5	C, F, G	1:2.96:4.19	25	15	178	270	66.0	42.0	800	1132
1:3:6	B, E, H	1:3.31:5.77	25	15	170	220	77.6	37.0	728	1269

以上の事情にかんがみコンクリートに対する点載荷圧裂試験法の適用性を検討することにした。ことに載荷板の巾と試験片の高さの比 w_0/h の影響や載荷板の形状の影響を詳しく見ることにして実験を計画した。

6・3・1 試験片

試験片の注型はコンクリートの圧縮試験に最も普通に用いられる直径 15 cm、高さ 30 cm の標準型枠を用い、粗骨材料の大きさは 5~25 mm の範囲に選んだ。セメント:細骨材:粗骨材の配合比は 1:2:4, 1:3:5 および 1:3:6 の 3 種を目安にして、表 6・1 に示すような示方書通りとした。また試験片個々の強さのばらつきをできる限り少くするために、たがいに強さを比較し合う圧縮試験・円板圧裂試験・点載荷圧裂試験の一連の試験を 40 本の試験片を一組

にして行なうことにし、この40本は同じミキサーで練り合せたものから同時に注型することにした。それらの組がA, B, C, …… , Iであって、3種の配合比のそれぞれについて3組ずつ、計9組360本の試験片を準備した。

なお、各組40本の内、3本にはキャッピングを施し圧縮試験に、17本を円板圧裂試験に、20本を点載荷圧裂試験に供することにした。予備試験の結果、高さ30 cmの試料の上下では強さが幾分異なることが認められたので、図6・3に示すように円板圧裂試験片および点載荷圧裂試験片は高さ30 cmを上下に2等分し、上部(記号U)および下部(記号L)をそれぞれ別個の強さを有する試験片として処理することにした。

養生は最初の10日間を恒温水槽で、以後3~6ヶ月を屋外水槽にて行なった(図6・4)。また上述のUとLの截断は400 mmφダイヤモンドカッターを使用し、1組40本を単位に養生中に適宜行なうことにした。

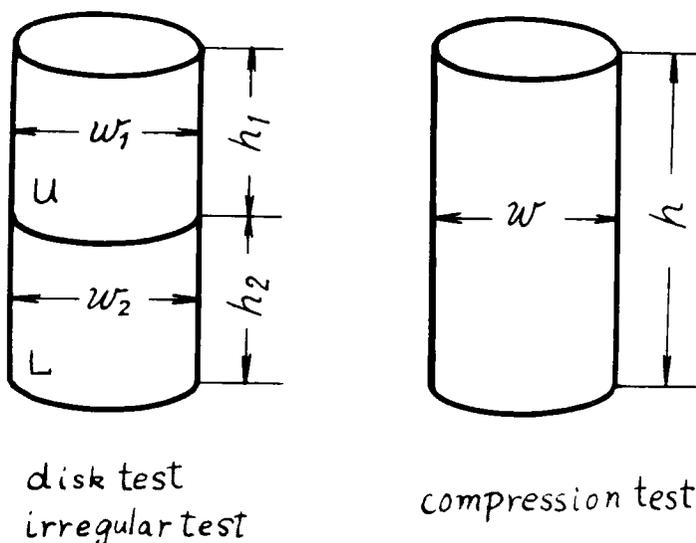


図6・3 コンクリートの試験片

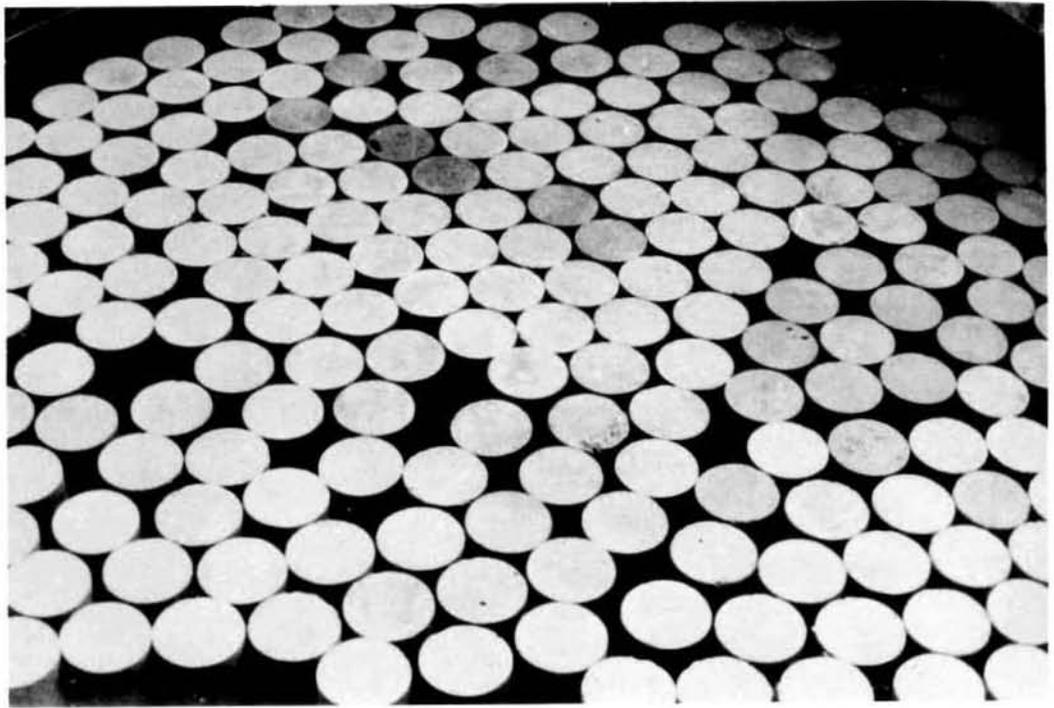


図 6・4 水槽中で養生中のコンクリート試験片

表 6・2 (1)

コンクリート名	配合名	打込日	試 験 日			試 験 片 個 数		
			圧裂試験	弾性定数 決定試験	圧縮試験	圧縮 試験	円板圧裂 試験	点荷重圧 裂試験
A	1:2:4	41. 10. 25	42. 1. 23	42. 2. 14	42. 7. 5	3	U 17 L 17	20 20
B	1:3:6	10. 2. 6	1. 24	2. 14	2. 14	3	U 17 L 17	20 20
C	1:3:5	10. 3. 1	2. 15	2. 16	2. 16	3	U 17 L 17	20 20
D	1:2:4	11. 1. 1	6. 5	6. 13	7. 5	3	U 17 L 17	20 20
E	1:3:6	11. 9	6. 6	6. 13	6. 13	3	U 17 L 17	20 20
F	1:3:5	11. 15	6. 12	6. 13	7. 5	3	U 17 L 17	20 20
G	1:3:5	11. 18	6. 17	6. 16	7. 5	3	U 17 L 17	20 20
H	1:3:6	12. 8	6. 17	6. 16	6. 16	3	U 17 L 17	20 20
I	1:2:4	12. 19	6. 12	6. 16	7. 5	3	U 17 L 17	20 20

表 6・2 (ii)

コンク リート名	試験片平均寸法と平均比重								
	圧縮試験			円板圧裂試験			点載荷圧裂試験		
	h cm	w cm	γ g/cm ³	h cm	w cm	γ g/cm ³	h cm	w cm	γ g/cm ³
A	30.0	15.0	2.31	U 14.54 L 14.89	15.02 15.02	2.29 2.33	14.54 14.86	15.03 15.03	2.29 2.32
B	30.0	15.0	2.32	U 14.65 L 14.83	15.03 15.03	2.30 2.34	14.53 14.89	15.03 15.03	2.31 2.34
C	30.0	15.0	2.26	U 14.50 L 14.86	15.03 15.04	2.24 2.29	14.42 14.87	15.05 15.05	2.22 2.27
D	30.0	15.0	2.31	U 14.68 L 14.87	14.99 15.01	2.31 2.29	14.72 14.84	15.01 15.01	2.30 2.35
E	30.0	15.0	2.30	U 14.57 L 14.86	14.99 15.00	2.28 2.33	14.62 14.86	15.00 15.01	2.27 2.33
F	30.0	15.0	2.30	U 14.31 L 14.03	15.01 15.02	2.28 2.32	14.39 14.02	15.01 15.01	2.29 2.33
G	30.0	15.0	2.29	U 14.46 L 14.01	15.02 15.02	2.27 2.30	14.39 14.90	15.00 15.00	2.26 2.31
H	30.0	15.0	2.30	U 14.72 L 14.70	15.02 15.01	2.28 2.30	14.73 14.67	15.01 15.01	2.29 2.32
I	30.0	15.0	2.30	U 14.69 L 14.81	15.01 15.02	2.28 2.33	14.69 14.81	15.01 15.02	2.29 2.31

以上の試験片の注型，養生から試験実施までの操作は各組の試験片ごとについてできるだけ条件を等しくするようにつとめた。試験片の寸法その他必要なデータをAからIまで各組毎に平均値をもって示すと表6・2 (i) および (ii) のようである。

6・3・2 試験条件

圧縮試験は島津製作所製電子管平衡式 50 t 万能試験機および東京試験機製 200 t 油圧試験機にて行なった。圧縮強さとともに，電気抵抗線クロスゲージを用いて Young 率 E および Poisson 数 m も決定した。その結果は表6・3 (iii) に示す通りである。

円板圧裂試験および点載荷圧裂試験は上述の 50 t 万能試験機を用いて行なった。図 6・5 に示すように，両者の破断面は等しく円柱の直径方向になるように载荷した。

表 6・2 (Ⅲ)

コンクリート名	弾性定数		強度			載荷板
	Young率 E 10^4Kg/cm^2	Poisson数 m	圧縮強さ S_c Kg/cm^2	圧裂強さ		
				$(St)_d$ Kg/cm^2	$(St)_{ir}$ Kg/cm^2	
A	29.02	3.80	336.1	29.59 31.01	18.11 19.41	b
B	22.90	4.61	243.9	22.76 25.44	26.58 28.80	e
C	24.42	5.18	260.7	26.26 27.72	26.45 30.09	c
D	26.02	4.21	374.2	31.07 35.18	33.40 37.49	d
E	25.65	6.22	250.4	25.27 26.91	27.05 29.61	d
F	25.81	6.22	268.6	27.90 29.31	31.66 30.96	d
G	27.07	3.77	316.7	23.18 25.42	20.17 21.62	a
H	23.09	5.87	221.9	21.87 25.45	28.74 34.04	f
I	20.59	6.40	301.0	25.40 29.27	27.35 33.14	c

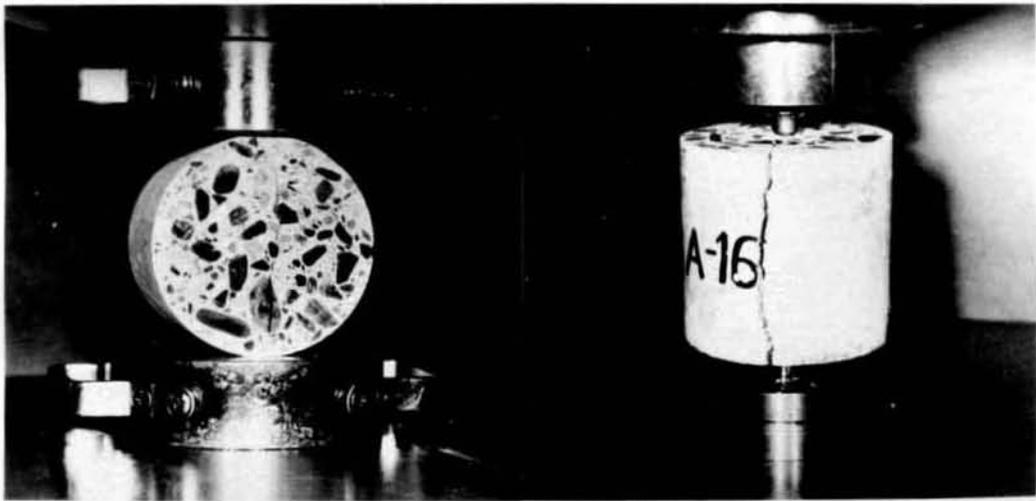


図 6・5 コンクリートの円板圧裂試験と点載荷圧裂試験

点載荷圧裂試験に用いた載荷板は、試料の高さが約 15 cm であることを考慮して図 6・6 に示すような (a) から (f) までの寸法および形状の異なる 6 種類を準備した。その特徴は、(b) は球状突起で先の岩石試験において用いたものであり、(a), (c), (e), (f) の 4 種は底面の平らな円柱形で理論解析に近い応力状態を得るためのものであり、 w_0/h が 0.1 から 0.2 までの範囲をしめる。(d) は円柱の直径が (e) に等しく、底面の直径が (c) に等しくなるように角に丸味を付けたもので、接触圧の理論からみて載荷板の縁に応力集中の生ずるのを防ぎ、等分布載荷とした理論解析にできるだけ近い応力状態を得るためのものである。

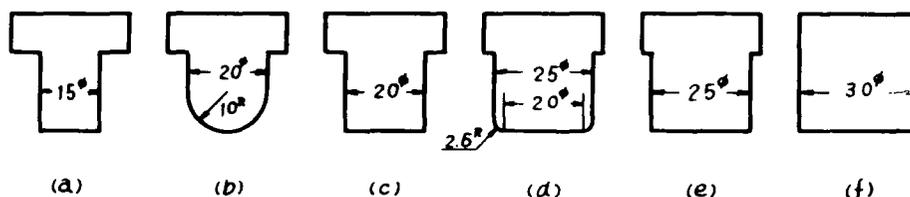


図 6・6 点載荷圧裂試験用の圧板の形状と寸法

6・3・3 検 討

点載荷圧裂試験における試験片の破壊後の載荷面の様子を示すと図 6・7 の写真のようである。いずれも上下の載荷の中心を結ぶ軸を含む縦断面を境にして 2

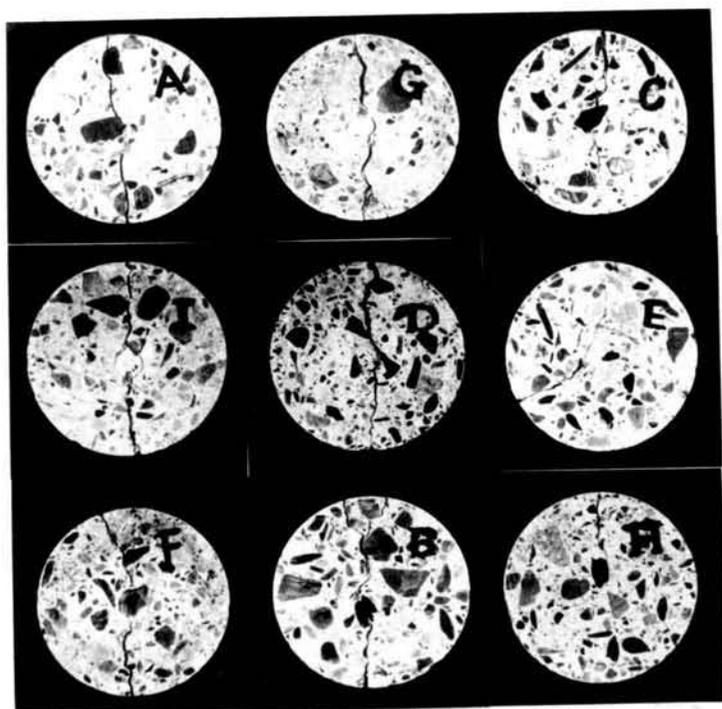


図 6・7 点載荷圧裂試験後のコンクリート試験片の載荷面

つ、あるいは載荷幅の広い場合はしばしば3つに分離破壊することが認められる。また球状突起 (b) を用いた試験片 A では岩石の場合と違ってめり込みが不均等であること。円柱平底載荷板 (a), (c), (e), (f) を用いた試験片 G, C, I, B, H ではめり込みは少ないが載荷端の応力集中のため局部的に破壊し、載荷面に円形の押し込み跡をはつきりと残すこと、および角に丸味をつけた載荷板 (d) を用いた試験片 D, E, F ではこの部分の破壊も少なく、めり込みも均一であることが認められる。

つぎに円板圧裂試験片および点載荷圧裂試験片の破断面の写真を示せば図6・8のようである。応力分布の類似性から想像されるように、両者の破断面はきわめてよく似た分離破壊を示している。点載荷圧裂試験片における載荷点近傍の圧碎圏が比較的小部分に留まっていることも、理論解析の結果この部分が3次元的封圧状態にあることより予想した通りである。なお円板圧裂試験片では破断面は

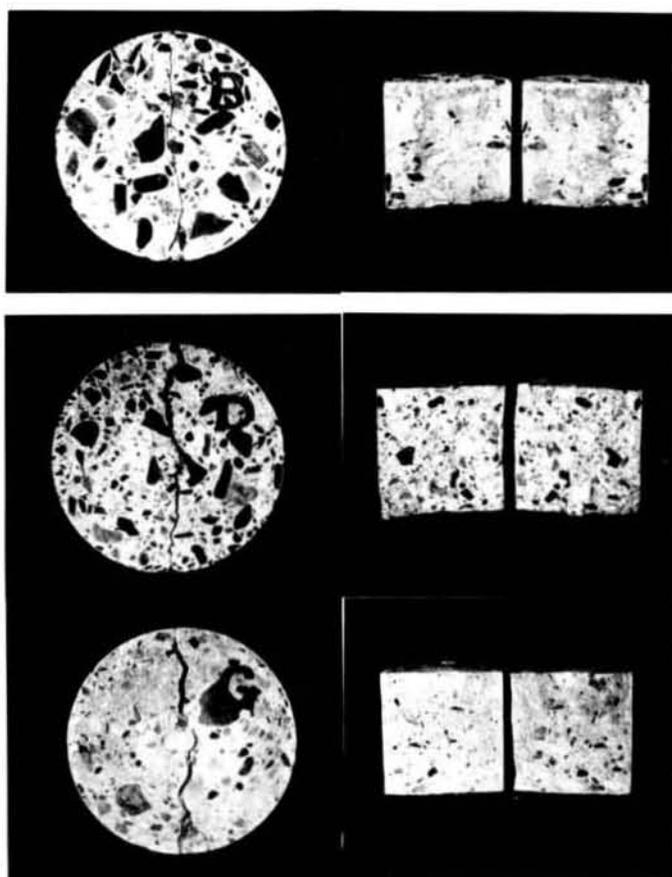


図 6・8 (a) 上段：円板圧裂試験の破断面，(b) 下 2 段：点荷重圧裂試験片の破断面

荷重方向に関連してある一つの断面に決まってしまうが，点荷重圧裂試験片では上下の荷重点を結ぶ軸を含む任意の断面が破断面になりうるという長所がある。

つぎに試験結果についてみることにする。点荷重圧裂試験による強さ $(St)_{ir}$ は w_0/h が 0.1～0.2 であるからとりあえず $k_{ir} = 1.4$ とした式 (5.26) で計算することにした。したがって $(St)_{ir}$ の平均値は円板圧裂試験による強さ

(St)d と一致するはずである。各組ごとにしかも U, L 別の両試験による強さの平均値, 標準偏差ならびに標準偏差係数を示すと表 6.3 のようである。この表よりコンクリートの点載荷圧裂試験においては, 球状突起の載荷板 (b) を用いた場合には強さの算定値の分散が大きくて実用的でないことがわかる。その点 w_0/h が 0.13 ~ 0.20 にある平底円柱載荷板 (c), (d), (e), (f) はともに良好で, なかでも角に丸味をつけた (d) は特によいことがわかる。強さの算定値の分散が少ないという点では円板圧裂試験に優るとも劣らないと言える。

表 6.3

載荷板の種類	コンクリート名	円板圧裂試験			点載荷圧裂試験			$\frac{(St)ir}{(St)d}$	
		平均強さ $(St)d$ Kg/cm ²	標準偏差 S Kg/cm ²	標準偏差係数 \bar{S}	平均強さ $(St)ir$ Kg/cm ²	標準偏差 S Kg/cm ²	標準偏差係数 \bar{S}		
(a)	U	23.18	3.006	0.1297	20.17	1.348	0.0668	0.8702	
	L	25.42	3.627	0.1427	21.62	2.795	0.1293	0.8504	
(b)	U	29.59	2.190	0.0740	18.11	1.455	0.0803	0.6119	
	L	31.01	2.670	0.0861	19.41	1.982	0.1021	0.6260	
(c)	C	U	26.26	1.583	0.0603	26.45	1.928	0.0729	1.0070
		L	27.72	3.411	0.1231	30.09	2.653	0.0882	1.0850
	I	U	25.40	3.176	0.1250	27.35	1.821	0.0666	1.0769
		L	29.27	3.472	0.1186	33.14	2.103	0.0635	1.1323
	D	U	31.07	2.540	0.0818	33.40	1.942	0.0515	1.0749
		L	35.18	2.372	0.0674	37.49	2.258	0.0601	1.0655
(d)	U	25.27	1.800	0.0712	27.05	1.322	0.0489	1.0703	
	L	26.91	2.086	0.0775	29.61	1.557	0.0526	1.1002	
(e)	F	U	27.90	2.805	0.1005	31.66	2.579	0.0814	1.1349
		L	29.31	1.986	0.0678	30.96	2.590	0.0837	1.0563
	B	U	22.76	1.392	0.0612	26.58	1.733	0.0652	1.1678
		L	25.44	1.612	0.0634	28.80	2.881	0.1000	1.1321
(f)	U	21.87	2.555	0.1168	28.74	2.568	0.0893	1.3142	
	L	25.45	1.833	0.0720	34.04	2.083	0.0612	1.3377	

円板圧裂試験によって求めた強さの各組ごとのしかも U, L 別の平均値 $(St)d$, すなわち引張強さに等しいと見なせる値に対する, 点載荷圧裂試験により求めた強さ $(St)ir$ の比 $(St)ir/(St)d$ を縦軸にとり, w_0/h を横軸にとって $(St)ir$

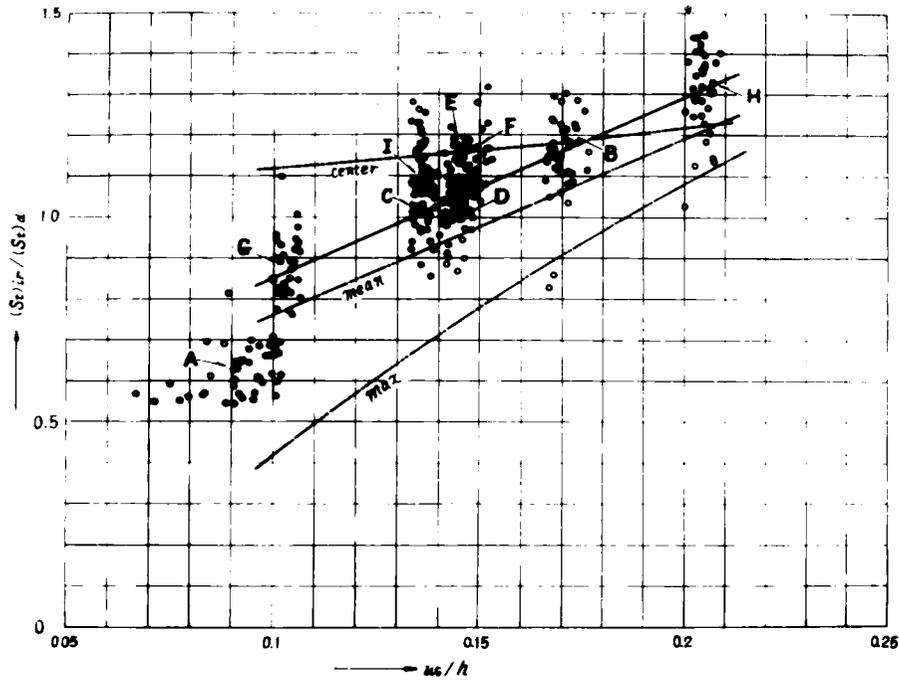


図 6・9 コンクリートの点載荷圧裂試験の結果

のすべてを図示すると図 6・9 のようである。この図で $(St)_{ir}/(\overline{St})_d = 1$ の線上にあれば両者の強さは等しく、1 より大きければ点載荷圧裂試験による強さが大きく、1 より小さければ小さいことを意味する。

図から、球状突起 (b) を用いた試験片 A の組を別にすると、 $w_0/h = 0.1 \sim 0.2$ の範囲で $(St)_{ir}/(\overline{St})_d$ は 0.9 から 1.3 まで変化し、 $w_0/h = 0.13$ 付近で $(St)_{ir}/(\overline{St})_d = 1$ となり両者の強さは一致することが解かる。なおこの結果から、 $w_0/h = 0.11 \sim 0.16$ の範囲の載荷板を用いて点載荷圧裂試験を行ない式 (5・26) によって計算される強さは円板圧裂試験による強さの $\pm 10\%$ の範囲内にあることが認められる。

ところで w_0/h の増加とともに $(St)_{ir}/(\overline{St})_d$ の値が少しずつ増加する傾向が見られるが、これは w_0/h によって変化する k_{ir} の値を $w_0/h = 0.1 \sim 0.2$ の範囲で平均的に $k_{ir} = 1.4$ と固定したことによるものと考えられる。たとえば

図 5・9 (b) から $m = 6$ の場合について、最大引張応力、試験片中心の引張応力あるいは平均引張応力で試験片が破壊するとして、 w_0/h の変化とともに $(St)ir / (St)d$ がどのような値をとるかを示すと図 6・9 のそれぞれ max, centre, mean と付記した曲線のようなものである。 w_0/h の増加とともに試験結果がゆるやかな右上りの曲線を描くことがうなずける。さらにいえば、この試験結果は平均的な引張応力で試験片が破壊するとした場合の曲線に近いといえる。

以上をまとめると、理論的検討の項で挙げた w_0/h が 0.3 より小さいことによる影響は w_0/h を 0.11 以上にとれば実用上無視し得ること、式 (5・25) を簡略化することによって生ずることを心配された強さの分散の点でも円板圧裂試験に劣らないこと、したがって、 $w_0/h = 0.11 \sim 0.16$ の範囲で角に丸味をつけた平底円柱形の載荷板を用いて点載荷圧裂試験を行ない、 $k_{ir} = 1.4$ とした式 (5・26) から強さを計算すれば、円板圧裂試験によるのと等しい強さを決定できるといえる。

6・4 可搬式の不規則塊圧裂試験機

点載荷圧裂試験は、試験片として採取したままの岩石を用いて強さを決定できるから現場試験に応用することが考えられる。適当な容量の可搬式試験機を製作し、鉱山や土木工事の現場へ持込み、その場で岩石やコンクリートの強さが手軽に知り得たら大変便利であろうと思われる。

6・4・1 構造および材質

可搬式の不規則塊圧裂試験機の製作に当っては、軽量で、堅固で、適当な容量をもち、取扱いが簡単であることを条件として考慮し、さらに製作もできるだけ簡単であるように工夫し、結局図 6・10 に示すような構造の試験機を設計・試作した。その構造上の特徴は、全体をフレームとジャッキとからなる加圧部と手動の油圧ポンプ部とに分けて持運びを容易にし、両者を簡単に結合したり取外したりできるようにしたことである。

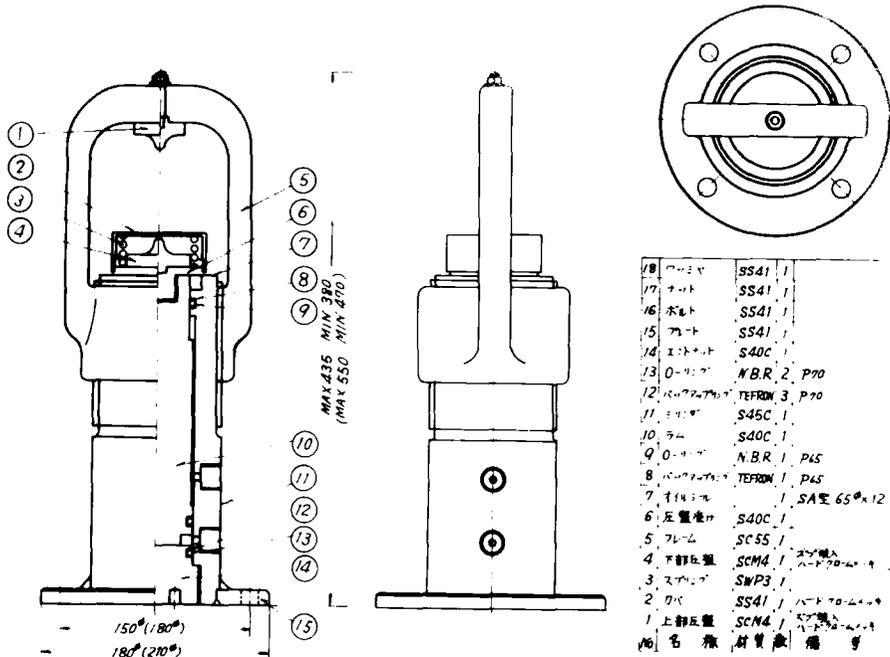


図 6・10 可搬式の点載荷圧裂試験機の加圧部

材質については次のようである。引張および曲げ応力の作用するフレームには、鑄造することも考えて SC-55 を用い、油圧によって強い引張応力の生ずるシリンダーには S-45C を用いることにした。圧縮応力の生ずるラムには S-40C、ネジにせん断応力の生ずるエンドナットにも同じく S-40C を用いることにした。また最も大きな圧縮応力の生ずる圧板には SCM4 を用いることにした。その他の部品には SS41 を使用することにした。

6・4・2 設計のための基礎資料

a) 試料寸法： 不規則塊状の試験片を用いた点載荷圧裂試験による岩石の強さの算定式は式(5・26)である。

$$(St)ir = 1.4 \times \frac{2P}{\pi h^2} \cong 0.9 \times \frac{P}{h^2} \quad (5 \cdot 26)$$

ところで岩石やコンクリートの引張強さは普通 $10 \sim 150 \text{ kg/cm}^2$ である。したがってこの範囲では総荷重 P と載荷高さ h とは図 6・11 に示すような関係にある。また装置の重量は一人で持ち運べるようにするために約 30 kg まででなければならないからジャッキの容量は最大 20 t 程度に制限される。したがって載荷高さ h を引張強さの大きなものに対して決めることにすると、 $(St)_{ir} = 125 \text{ kg/cm}^2$ として、 $P = 20 \text{ t}$ から $h = 12 \text{ cm}$ が得られる。試料の大きさとしてはこの程度で充分だと考えられるので、高さ 12 cm の試料がはさめるよ

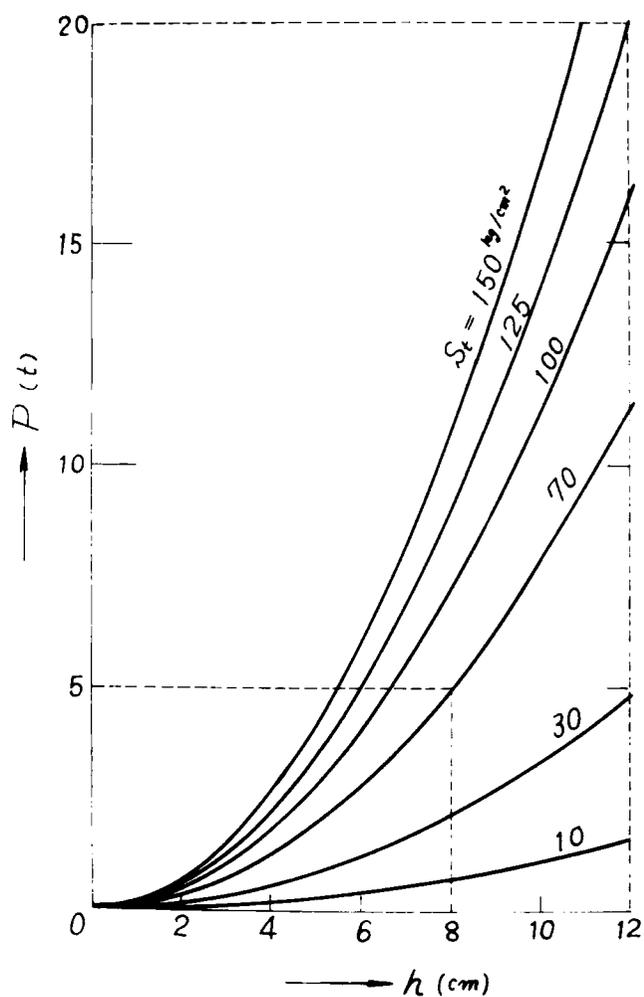


図 6・11 試験片の高さと総荷重の関係

うにフレームの設計を行なうことにした。したがって引張強さが 125 kg/cm^2 より強い岩石はジャッキの容量から、当然これより小さい試料でなければならず、 125 kg/cm^2 より弱い岩石についても、ジャッキの容量には余裕があるがフレームによる制限から最大寸法が 12 cm どまりということになる。

b) 圧力計：この装置の加圧部は油圧作動であるから、荷重はブルドン管圧力計で測ることにした。ところがブルドン管圧力計の読みは最小目盛以下の値は不正確である。JIS規格によればブルドン管圧力計に許される誤差は最小目盛の $\pm 1/2$ とされている。したがって今、 100 目盛が刻まれているゲージを用いることにすると、ゲージ容量の $\pm 1/200$ の誤差があることになる。すなわち 20 t 圧力計では 100 kg の誤差を生ずる。したがってもし破壊荷重が 100 kg であれば 100% の誤差となる。しかし 1 t 圧力計を使用すれば破壊荷重が 100 kg であっても誤差は $5/100 = 5\%$ に止まる。そこで許容誤差を 5% とすると、 20 t 圧力計では破壊荷重 2 t で誤差 5% となり、 5 t 圧力計では破壊荷重 0.5 t で誤差 5% となる。したがって破壊荷重が $100 \text{ kg} \sim 20 \text{ t}$ までのときは圧力計の容量としては 1 t 、 5 t 、 20 t の3種類を用いれば良いことがわかる。

また比較的小さい試料を選べば、最大容量 5 t の装置でも十分用を足すことが考えられるので、 20 t 容量試験機と 5 t 容量試験機の2種類を製作することにし、 20 t 容量試験機には大荷重用 20 t および小荷重用 5 t の圧力計を、 5 t 容量試験機には大荷重用 5 t および小荷重用 1 t の圧力計をそれぞれつけることにした。

c) フレームのストローク：引張強さが 100 kg/cm^2 以下の岩石を考えると、式(5・26)より h が 2.0 cm 以下では破壊荷重は 0.5 t 以下となる。したがって小荷重用として 5 t 圧力計を持つ 20 t 容量試験機では、破壊荷重 0.5 t で誤差が 5% となるから、上下板間の最小間隔は 2.0 cm で十分である。同様に、 5 t 容量試験機(小荷重用として 1 t 圧力計を持つ)においては最小間隔 1.0 cm で十分である。一方この場合の上下板間の最大間隔は、 20 t 容量試験機において 12 cm と決定したのと同様にして、 8 cm 程度が適当であると判断さ

れる。

結局、20 t 容量試験機の上下板間の距離は 2.0 ~ 12.0 cm の範囲に調節できるようにすれば良く、フレームのストロークは 10.0 cm となる。5 t 容量試験機の上下板間の距離は 1.0 ~ 8.0 cm の範囲に調節できるようにすれば良く、フレームのストロークは 7.0 cm となる。しかしラム自身に 2.0 cm のストロークがあるから、フレームストロークは 20 t 容量のそれは 8.0 cm, 5 t 容量のそれは 5.5 cm にとれば十分である。このようにしてフレームの大きさと、シリンダーに切るフレームストローク調節用のネジの長さを決定した。

6.4.3 設 計

a) 5 t 容量試験機的设计： 圧板の形状は平底の円柱形で、できれば円周部に丸味をつけたものが良く、円柱直径は w_0/h が 0.1 ~ 0.2 になるようにすれば

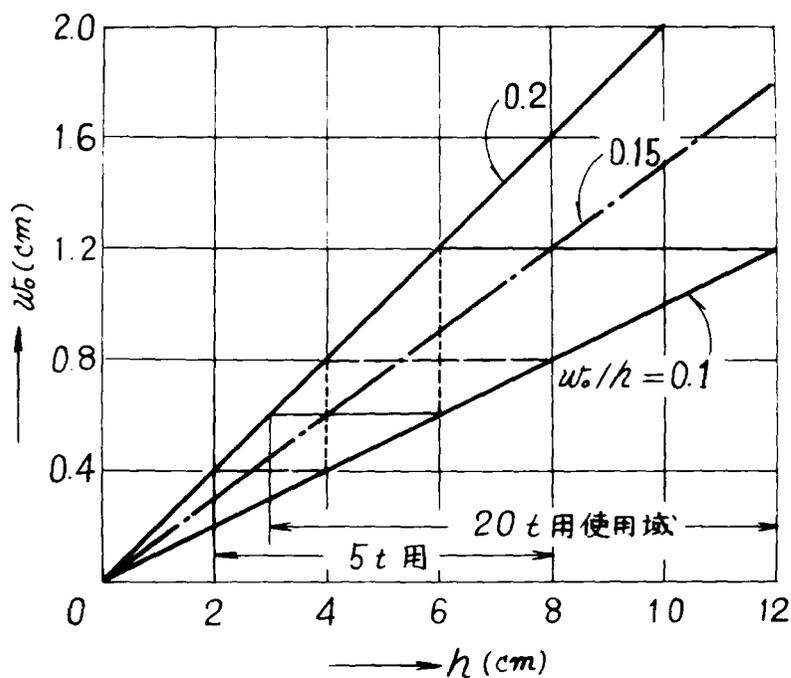


図 6.12

良い結果を得られることは前節に見た通りである。したがって 5 t 用では岩石の高さ h が 2.0 ~ 8.0 cm であるから、図 6・12 を参照して $w_0 = 4$ mm と 8 mm の 2 種類の圧板を準備しておけば良いことがわかる。あるいは 5 t 容量試験機で試験する岩石は普通 h が 3 ~ 6 cm であるから $w_0 = 6$ mm の圧板だけを準備しておくことも考えられる。また図 6・13 に示すように圧板がフレーム内に占める高さは 22 mm と小さくするとともに上部圧板はこれを受けるフレームからはみ出る部分を切り取ることにした。

スプリングは最も重い岩石の重量で 4 kg 程度であるから、これを載せたときのたわみ δ を 2 mm 程度に収めるように設計した。すなわちスプリングのばね定数 k は次式より、

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{d^4 G}{64 n R}$$

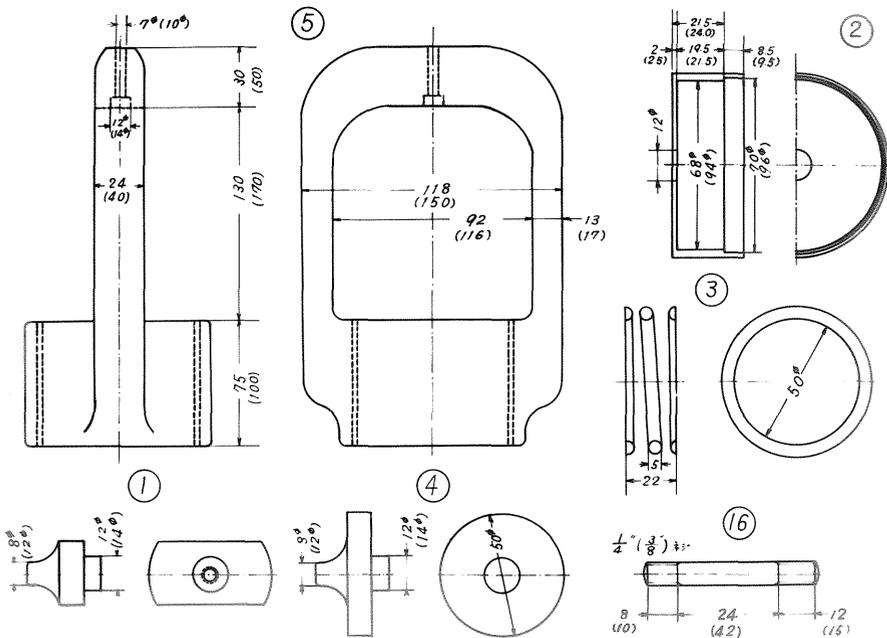


図 6・13 部品図

剛性率 $G = 8300 \text{ kg/mm}^2$, スプリングの半径 $R = 50 \text{ mm}$, 線径 $d = 5 \text{ mm}$, 巻数 $n = 2$ として, $k = 2.1 \text{ kg/mm}$ と決定した。

フレームの内径は, 圧板受けの外周部の厚みを 6 mm として, $130 \text{ mm} (= 80 + 2 \times 2 + 6)$ となる。また安全率を 4 にとって, フレームの断面積は $364 \text{ mm}^2 (= (5000/55) \times 4)$ となる。

油圧回路は図 6・14 に示すようである。

結局, 5 t 容量試験機の仕様は次の通りである。

耐 力	5 t
油圧シリンダー・ストローク	20 mm
5 t 時の油圧力	177 kg/cm ²
機高の最大	435 mm
機高の最小	380 mm

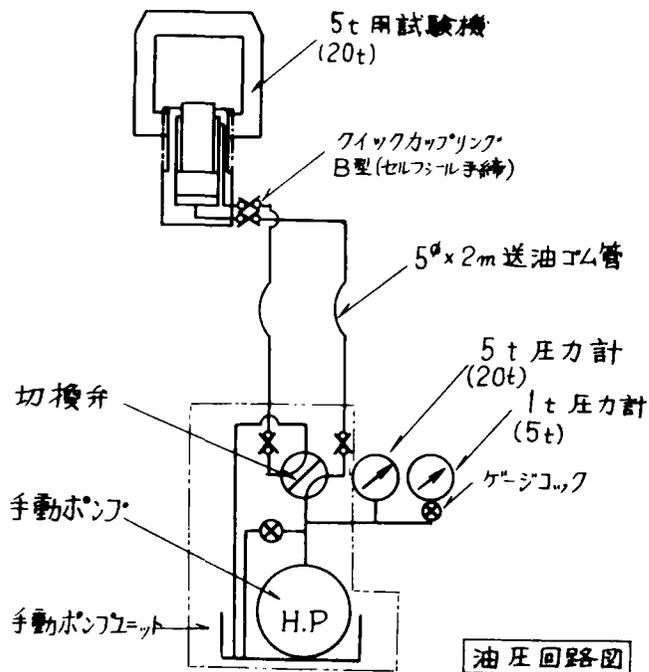


図 6・14 油圧回路図

フレームストローク	55 mm
加圧部の重量	21 kg
ポンプ部の重量	30 kg

b) 20 t 容量試験機の設計： 圧板は5 t 容量試験機の項で述べたのと同様にして，試験片の高さ h が3 cm～12 cm であるから $w_0 = 12$ mm と6 mm の2種類，あるいは h が5 cm～10 cm の岩石を対象にすれば $w_0 = 10$ mm だけを準備すれば良いことになる。

フレームの内りは170 mm (= 120 + 22 × 2 + 6)，フレームの断面積は1455 mm² (= (20000/55) × 4) である。

部品図は先の5 t 容量試験機の場合と同じ図6・13 であり，() 内の数字がこの場合の寸法である。油圧回路も共通で図6・14 のようである。

結局20 t 容量試験機の仕様は次の通りである。

耐 力	20 t
油圧シリンダー・ストローク	20 mm
20 t 時の油圧力	400 kg/cm ²
機高の最大	550 mm
機高の最小	470 mm
フレームストローク	80 mm
加圧部の重量	40 kg
ポンプ部の重量	30 kg

6・4・4 可搬式試験機とペレット強さ試験機

以上の設計を基に製作した5 t 容量試験機および20 t 容量試験機は図6・15 に示すようである。また図6・16 は，現場において岩石の強さの計算を迅速に行なうために式(5・26) の関係を図にした計算図表である。縦軸には強さ ($Stir$) (kg/cm²)，横軸には破壊荷重 P (ton)，パラメーターには試験片高さ h (cm) をとっており，それぞれの単位を使用範囲に合わせて適当に組合せる

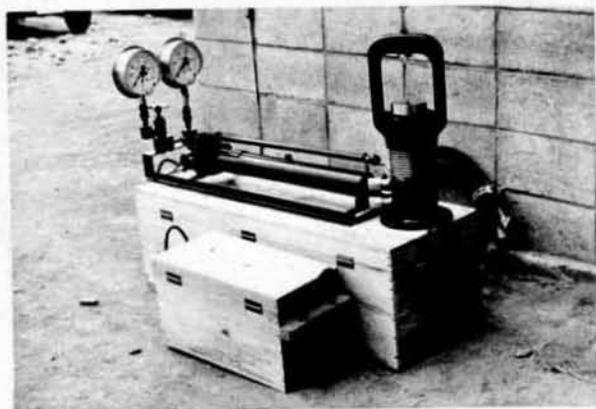


図 6・15 可換式の点载荷圧裂試験機

ことによつて5 t 用、20 t 用等の計算図表として使用できる。

最近、製鉄分野において、粉状の製鉄原料を直径 10 ~ 20 mm の粒状のペレットに焼成して用いることが盛んになってきた。この場合ペレットとしては適当な強さをもつことが必要であり、その使用を合理的に行なうためには強さを知る必要がある。ペレットの強さの指標としては、ペレットを2つの平板の間に挟んで圧縮し、破壊した時の総荷重をもつて圧壊強さとする方法が一般に行なわれている。しかしペレットの圧壊がその機構からみて、不規則塊状の試験片の点载荷圧裂試験による破壊と同様であることは容易に想像できる。したがつて従来の方法で試験した破壊時の総荷重をもつてペレットの強さの指標とするよりも、点载荷圧裂試験を行なつて式(5・26)で決定される強さを用いる方が目的にかなつたよい結果を与えるものと考えられる。このような理由から試作したのが、図6・17に示すようなペレットの圧壊強さ試験機である。

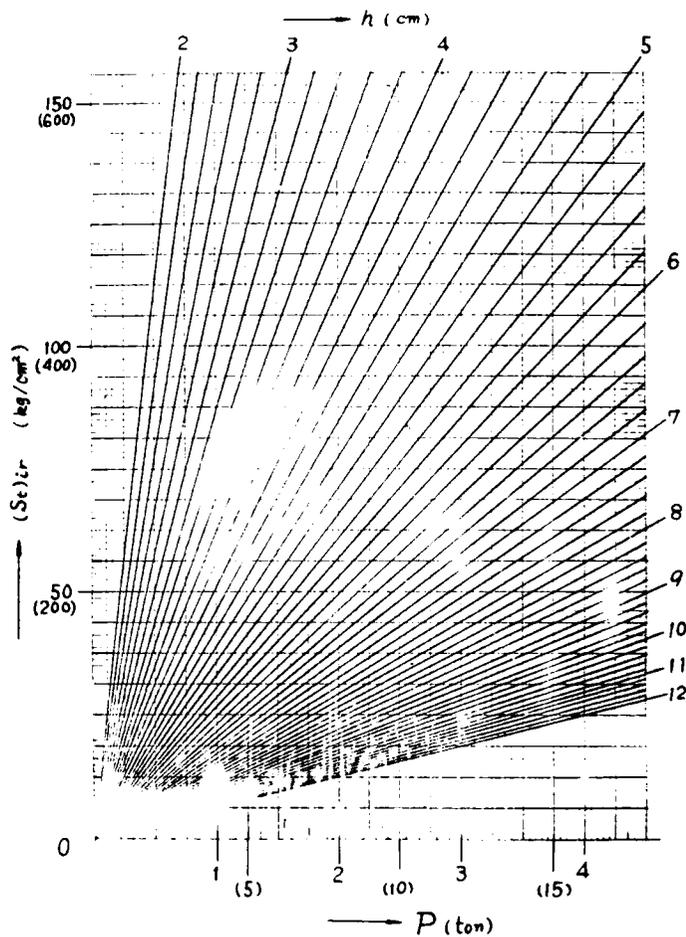


図 6・16 点載荷圧裂試験による強さの計算図表

この試験機の構造の特徴は次のようである。ペレットの寸法が普通 10～20 mm 程度であることから、圧板は写真に示すように直径 3 mm の円柱平底の角に丸味をつけた突起状とした。またペレットをはさみ易いように、中心に 8 mm の孔をあけた鉄板を弱いバネで支えたペレット受台を用いることにした。さらに上下の圧板の中心軸を合わせるために、上方の圧板は下方の圧板と中心軸を合せたシリンダー内を上下するようにした。この装置は同図に示すように全体を油圧試

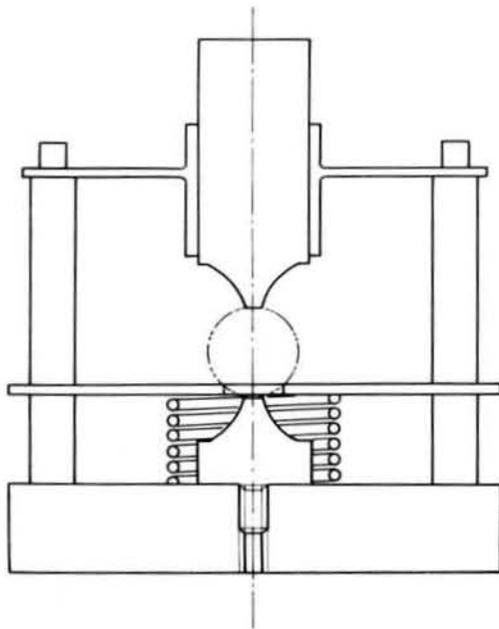


図 6・17 ペレットの圧壊強さの試験装置

試験機の平行板の間に置き加圧するようになっている。

6・5 結 言

本章ではまず、種々の岩石について、円板圧裂試験と不規則塊の点載荷圧裂試験とを実施し、両者による強さを比較した。その結果、後者の試験では式(5・26)を用いて決定した強さは、円板圧裂試験によるそれとよく一致することが認められた。

つぎに多数のコンクリート試験片を準備し、載荷板の形状と式(5・26)の適用性を詳しく検討した。その結果、点載荷圧裂試験においては球面突起状圧板は不適であり、平面底円柱形圧板で角に丸味をつけたものが適当であり、載荷板の直径と試験片の高さの比 w_0/h を 0.13 ~ 0.15 の範囲にとれば式(5・26)

を用いて円板圧裂試験におけると同程度の精度で強さを決定できることがわかった。

さらに、不規則塊圧裂試験を現場で手軽に実施できるように、容量5tおよび20tの可搬式の試験機を開発した。

参 考 文 献

- 1) 平松良雄，岡 行俊，木山英郎：非整形試験片による岩石の引張強さの迅速試験法，日本鉱業会誌81巻932号，昭和40年12月，
1024頁～1030頁。
- 2) 岡 行俊，平松良雄，木山英郎：コンクリートの点載荷圧裂試験による引張強度の決定，材料学会第17期総会講演要旨集，昭和43年5月。
- 3) 平松良雄，岡 行俊，木山英郎：コンクリートの点載荷圧裂試験による引張強度の決定。（材料投稿中）。

第7章 荷重の不均等分布と摩擦拘束力の影響^{1,2,3)}

7・1 結 言

光弾性実験において、模型板に鋼製の圧板を用いて載荷するとき圧板の真下の応力分布が圧板の両端で強く中央部で低い凹型の不均等分布をなすことはよく見かける現象である。これまで述べてきた各種の圧裂試験においても圧板と岩石試験片との接触面にはこのような不均等に分布する応力が生じているものと思われる。そこでこの章では、角板圧裂試験および点載荷圧裂試験について、このような接触圧の分布を考慮した場合の試験片内の応力を弾性理論を用いて解析し、その結果を基にさきの理論的ならびに実験的検討の結果の再検討を行なうことにする。

7・2 角板圧裂試験の検討

7・2・1 接触面の圧力分布の仮定

角板圧裂試験において、岩石表面の変形が圧板底の平面に従わなければならないことにより、この接触面を通じて岩石試験片に作用する荷重は等分布ではなくなる。たとえば「弾性半無限平板と弾性平板との接触圧」については大久保肇⁴⁾の解析がある。しかし角板圧裂試験においては岩石の young 率 ($20 \sim 80 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$) に比べて圧板の young 率 ($210 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$) は3～10倍も大きいので、この場合の荷重の分布は Sadowsky⁵⁾ による「弾性無限平板への剛性平面の押付け」の場合の解析結果を用いる。

Sadowsky によると弾性半無限板に剛性の平底ポンチ(幅 w_0) を総荷重 P で押付けるとき接触面に生ずる圧力 $p(x)$ は次式で示される。

$$p(x) = -\frac{2P}{\pi w_0} \frac{1}{\sqrt{1 - (2x/w_0)^2}}$$

$$= -\bar{p} w_0 / \pi \int \sqrt{(w_0/2)^2 - x^2} \quad (7.1)$$

$$\left(-\frac{w_0}{2} \leq x \leq \frac{w_0}{2} \right)$$

ここで、 \bar{p} は平均荷重 P/w_0 であって、さきの等分布荷重の場合の p に対応する。ところで角板圧裂試験においては、図 7.1 (a) に示すように試験片の大きさは有限であり、しかも荷重は上下から作用することになるが、Hertz による接触圧を考慮した半無限板内の応力状態そのものを利用するのではなく、荷重の分布のみを式 (7.1) が与えるものと仮定し、これを境界条件として角板試験片内の応力状態を解析しようとするのであるから、許され得る仮定だと思ふ。

以上は角板の表面に垂直な方向に作用する荷重の分布についてであるが、これと同時に接触面においては角板試験片の水平方向の弾性変形を圧板の剛性が拘束するところの摩擦拘束力の作用が考えられる。この摩擦力に対する厳密な理論解

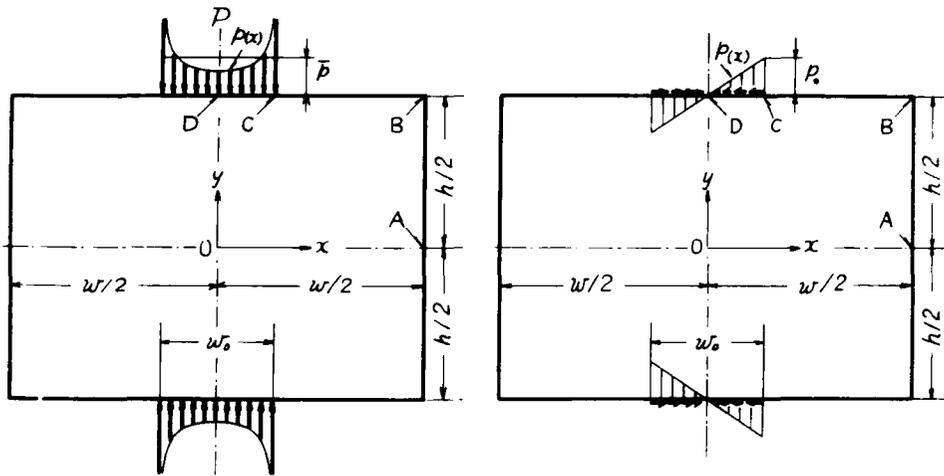


図 7.1 角板圧裂試験における (a) 左側：不均等分布荷重および (b) 右側：摩擦拘束力の模式図

折は条件が複雑であり、解析が困難であるので、つぎのようなある程度定性的な仮定のもとに解析を試みることにした。すなわち、上述の $p(x)$ の分布から考えて、圧板と岩石試験片の接触面に作用する摩擦力 $p_{\tau}(x)$ は、図 7・1 (b) に示すようにその最大値が p_0 で、圧板幅 w_0 全域にわたって三角分布するものと仮定する。

$$p_{\tau}(x) = -2 p_0 x / w_0 \quad \left(-\frac{w_0}{2} \leq x \leq \frac{w_0}{2} \right) \quad (7.2)$$

まず、この摩擦力（せん断力）のみが作用するときの角板試験片内の応力分布を解析する。つぎに岩石と圧板との間の摩擦係数を μ とした場合については、 $p_{\tau}(x)$ の最大値を μp_0 と見なして上に求めた各応力成分を μ 倍した値を摩擦拘束力により生ずる応力成分とみなすことにするのである。

7・2・2 数学解析

ここでは、3・4・1項で述べた数学解析法を用いて不均等分布荷重および摩擦拘束力を考慮した場合の試験片内の応力の解析について述べる。

a) $p(x)$ の作用する場合

この場合は、等分布荷重の場合と同様に境界条件は式(3・20)で表わされる。したがって各応力成分は式(3・34)で表わされ、この式の係数は式(3・32)で示される多元連立一次方程式を解いて決定される。しかし式(3・32)の a_0 、 a_m が等分布荷重の場合は式(3・34)で与えられたのが、いまの場合は式(7・1)の $p(x)$ を Fourier 展開した次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{w} \int_{-w_0/2}^{w_0/2} p(x) dx \\ a_m &= \frac{2}{w} \int_{-w_0/2}^{w_0/2} p(x) \cos \frac{2m\pi}{w} x dx \end{aligned} \quad (7.3)$$

ところで式(7・3)はただ積分であり、そのために連立方程式(3・32)の計算は相当繁雑となる。そこで式(7・1)の $p(x)$ を w の多項式に展開して計

算することを試みたが、電子計算機の容量からくる制限のため十分な精度が得られなかった。したがってこの場合の応力解析は後述する数値解析法に依ることにした。

b) $p_\tau(x)$ の作用する場合

この場合、図 7・1 (b) に示される境界条件は 3・4・1 項の (2) ii, すなわち次式で表わされる。

$$x = \pm w/2 \quad \text{で,} \quad \tau_{xy} = 0 \quad (7.4 a)$$

$$\sigma_x = 0 \quad (7.4 b)$$

$$y = \pm h/2 \quad \text{で,} \quad \tau_{xy} = \pm \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sin \beta_m x \quad (7.4 c)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (7.4 d)$$

上式の d_m, β_m は式 (7・2) の $p_\tau(x)$ を Fourier 展開することによって次のように求まる。

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_{y=\pm h/2} &= \pm \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{2 p_0}{m \pi} \left(\cos \frac{w_0}{w} m \pi \right. \\ &\quad \left. - \frac{w}{m \pi w_0} \sin \frac{w_0}{w} m \pi \right) \sin \frac{2 m \pi}{w} x \end{aligned} \quad (7.5)$$

したがって、

$$d_m = -\frac{2 p_0}{m \pi} \left(\cos \frac{w_0}{w} m \pi - \frac{w}{m \pi w_0} \sin \frac{w_0}{w} m \pi \right) \quad (7.6)$$

$$\beta_m = \frac{2 m \pi}{w}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.7)$$

このときの ϕ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{m=1}^{\infty} \cos \beta_m x \left[A_m'' \cosh \beta_m y + D_m'' y \sinh \beta_m y \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos \delta_n y \left[A_n''' \cosh \delta_n x + D_n''' x \sinh \delta_n x \right] \end{aligned} \quad (7.8)$$

また応力成分は次式のようなになる。

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \cos \beta_m x \left[A_m'' \beta_m^2 \cosh \beta_m y + D_m'' \beta_m (2 \cosh \beta_m y \right. \\
&\quad \left. + \beta_m y \sinh \beta_m y) \right] \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 \cos \delta_n y \left[A_n''' \cosh \delta_n x + D_n''' x \sinh \delta_n x \right] \\
\sigma_y &= - \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 \cos \beta_m x \left[A_m'' \cosh \beta_m y + D_m'' y \sinh \beta_m y \right] \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \delta_n y \left[A_n''' \delta_n^2 \cosh \delta_n x + D_n''' \delta_n (2 \cosh \delta_n x \right. \\
&\quad \left. + \delta_n x \sinh \delta_n x) \right] \\
\tau_{xy} &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin \beta_m x \left[A_m'' \beta_m \sinh \beta_m y + D_m'' (\sinh \beta_m y \right. \\
&\quad \left. + \beta_m y \cosh \beta_m y) \right] \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin \delta_n y \left[A_n''' \delta_n \sinh \delta_n x + D_n''' (\sinh \delta_n x \right. \\
&\quad \left. + \delta_n x \cosh \delta_n x) \right] \tag{7.9}
\end{aligned}$$

境界条件を考慮すると δ_n は次式のようになる。

$$\delta_n = (2n - 1) \pi / 2h, \quad n = 1, 2, \dots \tag{7.10}$$

以下の解析は 3.4.1 項で述べたのと同様の手法であるので簡単にその大筋だけを示すことにする。

境界条件式 (7.4) を用いて任意定数 A_m'' , D_m'' , A_n''' , D_n''' の間に次の関係を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{A_n'''}{\sinh(\delta_n w/2) + (\delta_n w/2) \cosh(\delta_n w/2)} \\
&= \frac{-D_n'''}{\delta_n \sinh(\delta_n w/2)} = \frac{C_n}{\delta_n^2 \Delta_n}
\end{aligned}$$

$$\frac{A_m''}{(h/2) \sinh(\beta_m h/2)}$$

$$= \frac{-D_m''}{\cosh(\beta_m h/2)} = \frac{A_m}{\beta_m \xi_m}$$

ただし,

$$\Delta_n = \delta_n w/2 + \cosh \delta_n w/2 \cdot \sinh \delta_n w/2$$

$$\xi_m = \beta_m h/2 + \cosh \beta_m h/2 \cdot \sinh \beta_m h/2 \quad (7 \cdot 11)$$

また, ここで新しく任意定数として用いた A_m, C_n の間には次の関係がある。

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m Q_{mn} - C_n = 0 \quad (7 \cdot 12)$$

$$-A_m + \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_{nm} = \frac{-2 p_0}{m \pi} (-1)^m$$

ただし,

$$Q_{mn} = \frac{4(-1)^{m+n} \delta_n^3 \cosh^2(\beta_m h/2)}{(\beta_m^2 + \delta_n^2)^2 (h/2) \xi_m},$$

$$R_{nm} = \frac{4(-1)^{n+m} \beta_m \delta_n^2 \sinh^2(\delta_n w/2)}{(\beta_m^2 + \delta_n^2)^2 (w/2) \Delta_n}.$$

結局, 問題は A_m, C_n に関する多元連立一次方程式 (7・12) を解けばよいことになる。

各応力成分は上に求まった A_m, C_n を用いて次式のように求まる。

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\xi_m} \cos \beta_m x \{ (\beta_m h/2 \sinh \beta_m h/2$$

$$- 2 \cosh \beta_m h/2) \cosh \beta_m y$$

$$- \cosh \beta_m h/2 \cdot \beta_m y \sinh \beta_m y \}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{A_n} \cos \delta_n y \{ (\sinh \delta_n w/2 \\
& \quad + \delta_n w/2 \cosh \delta_n w/2) \cosh \delta_n x \\
& \quad - \sinh \delta_n w/2 \cdot \delta_n x \sinh \delta_n x \} \\
\sigma_y = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\xi_m} \cos \beta_m x \{ \beta_m h/2 \sinh \beta_m h/2 \cdot \cosh \beta_m y \\
& \quad - \cosh \beta_m h/2 \cdot \beta_m y \sinh \beta_m y \} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{A_n} \cos \delta_n y \{ (\delta_n w/2 \cosh \delta_n w/2 \\
& \quad - \sinh \delta_n w/2) \cosh \delta_n x \\
& \quad - \sinh \delta_n w/2 \cdot \delta_n x \cdot \sinh \delta_n x \} \\
\tau_{xy} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\xi_m} \sin \beta_m x \{ (\beta_m h/2 \cdot \sinh \beta_m h/2 \\
& \quad - \cosh \beta_m h/2) \sinh \beta_m y \\
& \quad - \beta_m y \sinh \beta_m h/2 \cosh \beta_m y \} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{A_n} \sin \delta_n y \{ \delta_n w/2 \cosh \delta_n w/2 \sinh \delta_n x \\
& \quad - \delta_n x \sinh \delta_n w/2 \cdot \cosh \delta_n x \} \tag{7.13}
\end{aligned}$$

7.2.3 数値解析

ここでは、3.4.2項で述べた数値解析法を用いて接触圧を考慮した場合の試験片内の応力を解析することにする。とくに等分布荷重の場合と異なるのは境界条件であるからそれについて以下に記すことにする。

a) $p(x)$ の作用する場合

この場合の境界上の $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$ および ϕ の値を求めると次のように

なる。

\overline{AB} および \overline{BC} 上では，等分布荷重の場合と同様，

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi = 0$$

である。

\overline{CD} 上では， $\bar{X} = 0$ ， $\bar{Y} = p(x)$ ， $ds = -dx$ であるから，式(7.1)の $p(x)$ を用いて，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\int -\bar{Y} ds \\ &= -\int p(x)(-dx) \\ &= -\int \frac{\bar{p}w_0}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{w_0}{2}\right)^2 - x^2}} \\ &= -\bar{p} \frac{w_0}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{2x}{w_0} \right) + C_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \int \bar{X} ds = C_2$$

点 C における $\partial\phi/\partial x$ および $\partial\phi/\partial y$ の連続性から $C_1 = C_2 = 0$ となる。

したがって，

$$\begin{aligned} \phi &= \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \\ &= -\int \bar{p} \frac{w_0}{\pi} \sin^{-1} \frac{2x}{w_0} dx \\ &= -\bar{p} \frac{w_0}{2\pi} \left\{ \frac{2x}{w_0} \sin \left(\frac{2x}{w_0} \right) + \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{w_0} \right)^2} \right\} + C_3 \end{aligned}$$

となる。また点 C における ϕ の連続性から， $C_3 = 0$ である。

ところで，上式の ϕ を用いて数値計算で再現される $p(x)$ は，たとえば $w_0/h = 0.3$ の場合に格子間隔 δ を $h/40$ に取ると図 7.2 の点線のようなものである。

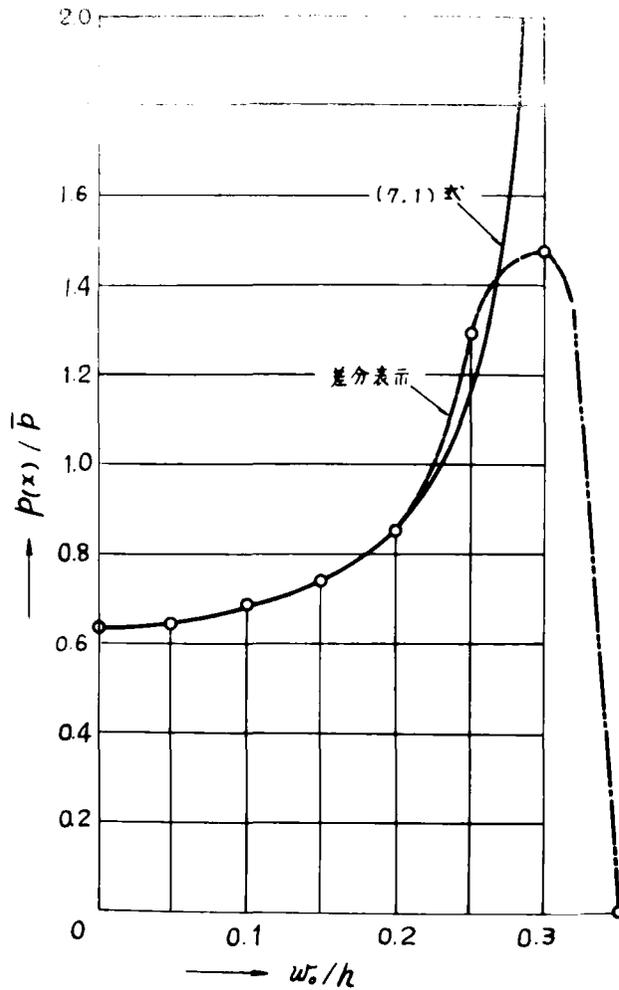


図 7・2 角板圧裂試験における不均等分布荷重

一方式(7・1)で与えられる $p(x)$ は図の実線のようなものである。もちろん格子間隔を小さくしてゆけば、点線は次第に実線に近い曲線になるはずである。しかし理論式による $p(x)$ は $x = \pm w_0/2$ すなわち圧板の両端で無限大となるが、実際の岩石試験片ではこの部分は塑性変形もしくは部分的な破壊を起こして、 $p(x)$ の分布は数値解析の場合の点線に近い有限の値に落ち着くものと思われるからこの程度で充分であると考えられる。

b) $p_T(x)$ の作用する場合

図 7・1 (b) のような $p_T(x)$ が作用する場合の境界条件は次のようである。

\overline{AB} および \overline{BC} では、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi = 0 .$$

\overline{CD} 上では、 $\bar{X} = p_T(x)$, $\bar{Y} = 0$, $ds = -dx$ であるから式 (7・2) の $p_T(x)$ を用いて、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \int \bar{Y} ds = C_1 ,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \int \bar{X} ds \\ &= \int p_T(x)(-dx) \\ &= \frac{p_0 x^2}{w_0} + C_2 \end{aligned}$$

であり、点 C における $\partial \phi / \partial x$ および $\partial \phi / \partial y$ の連続性から、 $C_1 = C_2 = 0$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} \phi &= y \frac{\partial \phi}{\partial y} - \int y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} dx \\ &= C_3 . \end{aligned}$$

点 C における ϕ の連続性から $C_3 = 0$ となる。

7・2・4 応力分布

a) $p(x)$ の作用する場合

角板試験片の横と縦の比 w/h が 1.0 , 1.5 および 2.0 のそれぞれについて、載荷巾 w_0/h が 0.1 , 0.2 , …… , 0.5 の場合の試験片内の応力を前項の数値解析法により電子計算機を用いて計算した。

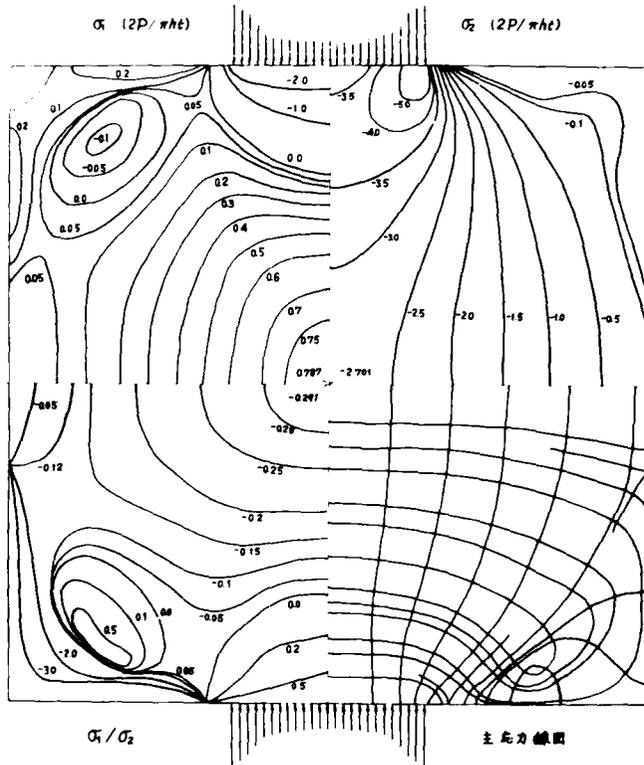


図 7.3 不均等分布荷重を受けた角板試験片内の σ_1 , σ_2 と主応力線図 ($w/h = 1$, $w_0/h = 0.3$)

このときの試験片内の応力分布の一例として $w/h = 1$, $w_0/h = 0.3$ の場合の σ_1 , σ_2 , σ_1/σ_2 および主応力線図を図示すると図 7.3 のようである。等分布荷重の場合の図 3.15 と比較するとこの場合の特徴が表われている。また、荷重の中心を結ぶ軸 (y 軸) 上の 2 つの主応力 σ_x および σ_y を図示すると図 7.4 のようである。等分布荷重の場合に較べると引張応力 σ_x はやや減少し、圧

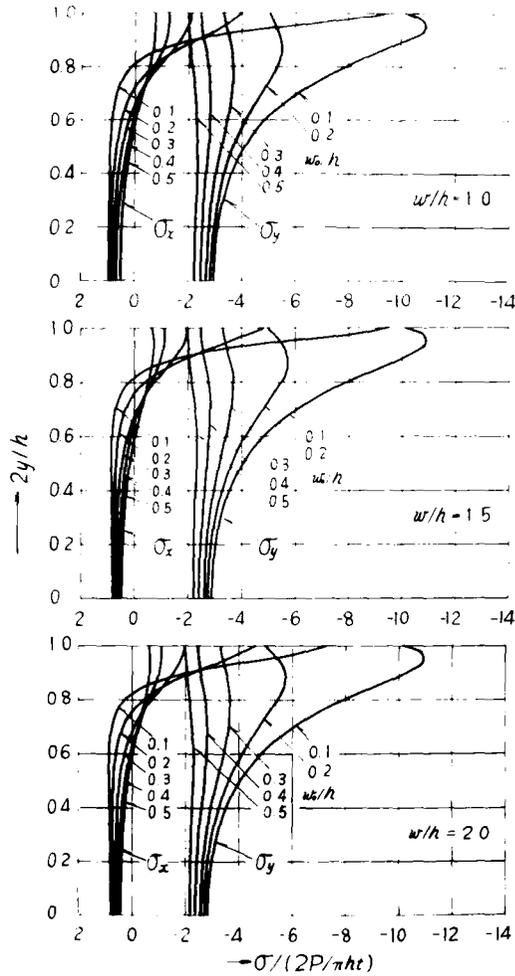


図 7・4 不均等分布荷重を受けた角板試験片内の载荷軸上の σ_x, σ_y

縮応力 σ_y も幾分減少する。とくに载荷点近傍における圧縮応力は、接触圧の分布から予想される通り、 y 軸上では大きく減少する。等分布荷重の場合と実際に近いと考えられる不均等分布荷重を考慮した場合の y 軸上の σ_x および σ_y を比較するため、一例として $w/h = 1.0$, $w_0/h = 0.3$ につき図 3・13 と図 7・4 とからこれを抜き出して描くと図 7・5 のようである。上に述べた両者の違いが明らかである。

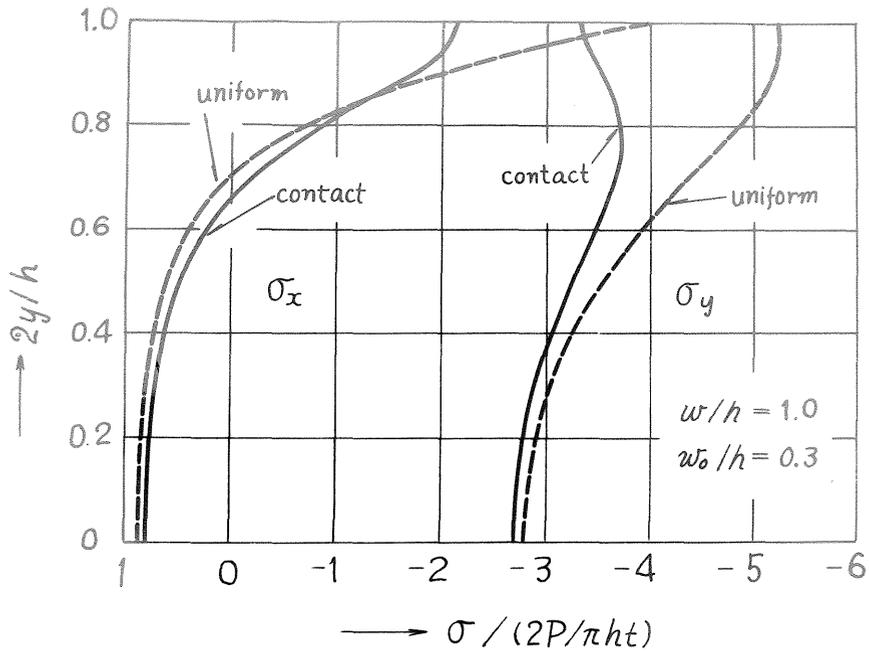


図 7.5 等分布荷重を受けた角板試験片内の σ_x , σ_y (uniform) と不均等分布荷重を受けた場合のそれ (contact) との比較

等分布荷重の場合と不均等分布荷重の場合の応力状態の差異は載荷幅 w_0/h が小さいとき少ないが, w_0/h が大きくなると著しい。また, w_0/h が大きくなるにつれて, すなわち試験片が横長くなるにつれて, この両者の差異は少なくなってくる。

b) $p_\tau(x)$ が作用する場合

$p_\tau(x)$ のみが作用する場合の試験片内の応力を電子計算機を用いて計算した結果のうち, y 軸上の 2 つの主応力 σ_x , σ_y について図示すると図 7.6 のようである。単位は分布荷重の単位と合わせるため, $P_\tau = 2 \int_0^{w_0/2} p_\tau(x) dx = w_0/2 \cdot p_0$ なる P_τ を考え, $2P_\tau/\pi ht$ にとってある。 p_0 の値は式 (7.1) の $p(x)$ の最大値 $p(w_0/2)$ をとることも考えられるが, 垂直方向の接触圧の分布 (図 7.2) を考慮すると, $p_0 \doteq 1.5 \bar{p}$ とするのが妥当であると思われる。

したがって、岩石と圧板の間の摩擦係数を μ とすると、 $p_r(x)$ の最大値は $\mu p_0 \doteq \mu \times 1.5 p_0$ と見積られる。

ところで、この摩擦力によって生ずる試験片内の応力は先の等分布荷重や不均等分布荷重による応力に比べて値は非常に小さく、また分布の形も異なる。たとえば、 y 軸上の主応力 σ_x および σ_y についてみると、図 7・6 に示すように、 $w/h = 1$ の角板では w_0/h がいかなる値でも、 σ_x は試験片中央において引張応力であり、載荷板に近づくにつれて徐々に圧縮応力に転じ、載荷板付近では大

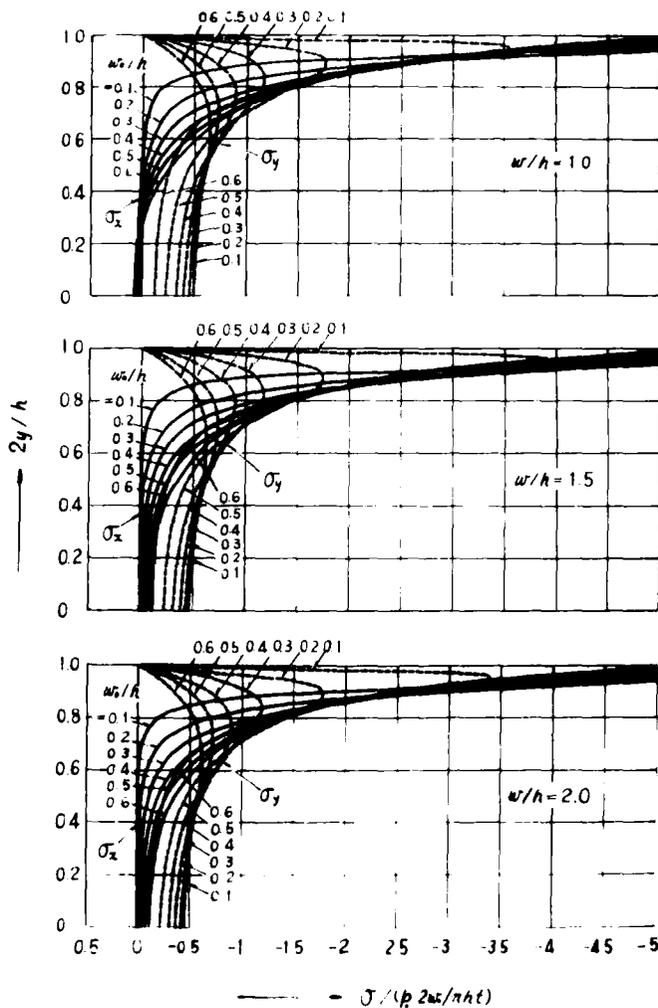


図 7・6 摩擦拘束力を受けた角板試験片内の載荷軸上の σ_x , σ_y

きな圧縮応力となる。一方 σ_y は常に圧縮応力であって、 w_0/h がある程度大きくなると y 軸上ほぼ一様となる。

w/h が 1.5 以上の角板では、 σ_x 、 σ_y の分布の形は $w/h = 1$ の場合とほとんど変わらないが、試験片中央においても σ_x はもはや引張応力ではなく、両主応力とも y 軸上すべて圧縮応力となる。

角板圧裂試験において、強さを算定する式 (4.3) の係数 k_i の値を与えるところの試験片中央の引張応力 $(\sigma_x)_{x=y=0}$ に対する摩擦拘束力の影響を見るた

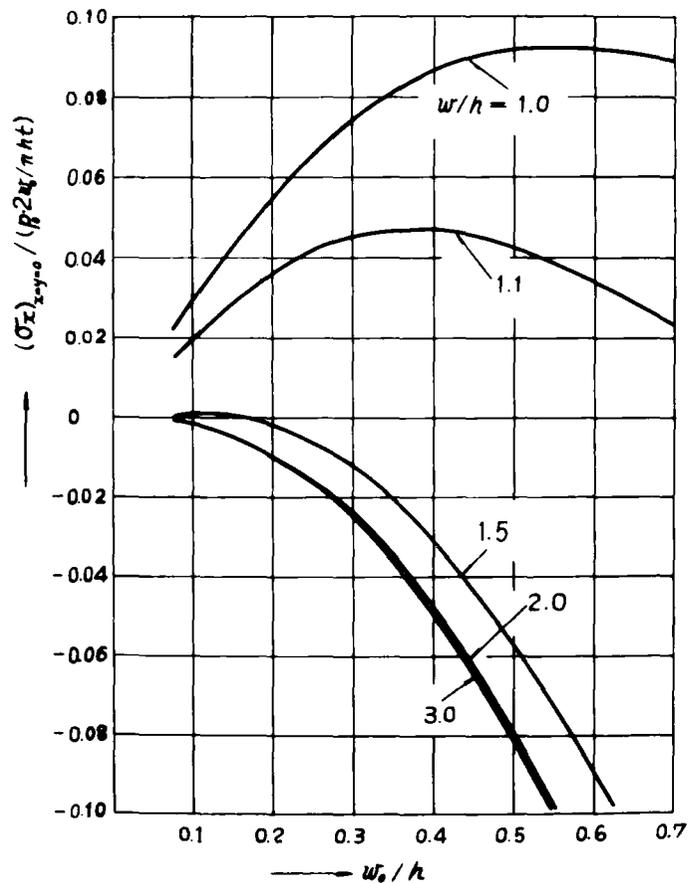


図 7.7 摩擦拘束力を受けた角板試験片の中心の引張応力と w/h および w_0/h との関係

め、 w/h および w_0/h と摩擦拘束力のみによって生ずる $(\sigma_x)_{x=y=0}$ の値との関係を図示すると図 7.7 のようである。

7.2.5 検 討

角板圧裂試験における強さの算定式(4.3)の k_i の値を与える最大引張応力値と w/h , w_0/h の関係を、等分布荷重の場合について図 4.3 に示したように、不均等分布荷重を考慮した場合のそれを示すと、図 7.8 のようである。図中、曲線 1 は等分布荷重の場合である。曲線 2 は不均等分布荷重を考慮した場合である。曲線 3 は摩擦拘束力による影響を図 7.7 から $\mu = 0.3$, $\mu p_0 = 0.3 \times 1.5 \bar{p}$ として求め、これを曲線 2 に加えたものである。

一方、4.3.2 で述べた砂岩 (I) についての角板圧裂試験と円板圧裂試験の結

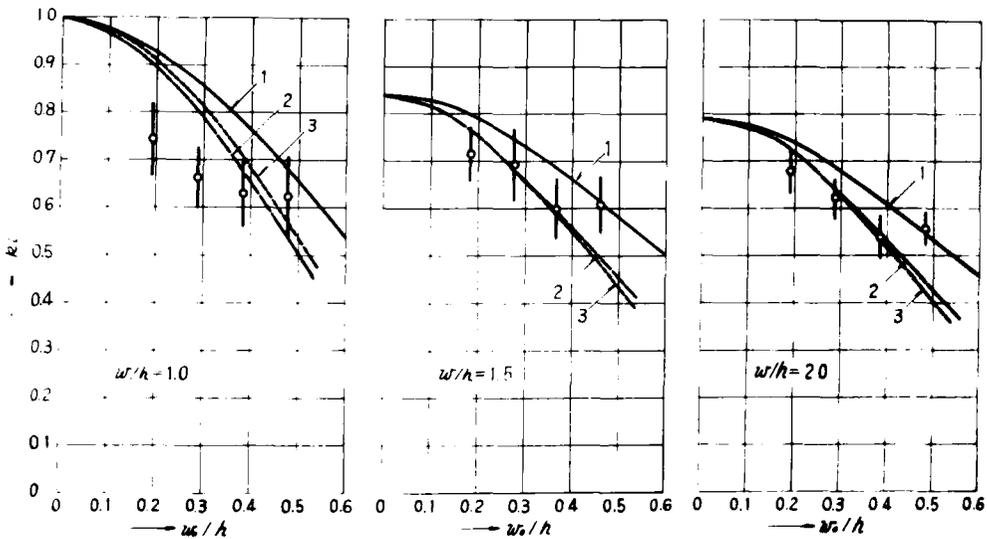


図 7.8 角板圧裂試験における弾性理論による k_i (1 は等分布荷重の場合、2 は不均等分布荷重の場合、3 は不均等分布荷重と摩擦拘束力とを考慮した場合) と実験結果から求めた k_i の比較

果(図4・8)から計算した $(\bar{S}_i)d/(2P_i/\pi ht)$ の値を実験による k_i の値と見做して、 w/h および w_0/h ごとに求めた平均値と標準偏差係数を示すとそれぞれ図中の小さな円と線分のようなものである。ただし、 $(\bar{S}_i)d$ は円板圧裂試験による強さの平均値であり、 P_i は角板圧裂試験における破壊荷重である。

載荷幅が $w_0/h = 0.2 \sim 0.4$ の範囲では、とくに $w/h = 1.5$ および 2.0 の角板試験片において岩石実験の結果は接触面の応力分布を考慮した場合の曲線によく一致していることが認められる。4・3・2において w_0/h が $0.2 \sim 0.4$ の範囲で $(S_i)_i/(\bar{S}_i)d$ が1より少し大きい値をとることを指摘したが、このように不均等分布荷重と摩擦拘束力を考慮することによってほぼ説明できる。

7・3 点載荷圧裂試験の検討

7・3・1 不均等分布荷重を考慮した応力解析

まず不均等分布する荷重として弾性半無限体を剛性の円柱形ポンチで圧縮する場合の接触圧を用いこれを境界条件として、円柱形試験片を円柱形圧板で圧縮する場合の試験片内の応力状態を解析することにした。圧板の直径 w_0 が試験片直径 w に比し充分小さい点載荷圧裂試験においては上述のように考えても大きな差はないと思われる。

半径 $w_0/2$ の円柱形平底剛性ポンチで弾性半無限体を圧縮するとき、ポンチ直下の弾性体の変形が剛性ポンチの底面の形に従って平面を保ったまま変形し、かつ水平方向の摩擦拘束力を無視して解析⁶⁾された垂直方向の接触圧は次式のようなである。

$$p(r) = -\frac{\bar{p}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2r/w_0)^2}}$$

$$(0 \leq r \leq w_0/2) \quad (7.14)$$

ただし、 \bar{p} は総荷重を P として、

$$\bar{p} = P/\pi(w_0/2)^2$$

で表わされる平均荷重である。

この不均等分布荷重を半径 $w/2$ 、高さ h の円柱形弾性体を半径 $w_0/2$ の円柱形剛性圧板で上下から圧縮する点載荷圧裂試験の場合 (図 7・9 (a)) の境界条件として表わすと、等分布荷重の場合の式 (5・22 a) に対応する式として次式を得る。

$$(\sigma_z)_{z=\pm h/2} = p(r)$$

$$p(r) = \begin{cases} -\frac{\bar{P}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2r/w_0)^2}} & (0 \leq r \leq \frac{w_0}{2}) \\ 0 & (\frac{w_0}{2} \leq r \leq \frac{w}{2}) \end{cases} \quad (7-15)$$

上式を Fourier-Bessel 展開して、式 (5・23) に相当する a'_0 、 a'_s を表わす式を求めると次のようである。

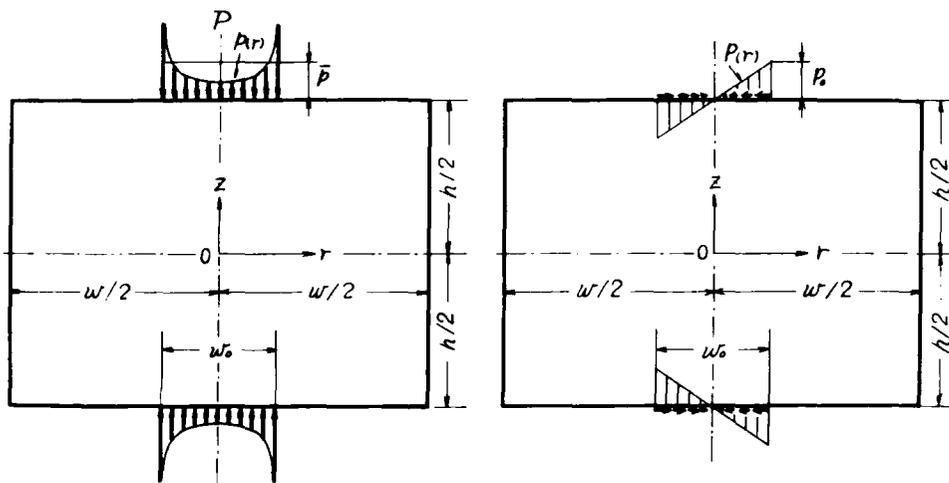


図 7・9 円柱試験片の点載荷圧裂試験における (a) 左側：不均等分布荷重と (b) 右側：摩擦拘束力の模式図

$$\begin{aligned}
a'_0 &= \frac{2}{(w/2)^2} \int_0^{w/2} r \cdot p(r) \cdot dr \\
&= \frac{-2}{(w/2)^2} \int_0^{w_0/2} r \cdot \frac{\bar{p}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2r/w_0)^2}} dr \\
&= -\bar{p}(w_0/w)^2 \\
a'_s &= \frac{2}{(w/2)^2 [J_0(\lambda_s)]^2} \int_0^{w/2} r \cdot p(r) J_0\left(\lambda_s \frac{2r}{w}\right) dr \\
&= \frac{-2}{(w/2)^2 [J_0(\lambda_s)]^2} \int_0^{w_0/2} r \cdot \frac{\bar{p}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2r/w_0)^2}} J_0\left(\lambda_s \frac{2r}{w}\right) dr \\
&= -\bar{p} \cdot \left(\frac{w_0}{w}\right) \frac{1}{\lambda_s [J_0(\lambda_s)]} \sin\left(\lambda_s \frac{w_0}{w}\right) \quad (7.16)
\end{aligned}$$

他の境界条件は等分布荷重の場合と全く同じであり、 a'_0 、 a'_s を上式と置きかえることにより、試験片内の各応力成分は式(5.19)で求まる。

7.3.2 摩擦拘束力を考慮した応力解析

円柱形試験片と円柱形平底圧板との間に働く摩擦力も、角板圧裂試験の場合と同様な考え方で図7.9(b)に示すように圧板端で最大値 p_0 をなす求心的なせん断力 $p_r(r)$ と仮定することにより、この場合の試験片内の応力を3次元軸対称問題として解析することができる。

この場合は先の不均等分布荷重の場合と異なって Michell の応力関数 ϕ は等分布荷重のときに用いた ϕ 、式(5.17)、は用いられず次式のようなになる。

$$\begin{aligned}
\phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^3} \{A'_n I_0(\beta_n r) + B'_n \beta'_n r I_1(\beta_n r)\} \sin \beta_n Z \\
&+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{r_s^3} \{C'_s \sinh r_s Z + D'_s r_s Z \cosh r_s Z\} J_0(r_s r) \quad (7.17)
\end{aligned}$$

これは境界条件が、

$$r = a \text{ で, } \sigma_r = 0, \tau_{rz} = 0$$

$$Z = \pm h \text{ で, } \sigma_z = 0,$$

$$\tau_{rz} = \pm \sum_{s=1}^{\infty} C_s J_1 \left(\lambda_s \frac{r}{a} \right) \quad (7.18)$$

であり、荷重が Z に関して奇関数になるためである。

以下 5.4 節の等分布荷重の場合と同様な手法で解くことができる。しかし実際問題としては岩石と圧板の間の摩擦係数をいくらに見積るか、 p_0 をいかにとるかに問題があり、しかも角板圧裂試験の場合に比べて圧板の占める面積がさらに小さいため、これによる試験片内の応力分布の大きな修正は考えられない。それゆえ、摩擦拘束力の影響については先の角板圧裂試験において 2 次元問題として解析した結果を基に定性的な考察を述べることにする。

7.3.3 検 討

まず、不均等分布荷重を考慮した場合の解析結果に基づき、直径 w と高さ h の等しい円柱形試験片について載荷幅 w_0 とポアソン数 m が種々の値をとる場合について、試験片内の応力分布を電子計算機を利用して計算した。等分布荷重の場合の図 5.8 に対応させて載荷角 $\theta_0 (= \tan^{-1} w_0/h)$ が $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ の場合について中心軸上の σ_θ, σ_z を図示すれば図 7.10 のようである。

等分布荷重の場合の $w/h = 1/1$ 円柱形試験片内の応力分布 (図 5.8 (b)) と比較すると、 θ_0 が小さいときは、中心軸 (Z 軸) 上 $r = 0.9 \sim 0.7 h/2$ 付近に生ずる引張応力の最大値はずい分と減少する。しかし中心付近 ($r = 0$ 付近) における引張応力は極く僅かしか減少しない。すなわち、不均等分布荷重を考慮することによって Z 軸上の引張応力の分布が均一になることが認められる。

一方、 Z 軸上の今 1 つの主応力 σ_z も、等分布荷重の場合に比べると、荷重の分布が凹型になったことにより減少する。したがって、点載荷圧裂試験において

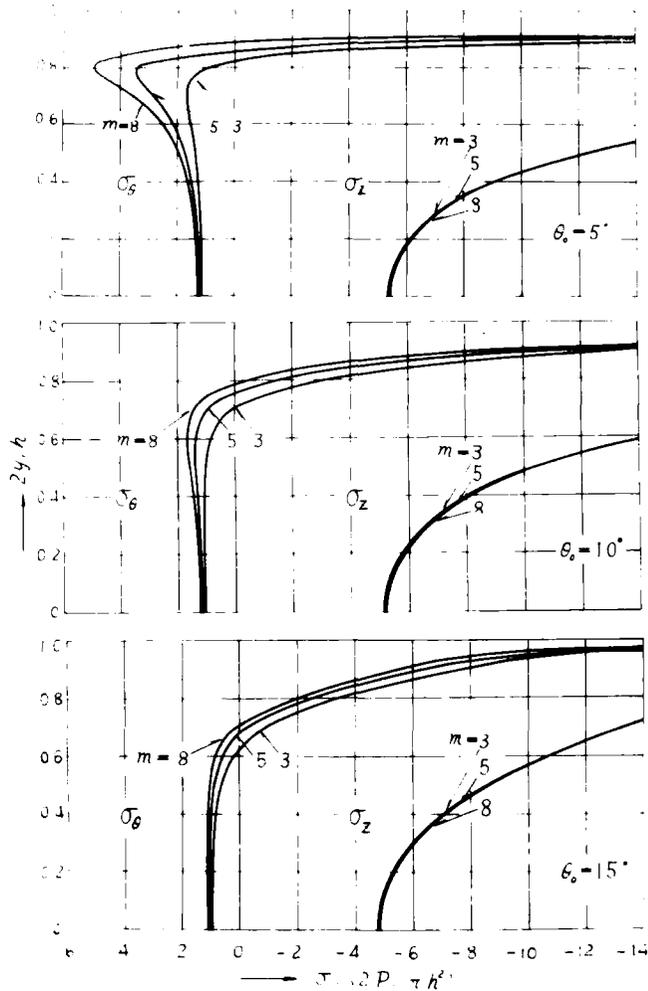


図7・10 不均等分布荷重を受けた円柱試験片のZ軸上の σ_θ 、 σ_z と θ_0 および m との関係

破断面上の応力の2軸性であることおよび応力の不均一分布することの影響の少ない結果が考えられるわけである。

また、 m や θ_0 の種々の値に対する最大引張応力、試験片中央の引張応力および平均的な引張応力を図示すると図7・11のようである。これを等分布荷重の場合の図5・9(b)に比較すると θ_0 や m の影響は少なくなり、それだけ k_{ir} の

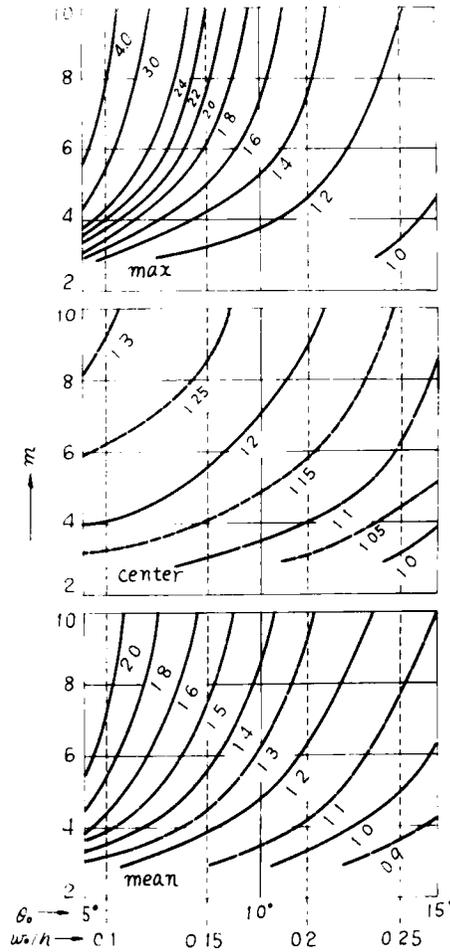


図 7.11 不均等分布荷重を受けた $w/h = 1/1$ の弾性円柱の引張応力と θ_0 および m との関係

値は安定して点載荷圧裂試験による引張強さの算定式 (5.26) の適用性が増すことが考えられる。

さらにこれに摩擦拘束力の影響を図 7.7 を考慮して定性的に加えると、軸方向の圧縮応力 σ_z はほぼ一様に増加するが、その値が小さいため σ_z の分布はほとんど変化しないと考えられる。一方これに垂直な引張応力 σ_r には $2r/h =$

0.6～1.0 にかけて圧縮応力が加えられ、この付近における引張応力のピークが抑えられて引張応力の分布がより均一化することが考えられる。

事実、6・3節に見たように点載荷圧裂試験が分散の点でも、式(5・26)の適用性の点でも等分布荷重とした場合の応力状態から想像されたより良好な結果を与えているのは、これら不均等分布荷重および摩擦拘束力の作用を仮定した場合の方が実際に近いものであることを示していると考えられる。

最後に載荷板の形状について考察しておくことにする。コンクリートを用いた実験の結果から球形の圧板を用いた場合は強さの分散が大きく好ましくないことを述べた。接触面上の応力分布を考慮すれば、コンクリートに限らず岩石の場合でも、球形の圧板を用いることは、圧板の中心付近に応力集中を生じやすく、しかもそれによって載荷軸上の引張応力の分布が不均一度を増すことになると考えられるので、この点からも好ましくないと言える。平底円柱状の載荷板でも図6・7 (a), (c), (e), (f) のように円柱形のまゝでは円柱の周囲で理論上無限大の応力を生ずることになる。実際はその部分の岩石が局部的に破壊してある種の均衡を生じ、それほど顕著に試験片の終局的な破壊に影響を与えないようであるが、できれば載荷板(d)のように角に丸味をつけた方が理論的⁷⁾にも実験的にもこの部分の破壊が最小限にとどまり、標準偏差の表6・3に見るように分散の少ない良好な結果を与えるものと解釈される。

7・4 結 言

まず、角板圧裂試験における接触面上の不均等分布荷重および摩擦拘束力の作用を考慮した場合の応力解析を行なった。その結果、凹形の不均等分布荷重を考慮することによって載荷の中心軸上の圧縮応力 σ_y が等分布荷重とした場合に比べて、とくに載荷点付近において、減少すること、一方引張応力 σ_x もわずかだが減少することがわかった。さらに摩擦拘束力を考慮することによって、 $w/h = 1 \sim 1.5$ の試験片においては w_0/h の値に無関係に σ_x の引張応力は極くわずかに増加し、 w_0/h がそれ以上になると σ_x の引張応力はわずかだが減少するこ

とがわかった。これらによって修正された k_i の値を用いると、等分布荷重とした場合よりも実験結果が理論的な検討結果とよく一致することがわかった。

つぎに点載荷圧裂試験における不均等分布荷重および摩擦拘束力の影響を検討した。応力解析を行なった結果、凹形の不均等分布荷重を考慮することによって載荷軸上の最大引張応力は低下し、引張応力が均等分布に近づくことが認められた。また圧縮応力も、とくに載荷点付近におけるそれは、等分布荷重の場合に比べてかなり減少する。さらに摩擦拘束力を考慮することによって引張応力はますます均一化する。等分布載荷が行なわれると仮定した理論的検討の結果、2, 3の問題点が懸念されたにもかかわらず、実験結果は $w_0/h = 0.11 \sim 0.16$ の範囲で平底円柱の角に丸味をつけた載荷板を用いると分散の少ない良好な結果を与えることを指摘したが、上述した接触圧の理論による不均等分布荷重と摩擦拘束力の作用を考慮することによってその事実の説明がついた。

参 考 文 献

- 1) 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎 : 岩石の圧裂試験に関する研究, (日本鉱業会誌投稿中).
- 2) 岡 行俊, 平松良雄, 木山英郎 : コンクリートの点載荷圧裂試験による引張強度の決定, 材料学会第17期総会講演要旨集, 昭和43年5月.
- 3) 平松良雄, 岡 行俊, 木山英郎 : コンクリートの点載荷圧裂試験による引張強度の決定, (材料投稿中).
- 4) 大久保肇 : 弾性平面にて圧縮された半無限体の二次元問題について, 機械学会論文集第18巻第65号, 昭和27年, 58頁~65頁.
- 5) M. Sadowsky : Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie, Z. angew. Math. Mech., Bd. 8, Ht. 2, (1928), pp. 107 ~ 121. (ガーリン著, 佐藤常三訳, 弾性接触論参照).

- 6) I. N. Sneddon : Fourier Transforms, McGraw-Hill Co., Inc.
(1951) p. 455, および Proc. Cambridge Phil. Soc.,
42 (1946) p. 29 (ガーリン著, 佐藤常三訳, 弾性接触論参照).
- 7) I. J. Staiermann : 弾性接触論, (1949), p. 196 (ベズーホッフ著,
佐藤常三訳, 弾性塑性学参照).

第 8 章 円板圧裂試験による弾性定数の決定法¹⁾

8・1 緒 言

岩石の弾性定数を静的に決定するには、通常圧縮試験によっている。しかし円板圧裂試験を行なう際、弾性定数も同時に決定できれば便利であると考えて、その方法を研究することにした。

8・2 弾性理論による解析

8・2・1 弾性定数計算式の誘導

円板圧裂試験における試験片内の応力を Airy の応力関数を用いて解析する方法については既に 3・2 節で詳しく述べた。ここでは、変位に注目して弾性基礎方程式を解析する方法を用いて表記の目的を果たしたい。

図 8・1 (a) は半径 a 、厚さ t の円板の圧裂試験のやり方を示す略図である。この図のように極座標 (r, θ) をとれば、弾性限内では各応力成分 σ_r, σ_θ および $\tau_{r\theta}$ と変位成分 u, v との間には次の関係が成立する。

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \sigma_\theta &= \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\tag{8.1}$$

$$e = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.\tag{8.2}$$

ここに、 e は体積ひずみ、 λ および μ は Lamé の定数である。また、この場合の弾性基礎方程式は次のようである。

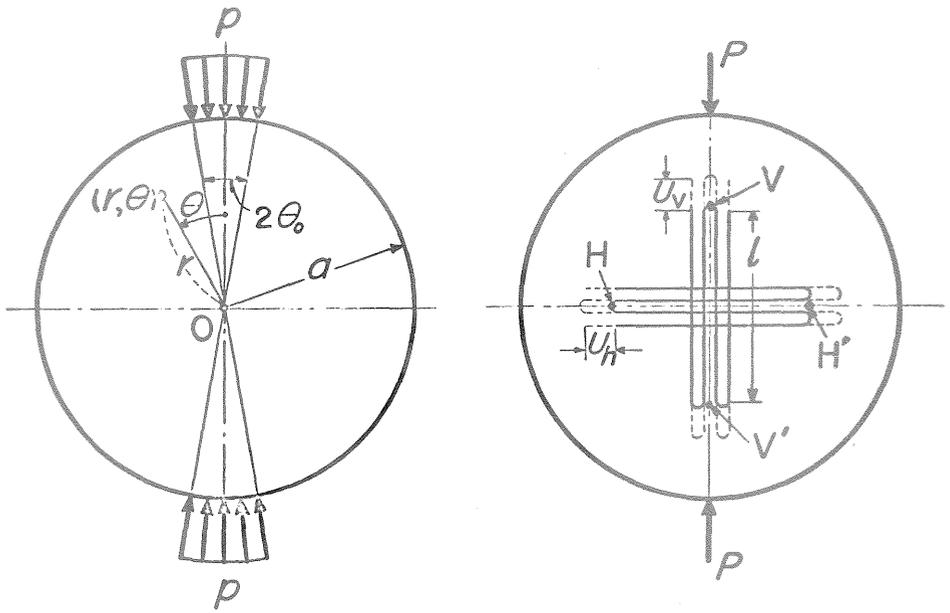


図 8・1 円板圧裂試験における試験片とひずみゲージの模式図

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right) = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right) = 0 \quad (8.3)$$

原点において $u = v = 0$ であり、かつ u は $\theta = 0$ および $\theta = \pi/2$ の 2 直線に関して対称であることを考慮して式 (8.3) を解けば次の結果が得られる。

$$u = \frac{A_0}{2} r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1-n)\mu - n\lambda}{2(2n+1)\mu} A_{2n} r^{2n+1} + D_{2n} r^{2n-1} \right\} \cos 2n\theta \quad (8.4)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1+n)\lambda + (n+2)\mu}{2(2n+1)\mu} A_{2n} r^{2n+1} - D_{2n} r^{2n-1} \right\} \sin 2n\theta \quad (8.5)$$

ここに、 A_0 、 A_{2n} および D_{2n} は任意定数であり、これらは次の境界条件によって決定される。

円板の円周上 ($r = a$) では、載荷の強さを p 、載荷幅の中心角を $2\theta_0$ とすれば、

$$(\sigma_r)_{r=a} = \begin{cases} p & (-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0, \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0), \\ 0 & (\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0, \pi + \theta_0 < \theta < 2\pi - \theta_0), \end{cases} \quad (8.6)$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=a} = 0. \quad (8.7)$$

なお、 P を総荷重とすれば

$$p = P/2at \sin \theta_0$$

である。式(8.6)を Fourier 級数に展開すると、

$$(\sigma_r)_{r=a} = \frac{2p}{\pi} \left(\theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\theta_0 \cos 2n\theta \right) \quad (8.8)$$

式(8.4) および式(8.5)を式(8.1)に代入して応力の一般解を求め、さらに $r = a$ とおいた式を式(8.7) および式(8.8)と等置すると、 A_0 、 A_{2n} および D_{2n} は次のように決定できる。

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2p\theta_0}{\pi(\lambda + \mu)} \\ A_{2n} &= \frac{2p}{\pi(\lambda + \mu)} \frac{1}{n} a^{-2n} \sin 2n\theta_0 \\ D_{2n} &= \frac{p}{\pi\mu} \frac{1}{2n-1} a^{-2n+2} \sin 2n\theta_0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

もし集中荷重であれば、変位 u の式は式(8.9)で与えられる係数を式(8.4)に代入し、 θ_0 を 0 に収束させることにより次のようになる。

$$u = \frac{P}{2\pi at} \left[\frac{r}{\lambda + \mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{\mu} \left\{ \frac{n}{2n-1} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n-1} \right. \right.$$

$$+ \frac{\mu(1-n) - n\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} \} \cos 2n\theta \} \quad (8.10)$$

さて、円板試験片に図8・1(b)のように長さ l の電気抵抗線ひずみ計ゲージを貼りつけて圧裂試験を行ない、載荷方向およびそれに直交する方向のひずみ計の読み $\bar{\varepsilon}_v$ 、 $\bar{\varepsilon}_h$ をもとめたものとしよう。

$\bar{\varepsilon}_h$ 、 $\bar{\varepsilon}_v$ はそれぞれ点 H から H' まで、点 V から V' までの間のひずみの平均値であって、それらは円板の中心 O を原点とした点 H (または H') の変位 u_h および点 V (または V') の変位 u_v をそれぞれ線分 \overline{OH} 、 \overline{OV} (ともにゲージ長の半分 $l/2$) で除した値に等しい。すなわち、

$$\bar{\varepsilon}_h = \frac{2u_h}{l}, \quad \bar{\varepsilon}_v = \frac{2u_v}{l} \quad (8.11)$$

ところで、 u_h および u_v は式(8・10)でそれぞれ $r = l/2$ 、 $\theta = \pi/2$ 、 $\theta = 0$ とおいて得られる。

$$u_h = \frac{P}{2\pi a t} \left\{ \frac{l}{2(\lambda + \mu)} + \frac{2a}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{n}{2n-1} \left(\frac{l}{2a}\right)^{2n-1} + \frac{\mu(1-n) - n\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{l}{2a}\right)^{2n+1} \right\} \right\} \quad (8.12)$$

$$u_v = \frac{P}{2\pi a t} \left\{ \frac{l}{2(\lambda + \mu)} + \frac{2a}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \left\{ \left(\frac{l}{2a}\right)^{2n-1} + \frac{\mu(1-n) - n\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{l}{2a}\right)^{2n+1} \right\} \right\} \quad (8.13)$$

式(8・11)、(8・12)および(8・13)より Young 率 E および Poisson 数 m を求めると次のようになる。

$$E = \frac{P}{\pi a t} \frac{\{(3\delta - 3\gamma - \alpha + \beta) - (3\delta + 3\gamma + \alpha + \beta) \bar{\varepsilon}_h / \bar{\varepsilon}_v\}}{\bar{\varepsilon}_v \{(\delta - \gamma) - (\delta + \gamma) \bar{\varepsilon}_h / \bar{\varepsilon}_v\}^2} \quad (8.14)$$

$$m = \frac{2(\delta + \gamma) \bar{\epsilon}_h / \bar{\epsilon}_v - 2(\delta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \bar{\epsilon}_h / \bar{\epsilon}_v + (\alpha - \beta + \gamma - \delta)} \quad (8.15)$$

ここに、 α 、 β 、 γ および δ はゲージ長と円板試験片の直径との比率 $l/2a$ により決まる定数であり次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{l}{2a}\right) \frac{\delta'}{\alpha'\delta' - \beta'\gamma'} \\ \beta &= \left(\frac{l}{2a}\right) \frac{\beta'}{\alpha'\delta' - \beta'\gamma'} \\ \gamma &= \left(\frac{l}{2a}\right) \frac{\gamma'}{\alpha'\delta' - \beta'\gamma'} \\ \delta &= \left(\frac{l}{2a}\right) \frac{\alpha'}{\alpha'\delta' - \beta'\gamma'} \\ \alpha' &= \frac{l}{2a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{l}{2a}\right)^{4n+1} \\ \beta' &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n-1} \left(\frac{l}{2a}\right)^{4n-1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n+1} \left(\frac{l}{2a}\right)^{4n+1} \\ \gamma' &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-1} \left(\frac{l}{2a}\right)^{4n-1} \\ \delta' &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4n-3} \left(\frac{l}{2a}\right)^{4n-3} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4n-1} \left(\frac{l}{2a}\right)^{4n-1} \end{aligned} \quad (8.16)$$

$l/2a$ と α 、 β 、 γ および δ との関係を示すと図 8.2 のようになる。

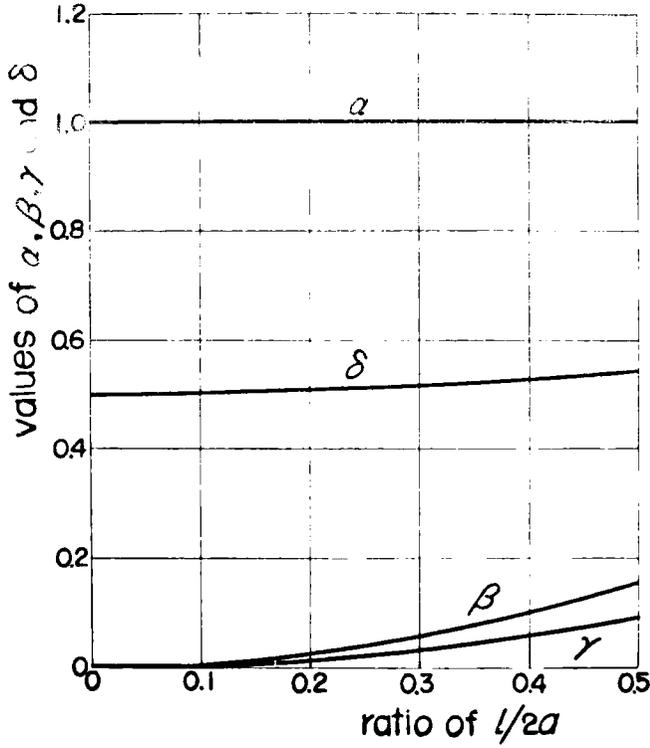


図 8・2 係数と $l/2a$ との関係

8・2・2 E および m の簡易計算式

上述の解析から $\overline{\epsilon_h}$ および $\overline{\epsilon_v}$ を測定することにより E および m が求まることがわかった。しかしながら式(8・14) および式(8・15)を用いて E, m を実際に算出するには相当煩雑な計算を必要とする。そこでこの試験を実際に適用する範囲を対象に両式をできるだけ精度を失わずに簡単にすることを試みた。いま,

$$k = \frac{(3\delta - 3\gamma - \alpha + \beta) - (3\delta + 3\gamma + \alpha + \beta) \frac{\bar{\epsilon}_h}{\bar{\epsilon}_v}}{\{(\delta - \gamma) - (\delta + \gamma) \frac{\bar{\epsilon}_h}{\bar{\epsilon}_v}\}^2} \quad (8.17)$$

とおくと、式(8.14)および(8.15)は次のようになる。

$$E = \frac{P}{\pi a t} \frac{k}{\bar{\epsilon}_v} \quad (8.18)$$

$$\frac{1}{m} = -\frac{k}{2} (\delta + \gamma) \frac{\bar{\epsilon}_h}{\bar{\epsilon}_v} + \frac{k}{2} (\delta - \gamma) - 1 \quad (8.19)$$

式(8.16)、(8.17)および(8.19)からわかるように k は m および $l/2a$ の関数である。そこで k と m の関係を $l/2a = 0.1$ および 0.2 の場合について図示すると図8.3のようになる。一方、実際の試験における $l/2a$ の値は 0.2 以下の場合が多く、また、普通の岩石の Poisson 数 m は $3 \sim 10$ の範囲にあると考えられる。このような $l/2a$ および m の範囲に対する k の値

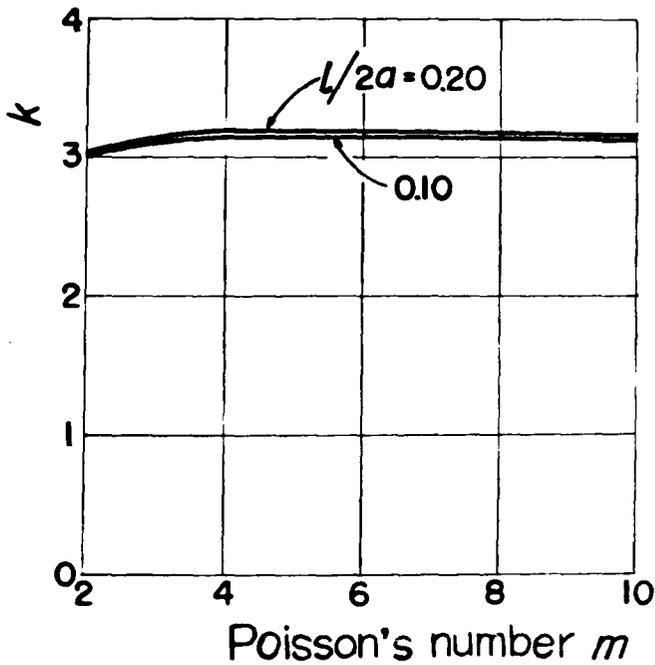


図 8.3 係数と m との関係

は図 8・3 からわかるように $k \approx 3.14$ である。したがって、この試験においては式 (8・18) および (8・19) は次のように簡略化できる。すなわち、

$$E \approx \frac{1}{a t} \frac{P}{\bar{\epsilon}_v} \quad (8 \cdot 20)$$

$$\frac{1}{m} \approx -0.804 \frac{\bar{\epsilon}_h}{\bar{\epsilon}_v} - 0.221 \quad (8 \cdot 21)$$

結局、圧縮試験により E 、 m を求めるときとまったく同様に、載荷方向とそれに直交する方向のひずみの測定値を用いてひずみ—荷重曲線を描き、載荷方向に対する曲線の傾斜 $P/\bar{\epsilon}_v$ から E を、また両曲線の傾斜の比 $\bar{\epsilon}_h/\bar{\epsilon}_v$ から m を求めることができる。

8・3 解析結果の実験的検討

試験片の材料として均質で性質のよく知られている炭素鋼を選び、この円板圧裂試験による方法で弾性定数を決定した。円板の直径 $2a$ は 8 cm ~ 2.4 cm であり、ゲージ長 l は 8 mm であるから $l/2a$ は 0.10 ~ 0.33 の範囲にある。測定結果およびそれらの値から式 (8・20) および (8・21) を用いて決定した E および m の値を示すと表 8・1 のようである。炭素鋼の弾性定数は $E = 2.10 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、 $m = 4$ 程度とされているからこの方法で得た値はそれとかなりよく一致しているものと思われる。このように、試験片が弾性体である場合、この試験法に対して理論解析の結果が正しく適用できることが確かめられた。

また同表には中心の位置に縦横 2 方向のゲージを円板圧裂試験におけると同様に貼りつけた長方形板 (縦横比 1 : 2) の上下をそれぞれコロを介して圧縮する方法で得られた $\bar{\epsilon}_v$ 、 $\bar{\epsilon}_h$ から式 (8・20) および (8・21) を用いて決定した E 、 m も併記してある。第 3 章で述べたように、載荷幅が小さいときの角板圧裂試験片内の応力状態と円板圧裂試験片内の応力状態はよく似ているから、このよ

表 8・1 炭素鋼板試験片による試験結果

試 験 片				測 定 値			荷重の範囲 (kg)	決定した弾性定数	
形	2a(cm)	t(cm)	l/2a	$\bar{\epsilon}_h/P$ ($\frac{1}{\text{kg}}$)	$-\bar{\epsilon}_v/P$ ($\frac{1}{\text{kg}}$)	$-\bar{\epsilon}_h/\bar{\epsilon}_v$		E (kg/cm ²)	m
円 形	8.00	3.00	0.10	0.0207×10^{-6}	0.0353×10^{-6}	0.585	1000 ~ 5000	2.36×10^6	4.05
	8.00	3.00	0.10	0.0220×10^{-6}	0.0325×10^{-6}	0.677	1000 ~ 5000	2.56×10^6	3.10
	5.00	2.00	0.16	0.0608×10^{-6}	0.0952×10^{-6}	0.639	500 ~ 2000	2.11×10^6	3.41
	5.00	2.00	0.16	0.0590×10^{-6}	0.0870×10^{-6}	0.678	500 ~ 2000	2.30×10^6	3.20
	4.00	1.50	0.20	0.099×10^{-6}	0.150×10^{-6}	0.660	100 ~ 1500	2.24×10^6	3.10
	4.00	1.50	0.20	0.095×10^{-6}	0.160×10^{-6}	0.594	300 ~ 2000	2.08×10^6	3.65
	2.40	1.00	0.33	0.220×10^{-6}	0.380×10^{-6}	0.579	100 ~ 500	2.28×10^6	3.25
長 方 形	8.00	3.00	0.10	0.0201×10^{-6}	0.0393×10^{-6}	0.512	500 ~ 3000	2.12×10^6	5.24
	8.00	3.00	0.10	0.0210×10^{-6}	0.0380×10^{-6}	0.553	500 ~ 3000	2.19×10^6	4.48
	5.00	2.00	0.16	0.048×10^{-6}	0.092×10^{-6}	0.522	250 ~ 1500	2.20×10^6	4.93
	5.00	2.00	0.16	0.048×10^{-6}	0.091×10^{-6}	0.528	250 ~ 1500	2.17×10^6	4.95
	4.00	1.50	0.20	0.080×10^{-6}	0.141×10^{-6}	0.567	250 ~ 2000	2.36×10^6	3.95
	4.00	1.50	0.20	0.085×10^{-6}	0.154×10^{-6}	0.552	250 ~ 2000	2.16×10^6	4.20

うな方法で同様な値を得られるだろうと考えたわけである。ほぼ予想通りの結果を得た。しかし、角板圧裂試験でもっと精度高く E, m を決定するためには、第3章の応力解析結果から $w_0/h, w/h$ を考慮して、式(8・18), (8・19)あるいは式(8・20), (8・21)に相当する, E, m の算定式を導びくべきである。事実それは可能であり, w_0/h を適当に選ぶことにより円板圧裂試験による方法に劣らぬ良い結果も予想される。

8・4 単軸引張試験および円板圧裂試験による弾性定数の比較検討

8・4・1 測定

この試験のために用意した試料は安山岩(宮城県紫田郡村田町産・通称村田石), 凝灰岩(福島県耶麻郡高郷村産・通称荻野石), 大理石(山口県美祿市産)の3種でこれは2・3節で強さの比較試験に用いたものと同じものである。試験片の

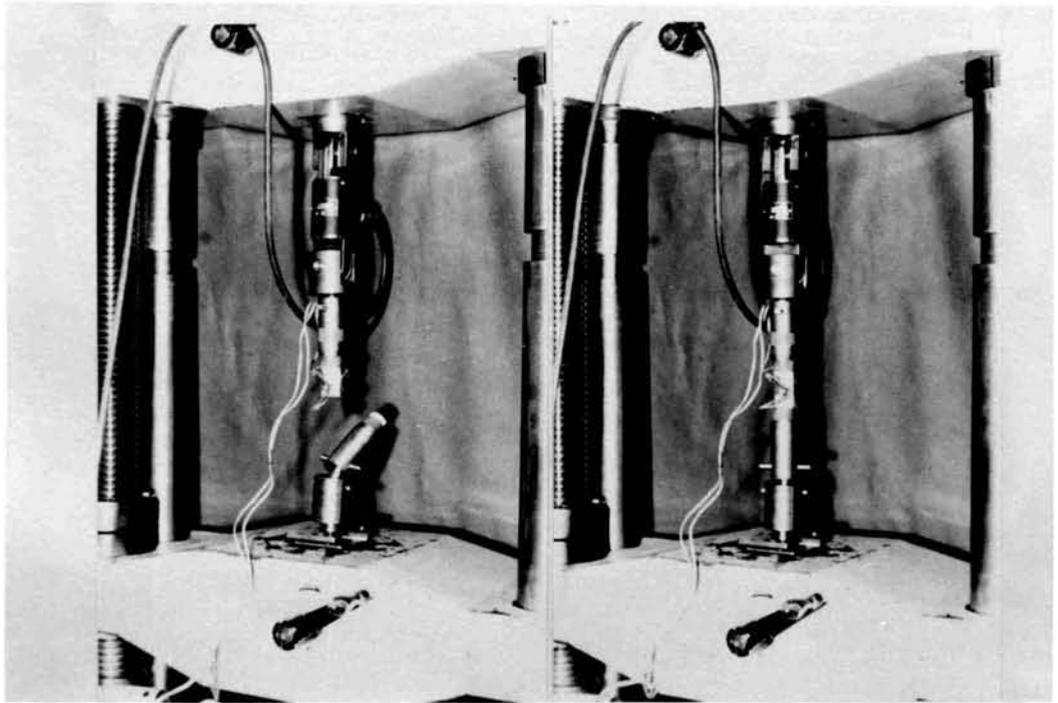


図8・4 引張試験におけるひずみ測定

採取方法や成形方法も全く同じであり、試験片の寸法も単軸引張試験片は平行部の直径 2.9 cm, 円板圧裂試験片は直径 3.5 cm, 長さ 1.75 cm とした。

単軸引張試験によるひずみ測定の様子は図 8・4 に、円板圧裂試験のそれは図 8・5 の写真に見る通りである。両試験とも試料の表と裏の二ヶ所に新興通信工業(株)製電気抵抗線クロス型ひずみゲージ SC 108 (ゲージ長 8 mm, ゲージ巾 3 mm, 抵抗値 120 Ω) を貼付し、軸方向および水平方向のゲージをそれぞれ直列に結線して表裏の平均ひずみとして取出した。一方荷重の方は新興通信工業製引張試験用荷重計 L. T. 3^t (単軸引張試験用) および圧縮試験用荷重計 L. C. 10^t (円板圧裂試験用) を用いて取出した。これらひずみゲージおよび荷重計のひずみ変化を新興通信工業(株)製動ひずみ計 DS 6/RX を用いて増幅し、(株)横河電機製作所製 X-Y₁, Y₂ レコーダーで自記記録した。

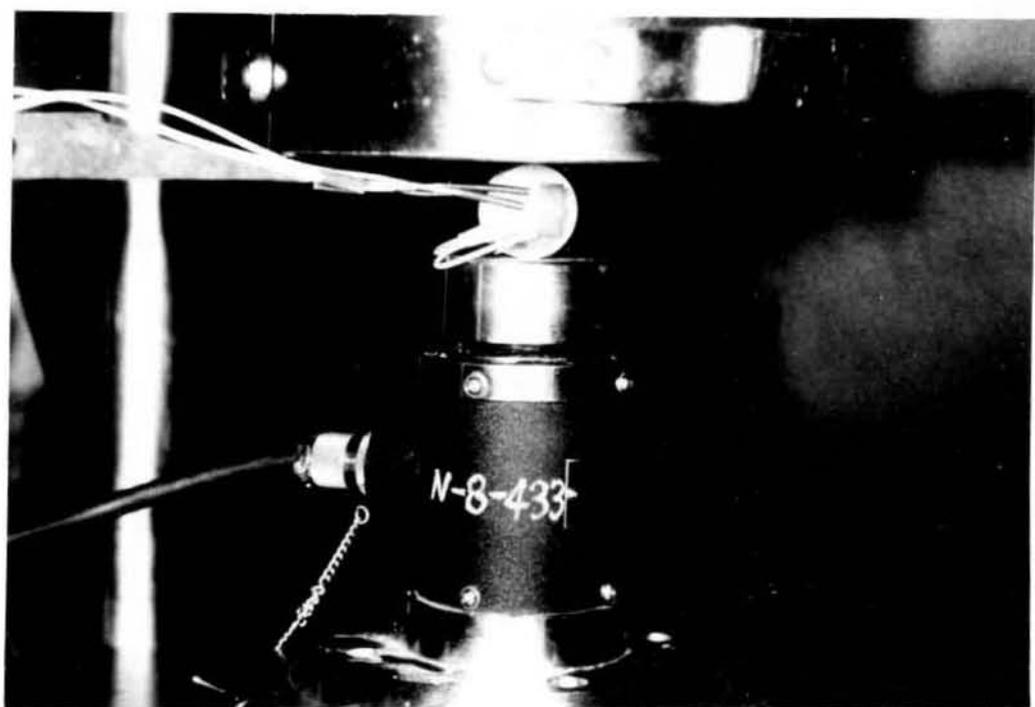


図 8・5 円板圧裂試験におけるひずみ測定

8・4・2 測定結果

3種の岩石について、単軸引張試験および円板圧裂試験についての荷重—ひずみ曲線の一例を示せば、それぞれ図8・6の左列および右列のようである。これらの荷重—ひずみ曲線から破壊荷重の50～80%域に岩種別、試験法別に適当な荷重を決めてその点の割線ヤング率およびポアソン数を求めた。それらの結果をすべての試験片について記すと表8・2のようである。ただし、円板圧裂

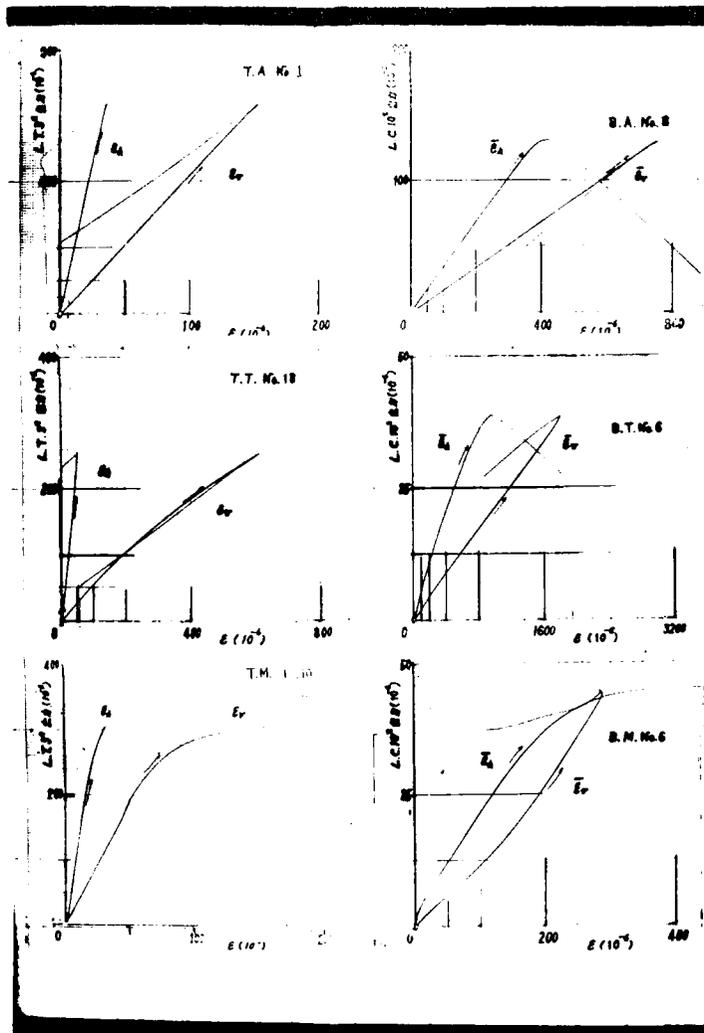


図8・6 単軸引張試験（左側）と円板圧裂試験（右側）の荷重—ひずみ線
図の X-Y レコーダによる記録の一例

表 8 · 2 (a) 安 山 岩

単 軸 引 張 試 験			円 板 圧 裂 試 験		
試 料 番 号	E (10^4kg/cm^2)	m	試 料 番 号	E (10^4kg/cm^2)	m
1	90.9	4.27	1	84.0	5.08
2	91.8	3.96	2	82.3	5.45
3	89.0	4.08	3	85.7	4.27
4	88.3	3.50	4	86.6	5.62
5	95.6	3.46	5	84.1	4.88
6	79.8	—	6	83.4	5.44
7	78.0	—	7	87.3	5.07
8	87.4	—	8	82.4	5.28
9	82.7	—	9	86.7	4.63
10	78.6	—	10	81.5	5.66
13	98.9	3.63	平 均	84.4	5.14
14	88.1	4.41			
16	88.3	4.26			
17	98.2	3.63			
18	93.5	3.54			
平 均	88.6	3.87			

表 8・2 (b) 凝 灰 岩

単 軸 引 張 試 験			円 板 圧 裂 試 験		
試 料 番 号	E (10^4 kg/cm^2)	m	試 料 番 号	E (10^4 kg/cm^2)	m
1	12.76	7.15	1	10.27	7.17
2	11.08	7.20	2	11.23	4.52
3	10.53	9.55	3	11.15	4.36
5	10.83	10.13	4	10.74	7.14
6	10.23	—	5	11.70	4.63
7	9.78	—	6	10.34	8.32
8	8.67	—	7	11.39	4.97
9	9.30	—	8	10.65	6.67
10	10.53	—	9	10.42	7.29
11	12.27	8.18	10	11.39	4.34
13	10.95	9.91	平 均	10.95	5.94
14	10.07	12.36			
17	10.38	9.89			
18	10.53	9.95			
19	11.07	8.80			
20	10.80	9.48			
平 均	10.61	9.33			

表 8.2 (c) 大 理 石

单 轴 引 张 试 验			凹 板 压 裂 试 验		
试 料 番 号	E (10^4kg/cm^2)	m	试 料 番 号	E (10^4kg/cm^2)	m
1	81.2	—	1	71.6	3.09
3	55.2	—	2	69.2	2.61
5	83.9	—	3	63.9	3.86
6	83.9	2.60	4	90.9	2.31
7	77.9	3.11	5	60.5	2.08
10	82.8	3.31	6	64.6	3.53
11	67.1	3.61	7	68.8	2.29
12	86.7	4.64	8	69.4	3.06
13	48.7	5.00	9	80.2	3.65
16	99.7	3.38	10	65.3	2.50
18	64.5	3.78	平 均	70.4	2.90
20	73.9	—			
24	90.9	3.00			
28	99.1	3.14			
29	92.8	3.36			
31	51.9	4.67			
32	68.6	2.56			
50	101.8	2.90			
52	89.0	4.08			
53	89.1	3.11			
平 均	79.4	3.52			

試験においてはゲージ長と試料の直径の比 $l/2a$ が 0.23 であったが、前節の式(8.20) および(8.21) を用いて E, m を計算した。

表 8.2 から Young 率および Poisson 数について、岩種別、試験法別に平均値 \bar{E}, \bar{m} , 標準偏差 S , 標準偏差係数 \bar{S} ($S/\bar{E}, S/\bar{m}$) をそれぞれ計算し、表示すると表 8.3 のようである。

表 8.3 (a) Young 率

岩種	試験法	個数	\bar{E} 10^4 kg/cm^2	S 10^4 kg/cm^2	\bar{S}
安山岩	単軸引張	15	88.6	6.39	0.072
	円板圧裂	10	84.4	1.97	0.023
凝灰岩	単軸引張	16	10.6	0.96	0.090
	円板圧裂	10	10.9	0.47	0.043
大理石	単軸引張	20	79.4	15.35	0.193
	円板圧裂	10	70.4	8.50	0.121

(b) Poisson 数

岩種	試験法	個数	\bar{m}	S	\bar{S}
安山岩	単軸引張	10	3.87	0.34	0.090
	円板圧裂	10	5.14	0.42	0.082
凝灰岩	単軸引張	11	9.33	1.41	0.151
	円板圧裂	10	5.94	1.44	0.242
大理石	単軸引張	16	3.52	0.71	0.203
	円板圧裂	10	2.90	0.60	0.207

8・4・3 検 討

まず標準偏差係数(表8・2)を用いて岩種別の弾性定数の算定値のばらつきについてみると、単軸引張試験および円板圧裂試験いづれによっても、ばらつきの少ない順に安山岩、凝灰岩、大理石であって、第2章の強度試験におけると同様やはり大理石のばらつきが大きいことが認められる。このことは荷重—ひずみ曲線の試験片相互の類似性が安山岩、凝灰岩、大理石の順であることによっても確かである。さらに両試験とも、安山岩は荷重—ひずみ曲線に最も直線性があり、ついで凝灰岩で、大理石は応力の増加とともにひずみ量の増加の割合が大きくなり延性材料の引張試験に見られるような曲線を描がく。したがって大理石では他の岩石に比べて弾性定数が荷重によって変化しやすいといえる。これも大理石において分散を大きくする原因の一つである。

つぎに単軸引張試験によって決定される Young 率と円板圧裂試験によるそれとを比較検討してみよう。標準偏差係数(表8・2)を用いて両者の分散を比較すると円板圧裂試験の方が分散が少なく良好である。この点では申し分ないといえる。

そこで第2章で強度について行なったように、両試験によって求まる Young 率 E の母平均に有意な差があるか否かを有意水準5%で t 分布を用いて検定した結果は表8・4(a)に示すようである。この結果は、両試験によって求まる Young 率に差がないとした仮説の棄却は、3種の岩石のいづれにおいても、 $t_0 < t_{\alpha=5\%}$ となって否定される。すなわち両者に有意な差があるとは云えないことがわかる。さらに今回の実験結果によると、円板圧裂試験によって求めた Young 率 E は単軸引張試験によって求めた E の 1 ± 0.1 以内にあつて両者はよく一致しているといえる。

つぎにポアソン数について同様に検討してみよう。まず目につくことはどちらの試験よつて求めるにしても Young 率の標準偏差係数に比べると Poisson 数のそれは大きいことである。その理由は、 $\bar{\epsilon}_v$ に比べて $\bar{\epsilon}_h$ の値が小さく測定誤差が入りやすいこと、および応力—ひずみ曲線が示すように $\bar{\epsilon}_v$ に比べて $\bar{\epsilon}_h$ が

表 8・4 (a) Young 率の母平均差の t 分布検定

岩 種	見掛の母平均差 $(\bar{E}_T - \bar{E}_{d2})/\bar{E}_T$	自由度 ϕ $\phi = n_1 + n_2 - 2$	t_0	t_α $\alpha = 5\%$	判 定 帰無仮説棄却
安山岩	0.0477	23	2.014	2.069	否
凝灰岩	-0.0320	24	1.039	2.064	否
大理石	0.1133	28	1.713	2.048	否

(b) Poisson 数の母平均差の t 分布検定

岩 種	見掛の母平均差 $(\bar{m}_T - \bar{m}_{d2})/\bar{m}_T$	自由度 ϕ $\phi = n_1 + n_2 - 2$	t_0	t_α $\alpha = 5\%$	判 定 帰無仮説棄却
安山岩	-0.3282	18	7.366	2.101	可
凝灰岩	0.3633	19	5.451	2.093	可
大理石	0.1761	24	2.282	2.064	可

応力とともに変化する割合が大きく、したがって Young 率に比べると Poisson 数が応力とともに変化する割合が大きいことによると思われる。また Young 率についてと同様に、両試験によって求まる Poisson 数 m の母平均差を有意水準 5% にとって t 分布検定した結果は表 8・4 (b) のようである。両者には有意な差が認められる。このような結果がでた理由は、これら 2 種の試験法によって Poisson 数を決定する基準に選んだ応力の値が異なっており、上に指摘したように岩石の Poisson 数は応力の値によって変化が激しいためである。いわば、両試験において、弾性定数を決定するときの最適荷重、すなわち荷重—ひずみ曲線が最も安定するところの荷重が喰違うところに、このような差を生ずる原因がある。したがってこれらの事実を考慮して用いれば十分実用に供しうるとと思われる。

8・5 結 言

円板試験片が圧裂試験に供されるとき，そのなかの各点に起こる変位を弾性理論によって解析し，その結果から，円板試験片の中央に貼りつけた縦横2方向のひずみ計ゲージの読みと総荷重 P とから試験片の Young 率 E と Poisson 数 m を求める式を誘導した。

ついで，弾性定数のよく知られている炭素鋼の試験片を用いてこの方法を試み，この方法でほぼ正しい弾性定数を決定できることを確かめた。

そこでつぎに種々の岩石について単軸引張試験によって決定した弾性定数とこの円板圧裂試験による方法で決定した弾性定数とを比較検討した。その結果，Young 率については両者はよく一致し，Poisson 数については多少相違することがわかった。しかし，円板圧裂試験は圧縮試験や引張試験に比べると実施が容易であるため，岩石の弾性定数の簡易試験法としては充分実用し得ると思われる。

参 考 文 献

- 1) 平松良雄，岡 行俊，木山英郎： 圧裂試験による弾性定数の決定法，
水曜会誌 第15巻第8号，昭和40年8月，363頁～366頁。

第 9 章 結 論

岩石の圧裂試験に関する研究を行なうに当って、まず、従来技術がむづかしいとされていた岩石の引張試験を、試験片の製作方法および試験片の支持方法に種種の改良を加えて十分信頼できる結果が得られるようにした上で、数種の岩石のおのおのから採取した多数の試験片について引張試験と円板圧裂試験を実施し、これら2種の試験法による強さを統計学的に検討し、両者は等しいと認めて差支えなく、またばらつきにおいても甲乙をつけ難いことを認めた。

つぎに上のような実験結果が得られたことに対し、理論的に説明することを試みた。そのためにまず試験片は破壊の瞬間まで弾性体であるものと仮定し、载荷を受けた試験片内の応力を、Fourier 級数を用いて境界条件を忠実に表現することによって厳密に解析した。とくに载荷幅の拡大を考慮に入れ、従来あいまいであった载荷点付近の応力状態を始め、試験片内の各応力成分を詳細に計算した。この結果を考慮し、Mohr の破壊説が試験片の破壊に当てはまるものと仮定して、円板圧裂試験における試験片の破壊を検討したところ、よく説明できた。いいかえれば、試験片内の応力が弾性理論によって解析した値と等しいものと仮定し、かつ Mohr の破壊説が試験片の破壊に当てはまるものと仮定すれば、岩石の引張強さと円板圧裂試験によって求めた強さとは等しい値をとることが確かめられた。

有孔円板圧裂試験についても、弾性理論により厳密な理論解析を行ない、試験片内の各応力成分を詳細に計算し、これをもとに円板圧裂試験におけると同様の手法により理論的に検討した。円板圧裂試験においては载荷点の付近の小範囲に圧碎が起こるが、有孔円板圧裂試験ではこのような圧碎は起こらず、また前者では破断面上の各点は2軸応力状態にあるのに反し、後者では破壊が始まる点の付近は1軸応力状態にある。これらの点から考えると有孔円板圧裂試験の方が望ましいと考えられるが、破断面上の応力の分布が著しく不均一であるため、この試験は曲げ試験と同じ意義を有するに過ぎず、この試験で、円板圧裂試験と同じ仮

定のもとに導いた強さの算定式(4・2)を用いて得られる強さは引張強さよりはるかに大きい値を与えるであろうと推論される。実際に数種の岩石について試験した結果からこのことが確かめられた。

角板圧裂試験については、従来破壊荷重から強さを求める算定式が確立していなかった。そこで円板圧裂試験では弾性理論による応力解析結果と破壊条件に関する最大主応力説とから導いた算定式がよい結果を与えることにかんがみ、角板圧裂試験においても同様な考えのもとに、種々の条件の場合に対する詳細な応力解析の結果を考慮し、強さの算定式(4・3)を提案した。また円板圧裂試験や有孔円板圧裂試験の場合と同様の手法により角板圧裂試験を理論的に検討し、載荷幅と試験片高さの比 w_0/h が 0.15 ~ 0.40 の範囲で試験を行えば、載荷点付近に圧砕は起こらず、破断面上の2軸応力状態や破断面上の応力分布の不均一性は円板圧裂試験のそれとほぼ同じであるから、この試験は円板圧裂試験に優るとも劣らない良い結果を与えるであろうと推論される。実際に多数の岩石試験片を用いて試験した結果から、角板圧裂試験で式(4・3)を用いて決定される強さは円板圧裂試験による強さとよく一致し、強さのばらつきも非常に少ないことが確かめられた。

つぎに、現場で迅速に岩石の強度を試験できるように、採取した岩石の塊をほとんど仕上げをしないでそのまま試験片とし、点載荷を行なって圧裂試験に供することを考えた。そのために試験片の形状や Poisson 数や載荷幅が種々の場合について、点載荷を受けた試験片内の応力を弾性理論を用いて綿密に解析し、この結果を基に上に述べたのと同様の考えによって強さを算定する式(5・26)を導き、また上に述べたのと同様の手法によってこの試験法を検討した。その結果、この試験は、載荷板が小さいときには載荷点付近の大きい圧縮応力や破断面上の応力分布の2軸性や不均一性の影響が、円板圧裂試験やさきに述べた適当な条件のもとで行なう角板圧裂試験に比べて懸念されるが、載荷板の直径と試験片高さの比 w_0/h が 0.13 以上の範囲ではその程度は僅かであるから迅速試験法としては実用し得るものと推論した。また多くの岩石やコンクリートの試験片を用いて

詳細に実験した結果から、点載荷圧裂試験において w_0/h が 0.11～0.16 の範囲にある角に丸味をつけた平底円柱状の載荷板を用いて試験し、式(5.26)から強さを算定すれば円板圧裂試験によるのとはほぼ等しい強さが決定できることが確かめられた。さらにいえば、点載荷圧裂試験において、試験片の形状を円柱形とし、載荷板の大きさを $0.13 \leq w_0/h \leq 0.15$ の範囲にとるという条件のもとで行なうことにすれば、これによって求まる強さは円板圧裂試験による強さとよく一致し、しかも後者に比べて強さのばらつきも少ないことが認められるから、この試験法は迅速試験法としてのみならず円板圧裂試験と同様な精度の強さ試験としても利用しうることがわかった。

以上の圧裂試験における応力解析に当っては荷重は等分布すると仮定して行なったが、接触圧の理論によれば、載荷板を通じて岩石試験片に作用する荷重は等分布荷重ではなく凹型の不均等分布荷重であり、同時に岩石の水平方向の変形を拘束する摩擦力が作用していることも考えられるから、改めてこれらの作用を考慮した場合の角板圧裂試験および点載荷圧裂試験における試験片内の応力を解析し、これをもとにさきに行なったと同様の手法を用いてこれら両試験法の再検討を行なった。その結果、これら両試験片内の応力状態は等分布荷重が作用すると仮定した場合のそれよりも一層強さを求めるのに好都合な状態となり、これら両試験がさきの理論的検討で予想された以上に良い結果を与えていることの説明がついた。

最後に円板圧裂試験によって岩石の強さと同時に弾性定数も決定できれば便利であろうと考えてその方法を理論的に研究し、また炭素鋼や 2, 3 の岩石を用いて実験的に検討し、その結果岩石の弾性定数の簡易試験法として十分実用に供し得る一方法を得た。

謝 辞

この研究は京都大学工学部鉱山学（資源工学）教室・平松研究室で行なったものである。その間、恩師京都大学教授 平松良雄博士ならびに同助教授 岡行俊博士から終始変らぬ御懇篤な御指導と、身に余る御激励を頂いた。また実験に関しては、この期間に同研究室を御卒業された多数の方々の御協力を受けた。

本論文を発表するに当たり、これらの方々に心からの感謝の意を捧げ、厚く御礼申上げる次第である。