

砂のような粒状体の変形・強度挙動  
に関する微視的考察

1978年9月

小西純一

砂のような粒状体の変形・強度挙動  
に関する微視的考察

1978年9月

小西純一

## まえがき

砂、礫などの粒状土は一般に粘着性に乏しく、ばらばらの粒子が何らかの外的拘束と摩擦の存在によって、集合体としての形を保ち、強度を発揮し得る材料である。このような材料を抽象化して呼ぶ場合に、われわれは粒状体という語を使う。

元来ばらばらの粒から成る粒状体の性質は粒子そのものの性質だけではなく、その集合状態によっても大きく左右される。さらにこの集合状態は境界条件の変化たとえば応力の増加に応じて変化し、粒状体の変形・強度と密接な関係にある。したがって、このような粒状体の特性を本質的に解明するためには、粒子と粒子の微視的相互作用の機構に基礎を置くアプローチが必要となる。

最上により「粒状体の力学」と名付けられた土質力学の一分野は、そのような要請に基づく新しい領域である。

本研究も、この「粒状体の力学」にささやかな寄与をしようとするものである。

粒状体の変形・強度のよってきたるべき機構を考える上で、粒子の集まり方、ならび方とともに、粒子間で伝達される力の大きさ、方向および変形に伴うこれらの変化に関する情報が不可欠である。粒子の集まり方、ならび方とその変化は、実際の砂の実験からある程度とらえることができる。しかし、粒子間の力を、実際の砂粒子接点において直接測定することは今のところ不可能と思われる。

そこで、考えられる方法としては、粒子間力に関して適当と思われる仮定を設けるか、あるいは、粒子間力を測定できるような砂の模型を用いて実験的に求めることの2つがある。前者は従来多くとられてきた方法である。本研究においては、後者の方法を採用した。すなわち、砂粒子の模型として、光弾性材料から作製した小円柱を採用し、その二次元的集合体を砂の模型とし、この模型を用いて、二次元二軸圧縮および二次元単純せん断試験を行った。試験の全過程における任意段階において光弾性等色線縮写真を撮影しておき、その写真を解析することによって、全接点における粒子間力を測定できる。同時に粒子配列も測定できる。

このような方法を用いて、二次元かつ粒子形状が円形という非常に単純化された模型によってではあるが、巨視的応力-ひずみ関係と、微視的な粒子間力、粒子配列などの変化との対応を明らかにする。

なお、実験の種類としては、二次元二軸圧縮、二次元単純せん断および二次元繰返し単純

せん断（1方向および2方向）および $K_0$ 圧縮の4つで、間隙比や粒子間摩擦角を変えた実験も行っている。

次に、これら一連の模型実験から得られた知見に基づいて、粒子間力と主応力比の関係および粒子配列の異方性と主応力比の関係、さらには主応力軸の回転などについて理論的に考察を加える。

本論文の内容は、現場の問題に直接役立つものではないが、土の力学的性質の本質的な解明にいささかなりと貢献するところがあるならば幸いである。

## 謝 辞

本論文をまとめるに至るまでには、先生方はじめ多くの方々のお世話になった。ここに、御名前を記して深く感謝の意を表する。

京都大学教授後藤尚男先生には、大学院学生当時より今日に至るまで、親しくご指導・ご鞭撻をいただいている。著者の粒状体に対する興味は鉄道道床の研究を行なった大学院当時にはじまっており、粒状体研究のきっかけは先生によって与えられたとあってよい。

京都大学教授赤井浩一先生には、本論文をとりまとめるに当って、懇切なるご指導・激励を賜った。

信州大学教授川上浩先生には、学部学生当時よりの師として、終始変らぬご指導とご鞭撻ご援助をいただいている。

埼玉大学工学部助手小田匡寛氏は粒状体の研究を通じての知己であり、彼との議論が研究をすすめる上で非常によい糧となった。また彼の著作から多くのものを得ている。本論文には砂の構造に関する貴重なデータと写真を提供していただいた。

信州大学工学部卒業生、檜山義光、湯沢栄次、室伏優、柳沢洋一、西本宏、飯田明、吉田晃、小沢和義の諸氏には卒業研究として骨の折れる実験および解析を手伝ってもらった。

京都大学教授丹羽義次先生、同小林昭一先生、山口大学助教授中川浩二氏には、光弾性実験および模型粒子作製について、ご教示いただいた。

信州大学工学部技官豊田富晴氏には図面作成の労をわずらわした。

この他、京都大学路線施設学研究室の諸氏、信州大学道路工学研究室の諸氏のお世話になった。

また、最上武雄先生を委員長とする土質工学会粒状体の力学特性研究委員会、および、その前身とも言える、「八王寺・粒状体セミナー」における議論と勉強から多くのものを得た。

なお、愛媛大学教授八木則男先生をはじめとする多くの方々の著作から図面・データなどを引用させていただいた。

# 砂のような粒状体の変形・強度挙動に 関する微視的考察

## 目 次

まえがき	i
謝 辞	iii
目 次	iv
第1章 序 論	1
1.1 粒状体と粒状体力学	1
1.2 本論文の目的	3
第2章 粒状体の力学的性質を支配する諸要因	5
2.1 はじめに	5
2.2 粒子の性質	5
2.2.1 粒子の材質	5
2.2.2 粒 度	7
2.2.3 粒子形状	8
2.3 構成要素の組成状態	8
2.3.1 密 度	8
2.3.2 構 造	10
2.3.3 粒子の結合状態	13
2.3.4 間隙流体の状態	14
2.4 試験条件	14
第3章 粒状体の変形・強度に関する従来/mainな研究	17
3.1 概 説	17
3.2 ダイレイタンスーに関する初期の研究	17
3.3 微視的考察に基づく研究	20
3.4 塑性論に基づく研究	34
3.5 粒状体の統計理論	36

第4章 軸差応力を受ける粒状体の変形機構の微視的考察	39
4.1 序 論	39
4.2 実験の方針	40
4.3 模型粒子	41
4.4 実験装置	42
4.4.1 二次元二軸圧縮試験機	42
4.4.2 光弾性実験装置	43
4.5 実験方法	44
4.6 実験結果	44
4.6.1 応力・ひずみ・体積変化関係	44
4.6.2 応力・ダイレイタンスー関係	47
4.6.3 力の伝達経路について	47
4.7 粒子構造の変化	49
4.7.1 概 説	49
4.7.2 粒子接点角の分布	50
4.7.3 異力度	55
4.7.4 Wiendieck らの実験	57
4.7.5 砂の三軸試験における構造変化(小田の実験)	59
4.7.6 まとめ	63
4.8 粒子間力	63
4.8.1 測定方法	63
4.8.2 粒子間力の大きさ	64
4.8.3 粒子間力と粒子接点角の関係	64
4.9 接点において発揮されている摩擦角	67
4.10 ひずみ硬化の機構について	69
4.11 結 論	70
4.A1 粒子の作製方法	70
4.A2 粒子間力の測定原理	72
第5章 粒状体のせん断変形機構に関する微視的考察	75
5.1 序 論	75
5.2 実験方法	76

5.2.1	粒 子	76
5.2.2	二次元単純せん断試験機	77
5.2.3	実験手順	78
5.3	実験結果	78
5.3.1	せん断応力・せん断ひずみ・垂直ひずみ関係	78
5.3.2	光弾性等色線写真	80
5.4	粒子接点角の分布	83
5.4.1	粒子接点角の定義(二次元の場合)	83
5.4.2	粒子接点角の分布	83
5.4.3	$N_i$ の集中方向および集中度	85
5.5	粒状体の応力状態	87
5.5.1	粒子間力から応力への変換	87
5.5.2	モールの応力円	89
5.6	最大主応力の方向と $N_i$ の集中方向の関係	90
5.7	砂の一面せん断試験	91
5.7.1	用いた砂	91
5.7.2	試験方法	91
5.7.3	粒子構造の解析	92
5.7.4	試験結果の考察	94
5.7.5	二次元モデル実験との比較	94
5.8	粒子間接点において発揮されている摩擦角	95
5.8.1	定 義	95
5.8.2	測定結果	95
5.9	粒子間摩擦角が粒状体の変形・強度に及ぼす影響について	97
5.10	結 論	98
第6章	粒状体の繰返しせん断過程に関する微視的考察	99
6.1	序 論	99
6.1.1	まえがき	99
6.1.2	繰返し荷重を受ける粒状体の挙動に関する従来の研究	99
6.2	一方向繰返しせん断	101
6.2.1	実験の概要	101
6.2.2	実験結果	101



6.2.3	粒子構造の変化	103
6.3	両方向繰返しせん断	105
6.3.1	実験の概要	105
6.3.2	応力比・垂直ひずみとせん断ひずみの関係	106
6.3.3	粒子構造の変化	107
6.4	結 論	111
第7章 粒状体におけるひずみ硬化の機構および構造異方性に関する二、三の考察		
7.1	はじめに	113
7.2	粒状体における応力の概念	113
7.2.1	巨視的応力と粒子間力の関係	113
7.2.2	粒子間力と粒子接点角の関係	116
7.3	粒状体におけるひずみ硬化の機構	117
7.3.1	基本式	117
7.3.2	各主応力面上の接点数について	119
7.3.3	粒子間力と主応力・粒子構造の関係	121
7.3.4	軸対称の場合と二次元の場合	122
7.3.5	応力比-構造関係式	123
7.3.6	粒子間力の推定値と実験値の比較	125
7.3.7	まとめ	126
7.4	粒状体の構造異方性について	126
7.4.1	はじめに	126
7.4.2	$E(\alpha, \beta)$ と主応力面上の接点の法線方向の確率密度函数の関係	127
7.4.3	構造異方性を表わすテンソル量について	132
7.5	結 論	135
第8章 単純せん断における主応力軸の回転に関する理論的考察		
8.1	序 論	137
8.2	粒子間力, 粒子構造と応力の関係	139
8.3	主応力軸の回転角	145
8.4	応力比 $\tau/\sigma$ と主応力軸の回転角 $\psi$ の関係	147
8.5	主応力軸が回転する場合の粒子間力の推定式	148
8.6	結 論	149

第9章 粒状体の静止土圧状態に関する微視的考察	151
9.1 序 論	151
9.2 静止土圧状態に関する従来の研究	152
9.2.1 実験室における $K_0$ 値の測定	155
9.2.2 現地における $K_0$ 値の測定	157
9.2.3 $K_0$ 値に関する理論的研究	157
9.3 実験方法	162
9.3.1 モデル粒子	162
9.3.2 粒子間摩擦角	162
9.3.3 実験装置	163
9.3.4 実験手順	165
9.3.5 側方変位について	165
9.4 実験結果と考察	166
9.4.1 鉛直ひずみと鉛直応力の関係	166
9.4.2 水平応力・ $K_0$ 値と鉛直応力の関係	168
9.4.3 $K_0$ 値の間隙比の関係	169
9.4.4 $K_0$ 値と粒子構造異方性の関係	170
9.4.5 粒子間力	174
9.4.6 接点において発揮されている摩擦角	174
9.4.7 考 察	175
9.5 結 論	176
第10章 結 論	179
参考文献	183
主な記号	195

# 第1章 序 論

## 1.1 粒状体と粒状体力学

「粒状体」とは、シルト、砂、礫、ロックフィル材などのいわゆる非粘着性材料の総称である。英語の“granular material”，仏語の“milieux pulvérulent”，独語の“körniger Medien”などに相当する名称として、最上によって命名され、応用力学、土質力学の分野において、かなり定着してきていることは周知のとおりである。

粒状体は固体の粒子の集合体であって、固体と流体との中間的な挙動を示す。このような性質をもつ非粘着性材料を取扱う力学全般を、広い意味で、「粒状体力学」と呼んでもよいのであるが、土質力学には古くから、土圧論を中心とする「粉体力学」と呼ばれた一部門があった。一方、化学工学の分野における「粉体工学」(powder technology)が著しい発展を遂げた。これらにおいては、一般に、粒から成る材料を連続体的に取扱ってきた。最上が粉体という語を避け、あえて「粒状体」という語を用いた理由は、この材料がばらばらの粒の集まりであることを意識した上で力学的考察を行おうとする点にある(最上, 1976)。したがって、ここでは「粒状体力学」とは、粒状体の力学特性を、粒子そのものの性質や粒子の集合状態などから解明してゆこうとする力学の一分野であると考えことにする。つまり単に粒状体を対象にした力学という意味ではなくて、対象物を粒状体として取扱う力学と考えるのである。

三笠は土の力学的性質は、土の種類と、その状態で決まり、さらに土の状態は、密度、含水量および骨組構造によって決まると考えて、次のような函数関係が成り立つとした(三笠, 1964)。

$$\text{土の力学的性質} = F(\text{土の種類; 密度, 含水量, 骨組構造}) \quad (1.1)$$

三笠は特に骨組構造の重要性を強調したが、粒状体力学において、構造の概念は最も基本的なもの1つである。

式(1.1)をより一般的な形に書き直せば次のようになるであろう。

$$\text{土の物理的・力学的性質} = F(\text{構成要素の基本的性質, 構成要素の組成状態, 試験条件}) \quad (1.2)$$

式(1.2)右辺の各変数の内容は、三笠(1964)、小田(1976)らの考え方を参考にして、次のように考えることができよう。

## 1 構成要素の基本的性質

- (1) 粒子の性質
  - a) 粒子の材質
  - b) 粒度組成
  - c) 粒子形状
  - d) 吸着イオンの質と量
- (2) 間隙流体の性質
  - e) 流体の物性

## 2 構成要素の組成状態

- (1) 粒子の集合状態
  - f) 密度
  - g) 幾何学的配列
  - h) 結合状態
- (2) 間隙流体の状態
  - i) 飽和度

## 3 試験条件

- j) 試験機の型式
- k) 排水条件
- l) その他

以上の各項のうち、試験条件は他の2変数とは異質のものであって、元来、式(1.2)に入れるべきではないかもしれない。しかしこれをあえて加えた理由は次のようである。

われわれが土の物理的・力学的性質を求めようとする場合には、必ず何らかの試験機を用いる。たとえば、土の強度定数を求めるために、一軸圧縮、三軸圧縮、一面せん断、単純せん断、ねじり、ベーン、平面ひずみ圧縮など非常に多岐にわたる試験方法が考案されている。しかし、これらを用いて、同じ土を同一条件下で試験して得られた、土の強度定数の値は、一般に同一の値を示さない。試験機によって、得られた強度定数に差異が生じることが多い。異なる試験機によって得られた値相互の関係を明確にし、真の値を求めるためには、各試験機の供試体における境界条件や応力・変形の状態をできるだけ正確に把握する必要がある。この点に関して、現状はまだ満足すべき状態ではなく、われわれが実際に観察し得る土の性質は試験条件によって左右されると考えてよい。

以上のように土の性質は多くの要因に支配されるが、これら全部を含む函数関係を求めるのは当面不可能であるから、粒状体力学においては、これらの要因の中から重要と思われるいくつかを選んで種々の方法により考察が進められる。

粒状体力学の中心を成す、粒状体の変形の定量的表現に関する研究は、最上(1976)と龍岡(1978)によれば、次の4つに分類される。

- (1) 物理的意味をあまり問題にせず、実験値をできるだけよく表現できる簡単な応力・ひずみ関係式を求める。
- (2) 連続固体の力学、特に塑性論を修正して用いるもの。いくつかの基本概念を仮定する

が、仮定の正否は、実験結果との対比による。この方法では、不連続体である粒状体を連続体として扱っていることになり、扱う物理量は、マクロな量としての応力とひずみである。

(3) 粒状体のモデル実験、あるいは、実際の砂の実験を通じて、粒子配列の状態またはその変化を求める。あるいはこれに関する仮定を行なう。さらに、これを一般化して、変形の議論を行なう。この場合も一般化された後は、粒状体を連続体として扱い、仮定の正否は実験で測定されるマクロ量との対比による。

(4) 変形機構の物理的表現に重点を置くもので、情報理論・統計的手法が用いられる。

これら各種の研究は、対立するものではなく、相互補完的なものであることは言うまでもない。はじめに述べた定義に従えば、粒状体力学の範囲に入るのは、(2)~(4)であり、とりわけ、(3)と(4)の方法が中心となる。

本論文の内容は(3)のミクロ的な観察に基づく方法に属している。

## 1.2 本論文の目的

本論文は前述の最上・龍岡による分類の(3)に属する方法を採り、粒状体の応力および変形を、粒子レベルの微視的\* 観察結果に基づいて考察しようとするものである。

本論文では、砂の三軸圧縮試験、単純せん断試験あるいは $K_0$ 圧縮試験を念頭に置きながら、粒子レベルの微視的観察が連続的に可能な二次元模型実験を行なっている。その場合に模型粒子を光弾性材料で作製し、粒子間力の測定を可能としており、これにより、粒状体の粒子構造と応力状態との同時観察が可能である。なお実際の砂における微視的観察結果とできるだけ比較対照するように努めている。

以上のような二次元模型実験を中心にして、次の事項を明らかにすることが本論文の目的である。

- (1) 粒状体の応力と粒子間力の関係
- (2) せん断型試験機における主応力軸の回転
- (3) 主応力軸と他の主軸との関係
- (4) ひずみ硬化と粒子構造変化の関係
- (5) 粒子間力の性質と粒子構造との関係
- (6) 粒子間摩擦角の発揮
- (7) 二軸圧縮と単純せん断との関係
- (8) 繰返しせん断時の変形の微視的機構
- (9) 静止土圧状態の微視的機構

---

\* 微視的という語は、本論文においては、粒子の大きさ程度のレベルを指すのに用いる。したがって、粒子配列や粒子間力、粒子の移動などの観察・測定などは微視的である。

## 第2章 粒状体の力学的性質を支配する諸要因

### 2.1 はじめに

第1章において列挙したとおり、粒状体の力学的性質は、多くの要因が相互にからみ合いながら生み出しているといつてよい。

多くの要因のすべてが、ある性質にとって同程度に支配的ということではなく、問題とする性質によって、どの要因が重要かが自ら異なる。

このような諸要因を網羅的に調べるのが本論文の目的ではないが、これらについて一通り知っておくことは、粒状体力学にとって重要なことであろう。そこで、本章においては、粒状体の力学的性質を支配する諸要因に関する従来の研究を概観しておくことにする。

### 2.2 粒子の性質

#### 2.2.1 粒子の材質

粒状体の性質を左右する最も基本的なものは粒子の性質であり、粒子の性質、たとえば、粒子の強度特性、変形特性、摩擦特性などは、粒子の材質に支配される。

ここでは、材質に関連して、砂粒子の鉱物組成、粒子間摩擦角および粒子破砕について簡単に述べておく。

(1) 鉱物組成(大草, 1972, 関, 1976 など)

砂粒子の材質はその鉱物組成によってきまる。砂は一般に鉱物粒子と岩石碎屑物の混合物である。鉱物や岩石の性質は、その種類や風化の程度などによって、非常に多岐にわたっており、どれが主成分であるかによって、砂の性質はかなり異なったものとなる。われわれが日常接している砂では、石英、長石、雲母などの鉱物やチャートなどが多く観察される。

石英(quartz)は、造岩鉱物の中で最も普通の鉱物であり、劈開がない、硬い、摩耗しにくい、風化作用を受けても分解しにくい、などの性質を有しているのので、川床や海岸の砂・礫をつくる最も主要な鉱物となっている。

長石(feldspar)は、劈開性が強く、摩損されやすく、化学的風化作用によってカオリンなどの粘土鉱物に変化しやすい。

雲母(mica)は、薄片状の構造を有し、雲母を数%含む砂やシルトは、著しい圧縮性と除荷時の膨潤性を示す。

輝石、角閃石およびかんらん石などの鉱物は風化作用によって急速に破壊されるから、多く

の土には含まれていない。

チャート (chert) は、微粒～極微粒の石英から成り、一般に層理面に平行な板状または縞状の割れ目と、それに直交する節理面がよく発達しているかなり堅硬な珪質岩である。

## (2) 粒子間摩擦角

粒子間摩擦角  $\phi_\mu$  は、粒状体の力学的性質を支配する最も基本的なパラメーターの1つである。たとえば、Caquot (1934) は、限界間隙比状態における内部摩擦角  $\phi_{cv}$  と  $\phi_\mu$  の有名な関係式、 $\tan \phi_{cv} = \frac{\pi}{2} \tan \phi_\mu$  を提案した。Bishop (1954) も三軸圧縮に対して、 $\sin \phi = 15 \tan \phi_\mu / (10 + 3 \tan \phi_\mu)$  を提案した。しかしながら、物体間の摩擦は材質によって支配されるのみならず、接触面の状態、試験方法によって大きく左右されることが知られており、粒状体の力学にとり入れるべき  $\phi_\mu$  をいかにして測定し、決定するかについての定説は未だないというのが現状である。土の力学に適用することを目的にして測定された  $\phi_\mu$  の値は、Tschebotarioff and Welch (1948) が石英その他について求めて以来、Rowe (1962), Horn and Deere (1962), Skinner (1969), Procter and Barton (1974), Nascimento (1977) など多数に上るが、それぞれ、試験方法、条件などが異なることもあって、同じ材質の粒子についてもかなり広範囲の値が報告されている。(表 1.1)

表 1.1  $\phi_\mu$  の測定値の例

材 質	研 究 者	試 験 方 法	条件	$\phi_\mu$ (度)		
石 英 (石英砂)	Tschebotarioff and Welch (1948)	ブロックとモルタル中に 埋め込んだ粒子	乾燥	6		
			湿潤	24.5		
			飽和	24.5		
	Rowe (1962)	固定しない粒子と平板	飽和	22~31		粒径小→大, $\phi_\mu$ 大→小
	Horn and Deere (1962)	3個の半球と平面 "	乾燥	6		
飽和			23			
Procter and Barton (1974)	1個の粒子と平面 " 粒子と粒子	乾燥	17.4			
		飽和	22.2			
		"	26			
長 石 (長石砂)	Horn and Deere (1962)	3個の半球と平面 "	乾燥	6		
			飽和	37		
	Procter and Barton (1974)	1個の粒子と平面	飽和	28.9		
ガ ラ ス (ガラスビーズ)	Rowe (1962)	固定しない粒子と平板	飽和	17		
	Skinner (1969)	"friction apparatus" (1φおよび3φのビーズ)	乾燥	2~7	垂直力Nの増大と ともに $\phi_\mu$ も増大	
			飽和	27~43		
Procter and Barton (1974)	粒子と粒子 "	乾燥 飽和	5~10 17.9			

		1 個の粒子と平面 "	乾燥 飽和	5~10 15.5
鋼 (鋼球)	Skinner (1969)	"friction apparatus" (1/8" φ 鋼球)	乾燥	16~33
ステンレス鋼 (鋼球)	Procter and Barton (1974)	粒子と粒子 1 個の粒子と平面	飽和 "	8.1 8.6
白雲母	Horn and Deere (1962)	ブロックとブロック "	乾燥 飽和	23 13

各研究者の実験結果を総合して考えると次のことが言えよう。

1)  $\phi_{\mu}$  の測定方法については、1 個 1 個の粒子をこすり合わせる方式がより本質的であるとも考えられるが、実際の砂は多数の種々の粒子から成っていることを考慮すれば、Rowe が行なったような多数の自由粒子と平板をこすり合わせる方式の方が、平均的な代表値を得るのに好都合であると考えられる。

2)  $\phi_{\mu}$  は材質によって変わる。

3)  $\phi_{\mu}$  は粒径によって変わる。(粒径小なる方が  $\phi_{\mu}$  大)

4)  $\phi_{\mu}$  は垂直力によって変わる。(垂直力大なる方が  $\phi_{\mu}$  大)

5)  $\phi_{\mu}$  は接触面の粗さによって変わる。

6)  $\phi_{\mu}$  は水の存在によって変わる。(石英・長石などでは乾燥時<湿潤時)

しかし、以上の各項とも決定的な結論とは言えないのであって、それぞれに未解決の問題を多く含んでいる。

金属材料の摩擦や潤滑の機構については、Hardy, Holm, Bowden, 曾田などの研究によってかなり解明されているとあってよいが土、岩などの材料に関しては今後の研究にまつところが多い(Bowden and Tabor, 1950, 曾田, 1954)。

### (3) 粒子破碎

フィルダムや砂礫層中の杭の先端部などでは、砂・礫などはかなり高い圧力を受ける。このような高圧下の粒状材料の挙動は、低圧下の挙動とかなり異なることが知られており、その原因の第 1 に粒子の破碎が挙げられている(Vesić and Clough, 1968, 三浦・山内, 1977, など)。

また、マサヤシラスなどの特殊土においては普通の圧力下においても粒子の変形・破碎が著しく、その力学的挙動は特異なものとなっている(春山, 1969, 松尾・福本, 1976 a, b, など)。

### 2.2.2 粒度

粒度は粒状体の物理的・力学的性質を支配する重要な要因の 1 つである。粒度によって密度が変化することはよく知られている(たとえば, Kolbuszewski, 1948)。一般に、密度が大



きくなると強度も増大すると考えられている。小田(1977)はこの点について、粒径の異なる2種類のガラスビーズの混合体の実験結果より、密度の増加は粒子構造の不均一性を伴うことを見出し、粒状体の力学特性と密度の関連性は、粒子構造の観点を踏まえて吟味すべきことを示唆しており興味深い。

### 2.2.3 粒子形状

粒子形状は大きく分けると次の3つの側面をもつ。

- 1) 粒子全体の形状
- 2) 角ばりの具合
- 3) 粒子表面の粗さ

1)は、粒子が全体として、どのような形をしているかを問題にする。これを表現するには、板状、葉状、棒状、塊状という言葉が用いられる。実際の粒子が、どれに当てはまるかを客観的に定める方法として、elongation ratio ( $q=b/a$ )、flatness ratio ( $p=c/b$ )および shape factor ( $F=p/q$ ) (ここに  $a, b, c$  はそれぞれ粒子の最大、中間、最小の長さ、これらは普通互に直角にはかる)を用いて、上記の4つに分類する方法がLeesによって提案されている(最上, 1969による)。また、小田は、粒子の二次元断面でのaxial ratioを用いることを提案している(小田, 1972)。この粒子形状は、粒状体の構造異方性を左右するので、間接的に力学特性に影響を及ぼす。

2)は、粒子表面の大きな凹凸の具合が、どのようなかを表わすものであって、Wadellのroundness、Leesのangularityなどで定量的に表現される。なお、KrumbeinやLeesは視察によって、これらを直ちに判断するための標準図表を提案している(最上, 1969による)。

角ばりの具合あるいは丸っこさも、粒状体の物理的・力学的特性を左右する。角ばった粒子の砂の方が、丸っこい粒子の砂よりもせん断強度が大きいとされているし、鉄道軌道における道床の安定性は丸っこい粒子の川砂利を用いるよりも、角ばった粒子の碎石を用いる方が大きいことが知られている。また、丸っこい粒子の砂は、角ばったものより、最大・最小間隙率が小さくなる。

第3の粒子表面の粗さは、顕微鏡レベルでの凹凸である。粒子表面の凹凸は、粒子間摩擦角 $\phi_\mu$ や、砂のセメンテーションなどと関連が深いことが予想される。

## 2.3 構成要素の組成状態

### 2.3.1 密度

#### (1) 密度の表わし方

粒状体の力学特性は、その締まり具合によって大きく変化する。たとえば、粒状体の強度はよく締まったものほど大きく、従来より多くの研究者が強度と締まり具合との相関関係を研究

し、関係式を提案している。締まり具合を表わす尺度としてはいろいろな指標が考えられている。すなわち、間隙比 $e$ 、間隙率 $n$ 、specific volume  $v = 1 + e$ 、乾燥密度 $\gamma_d$ 、含水比 $w$ 、締固め度、相対密度 $D_r$ など。

前の5例は、絶対的な値であり、最後の2例は相対的な値である。粒状体の締まり具合を絶対的な値で評価することが、必ずしも適切でない場合がある。というのは、いま2種類の砂Aと砂Bを考えると、これらの砂の最大間隙比・最小間隙比は一般に等しくないから、ある間隙比において砂Aはかなり締った状態であったとしても、砂Bはゆるづめの状態であるという場合が起り得るからである。そこで相対密度を用いるのが好都合の場合がある。しかし、この相対密度は最大・最小密度のわずかな測定誤差によって、推定値にかなりの誤差を生じることが、吉見・陶野(1973)によって指摘されている。相対密度の信頼性を向上させるためには、最大・最小密度の標準化した測定方法の確立が必要であり、その場合、測定回数も統計学上十分な数をとる必要がある。最大・最小密度の標準測定方法については、土質工学会に設けられた砂の相対密度測定法小委員会によって試案が提出され、ようやく、わが国における統一・標準化が計られようとしている(吉見他、陶野他、広瀬他、いずれも1977)。

## (2) 他の諸性質との関係

粒状体の強度と締まり具合とは、密接な関係にあることはよく知られており、多くの研究がある、以下に主なものを列挙する。\*)

1) Caquot et Kerisel (1956) :  $\tan \phi = \lambda$  (砂では  $\lambda = 0.5 \sim 0.6$ )

2) Winterkorn (1964) \* :  $\tan \phi = \frac{A}{e - e_{min}}$

3) Kézdi (1964) :  $\tan \phi = \frac{C \sqrt{e - e_{min}}}{\exp\left(\frac{e - e_{min}}{a}\right) - 1}$

4) 最上 (1965) :  $\left. \begin{array}{l} \text{平面ひずみ} \\ \text{平面応力} \end{array} \right\} : \sin \phi = \frac{k}{1 + e}$

三軸圧縮 :  $\sin \phi = \frac{3k'}{2(1 + e) + k'}$ ,  $k' = \frac{k}{2}$

以上は、間隙比 $e$ と内部摩擦角 $\phi$ の関係を与えるものであるが、相対密度と内部摩擦角の比例関係を与えるものもある(Cornforth, 1973, Al-Hussaini, 1973など)。

また、砂質土の液状化現象と相対密度とは密接な関係にある。谷本(1971)は、ある繰返し回数で砂を液状化させるのに必要な応力比は、相対密度にほぼ比例することを見出している。

さらに、標準貫入試験による $N$ 値と相対密度との関係も実用的見地から研究されているが、

---

\*) 記号説明 :  $\phi$  : 内部摩擦角,  $e$  : 間隙比,  $e_{min}$  : 最小間隙比,  $\lambda, A, a, C, k, k'$  : 定数。

(\* 印は最上(1969)による)

粒子間のセメンテーションなど他に考慮すべき要因が多いので、両者の相関関係はかなりの幅をもって考えなければならないようである (Lacroix and Horn, 1973 その他)。

さて、上述のように、砂の相対密度と強度とは密接な関係にあって、ある砂の間隙比なり相対密度が同じであれば、強度もほぼ同じであるという考え方が一般的である。しかし、間隙比が同じでも、堆積構造が異なると必ずしもそうならないという報告がなされている。Silver and Park (1976) は、同じ砂を2つの方法 (突固めと振動) によって同じ間隙比に締固めた場合について、ある繰返し回数で液状化を生じさせるに必要な応力比を調べたところ、突固めによる締固めを行った試料の方が明らかに大きい応力比を必要とした。このような差が生じる原因は、締固め方法の差異に基づく粒状体の構造の違いによるものと考えられる。また、小田 (1972a) は同じ砂を2種の締固め方法 (突固めとモールドをたたく方法) によってほぼ同一間隙比にした供試体の3軸圧縮試験を行なって、この両者で明瞭に異なった応力-ひずみ関係を得ているが、この違いが構造の違いによるものであることを顕微鏡観察による構造の定量的解析によって確かめている。

したがって、粒状体の力学的特性の研究に際しては、密度のみならず構造ないし構造を左右する供試体作製方法にも十分な考慮を払う必要があるだろう。

### 2.3.2 構造 (fabric)

粘性土の微視的な粒子配列構造についての関心はかなり以前から高く、Terzaghi の *Erdbaumechanik* (1925) にもすでに記述されており、大抵の教科書においても言及されている。

近年走査型電子顕微鏡の発達・普及に伴って、粘性土の微視的な構造の研究は非常に活発であり、1973年には国際シンポジウムが開かれた (Barden and Pusch, 1973)。

一方、粒状土においては、微視的な構造が土質力学的見地から取り上げられるようになったのは比較的新しいことに属する。

粒状体は、一般的には均一であることは少なく、均一な小部分の不均一な集合体であると考えられる。そして、この不均一性が、粒状体の力学特性を考える場合に本質的であることは、最上の教えるところである。しかし統計的にみて均一な領域の構造特性が最も基本的であると考えられ、これに関する研究が多くの研究者によって行われている。

粒状体の微視的構造は次の2つの概念を含んでいる (小田, 1975)。

- 1) 個々の粒子の配向性 (orientation fabric)
  - 2) 粒子のつまり方 (packing)
- (1) 個々の粒子の配向性

砂粒子は一般に球ではないから、ある座標空間にある粒子には方向と向きが定義できる。しかし後者は通常考えないことが多い。

粒子の方向は、粒子に直交三軸を考え、それらのうちの長軸と短軸が空間座標軸といかなる傾きをもっているかで表わすことができる。砂粒子は、一般に、ランダムに詰まっているから粒子の方向もランダムであるが、統計的に調べてみると、長軸と短軸とがいずれかの方向に集中する傾向にあることが多い。この(a)集中する方向 (preferred orientation 選択方位, 集中方向) と(b)集中度 (intensity of preferred orientation) とを調べることによって、我々は、粒子の配向性を定量的に把握することができる。

粒子の配向性を調べる方法は今のところ2つある。1つは、Arthur らによって報告されているX線を照射する方法 (Arthur and Dunstan, 1969, Arthur and Menzies, 1972) であり、もう1つは、接着剤で固結させた粒状体より薄片を作製して、2次元的に粒子の見掛けの長軸の方向を測定する方法である (小田, 1972 a)。

集中方向および集中度は、それぞれ、vector mean direction および vector magnitude を計算することによって、定量的に表現できる (Curry, 1956)。

## (2) 粒子のつまり方

粒状体内の1つの任意の粒子を考えると、この粒子はその周辺にある他の複数の粒子と接触している。この場合、(a)接点数と(b)各接点における接平面に立てた法線の方向の2つを、すべての粒子について調べてやれば、粒状体全体での粒子と粒子の相互位置関係の様子が明らかとなる。

(a)の接点数は、粒状体の密度あるいは間隙比 $e$ と密接な関係があることが、理論的・実験的に知られている。

(b)の接点方向は、粒状体全体 (あるいは一部) における法線方向の3次元的分布を確率密度関数として表示することによって、目的が達せられる。

接点方向の分布は、粒状体の力学特性を支配する最も基本的な要素であり、Rowe (1962), 村山 (1964), Horne (1965), 松岡 (1973), 小田 (1974), 徳江 (1975) などの理論式は、接点方向の分布とその変化に着目して、応力、ひずみ、ダイレイタンスーなどの関係を求めている。

表 2.2 および 2.3 に粒状体の構造に関する主な研究をまとめて示した。

表 2.2 粒状体の構造に関する研究 (実際の砂に関するもの)

区分	研究者	微視的構造を調べる方法	測定量	目的/他の物理的・力学的特性との関係	備考
実際の砂の構造	Windisch and Soulié (1970)	固結・薄片	間隙比 粒度分布 間隙の大きさの分布	手法の追求に重点	

実際の砂の構造	小田 (1972a, b, c)	固結・薄片	間隙比 粒子の配向性 粒子接点の方向性 $E(\beta)$ 三軸圧縮試験 一面せん断試験 の各段階 において測定	各種砂について調べる．粒子形状との関係 a) 締固め方法による． $E(\beta)$ の違い b) 初期の $E(\beta)$ と強度・変形特性との関係 c) 変形過程における $E(\beta)$ の変化 (ひずみ硬化のメカニズム)	$\sigma_1/\sigma_3 = k_1 \frac{s_z}{s_x} + k_2$ $-\frac{dv}{d\varepsilon_1} = k_3 \frac{s_z}{s_x} + k_4$
	Arthur and Dunstan (1969) Arthur (1971) Arthur et al. (1972)	X線照射		不均質性 粒子の配向性	
	Borowicka junior (1973)	固結薄片	接点数 接点の方向性 一面せん断試験の各段階において	密度との関係 せん断変形に伴う分布の変化	

表 2.3 粒状体の構造に関する研究 (球・円柱その他のモデルによるもの)

区分	研究者	2次元/ 3次元	粒子	変形・測定量(マクロ)	測定量(ミクロ)
模型	最上 (1965)	2次元	等大球	2軸圧縮 ひずみのみ	各部における間隙比 間隙比の平均値と偏差
	Dantu (1957)	2次元	丸棒	部分圧縮・一面せん断・光弾性	粒子間力, 接点数, 間隙比
	Dantu (1968)	3次元	球	等方圧縮 光弾性応力凍結法 圧力	粒子間力
	Biarez et Wiendieck (1963) Wiendieck (1967)	2次元	不規則な形の平板	2軸圧縮 ひずみ	粒子接点角 幾何学的異方性指数 $\Lambda$ とひずみの関係

Rowe (1962)	2次元 3次元	等大丸棒 等大球 (規則配 列)	2軸圧縮 応力とひずみ 3軸圧縮 "	粒子接点角
松岡 (1973)	2次元	丸棒	一面せん断 応力と変位	粒子接点角 粒子間力(光弾 性) 粒子接点角の 変化
小西 (1973, 1974)	2次元	丸棒 6.8.10φ	2軸圧縮 応力とひずみ 単純せん断 応力とひずみ 断 光弾性	粒子接点角, 粒 子間力 mobilized angle of friction
小田 (1977)	3次元	ガラス球 (ランダム)	容器につめる	1粒子当りの接 点数 間隙比~粒子 接点数, 平均 値と偏差
Bernal and Mason (1960)	3次元	ガラス球 (ランダム)	容器につめる	1粒子当りの接 点数
Smith, Foote and Busang (1929)	3次元	鉛散弾 (ランダム)	容器につめる	1粒子当りの接 点数 間隙率による 接点数分布の 変化
Kallstenius and Bergau (1961)	3次元	ガラス球	容器につめる	間隙比 不均一性・異方 性
Feda (1969)	2次元	円板(等 径)		接点数

### 2.3.3 粒子の結合状態

我々は普通、砂を非粘性材料として取扱っている。しかし、自然堆積地盤の砂が一軸圧縮強さを有していることはよく経験するところである。

陶野(1975)は、東京地方の第四紀砂層に関して、乱さない試料の一軸圧縮強さ、間隙比、細粒分含有率を調べ、さらに、砂粒子の表面構造や砂粒子間の接点の結合状況を、走査型電子顕微鏡を用いて観察した。それによれば、砂粒子間には必ずといってよいほど細粒分が介在して

いる。また、堆積年代が古く密度の高いものほど、砂粒子は互に接するようになる。そして、細粒の非晶質の物質によって互いの粒子が接着され、一軸圧縮強さを有することとなり、この一軸圧縮強さは、細粒分含有率に比例することが明らかにされている。もちろん、完全に乱した試料を元の密度につめ直しても、飽和状態では自立しない。

この粒子間のセメンテーション (cementation) は、大気との接触によって容易に風化消失するといわれており、砂の強度成分としてどのように考えるかは今後の問題である。

### 2.3.4 間隙流体の状態 —— 飽和度

間隙流体の効果は、大きく次の2項に分類できよう：

#### (1) 間隙圧の発生

- a) 非排水条件下で間隙水圧・間隙空気圧が発生し、有効応力を増減する効果。
- b) 飽和度が低くなると、メニスカス効果によるサクションが発生し、砂は見掛け上、粘着力を有することになる。

#### (2) 間隙流体による物性の変化

- a) 粒子間摩擦角に対して、低減効果をもつ場合 (潤滑剤) と増大効果をもつ場合がある。
- b) 粒子の性質 (強度や変形特性) の変化、および、粒子間のセメンテーションの弱体化。

## 2.4 試験条件

本項は、これまで調べてきた諸要因とは性格が異なり、粒状体そのものが持っているものではなく、外部的な要因である。一般に、土質材料は、同一の試料でも試験方法や試験条件によって異なった挙動を示す。

異なった挙動の中には、試験方法等に固有の各種の誤差によるものも含まれる。各種誤差は予め取りのぞく工夫をするか、あるいは補正を適確に行うことによってその影響を許容誤差内にとどめることが必要となる。

#### (1) 試験機の種類

せん断型：一面せん断；単純せん断；ねじりせん断

圧縮型：一軸；三軸（軸対称）；三軸（3主応力）；平面ひずみ

各種の試験機を用いて得られる強度変形特性の間の関係を明らかにすることが重要である。しかし、各試験機における供試体内・および境界面上での応力状態すら不明の点が多い現状なので、今後とも重要な研究課題であろう。

一面せん断試験で得られるクーロンの摩擦角  $\phi$  と、三軸圧縮試験で得られたモールクーロンの破壊規準の  $\phi$  とは、一般に一致しないことは周知の事実である (Rowe, Barden and Lee, 1964, Hansen, 1961, Rowe, 1969, など)。

一面せん断試験供試体のせん断面が、ちょうど、三軸圧縮供試体に生じるすべり面の方向に

一致すると仮定し、モール＝クーロンの破壊規準を用いて一面せん断と三軸圧縮の関係を説明 (Taylor 1948) することがしばしば行われるが、これは第1近似と考えるべきであろう。

Cole (1967), Roscoe, Bassett and Cole (1967) は "Cambridge SSA Mk. 6" と略称される、全境界面での応力を測定可能な単純せん断試験機を開発・使用して、主応力軸と主ひずみ増分軸とがピーク付近で一致することを見出し、主応力の大きさと方向を、定量的に求めることに成功した。彼らの得た結果によれば、せん断に伴って、主応力軸は回転してゆくが、水平面が  $\tau/\sigma_N$  最大面にはならず、水平面はむしろ  $\tau_{\max}$  面に近い。

Rowe (1969) は、彼の応力-ダイレイタンス式を用い、主応力軸と主ひずみ増分軸が一致するとして、三軸圧縮・平面ひずみ圧縮・直接せん断の各試験から得られる、内部摩擦角  $\phi$  の間の関係を理論的に誘導するとともに、実験値によって検証を行なった。

平面ひずみ状態での砂の内部摩擦角  $\phi_p$  は、軸対称三軸応力状態での内部摩擦角  $\phi_i$  に比べて、約10%大きい値を示すと言われている。しかし、この結論は砂の構造や強度の異方性を考慮して確立されたものではない。小田・小石川・樋口 (1978) は、砂の構造や強度の異方性を考慮した、より一般的な、 $\phi_p$  と  $\phi_i$  の関係について研究し、砂の強度異方性は、軸対称応力状態よりも、平面ひずみ状態において特徴的に現れること、強度異方性を考慮すれば、 $\phi_p = 1.1 \times \phi_i$  の関係は成立せず、場合によっては、 $\phi_p < \phi_i$  となる可能性があることなどを実験によって示した。

## (2) その他

試験機の種類の他にいろいろな要因が考えられる。以下に列挙してみると、応力径路、応力履歴、拘束圧、中間主応力、排水条件、ひずみ速度などとなる。詳細は省略する。



## 第3章 粒状体の変形・強度に関する

### 従来の主な研究

#### 3.1 概 説

第2章において、粒状体の力学的性質を左右するさまざまな要因について、多くの研究を引用しつつ、主として物性論的に概観した。

本章においては、このような多くの要因のうちのいくつかを用いて、粒状体の変形・強度を理論的に論じた研究について、簡単にまとめておくことにする。

粒状体の力学的性質を理論的に論じるものに、かなり古くより、等大球の規則配列の静力学・動力学に属する研究がある。等大球の規則配列というのは、粒状体の非常に特殊な場合に属しているから、これらの研究結果を、そのまま一般の粒状体に適用するのは、かなり困難であることが多い。しかし、粒状体の諸現象を考える上での有力なヒントとなる。この範疇に入る研究については、Deresiewicz (1958) や最上 (1969) に詳しい紹介があるのでここでは省略する。

また、土の応力～ひずみ関係を、直接、実験式で近似してしまう方法、たとえば、Kondner (1963) による双曲線表示法は、実用的には有用な方法であるが、本章では省略することにする。

本章では、はじめに、粒状体力学の1つの中心主題であるダイレイタンスーに関する研究をふり返り、その後、微視的考察に基づく研究と塑性論に基づく研究について述べ、最後に、統計理論的あるいは情報理論的研究に触れることにする。

#### 3.2 ダイレイタンスーに関する初期の研究

##### 3.2.1 ダイレイタンスー

ダイレイタンスー (dilatancy) は、せん断変形に伴う体積変化現象であると定義されている。もともとの意は、dilute = ふくらむの名詞であるから、体積膨張を意味しているが、負の側にも拡張されて、体積収縮に対しても適用される。ダイレイタンスーは、岩石、コンクリートのような材料においても観察される現象であるが、粒状体におけるほど著しくなく、重要度も低い。

我々は、しばしば、粒状体を連続的に取扱う。その最も簡単な力学モデルは、線形等方弾性体であって、平均主応力と体積ひずみ、せん断応力とせん断ひずみには、それぞれ、一対一の対応関係が成立しており、両者は独立に取扱い得る。ところが、ダイレイタンスーを伴う材

料では、せん断ひずみと体積ひずみとが互に独立ではあり得ないから、応力とひずみの関係は複雑にならざるを得ない。

このようなダイレイタンシーの微視的機構の解明と、その定量的数式表現法の追求（微視的および巨視的）が、粒状体力学の中心課題の1つとなっている。

### 3.2.2 Reynolds の研究

ダイレイタンシーという現象は、1885年にO. Reynolds によって発見されたといわれている（Reynolds, 1885; Rowe, 1969）彼は、散弾や砂をゴムの袋に入れ、乾燥状態および水で飽和させた状態で排水・非排水・非排気の下で一種のせん断試験を行ない、体積変化または圧力の変化を測定して、ダイレイタンシーとはどういう現象かを述べている。彼の実験では、供試体の形はきちんとした一定のものではないし、変形を生ぜしめるのに要した力や、強度についての記述もない。しかし彼の論文は含蓄に富んでおり、現在の土質力学では常識となっている、有効応力の考え方や、排水条件についての先駆的記述さえ含まれている。また、等方的な粒状体を一軸的に圧縮してゆくと、ダイレイタンシーが生じ、その結果粒状体は異方的になり、この傾向はdilationが終るまで続くという指摘や、内部摩擦角と粒子間摩擦角との関係は粒子配列を考慮しなければ導くことができないという意味の指摘は、今日なお粒状体力学の課題となっているものである。

### 3.2.3 ダイレイタンシー補正

#### (a) Taylor - Bishop の考え方

Taylor (1948) は砂の応力・ひずみ・体積変化挙動の実測値を示し、砂のせん断強度は2つの成分から成ると考えた。すなわち

$$\tau = \tau_r + \tau_d \quad (3.1)$$

ここに  $\tau$  : せん断応力

$\tau_r$  : 粒子間のすべりやころがりに起因する摩擦による成分

$\tau_d$  : 粒子同志のかみ合い (interlocking) による成分で、ダイレイタンシーによる成分といってもよい。

$\tau_d$  は一面せん断試験を考え、垂直応力  $\sigma_N$  の下で、せん断変位が  $\delta \Delta$  増加したとき、供試体高さが  $\delta h$  増大したとするときの、供試体が  $\sigma_N$  に対してなす仕事から、次のように定義される。

$$\tau_d = \sigma_N \frac{\delta h}{\delta \Delta} \quad (3.2)$$

破壊時を考えると、

$$\tan \phi_r = \frac{\tau_r}{\sigma_N} = \frac{\tau_{\max} - \tau_d}{\sigma_N} = \tan \phi_{\max} - \frac{\delta h}{\delta \Delta} \quad (3.3)$$

ここで  $\frac{\delta h}{\delta d}$  は  $\tau_{\max}$  時の値を用いる。

軸対称三軸圧縮試験の場合には、 $\sigma_1'$ 、 $\sigma_3'$  を最大、最小主応力、 $\dot{v}$  を体積ひずみ増分（収縮を正）、 $\dot{\epsilon}_1$  を最大主ひずみ増分として

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_r}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)_r = \left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)_{\max} - \frac{\dot{v}}{\dot{\epsilon}_1} \quad (3.4)$$

と表わされる (Bishop 1954)。

軸差応力によって表わせば

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3)_{\max} - \sigma_3 \frac{\dot{v}}{\dot{\epsilon}_1} \quad (3.5)$$

となる。

Taylor-Bishop の解釈は砂の強度におけるダイレイタンスの役割を明確にした点で重要であり、土質力学の教科書にも紹介されている。しかしながら

1) 粒子間のすべり面は一般にせん断応力方向と一致していないので、加えたせん断力も摩擦抵抗に寄与しており、垂直応力  $\sigma_N = 0$  の場合にも摩擦抵抗が存在する。

2) 最大強度を過ぎて、体積変化のない状態における残留強度  $\tan \phi_{cv}$  と、 $\tan \phi_r$  とは間隙比が小さくなると一致しない。

3)  $\phi_{cv}$  は粒子表面における固体摩擦角  $\phi_\mu$  に比べて一般に大きい。

などの事実があるので、十分とは言えない。

(b) Newland と Allely の考え方

Newland と Allely (1957) は、砂のせん断時に、せん断力の方向と、粒子間のすべりの方向とが一般に一致しないことに着目して、最大せん断強度と、残留強度との差異を理論的に説明しようとした。彼らは図 3.1(a) に示すようにせん断面に沿う粒子接点を考え、これらの接

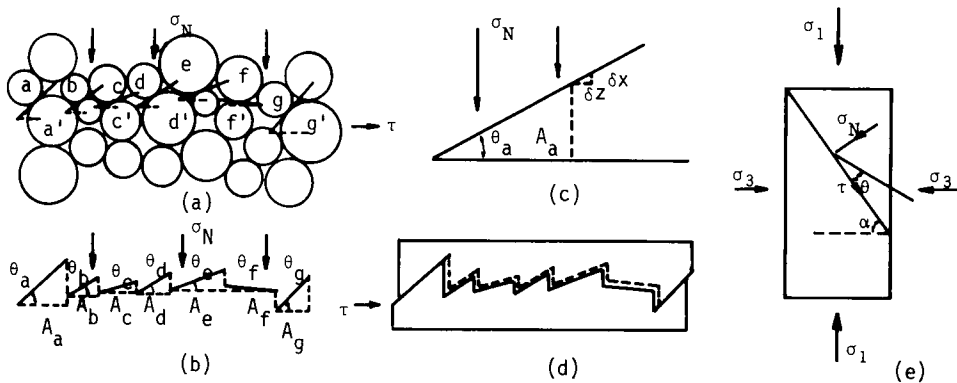


図 3.1 Newland と Allely (1957) のせん断モデル

点で同時にすべりが生じるものと考えた。そうすると、同図(b)に示した鋸歯状の接平面の連続体におきかえられ、さらに、同図(d)のようなブロック同志のすべりに置き換えることができる。粒状体のダイレイタンスーは上下ブロック間に生じる間隙によって説明できる。

彼らによれば、最大せん断抵抗  $\tau_{\max}$  は次の4つの成分から成る。

- 1)  $\sigma_N$  による摩擦抵抗  $\tau_R'$  : 各すべり面(接平面)がせん断力方向に平行( $\theta_i = 0$ )と仮定したとき、摩擦に打勝ってすべるためのせん断応力
  - 2)  $\tau$  による摩擦抵抗 : 各すべり面がせん断力方向と  $\theta_i$  傾いているため、加えられたせん断応力  $\tau$  のすべり面に垂直な成分によって生じる摩擦抵抗に打勝ってすべるためのせん断応力
  - 3) 膨張に対する仕事 :  $\sigma_N$  に抗して膨張するのに要する余分の仕事を行うためのせん断応力
  - 4) 再配列に要する仕事 : bridge の生成・崩壊に伴う余分の仕事を行うためのせん断応力
- 定式化に当っては図 3.1(b)に示したような各すべり面の傾斜角  $\theta_a = \theta_b = \dots = \theta_i = \dots \equiv \theta$  として、最終的に次式を得ている。

一面せん断の場合

$$\tau_{\max}/\sigma_N = \tan(\phi_i + \beta) \quad (3.6)$$

$$(\delta v/\delta \mathcal{A})_{\max} = \tan \beta \quad (3.7)$$

$$\tau_R'/\sigma_N = \tan \phi_i \quad (3.8)$$

ここに  $\delta \mathcal{A}$  はせん断変位増分、 $\delta v$  は体積変化増分、 $\tau_R'$  : 体積変化増分が零になる残留状態でのせん断抵抗、 $\phi_i$  : そのときの摩擦角で粒子間摩擦角  $\phi_\mu$  より大きく、両者の差は粒子の再配列による摩擦成分である。

三軸圧縮試験の場合 ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ )

$$(\sigma_1/\sigma_3)_{\max} = \tan^2(\pi/4 + \phi_i/2 + \beta/2) \quad (3.9)$$

$$(\sigma_1/\sigma_3)_r = \tan^2(\pi/4 + \phi_i/2) \quad (3.10)$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{(\sigma_1/\sigma_3)_{\max}} \cdot (\dot{v}/\dot{\epsilon}_1)_{\max}}{1 + (\sigma_1/\sigma_3)_{\max} - (\dot{v}/\dot{\epsilon}_1)_{\max}} \quad (3.11)$$

ここに  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  は最大, 最小主応力,  $\dot{v}$  は体積ひずみ増分,  $\dot{\epsilon}_1$  は最大主ひずみ増分であり ( $\sigma_1/\sigma_3$ )<sub>r</sub> は残留強度を表わす

Taylor-Bishop の補正, 式(3.3)で得られる  $\phi_r$  と式(3.6), (3.9)の  $\phi_i$  とは一般に異なった値をとる。その差は上記2)を考えるかどうかであり、一般に  $\phi_r > \phi_i$  となる。

### 3.3 微視的考察に基づく研究

#### 3.3.1 Caquot の研究

Caquot (1934) は、粒子間摩擦角  $\phi_\mu$  と、体積ひずみ増分がない限界間隙比状態における

内部摩擦角  $\phi$  との関係をも、せん断面上の粒子接点における接平面の分布および接平面における応力に着目して導いた。これは不規則な粒状体に関する微視的考察の最初の論文といってもよいと思われる。

いま、せん断面上の無数の接平面が等しい確率で各方向を向いていると仮定すれば、1つの半球面をこの接平面で覆ってしまうことができる。すべり面に平行な大円の面積は、すべての接平面のすべり面への投影面積の和に等しい。この半球上に微小面EFHGを考えると、これに平行な接平面がすべり面上のいずれかに存在する。(図3.2)

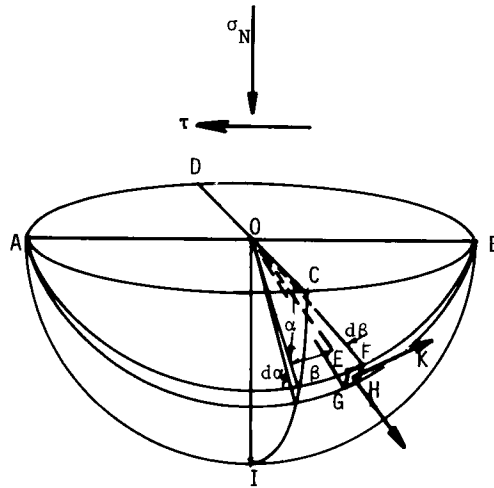


図 3.2 粒子間接平面からなる半球

いま、すべての接点で同時にすべりが発生するものと仮定する。微小面EFHGに垂直圧力  $p$  が半球の中心  $O$  に向って作用しているから、粒子間摩擦角を  $\phi_\mu$  とすればこの面に作用するせん断圧力は  $p \tan \phi_\mu$  で、面の接線方向 (  $K$  方向 ) に作用する。微小面EFHGは微小な角度範囲  $\alpha \sim \alpha + d\alpha$ 、 $\beta \sim \beta + d\beta$  で区切られ、その面積は  $r^2 \cos \beta d\alpha d\beta$  であるから微小面上の2方向の力の成分を球表面全体について集めると、垂直力の合力は

$$\int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p r^2 \cos^2 \beta \sin \alpha d\beta d\alpha = \pi p r^2 \quad (a)$$

であって、大円ACBDに垂直に作用し、一方せん断力の合力は

$$\int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p r^2 \cos^2 \beta \tan \phi_\mu d\beta d\alpha = \frac{\pi^2}{2} p r^2 \tan \phi_\mu \quad (b)$$

であってABの方向に作用している。  
したがって式(a), (b)より

$$\tan \phi_{cv} = \frac{\pi}{2} \tan \phi_{\mu} \quad (3.12)$$

が得られる。ここに  $\phi_{cv}$  は限界間隙比状態における内部摩擦角である。

すべり面上のすべての接点で同時にすべりが発生すると仮定している点をはじめ疑問点はあるが、実験値をよく説明することと簡明であることのために、式(3.12)はCaquotの式として広く知られ、使われている。

### 3.3.2 Roweの応力・ダイレイタンシー理論

Rowe (1962) は粘着性のない等大円柱から成る規則配列の粒状体について、力のつり合いと変位の適合条件を考慮し、一般の粒状体に適用可能な、応力-ダイレイタンシー式を導いた。

応力の対称軸は初期粒子配列の対称軸と一致しており、粒子は一樣な粒子間摩擦角  $\phi_{\mu}$  を有するものとする。直交座標軸  $OX, OY$  をそれぞれ主応力  $\sigma_1', \sigma_2'$  (圧縮を正とする) の方向にとる。主ひずみ増分を  $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$  とし、体積ひずみ増分を  $\dot{v}$  とする (いずれも圧縮を正とする)。

Roweによれば、密な規則配列粒状体において、 $\dot{\epsilon}_1$  が正の場合には、粒子群同志が相対的にすべり、そのときのすべり接点の傾きは、 $OX$  に対し  $\beta$  である。これらの接平面は、一般に、群と群の境界をなす平面の傾きと一致せず (図3.3), 群と群は互に遠ざかるように動く。これらの群の境界と  $Y$  軸とのなす角を  $\alpha$  で表わせば、 $\alpha$  の値は球のつまり方の幾何学によって変わる。

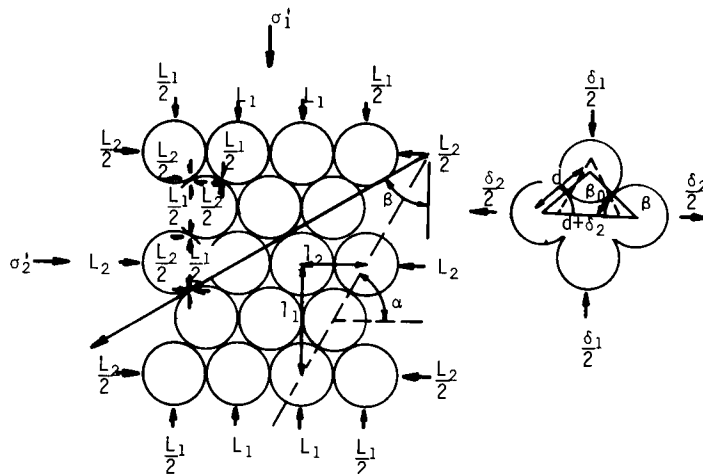


図 3.3 円柱の規則配列と粒子間力 (Rowe, 1962)

接点におけるすべり条件式は、図 3.3 を参照して、

$$L_1/L_2 = \tan(\phi_\mu + \beta) \quad (\text{a})$$

ここに、 $L_1$ 、 $L_2$  は、すべり接点における  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  方向への力の成分である。また、 $l_1$ 、 $l_2$  を  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  方向における粒子列の単位長さとするれば、幾何学的条件から

$$\tan \alpha = l_1/l_2 \quad (\text{b})$$

$$L_1/L_2 = (\sigma_1 \cdot l_2)/(\sigma_2 \cdot l_1) \quad (\text{c})$$

式(a), (c) より

$$\sigma_1/\sigma_2 = \tan \alpha \cdot \tan(\phi_\mu + \beta) \quad (3.13)$$

一方、すべり接点におけるすべり量の  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  方向成分を  $\dot{\delta}_1$ 、 $\dot{\delta}_2$  とすると、変位の適合条件式は

$$\dot{\delta}_2/\dot{\delta}_1 = \tan \beta$$

である。したがって

$$\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} = \frac{\dot{\delta}_2/l_2}{\dot{\delta}_1/l_1} = \tan \alpha \cdot \tan \beta \quad (3.14)$$

となる。ここで、体積ひずみ増分  $\dot{v}$  は (収縮を正として)

$$\dot{v} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \quad (\text{d})$$

である。式 (3.13)、(3.14)、(d) より

$$-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{1 - \dot{v}/\dot{\varepsilon}_1} = \frac{\tan(\phi_\mu + \beta)}{\tan \beta} \quad (3.15)$$

この式は、大きい方の主応力によってなされる単位容積当りの仕事と、小さい方の主応力に対して粒状体ができる単位容積当りの仕事との比を表わしている。

Rowe は、同様の考えを、等しい球の規則的な三次元集合体についても適用して、式(3.14)と同様の式を得ている。

また、エネルギー比  $\dot{E}$  についても

$$\dot{E} = -\frac{\sigma_1' \dot{\varepsilon}_1}{2\sigma_3' \dot{\varepsilon}_3} = \frac{\tan(\phi_\mu + \beta)}{\tan \beta} \quad (3.16)$$

で表わされることを示した。

特定のつまり方の性質を示す角  $\alpha$  が、 $\dot{E}$  の式には入ってこないことに注目して、Rowe は、(3.16) を不規則配列の粒状体にも適用した。不規則配列では、接触面が  $OX$  に関してあらゆる角度で生じ得るから、すべりの角度  $\beta$  を決めてやる必要がある。そこで、Rowe は、「エネルギー比最小原理」を仮定して、次の条件により、すべりの角度を求めた。

$$d\dot{E}/d\beta = 0 \quad (3.17)$$

この条件を満足する  $\beta$  は

$$\beta = \beta_c = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_\mu}{2} \quad (3.18)$$

となる。これを用いると、式(3.16)は

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'} \frac{1}{1 - \dot{v}/\dot{\epsilon}_1} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2}\right) \quad (3.19)$$

となる。上述のエネルギー比最小原理は、「摩擦によって逸散するエネルギー増分 $\dot{W}$ の、供給されるエネルギー $-\sigma_1' \dot{\epsilon}_1$ に対する比が最小になる」という考え方と等価である。(Rowe, 1963)。なお、最上は $\dot{E}$ 最小という点に疑念を抱いており(最上, 1969), また、徳江(1978)は「エネルギー比最小原理」の物理的意味は必ずしも明確でないとしている。

式(3.19)が概ね妥当であることは、多くの研究者が実証している。図3.4は密な長石砂

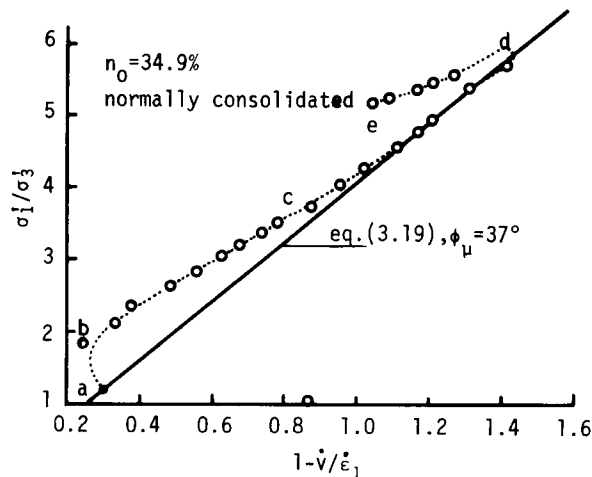


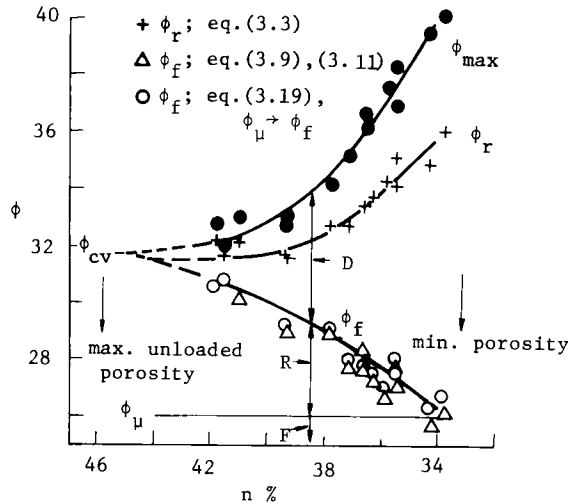
図3.4 応力・ダイレイタンスープロットの例(Lee, 1966)

の三軸圧縮試験における応力・ダイレイタンスー関係の例である(Lee, 1966による)。長石砂の粒子間摩擦角 $\phi_\mu \approx 37^\circ$ であって、式(3.19)の関係が図中の直線で表わされている。排水三軸圧縮試験の結果をプロットしてみると、実験値は、最初、理論線より下にくるが、急速に理論線の上側にプロットされるようになる(a, b)。ひずみが増大するにつれて、実験値は理論線に漸近してゆき(b $\rightarrow$ c $\rightarrow$ d)、ピーク(d)を過ぎると理論線より離れて、限界間隙比の状態に達する(d $\rightarrow$ e)。この状態では、体積変化が生じず、 $1 - \dot{v}/\dot{\epsilon}_1 = 1.0$ となる。

Roweは、d $\rightarrow$ eの過程は「再配列」"rearranging"の過程であると考え、そのときの $\phi_\mu$ の有効値は $\phi_f$ ( $\phi_f > \phi_\mu$ )になるとしている。 $\phi_f$ の値は一定値とならず、最小間隙率における $\phi_\mu$ から最大間隙率における $\phi_{cv}$ まで変化する。

実験で得られた限界間隙比状態における応力比と $1 - \dot{v}/\dot{\epsilon}_1$ を使って、式(3.19)で $\phi_\mu \rightarrow \phi_f$ として $\phi_f$ を求め、間隙率 $n$ に対してプロットしたのが図3.5中の○印である。





Medium-fine sand, over-consolidated, O.C.R.=2  
 D : difference due to energy spent on dilatation  
 R : difference due to energy spent on remoulding  
 F : difference due to energy spent in friction

図 3.5 種々の摩擦角の間関係 (Rowe, 1962)

$\phi_i$  は、 $n$  によって、 $\phi_\mu$  から  $\phi_{cv}$  までの値をとることがわかる。同図には  $\phi_{max}$  の値と、Taylor の補正、式 (3.3) を施した  $\phi_r$ 、および、Newland と Allely の補正、式 (3.9) を施した  $\phi_f$  ( $\Delta$  印) をも示してある。

### 3.3.3 Horne の研究

Horne は、Rowe の提案した「エネルギー比最小原理」をより一般性のある形で誘導し、不規則配列の粒状体に対する応力比・ひずみ増分比式を誘導した。彼が導いた式は、Rowe の式 (3.19) と同じものである。(Horne, 1965, 1969)

Horne は、粒状体の変形は、多数の粒子を含む粒子群と粒子群の間の相対運動の結果生じるものであると考えた。変形中の粒状体を観察すると、大多数の粒子間接点で、同時にすべることではなく、大きな粒子群と粒子群の間の少数の接点ですべりが生じている。すべりが生じているのは、ある critical な方向と位置の接点である。ある瞬間にある群と群の間ですべりが生じると、次の瞬間には新たな群ができて、新たな群と群の間ですべりが生じるのであろうと述べている。

さらに Horne は、不規則粒状体の構造異方性を、mean projected solid path (m. p. s. p.) の概念を用いて記述し、さらに、これとひずみ増分の関係を導いた。

mean projected solid path は粒状体内の固体部分のみを貫く鎖状の "solid path" が、あ

る距離 $L$ 進む間に $N$ 個の粒子を通るとき、 $\lim_{N \rightarrow \infty} L/N$  で定義される。たとえば、図 3.6 は  $OX$

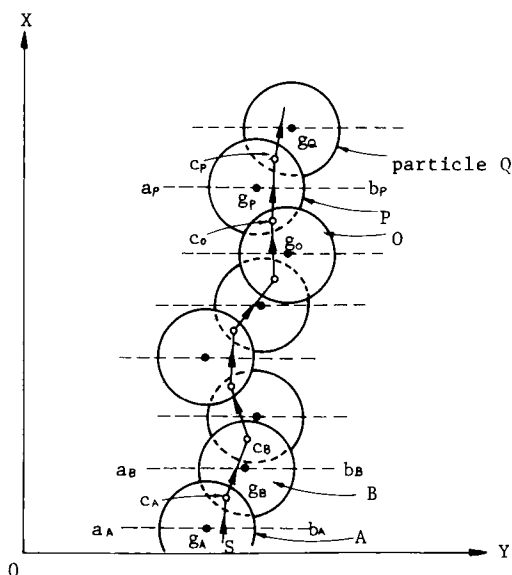


図 3.6  $OX$  方向 ( $\sigma_1$  方向) の solid path (Horne, 1965)

方向 ( $\sigma_1$  の方向) の solid path を 2 次元的に示している。

粒子 A と接する粒子はいくつかあるが、直径を通る面  $a_A b_A$  の正の側の接点のうちの 1 つをランダムに選んで、粒子 B に入る。このようなランダムな選択を繰り返して、大体  $OX$  方向にのびる solid path が描かれる。 $OX$  方向に  $L_x$  進む間に通過する粒子数を  $N_x$  とすると、 $OX$  方向の m. p. s. p. は

$$m_1 = \lim_{N_x \rightarrow \infty} \frac{L_x}{N_x}$$

で定義される。同様に、 $OY$ ,  $OZ$  方向の m. p. s. p. :  $m_2$ ,  $m_3$  も定義できる。もし、粒状体が等方的であるならば、 $m_1 = m_2 = m_3$  であるが、異方的な粒状体では等しくならず、比  $m_2/m_1$  および  $m_3/m_1$  は、異方性粒状体の粒子配列構造特性を示す指標となる。

いま、粒子接点角の確率密度函数、つまり、接点角が  $\omega \sim \omega + d\omega$ ,  $\psi \sim \psi + d\psi$  の間にある確率密度を  $E(\omega, \psi)$  とすれば、各 m. p. s. p. 値は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= 2r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} E(\omega, \psi) \sin 2\psi \, d\omega \, d\psi \\ m_2 &= 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E(\omega, \psi) (1 + \cos 2\psi) \cos \omega \, d\omega \, d\psi \\ m_3 &= 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} E(\omega, \psi) (1 + \cos 2\psi) \sin \omega \, d\omega \, d\psi \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

ただし

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} E(\omega, \psi) \cos \psi \, d\omega \, d\psi = 1 \quad (3.21)$$

等方粒状体では、 $E(\omega, \psi) = \frac{1}{4\pi}$  である。

ここに、 $r$  は粒子半径、 $\omega, \psi$  は粒子接点角で図 3.7 に定義してある。

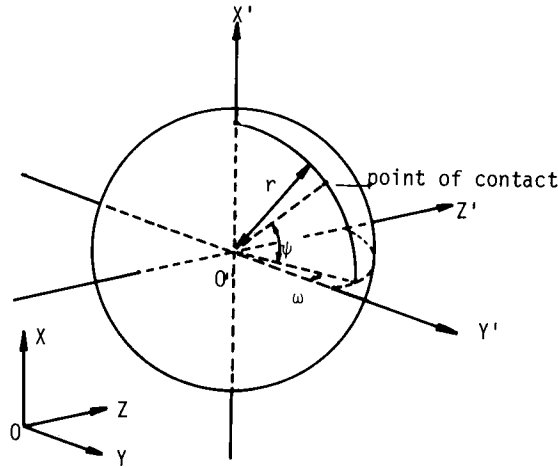


図 3.7 粒子接点角の定義 (Horne, 1965)

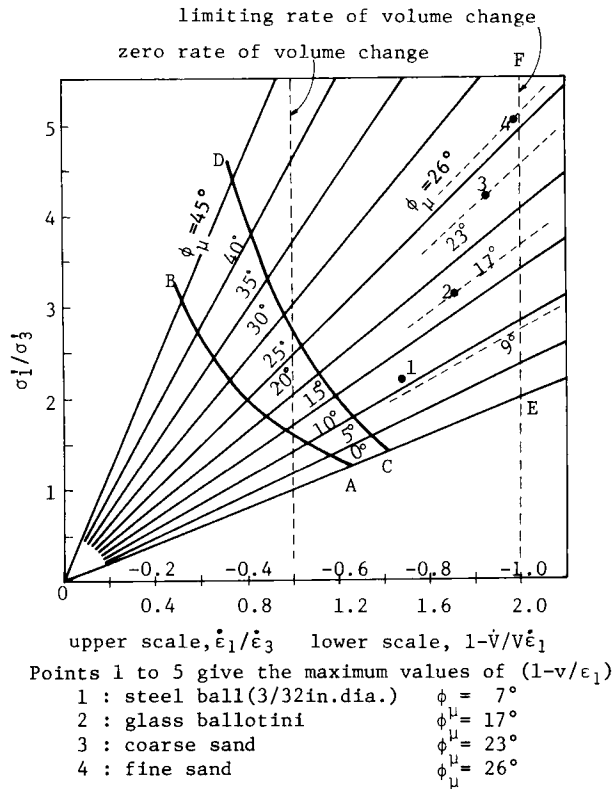
Horne は、変形によって生じる異方性を計算し、応力比とひずみ増分比 (ダイレイタンス) の関係が、どのような推移をたどるかを図 3.8 のように示した。同図で、原点から放射状に引いた直線群は式 (3.19) を示している。

粒状体が等方的である場合には、

$$-(\sigma_1' / \sigma_3') \cdot (\dot{\epsilon}_3 / \dot{\epsilon}_1) = 8 / \pi^2 \quad (3.22)$$

であって、曲線 AB 上にあることになる。三軸圧縮試験で変形が進むと、AB を越えて、原点を通る直線に沿って上昇し、 $m_1 \approx m_2, m_3$  という異方性の状態が生じることになる。もし、粒状体の異方性が、すべりによって新たに生じる接点のみによって生じるものとすれば、応力比は曲線 CD に達する。さらに生成頻度が最も高い接点のみが存続したと考えた一種の極限状態においては、垂直線 EF で表わされる状態に至る。以上のことは、粒状体が軸ひずみとともに増大する応力比に抵抗する能力は、粒子群間のすべりによって生じる異方性 ( $m_1 / m_3$ ) の増大によるものであることを示したものとと言える。

Horne は、さらに、1969 年の論文で、密な粒状体が最大応力比に達した後の応力比の低下は、すべり帯の発生によるものではなくて、体積膨張に伴う異方性の低下によるものであることを示し、体積変化がなくなる残留状態での摩擦角  $\phi_{cv}$  を求めた。その結果を示すのが図 3.9 であって、Horne の求めた曲線 1 が、実験結果をよく説明している。



( After Rowe, 1962 )

図 3.8 応力比・ダイレイタンスー関係 ( Horne, 1965 )

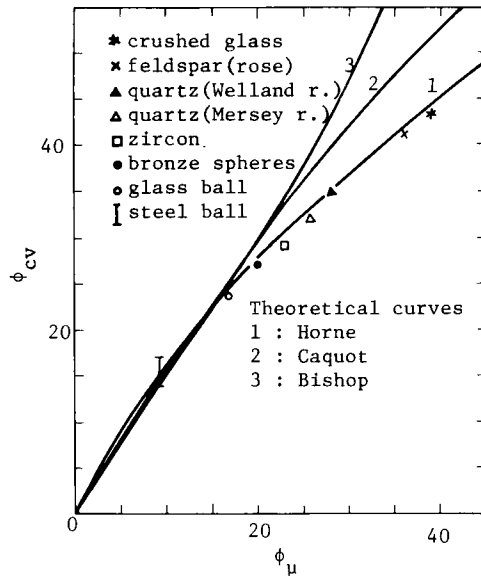


図 3.9  $\phi_\mu$  と  $\phi_{cv}$  との関係 ( Horne, 1969 )

### 3.3.4 小田の研究

Horneは、粒状体の三軸圧縮試験において、軸ひずみとともに増大する応力比に抵抗する能力の根源は、粒子間のすべりに伴う構造異方性の発達にあることを理論的に示したが、小田は、このことを詳細な実験的事実に基づいて明らかにした。(小田, 1972 a ~ c, 1974, 1975)

小田は三軸圧縮試験における構造異方性の発達を、供試体から切り出した各変形段階における薄片の顕微鏡観察によって、定量的に調べた。砂の構造異方性は粒子の定方向配列と粒子間接点の方向の分布によって表わされるが、粒状体の変形・強度特性に直接関与するのは後者であることを示した。粒子間接点の方向の分布による砂の構造異方性は、 $S_1/S_3$  というパラメータで表現できるとし、これを“fabric index”と呼んだ。

fabric index  $S_1/S_3$  は、各粒子間接点における接触面積  $\Delta S$  の  $\sigma_1$  方向への投影面積  $\Delta S_1$  と、 $\sigma_3$  方向への投影面積  $\Delta S_3$  の総和  $S_1$  と  $S_3$  の比であって、これは、また、すべての接点における  $\Delta S$  を集めてできる“fabric ellipsoid”と呼ばれる楕円体の各主軸面の断面積の比となっている。 $S_1$ 、 $S_3$  の値は、各接点における接触面積  $\Delta S$  がすべて同じであると仮定して、法線方向  $N_i$  の確率密度函数  $E(\alpha, \beta)$  から計算することができる。なおこの  $S_1/S_3$  は Horne の  $m_1/m_3$  に等しい(図 3.10)。

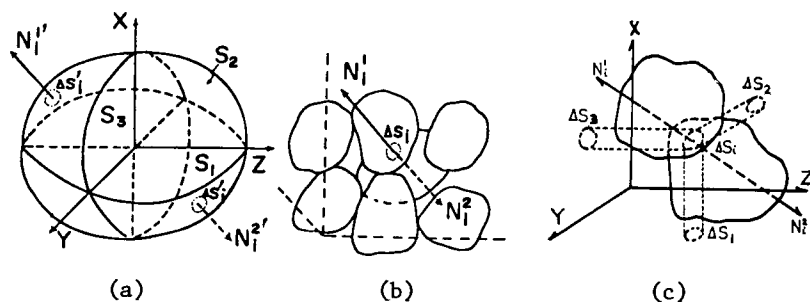


図 3.10  $S_1/S_3$  の決定法および構造楕円体(小田, 1972 b, 1975)

小田は、 $S_1/S_3$  が大きいほど、 $N_i$  が  $\sigma_1$  方向に集中して、 $\sigma_1$  に対する抵抗力は増加すると考えられるから、初期の  $S_1/S_3$  が大きい砂ほど、変形しにくく、強度は大きくなること、また砂のひずみ硬化過程においては応力比の増大に伴って  $S_1/S_3$  が増大してゆくことなどを実証し、

$$\sigma_1 / \sigma_3 = C_1 (S_1/S_3) \quad (3.23)$$

$$1 - \dot{\nu} / \dot{\epsilon}_1 = C_2 (S_1/S_3) + C_3 \quad (3.24)$$

の関係があることを明らかにした。これらの式から  $S_1/S_3$  を消去すると Rowe の応力・ダイレイタンスー式に類似の次式が得られる。

$$\sigma_1 / \sigma_3 = C_4 (1 - \dot{\nu} / \dot{\epsilon}_1) + C_5 \quad (3.25)$$

ここに  $C_1 \sim C_5$  は実験定数である。ある石英砂について応力比とダイレイタンスーをプロットしたのが図 3.11 であって、締固め方法、初期間隙比、初期構造などに無関係に、一つの直線関

係が成り立っている。

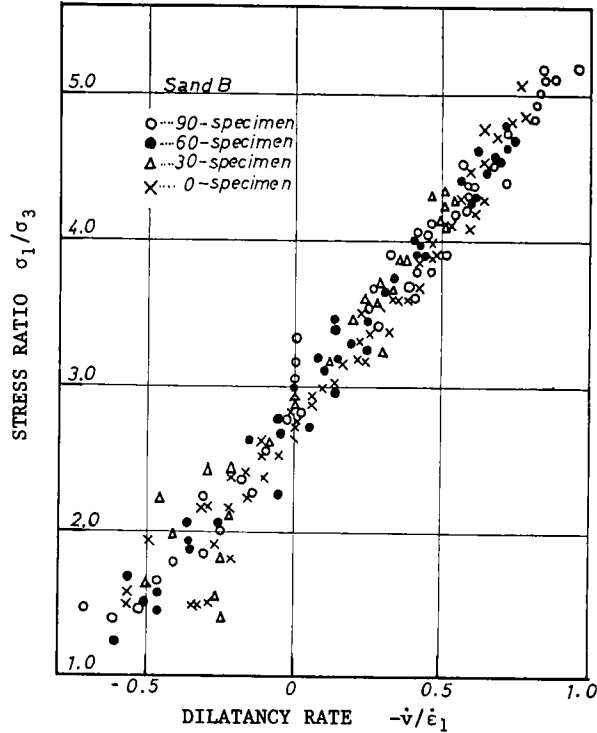


図 3.11 応力比・ひずみ増分比関係 (小田, 1972b)

小田 (1972c) は粒子間力の配分則, すべり接点における力のつり合い条件などから次の応力比・構造式を理論的に導いた。

$$\sigma_1/\sigma_3 = (S_1/S_3) \tan^2(\pi/4 + \phi_\mu/2) \quad (3.26)$$

また, すべり接点における変位の適合条件の考察から, ダイレイタンスーと構造の関係を導き, 最終的には, 次の応力比・ひずみ増分比関係式を得ている (小田, 1974)。

$$1 - \dot{v}/\dot{\epsilon}_1 = c \left\{ \frac{\sigma_1/\sigma_3}{\tan^2(\pi/4 + \phi_\mu/2)} \right\}^2 + d \left\{ \frac{\sigma_1/\sigma_3}{\tan^2(\pi/4 + \phi_\mu/2)} \right\} \quad (3.27)$$

(3.27) によれば,  $\sigma_1/\sigma_3$  と  $1 - \dot{v}/\dot{\epsilon}_1$  の関係は 2 次曲線となるが, 曲率が比較的小さいので, 実験式 (3.25) との間に決定的な差異は生じない。

### 3.3.5 松岡の研究

松岡は二次元粒状体のせん断試験を行ってせん断中の粒子接点角および粒子間力を測定し, その実測結果に基づいて, 砂の応力・ひずみ関係式を導いた (村山: 松岡, 1970, 松岡, 1973)。彼は潜在的すべり面 (potential sliding plane) 上の粒子に注目し, 粒子接点角  $\theta_i$ , 粒子間力  $f_i$  を図 3.12 のように定義すると, 巨視的応力と微視的要因の間に次式が成り立つとした。

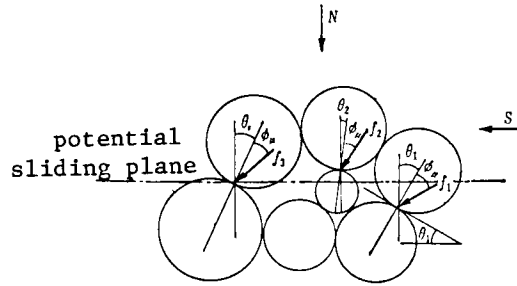


図 3.12 潜在すべり面上の接点における粒子間力 (松岡)

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{S}{N} = \frac{\sum f_i \sin(\theta_i + \phi_\mu)}{\sum f_i \cos(\theta_i + \phi_\mu)} \quad (3.28)$$

ここに、 $\phi_\mu$  は粒子間摩擦角で、すべての接点において、同時に、同じ方向にすべりが生じているものと考えている。松岡は光弾性実験の結果より、粒子間力の平均的な値は、粒子接点角  $\theta$  によらないと考え、さらに、接点角分布のせん断に伴う変化に注目して、次式を得た。

$$\tau / \sigma_N = \lambda \cdot \bar{\theta} + \mu \quad (3.29)$$

ここに、 $\bar{\theta}$  は潜在すべり面上での  $\theta_i$  の平均値、 $\mu = \tan \phi_\mu$ 、 $\lambda$  は  $\mu$  によって定まる定数である。さらに、 $\bar{\theta}$  とせん断ひずみ  $\gamma$  との間に

$$d\bar{\theta} \simeq d\gamma \quad (3.30)$$

という関係があることが実験より確かめられるとして、ダイレイタンシーを次のように表現した。 $\epsilon_N$  を垂直ひずみ (圧縮を正) として

$$\frac{d\epsilon_N}{d\gamma} = -\tan \bar{\theta} \quad (3.31)$$

これより、応力・ダイレイタンシー関係式

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \lambda \cdot \left(-\frac{\epsilon_N}{\gamma}\right) + \mu' \quad (3.32)$$

ここに  $\mu' = \lambda \bar{\theta}_0 + \mu$ 、 $\bar{\theta}_0$  は  $\theta_i$  の初期値の平均値

応力比～せん断ひずみ関係

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = (\mu' - \mu) \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} + \mu \quad (3.33)$$

垂直ひずみ～せん断ひずみ関係

$$\epsilon_N = \frac{\mu - \mu'}{\lambda} \gamma \left\{ \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} - 1 \right\} \quad (3.34)$$

ここに  $\gamma_0$  は  $\epsilon_N$  が最大となる  $\gamma$  (体積最小時の  $\gamma$ ) などを得た。

これらの諸式の理論的誘導過程に関しては、批判があるけれども、 $\mu$ 、 $\mu'$ 、 $\gamma_0$  および  $\lambda$  の4

つの実験定数を適当に決めてやることにより、実験値によく適合させることができる。

松岡は、これらの結果を砂ばかりでなく、粘土へも適用を試みている。さらに空間モービライズド面なる概念を導入して、3主応力が異なる一般的な三軸応力条件の場合に拡張している。松岡の基本モデルは、Newland and Allely (1957) のものと、類似のものであって、いずれも、潜在すべり面上のすべての粒子接点ですべりが生じると仮定している。松岡はこの面を、後に、 $\tau/\sigma_N$  の最大稼働面 (mobilized plane) であるとしているが、すべり面はピークを過ぎてから生じるものであることが、実験的に確められているし、通常考えられているせん断面は必ずしも  $\tau/\sigma_N$  最大面でないことは Cole (1967), 小田・小西 (1974 a, c), 落合 (1976) らが指摘しており、このような面を予め仮定することは、多くの問題を含んでいる。また、同時にすべての接点ですべるという仮定も正しいとは言えない。

### 3.3.6 村山の研究

村山は、砂に作用する有効主応力に変動が生じたとき、砂中のせん断応力の変動によって、粒子の相対移動が最も活発化する方向の面を最大稼働面 ( $\tau/\sigma_N$  最大面) と称し、この面を基準面とし、この面に対して測った粒子間力の方向角  $\theta_i$  と、粒子接点角  $\beta_i$  を確率変量と考え、接点における力のつり合いと粒子の相対移動量の統計力学的な考察から、弾性状態および塑性状態における砂の応力・ひずみ特性を誘導した (村山, 1964, 1975, 1976)。

その場合、村山は、微視的な諸量の性質を仮定するに当って、砂あるいはモデル粒状体における微視的観察結果をあえて使用せず、演繹的な考察によっており、その場合にポテンシャル障壁、活性化、転位などの新しい概念を導入しているのが特徴である。

$\theta_i$ ,  $\beta_i$  の分布を正規分布と仮定し、期待値をそれぞれ  $\theta$ ,  $\beta$ , 標準偏差を、それぞれ  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  とし、粒子間摩擦角を  $\phi_\mu$  とする。すると、 $\theta \leq \beta + \phi_\mu$  の場合には、砂は弾性状態、 $\theta > \beta + \phi_\mu$  では、 $\theta$  が砂を破壊させるほど大きくない限り、塑性状態となる。 $\theta$  と  $\tau/\sigma_N$  の間には、 $\tan \theta = \tau/\sigma_N$  の関係がある。また、 $\tan(\beta + \phi_\mu) = s_{el}$  と記せば、 $s_{el}$  は応力比で表わした砂の弾性限界である。

さて弾性状態では  $\beta_i$  と  $\theta_i$  の各分布は互いに独立と考えている。応力比の増大につれてすべり条件が満足される接点における粒子のすべりが生じるが、弾性状態においてはすべった粒子はやがてポテンシャル障壁に当たって停止するに至ると考えた。このポテンシャル障壁は、砂の場合には、「粒子群がそのとき保有している、粒子構成状態を不可逆な状態に分解させられることに抵抗する構造的強度」であって、局所的な、粒子構造の降伏強度を意味している。なお、粒子はポテンシャル障壁を越えないから、除荷によって原位置に戻ることができる。

一方、各粒子のすべった距離の平均値  $\Lambda$  は、砂の粒子状態が一定であれば、一定と考えられるから、砂のせん断ひずみは、粒子がすべる確率に比例すると考えた。 $(\tau/\sigma_N)_{max}$  面にある粒子は、粒子接点角の向きにすべるから、ダイレイタンスが生じる。このような挙動を基礎



にして、統計力学的な計算を行って、砂の弾性状態に対して次の3式を得た。

$$\gamma_{\beta} = A \cdot W_e \frac{\tau / \sigma_N}{\sqrt{1 + (\tau / \sigma_N)}} \quad (3.35)$$

$$\lambda \left( -\frac{d\varepsilon_N}{d\gamma_{\beta}} \right) + \tan \phi_{\mu} = \frac{s_{el}}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{\sigma_N} \right) \quad (3.36)$$

$$\lambda \left( -\frac{\varepsilon_N}{\gamma_{\beta}} \right) + \tan \phi_{\mu} = \frac{s_{el}}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{\tau}{\sigma_N} \right) \quad (3.37)$$

ここに、 $\gamma_{\beta} : (\tau / \sigma_N)_{\max}$  面におけるせん断ひずみ

$\varepsilon_N : (\tau / \sigma_N)_{\max}$  面における垂直ひずみ

$$W_e = \frac{1}{2} \tan \left\{ \frac{\tan^{-1} s_{el}}{2 \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}} \right\} / s_{el} \quad \text{：弾性状態における構造係数}$$

A : 変位係数

$$\lambda = 1 + \tan^2 \phi_{\mu}$$

次に、塑性状態は、 $\tau / \sigma > s_{el}$  の場合に生じる。この場合には、すべり粒子の中には、粒子間力が大きいと、ポテンシャル障壁を越えて活性化するのが現われる。「活性化」とは、粒子構造の局所的な降伏を意味している。活性化した粒子は、障壁の強度以上の粒子間力を支持できないから、それ以上の粒子間力は、活性化していない粒子に転稼される。そのため、さらに、二次的なすべりが発生し、すでにすべった粒子の中には、転稼によって増大した粒子間力のため、粒子構造の障壁を越えて、その中に転位するものも現われるが、転位の途中で配向して、粒子間力を支持するに至る。転位した粒子は障壁を越すので、除荷してももとの位置には戻らず、残留ひずみの原因となる。また、配向に伴ない、粒子の  $\beta_i$  の原分布の一部は、より大きい値の分布に移され、砂は2種の  $\beta_i$  の分布群を持つこととなり、このことから、砂のひずみ硬化を説明している。以上のような粒子挙動を、定量的に解析することによって、塑性状態の応力とひずみの関係を誘導した(図3.13)。

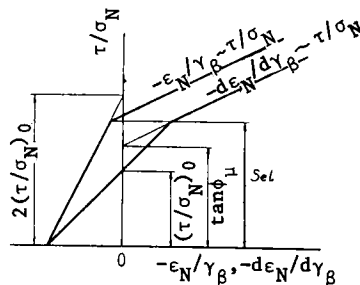


図 3.13 応力比・ひずみ比、ひずみ増分比関係(村山, 1975)



で表わすことができる。

(c) 流れ則 (flow rule) : 降伏が生じた場合の各種の塑性歪増分の相互の大きさの比と応力状態との関係を表わす。

塑性ひずみ増分  $d\varepsilon_{ij}^p$  の相互の大きさの比が応力状態のみにより、応力経路によらないとすれば、応力とその物質の状態を表わすパラメーター  $L_{ij}$  のみの函数である塑性ポテンシャル

$$\psi = \psi(\sigma_{ij}, L_{ij}) \quad (3.45)$$

を用いて、

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (3.46)$$

と表わすことができる。

(d) 応力の主軸とひずみ増分の主軸の一致 (coaxiality)

ある粒状体に対して、以上の(a)~(d)を知ることによって、所定の条件の歪硬化体が、所定の応力状態 ( $\sigma_{ij}$ ) でつり合っているときの応力状態の変化 ( $d\sigma_{ij}$ ) に対する、塑性ひずみ増分  $d\varepsilon_{ij}^p$  の大きさと方向を求めることができる。粒状体の塑性論的研究においては、(a)~(d)の基本概念が、粒状体の場合にどのようなものになるかを実験事実に基づいて仮定し、吟味することが重要な課題となっている。

### 3.4.2 土への適用

土の変形に塑性論を適用しようとした研究は、Drucker and Prager (1952) にはじまると言われている。彼らは、土を弾性完全塑性体として扱った。降伏函数としては、拡張された von Mises の降伏函数を用いている。しかし、初めての試みでもあって、欠点も多い。この研究は、Roscoe を中心とする Cambridge 大学の研究グループに引継がれて飛躍的發展を遂げることになる。

Roscoe らは、諸研究者、とりわけ、Henkel や Hvorslev らの実験結果を整理・検討し金属塑性論を土に適用できるよう巧みに修正して、土のいろいろな力学的挙動を、統一的に説明できる力学モデルを提案した。

最も基本的な考え方は、Roscoe, Schofield and Wroth (1958) の論文に示され、Schofield and Wroth (1968) の "Critical State Soil Mechanics" にその頃までの成果が集大成されている。この本の中では、2つのモデルが提案されている。すなわち、Cam-Clay と Granta-Gravel である。これらのモデルにおいては、

(a) 降伏曲面は space diagonal に関して軸対称、すなわち、等方ひずみ硬化モデルである。

(b) ひずみ硬化には、必ず、塑性体積ひずみを伴う。逆に言うと圧密やせん断によって、塑性体積ひずみが生じるときにのみ、ひずみ硬化が生じる。

(c) normality を仮定している。したがって、塑性ポテンシャルと降伏曲面とは一致しており、associated flow rule が成立している。

島・太田他(1969)も、粘土の圧密およびせん断試験結果における変形の統一的表现を目的として、理論を展開し、結果的には、Roscoe 他と同じ形の表現式に到達している。

Poorooshasb(1971)は、砂について、三軸圧縮条件下で、降伏曲面と塑性ポテンシャル面とが別々に存在し、両者は一致しないことを示した。すなわち、砂については、normality が成立せず、non-associated flow rule となることを示した。その場合、塑性ポテンシャル曲線は基本的に、Roscoeらの降伏曲線と同一であるとしている。

塑性ポテンシャルが存在するかどうかについては、塑性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^p$  が応力径路によって変わることから、すべての場合に存在すると考えるのはむずかしいようである。しかし等方圧縮とせん断とを別個に取扱えばそれぞれについて塑性ポテンシャルが存在するのではないかと考えられている(龍岡・石原, 1974a)。このことは、Roscoe 他が仮定したように、塑性体積ひずみによってせん断に関するひずみ硬化を表現するのは、砂については、必ずしも適当でないことを意味している。諸戸(1976)はせん断によるひずみに関するひずみ硬化函数はせん断ひずみ  $\gamma$  によって表わされるべきであることを示している。

### 3.5 粒状体の統計理論

#### 3.5.1 概説

砂のような粒状体は、一般に、不規則な形状の粒子の不規則な集合体であって、粒子配列構造、間隙の分布、粒子間力の分布などは、いずれも規則的ではなく、統計的な平均値を求めてみて、はじめて何らかの規則性が見出されるものである。このような粒状体を統計的方法によって解明しようとする試みは多くの研究者達によって行われた。

Gudehus(1968)は、土の統計力学の確立を目指した、序論的な論文を発表しているが、の中で彼は土の統計力学の目的は土の応力-ひずみ関係を確立することにあるとし、粒子間接点の法線方向の分布によって表わされる粒子構造のテンソル(Affinität と呼ぶ)の重要性を説いている。

村山(1964, 1975, 1976)は、彼の理論の中に、統計力学的な考えを援用している。

Litwiniszin(1966)は、坑道のゆるみに伴う地表面の沈下現象を、運動学的に、一種の確率過程として解析したが、彼の理論には、力の関係が全く入ってこない点に問題がある。

Winterkorn(1953)は粒状体と一般の液体・固体とは、粒子の大きさが異なるだけで、本質的には同じではないかと考え、液体や固体の理論との相似関係に着目し、粒状体の性質を論じたが、論理がしばしば直観で置きかえられていて、ついてゆくのが困難であるとGudehus(1968)は評している。

Marsal(1965)は粘性流体中の粒子の運動を確率論的に論じた結果、一次元圧密過程が、拡散方程式(Fokker-Plank 方程式)で表わされることを示した。その場合に、何らの誘導

過程を経ずに、拡散方程式を適用しており、一種の相似を論じたに過ぎない。

Kézdi (1966) も流体や固体の統計理論の粒状体への適用を考えており、種々の現象について論じているが、単なるアナロジーから抜け出していないように思われる。

### 3.5.2 最上の理論

最上は、粒状体の力学的性質は、その間隙比の平均値と分布（偏差）によって支配されるとの考えのもとに理論を展開した（最上, 1965, 1966, 1967, 1968 ; 最上・今井, 1967）。

彼は、まず、平均間隙比が  $e$  であり、間隙比の標準偏差が  $s$  であるような粒状体の、粒の並び方の数  $Z$  を数学的に計算し、この  $Z$  の自然対数  $\ln Z$  が、粒状体のエントロピー  $S$  に比例するものと仮定した。粒状体の変形の大部分は非可逆的であって、粒状体に外から加えられたエネルギーの大部分が粒子間の摩擦による熱や音となって逸散する。このエネルギー逸散は体系のエントロピーの変化（エントロピー生成, entropy production）を生じる。そこで

$$\text{外力の仕事の増分 } \Delta A = T dS = K \Delta \ln Z \quad (3.47)$$

とする。この式の左辺は平均圧力、せん断応力、間隙比、せん断ひずみ増分を含んでいる。一方右辺は間隙比とその偏差（ $e$  と  $s$ ）を含んでいる。そこで変数  $e, s$  を何らかの方法で  $e, \gamma$ （ $\gamma$  : せん断ひずみ）に変換する必要がある。 $s$  は  $e, \gamma$  の関数であると思われるが、その函数形を定めるのは困難と思われるので、最上は半ば直観的に

$$\begin{aligned} S &= K \ln Z \\ &= KF(e - k\gamma) \end{aligned} \quad (3.48)$$

と仮定した。函数  $F$  の形をモデル実験によって得られた事実によって定め、 $e \gg k\gamma$  とすれば、間隙比の偏差は

$$s - s_0 = 2k\gamma e(1+e) \log[(1+e)/e] \quad (3.49)$$

ここに  $s_0$  は破壊開始時の  $s$  の値、せん断ひずみ  $\gamma$  は破壊開始時から測る。また  $k$  は定数である。これらの関係を各種の試験における破壊状態に適用すると、次のような粒状体の間隙比と内部摩擦角との関係が得られる。

$$\text{三軸圧縮} : \sin \phi = \frac{3k'}{2(1+e)+K'}, \quad k' = \frac{k}{2} \quad (3.50)$$

$$\text{平面ひずみ} : \sin \phi = \frac{k}{1+e} \quad (3.51)$$

$$\text{平面応力} : \sin \phi = \frac{k}{1+e} \quad (3.52)$$

これらの式の妥当性を粗粒材について行われた一面せん断試験の結果を使って調べたところ、 $k$  値の一定性は非常によく、導かれた式の有用性が確かめられた（最上, 1968 ; 最上・吉越, 1969）。

最上の理論は一つの完結した体系を成しているように思われる。この完結性と独創性のゆえに、最上理論は尊く、その一方で、最上理論を受継ぎ、発展させる研究がほとんどないということになっているのではないだろうか。

## 第4章 軸差応力を受ける粒状体の 変形機構の微視的考察

### 4.1 序 論

砂のような粒状体の変形・強度特性を調べるのに、しばしば、三軸圧縮試験が用いられる。この試験法の特徴は、3主応力の方向が一定していること、間げき圧の制御および応力の制御が容易であることにあり、通常は、円筒形供試体を用いて、軸対称応力  $\sigma_1 \equiv \sigma_a$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 \equiv \sigma_r$  を作用させる。このような三軸圧縮応力下における、砂の巨視的な挙動に関する研究は、静的応力、繰返し応力、動的応力のそれぞれの場合に多くの成果を挙げており、より精密なデータを得るべく研究が続行されている。このようにして、砂のさまざまな力学的性質が巨視的レベルで明らかになってくると、そのような力学的性質を示す理由について、ある挙動のよって来たるべき機構にさかのぼって考察することが、諸性質の統一的解釈と、研究の前進のために必要となるのは当然と言えよう。粒状体力学はこのような要請に答えるべく発展してきた力学の一分野といえる。

砂のような粒状体の力学的挙動に関する、微視的立場からの研究には、用いた方法論やとり上げた微視的要因によって、いくつかの流れがある。

第1の流れは最上(1965など)の研究によって代表される。彼は統計力学的あるいは情報理論的手法を用いて、粒状体の強度が、間隙比の平均と偏差に密接な関係があることを示した。

第2の流れは、粒子と粒子の間の力のつり合いと変位を論ずるもので、いわゆる応力-ダイレイタンス式が議論の中心になっている。このグループに属する研究は、(1)変形中の粒状体に仮定した、潜在すべり面に沿う粒子間接点に着目する、Newland and Allely(1957), 村山(1964), 松岡(1973)らの研究と、(2)Rowe(1962), Horne(1965, 1969), 小田(1972, 1974)などのように考察の対象とする接点を特定せずに、全体の粒子を考え、粒子間のすべりはある傾きをもつ接点に限定されると考える研究とに分けられる。

第2の流れに属する研究においては、一般に、粒子の性質としては、粒子間摩擦角  $\phi_\mu$ , 粒子の集合状態としては、粒子接点角 ( $\alpha_i, \beta_i$ ) とその分布が基本的要因としてとり上げられ、さらに、変形機構を考える上で、粒子間力の大きさと方向について何らかの仮定を行なっている。これらの要因のうち、粒子間摩擦角  $\phi_\mu$  については第2章2.2.1に述べた通り、Rowe(1962), Procter and Barton(1974)はじめ、いくつかの研究がある。

摩擦の問題はかなりこみ入っていて、単純に割り切れない性質のものようであるが、粒状体の変形機構を考える場合には、Rowe (1962) によって提案されている方法によって求めた、平均的な粒子間摩擦角の値を用いるのがよいようである。

粒子接点角の分布とその変形に伴う変化は、変形機構の中心をなす概念であり、多くの研究者によって実測されている。小田 (1972 b, c) は、顕微鏡観察により、変形中の粒状体における、粒子接点角の分布についての貴重なデータを提供した。Biarez & Wiendieck (1963) は砂粒子に似た不規則な形状の平板状粒子を二次元的にならべ、二軸圧縮試験を行なって、粒子接点角分布の変化を測定し、幾何学的異方性の変形に伴う推移を示した。

粒子接点角およびその分布、粒子の変位などが、応力あるいは粒子間力などといかなる関係にあるかを知るためには、粒子間力や粒状体の応力状態を同時に測定する必要がある。実際の砂で粒子間力を測定することは現状不可能であり、内部における応力状態の直接測定もむずかしい。したがって、このような目的のためには、何らかの模型実験を行なうしかない。現在最も有効と考えられるのは、光弾性材料で作製した模型粒子の、二次元的あるいは三次元的模型粒状体を用いる方法である。

本研究においては、粒子間力に関するデータ、および、これと粒子接点角分布との関係に関するデータが非常に少ないことを顧みて、二次元光弾性模型粒状体に種々の変形を与えて、粒状体の変形機構を解明しようとしている。

本章においては、二次元模型粒状体の二軸圧縮試験の概要と結果について述べることにする。

## 4.2 実験の方針

前節で述べた目的のために、かなり抽象化・単純化した模型実験を行なうことにした。その場合に次のような方針によることとした。

(1)粒子間力の測定ができること：粒子配列およびその変化に関しては実際の砂の三軸試験における測定方法がある（小田1972 b, c）ので、実際の砂では測定不可能な、粒子間力に関する情報が得られることを第1に考える。その場合に、個々の接点における値が得られることが望ましい。

(2)粒子間力と同時に粒子配列も測定できること：個々の接点における粒子間力は、当然粒子配列の影響を受け、かつ当該接点の方向に左右されると考えられる。それゆえ、この両者を同時測定できることが必要である。

(3)粒子間力および粒子配列の測定は、変形の任意の段階で、連続的に行なえること：模型では粒子の数、粒子形状に制約があり、また実験回数も限られてくるので、同じ状態の再現が実際の砂以上に困難である。したがって、1つの供試体の変形過程を逐次、追跡できることが望ましいと考える。



(4)粒子の作製および解析が容易であること：粒子数が多いのでこの点は重要である。

(5)模型実験としては相似率を考慮に入れて、プロトタイプの砂における諸値が求まることが望ましいが、今回は一応定性的な比較ができればよいことにする。

以上のような方針に基づき、次のような模型粒状体を採用した。

(1)粒子は光弾性材料で作製する：粒子間力を各接点で測定可能な方法のうち、最も容易と思われる方法である。

(2)二次元モデルとする：現実の粒状体は、ほとんど例外なく三次元である。二次元と三次元では、粒子配列や粒子運動における自由度が異なるので、二次元モデルで得られた結果は、三次元現象の1つの特別の場合でしかない可能性もあるであろう。したがって、光弾性模型の場合も三次元とし、応力凍結法および粒子の位置固定を行なうことがその点では望ましい。しかし、粒子作製および実験・解析の手間は飛躍的に増大する。また方針(3)で述べた、同一供試体の連続的測定は不可能となる。そこで、二次元モデルを採用することにし、これが実際の砂の挙動を表現し得るかどうかは、巨視的および微視的立場から、モデルの挙動と砂の挙動を比較することによって判断することにした。

(3)粒子形状は円柱形とする：砂粒子の形状は、一般に不規則であって、球または円柱形ではない。しかし、粒子形状の評価・その力学的性質への影響だけでも非常にむずかしい問題を含んでおり、粒子形状を不規則にすると、余計に問題を複雑にするおそれがあることと、粒子作製および解析の便を考えて、最も単純な円柱形とした。

(4)異なった粒径の混合体とし、配列は不規則とする：単一粒径であると、粒子配列はほとんど規則的となってしまい、ランダムな砂のモデルとしては不適當である。そこで本研究では、粒型を3種類としこれを無作為的に積んで粒状体を形成した。その結果、規則配列のなごりは残るものの、かなり不規則な集合体を作ることができた。

### 4.3 模型粒子

模型粒子は直径が $\phi 6.0$  mm,  $\phi 8.0$  mm および  $\phi 10.0$  mm で長さが 19.0 mm の円柱形である。これらの粒子は、光弾性材料であるエポキシ樹脂板(厚さ 19.0 mm)から、特製の中空カッターを用いて削り出したものである。なお詳細は、付録 4.A 1 を参照されたい。

長さと同径の比率は、二次元で平面応力条件を考える場合には、長さの短い円板状のものとするのが望ましい訳であるが、本実験においては直径の17~30倍程度の高さに積み上げるので、1)安定性と2)余分の拘束を加えないこと、の2つの理由から、比較的長い円柱形を採用した。これにより、面外方向を拘束しなくても、面外方向への座屈現象を生じなかった。その反面、切削時に粒子円筒面の凹凸が生じたり、粒子同志が完全に平行にならないなどの問題が生じた。粒状体を形成する際には、細心の注意を払って平行性に注意したが、変形過程において、傾き

が生じた粒子もあり，そのような粒子との接点においては，荷重伝達に不正が生じ，光弾性縞の判読が困難となった．しかし，その数は少く，許容し得ると判断された．また，粒子が長いため，初期応力の除去（アニール）に苦心した．

3種の径の粒子を，個数比で， $\phi 6 : \phi 8 : \phi 10 = 1 : 1 : 1$ の割合に混合し，ボールに入れてよくかきまぜてから，無作為に手でとり出し，载荷枠内に積み上げた．実際にでき上った供試体に含まれる3種の径の粒子の個数は，上の割合とやや異なったものとなっている．

表 4.1 二次元二軸圧縮試験一覧

記号	側方荷重	初期寸法 (幅×高)	粒子数			初期間隙比	最大応力比
			$\phi 10$	$\phi 8$	$\phi 6$		
BC-5	0.49 kg/cm	221.0 × 205.4	232	250	193	0.252	2.74
BC-8	0.75 kg/cm	221.0 × 214.3	236	251	249	0.240	3.18
BC-11	1.14 kg/cm	220.1 × 210.0	242	250	190	0.251	2.82
BC-11H	1.14 kg/cm	170.5 × 246.4	212	223	206	0.247	2.60

#### 4.4 実験装置

##### 4.4.1 二次元二軸圧縮試験機

試験装置の構造を図 4.1 に，外観を写真 4.1 に示す．試験装置は2種類ある．第1のものは供試体を囲む枠組が正方形に近いもので，供試体寸法が幅約22cm，高さ約21cmとなっており，供試体両側部材が可動となっている（Ⅰ型）．第2のものは枠組が幅約17cm，高さ約25cmの長方形であって，側部材は片側固定・片側のみ可動となっている（Ⅱ型）．

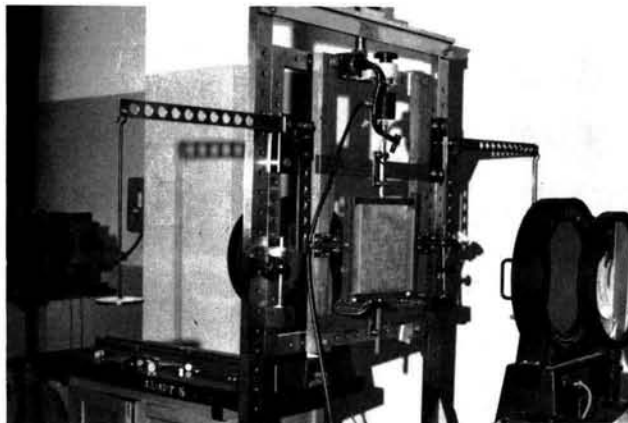


写真 4.1 二次元二軸圧縮試験機

いずれの試験機も，载荷枠は19mm角の鋼製で，粒子に比べると十分に剛な4本の部材で構成されている．底部材bは固定されており，上部材cはボールベアリングを用いたガイドfに

よって、上下方向にのみ可動となっている。側部材 d も上部材と同様のガイド f によって、左右方向（水平方向）にのみ可動となるよう支持されている。Ⅱ型では、片側の部材はクランプによって固定される。

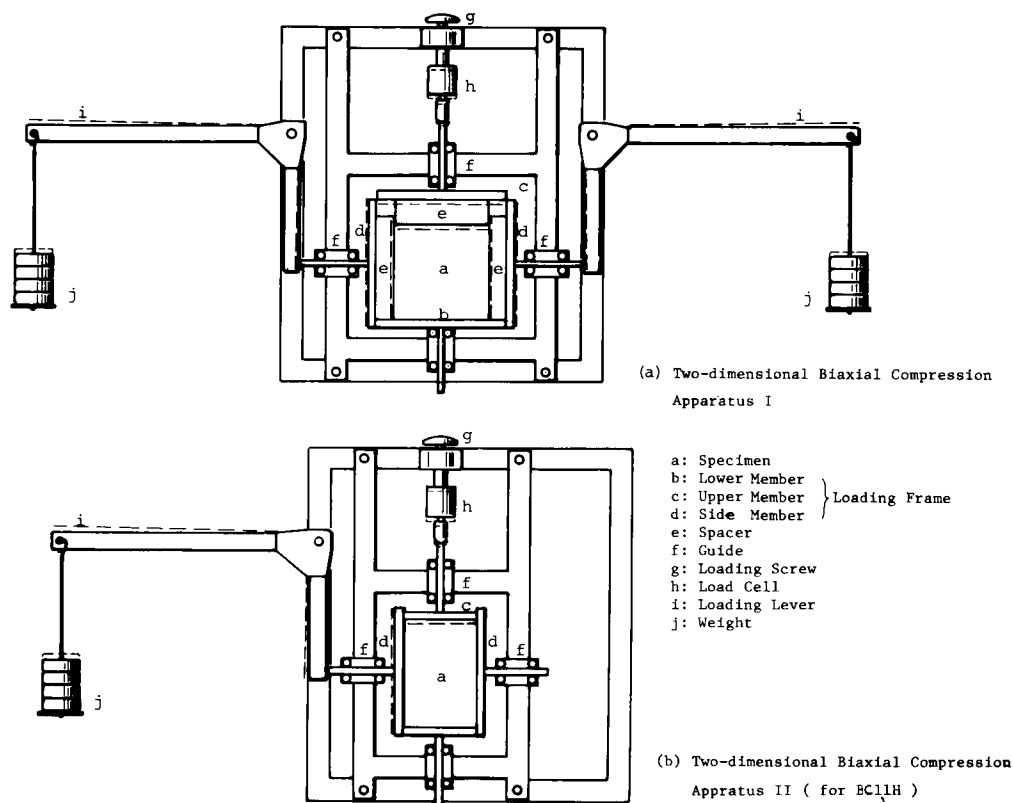


図 4.1 二次元二軸圧縮試験機

側部材には、L字形のこ i と重錘 j によって一定加重を加えておき、上部材をねじによって下方に変位させ、粒状体を圧縮した。上部材にかかる鉛直荷重は、ロードセル h により検出し、上部材および側部材の変位は、ダイヤルゲージによって測定した（ロードセル：新興通信・LC100K、ダイヤルゲージ：1/100 mm 精度）。

この試験機を、光弾性実験装置の円偏光場に据えつけた。

#### 4.4.2 光弾性実験装置

装置は理研計器製で、 $\phi$  300 mm の偏光板、四分の一波長板、視野レンズを有する。光源としては、水銀灯に G-1 フィルターを併用した、緑色（波長 5461 Å）の単色光源を用いた。

写真機は、焦点距離 300 mm、F 4.5 のフジナーレンズと、ソロントン式シャッターを付けた、キャビネ判の暗箱である。フィルムはネオパン S S、キャビネ判シートフィルムを使用し、D K 50 現像液で現像した。

## 4.5 実験方法

所定のアニールサイクルで初期応力を除去した、 $\phi 10$ 、 $\phi 8$ 、 $\phi 6$ の3種の粒子を混合してボウルに入れ、これを無作為的に手で取り出して、載荷枠内に目的高さまで、ランダムに積み上げる。積み終わったら、上部材を粒状体上面に接するまで、静かに下降させる。粒子個数を数え、幅と高さをノギスにより測定する。

表 4.1 に、二軸圧縮試験各供試体の寸法、粒子数、間隙比などを示す。 $\phi 10$ 、 $\phi 8$ 、 $\phi 6$ 各粒子の混合比が必ずしも一定せず、間隙比にもばらつきを生じている。これは粒子の抽出、つまり、いずれの粒子を選ぶかという段階と、抽出した粒子をどの位置に積むかという段階におけるランダム性に問題があったためと思われる。両段階において、乱数表を使用すれば、事態は改善されたであろう。

上部材の垂直変位、および、側部材の水平変位測定用のダイヤルゲージを取り付け、水平載荷用てこに所定の重錘をかける。この段階では、側部材は上部材および底部材に当って、内側には変位できないので、粒状体にはほとんど荷重がかからないようになっている。水平荷重が全部粒状体に伝わるのは、垂直荷重が増大して側部材が粒状体に押されて、上・下部材との接触を断った時点である。

無負荷状態での写真を撮影しておいてから、圧縮試験を開始する。試験方法は、通常の三軸圧縮試験における最も普通の方式になった。すなわち、水平荷重を一定に保っておき<sup>\*</sup>、変位速度は、1 mm/minとしているが、所定変位に達するごとに圧縮を中断して、変形および光弾性縞が落着いてから、光弾性等色線縞写真を撮影しているのので、変位の与え方は階段状である。鉛直荷重がピークを過ぎた段階で圧縮をやめ、除荷に移り、鉛直荷重を zero まで戻して、試験を終了する。

## 4.6 実験結果

### 4.6.1 応力・ひずみ・体積変化関係

応力およびひずみを次のように定義する。

$$\text{最大主応力 } \sigma_1 = \frac{\text{鉛直荷重} (P_1)}{\text{粒状体の幅} (B)}$$

$$\text{最小主応力 } \sigma_3 = \frac{\text{水平荷重} (P_3)}{\text{粒状体の高さ} (H)}$$

$$\text{最大主ひずみ } \varepsilon_1 = \frac{\text{高さの変化量} (H - H_0)}{\text{初期高さ} (H_0)}$$

---

\*) 供試体高さの変化に伴って、側方平均圧力は変化するが、その量はわずかで、近似的に、側圧 ( $\sigma_3$ ) 一定試験とみなしてよい。なお側方圧力  $\sigma_3$  としては、0.5, 0.75, 1.1 kg/cm の3種を使用した。

$$\text{最小主ひずみ } \epsilon_3 = \frac{\text{幅の変化量 } (B - B_0)}{\text{初期の幅 } (B_0)}$$

$$\text{体積ひずみ (面積ひずみ)} \quad v = \frac{\text{面積変化量 } (B \times H - B_0 \times H_0)}{\text{初期面積 } B_0 \times H_0}$$

いずれも、均一性を仮定しての平均的な値である。

図 4.2 ~ 4.5 に、応力比 ~ 軸ひずみ ~ 体積ひずみの関係を示す。これらの曲線は、一定垂直

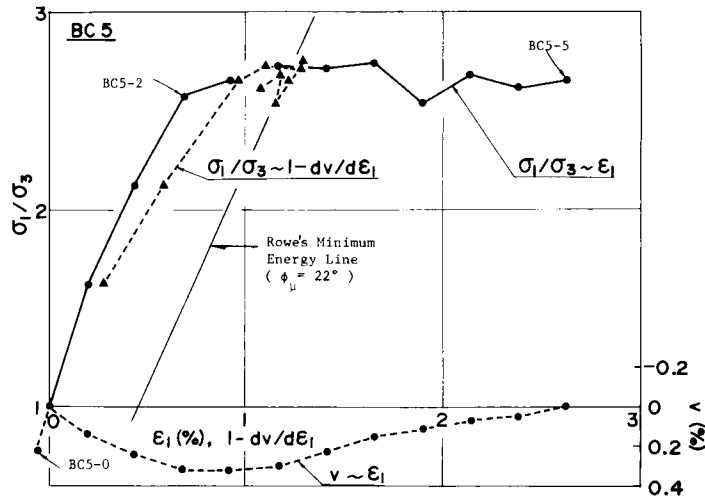


図 4.2 二次元粒状体の応力比・軸ひずみ・体積ひずみ関係 (BC 5,  $\sigma_3 = 0.75 \text{ kg/cm}$ )

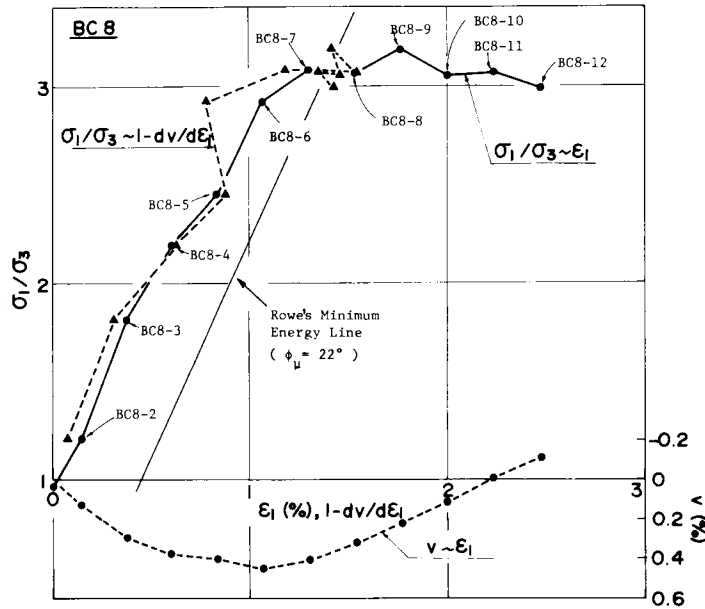


図 4.3 二次元粒状体の応力比・軸ひずみ・体積ひずみ関係 (BC 8,  $\sigma_3 = 0.75 \text{ kg/cm}$ )

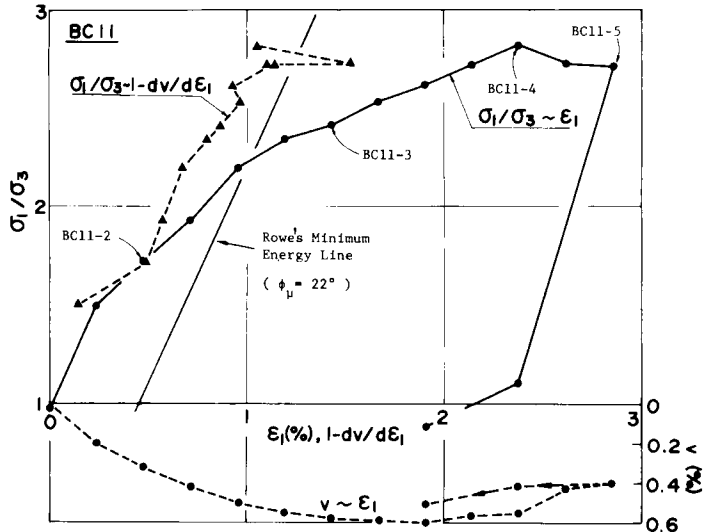


図 4.4 二次元粒状体の応力比・軸ひずみ・体積ひずみ関係 ( BC 11,  $\sigma_3 = 1.1 \text{ kg/cm}$  )

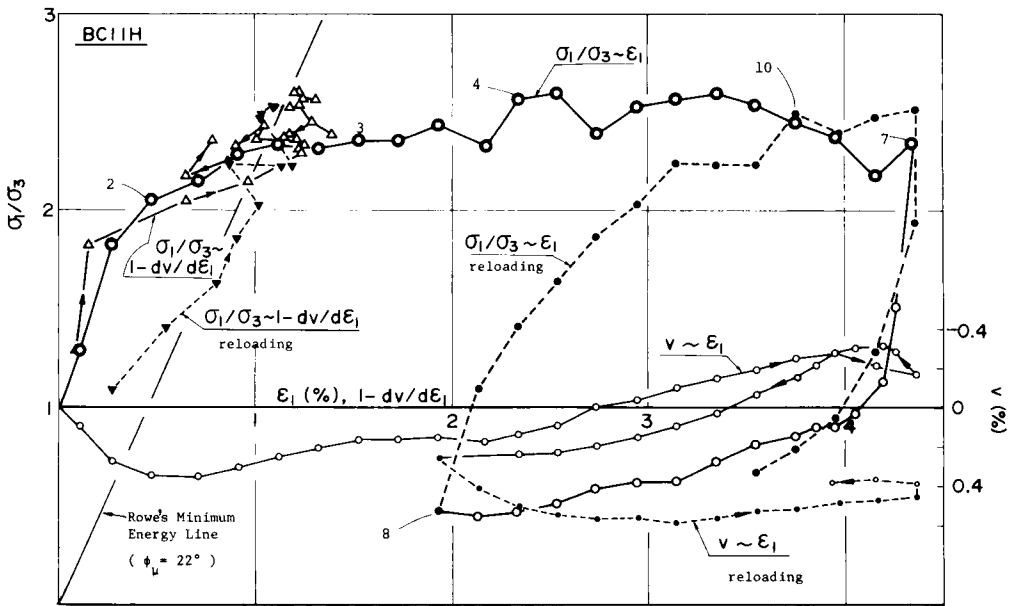


図 4.5 二次元粒状体の応力比・軸ひずみ・体積ひずみ関係 ( BC11H,  $\sigma_3 = 1.1 \text{ kg/cm}$  )

変位ごとに、荷重計およびダイヤルゲージを読み取って描いたものであって、粒子間のすべりによるものと思われる鋸歯状の凹凸がかなり省略されたものが現れ、かえって平均的な形状を示していると言える。

さて、ここに掲げた軸ひずみ・応力比関係、軸ひずみ・体積ひずみ関係とも、比較的ゆるい砂の三軸圧縮試験で得られる関係によく似た傾向を示している。すなわち、応力比・軸ひずみ曲

線は著しいピークを有せず、ゆるやかに破壊に至り、それに伴う体積ひずみ曲線も、体積減少傾向からゆるやかに膨張傾向に移行するようなものとなっている。

3種類の粒径の円筒形粒子の二次元的集合体という、砂とはかなり異なる材料であるにもかかわらず、傾向的に同じ挙動を示していることは注目してよく、微視的な諸挙動についても、砂粒子と相似であることが期待できる。

各場合における最大応力比は、初期間隙比の小さかったBC8が、やや大き目の値を示している他は大体同じであるが、最大応力比に至るまでの軸ひずみは、側圧 $\sigma_3$ が大きいほど大きくなっている(表4.1参照)

#### 4.6.2 応力・ダイレイタンスー関係

Rowe(1962)は、最小エネルギーの考え方に基づいて、次のようないわゆる応力ダイレイタンスー関係を導いた：

$$R = DK \quad (4.1)$$

ここに  $R = \sigma_1 / \sigma_3$  (主応力比)

$$D = 1 - \dot{v} / \dot{\epsilon}_1 \text{ (ダイレイタンスー係数)}$$

$$K = \tan^2(\pi/4 + \phi_\mu/2)$$

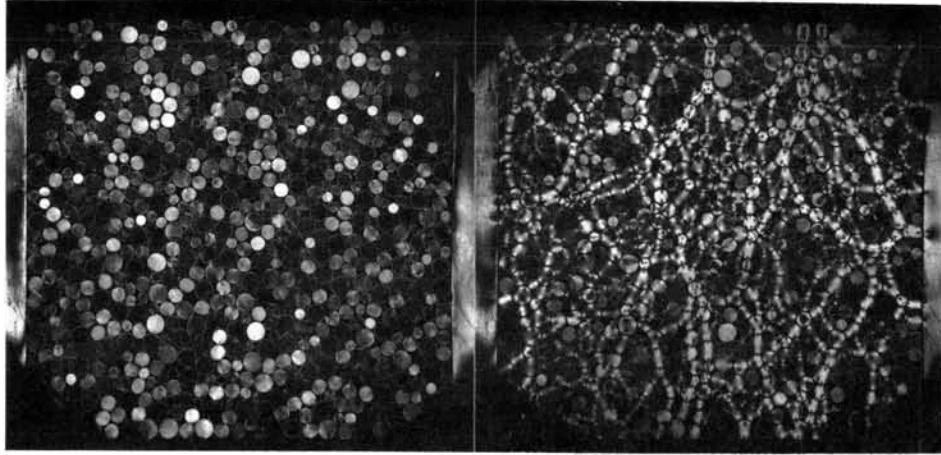
なお応力およびひずみはすべて圧縮側を正としている。

2次元粒状体における、主応力比とダイレイタンスー係数の関係を、図4.2～4.5中に▲印で示した。なお同図中の直線は、 $\phi_\mu = 22^\circ$ としたときの式(4.1)の関係、すなわち、最小エネルギー線を示す。実験値は各場合とも、上方から最小エネルギー線に漸近する傾向を示している。また、BC11H(図4.5)においては、再載荷を行なっているが、再載荷過程においては、初載荷時よりも、最小エネルギー線に近い経過をたどっている。ここで見られた傾向は、Rowe(1962)の示した実験値よりも、Barden and Khayatt(1966)が示した、より精度の高いと思われる実験値の傾向に類似している。すなわち、Roweの実験値は、変形の途中から、下方より、最小エネルギー線に乗ってくるのに対し、Barden and Khayattは、最小エネルギー線に上方から漸近する実験値を示しているのである。いずれがより本質的な挙動かの結論は出ていないようであるが、二次元粒状体においても、ピーク近くのある段階で、Roweの最小エネルギー規準に合致するような変形の仕方をしていることは事実のようである。

#### 4.6.3 力の伝達径路について

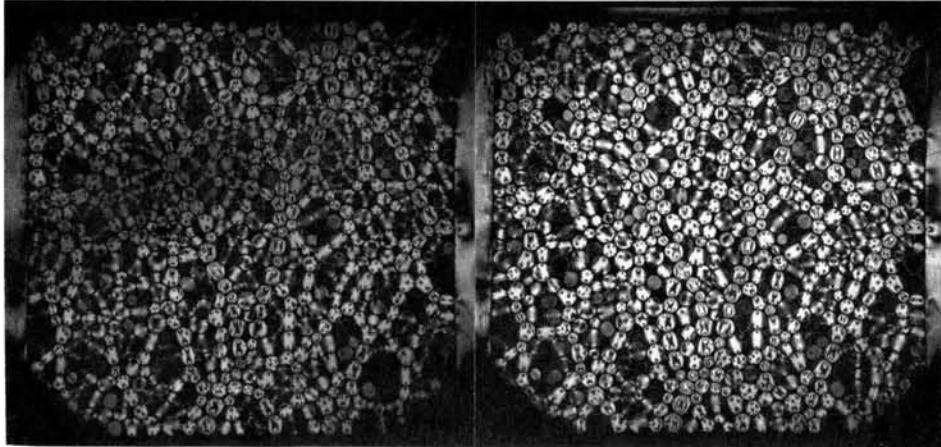
写真4.2、4.3に、二次元二軸圧縮試験の各段階において撮影した、光弾性等色線縞写真の例を示す。

一般に、物体表面に力を加えると、物体内部にはそれに応じた応力が発生する。載荷枠を通じて粒状体に力を加えると、写真4.2、4.3に示すように、粒子間接点を通して伝達される粒子間力が発生する。



(a) BC8-0

(b) BC8-2



(c) BC8-5

(d) BC8-9

写真4.2 二軸圧縮供試体の光弾性等色線写真

不規則粒子配列の粒状体においては、粒子間力は全接点・全粒子に均等に伝達されることはほとんど考えられない。写真が示すように縞が多く生じている粒子間力の大きな接点から、縞が生じていない粒子間力がほとんど零の接点まで、粒子間力の大きさは接点により区々であり、大きな力を伝達している粒子の「鎖」が何本も観察されるが、このような「鎖」の卓越方向は、上下方向、すなわち、最大主応力方向にあるようである。この大きな力を伝達している粒子の「鎖」はそのまわりの粒子の鎖よりも剛性が大きく、粒状体内部で、一種の「柱 (Column)」を成しているように思われる (小田, 1974, Drescher and de Josselin de Jong, 1972)。

このような粒状体に対しては、連続体における応力の定義を直ちに適用することはできない。粒状体を連続体的に取扱う場合の応力は、離散的な粒子間力の、ある領域における、あるいは、ある面における平均値によって定義することになる。



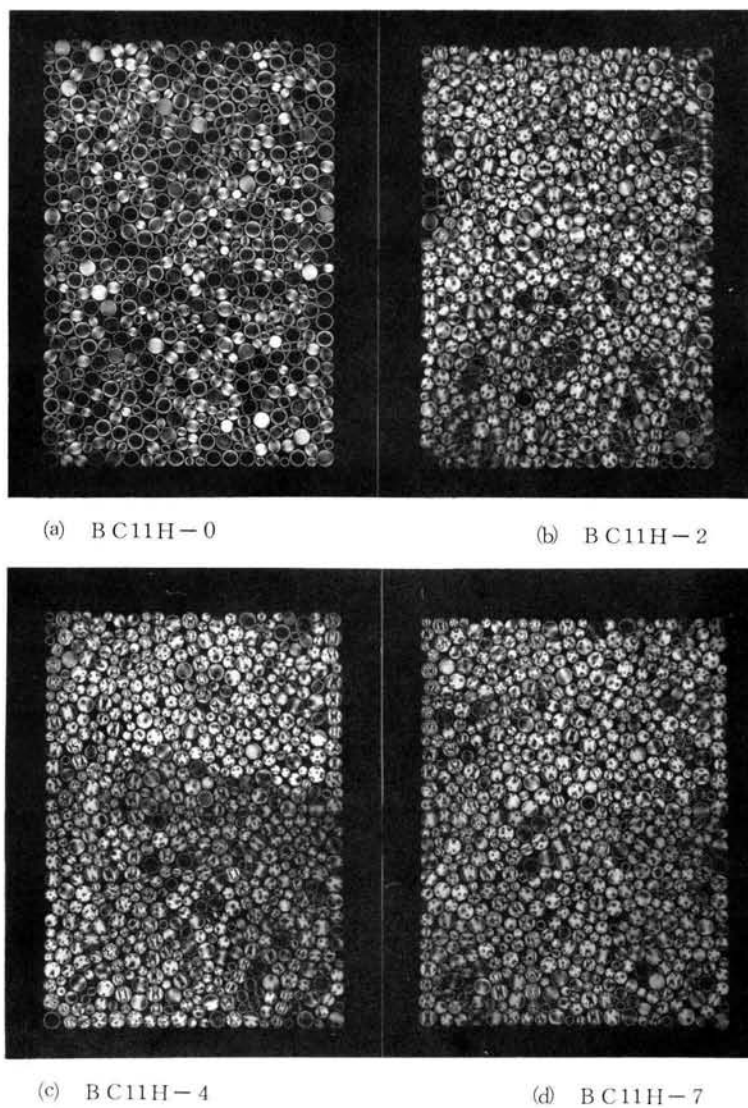


写真 4.3 二軸圧縮供試体 光弾性等色線写真

同様のことがひずみについても言える。つまり、連続体的意味でのひずみは、個々の粒子の変位、あるいは、粒子間の相対変位の平均として考えなければならない。

これらの点に関しては、第 7 章において詳しく議論する。

## 4.7 粒子構造の変化

### 4.7.1 概 説

一般に、砂のような粒状体は降伏応力以上の応力が作用すると、塑性的な変形を行なう。砂や土のような材料では降伏応力は小さいので、われわれが砂の三軸圧縮試験などで観察してい

の変形は、その大部分がこのような塑性的な変形であって、破壊に至るまでの過程においては、塑性ひずみの進行とともに降伏応力が増大する、いわゆる、ひずみ硬化 (strain hardening)、あるいは、加工硬化 (work hardening) 材料としての特性を示す。

金属が引張応力の下で塑性変形すると、金属組織中の各結晶粒の結晶学的方向は、応力により方向づけられる共通軸の方向に回転し、選択方位 (preferred orientation) を生じる。その結果、負荷前には結晶粒の方向がランダムで、統計的に等方性であっても、塑性変形とともに異方性を示すようになることがミスオリエンテーション (misorientation) として知られている (大南・塩沢, 1976)。

同様のことが、土についても認められることは、以前より知られていたが、土粒子配列構造の定量的評価がなされるようになり、力学的性質との関連に関する議論が行われるようになったのは比較的最近のことに属する。

小田は、三軸圧縮試験および一面せん断試験における砂の変形・強度と粒子構造およびその変化との関連についての詳細な実測データを提供した (その一部を本章および第5章において示す)。彼は砂供試体を、接着剤を用いて固結させ、顕微鏡用の薄片を作製し、ユニバーサルステージ付の偏光顕微鏡を使って、砂粒子の空間的方位、間隙比、砂粒子間接点における接平面の法線方向などを測定して、砂の構造を定量的に明らかにするとともに、構造異方性と強度との関係、砂のひずみ硬化の主要なメカニズムが構造異方性の発達にあることなどを明らかにした (小田, 1972 a, b, c, 1974, 1975)。

砂のような粒状体の巨視的応力およびひずみは、粒子間接点における粒子間力、および、粒子の相対変位の総和、あるいは、平均といってもよいから、このような材料の変形・強度は、粒子間接点における接平面の方向に密接な関係があることは容易に想像できる。

本節においては、二次元粒状体の、接点における接平面に立てた法線方向の分布が、二軸圧縮の進行とともにどのように変化するかを調べ、砂の場合との対比を行う。

#### 4.7.2 粒子接点角の分布

ここで、以下の議論で用いる微視的諸量を定義しておく。

粒状体内の任意の接点  $C_i$  を考えよう (図 4.6)。接点  $C_i$  は、粒子 1 と粒子 2 の接点であって、接点における接平面  $\pi_i$  は、方向が同じで向きが反対の 2 つの法線  $N_1^i$ ,  $N_2^i$  を有している。直交座標軸  $X$ ,  $Y$  および  $Z$  を、それぞれ主応力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  および  $\sigma_3$  に平行にとる。

上向きの法線  $N_2^i$  が  $X$  軸となす角を  $\beta_i$ ,  $N_2^i$  の  $YZ$  面への射影が  $Y$  軸となす角を  $\alpha_i$  とすれば、接点  $C_i$  の空間方位は角  $(\alpha_i, \beta_i)$  によって記述できる。角  $(\alpha_i, \beta_i)$  を接点  $C_i$  の粒子接点角と呼ぶことにする (Horne は  $\beta_i$  を  $N_i$  と  $YZ$  面とのなす角と定義しており、本節の  $\beta_i$  とは補角の関係にある。角  $(\alpha_i, \beta_i)$  を solid angle と呼んでいる)。

二次元粒状体の場合には、粒子接点角は  $N_2^i$  が  $X$  軸となす角  $\beta_i$  のみとなる (図 4.6 (b))。

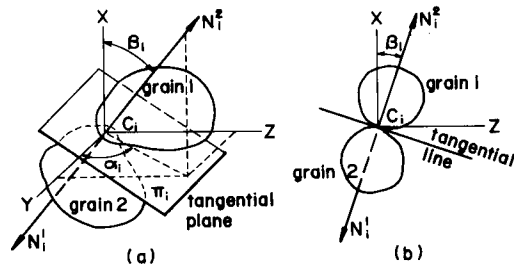


図 4.6 粒子接点角の定義 (a) 三次元 (b) 二次元

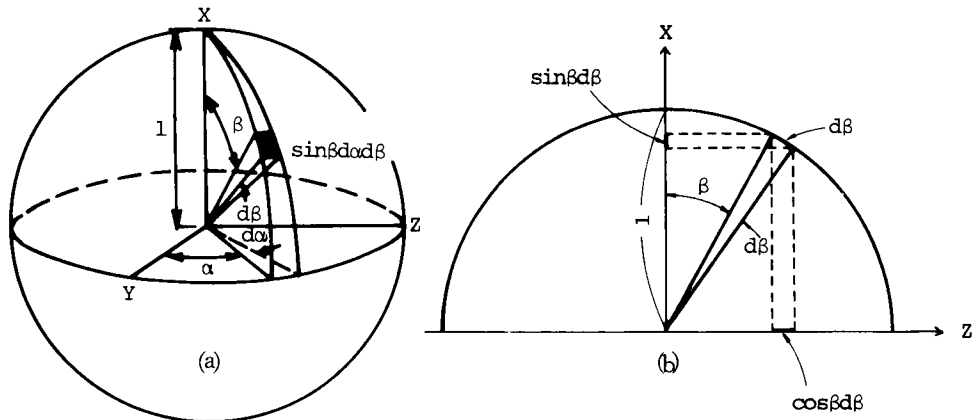


図 4.7 粒子接点角の確率密度を定義するための単位球および単位円

次に、粒子接点角の確率密度について考えよう。

図 4.7 (a) は、半径が 1 の単位球を表わしている。微小な角度範囲  $\alpha \sim \alpha + d\alpha$  および  $\beta \sim \beta + d\beta$  (球上の微小面積、斜線を施した部分) に接点が存在する確率は、確率密度関数を  $E(\alpha, \beta)$  とすると、

$$E(\alpha, \beta) \sin \beta d\alpha d\beta \quad (4.1)$$

で表わされる。全角度範囲 (全球面) における確率の総和は 1 にならなければならないから、 $E(\alpha, \beta)$  は次式を満足しなければならない。

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin \beta d\alpha d\beta = 1 \quad (4.2)$$

また、 $N_i^1$  と  $N_i^2$  とは、方向等しく、向きが反対であるから

$$E(\alpha, \beta) = E(\alpha + \pi, \pi - \beta) \quad (4.3)$$

が成り立つ。

通常の三軸圧縮試験のような軸対称の場合には、 $E(\alpha, \beta)$  は  $\alpha$  によって左右されないと考えられるから、単に  $E(\beta)$  となり、式 (4.2) は

$$2\pi \int_0^\pi E(\beta) \sin \beta d\beta = 1 \quad (4.4)$$

となる。

二次元粒状体の場合には、図 4.7 (b) を参照して、方位角  $\beta$  のみを考えればよいから、微小な角度範囲  $\beta \sim \beta + d\beta$  に接点が存在する確率は、 $E(\beta)$  を確率密度関数として

$$E(\beta) d\beta \quad (b)$$

で表わされる。この場合、 $E(\beta)$  は次の条件を満足しなければならない。

$$2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) d\beta = 1 \quad (4.5)$$

いま考えている領域に存在する全接点数を、法線  $N_1^+$  と  $N_1^-$  を別々に数えて  $M$  とすれば、 $\beta \sim \beta + d\beta$  の範囲にある接点数は  $ME(\beta) d\beta$  である。したがって、たとえば、法線方向  $\beta$  が  $0^\circ < \beta \leq 10^\circ$  および  $-180^\circ < \beta \leq -170^\circ$  の範囲にある接点数を  $M_1$  と書くと、

$$M_1 = M \int_0^{10^\circ} E(\beta) d\beta + M \int_{-180^\circ}^{-170^\circ} E(\beta) d\beta = 2 M \int_0^{10^\circ} E(\beta) d\beta = 2 M \int_0^{\pi/18} E(\beta) d\beta \quad (4.6)$$

となる。また、この  $\beta$  の範囲における  $E(\beta)$  の平均値  $E_1(\beta)$  は

$$E_1(\beta) = \frac{M_1}{2 M \int_0^{10^\circ} d\beta} = \frac{M_1}{2 M \int_0^{\pi/18} d\beta} = \frac{9}{\pi} \frac{M_1}{M} \quad (4.7)$$

となる。同様にして

$$\left. \begin{array}{l} 10^\circ < \beta \leq 20^\circ \\ -170^\circ < \beta \leq -160^\circ \end{array} \right\} : E_2(\beta) = \frac{9}{\pi} \frac{M_2}{M}, \quad M_2 = 2 M \int_{\pi/18}^{2\pi/18} E(\beta) d\beta \\ \vdots \\ \left. \begin{array}{l} 80^\circ < \beta \leq 90^\circ \\ -100^\circ < \beta \leq -90^\circ \end{array} \right\} : E_9(\beta) = \frac{9}{\pi} \frac{M_9}{M}, \quad M_9 = 2 M \int_{8\pi/18}^{9\pi/18} E(\beta) d\beta \\ \vdots \\ \left. \begin{array}{l} 170^\circ < \beta \leq 180^\circ \\ -10^\circ < \beta \leq 0^\circ \end{array} \right\} : E_{18}(\beta) = \frac{9}{\pi} \frac{M_{18}}{M}, \quad M_{18} = 2 M \int_{17\pi/18}^{\pi} E(\beta) d\beta \quad (4.8)$$

となる。もし、粒状体が統計的に等方体であって、 $-90^\circ < \beta \leq 90^\circ$  の全範囲に、 $N_i$  が一様に分布しているものとするれば、 $E(\beta)$  は一定値となるはずである。このときの  $E(\beta)$  の値は、

$$E(\beta) = E_1(\beta) = E_2(\beta) = \dots = E_{18}(\beta) = \frac{1}{2\pi} \quad (4.9)$$

となる。

三次元粒状体の場合にも同様の考え方ができ、等方性の場合には

$$E(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \quad (4.10)$$

となる。

図 4.8 ~ 4.11 に、粒子間接点における接線に立てた法線  $N_i$  の確率密度関数  $E(\beta)$ 、すなわち、粒子接点角の分布の変形に伴う変化を示す。ここで  $E(\beta)$  の分布は、 $\beta = 0^\circ$  に関しておよそ対称となる場合が多いので、 $\beta = 0^\circ \sim -90^\circ$  の値と  $\beta = 0^\circ \sim +90^\circ$  の値を平均して図示してある。

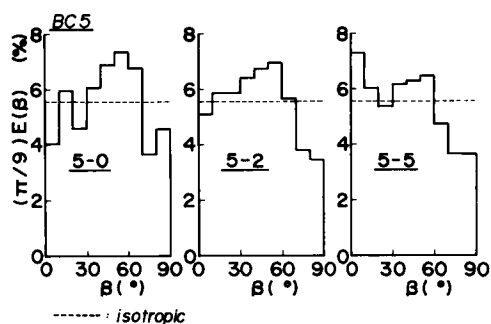


図 4.8 二軸圧縮時の粒子接点角分布の変化 (BC 5)

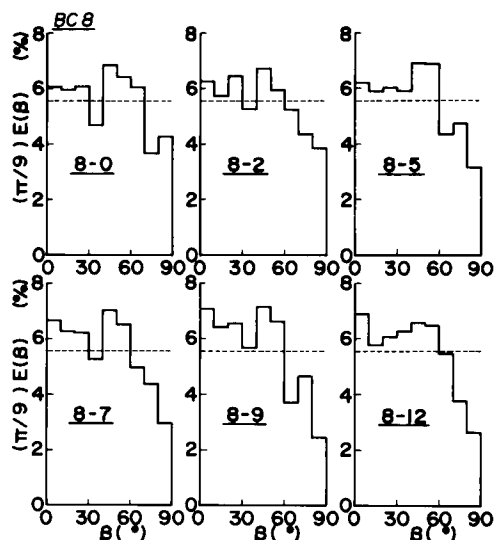


図 4.9 二軸圧縮時の粒子接点角分布の変化 (BC 8)

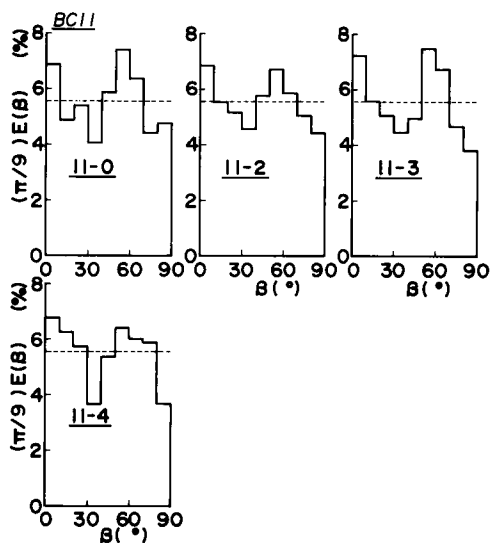


図 4.10 二軸圧縮時の粒子接点角分布の変化 (BC 11)

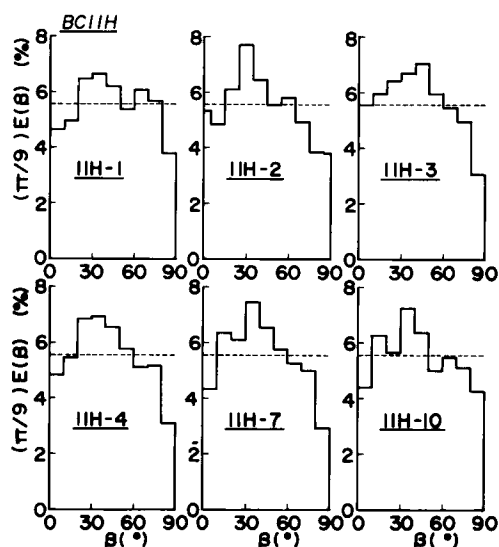


図 4.11 二軸圧縮時の粒子接点角分布の変化 (BC 11H)

図中に付した番号は、変形の各段階を示し、5-0、8-0のようなものに0を付したものは、荷重荷前前の初期状態を示している。各図が変形のどの段階に対応しているかは、図4.2～4.5中の同番号の点、または、表4.2を参照されたい。

図4.8～4.11の初期状態の図(0を付したもの)を見ると、いずれも、 $40^{\circ} \sim 60^{\circ}$ 付近にピ

ークを有しており、破線で示した等方状態には一致していない。このピークは、円柱を積み重ねた場合、粒子と粒子の凹みに次層の粒子が乗るという円柱の規則配列のなごりが現われたものである。粒径の種類を多くしたり、粒子形状を不規則なものにすれば、このようなピークは現われにくくなるであろう。

次に応力比  $\sigma_1/\sigma_3$  を増大させてゆくと、 $N_i$  は次第に最大主応力  $\sigma_1$  の方向に集まってくる。すなわち、 $0^\circ \leq \beta \leq 45^\circ$  の接点が増え、 $45^\circ < \beta < 90^\circ$  の接点が減ってくる。そして、 $E(\beta)$  の値は  $\beta = 0^\circ$  付近で大きく、 $\beta = 90^\circ$  付近で小さくなってゆく。

この傾向は、側圧  $\sigma_3$  の小さい場合に顕著であるが(BC5)、 $\sigma_3$  が大きくなると変化が小さくなる(BC11, BC11H)傾向がみられる。

上述のことを言いかえると、主応力比の増大に伴って、主応力軸を軸とする、構造異方性の増大が生じる、ということになる。

このことを定量的に表わすため、次項において「異方度」なる指数を導入することにする。

表 4.2 解析した変形段階の諸数値

series - No.	$\sigma_3$ kg/cm	$\sigma_1/\sigma_3$	$\varepsilon_1$ %	$\nu$ %	A	No. of Contacts measured.
BC5-0		—			0.992	435
2	0.49	2.58	0.68	0.32	1.094	459
5		2.65	2.63	0.00	1.177	1234
BC8-0		—		—	1.091	504
2		1.21	0.14	0.13	1.115	512
3		1.81	0.37	0.29	1.125	519
5	0.75	2.45	0.84	0.41	1.139	508
7		3.08	1.31	0.41	1.167	507
9		3.19	1.77	0.23	1.228	477
12		2.99	2.47	0.11	1.188	493
BC11-0		—		—	1.031	407
2	1.14	1.72	0.48	0.32	1.053	416
3		2.41	1.43	0.58	1.071	394
4		2.82	2.38	0.56	1.076	381
BC11H-0		—			1.025	957
2		2.05	0.51	0.34	1.089	857
3	1.14	2.36	1.53	0.16	1.087	926
4		2.56	2.34	-0.14	1.094	864
7		2.36	4.36	0.10	1.100	882
10		2.50	3.75	0.52	1.049	899

$\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \nu$  : compression as positive

### 4.7.3 異方度

二次元粒状体の構造異方性を示す指数として、 $N_i$ の確率密度函数 $E(\beta)$ の $\sigma_1$ 軸および $\sigma_3$ 軸方向への射影の比をとってみることにしよう。微小角度範囲 $\beta \sim \beta + d\beta$ にある接点の確率密度函数 $E(\beta)$ の

$$\sigma_1 \text{ 軸への射影は } E(\beta) \cos\beta d\beta$$

$$\sigma_3 \text{ 軸への射影は } E(\beta) \sin\beta d\beta$$

であるから、 $\beta$ の全範囲では、それぞれ、

$$\sigma_1 \text{ 軸への射影 } \quad 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) \cos\beta d\beta \quad (c)$$

$$\sigma_3 \text{ 軸への射影 } \quad 2 \int_0^{\pi} E(\beta) \sin\beta d\beta \quad (d)$$

となる。ここで、(c)と(d)の比をとると、この比は構造異方性を表わす1つの指数となる。これを $A$ で表わし、異方度 (degree of anisotropy) と呼ぶ：

$$A = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) \cos\beta d\beta}{\int_0^{\pi} E(\beta) \sin\beta d\beta} \quad (4.11)$$

粒状体の構造が等方的であれば、すべての $\beta$ において $E(\beta)$ は $1/2\pi$ となり、 $A=1$ である。 $E(\beta)$ が均一の値をとらない場合でも、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ 両方向への射影の積分値(それぞれ(c)と(d))が等しければ、やはり $A=1$ となる。もし、 $-45^\circ \leq \beta \leq 45^\circ$ の範囲に $N_i$ が集中し、 $E(-45^\circ \leq \beta \leq 45^\circ) > E(45^\circ \leq |\beta| \leq 90^\circ)$ であれば $A > 1$ 、逆の場合 $A < 1$ となる。

この異方度 $A$ は、小田(1972b)が提案した fabric index  $S_1/S_3$ と同等の意味を有している。 $S_1, S_2, S_3$ は粒子間の接触面のそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 面への射影面積の総和を表わしており\*)  $S_1/S_3$ なる比は、軸対称の場合の $N_i$ の分布が、主応力方向に関してどの程度異方的かを示す指数となっている。構造が等方的ならば、 $S_1/S_3=1$ 、 $N_i$ が $\sigma_1$ 方向に集中していると、 $S_1/S_3 > 1$ 、 $\sigma_3$ 方向に集中していると、 $S_1/S_3 < 1$ となる。

図4.12に、式(4.11)によって計算した異方度と、応力比の関係を示す。

各場合とも、 $\sigma_1/\sigma_3$ が増大するに従って、 $A$ も増大しており、異方性が発達してゆくことがわかる。つまり、ひずみ硬化過程では、 $N_i$ が、最大主応力方向に集中する傾向にあり、それに伴って、構造異方性が増大し、このことによって $\sigma_1/\sigma_3$ の増大に抵抗しているといえる。

図4.13には、軸ひずみ $\epsilon_1$ と異方度 $A$ の関係を示す。かなり大きな軸ひずみに至るまで圧縮したBC11Hにおける $\epsilon_1 \sim A$ 関係と $\sigma_1/\sigma_3 \sim A$ 関係を比べてみると、 $A$ は、 $\epsilon_1$ よりも $\sigma_1/\sigma_3$ (あるいは $\sigma_1$ )に直接的な関係があるように思われる。

\*) $S_1, S_2, S_3$ は接点における接触面積の射影によって定義されているが、実際には接触面積はすべての接点で一様と仮定しているの、 $E(\alpha, \beta)$ の $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 軸への射影を考えているのと同じである。

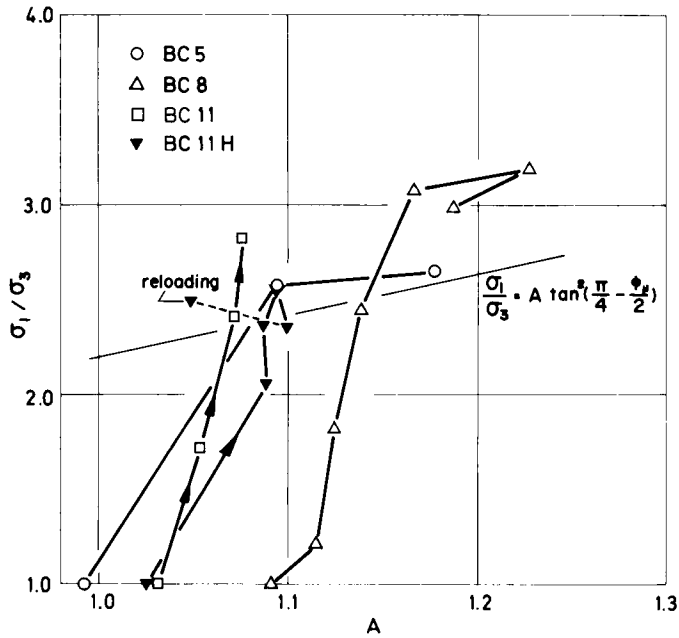


図 4.12 応力比と異方度 A の関係

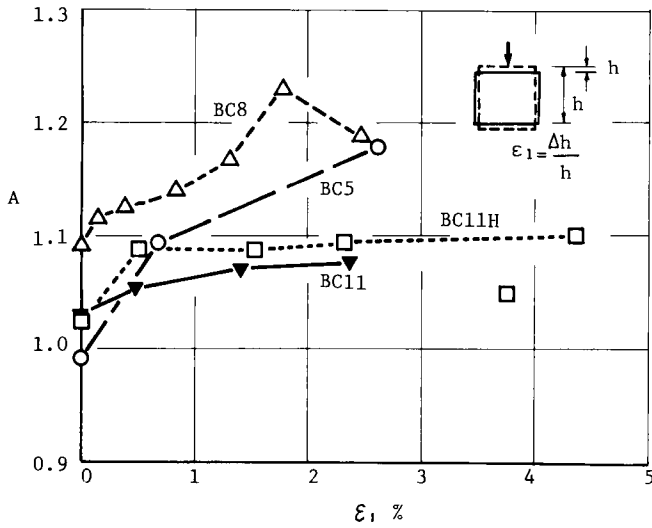


図 4.13 軸ひずみと異方度 A の関係

図 4.12 の関係を近似的に直線とみなすことにすると、

$$\sigma_1/\sigma_3 = aA + b \tag{4.12}$$

という関係式が成り立つ、ここに、 $a$ 、 $b$  は定数であって、 $a$  は直線勾配を表わし、 $\sigma_3$  が大きいほど大きいようであり、 $b$  は主に初期異方性に関係があるようである。



なお図中に引いた直線は、後に第7章で導く、ひずみ硬化過程における応力比-異方度関係式(7.34)を示している。本章の実験においては、粒状体はその形成時にすでに異方構造をもっており、式(7.34)で表わされるような変形を行うに至るまで、つまり図の直線に乗るまで、過渡的な変形を行なうであろう。その過程が式(4.12)で表わされるような直線で表わされるのであって、式(7.34)の直線上に到達すると、今度はこの直線上を値が動いて本来のひずみ硬化を行うものと思われる。BC5やBC8にそのような傾向が現われているようである。

一方、ダイレイタンス係数 $D = 1 - \dot{\nu} / \dot{\epsilon}_1$ と異方度の関係を調べてみると、図4.14のようになる。BC11Hを除いて、AとDとの間に直線関係を見出すことができる。すなわち

$$D = cA + d \quad (4.13)$$

ここに $c$ 、 $d$ は定数である。式(4.13)と(4.12)とから、応力比とダイレイタンス係数の関係は、やはり直線となって、

$$\sigma_1 / \sigma_3 = ed + f \quad (4.14)$$

と表わせることになる。ここに、 $e = a/c$ 、 $f = b - ad/c$ である。

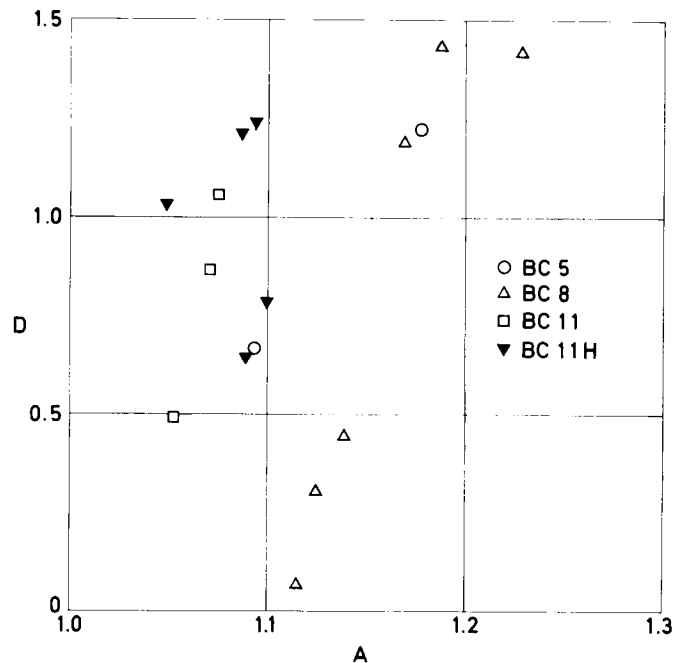


図 4.14 ダイレイタンス係数Dと異方度Aの関係

ここで Wiendieck らによる実験結果および小田による実験結果との対応を調べておこう。

#### 4.7.4 Wiendieckらの実験 (Biarez et Wiendieck, 1963, Wiendieck, 1967) .

Wiendieck らは、不規則な形状の二次元的粒子から成る粒状体の二軸圧縮・伸張試験を行な

い、圧縮に伴って、圧縮方向へ、接点における接線に立てた法線の方向が集中することを示した。彼らは、粒状体の塑性的な変形（水平ひずみで代表させている）と、構造異方性の変化の関係を調べたが、応力は測定しなかった。彼らの実験結果を棒グラフに描き直したのが図 4.15 であり、異方度  $A$  式 (4.11) と水平ひずみ  $\epsilon_h$  の関係を示したのが図 4.16 である。図中の番号 1 から 5 への過程は、水平方向の圧縮（伸張過程）であり、6 ~ 8 は、1 から 3 まで水平圧縮の後、垂直方向に圧縮する過程（圧縮過程）を示している。伸張過程においては、水平ひずみ

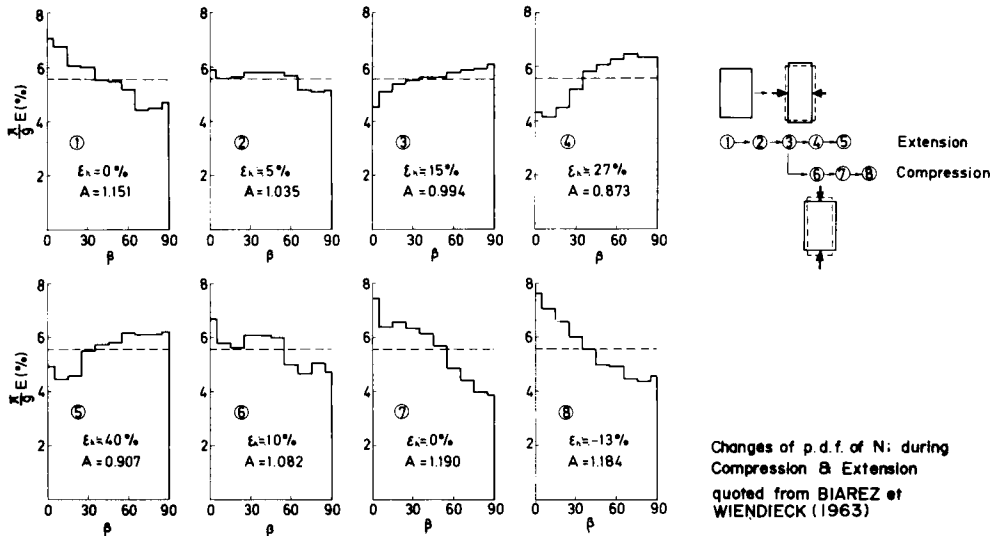


図 4.15 不規則形状粒子から成る二次元粒状体の二軸圧縮・伸張時の粒子接点角分布の変化 (Biarez et Wiendieck, 1963より作成)

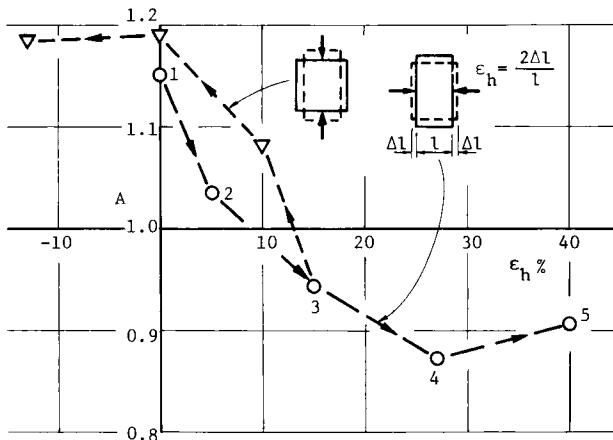


図 4.16 図 4.15 における水平ひずみと異方度  $A$  の関係

$\epsilon_h$  の増大とともに  $A$  は減少し、やがて一定値に近づく。この状態では、 $\epsilon_h$  の方向に接点の法線方向  $N_i$  が集中している。3 の状態から圧縮過程に移ると、 $\epsilon_h$  の減少（鉛直ひずみ  $\epsilon_v$  は増大）とともに  $A$  は増大してゆく。すなわち、 $\epsilon_v$  の方向に法線  $N_i$  が集中してゆくことを示している。

これらの結果は、著者の実験結果と定性的によく一致しており、 $A$  の絶対値の範囲も、圧縮側で最大約 1.2 と大体一致している。Wiendieck らの実験で、特に注目すべきは、二次元粒子の形状が円ではなく、実際の粒子の切断面に似た不規則なものとしてある点である。3 種の径の円柱形粒子から成る粒状体の結果（図 4.8 ~ 4.11）に比べて、図 4.15 では凹凸が少なくなっているのは標本数（測定接点数）が多い（2000 点弱、図 4.8 ~ 4.10 では 400 ~ 500 点、図 4.11 では 850 ~ 950 点）こともあるが、粒子形状が円ではなく、不規則であることの影響が大きいように思われる。

#### 4.7.5 砂の三軸圧縮試験における構造変化（小田の実験）

小田は砂の粒子配列構造を顕微鏡観察によって定量的に明らかにし、砂の強度・変形機構との関係を明らかにした。（Oda 1972 a, 1972 b, 1972 c, 1975）

ここでは、三軸圧縮試験における、砂の構造の変化に関する実験の 1 例を、以下にやや詳しく述べることにする。

##### (a) 実験方法

使用した砂は相馬砂で、粒径範囲は 0.84 ~ 1.19 mm、比重 2.65 である（記号 C  $\frac{1.19}{0.84}$ ）。

試験機は通常の三軸試験機であり、供試体寸法は直径 5 cm、高さ 13.5 cm とした。供試体作製方法は、(1) 突き棒で突き固める方法（P 法）と (2) モールドの側壁を突き棒で軽く連打する方法（T 法）によった。初期間隙比を調整した供試体を、水-レジン混合液で飽和させ、 $\sigma_3 = 0.5 \text{ kg/cm}^2$  で一定として、ひずみ速度 0.3 %/min で排水三軸圧縮試験を行ない、所定の軸ひずみまで変形させる。所定の軸ひずみに達したら、そのときの軸ひずみ応力比、体積変化を記録し、軸差応力を除いて、 $\sigma_3$  のみ加えた状態で 6 時間位放置する。固定した供試体を三軸室からとり出す。この供試体をさらにポリエステル樹脂で強く固結させてから、X、Y、Z 軸に平行な法線を有する、3 つの互いに直交する薄片を作成する。このようにして得られた薄片のうち、垂直断面のものの一部を顕微鏡写真によって例示すれば、写真 4.4 のようである。写真にはペDESTAL に近い部分の dead domain（拘束領域）と、expanded domain（膨張領域）が示されている。なおこの写真は粒径の異なる別の相馬砂の実験によるものであることを付言しておく。

##### (b) 実験結果

水-レジン混合液で飽和された供試体の、代表的な軸差応力  $\sigma_1 - \sigma_3$ 、軸ひずみ  $\epsilon_1$ 、体積ひずみ  $v$  の関係を図 4.17 に示す。供試体作製方法によって変形にかなり違いがあることがわかる。また、同図中には各変形段階における標本の最終応力比および最終ひずみをプロットしてある。

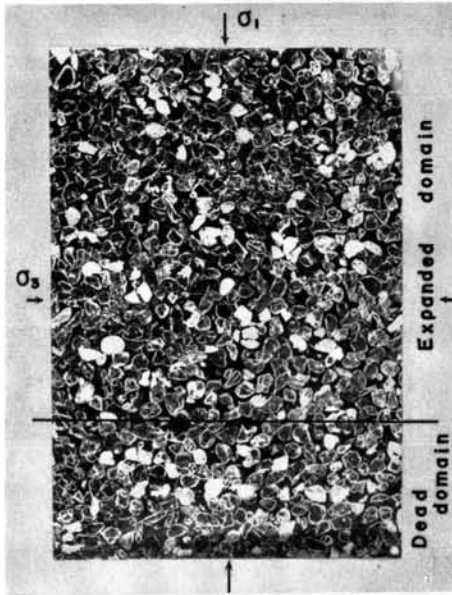


写真 4.4 砂の顕微鏡写真の例 (小田, 1972 による)

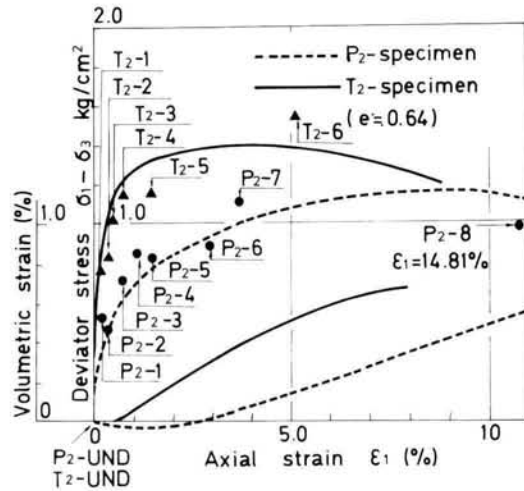


図 4.17 砂の応力・ひずみ曲線 ( $P_2-1, P_2-2, \dots, T_2-1, T_2-2, \dots$  の符号を付した所で変形を止め粒子構造の解析を行なった. 小田, 1972)

実験結果を粒子接点角に関するもののみ引用することにする。本実験で行なった三軸圧縮試験は、軸対称応力条件を満足しており、供試体作製時の条件も同様と考えられるから、 $N_i$  分布は函数  $E(\beta)$  で表わすことができ、 $\alpha$  に無関係となるであろう。この  $E(\beta)$  は各段階において作成された、 $N_i$  方向の等面積シュミットネット投影図から求められる。得られた  $E(\beta)$  を図 4.18 および 4.19 に示す。これらの各図は、応力の増大に伴って  $E(\beta)$  がどのように変化するかを示しており、次の重要な事実が明らかとなる。

- (1) 作用する主応力比 (または軸差応力) の増大に伴って、 $N_i$  は  $0^\circ \leq \beta \leq 50^\circ$  および  $130^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$  の範囲に集中してゆく。
- (2)  $E(\beta)$  の変化は、応力比の増大とともに生じるようになって、最大主応力比に達した後は、 $E(\beta)$  はあまり変化しない。

このことは、 $N_i$  分布は主に応力状態に依存するのであって、ひずみにではないことを意味している。

次に、次式によって  $S_1, S_2, S_3$  を計算し、これらの比  $S_1/S_3$  を求めると、 $S_1/S_3$  は粒状体の異方性を表わす重要な指数となる。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \overline{dS} \cdot n \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin 2\beta \, d\alpha \, d\beta \\ S_2 &= \overline{dS} \cdot n \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2E(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

$$S_3 = \overline{AS} \cdot n \cdot \int_0^\pi \int_0^\pi 2E(\alpha, \beta) \sin\alpha \sin^2\beta \, d\alpha \, d\beta$$

$E(\alpha, \beta)$ が $\alpha$ に無関係であるとすれば  $S_2 = S_3$ である。

$S_1/S_3$ は前述の異方度 $A$ と同様の意味をもっている。

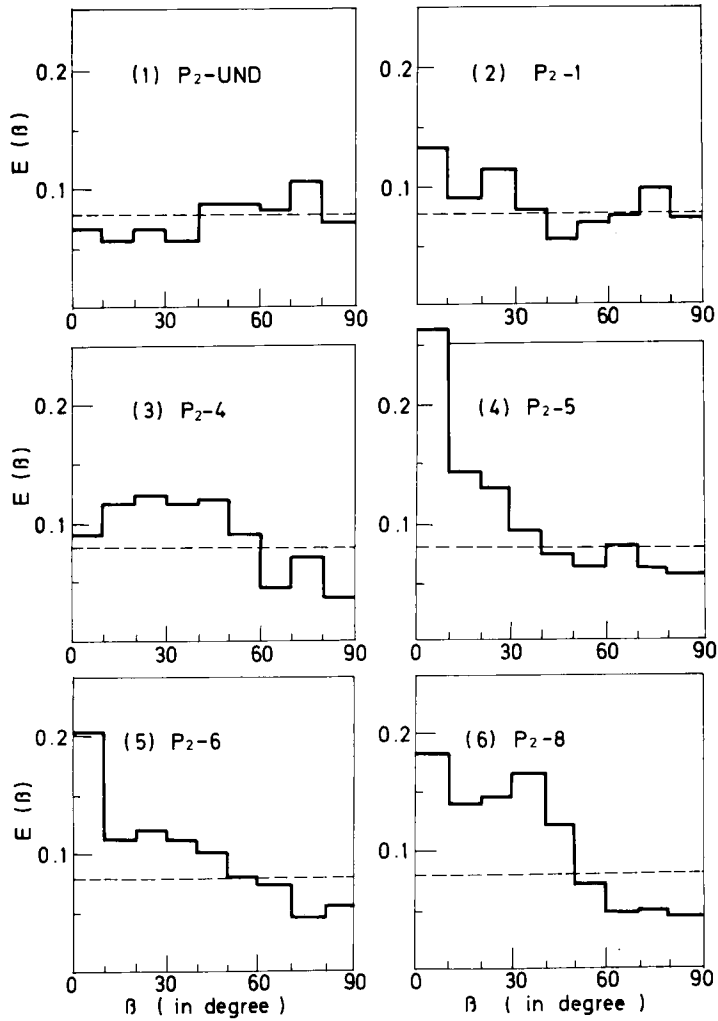


図 4.18 応力比の増大に伴う函数 $E(\beta)$ の変化 ( $P_2$ シリーズ, 小田1972による)

いま  $S_1/S_3$  と  $\sigma_1/\sigma_3$  の関係を図示すると, 図 4.20 のようになり, 両者の関係は, 直線式

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = C_1 \frac{S_1}{S_3} \quad (4.16)$$

で表わすことができる。

また,  $S_1/S_3$  とダイレイタンスーとの間には直接関係がある：

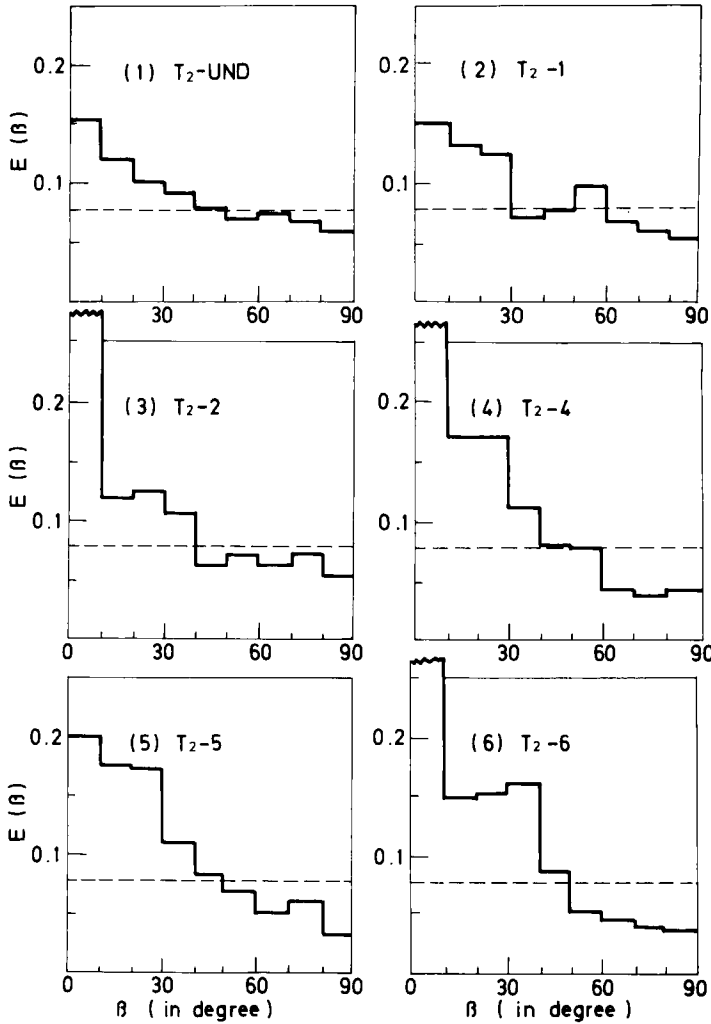


図 4.19 応力比の増大に伴う函数  $E(\beta)$  の変化 ( $T_2$  シリーズ, 小田 1972 による)

$$D = C_2 \frac{S_1}{S_3} + C_3 \quad (4.17)$$

式 (4.16) と (4.17) より, 応力-ダイレイタンス式は

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{C_1}{C_2} D - \frac{C_1 C_3}{C_2} \quad (4.18)$$

となる。これは Rowe の応力-ダイレイタンス式と基本的に同じ形をしている。

小田は, 式 (4.18) 中の各定数は初期間隙比, 初期構造および締め固め方法に依存しない量であると述べている。

4.7.3 で述べたように, 二次元粒状体の場合にも, (4.16) ~ (4.18) 式とほぼ同形の, 式 (4.12) ~ (4.14) が得られているが, これらは初期構造の影響を強く受けた, 本来のひず

み硬化に至るまでの過渡的過程を表わしているようであって、両者がまったく同じことを意味している訳ではない。

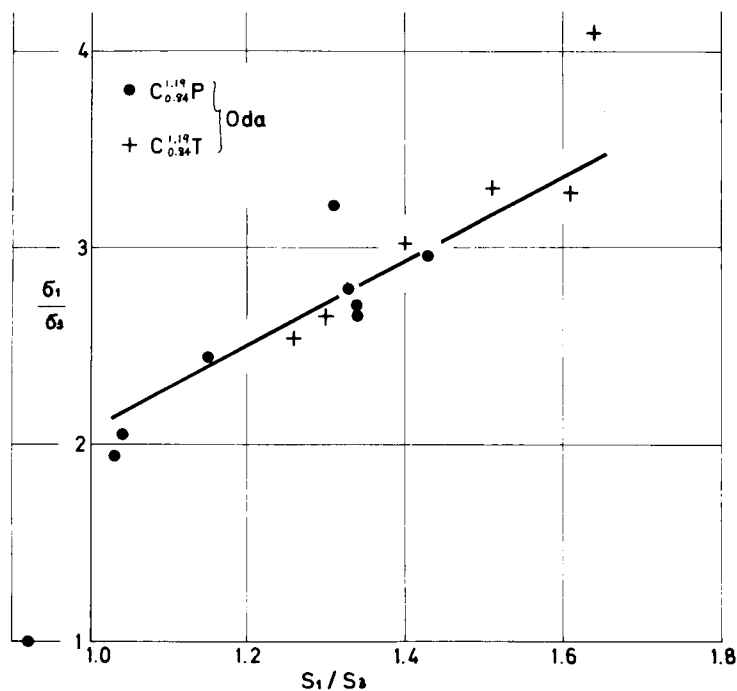


図 4.20 応力比と  $S_1/S_3$  の関係 (小田, 1972 による)

#### 4.7.6 まとめ

前述の二次元粒状体における構造変化は、小田によって明らかにされた砂の構造変化とよく対応していることがわかった。ただし、二次元の場合、砂の場合よりも構造変化の幅がかなり小さいが、これは、二次元と三次元とでは、粒子移動の自由度が1ランク異なること、および、初期異方性の影響が過渡的に残るためと考えられる。

構造変化についてまとめると、粒状体のひずみ硬化過程においては、加えられた応力に応じて、それに抵抗するのに都合のよいように、粒子配列が順次変化する。すなわち、最大主応力の方向に、接平面の(法線)方向が次第に集中してゆく。後述するように、法線が最大主応力方向を向いた接点が、最大主応力に対して最も有効に抵抗し得る接点と考えられるから、そのような接点が増大するという事は抵抗力が増大することになる。

### 4.8 粒子間力

粒子間接点において生じている粒子間力を光弾性等色線縞から測定した。

#### 4.8.1 測定方法

各粒子の半径を  $r_i$  とし、この半径の  $4/5$  点、すなわち、粒子中心より  $4/5 r_i$  の同心円上における縞次数の最大値を、各接点ごとに読みとって、これを  $N_{ij}$  と書くと、粒子  $i$  で測定した、粒子  $j$  との接点における粒子間力  $f_{ij}$  は、次のようにして求めることができる。

$$f_{ij} = \frac{9}{10} \frac{\pi r_i}{\alpha} N_{ij} \quad (4.19)$$

ここに、 $r_i$  は粒子  $j$  の半径、 $\alpha$  は材料の光弾性感度である。

この式は、直径の両端における 2 点接触の場合には正解であるが、3 点以上での接触の場合、および、2 点の場合でも荷重が直径上にない場合には近似的に成り立つことが、馬場 (1969) により、実験的に確かめられている。

本研究においては、粒子間力の絶対値を必ずしも必要としないので、 $f_{ij}$  の代わりに、縞次数  $N_{ij}$  のまま表示した。その場合に、 $f_{ij}$  が同じでも  $N_{ij}$  は  $r_i$  に反比例するので、3 種類の粒子半径 ( $r = 3, 4, 5 \text{ mm}$ ) のうち、中間の  $r = 4 \text{ mm}$  の粒子における縞次数に統一した。したがって、 $r = 3 \text{ mm}$  粒子で読みとられた縞次数は  $3/4$  倍され、 $r = 5 \text{ mm}$  粒子で読みとられた縞次数は  $5/4$  倍される。

なお測定原理に関しては、本章の付録 4. A 2 を参照されたい。

#### 4.8.2 粒子間力の大きさ

粒子間力の大きさの頻度を調べてみたのが、図 4.21 である。上述のとおり  $r = 4 \text{ mm}$  粒子における縞次数で表示されている。縞次数の判読できない接点が相当数存在する。これらの接点における縞次数は、大略 1.0 以下と考えられるので、これを仮に 0 ~ 1.0 次の度数に配分したのが、図中の破線である。粒子間力が大きくなると、頻度が急減することがわかる。この分布は、1 粒子から 2 粒子への粒子間力  $f_i^1$  と、2 粒子から 1 粒子へ作用する粒子間力  $f_i^2 = -f_i^1$  の両方を考慮することになると、平均値を 0 とする正規分布で近似できるようである。図 4.21 の破線は (a) では平均値  $\mu = 0$ 、標準偏差  $\sigma = 1.25$  (b) では平均値  $\mu = 0$ 、標準偏差  $\sigma = 1.40$  の正規分布を表わしている。

#### 4.8.3 粒子間力と粒子接点角の関係

$\beta$  を  $10^\circ$  毎の区間に分け、各区間に属する接点における、粒子間力の分布を調べてみた 1 例を図 4.22 に示す。いずれの  $\beta$  の区間においても、粒子間力は、かなり広い範囲に分布しており、本図からは、 $\beta$  によって、大きさの分布が違って来るかどうかは判然としなかった。

次に、 $\beta$  の各区間ごとに、粒子間力の和、および、粒子間力の平均値を求めてみたのが、それぞれ、図 4.23 および 4.24 である。

図 4.23 によれば、粒子間力の和は最大主応力方向  $\beta = 0^\circ$  において大きく、最小主応力方向  $\beta = 90^\circ$  において小さいことがわかる。

また、図 4.23 に示した粒子間力の和と、粒子接点角の頻度分布とから、 $\beta$  の各区間における



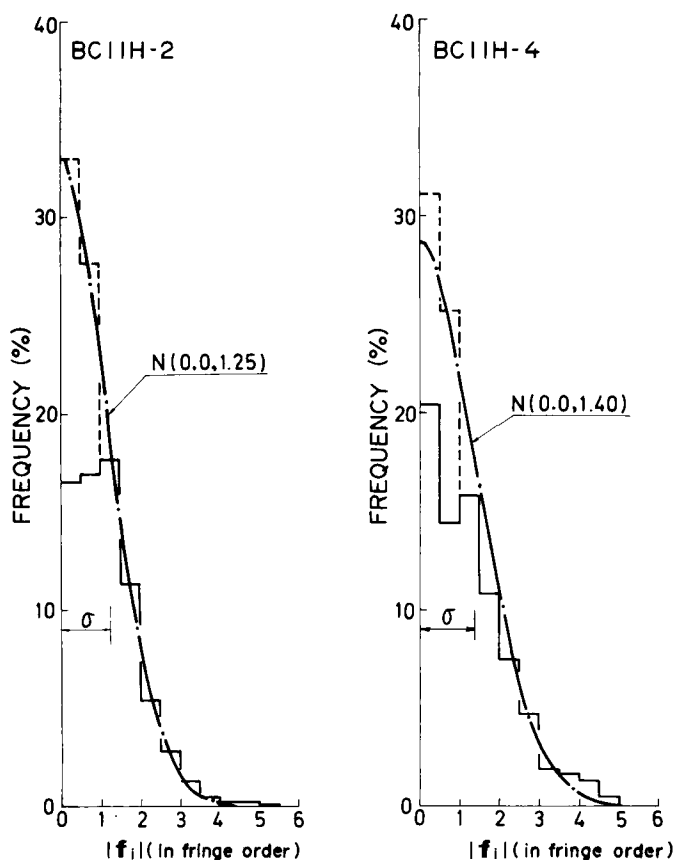


図 4.21 粒子間力の大きさの分布 (破線は測定不能分を加えた推定値, 一点鎖線は正規分布曲線, BC11H)

粒子間力の平均値を求めたのが図 4.24 である。粒子間力の平均値  $|f_i|_{\beta}$  は、 $\beta$  の函数となっていて、最大主応力方向  $\beta = 0^\circ$  において最大値、最小主応力方向  $\beta = 90^\circ$  において最小値となる傾向を見せている。次に、応力比の異なる BC11H-2 (図 a) と BC11H-4 (図 b) とを比べると、応力比の大きい後者の方が、粒子間力の和・平均値ともに大きくなっている。その場合に、 $\beta = 90^\circ$  付近であまり変化がなくて、 $\beta = 0^\circ$  の近傍で粒子間力が増大していることがわかる。これは  $\sigma_3$  一定で、 $\sigma_1$  を増大させていることと対応している。

ところで、図 4.23 はある粒子接点角の接点において、どれだけの力が伝達されているかを示すものであるが、これはまた、見方を変えると、粒子間力の重みをつけた粒子接点角分布を表わしている。粒子間力の重みをつけると、最大主応力方向近傍の、つまり  $\beta$  が小さい接点が強調されることになる。

粒子接点角の分布を調べる場合に、「有効」でない接点、つまり、粒子間力を伝えない、あるいはほとんど伝えない接点を省略することがある。このようにすると、平均粒子間力の小さ

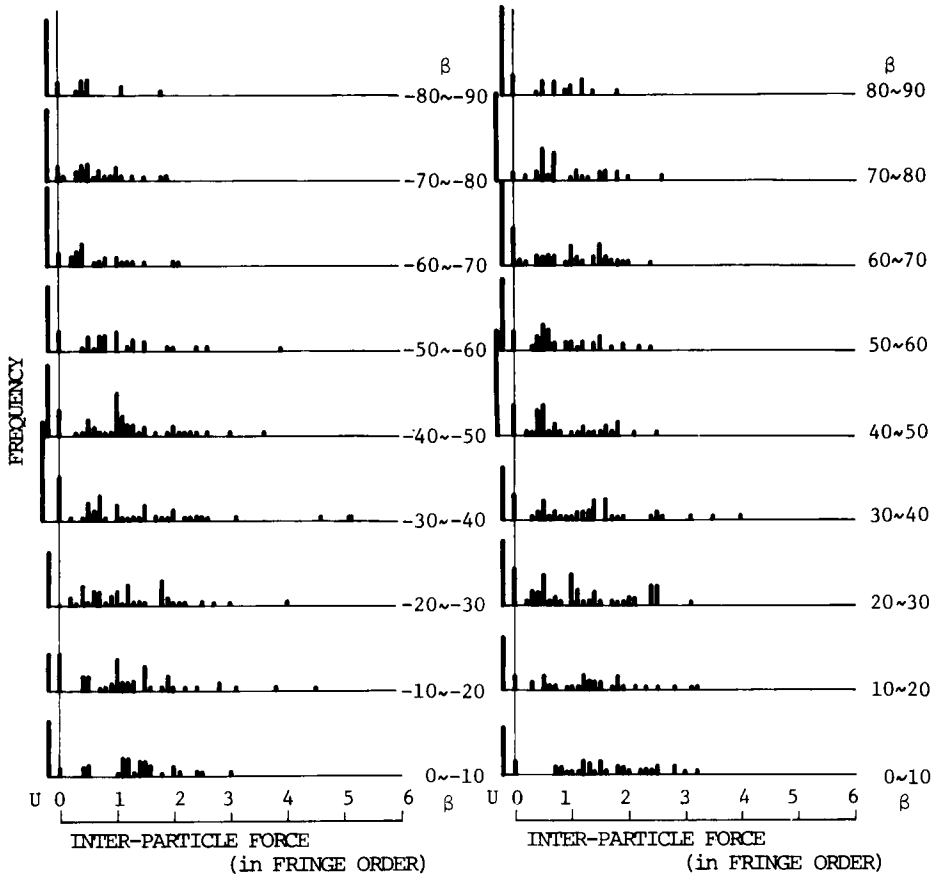
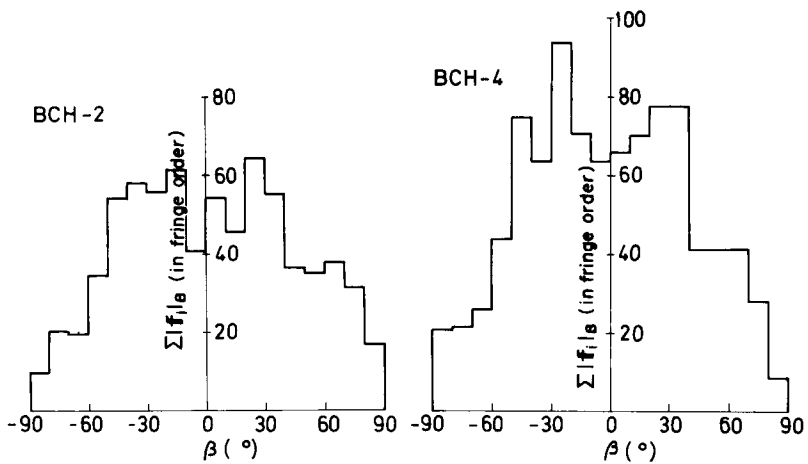


図 4.22 粒子接点角毎に調べた粒子間力の分布 (Uは測定不能接点)



(a) BC11H-2

(b) BC11H-4

図 4.23 粒子接点角が  $\beta$  の接点で伝達される粒子間力の和

い接点角の接点が相対的に多く省略されることになり、結果的に、 $N_i$ の $\sigma_1$ 方向への集中傾向をやや誇張することになる。このような整理方法を著者もしたことがあるが、接点の取捨の基準があいまいであり、砂における解析では、ある接点の有効であるかどうかは判断できないこともあって、両者の比較は同じ基準による方がよいなどの理由から、今回の解析はすべての接点を対象にしている。

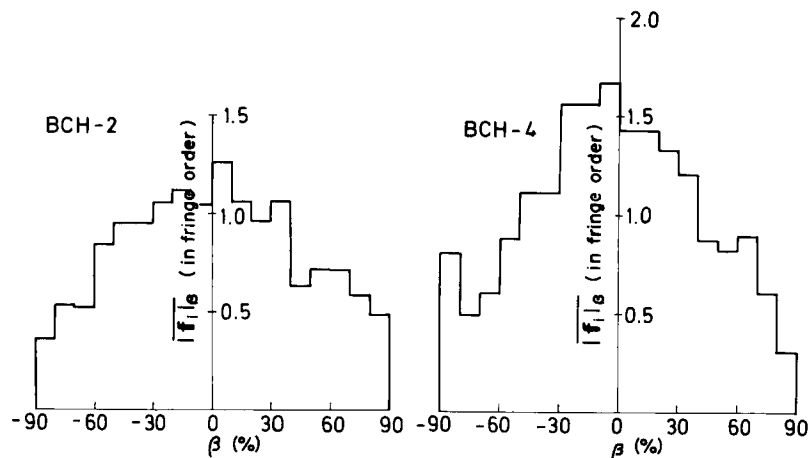


図 4.24 粒子間力の平均値

なお、粒子間力の伝達経路は、変形の過程で刻々変化しているといっても過言ではなく、いずれかの接点ですべりが生じると、粒子間力の持ちかえが生じる。したがって、現段階で無応力状態の粒子も、次の段階で大きな粒子間力を負担している可能性がある訳で、粒状体の変形の安定した進行には不可欠のものといえるだろう。

#### 4.9 接点において発揮されている摩擦角

任意の接点 $C_i$ を考えよう(図 4.25)。この接点の粒子接点角は $\beta_i$ であり、粒子間力 $f_i$ が作用している。粒子 1 から粒子 2 へ作用する $f_i^1$ は $x$ 軸と $\theta_i$ なる角をなしている。 $\theta_i = \beta_i$ であると $f_i$ は接点に垂直であるから、この接点におけるせん断力成分はなく、摩擦も生じない。しかし、一般には、 $\theta_i \neq \beta_i$ であって、 $\delta_i = \theta_i - \beta_i$ なる摩擦角が発揮される。接点 $C_i$ で発揮され得る摩擦角には限度があって、 $\delta$ のとり得る範囲は

$$|\delta_i| \leq \phi_\mu \quad (4.20)$$

である。ここに $\phi_\mu$ は粒子間摩擦角で粒子の材料と接点の状態によって決まる。本章で使用しているエポキシ樹脂粒子においては、 $\phi_\mu$ は $18 \sim 25^\circ$ の範囲にあって、平均値は $22^\circ$ であった。(4.20)において等号が成り立つとき、接点 $C_i$ においてすべりが生じる。なお、角 $\beta_i$ 、 $\theta_i$ 、 $\delta_i$ はいずれも時計まわりを正とする。

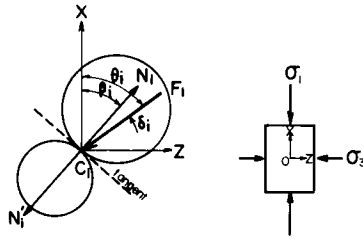


図 4.25 粒子間力の作用方向と発揮されている摩擦角

図 4.26 は、粒子接点角  $\beta$  を  $20^\circ$  毎の区間に分け、各区間に属する接点において発揮されている摩擦角  $\delta$  の分布を調べてみたものである。  $\beta$  の各区間において  $\delta$  はおよそ  $-20^\circ \sim +20^\circ$  の範囲に広く分布している。  $\beta = -10 \sim -70^\circ$  において  $\delta$  は正の側にやや偏って分布しているようであるが、すべり条件を満足する接点は  $\phi_\mu$  のばらつきを考慮に入れても非常に少なく、また特定の  $\beta$  に集中する傾向は見出せなかった。

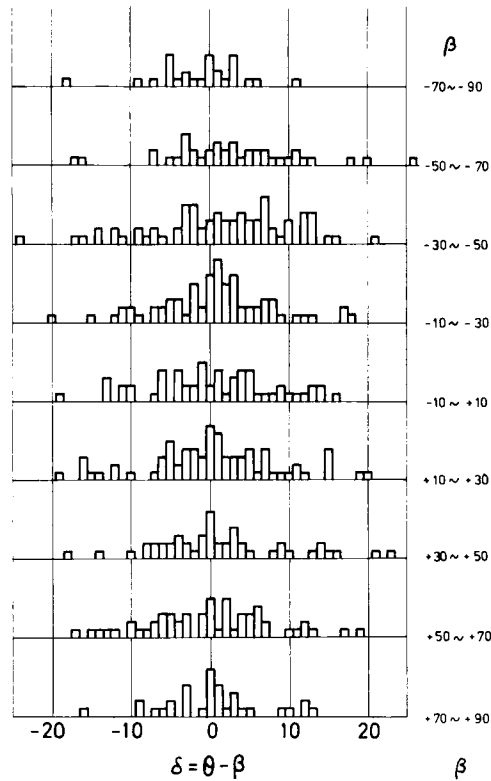


図 4.26 粒子接点角  $\beta$  の接点で発揮されている摩擦角の分布

測定接点全部に関する  $\delta$  の分布は図 4.27 のようになり、平均値  $+0.75^\circ$ 、標準偏差  $7.75^\circ$  の

正規分布とみなせるようである。この図よりすべり条件  $|\delta_i| = \phi_\mu$  を満足する接点が非常に少ないことを再度確認することができる。

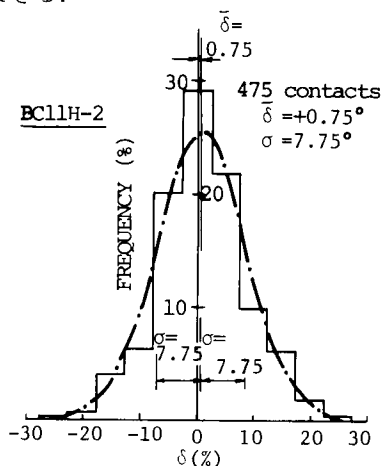


図 4.27 接点において発揮されている摩擦角の頻度分布

#### 4.10 ひずみ硬化の機構について

粒状体は一般にひずみ硬化材料である。したがってその塑性変形には必ず応力の増大が伴う。応力比が増大して粒状体に塑性変形が生じる場合には、増大する応力比に抵抗するために粒子の再配列が生じ、粒子構造が変化する。

このようなひずみ硬化過程においては、次の2点が重要である。

(1) 最大主応力に対して最も有利に抵抗できる接点は、その法線  $N_i$  が最大主応力方向に一致する接点、すなわち  $\beta = 0^\circ$  の接点であろう。このことは、4.8節図 4.24 で示したように、粒子間力の平均値が  $\beta = 0^\circ$  で最大、 $\beta = 90^\circ$  で最小となっていることから、容易に予測できることである。

(2) 粒子接点角の分布すなわち函数  $E(\beta)$  は応力比の増大に伴って、 $\beta = 0^\circ$  に近いところで増大し、 $\beta = 90^\circ$  に近いところで減少する。すなわち、 $N_i$  の  $\sigma_1$  方向への集中が生じている(図 4.8 ~ 4.12, 4.18 ~ 20)。

(1)と(2)より、ひずみ硬化過程においては、増大する最大主応力に抵抗するのに有利な接点が次第に増大するように、粒子の再配列が行われていることがわかる。

4.6.3で述べたように、粒状体内部を伝わる粒子間力は均一ではなく、大きい力を伝達している接点と、小さい力を伝達している接点があり、大きい力を伝達している接点は、粒子の鎖を形成している。接点の  $N_i$  が  $\sigma_1$  方向に次第に集中すると、粒子の鎖を形成する接点の  $N_i$  も次第に  $\sigma_1$  方向に集中してきて、 $\sigma_1$  に対する抵抗力、あるいは剛性が次第に大きくなっていく。

そして、このような鎖は、周辺粒子から支えられた、 $\sigma_1$  方向の一種の柱となり、その剛性を増してゆく。このような  $N_i$  の  $\sigma_1$  方向への集中に伴う柱の形成は、一般に、体積の増大を伴ない、間隙が大きくなってゆくから、やがて、柱に対する周辺粒子の支えが減少することになり、 $N_i$  の集中による抵抗力の増大と、間隙の増大に伴う安定性の減少とがバランスしたところで、ピークという状態に到達する。

このような考え方は、基本的には小田（1974）によってもたらされたものである。本章における粒子間力の実測値によって上述の(1)が明らかとなり、小田のひずみ硬化仮説の正当性は一層増したと言えよう。

#### 4.11 結 論

円柱形粒子から成る二次元粒状体の二軸圧縮試験を行ない、粒子接点角や粒子間力を測定した結果、次のことがわかった。

(1) 円柱形粒子の2次元集合体の応力比～軸ひずみ～ダイレイタンスー関係は、砂の挙動をよく再現している。したがって、この模型粒状体は粒子レベルでの挙動においても砂のモデルたり得ると考えられる。

(2) 応力比の増大に伴って、粒子接点角の分布は変化する。すなわち、接点に立てた法線の方向が、次第に最大主応力方向に集中してゆく傾向があり、これに伴って、粒状体の構造異方性が増大してゆく。構造異方性は異方度  $A$  で表わすことができる。

(3) 粒状体のダイレイタンスーは、構造異方性の発達と密接な関係にある。

(4) 粒子間接点において伝達される粒子間力は、接点によってさまざまな値をとり、ランダムな量であるが、その平均値は、粒子接点角によって変わり、最大主応力方向で最大、最小主応力方向で最小となっている。

(5) 接点において発揮されている摩擦角の分布を調べてみると、粒状体全体では、平均値がおよそ  $0^\circ$  の正規分布となっており、すべり条件を満足するような接点は少ない。このことは、粒状体の変形のある段階においてすべりが生じている接点はごく少数であることを意味している。

(6) 以上のことより、砂のような粒状体のひずみ硬化過程は最大主応力を支えるのに有利な接点（法線が最大主応力方向の近傍にある接点）の増加（法線方向の最大主応力方向への集中）によって特徴づけられることがわかった。また、増大する応力に抵抗しているのは、多くの（その瞬間においては）すべていない粒子接点であると言える。

#### 4. A1 粒子の作製方法

実験に使用した円柱形粒子はエポキシ樹脂板から特製の中空ドリルによって削り出したもの

である。以下にその作製方法の概要を述べる。

### 1. エポキシ樹脂板の作製

エポキシ樹脂はポリ付加型の樹脂で、代表的光弾性材料の1つである。(辻・西田・河田, 1965)

プレポリマーと硬化剤を加熱混合して、均一な液体として、鋳型に注入、加熱して板状とする。

1) 原料: スイス・チバ(Ciba)社製 Araldite B を使用した。

・プレポリマーは淡黄色、常温でガラス状である。

・硬化剤(HT 901)は白色、常温で粉末である。

2) 混合比: 重量比でプレポリマー10に対し硬化剤3とする。

3) 作成方法: 所要量の原量をビーカーに入れ、約140°Cに加熱して、混合かくはんし、均一な液体とする。次に、これを予め加熱しておいた鋳型に注入し、恒温炉内で、135~140°(この温度は単純せん断用粒子作製時には125°Cに変更した)で12~14時間加熱し、徐冷した後、鋳型からとり出す。

4) 鋳型: 内寸が約300×300×19で、コの字型の枠と、側板2枚をボルト・ナットで組立てるようになっており、側板内面はクロームメッキを施してある。

5) 離型剤: シリコンオイル、またはセロファンを使用した。

### 2. 円柱形粒子の作製

1の要領で作製した厚さ19mmのエポキシ樹脂板から、粒子を削り出す訳であるが、板の周辺部3.4cm位と気泡の入った部分など、不良箇所は除外し、ボール盤に特製中空ドリルを取付けて、粒子を切り出した。

中空ドリルは京大丹羽研究室で開発されたものを改良の上、大阪・榎並製作所において製作されたものを用いた。ドリルの形状を写真4.A1に示す。また粒子を写真4.A2に示す。

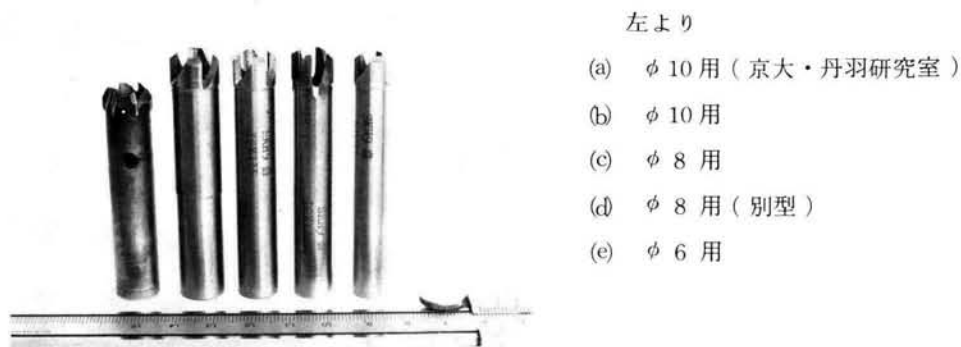
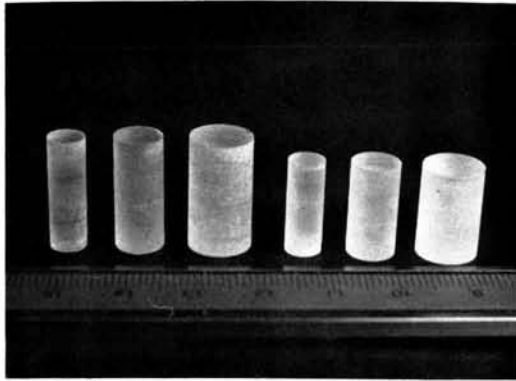


写真 4.A1 粒子作製用中空カッター



左より

- (a)  $\phi 6$  ,  $\ell = 19$
- (b)  $\phi 8$      "
- (c)  $\phi 10$     "
- (d)  $\phi 6$      $\ell = 15$  (  $K_0$  試験用 )
- (e)  $\phi 8$      "
- (f)  $\phi 10$     "

写真 4.A 2 エポキシ樹脂粒子

### 3. 焼鈍

粒子には温度・湿度の影響で time edge effect が起るので、これを除去するために焼鈍（アニール）を行なわなければならない。焼鈍の標準的なサイクルを、図 4.A 1 に示す。

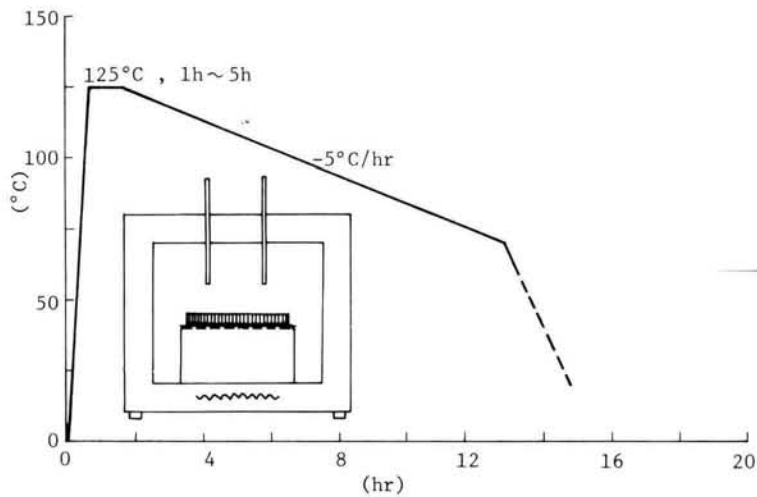


図 4.A 1 焼鈍のサイクル

本実験に使用した粒子は、厚さ（長さ）が大きいため、1回のサイクルで time edge effect が十分除去できない場合には、再度、焼鈍したり、最高温度の時間を数倍に延長した。それでもなお、time edge effect が若干残ったままの粒子を、やむを得ず使用した場合もある。

### 4. A 2 粒子間力の測定原理

粒子間接点における粒子間力を、光弾性等色線縞から測定した。測定原理を以下に述べる。

円板の直径の両端に作用する線荷重  $P$  により、荷重点直下の点  $A$  に生じる応力は、図 4.A 2



の記号を用いて,

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi dt}, \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi t} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{2P}{\pi dt}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (4.A1)$$

である. ここに,  $t$  は円板の厚さである.  $\tau_{xy} = 0$  であるから,  $\sigma_x, \sigma_y$  は主応力となっている. そこで, これらを, それぞれ,  $\sigma_1, \sigma_2$  と書き直して, 主応力差を求めると,

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2P}{\pi t} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (4.A2)$$

となる. 一方光弾性学によれば, 等色線縞次数  $N$  は光弾性感度を  $\alpha$  とするとき,

$$N = \alpha (\sigma_1 - \sigma_2) t \quad (4.A3)$$

と表わすことができる. したがって, これに, 式 (4.A2) を代入すると,

$$N = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) P \quad (4.A4)$$

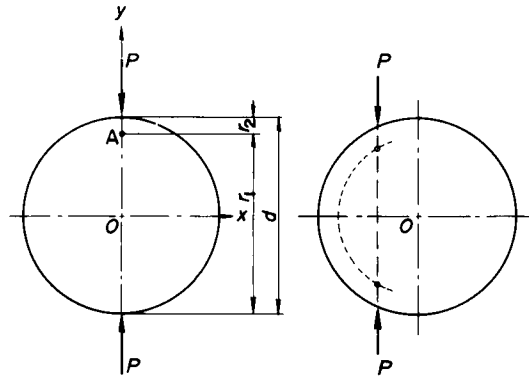


図 4.A 2 円板に作用する線荷重

$$\therefore P = \frac{\pi}{2\alpha} \left( \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) N \quad (4.A5)$$

すなわち, 線荷重  $P$  は, 荷重直下の点  $A$  における縞次数と比例関係にあることがわかる.

次に, 直径上にない 2 点接触によって生じる縞次数は, 円柱の中心からその半径の  $4/5$  点上の最大値, すなわち, 荷重  $P$  方向の縞次数をとれば, 2 点の位置にかかわらず, ほぼ一定となることが馬場によって認められている (馬場, 1969). また馬場は, 数個の接触力が考えている点の縞次数に及ぼす影響は, 円柱中心から半径の  $4/5$  点上では, 考えている点と他のかく乱を起させる接触点のなす中心角が  $60^\circ$  の場合に約  $4\%$  であるが  $90^\circ$  の場合にはほとんど影響を及ぼさないことを確かめている.

そこで本論文では, 円柱の中心から, その半径の  $4/5$  点上の最大縞次数とその方向を読みとることによって粒子間力の大きさと方向を測定することにした. なお縞次数は粒径に反比例するので, すべて直径  $8\text{ mm}$  の粒子に換算することにした.

## 第5章 粒状体のせん断変形機構に 関する微視的考察

### 5.1 序 論

一面せん断および単純せん断型の試験機は、せん断方向がほぼ一定しており、土のせん断強さを直接的に求めることができること、また、せん断箱やリングなどによる側方拘束により、側方へのひずみがほとんどないことから、平面ひずみ条件下で変形するものと考えられている実際の土の応力状態に近いことなどの特長を有する。

Roscoe を中心とする研究者達は、平面ひずみ条件下で厳密な単純せん断条件を満たす試験機を用いて、多くの貴重なデータを提供している (Roscoe, Bassett & Cole, 1967, Cole 1967)。彼らが用いた試験機は、ケンブリッジ型と呼ばれるもので、その特徴は直方体供試体の六面を剛な板で囲み、かつ、各面における垂直応力およびせん断応力およびその分布を測定することができる点にある。この試験機によって、水平面上の応力のみならず、主応力の大きさと方向を得ることができる。したがって、直接せん断型の試験と三軸圧縮試験との相互関係を直接的に調べることができる。

さて、直接せん断試験を行って、せん断応力を増大させてゆくと、砂のような粒状体の粒子配列特性 (粒子構造) は増大する応力に抵抗するのに都合のよいように、徐々に変化していくことが知られている。第4章において主応力方向の回転がない二軸 (三軸) 圧縮の場合のひずみ硬化過程の機構を明らかにしたが、本章においては主応力方向が回転するせん断試験におけるひずみ硬化の機構を明らかにすることにする。

二軸圧縮試験においては、ひずみ硬化過程において最大主応力を支えるのに有利な接点が不可逆的に増加したが、せん断の場合はどうであろうか。

松岡は、一面せん断試験時に生じる粒子構造の変化を、アルミ丸棒やエポキシ樹脂丸棒を用いた二次元模型実験より推定した (村山・松岡, 1970, 松岡, 1973)。彼は、せん断面 (より一般的にはモービライズド面) 上の粒子接点角の分布を調べ、せん断前には、 $0^\circ$  を中心に  $-90^\circ \sim 90^\circ$  の範囲で左右対称の台形ないしは三角形の分布が、せん断が進むにつれて、ピークが片方に偏った非対称三角形分布になることを見出した。松岡は、せん断面を最初から仮定しており、せん断面と最大主応力面とのなす角は  $45^\circ + \phi_{m_0} / 2$  ( $\phi_{m_0}$  は現在の最大傾斜角, max-obliquity) であるとしている。したがって、主応力方向は、圧密時の鉛直方向から、せん断力が作用するや  $45^\circ$  以上の角に急変することになってやや不自然である。また、粒子接点角分布のピークの偏り角については不明確である。

そこで、本章においては、せん断における粒子構造の変化と主応力との関係を調べ、主応力軸は徐々に回転してゆくこと、粒子構造の変化は二軸圧縮の場合と同様に、法線 $N$ の最大主応力方向への集中によるものであり、主応力軸の回転に伴って、法線の集中方向も回転してゆくことなどを明らかにする。この目的のために、第4章と同じ二次元粒状体を用い、供試体全体がせん断領域となる単純せん断試験を行なった。また小田による砂の一面せん断時に生じる粒子構造観察結果との比較を行なった。

## 5.2 実験方法

### 5.2.1 粒子

モデル粒子は、前章で用いたものと同様である。すなわち、光弾性材料であるエポキシ樹脂製で長さ19 mm、直径6、8および10 mmの3種の円柱形粒子を混合したものを用いた。

砂の粒度に相当する、3種の径の混合比は6、8、10 mmの順に、およそ20 : 15 : 8個とした。

粒子表面の物理摩擦角 $\phi_\mu$ の値はかなりばらつくが、D2、L2では $\phi_\mu \approx 20^\circ$ 、DB3、DB8では $\phi_\mu \approx 28^\circ$ であった。<sup>\*</sup>ここで $\phi_\mu \approx 28^\circ$ の粒子は粒子表面に乾燥したベントナイト粉をまぶして付着させたものである。

$\phi_\mu$ の値を求めるため、一面せん断試験機を用いて、粒子を十文字状にこすり合わせる摩擦試験を行なった結果を図5.1に示す。太線で結んだ各点は、それぞれ、初回の試験結果であり、他は初回に使用した粒子について、さらに、垂直荷重を増加させて、数回繰返して試験した結果である。 $\phi_\mu$ の値はかなりばらついており、生地のみで12 ~ 24°、ベントナイト付着で26

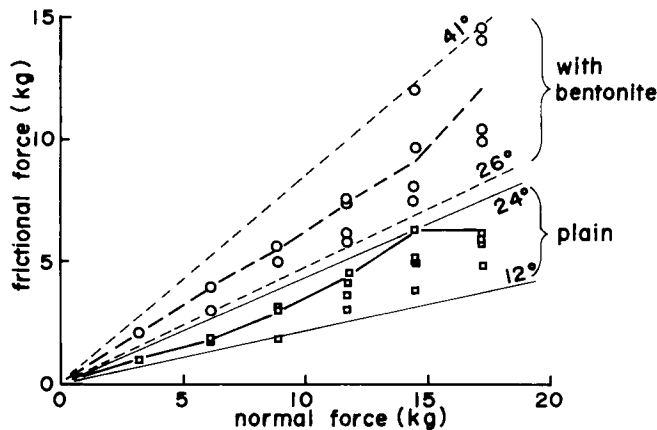


図5.1 粒子間摩擦角の測定（実線：生地のまま、破線：ベントナイトをまぶしたもの）

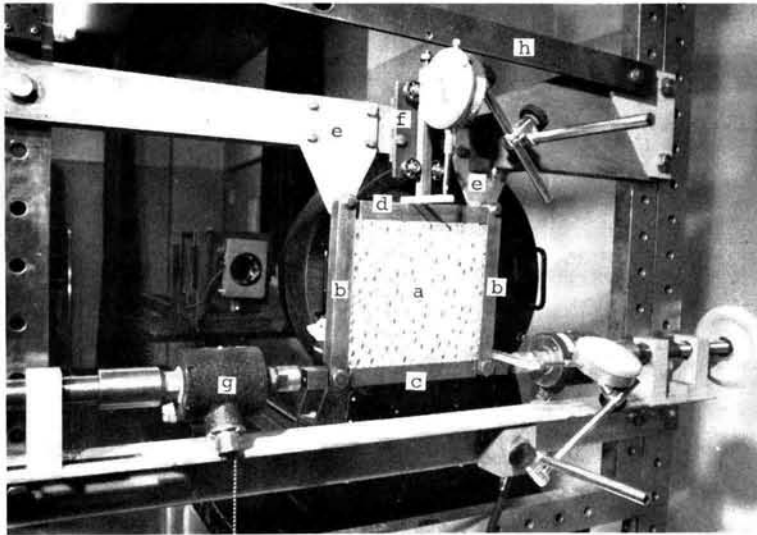
<sup>\*</sup> 従来、それぞれ、 $\phi_\mu \approx 22^\circ$ 、 $33^\circ$ として発表しているが、実験データを再検討の上、このように訂正する。

～41°の範囲の値をとる。物理摩擦というのは本来ばらつくものであるというのが定説であり、 $\phi_{\mu}$ をどの値で代表させるかはむずかしい問題であるが、ここでは一応上記の値で代表させることにした。

なお、平板の表面は布やすり仕上げであり、粒子表面は中空ドリルによる切削面であって、これらの間の摩擦は粒子同志のものとは異なっている可能性もあるが、一応そのままにしておく。

### 5.2.2 二次元単純せん断試験機

使用した試験機は、写真5.1に示すようなものである。せん断枠は十分な剛度を有する鋼製



a : 粒状体, b : 側部材 (左, 右), c : 底部材, d : 上部材,  
e : 取付板 (左, 右) f : ガイド, g : 荷重計, h : てこ

写真5.1 二次元単純せん断試験機

で、寸法は内寸で、幅156 mm、高さ156 mm ± 20 mmである。側部材bの上端は取付板eに、また下端は底部材cにそれぞれヒンジ結合されており、底部材cを水平方向に押すことによってせん断変形を二次元粒状体に与える。上部材dはガイドfによって上下方向にのみ変位することができるようになっており、てこhによる垂直荷重を粒状体に伝達する。

垂直荷重は、てこに載せた重錘の重量と、てこのレバー比から求められる。上部材の垂直変位は1/100目盛のダイヤルゲージにより測定する。またせん断変位は水平方向のねじによって与え、せん断荷重は荷重計により検出し、せん断変位はダイヤルゲージによって読みとる。

なお、試験機の機構上せん断変位に伴って、底部材の鉛直方向変位が生じるので、供試体の高さの変化を求める場合に補正を要する。また荷重計gで測定されるせん断荷重には底部材にかかる鉛直荷重を持ち上げるための余分な仕事および関節部における摩擦などに費される仕事などを行うための余分の荷重を含んでいるので、その検定を行なって、補正を施した。

このような試験機を光弾性実験装置の载荷枠に取付けて、偏光場内で試験を実施した。  
光弾性実験装置は前章のものと同一である。

### 5.2.3 実験手順

3種の径の粒子を混合してボウルに入れ、粒子を1つずつ手でランダムに抽出し、ランダムにせん断枠内に積み上げて所定の高さとした。なお、初期間隙比は、 $e_0 = 0.22$ および $0.26$ の2種類とした(表5.1参照)。

表5.1 二次元粒状体の供試体一覧

記号		L 2	D 2	DB 3	DB 8
粒子配合(個)	6 mm	208	267	207	207
	8 mm	155	132	151	151
	10 mm	77	84	76	76
	計	440	483	434	434
初期間隙比 $e_0$		0.26	0.22	0.22	0.23
物理摩擦角 $\phi_\mu$		20°		28°	
内部摩擦角 $\phi$		23°	28°	35°	34°
最大応力比 $\tan \phi$		0.425	0.525	0.700	0.685

せん断は、ひずみ制御方式で行ない、所定のひずみ段階ごとに変位を中断して、変位ならびに光弾性縞が落ち着くのを待って、光弾性等色線写真の撮影、および、諸計器による測定を行った後、さらにせん断変位を与えて、次の段階に移る。このような手順を繰返しながら、破壊に至るまで試験を続けた。

## 5.3 実験結果

### 5.3.1 せん断力・せん断ひずみ・垂直ひずみ関係

せん断ひずみ (shear distortion)  $\gamma$ 、垂直ひずみ (normal strain)  $\epsilon_N$  は次のように定義される：

$$\gamma = (\text{底部材の水平変位}) / (\text{側部材のヒンジ間長さ})$$

$$\epsilon_N = (\text{供試体の高さ変化}) / (\text{供試体の初期高さ})$$

図5.2には、 $\phi_\mu \approx 20^\circ$ の場合の、せん断力 $S$ 、垂直ひずみ $\epsilon_N$ とせん断ひずみ $\gamma$ の関係を示す。黒丸印が密な場合(初期間隙比 $e_0 = 0.22$ )を示し、白丸印がゆるい場合( $e_0 = 0.26$ )を示している。

この図から次のことがわかる。

- (1) 粒状体は、初めに体積減少を生じた後、せん断ひずみ約5%付近から体積膨張に移る。

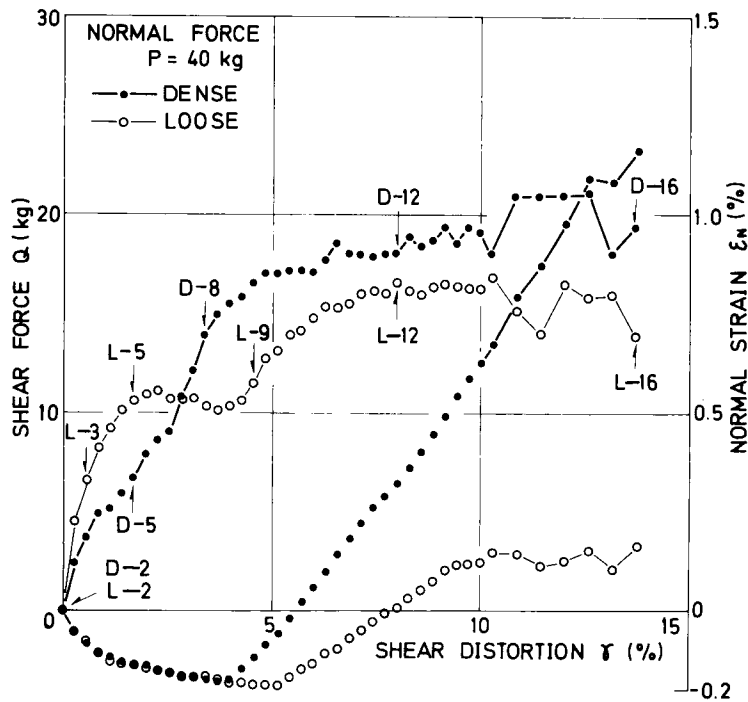


図 5.2 二次元粒状体単純せん断試験のせん断力・垂直ひずみ・せん断ひずみ関係 ( $\phi_{\mu} \approx 20^{\circ}$ )

体積膨張はピークを過ぎるまで続く。密な粒状体は、ゆるいものよりも、体積膨張量が大きくいわゆるダイレイタンスーが著しいことを示している。

(2) せん断力  $S$  (垂直力  $P$  で割ると、そのまません断・垂直応力比  $\tau/\sigma_N$  となる) 曲線, 垂直ひずみ  $\epsilon_N$  曲線とも、砂の単純せん断試験結果によく似ている。なおゆるい粒状体のせん断力曲線が、初期に急に立ち上った後、 $\gamma \approx 2\%$  付近で極大値となり、 $\gamma \approx 4\%$  付近から再び上昇し始める特異な形状を示しているが、この部分は偶然的な挙動であって、ゆるい粒状体が常にこのように振舞う訳ではない。これは、ゆるい粒状体の構造が、はじめに異常に剛度の大きいものとなっていたものが、 $\gamma \approx 2\%$  付近で崩壊し、通常構造に変化したためと思われる。

図 5.3 は、 $\phi_{\mu} \approx 28^{\circ}$  の場合の密な粒状体の、せん断力・垂直ひずみ・せん断ひずみ関係である。傾向的には  $\phi_{\mu} \approx 20^{\circ}$  の場合と同じであるが、せん断力はこちらの方が大きくなっている。垂直ひずみ  $\epsilon_N$  曲線のこう配にあまり差が見られない (D 2,  $\phi_{\mu} \approx 20^{\circ}$  と DB 3,  $\phi_{\mu} \approx 28^{\circ}$  とではほとんど一致) ので、この差は粒子間摩擦角  $\phi_{\mu}$  の違いによるものと考えてよからう。

DB 8 では、 $\gamma \approx 6.5\%$  付近で構造崩壊が生じ、せん断力、垂直ひずみとも一時的に増加が止まっているのが見られる。

この図においては、せん断力と垂直ひずみとが密接な関係にあることが、両曲線の変化の仕方にはっきりと現れている。

以上のように巨視的な応力・ひずみ関係が砂の場合とよく似たものであることから、せん断の場合においても、本研究で用いた二次元粒状体は、砂のモデルとして一応適当なものであると言える。

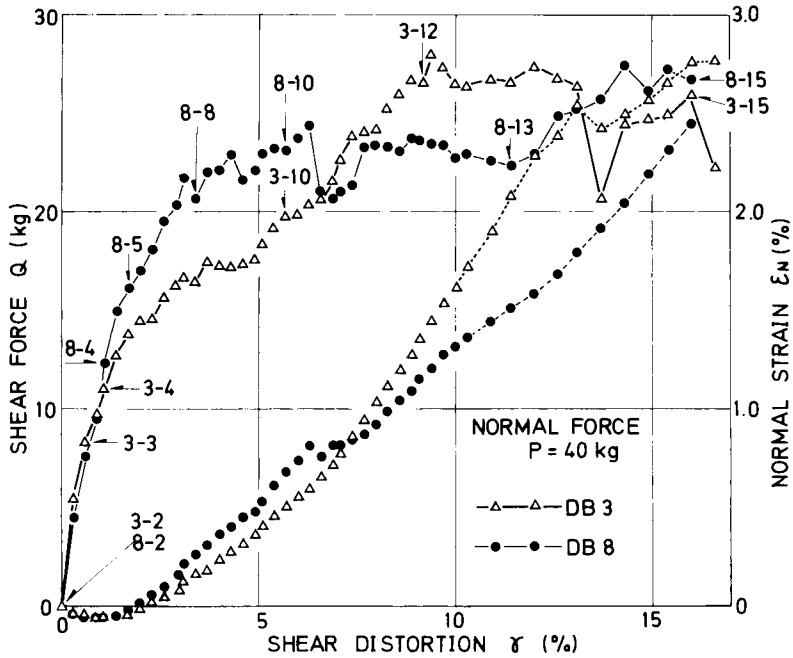
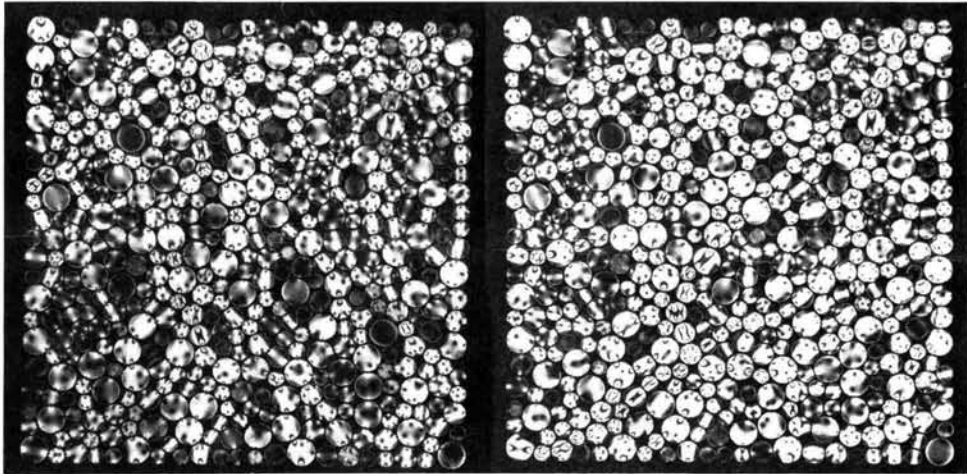


図 5.3 二次元粒状体単純せん断試験のせん断力・垂直ひずみせん断ひずみ関係 ( $\phi_\mu = 28^\circ$ , DB series)

### 5.3.2 光弾性等色線縞写真

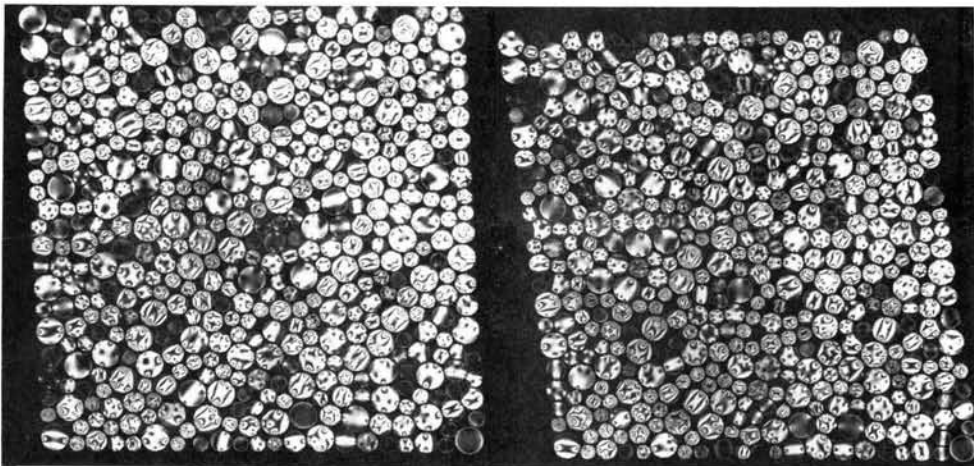
写真 5.2, 5.3 に、試験の各段階で撮影した光弾性等色線縞写真の例を示す。写真 5.2 は  $\phi_\mu \approx 20^\circ$  の密な場合 (D シリーズ), 写真 5.3 はゆるい場合 (L シリーズ) であって、撮影した変形段階は、図 5.2 中に同じ記号で示してある。

写真を観察すると、二軸圧縮のときと同様、大きい粒子間力を伝達している粒子 (接点) とそうでない粒子 (接点) があり、大きい粒子間力を伝達する粒子の鎖が何本も走っているのがわかる。そして、このような鎖の卓越方向は、せん断力を加える前の D-2, L-2 においては鉛直方向であるが、せん断力を大きくしてゆくにつれて、卓越方向が回転してゆくのがわかる。



(a) D 2

(b) D 5

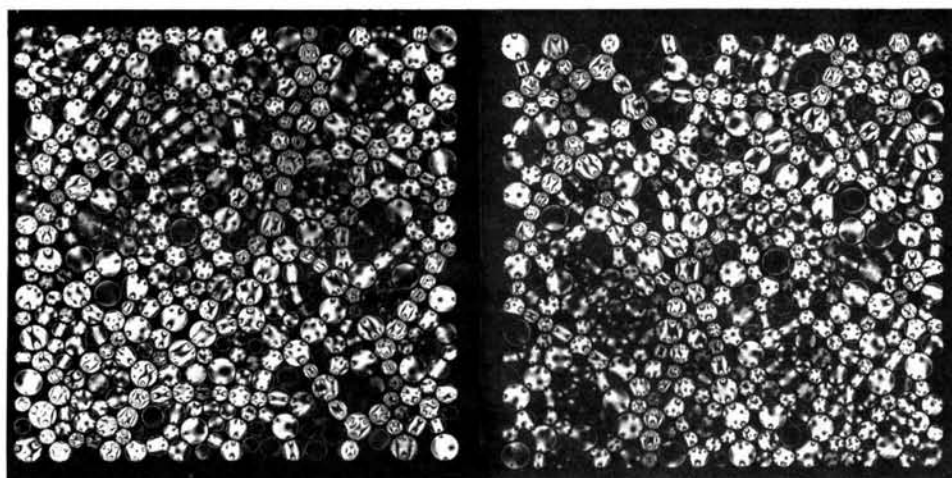


(c) D 10

(d) D 16

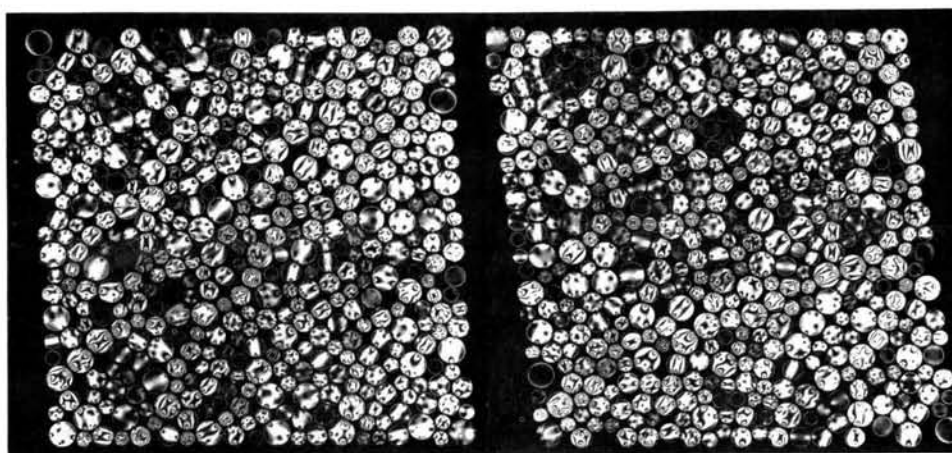
写真 5.2 単純せん断供試体の光弾性等色線写真 ( D 2 )





(a) L 2

(b) L 3



(c) L 10

(d) L 16

写真 5.3 単純せん断供試体の光弾性等色性写真 ( L 2 )

## 5.4 粒子接点角の分布

粒状体の構造を表わす最も基本的な性質の一つが、粒子間の接点における接平面の方向の分布であることはすでに述べた。この性質は、接平面に立てた法線の空間方位角の分布を明らかにすることによって記述できる。前章において導入した、法線方向の確率密度函数  $E(\alpha, \beta)$  または  $E(\beta)$  がそれである。

### 5.4.1 粒子接点角の定義（二次元の場合）

いま、直交座標軸  $X, Y, Z$  を図 5.4 のようにとることとする。すなわち、 $Z$  軸をせん断応力  $\tau$  に平行、かつ反対向きに正の軸をとり、 $X$  軸は垂直方向、上向きを正にとる。これは、垂直応力  $\sigma_N$  の作用方向の反対である。 $Y$  軸は  $Z, X$  両軸に直角にとる。

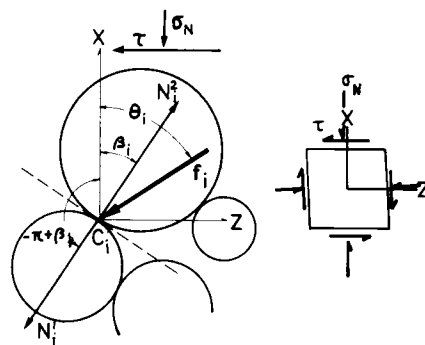


図 5.4 粒子接点角・粒子間力の方向角の定義

任意の接点  $C_i$  における接線に立てた法線としては、方向等しく向きが反対の 2 つの法線  $N_i^1$  と  $N_i^2$  とがあるが、以後の議論においては、これらのうち上向きの法線  $N_i^2$  で代表させ、これを単に  $N_i$  と書くことにする。この  $N_i$  の方向は、 $X$  軸からの傾き角  $\beta_i$  ( $-90^\circ \leq \beta_i \leq 90^\circ$ ) で表わされる。

### 5.4.2 粒子接点角の分布

粒子接点角  $\beta_i$  の分布は、前章 4.7.2 において述べたのと全く同様にして、確率密度函数  $E(\beta)$  によって表わされる。

粒子接点角  $\beta_i$  は、大きく引伸した光弾性等色線写真上で測定される。測定対象とした接点は、せん断枠に接している粒子、および、それらに接している粒子を除く、全粒子の間に生じている接点である。すなわち、境界の影響が著しい境界の 2 層を除いた、内部の全接点を対象としてある。なお、粒子間力がほとんど生じておらず、等色線縞が認められない接点も、測定対象に含めてある。

せん断過程の各段階において測定した、粒子接点角  $\beta_i$  の分布、すなわち、 $N_i$  の確率密度函数  $E(\beta)$  を、図 5.5 ~ 5.8 に示した。図 5.5 は D シリーズ ( $e_0 = 0.22$ ,  $\phi_\mu = 20^\circ$ )、図 5.6

はLシリーズ ( $e_0 = 0.26$ ,  $\phi_\mu \approx 20^\circ$ ), 図 5.7 はDB 3シリーズ ( $e_0 = 0.22$ ,  $\phi_\mu \approx 28^\circ$ ), 図 5.8 はDB 8シリーズ ( $e_0 = 0.23$ ,  $\phi_\mu \approx 28^\circ$ ) の各場合である.

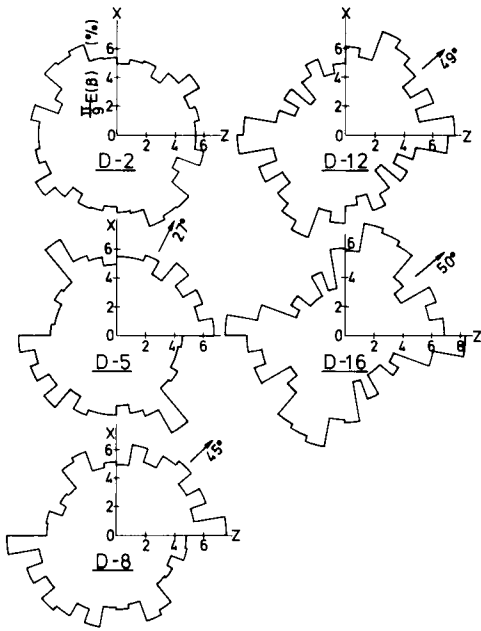


図 5.5 粒子接点角分布の変化 (D 2,  $\phi_\mu \approx 20^\circ$ ,  $e_0 = 0.22$ )

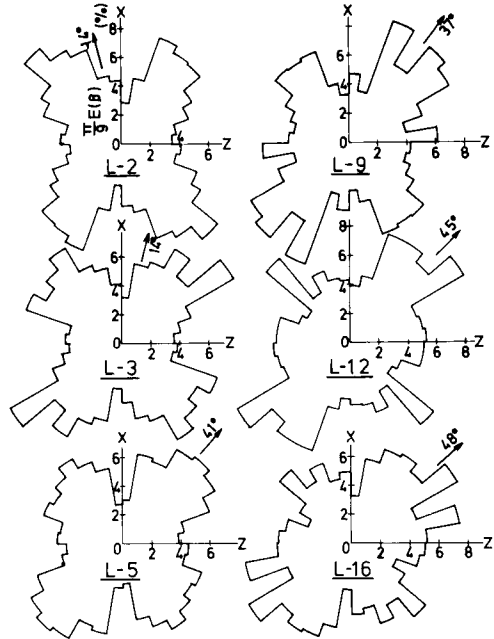


図 5.6 粒子接点角分布の変化 (L 2,  $\phi_\mu \approx 20^\circ$ ,  $e_0 = 0.26$ )

これらの各図においては, 上半分に  $N_i^2$  の頻度を極図表示し, 下半分には上半分の頻度を点対称的に移して  $N_i^1$  の頻度分布を表示している. したがって, 全体として,  $N_i^1$  と  $N_i^2$  の両方を測定したことになる.

さて, ここで  $\phi_\mu \approx 20^\circ$  の密な粒状体の場合の  $N_i$  の分布の変化を調べておこう. 図 5.5 の D 2 は, せん断前の垂直荷重のみを载荷した状態での  $E(\beta)$  を示している.  $\beta = 0^\circ$  に関して対称とならず,  $-20^\circ \sim -50^\circ$  付近の値がやや大きくなっているが, 異方性はあまり強くない.

次に, せん断力を作用させると, D 2  $\rightarrow$  D 5  $\rightarrow$  D 8  $\rightarrow$  D12  $\rightarrow$  D16 のように変化する. 極図表示した  $E(\beta)$  は, およそ楕円形となっているが, この  $E(\beta)$  の楕円の長軸方向が, せん断力の増大につれて次第に回転しており, また, 楕円が次第に長いものに変化していることがわかる. 言いかえると, せん断力の増大に伴って,  $N_i$  の集中方向は次第に回転してゆき, しかも,  $N_i$  の集中は強くなってゆく傾向が見られる.

ゆるづめの場合 (L シリーズ) においては, せん断前の分布が密な場合とかなり異なって,  $+20^\circ \sim +50^\circ$ ,  $-20^\circ \sim -50^\circ$  のところにかなり集中が見られる. しかし, せん断過程における変化は基本的には密な場合と同様のことが言える (図 5.6).

DB-3

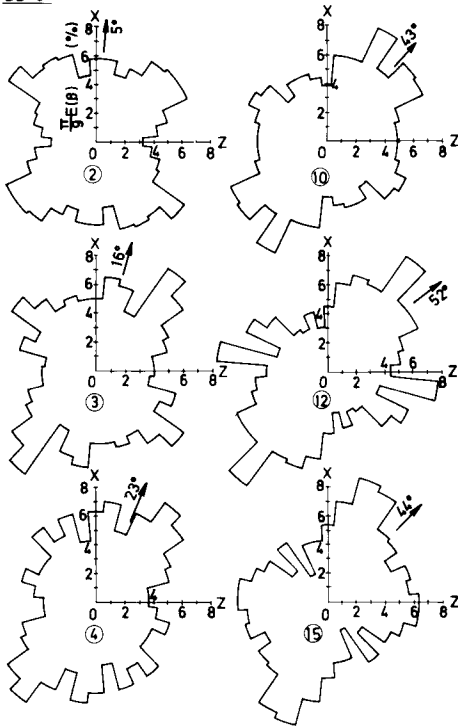


図 5.7 粒子接点角分布の変化 (DB 3,  $\phi_\mu \approx 28^\circ$ ,  $e_0 = 0.22$ )

DB 8

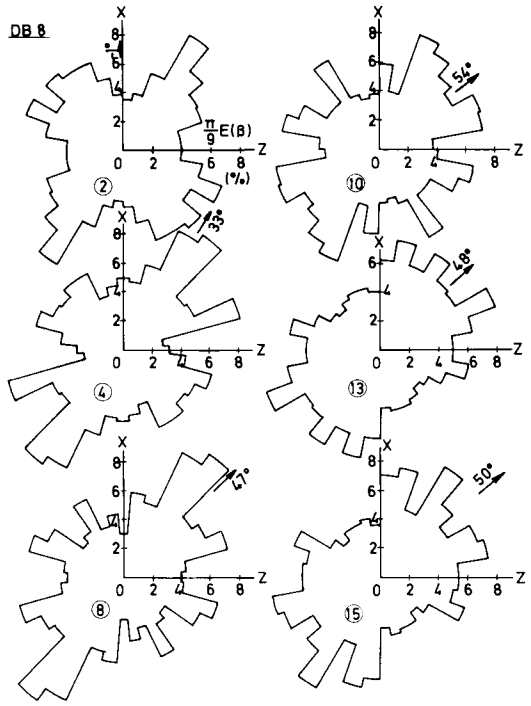


図 5.8 粒子接点角分布の変化 (DB 8,  $\phi_\mu \approx 28^\circ$ ,  $e_0 = 0.23$ )

さらに、 $\phi_\mu \approx 28^\circ$  の場合の DB 3, DB 8 (図 5.7, 5.8) においても、傾向的には、 $\phi_\mu \approx 20^\circ$  の場合と同様の傾向を示している。

### 5.4.3 $N_i$ の集中方向および集中度

上述の傾向を数値的に示すために Curry (1956) による vector mean direction および vector magnitude を用いて、 $N_i$  の集中方向および集中度を求めよう。

$N_i$  の集中方向  $\psi'$ 、および集中度  $\bar{M}$  (%) を次のように定義する：

$$\psi' = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\sum_{j=1}^{18} n_j \sin 2\beta_j}{\sum_{j=1}^{18} n_j \cos 2\beta_j} \quad (5.1)$$

$$\bar{M} = \frac{100}{M} \times \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{18} n_j \sin 2\beta_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{18} n_j \cos 2\beta_j\right)^2} \quad (5.2)$$

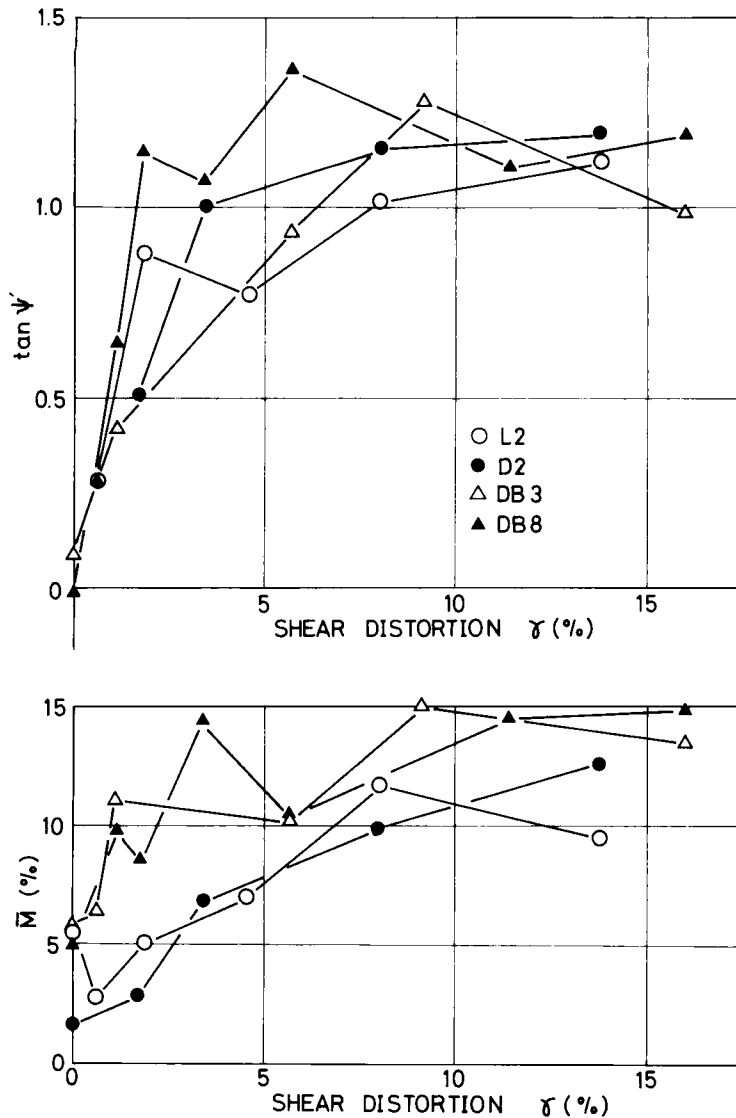


図 5.9  $N_i$  の集中方向および集中度の変化

ここに  $n_j$  は  $\beta$  (上向き法線のみを考え  $-90^\circ \sim +90^\circ$  の範囲) を  $10^\circ$  ごとに 18 区間に分けたとき,  $j$  番目の区間に入る接点の頻度,  $\beta_j$  は  $j$  番目の区間の中央値,  $M$  は全接点数で  $M = \sum_{j=1}^{18} n_j$  (上向き法線のみ数える) である.

集中度  $\bar{M}$  は, 接点角分布が完全にランダムで, 等方的ならば 0%, ある方向に完全に配向していれば 100% となる.

図 5.5 ~ 5.8 の各場合について,  $\psi'$  および  $\bar{M}$  を計算し,  $\gamma$  に対してプロットしたのが図 5.9 であり,  $\tau/\sigma_N$  に対してプロットしたのが図 5.10 である.

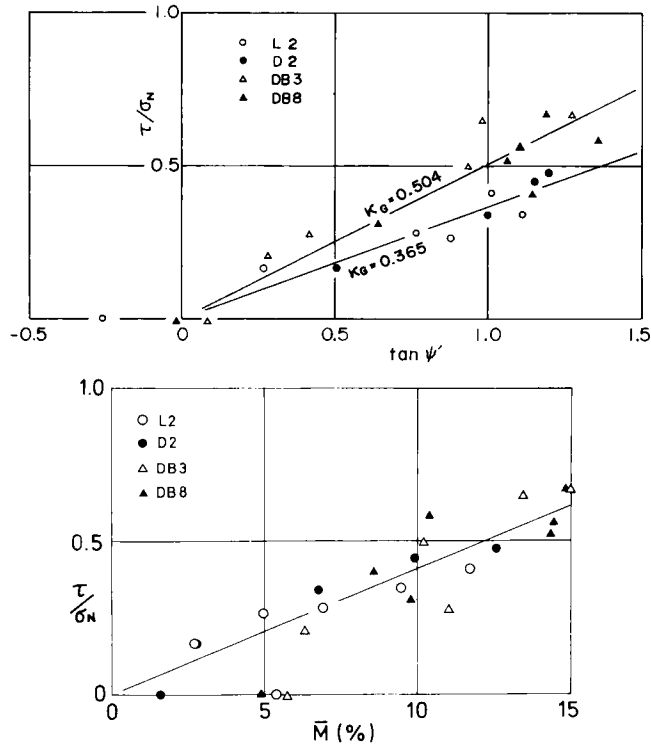


図 5.10  $N_i$  の集中方向および集中度と応力比との関係

これらの図より、せん断に伴って、 $N_i$  の集中方向の回転が生じていること、その場合、 $\tau/\sigma_N$  と  $\tan \psi'$  の間には、ほぼ比例関係が成り立っていることがわかる。

また、応力比  $\tau/\sigma_N$  の増大とともに、集中度  $\bar{M}$  も直線的に増大している。

これに対して、せん断ひずみ  $\gamma$  と  $\tan \psi'$ 、 $\bar{M}$  の関係は直線とならず、応力比のピーク以降、せん断ひずみは増大するにもかかわらず、 $\tan \psi'$ 、 $\bar{M}$  は増大しない。したがって、せん断ひずみと  $\tan \psi'$ 、 $\bar{M}$  の関係は一義的になっていない。せん断ひずみに対する  $\tan \psi'$  および  $\bar{M}$  の変化は  $\tau/\sigma_N$  の変化にかなりよく似ている。

したがって、粒状体の構造の変化は、ひずみに対してではなく、応力に対して生じるものであると言えよう。

## 5.5 粒状体の応力状態

本節では、粒状体の平均的な応力状態を、粒子間力の測定値を用いて計算した数個の応力値によってモール円に表示し、主応力の方向を求める。

### 5.5.1 粒子間力から応力への変換

粒状体の巨視的平均応力と粒子間力の関係については、第 7 章において考察するが、ここで

は、円柱粒子から成る2次元粒状体に関して、次のようにして平均応力を求めた。

応力状態を定めるには、最小限、相異なる方向の2面における応力を知る必要がある。

いま、粒状体内部に、水平(z軸)から $\alpha$ 傾いた任意の直線 $ab$ を考えよう(図5.11 a)。この線分の長さを $l$ とし、線分 $ab$ を介して粒子間力 $f_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )が作用している。これらの粒子間力は、線分 $ab$ の一方に重心を有する粒子と他方に重心を有する粒子との接点 $C_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )に作用しているものとする。

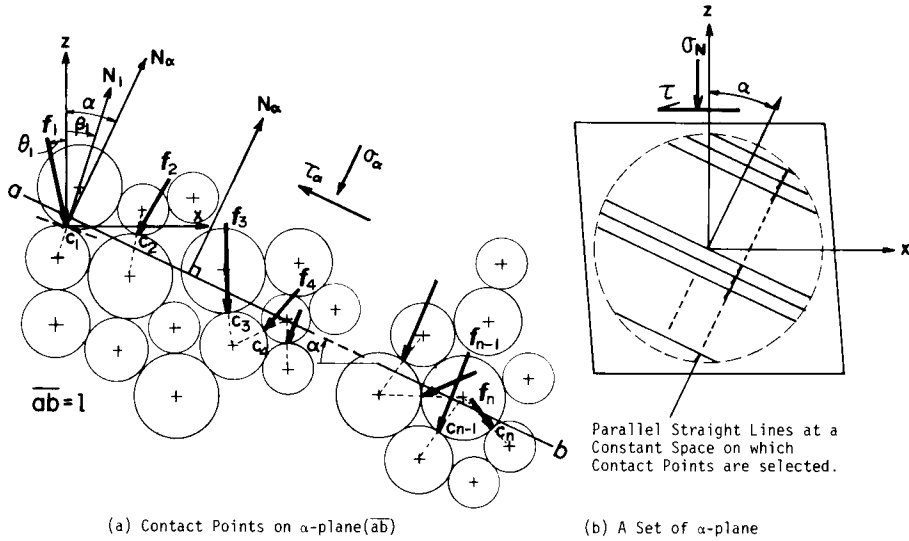


図 5.11 粒子間力から応力への変換

傾角 $\alpha$ の線分 $ab$ 上の、平均直応力、平均せん断応力をそれぞれ $\sigma_\alpha$ 、 $\tau_\alpha$ と書くことにすると、 $\sigma_\alpha$ 、 $\tau_\alpha$ は、粒子間力 $f_i$ の線分 $ab$ に垂直な成分 $f_i \cos \theta_i'$ および平行な成分 $f_i \sin \theta_i'$ を用いて次のように表わされる。

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{l} \sum f_i \cos \theta_i' \tag{5.3}$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{l} \sum f_i \sin \theta_i' \tag{5.4}$$

ここに $\theta_i'$ は粒子間力 $f_i$ と線分 $ab$ の法線 $N_\alpha$ のなす角であり

$$\theta_i' = \theta_i - \alpha \tag{5.5}$$

で計算される。

最小限2種の $\alpha$ について、 $\sigma_\alpha$ 、 $\tau_\alpha$ を求めれば、モールの応力図上で2つの応力点が定まり応力円が作図できて、応力状態が明らかになる。

$\sigma_\alpha$ 、 $\tau_\alpha$ を求めるに当っては、接点数ができるだけ多いことが望ましく、また平均的な応力状態を求める意味で、広い領域における粒子間力を考慮することが望ましい。そこで、図5.11

bに示すように、供試体内に円形領域を設定し、その内部に傾き $\alpha$ で、等間隔の平行線を想定し、これらの線上の応力の平均値をもって、粒状体の平均応力と考えることにした。

粒子間力の測定法は前章4.8.1に述べた。

粒子間力が小さく、繰り数がおよそ0.5次以下の場合には、測定が困難な場合が生じる。せん断応力の増大に伴って、最大主応力が増大し、粒子間力の平均値も増大してゆき、測定困難な接点数も変化する。そのため、粒子間力から求めた応力の値は、測定段階によって、真の値との誤差が異なってくる。そこで、ここでは水平面( $\alpha = 0^\circ$ )上の垂直応力 $\sigma_{\alpha=0^\circ} = \sigma_N$ が試験中に一定であることを利用して、変形の各段階における水平面上の平均応力 $\sigma_{\alpha=0^\circ}$ が一定値になるように、得られた応力値に補正を加えた。

### 5.5.2 モールの応力円

図5.12に、L2(ゆるづめ、 $\phi_\mu \approx 20^\circ$ )の場合と、DB3(密づめ、 $\phi_\mu \approx 28^\circ$ )の場合の、せん断に伴う平均的応力状態の推移をモールの円によって示した。粒子間力から計算した2~4点の応力値を○印で示し、これらを用いてモールの円を描いてある。Horiz. pl. と記し

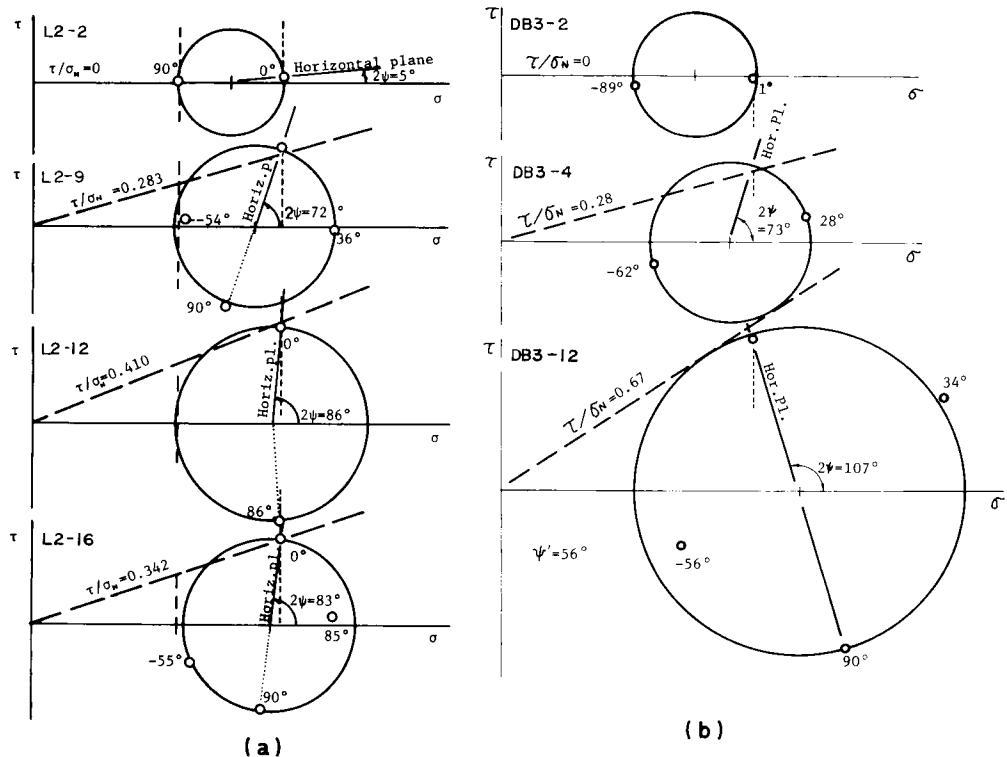


図5.12 粒状体の平均応力状態のせん断に伴う変化(○印が粒子間力から求めた応力点, Horiz. pl. とあるのは水平面の方向,  $\psi$ は最大主応力面と水平面のなす角, 破線は荷重値から求めた応力比を示す。) (a) L2の場合, (b)DB3の場合



たのが、水平面の方向を示している。また原点から引いた破線は、加えた荷重値より求めた応力比を表わしている。

これらの図より次のことが言える。

(1) 粒子間力から計算した水平面上の応力値は、加えた荷重値より求めた応力比とよく合っており、本節で用いた考え方が妥当であることを示している。

(2) せん断応力の増大に伴って、モール円は最小主応力はあまり変わらず、最大主応力が増大していくような変化をするようである。

(3) 主応力軸は、せん断応力の増大に伴って、次第に回転してゆく。主応力軸の回転角は、各モール円上の水平面上の応力点と、最大主応力点のなす中心角の半分から求められる。

(4) 単純せん断や一面せん断において通常仮定される2つの考え方、すなわち、せん断力を加える面（水平面）は最大傾角（maximum obliquity）面すなわち  $\tau/\sigma_N$  最大面であるという考え方、および、水平面が最大せん断応力面であるという考え方のいずれもが必ずしも正しくない。

## 5.6 最大主応力の方向と $N_i$ の集中方向の関係

図5.12から求めた主応力軸の回転角 $\psi$ と、式(5.1)によって計算した $N_i$ の集中方向 $\psi'$ とを比べてみたのが表5.2である。ピークを過ぎたL16を別にし、また初期状態のL2は集中度が小さいことを考慮すると、DB4を除いて、 $\psi$ と $\psi'$ は高々5°程度の差しかない。粒子接点角分布は10°毎の区間で調べているので、両者はほぼ一致していると考えてよいように思われる。つまり、 $N_i$ の集中方向と最大主応力方向とは、ひずみ硬化過程においては一致している。言いかえると、ひずみ硬化過程においては、せん断の場合にも $N_i$ の最大主応力方向への集中が生じると考えてよい。このことは、二軸（三軸）圧縮の場合のひずみ硬化の微視的機構が、主応力軸の回転を伴うせん断の場合にも成り立っており、両者の違いは、主に主応力軸が回転するか否かによるものであると言える。

表5.2 主応力軸の方向 $\psi$ と $N_i$ の集中方向 $\psi'$

Series	No	$\tau/\sigma_N$	$\psi$	$\psi'$
L 2	L 2	0	2.5°	-14°
	L 9	0.283	36°	37°
	L 12	0.410	43°	45°
	L 16	0.342	41.5°	48°
DB 3	DB 2	0	0°	5°
	DB 4	0.28	36.5°	23°
	DB12	0.67	53.5°	52°

ただし、このことは、ひずみ硬化過程のみに成り立つのであって、ピークを過ぎてすべり領域を生じる段階や、除荷を含む過程には当てはまらない。

## 5.7 砂の一面せん断試験

ここで、小田が行なった砂の一面せん断試験時に生じる粒子構造変化の研究をやや詳しく述べ、二次元モデル実験の結果と比較することにしよう(小田・小西, 1974 a, c)

### 5.7.1 用いた砂

用いた砂は次のようなものである: 粒径: 0.84 ~ 0.95 mm, 鉱物組成: 石英 90%, 長石 10%, 粒子形状はやや丸っこいものからやや角ばっているものまで含んでいる。

最大・最小間隙比は 0.96 と 0.67, 粒子間摩擦角  $\phi_{\mu} = 26^{\circ}$  である。

### 5.7.2 試験方法

通常の下部可動式一面せん断試験機を用い、次の 2 シリーズの実験を行なった。

(1) P シリーズ: 直径 6 cm, 高さ 4.3 cm のせん断箱に, 炉乾燥した砂をそそぎ, 突固め棒を用いて締固めた。この方法によって締固めた砂の初期間隙比は 0.67 ~ 0.71 であった。

(2) L シリーズ: 高さ 2 cm のせん断箱に, 炉乾燥した砂をスプーンでそそぐ。その際, できるだけゆるく詰まるようにする。初期間隙比は 0.79 ~ 0.84 となった。

垂直応力を 0.6, 1.1, 2.1 または 3.1 kg/cm<sup>2</sup> をせん断面にかけ, 変位速度 0.3 mm/min でせん断を行う。

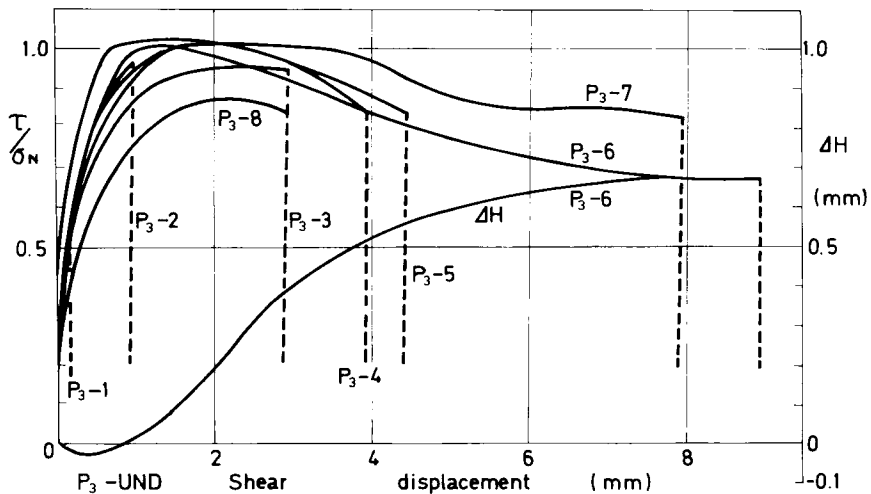


図 5.13 砂の一面せん断試験における応力比, せん断変位高さ変化の関係(密な砂, 突固め法による。P<sub>3</sub>-UND, P<sub>3</sub>-1, P<sub>3</sub>-2, ……とあるのは顕微鏡観察を行なった位置を示す。所定のひずみまでせん断しておいてせん断応力を  $\tau/\sigma_N = 0.2$  まで除荷し, 供試体を固結させる。小田・小西, 1974 による)

せん断変位および供試体の厚さ変化  $\Delta H$  をダイヤルゲージにて測定する。各試験は、所定のせん断変位段階において中断する。このようにして求めたせん断・垂直応力比・せん断変位曲線を図 5.13 と 5.14 に示す。所定のせん断変位までせん断し、破線で示すように、せん断応力を下げた後、ポリエステル樹脂を注入して、粒子構造を乱すことなく固結させる。固結させた試料を、ダイヤモンドカッターで長さ方向垂直面、横断方向垂直面および水平面において切断（図 5.15）したのち、これらの面に平行な薄片（厚さおよそ 0.09 mm）を作成する。

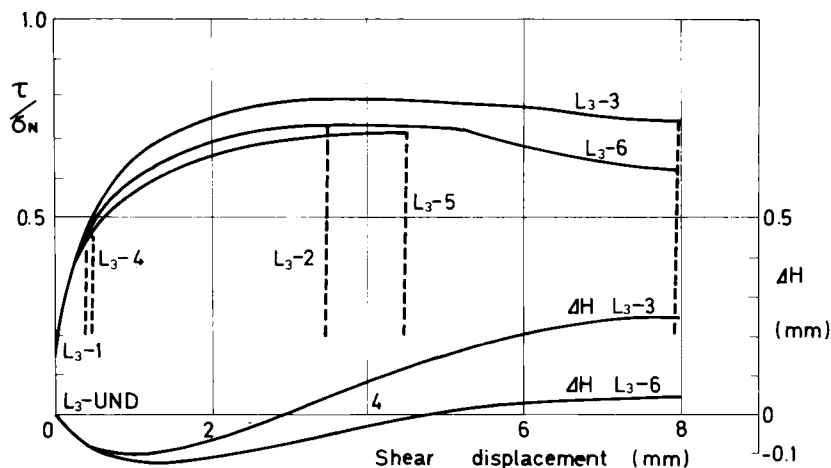


図 5.14 砂の一面せん断における応力比、せん断変位、高さ変化の関係（できるだけゆるくつめた砂。記号を付した各曲線の意味は前図に同じ。小田・小西，1974による）

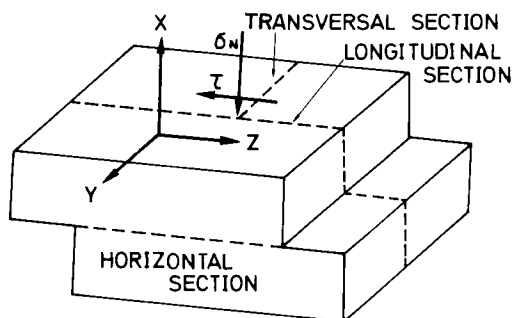


図 5.15 固結させた供試体の切断方向（3方向）

### 5.7.3 粒子構造の解析

粒子接点における接平面に立てた法線  $N_i$  の方向角  $\alpha_i$  および  $\beta_i$ （図 5.16）を、ユニバーサルステージ付き偏光顕微鏡を用いて測定する。測定対象とするのは、せん断方向鉛直断面の一樣にせん断されたとみなせる領域の約 160 接点である。真の  $N_i$  分布を求めるためには、少くとも、互に直交する 3 枚の薄片上で接点をランダムに選んで  $\alpha$ 、 $\beta$  を測定する必要がある。

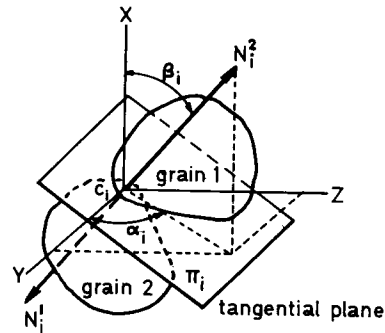


図5.16 接点における $N_i$ の方向

しかし、ここでは、Y軸方向には変形が許されないことからY軸に近い $N_i$ の分布には変化が少ないと考えて、せん断方向鉛直断面のみについて測定を行った。

$N_i$ の方向の3次元分布を調べるために、測定結果を等面積シュミット網上にプロットし、等頻度線を描いたのが図5.17, 5.18である。これらの等頻度線は、網の1%面積内の頻度が3%, 2%, 1%である点を結んで描いてある。

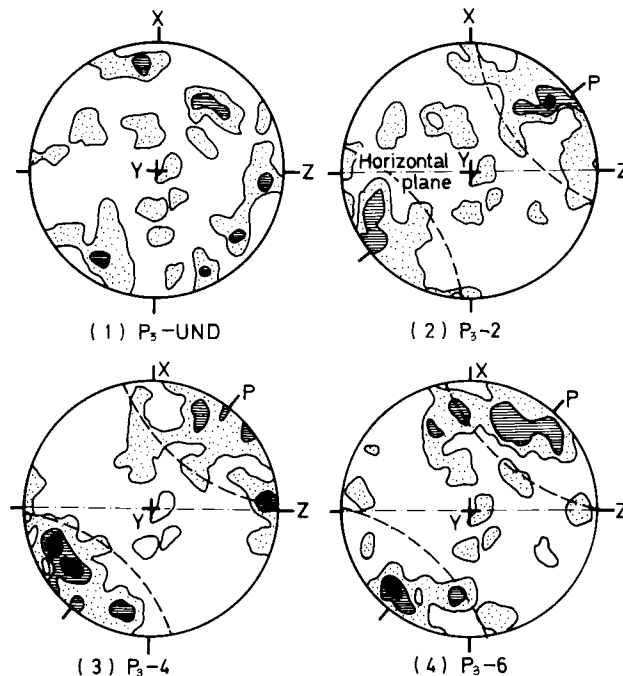


図5.17 せん断に伴う $N_i$ の分布の変化(突固め法による供試体、等高線は1%面積当り、3%, 2%, 1%を表わす。小田・小西, 1974による)

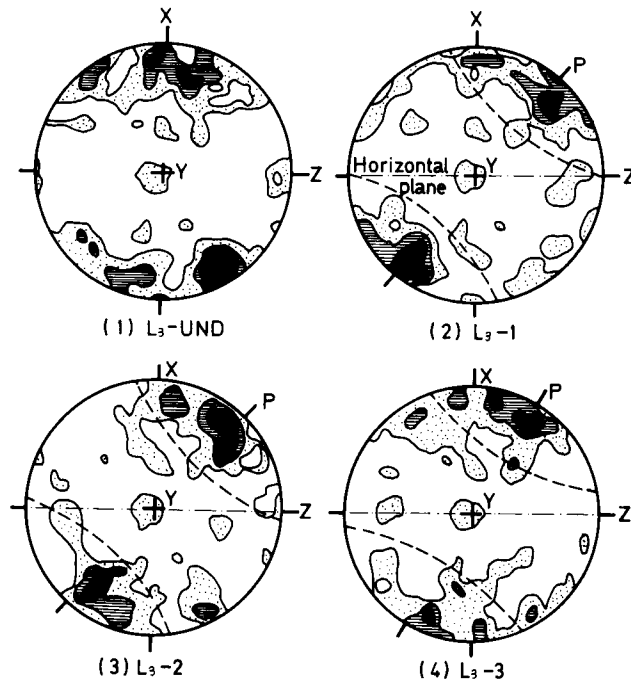


図5.18 せん断に伴う $N_i$ の分布の変化(できるだけゆるくつめた供試体, 等高線は1%面積当り, 3%, 2%, 1%を表わす. 小田・小西, 1974による)

#### 5.7.4 試験結果の考察

Pシリーズ供試体を一次的に圧密した状態(せん断前)(図5.17(1))では, $N_i$ の集中はほとんど見られず,圧密前のP供試体の $N_i$ 分布とあまり変わらない.したがって,粒子配列の変化はほとんど生じておらず,間隙比のみ減少していると言える.

この圧密状態の図(図5.17(1))と,各せん断変位まで変形させた供試体の $N_i$ 分布図(図5.17(2)~(4))を比較することによって次のことがわかる.

接点における接平面に立てた法線 $N_i$ は,図中に破線で示した領域に次第に集中してゆく傾向がある.しかし,さらに残留強度状態までせん断するとその傾向は弱まる(同図(4)).したがって, $N_i$ の集中の程度はせん断変位には関係なく,応力比と関係を有していることがわかる.

一方,ゆるい砂(L)の場合(図5.18)では,一次元圧密時に, $N_i$ は垂直方向にかなり集中をみせているのが,Pシリーズとは異なっている.しかし,せん断を受けたときの $N_i$ の分布の変化,すなわちピークに至るまでは,狭い領域へ $N_i$ が集中する傾向をみせ,残留状態では集中が弱まるという変化は,Pシリーズと全く同様とってよい.

#### 5.7.5 二次元モデル実験との比較

上に述べた結果を、2次元モデル実験の結果と比較しよう。

まず、一次元圧密時、すなわち垂直荷重のみ加えられた状態を比べると、砂の場合Pシリーズでは $N_i$ の局所的集中が見られず、Lシリーズでは垂直方向へのかなりの集中が観察された。すなわち間隙比の大きい、ゆるい砂では、圧密により集中傾向が著しく、間隙比の小さい、密な砂では、その傾向があまり現れないと言えよう。この傾向は、2次元モデル実験においても観察された。すなわち、図5.5のD2（密な場合）および図5.6のL2（ゆるい場合）を比較すれば明らかである。

また、せん断応力の増大に従って集中方向が変化してゆくが、この傾向も砂と二次元モデルとでほぼ類似しており、 $N_i$ の集中方向が、ほぼ最大主応力方向に一致することは5.6節に述べたとおりである。

## 5.8 粒子間接点において発揮されている摩擦角

### 5.8.1 定義

接点 $C_i$ を通して粒子間力 $f_i$ が伝達される（図5.4）。 $f_i$ の方向はX軸から測って $\theta_i$ （時計まわりを正）とする。

前章と同様に、接点 $C_i$ において発揮されている摩擦角 $\delta_i$ は

$$\delta_i \equiv \theta_i - \beta_i \quad (5.6)$$

で定義され、摩擦力の作用方向によって正負いずれかの値をとる。また粒子表面の物理摩擦角を $\phi_\mu$ とすれば、

$$|\delta_i| \leq \phi_\mu \quad (5.7)$$

であり、等号が成り立つとき、この接点において、すべりが生じ得る状態にあることを意味している。

### 5.8.2 測定結果

いくつかの測定結果を示そう。図5.19はLシリーズのピーク付近における $\delta_i$ の分布を示している。この分布に含まれる接点は、綫次数約1.0次以上の全接点である。分布はおおよそ $0^\circ$ を中心にした対称形になっていて、正規分布で近似できる（実線で表示）ようである。二軸圧縮の場合と同様に、 $\phi_\mu$ のばらつきを考慮に入れたとしても、 $\delta_i = \phi_\mu$ となっているすべり接点は少ないことがわかる。また図5.20には、Z軸から $\alpha^\circ$ 傾いた面上における測定例を示している。ピーク時（L12）の $\alpha = 0^\circ$ 面上でも主応力軸に近い $\alpha = 37^\circ$ 面上でもまたせん断前（L2）の状態でも、分布形状はあまり変わらないことが注目される。

せん断前でも、ピーク時でも、すべり接点があり、その数は少ないことが特に注目される。

図5.21は $\phi_\mu \approx 28^\circ$ の場合である。分布の幅が $\phi_\mu$ の増大に応じて広がっている他は、図5.19と同様の傾向を示している。

以上より、供試体全体がせん断領域となる単純せん断においても、全過程を通じて、 $\delta_i = \phi_\mu$  となるすべり接点は少いこと、 $\delta_i$  は  $-\phi_\mu \sim +\phi_\mu$  の間にほぼ正規分布をしていること、などが明らかとなった。

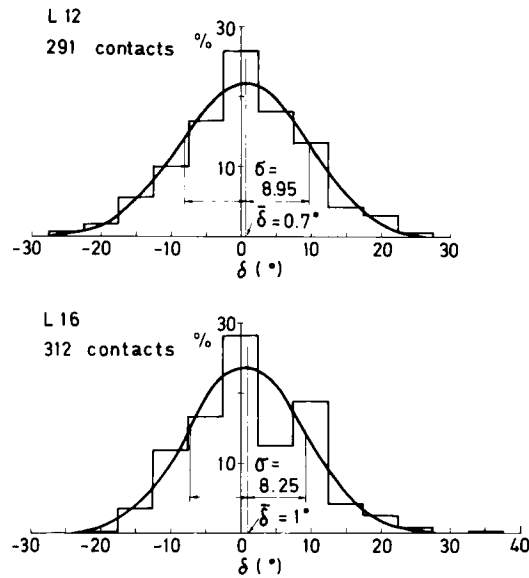


図 5.19 接点において発揮されている摩擦角の分布 ( $\phi_\mu \approx 20^\circ$ )

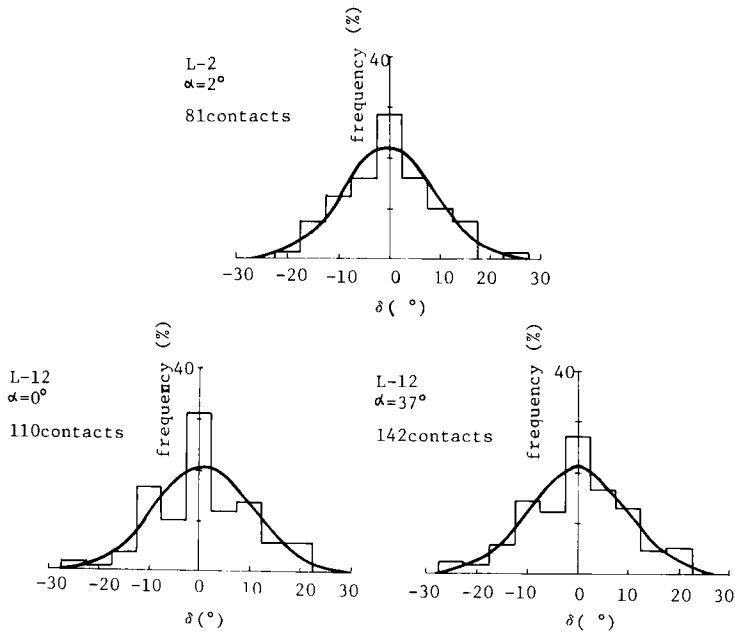


図 5.20 接点において発揮されている摩擦角の分布 ( $\phi_\mu \approx 20^\circ$ , 傾角  $\alpha$  の面上接点で測定)

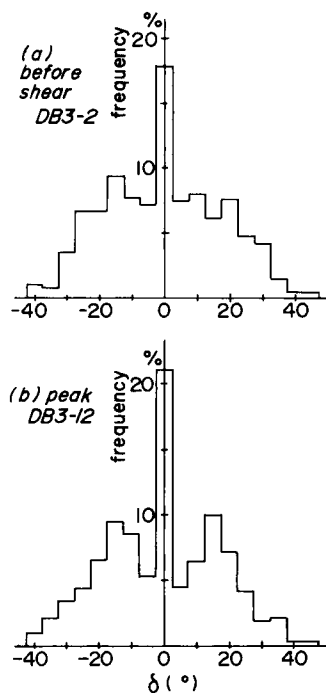


図 5.21 接点において発揮されている摩擦角の分布 ( $\phi_{\mu} \approx 28^{\circ}$  の場合)

### 5.9 粒子間摩擦角が粒状体の変形・強度に及ぼす影響について

粒子間摩擦角  $\phi_{\mu}$  が強度に及ぼす影響に関しては Caquot (1934) や Bishop (1954) の有名な関係式が知られている (第 2 章 2.2.1)。

これらの式で  $\phi$  の値を計算してみると表 5.3 のようになる。

表 5.3 内部摩擦角の計算値と実測値

	$\phi_{\mu} \approx 20^{\circ}$	$\phi_{\mu} \approx 28^{\circ}$
Caquot $\tan \phi = \frac{\pi}{2} \tan \phi_{\mu}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$
Bishop $\sin \phi = \frac{15 \tan \phi_{\mu}}{10 + 3 \tan \phi_{\mu}}$	$29^{\circ}$	$43^{\circ}$
実験値	(D2) $28^{\circ}$ (L2) $22^{\circ}$	(DB3) $35^{\circ}$ (DB8) $34^{\circ}$

$\phi_{\mu}$  による  $\phi$  の大小関係は実験値と同じであるが、いずれの場合も、計算値は実験値を上まわっている。これは、円形粒子から成る二次元粒状体と、実際の砂との違いを反映しているとも考えられるが、粒子間摩擦角がかなりちがった値をとっていることに関係があるのではない



だろうか。つまり計算に用いた  $\phi_\mu$  よりも小さな  $\phi_\mu$  の接点が存在しており、そのような接点が粒状体の変形を支配している可能性があるように思われる。というのは、粒子間のすべりは、同じ条件下ならば、 $\phi_\mu$  の小さい接点でまず生じるであろうからである。

実験で得られた  $\phi$  を使って、Caquot の式で  $\phi_\mu$  を逆算してみると、L 2 の場合  $\phi_\mu \approx 14^\circ$ 、DB 3 の場合  $\phi_\mu \approx 24^\circ$  となり、ほぼ、それぞれの場合の実測値の最小値に相当している。

図 5.10(a)(b) は、 $\tau/\sigma_N$  と  $\tan\phi'$  および  $\bar{M}$  とが直線関係にあることを示している。数式表示すれば

$$\tau/\sigma_N = x_G \tan\phi' \quad (5.8)$$

$$\tau/\sigma_N = \lambda \bar{M} \quad (5.9)$$

となる。ここに  $x_G$ 、 $\lambda$  は実験定数である。

図 5.10(a) によれば、 $\phi_\mu \approx 20^\circ$  の場合と  $\phi_\mu \approx 28^\circ$  の場合とで、直線の勾配が異なっており、 $\phi_\mu \approx 20^\circ$  (D 2, L 2) では  $x_G = 0.365$ 、 $\phi_\mu \approx 28^\circ$  (DB 3, 8) では  $x_G = 0.504$  となっている。これに対し、 $\bar{M}$  の方には差異が見出せない。これによれば、同じ応力比に達するのに、 $\phi_\mu \approx 20^\circ$  の方が、集中方向  $\phi'$  をより大きく回転させなければならないことがわかる。したがって、より大きなひずみを生じる必要があり、変形係数は小さくなることになる。図 5.2、5.3 を比べれば L 2 の初期を除いてそのようになっている。

## 5.10 結 論

円柱形粒子から成る二次元粒状体の単純せん断試験を行ない、粒子接点角および粒子間力を測定し、砂の一面せん断試験との比較も行なった結果、次のような結論を得た。

- (1) 粒状体の平均的応力状態は、粒子間力によって定義できる。
- (2) 主応力軸は、せん断応力の増大とともに次第に回転する。
- (3) いわゆるせん断面（水平面）は、必ずしも  $\tau/\sigma_N$  最大面でも、最大せん断応力面でもない。
- (4) 接点における法線  $N_i$  は、せん断の場合も、二軸圧縮の場合と同様、次第に、最大主応力方向に集中してゆく。主応力軸がせん断中に徐々に回転するので、 $N_i$  の集中方向も次第に回転する。
- (5) 単純せん断におけるひずみ硬化の機構は、基本的には二軸（三軸）圧縮におけるそれと同じと考えてよい。違いは主応力軸が回転するか否かにある。
- (6) すべり条件を満足している接点は、せん断力を加える前にも存在しているが、ピーク時においてもその数は少ない。

## 第6章 粒状体の繰返しせん断過程に 関する微視的考察

### 6.1 序 論

#### 6.1.1 まえがき

繰返し荷重を受ける砂の力学的性質は、地震や交通荷重を受けた場合の挙動、あるいは静的・動的締固めの問題に関連が深く、重要であるとともに、砂の変形機構を追求する上でも興味深い。

繰返し荷重を受ける砂の著しい特徴は、次の2点にあると思われる。

1. 応力-ひずみ関係がヒステリシスループを描くこと。
2. 塑性変形が逐次残留累積すること。

本章においては、このような特徴を有する繰返し荷重を受ける砂の強度・変形機構を、微視的観点から明らかにするため、前章において用いたのと同じ、模型粒状体および実験装置を用いて、一方向および両方向繰返しせん断試験を行ない、考察を加えることにする。

#### 6.1.2 繰返し荷重を受ける砂の挙動に関する従来の研究

この分野の研究は、ひずみあるいは応力振幅の大きさと、載荷周期によって、いくつかの範疇に分けられよう。

a) ひずみ振幅がおよそ  $10^{-3}$  以下の場合。現象は定常的であって、繰返しの進行に伴う土の性質の変化はほとんどない。土の性質は弾塑性的。試験法としては、土にねじり振動を与える共振法が用いられる。

b) ひずみ振幅が  $10^{-3}$  以上で、動的繰返し載荷を行う。

c) ひずみ振幅が  $10^{-3}$  以上で、静的繰返し載荷を行う。

b), c) においては、土の変形は塑性的色彩を増し、繰返しの進行に伴って土の性質が変化する。体積変化あるいは間隙水圧が生じるので、その発生過程が問題となってくる。地震応答解析や液状化の問題に関連してよく用いられているのは b) の動的繰返し載荷試験であって、1~5秒程度の周期で実施される。これに対して c) は、通常の静的試験と同じ速度で、載荷、除荷を繰返すものであって、繰返しに伴う土の変形特性をより詳細に把握したい場合に用いられる。

本章の対象としたいのは、b) あるいは c) の範疇に入る、ひずみが  $10^{-2} \sim 10^{-1}$  オーダーの場合であるから、a) については省略しよう。

Silver & Seed (1971 a, b) は単純せん断試験機を用い、せん断ひずみ振幅を一定にした

繰返しせん断試験を行なった。ひずみ振幅、垂直応力、砂の相対密度などを種々に変化させてこれらの各要因がせん断変形係数、履歴減衰定数および体積変化に及ぼす影響を調べた。

村山(1969)は、一方向繰返しせん断(応力振幅一定)の場合の残留せん断ひずみ $\gamma_R$ と繰返し回数 $N$ との関係を理論的に導いた。結果の式は次のようである。

$$\gamma_R = A_p \frac{N}{a + bN} \quad (6.1)$$

ここに $A_p$ 、 $a$ 、 $b$ は定数であって実験によって決定できる。

(6.1)式によれば、 $N/\gamma_R$ と $N$ との関係は直線となる。

八木(1971, 1974)は、繰返し荷重を受ける砂の力学特性を三軸試験機および単純せん断試験機(NGI型)を用いて研究している。彼は、せん断応力振幅一定の一方向繰返しせん断と両方向繰返しせん断、および、ひずみ振幅一定の両方向繰返しせん断の各試験を行なった。これらの試験で得られたせん断応力～せん断ひずみ～体積変化関係に基いて、両方向繰返しせん断における残留体積変化は、繰返しの進行に伴ない、圧縮方向に進み、残留圧縮量と繰返し回数との関係も(6.1)式と同様双曲線型の式で表示できることを示した。また、残留体積圧縮量が応力比の3乗に比例することを見出した。

龍岡・石原(1974b)は、応力振幅一定およびひずみ振幅一定の排水繰返し三軸試験を行ない、圧縮・伸張を交互に繰返す両方向繰返しの場合には、応力振幅がある限界内にある限りにおいて、砂の降伏は反対側における応力履歴に対して独立であることを示した。この事実を用いて、繰返しの進行に伴うダイレイタンスーおよびせん断ひずみの推移を予測する方法を提案し、実験によって検証した。さらに、石原・龍岡・安田(1975)は、非排水繰返し三軸試験における間隙水圧、せん断ひずみの推移および液状化の可能性を予測する方法を示した。

Biarez, Wiendieckらは、二次元粒状体の二軸圧縮を行なっているが、その場合に、伸張と圧縮を連続して行ない、粒子接点角の分布の変化およびそれから得られる幾何学的異方性を調べた(Biarez et Wiendieck, 1963, Wiendieck 1967)。

松岡らは、アルミ棒積層体(2次元)に対して繰返し一面せん断を行なって、せん断面上の粒子接点角分布の変化を調べた(村山・松岡1970, 村山・松岡・坂東1970, 松岡1973)。

一方向繰返しせん断においては、第1回目ピークにおける粒子接点角分布が、第5回目のピークにおいても応力比 $\equiv 0$ の点でも保存されていることを示し、繰返し時の変形係数が、第1回目のそれより大きいのは、粒子構造を変えるための変形がほとんど不要になるためであることを推論している。両方向せん断における各点の変形係数の差異についても、粒子接点角分布の変化から説明を加えている。

## 6.2 一方向繰返しせん断

### 6.2.1 実験の概要

使用した粒子，および2次元単純せん断試験機は，前章のものと同一である。

鋼製のせん断枠内に，3種の径のエポキシ樹脂円柱形粒子をランダムに積み上げてある。粒子数は， $\phi 10$ ：75個， $\phi 8$ ：149個， $\phi 6$ ：204個で，初期間隙比 $e_0 \approx 0.25$ でゆるづめである。供試体寸法は，幅156mm，初期高さ152.4mmであった。

垂直荷重 $P = 40 \text{ kg}$  をかけた後，応力振幅 $\tau / \sigma_N = S/P \approx 0.34$  ( $S$ ：せん断力) を目標として，繰返しせん断変形を与えた。繰返し回数 $N = 8$ 回まで行なったが，まだ弾性状態には達していない。

せん断の各段階で，光弾性等色線写真を撮影し，後の解析に用いた。

### 6.2.2 実験結果

応力比 ( $\tau / \sigma_N = S/P$ )，せん断ひずみ ( $\gamma = D/L$ ， $D$ ：せん断変位， $L$ ：せん断枠上下ヒンジ間距離) および垂直ひずみ ( $\epsilon_N = \Delta H/H_0$ ， $H_0$ ：初期高さ， $\Delta H$ ：高さの変化) の関係を，図6.1に示す。応力比 $\tau / \sigma_N = 0.34$ に達するまでに，第1回载荷では，大きなせん断ひずみおよび垂直ひずみを生じているが，第2回目以降では，第1回目と比べて，せん断ひずみおよび垂直ひずみとも小さく，両者とも第1回目のおよそ1/4以下となっている。そして，

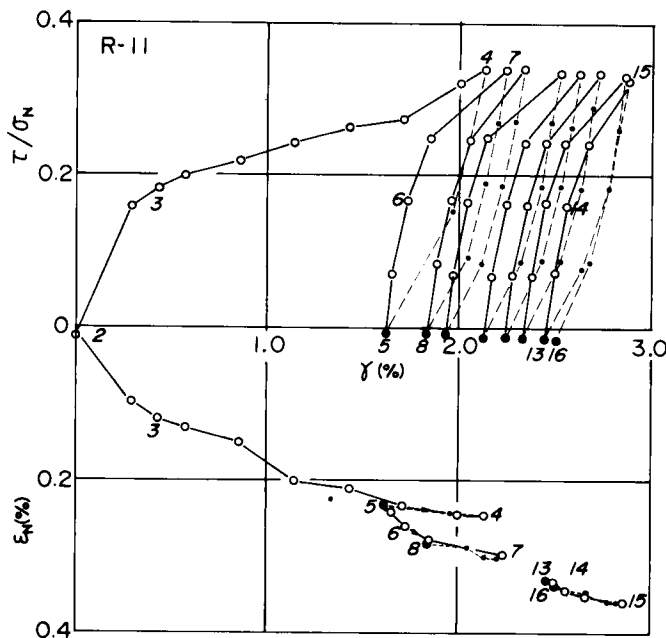


図 6.1 一方向繰返しせん断試験の応力比・垂直ひずみーせん断ひずみ関係 (R-11)

$\tau/\sigma_N \sim \gamma$ 関係は、ヒステリシスループを描き、残留ひずみを累積している。

砂の一方向繰返しせん断の例として、八木(1974)による豊浦標準砂の試験結果を示せば、図6.2のようである。光弾性模型の結果は、定性的には砂によく類似していることがわかる。

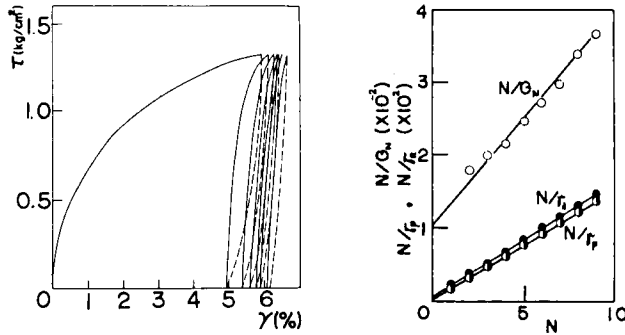


図 6.2 砂の一方向繰返し単純せん断試験結果(豊浦標準砂, 八木(1974)による)

村山は、残留せん断ひずみ  $\gamma_R$  と繰返し回数  $N$  との間に

$$\gamma_R = A_P \frac{N}{a + bN} \quad \text{または} \quad \frac{N}{\gamma_R} = a' + b'N \quad (6.1 a)$$

ここに  $a'$ ,  $b'$  は定数

の関係があることを導き(村山, 1969), 八木は砂の単純せん断試験により, 式(6.1 a)の妥当性を検証した(八木, 1971, 1974)。

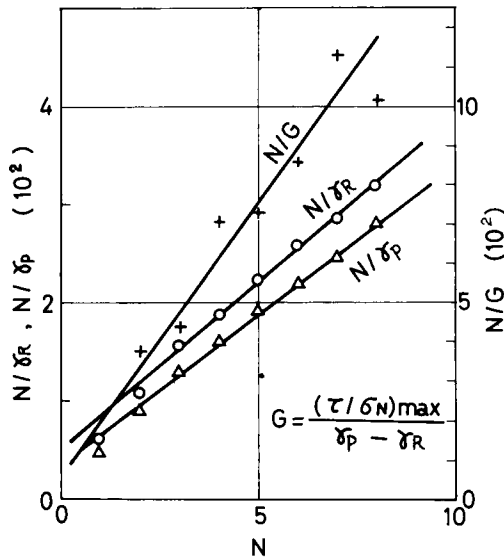


図 6.3 繰返しによる残留ひずみと弾性係数の変化 (R11)

いま、光弾性模型せん断試験結果について  $N/\gamma_R$  と  $N$  の間の関係をプロットしてみると、図 6.3 のようになり、概ね式 (6.1) を満足する。また、ピーク時のせん断ひずみを  $\gamma_P$ 、 $\tau/\sigma_N = 0$  の点と  $\tau/\sigma_N = 0.34$  (ピーク) の点を結ぶ直線の傾きで定義される割線変形係数を  $G$  として、 $N/\gamma_P$  および  $N/G$  と  $N$  との関係をプロットすれば、これらもまた直線となる(図 6.3)。これらの結果は八木が砂について確めた結果と同じであって、本研究で用いた 2 次元光弾性模型粒状体が、砂のモデルとして妥当であることを示すものと言えよう。

### 6.2.3 粒子構造の変化

図 6.1 において、番号(イタリック)を付した各点において、粒子接点角  $\beta$  (前章図 5.4 参照) の頻度分布を調べた。

せん断枠に接する粒子、およびそれらと接する(2層目の)粒子を除く、全接点について  $\beta$  を測定し、 $10^\circ$  ごとの区間に分けて頻度を求め、ロゼットダイアグラム表示したのが図 6.4 である。2 は、垂直荷重  $\sigma_N$  のみ加えた状態で、法線方向  $N_i$  の集中はあまり著しくない。せん断力を加えてゆくと、法線方向の集中および集中方向の回転が観察される(3, 4)。除荷した状態が 5 である。最初の状態には戻らず、4 における構造、とくに、ピーク付近の  $\beta$  を保存しているのが観察される。再びせん断力を増すと、集中方向はほとんど変らないまま、法線の集中が生じるが、この変化は第 1 回目のせん断に比べて、かなり小さいせん断ひずみによって生じ

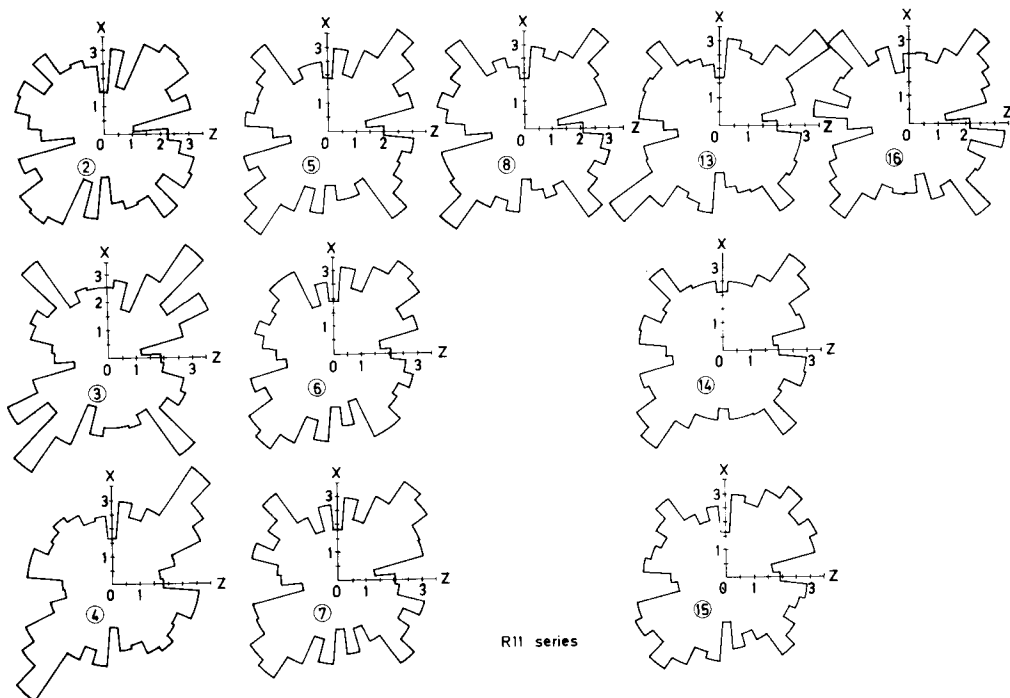


図 6.4 一方向繰返しせん断時の粒子接点角分布の変化 (R11)

ている。8は残留状態である。13は第7回目の残留状態、14、15は第8回目のせん断、16は第8回目の残留状態における $N_i$ の分布を示している。

図6.4で観察された傾向を定量的に示すため、各段階における $N_i$ の集中方向 $\psi'$ および集中度 $\bar{M}$ （第5章5.4.3参照）を求めて、 $\tau/\sigma_N$ との関係を示したのが図6.5である\*）

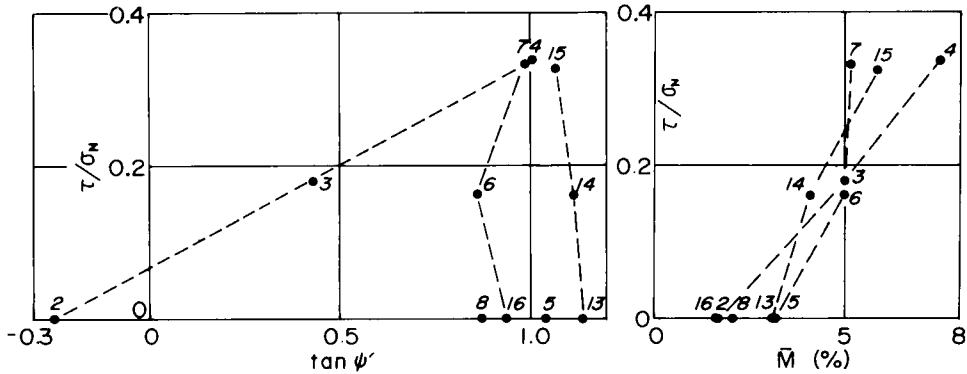


図6.5 一方向繰返しせん断時の $N_i$ の集中方向および集中度と応力比の関係(R11)

本図より、処女せん断過程(2→3→4)と、第2回以降の繰返しせん断過程(5以降)とは、 $\psi'$ および $\bar{M}$ の変化の仕方が大きく異なっていることがわかる。つまり、処女せん断過程では、第5章で調べたせん断と全く同様で、ひずみ硬化を行うため、 $\tan \psi'$ 、 $\bar{M}$ とも $\tau/\sigma_N$ に比例して増大してゆく。一方繰返しせん断過程においては、第1回せん断ピーク時の粒子構造をかなり保存するため、 $\tan \psi'$ の変化はわずかで、 $\bar{M}$ も少ししか変化しない。もっと多数回せん断を繰返せば、完全な弾性状態に達して、 $\tan \psi'$ 、 $\bar{M}$ とも同一線上を往復するようになるであろう。

このような粒子配列構造の変化を、模式図によって示したのが図6.6である。

等方的な粒状体に垂直荷重を加えて圧縮すると、粒状体は $K_0$ 状態に対応した異方性となり、 $\bar{M}$ が増加するが、 $\psi'$ は変化しない(0→1)。次にせん断力を加えて、 $\tau/\sigma_N$ を増大させると、主応力軸の回転に伴って、 $N_i$ の集中方向も回転し、 $\psi'$ は増大する。それとともに最大主応力の増大に伴って、最大主応力方向への $N_i$ の集中が生じるので、 $\bar{M}$ も増大する(1→2→3、処女せん断過程)。せん断力を除くと、 $\psi'$ 、 $\bar{M}$ ともに少し回復する(3→4)。

この第1回目のサイクルで、大部分のせん断ひずみおよび垂直ひずみが残留ひずみとなって残るが、粒子配列構造も、ピーク時の構造をかなりの程度保存している。この粒子構造は、第1回目と同方向のせん断に対しては有利なものとなっているので、第1回目のピーク値までの

\*）本図は、 $10^\circ$ ごとに区分した頻度図をもとにしているため、 $\psi'$ の値には $5^\circ$ 程度の誤差を含みうることに、 $\bar{M}$ が小さい場合には $\psi'$ の計算値は不安定になりやすいことの2点を考慮しつつ、本図を見る必要がある。

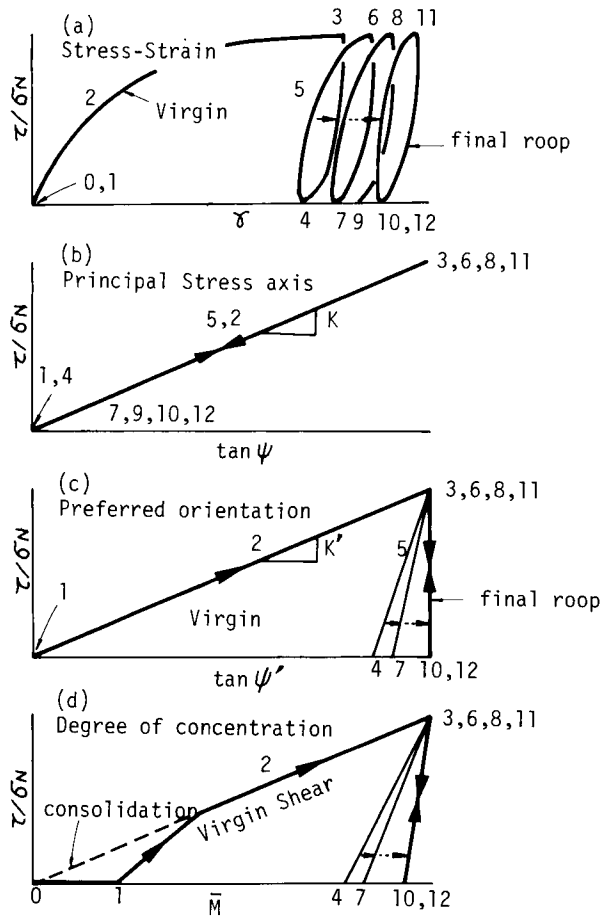


図 6.6 一方向繰返しせん断時の構造変化の模式図

せん断応力に対しては、わずかのせん断ひずみによって抵抗し得る（ひずみ硬化）。したがって、第2回目以降は、同じ応力比に達するまでに、わずかのせん断ひずみしか必要としない。完全に硬化して、弾性状態に達するまで、 $\tan \psi'$ 、 $\bar{M}$ の経路も少しずつ変化し、完全に弾性状態に達すれば、同一経路上を往復することになるであろう。

なお、体積ひずみの変化も、第1回目にその大部分が生じ、繰返しせん断過程では少く、最終的には、同一経路上を往復するようになる。

### 6.3 両方向繰返しせん断

#### 6.3.1 実験の概要

試験装置および粒子は、一方向せん断の場合と同じものを用いた。

試験方法としては、せん断碎を載荷ねじにより、左右から交互に押して、せん断変形を与え



ることとした。まず、一方向から、所定のせん断応力あるいはせん断ひずみに達するまで、せん断棒を押し、次にせん断応力が零となるまで、荷重ねじを戻す。せん断棒が残留変形状態で静止したら、反対方向の荷重ねじにより、前回と逆の方向にせん断変形を与え、所定のせん断応力またはせん断ひずみに達したら除荷する。以下、この操作を交互に繰り返す。

せん断応力振幅一定の $+\tau_p \sim -\tau_p$ 間の試験、および、せん断ひずみ振幅一定の $+\gamma_p \sim -\gamma_p$ 間の試験を行なったが、ここでは後者、すなわち、せん断ひずみ振幅一定の両方向繰返しせん断試験結果のみについて述べる。

### 6.3.2 応力比・垂直ひずみとせん断ひずみの関係

図6.7に、二次元粒状体の両方向繰返しせん断における $\gamma \sim \tau/\sigma_N$ 関係および $\gamma \sim \varepsilon_N$ 関係を示す。

比較のために、八木による豊浦標準砂の繰返し単純せん断試験結果を図6.8に掲げる（八木1971, 1974）

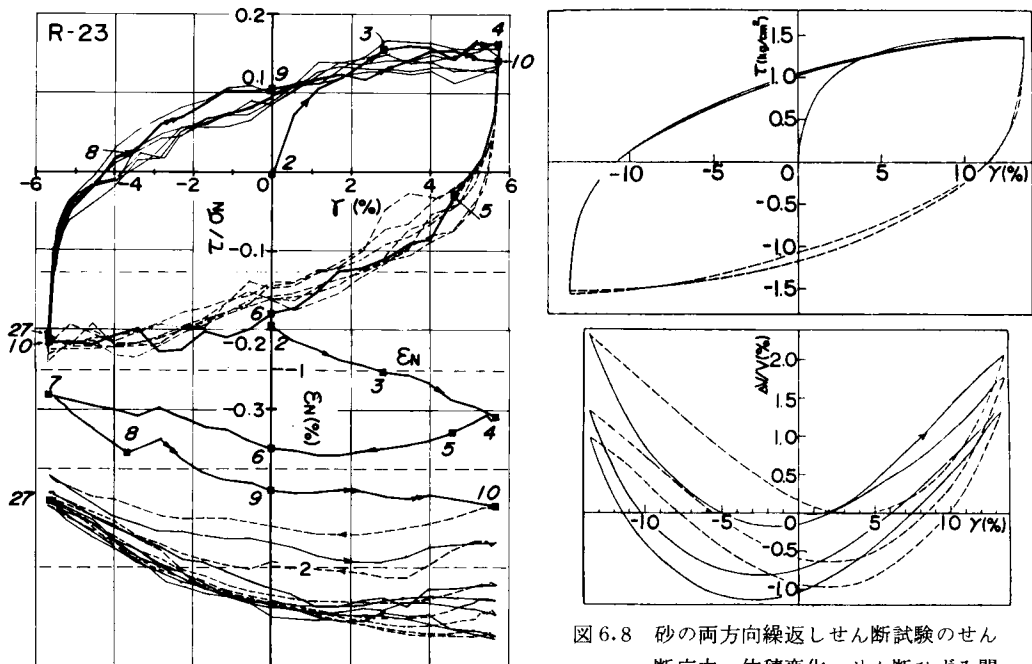


図6.8 砂の両方向繰返しせん断試験のせん断応力、体積変化、せん断ひずみ関係（豊浦標準砂、八木（1971）による）

これらの図を比較して、次のことが言える。

(1) 二次元粒状体の $\tau/\sigma_N \sim \gamma$ 関係は、砂のそれとほとんど同じ傾向を示している。 $\varepsilon_N \sim \gamma$ 関係は、砂の方が正のダイレイタンスが著しく、二次元粒状体では、 $\gamma$ の正の側で体積減少

負の側で体積膨張を示している。二次元粒状体の方がゆるづめの傾向を示しているが、いずれも、一定ひずみ（たとえば  $\gamma = 0$ ）における  $\varepsilon_N$  の増分は、繰返しとともに減少する傾向を見せている。

したがって、両方向繰返しせん断の場合も、二次元粒状体は、砂の挙動をよくシミュレートしていると言えよう。

(2)  $\tau/\sigma_N \sim \gamma$  関係は、ある程度のばらつきを許容すれば、八木が述べているように、繰返し回数にかかわらず、ほぼ同じループを描くようである（八木 1974）。

$\varepsilon_N$  は、繰返し数とともに、体積減少の方向に向い、次第に一定曲線に収束してゆく傾向がみられる。

(3)  $\tau/\sigma_N$  の絶対値は、正の側より負の側が大きく、 $\tau/\sigma_N \sim \gamma$  関係のループは、全体的に負の側にずれた形となっている。

これに対応して、 $\varepsilon_N \sim \gamma$  関係は正の側で収縮傾向、負の側で膨張傾向を示している。

このように、 $\tau$  や  $\varepsilon_N$  に関して対称性を示さないのは、初期構造が、 $X$  軸（垂直軸）に関して対称となっておらず、 $\beta$  の負の側に  $N_i$  がやや集中しているためと考えられる。

### 6.3.3 粒子構造の変化

図 6.7 に数字で示した各段階において粒子接点角  $\beta$  の頻度分布を調べた結果を図 6.9 に示す。

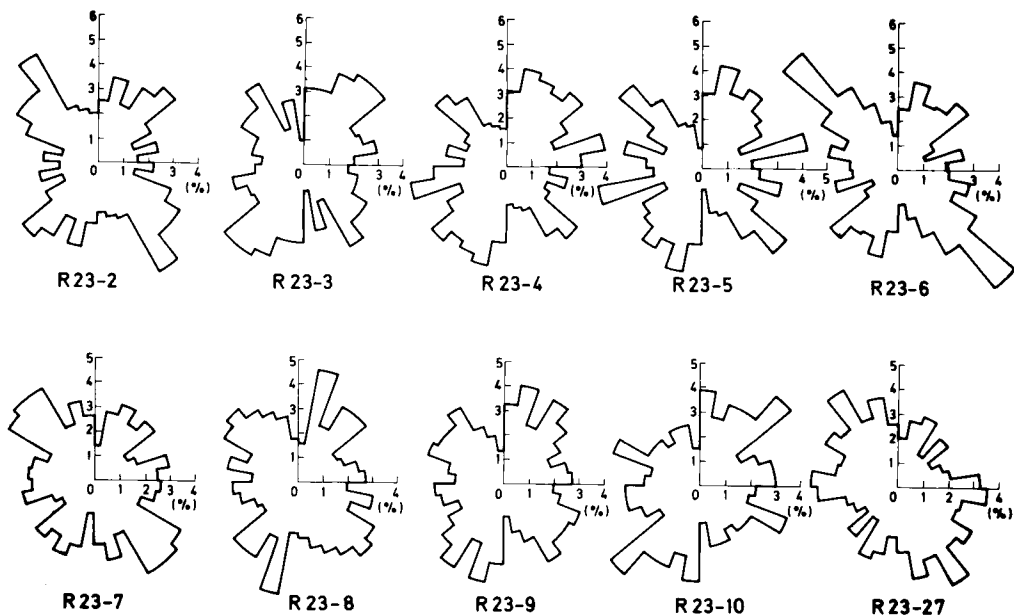


図 6.9 両方向繰返しせん断時の粒子接点角分布の変化 (R23)

R23-2 (以下においては実験番号の R23 を省く) は、垂直応力  $\sigma_N$  のみを加えて一次元圧縮した状態である。分布の対称軸が  $X$  軸方向 ( $\sigma_N$  方向) ではなく、 $-\beta$  側に傾いているのが観察さ

れる。この分布は、 $-\tau$ 方向のせん断に対して有利に抵抗できる形となっている。前節に述べた $\tau$ や $\varepsilon_N$ の非対称性は、この初期構造が、両方向繰返しせん断によっても消えずに、何らかの形で保存されるためであると考えられる。

正の側にせん断すると、 $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ のように変化し、法線方向は正の側に集中する。4からせん断力を減じ、残留ひずみ状態となったのが5である。4における構造を残しているのがわかる。5より負のせん断応力を加えてゆくと、 $6 \rightarrow 7$ のように、負の側に集中した分布となる。5 $\rightarrow$ 6の変化は、集中方向が正負反転するので、かなり大きな変形を要する。したがって、この区間の変形係数は小さい。負の側のピーク7 ( $\gamma_p = -5.71\%$ )からせん断力を減じて、8の残留ひずみ状態に至る。8では、7における構造をかなり保存している。ここから、再び正のせん断応力を加えると、大規模な粒子の再配列が起り、集中方向は負から正へ転換する。この転換には、大きなせん断ひずみを要する。(8 $\rightarrow$ 9 $\rightarrow$ 10)。以下、同様に繰返しを行なって8回目の繰返しにおける、負側のピーク時の分布を示したのが27である。

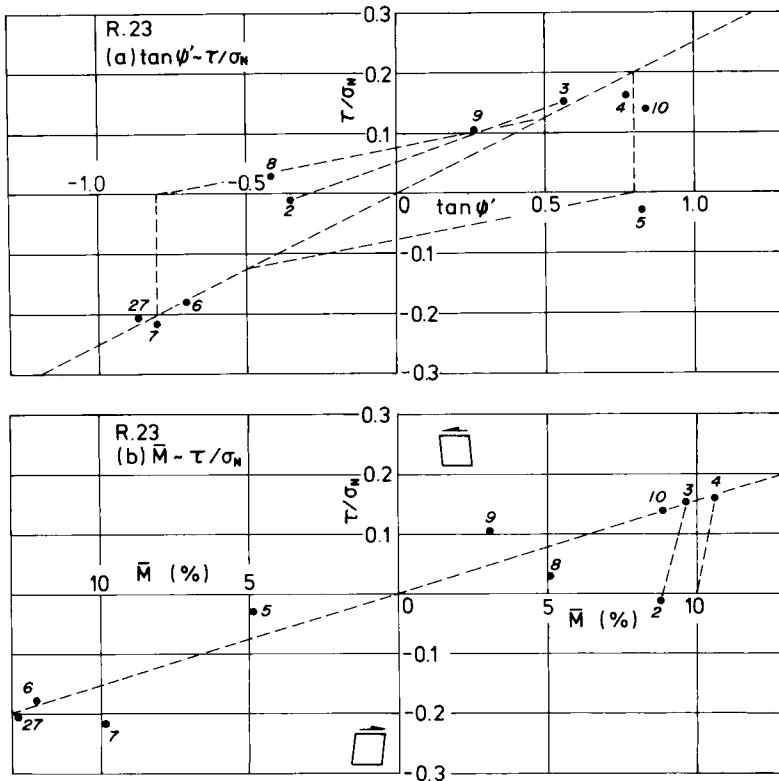


図 6.10 両方向繰返しせん断時の $N_i$ の集中方向および集中度と応力比の関係 (R 23)

図 6.9 の各分布より、法線方向 $N_i$ の集中方向  $\tan \phi'$  および集中度  $\bar{M}$  を求めて、 $\tau/\sigma_N$  との関係を示したのが、図 6.10 である。番号を付した黒丸印が測定値で、破線は変化の経路を示し

ているが、多少の推測を含んでいる。

$\tan \psi'$  および  $\bar{M}$  の変化を、模式図を使って説明しよう。図 6.11 に、ひずみ振幅一定の両方向繰返しせん断における、(a) 応力・ひずみ関係と (b) 応力比～主応力方向、(c) 応力比～集中方向、(d) 応力比～集中度の各関係を模式的に示した。

まず、主応力方向であるが、第 5 章で述べたように、また第 8 章で述べるように、主応力の

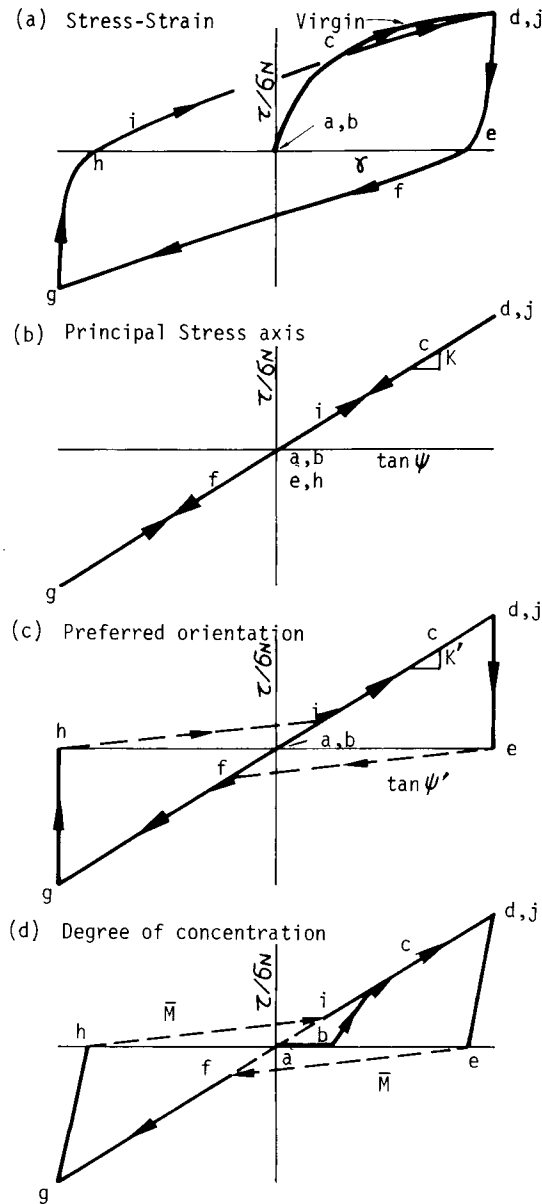


図 6.11 両方向繰返しせん断時の構造変化の模式図

回転角を  $\psi$  とすれば,  $\tan \psi$  は応力比  $\tau/\sigma_N$  と比例関係にある. この関係を図示すれば, (b) のような原点を通る直線となり, 繰返し載荷時には同じ直線上を往復することになる.

$N_i$  の集中方向 ((c) 図) は, ひずみ硬化過程においては, 最大主応力方向にほぼ一致する (a, b  $\rightarrow$  c  $\rightarrow$  d) が, 除荷過程においては, ピークにおける構造をほとんど変えないので,  $N_i$  の集中方向は保存されるであろう (d  $\rightarrow$  e). 反対方向へのせん断が始まると, 負の  $\tau/\sigma_N$  に耐えるように, 粒状体の構造は大きく変化する (e  $\rightarrow$  f). 今回の実験ではこの過程を把握することができなかったが, この e  $\rightarrow$  f あるいは h  $\rightarrow$  i の付近で大幅な再配列がなされるのは, 実験時の観察からも間違いない. この区間では, 応力・ひずみ関係のこう配が小さくなっているのも大幅な再配列の故であろう. e  $\rightarrow$  f で大幅な再配列により, 負の  $\tau/\sigma_N$  に抵抗できる構造に変化すると, 負の側でのひずみ硬化が始まり, 原点を通る直線に沿って, f  $\rightarrow$  g のように変化するものと考えられる. 除荷過程 g  $\rightarrow$  h は弾性的で, 構造は保存され, 再び正の  $\tau/\sigma_N$  が加えられると, 大幅な粒子再配列が生じ, i に至り, i から再び原点を通る直線上を進んで j に至るものと考えられる.

集中度  $\bar{M}$  ((d) 図) も  $\tan \psi'$  と大体同様の経路をたどると考えられる. a  $\rightarrow$  b は鉛直方向に圧縮する段階で, 等方圧縮ではなく,  $K_0$  圧縮となっているため,  $N_i$  は鉛直方向に集中する. せん断応力の負荷によって, さらに集中度は大きくなるが, ある程度せん断が進んでからの  $\bar{M}$  の変化は原点を通る直線に沿って起り, ピークに達する. 除荷の過程は弾性的であるから, ピークにおける構造がほぼ保存されるが, 少し集中度は小さくなるであろう (d  $\rightarrow$  e).

反対方向のせん断に移ると, 負の  $\tau/\sigma_N$  に抵抗するための大幅な粒子再配列が生じるため,  $\bar{M}$  は一旦小さくなり (e  $\rightarrow$  f), f から新たな集中が始まるであろう. 以下, 同様の過程の繰返しとなる.

図 6.10 a, b に示した測定値は, 測定点が少いことと, 比較的  $\tau/\sigma_N$  が小さいこともあって,  $\bar{M}$  も小さく, 誤差がやや大きいこと, などの理由から, 模式図に示した傾向を, 十分に実証し得ていない部分もあるが, 両方向繰返しせん断における構造変化について, 次のように言えるであろう.

両方向繰返しせん断では, せん断応力の向きが反転する度に, 第 1 回目と同様の構造の変化 (集中方向の変化と集中度の変化) を繰返すようである. すなわち, せん断応力の向きが反転する度に, 前の硬化を解消して, 新たなひずみ硬化を繰返しているように思われる. ひずみ硬化とその解消を繰返しつつ定常状態に至り, 応力比・せん断ひずみ関係もループを描きつづける. このことはせん断ひずみに対して言える. 一方体積ひずみに注目すると, 図 6.7 を見てわかるように, 体積ひずみ・せん断ひずみ関係は, 定常状態に至ると同一曲線上を往復するようになって, ループを描かず, 弾性的な挙動を示す. ゆえに, 体積ひずみについては, ひずみ硬化が認められるが, 粒子配列構造の上での,  $\tan \psi'$  や  $\bar{M}$  の変化に, その影響を見出すのは困難

であった。

## 6.4 結 論

(1) 二次元粒状体の一方向繰返しおよび両方向繰返し試験における応力比～せん断ひずみ関係および垂直ひずみ～せん断ひずみ関係から得られる巨視的な諸性質は砂の場合と定性的にきわめてよく一致する。したがって二次元粒状体は微視的にも砂の性質をよく表現し得ることが期待できる。

(2) 一方向繰返しせん断においては、第1回目のせん断におけるひずみ硬化によって生じた粒子構造（ピーク時の  $\tau/\sigma_N$  に応じた集中方向と集中度をもつ）が、除荷によっても、かなり保存されるので、第2回目以降の载荷に対して、わずかのひずみで直ちに抵抗し得る。第2回目以降の集中方向・集中度の変化の幅は小さく、最終的には、同一経路を往復するようになり弾性状態に至る。

(3) 両方向繰返しせん断においては、せん断の向きが変わるごとに、最大主応力方向が正負反転するから、接点の集中方向  $\psi'$  も正負反転する。したがって、大幅な粒子再配列を要し、所要ひずみも第1回载荷時より大きくなる。降伏は正方向と負方向とで独立に生じる。両方向繰返しせん断においては、定常的な状態においても、塑性的な粒子再配列が繰返され、その都度摩擦エネルギーが消費される。両方向繰返しせん断時の体積ひずみ増分は次第に小さくなって、やがて同一経路上を往復する弾性状態に達するようであり、せん断ひずみとは別の傾向がみられる。

(4) 繰返しせん断過程では、最大主応力の方向と  $N_i$  の集中方向とは必ずしも一致していない。すなわちピーク付近では両者はほぼ一致すると考えてよいが、 $\tau/\sigma_N$  の小さいところでは一致しない。

(5) 繰返しせん断の応力・ひずみ曲線の特徴は、粒子構造の変化の仕方によって生じるものである。

## 第7章 粒状体におけるひずみ硬化の機構 および構造異方性に関する二、三の考察

### 7.1 はじめに

前章まで、二次元粒状体の二軸圧縮試験，単純せん断試験，繰返しせん断試験に基づいて，粒状体の変形機構を微視的観点から，実証的に調べてきた。

本章においては，これらの観察結果に基づいて，粒状体のひずみ硬化の機構について，理論的な考察を行なって，応力比—構造式を導くとともに，粒子間力の推定式を提案する。また，粒状体の構造異方性に関する，二・三の考察を行なうことにする。

### 7.2 粒状体における応力の概念

#### 7.2.1 巨視的応力と粒子間力の関係（小西，1977 a, b）

粒状体は一般にばらばらの固体粒子の集合体であって，かなりの間隙を有し，粒状体に作用した荷重は間隙流体と粒子によって支えられる。粒子に伝えられた力は小さな接触面を通じて伝達されるが，この力のことを粒子間力 interparticle force と呼んでいる。

粒子間力を伝達している粒子の内部には，応力が生じている。この応力は，われわれが連続体において定義している応力と同じ意味の応力であるが，供試体に生じる応力とか，地盤内応力という場合の応力とは等しくない。後者は，無数の粒子から成る粒状体を，連続体的に取扱う場合の巨視的平均応力である。

粒状体は連続体ではないからといって，粒子間力や粒子の変位などを用いて，いろいろな計算をするのは実用的ではなく，やはり，応力・ひずみの概念を使うのが便利である。

そこで本節では，粒状体における応力を粒子間力によって定義することにしよう。また，定義された応力と粒子構造との関係についても考察することにする。なお，本節における定義は，すでに第5章において使用し，一応の成果を得ている。

粒状体内に任意の直方体を考えよう（図7.1）。直方体の各稜はそれぞれ  $X$ ， $Y$ ， $Z$  軸に平行で，長さがそれぞれ  $dx$ ， $dy$ ， $dz$  である。したがって  $X$ ， $Y$ ， $Z$  軸のそれぞれに直交する各面の面積は  $\Delta S_x = dy \cdot dz$ ， $\Delta S_y = dz \cdot dx$ ， $\Delta S_z = dx \cdot dy$  である。この直方体は粒子の大きさに比べて十分大きいものとする。また，直方体内部は統計的に一様であるとする。

さて，この直方体における平均応力テンソルは，直方体各面における計9個の平均応力成分を知ることによって定められる。ここで「平均」を付したのは，以下に述べるように，一般に

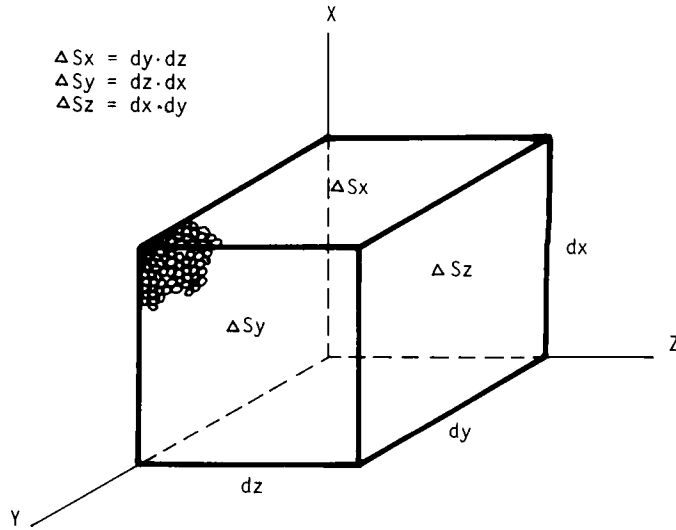
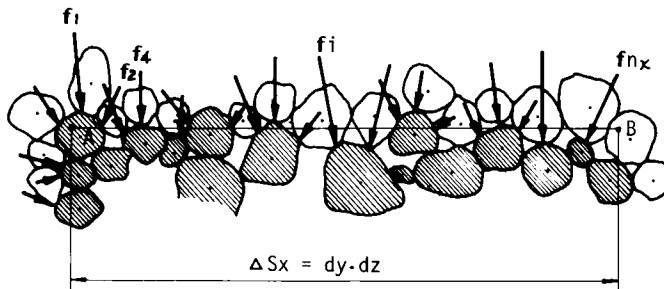


図 7.1 一様な粒状体内部の直方体

一様でない粒子間力の平均によって応力を定義するからである。

いま、 $X$ 軸に垂直な、 $X$ 面上の応力成分について考えることにしよう。 $X$ 面付近の粒子を、簡単のため2次元的に描いたのが図7.2である。直方体面付近の粒子を、直方体に属する粒子と直方体に属さない粒子とに分けて考えよう。直方体に属する粒子とはこの直方体の内部に重心を有する粒子であって、粒子の一部は直方体の外に突出していてもかまわない。図7.2で斜影を施した粒子がこれである。直方体に属する粒子と属さない粒子との接点において、 $X$ 面を介

図 7.2  $X$ 面上の接点と粒子間力の定義

して（ベクトルが $X$ 面を横切って）伝達される粒子間力を $X$ 面上の粒子間力と略称し、それが作用している接点を $X$ 面上の接点と呼ぶことにする。このような接点が面積 $\Delta S_x$ の $X$ 面上に $n_x$ 個あり、粒子間力 $f_i$ （ $i = 1, 2, \dots, i, \dots, n_x$ ）が作用している。この $n_x$ 個の粒子間力のベクトル和を $f_x$ と書くと

$$f_x = \sum_{i=1}^{n_x} f_i \quad (7.1)$$



である。これを  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  方向の成分で表わせれば次のようになる。

$$f_{XX} = \sum_{i=1}^{n_x} f_{iX}, \quad f_{XY} = \sum_{i=1}^{n_x} f_{iY}, \quad f_{XZ} = \sum_{i=1}^{n_x} f_{iZ} \quad (7.2)$$

ここに  $f_{XX}$ ,  $f_{XY}$ ,  $f_{XZ}$  はベクトル和  $f_X$  のそれぞれ  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  方向成分,  $f_{iX}$ ,  $f_{iY}$ ,  $f_{iZ}$  ( $i = 1, 2, \dots, i, \dots, n_x$ ) は個々の粒子間力  $f_i$  のそれぞれ  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  方向成分を表わす。

$X$  面上の平均応力成分を,  $X$  面上の粒子間力を用いて, 次のように定義することにしよう。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_X &\equiv \frac{f_{XX}}{\Delta S_X} = \frac{1}{\Delta S_X} \sum_{i=1}^{n_x} f_{iX} \\ \tau_{XY} &\equiv \frac{f_{XY}}{\Delta S_X} = \frac{1}{\Delta S_X} \sum_{i=1}^{n_x} f_{iY} \\ \tau_{XZ} &\equiv \frac{f_{XZ}}{\Delta S_X} = \frac{1}{\Delta S_X} \sum_{i=1}^{n_x} f_{iZ} \end{aligned} \right\} (7.3)$$

ここに  $\sigma_X$  は  $X$  面上の平均垂直応力成分,  $\tau_{XY}$ ,  $\tau_{XZ}$  はそれぞれ  $Y$ ,  $Z$  方向の平均せん断応力成分である。  $Y$  面,  $Z$  面についても全く同様にして, 次式によって平均応力成分を定義できる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_Y &\equiv \frac{f_{YY}}{\Delta S_Y} = \frac{1}{\Delta S_Y} \sum_{j=1}^{n_y} f_{jY} \\ \tau_{YX} &\equiv \frac{f_{YX}}{\Delta S_Y} = \frac{1}{\Delta S_Y} \sum_{j=1}^{n_y} f_{jX} \\ \tau_{YZ} &\equiv \frac{f_{YZ}}{\Delta S_Y} = \frac{1}{\Delta S_Y} \sum_{j=1}^{n_y} f_{jZ} \end{aligned} \right\} (7.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_Z &\equiv \frac{f_{ZZ}}{\Delta S_Z} = \frac{1}{\Delta S_Z} \sum_{k=1}^{n_z} f_{kZ} \\ \tau_{ZX} &\equiv \frac{f_{ZX}}{\Delta S_Z} = \frac{1}{\Delta S_Z} \sum_{k=1}^{n_z} f_{kX} \\ \tau_{ZY} &\equiv \frac{f_{ZY}}{\Delta S_Z} = \frac{1}{\Delta S_Z} \sum_{k=1}^{n_z} f_{kY} \end{aligned} \right\} (7.5)$$

ここで, 式中の各変数の意味は,  $X$  面で用いたものと同じであって, 添字を読みかえればよい。

式(7.3)~(7.5)が粒状体の平均応力成分と, 粒子間力の関係を与える基本式であって, これら全部を定めることによって粒状体の平均応力テンソルが記述される。偶応力(couple stress)は, 多数の粒子を考えているので, 一般に無視し得て, 応力テンソルは対称となるから, 次式が成り立つ。

$$\tau_{XY} = \tau_{YX}, \quad \tau_{YZ} = \tau_{ZY}, \quad \tau_{ZX} = \tau_{XZ} \quad (7.6)$$

このことは第5章5.5における測定値で, ほぼ満足されているようである。

ここで  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  軸をそれぞれ主応力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  の方向に一致させるよう選んで,  $X \rightarrow 1$ ,  $Y \rightarrow 2$ ,  $Z \rightarrow 3$  と書きかえると次のようになる。

$$\sigma_1 = \frac{1}{\Delta S_1} \sum_{i=1}^{n_1} f_{i1}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\Delta S_2} \sum_{j=1}^{n_2} f_{j2}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{\Delta S_3} \sum_{k=1}^{n_3} f_{k3} \quad (7.7)$$

他のせん断応力項はすべて零になるはずである。すなわち

$$\sum_{i=1}^{n_1} f_{i2} = \sum_{i=1}^{n_1} f_{i3} = \sum_{j=1}^{n_2} f_{j1} = \sum_{j=1}^{n_2} f_{j3} = \sum_{k=1}^{n_3} f_{k1} = \sum_{k=1}^{n_3} f_{k2} = 0 \quad (7.8)$$

以上述べたような方法を用いて、粒子間力を応力に変換し、粒状体の応力状態を調べたのが、第5章図5.12であって、加えた荷重比との対応もよく、本法の妥当性を示すものである。

### 7.2.2 粒子間力と粒子接点角の関係

粒子間接点に作用する粒子間力の作用方向は一般にランダムであるが、接点における接平面に立てた法線の間には次のような条件が成立していなければならない。すなわち、接点においてクーロンの摩擦法則が成り立つとすれば、粒子間力ベクトル  $f$  は接点における法線ベクトル  $N$  を中心とし、粒子間摩擦角の2倍 ( $2\phi_\mu$ ) を頂角とする摩擦円錐の外部に出ることはできない (図7.3 a)。すなわち次式が成立していなければならない。

$$-\frac{f}{|f|} \cdot N \geq \cos \phi_\mu \quad (7.9)$$

ただし  $\phi_\mu \leq 90^\circ$  を考える。2次元の場合には、粒子接点角を  $\beta$ 、粒子間力の方向を  $\theta$  とすれば (図7.3 b)

$$|\theta - \beta| \leq \phi_\mu \quad (7.10)$$

が成立しなければならない。

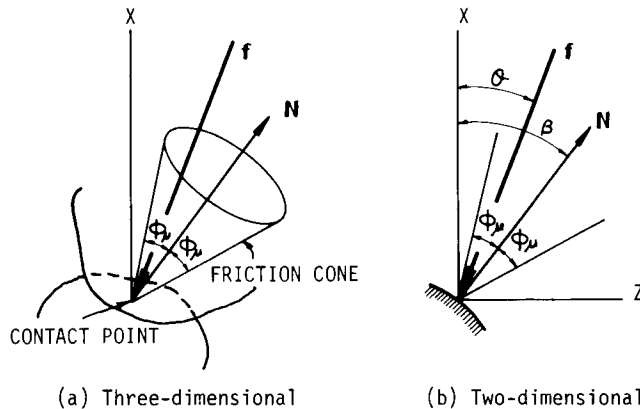


図7.3 摩擦円錐

不等号の成り立っている間は、接点は安定であるが、等号の場合は、この接点において、まさにすべりが生じようとする状態であって、限界つり合い状態といわれる。式(7.9)または(7.10)なる条件の範囲内では、ベクトル  $f$  とベクトル  $N$  のなす角、すなわち、第4章におい

て定義した接点において発揮されている摩擦角、mobilized angle of friction at contact, は  $0$  と  $\phi_\mu$  の間の任意の角をとり得る。すでに第4章4.9, 第5章5.8において述べたように,  $\delta_i$  はほぼ  $-\phi_\mu$  から  $+\phi_\mu$  の範囲に正規分布していることがわかっている。

各接点において上述のような制約があるから粒状体の応力あるいは粒子間力は粒状体の構造と密接な関連があることは明らかである。次にこれについて考察しよう。

## 7.3 粒状体におけるひずみ硬化の機構

### 7.3.1 基本式

粒状体の変形は粒子相互のすべりところがりによって生じる。ころがりが生じている接点においては、この接点のまわりところがりモーメントが存在する。したがって粒子に作用している力の合力はこの接点を通らない。しかしころがり摩擦はすべり摩擦にくらべて非常に小さく ( $1/100$ 程度のオーダーである(曾田, 1954)), 合力の接点からの偏心量もごく小さいと考えられるので、ここでは合力の着力点は近似的に接点にあると仮定する。この場合には、粒子間力  $f_i$  の主応力方向成分  $f_{i1}$ ,  $f_{i2}$  および  $f_{i3}$  は接点  $C_i$  に集中する(図7.4)。

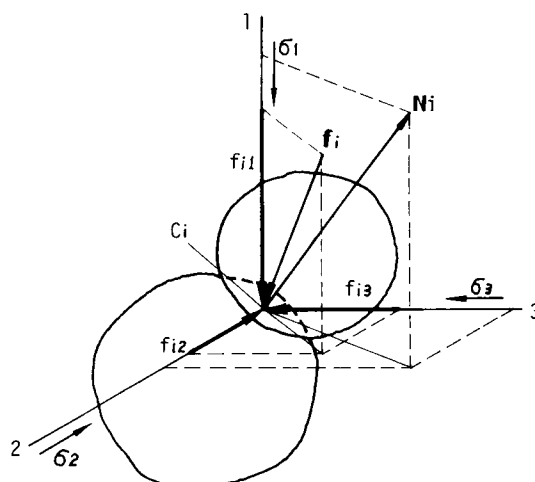


図7.4 接点  $C_i$  に作用する粒子間力  $f_i$  とその成分

粒子間力の大きさおよび方向は、一般にランダムであり、その成分の大きさもランダムなものとなる。しかし、第4章で明らかにしたように、二次元粒状体の粒子間力の平均値は、最大主応力方向、すなわち  $\beta = 0^\circ$  において最大、最小主応力方向  $\beta = 90^\circ$  において最小となっている。また最小主応力を一定に保って、最大主応力を増大させると、粒子間力の平均値は、最小主応力方向の値はあまり変わらず、最大主応力方向の値が増大してゆるやかな変化を示す(第4章4.8.3参照)。このことは、粒子間力の各主応力方向の成分と平均応力テンソルの主値、

すなわち、各主応力との間に比例的な関係があることを示唆しているように思われる。

また、粒子間力と粒子接点角の関係を考えてみると、たとえば最大主応力方向の荷重を支持するのに最も有効な接点は、その法線方向が最大主応力方向と一致する接点つまり  $\beta = 0^\circ$  の接点であり、最も不利なのは  $\beta = 90^\circ$  の接点であることは容易に想像されるところである。したがって、粒子間力の最大主応力方向成分の平均値  $\bar{f}_1$  は  $\beta = 0^\circ$  において最大値をとり、 $\beta$  が大きくなるに従って小さくなり、 $\beta = 90^\circ$  において零となるような  $\beta$  の函数、最も単純な形としてはたとえば  $\cos \beta$  に比例するようなものを考えてやればよいであろう。

また粒状体を構成する粒子は他の粒子と接触して、一つの構造体を形成しているのであるから、各粒子・各接点は他の粒子・他の接点と独立ではあり得ず、常に構造体の構成要素としてふるまうことになる。したがって、ある法線方向を有する接点における粒子間力の平均値も粒子構造と無関係ではあり得ない。

そこで、主値が  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  である平均応力テンソル場における粒子間力の平均値の各主応力方向成分  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$  を次のような函数で表わすことにしよう。

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 &= F_1\{\sigma_1, \beta, E(\alpha, \beta)\} \\ \bar{f}_2 &= F_2\{\sigma_2, \alpha, \beta, E(\alpha, \beta)\} \\ \bar{f}_3 &= F_3\{\sigma_3, \alpha, \beta, E(\alpha, \beta)\}\end{aligned}\quad (7.11)$$

ここに  $E(\alpha, \beta)$  は接点における法線方向の確率密度函数である。  $F_1, F_2, F_3$  の最も単純な形として、小田 (1972 c) と同様に次のように仮定してみることにする。

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 &= k_1 \cdot \sigma_1 \cdot |\cos \beta| \\ \bar{f}_2 &= k_2 \cdot \sigma_2 \cdot |\cos \alpha \cdot \sin \beta| \\ \bar{f}_3 &= k_3 \cdot \sigma_3 \cdot |\sin \alpha \cdot \sin \beta|\end{aligned}\quad (7.12)$$

右辺の三角函数の項は、考えている接点の法線方向の各主応力軸への方向余弦を意味している。また、  $k_1, k_2, k_3$  は粒子構造を表わす比例係数であって、次のようにして決定される。

粒状体の平均応力と粒子間力の関係は、式 (7.3) ~ (7.5)、式 (7.7) によって定義されたが、ここでは主応力について考えるので式 (7.7) を用いることにしよう。

$$\left. \begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{\Delta S_1} \sum_{i=1}^{n_1} f_{i1} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{\Delta S_2} \sum_{j=1}^{n_2} f_{j2} \\ \sigma_3 &= \frac{1}{\Delta S_3} \sum_{k=1}^{n_3} f_{k3}\end{aligned}\right\} (7.7) \text{ bis}$$

$\sigma_1$  式の右辺中  $f_{i1}$  は  $\Delta S_1$  面上の粒子間力の  $\sigma_1$  方向成分であってその平均値  $\bar{f}_{11}$  は (7.11)、(7.12) 両式で考えている粒状体全体における平均値  $\bar{f}_1$  とは一般に異なる。その理由は、一

つの面を想定して、その面上の接点を選ぶ場合に、ある接点を選ばれる確率が接点法線の面の法線方向への射影に比例するからである。たとえば  $\sigma_1$  面上の接点を選ぶときの確率は  $\cos \beta_i$  に比例する。一方 (7.12) によって、粒状体全体での粒子間力の  $\sigma_1$  方向の平均値も  $\cos \beta$  に比例すると仮定しており、平均値の大きい方向において選択の確率も高いことになるから、 $\bar{f}_{11} > \bar{f}_1$  となる。 $\bar{f}_{11}$  の代りに  $\bar{f}_1$  を用いるためには  $\bar{f}_1$  を選択確率  $\cos \beta$  で割って

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_{11} &= \bar{f}_1 / \cos \beta \\ \bar{f}_{22} &= \bar{f}_2 / (\cos \alpha \sin \beta) \\ \bar{f}_{33} &= \bar{f}_3 / (\sin \alpha \sin \beta) \end{aligned} \right\} (7.13)$$

(7.7) 式に (7.12) と (7.13) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{\Delta S_1} \sum_{i=1}^{n_1} k_1 \cdot \sigma_1 \\ \sigma_2 &= \frac{1}{\Delta S_2} \sum_{j=1}^{n_2} k_2 \cdot \sigma_2 \\ \sigma_3 &= \frac{1}{\Delta S_3} \sum_{k=1}^{n_3} k_3 \cdot \sigma_3 \end{aligned} \right\} (a)$$

右辺の総和は各主応力面上のそれぞれ  $n_1, n_2, n_3$  個の接点について行なうが、 $k_1 \cdot \sigma_1, k_2 \cdot \sigma_2, k_3 \cdot \sigma_3$  はこれらの総和の外に出せるから総和は単に接点数に等しくなる。よって式(a)は

$$n_1 k_1 = \Delta S_1, \quad n_2 k_2 = \Delta S_2, \quad n_3 k_3 = \Delta S_3 \quad (b)$$

となり、これより

$$k_1 = \frac{\Delta S_1}{n_1}, \quad k_2 = \frac{\Delta S_2}{n_2}, \quad k_3 = \frac{\Delta S_3}{n_3} \quad (c)$$

が得られる。これを (7.12) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_1 &= \frac{1}{n_1} \sigma_1 \cdot |\cos \beta| \\ \bar{f}_2 &= \frac{1}{n_2} \sigma_2 \cdot |\cos \alpha \cdot \sin \beta| \\ \bar{f}_3 &= \frac{1}{n_3} \sigma_3 \cdot |\sin \alpha \cdot \sin \beta| \end{aligned} \right\} (7.14)$$

となる。ここに  $\bar{n}_1 = n_1 / \Delta S_1, \bar{n}_2 = n_2 / \Delta S_2, \bar{n}_3 = n_3 / \Delta S_3$  で単位面積当りの接点数を表わす。

### 7.3.2 各主応力面上の接点数について

次に式 (7.14) 中の  $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$  はどのような値をとるか考えよう。

粒状体の単位体積当りの接点数は、粒度、粒径、密度などによって変化する。粒状体内に任意の面を考えたとき、この面上の接点数は上記要因の他に粒子配列構造によって左右されるであろう。

粒子数の絶対値を求めることは実験による以外、当面非常に困難と思われるので、ここでは異方的な粒状体の各主応力面 ( $\sigma_1$  面,  $\sigma_2$  面,  $\sigma_3$  面) 上の接点数 (それぞれ  $n_1, n_2, n_3$ ) 相互の比について考察することにしよう。

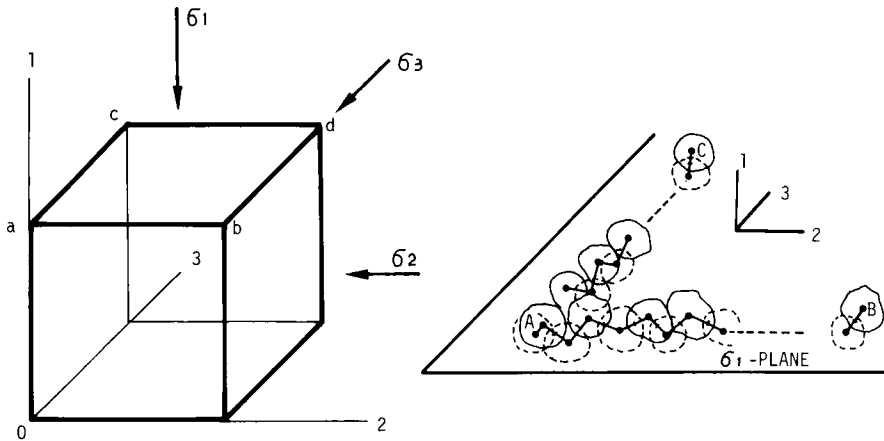
一様な粒状体の中に図 7.5(a) に示すような単位立方体を考えよう。立方体の各稜は、主応力方向に平行にとった各座標軸に平行とする。この粒状体の粒子接点角の確率密度函数を  $E(\alpha, \beta)$  とし、かつ、粒状体が半径  $\bar{r}$  の等しい球から成っていると仮定しよう。

いま、図 7.5(b) に示すように、任意の粒子 A から出発して、隣接接点をランダムに選びつつ次々に結びながら、 $\sigma_2$  軸 (2 軸) 方向に進んで、粒子 B に至るものとする。Horne (1965) が提案した mean projected solid path (以下 m.p.s.p. と略記する) が計算できる。これは、ある方向への、1 粒子当りの平均進行距離であって、その逆数をとると、単位長さ進行する間に通過する粒子数を意味する。そこで、各主応力方向の m.p.s.p. をそれぞれ  $m_1, m_2, m_3$  とし、各主応力方向に単位長さ進む間に通過する粒子数を  $l_1, l_2, l_3$  (それぞれ、1, 2, 3 方向) とすると、

$$l_1 = 1/m_1, \quad l_2 = 1/m_2, \quad l_3 = 1/m_3 \tag{7.15}$$

である。ここに

$$m_1 = 4\bar{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin\beta \cos\beta \, d\alpha \, d\beta$$



(a) Unit cube

(b) m.p.s.p. on  $\sigma_1$ -plane

図 7.5 単位立方体および  $\sigma_1$  面上の m.p.s.p.

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= 4 \bar{r} \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \\ m_3 &= 4 \bar{r} \int_0^\pi \int_0^\pi E(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \end{aligned} \right\} (7.16)$$

であって、 $\bar{r}$  は粒子の平均粒径、 $E(\alpha, \beta)$  は接点における法線方向の確率密度函数であって  
 $2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin \beta \, d\alpha \, d\beta = 1$  である (図 7.9 参照)。

したがって平均的には、 $\sigma_1$  面の一辺  $a$   $b$  に沿って  $l_2 = 1/m_2$  個の粒子が、また、一辺  $d$   $a$  に沿って  $l_3 = 1/m_3$  個の粒子が存在するであろう。粒子数が多くなれば、それに比例して、接点数も多くなろうであろうから、 $\sigma_1$  面上の接点数は、これらの積  $l_2 \cdot l_3$  に比例すると考えることにしよう。 $\sigma_2$  面、 $\sigma_3$  面についても同様に考えて、各面上の接点数を次のように仮定しよう。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \text{ 面上の接点数} &: \bar{n}_1 \propto l_2 \cdot l_3 = 1/(m_2 \cdot m_3) \\ \sigma_2 \text{ 面上の接点数} &: \bar{n}_2 \propto l_3 \cdot l_1 = 1/(m_3 \cdot m_1) \\ \sigma_3 \text{ 面上の接点数} &: \bar{n}_3 \propto l_1 \cdot l_2 = 1/(m_1 \cdot m_2) \end{aligned} \right\} (7.17)$$

各面上の接点数の比をとると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_2} &= \frac{l_2 \cdot l_3}{l_3 \cdot l_1} = \frac{m_3 \cdot m_1}{m_2 \cdot m_3} = \frac{m_1}{m_2} \\ \frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_3} &= \frac{l_3 \cdot l_1}{l_1 \cdot l_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_3 \cdot m_1} = \frac{m_2}{m_3} \\ \frac{\bar{n}_3}{\bar{n}_1} &= \frac{l_1 \cdot l_2}{l_2 \cdot l_3} = \frac{m_2 \cdot m_3}{m_1 \cdot m_2} = \frac{m_3}{m_1} \end{aligned} \right\} (7.18)$$

となり、各面上の接点数の比は、各面の法線方向の m.p.s.p. の比に等しくなる。ゆえに、 $C_n$  を比例定数として

$$\bar{n}_1 = C_n \cdot m_1, \quad \bar{n}_2 = C_n \cdot m_2, \quad \bar{n}_3 = C_n \cdot m_3 \quad (7.19)$$

となる。

なお、小田は、異なる大きさの球から成る粒状体に対して、Horne の m.p.s.p. を拡張して、式 (7.16) と類似の関係式を導いている (小田, 1974)。

ここでは、式 (7.16) ~ (7.18) の関係が、種々の大きさの球でない粒子にも近似的に適用できるものと考えことにする。

### 7.3.3 粒子間力と主応力・粒子構造の関係

式 (7.19)、(7.16) を式 (7.14) に代入すると、粒子間力は主応力と構造との函数として、次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{f}_1 &= \frac{\sigma_1 |\cos \beta|}{4 C_n \bar{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin \beta \cos \beta \, d\alpha \, d\beta} \\
 \bar{f}_2 &= \frac{\sigma_2 |\cos \alpha \sin \beta|}{4 C_n \bar{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta} \\
 \bar{f}_3 &= \frac{\sigma_3 |\sin \alpha \sin \beta|}{4 C_n \bar{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} E(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta}
 \end{aligned} \right\} (7.20)$$

ここに、 $C_n$ は定数、 $\bar{r}$ は平均粒径である。

式(7.20)の関係は、小田の提案式：

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{f}_1 &= k_1 \cdot \sigma_1 \cdot |\cos \beta| \\
 \bar{f}_2 &= k_2 \cdot \sigma_2 \cdot |\cos \alpha \sin \beta| \\
 \bar{f}_3 &= k_3 \cdot \sigma_3 \cdot |\sin \alpha \cdot \sin \beta|
 \end{aligned} \right\} (7.21)$$

$$\left. \begin{aligned}
 k_1 &= \frac{1}{2n \cdot \overline{\Delta S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin \beta \cos \beta \, d\alpha \, d\beta} \\
 k_2 &= \frac{1}{2n \cdot \overline{\Delta S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta} \\
 k_3 &= \frac{1}{2n \cdot \overline{\Delta S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} E(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta}
 \end{aligned} \right\} (7.22)$$

と基本的に同形となっている。ここに  $n$  は各面上の接点数、 $\overline{\Delta S}$  は平均接触面積を表わす。小田の原式の誘導においては、粒状体全体の接点の法線の確率密度函数  $E(\alpha, \beta)$  をそのまま、主応力面上の接点の法線の確率密度函数としていること、各主応力面上の接点数を等しいとしていること、粒子間力の平均値を考える場合に、粒状体全体の平均値の各主応力方向成分が、各主応力面上での粒子間力の平均値に等しいとしていることなどの誤りを含んでいるが、結果的には誤りが相互に打消し合って、正しいものとなっている。式(7.20)は、小田の提案式より厳密な解釈を行なったものとみることもできよう。

#### 7.3.4 軸対称の場合と平面応力の場合

##### (a) 軸対称の場合

普通の三軸圧縮試験のような軸対称応力条件の場合には粒子構造も軸対称と考えられることが多く、 $E(\alpha, \beta)$  は  $\alpha$  に無関係となる。この場合には式(7.14)の代りに

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{f}_1 &= k_1 \cdot \sigma_1 |\cos \beta| = \frac{1}{n_1} \sigma_1 |\cos \beta| \\
 \bar{f}_3 &= k_3 \cdot \sigma_3 |\sin \beta| = \frac{1}{n_3} \sigma_3 |\sin \beta|
 \end{aligned} \right\} (7.23)$$



としてよい. ここで  $k_1, k_3$  は式 (7.16), (7.19) の代りに

$$k_1 = \frac{1}{n_1} = \frac{1}{8 \pi C_n \bar{r} \int_0^{\pi/2} E(\beta) \sin \beta \cos \beta d\beta} \quad (7.24)$$

$$k_3 = \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4 \pi C_n \bar{r} \int_0^{\pi} E(\beta) \sin^2 \beta d\beta}$$

ただし  $E(\beta)$  は次の条件を満足しなければならない.

$$2 \pi \int_0^{\pi} E(\beta) \sin \beta d\beta = 1 \quad (7.25)$$

(b) 平面応力の場合

式 (7.14) の代りに式 (7.23) を用いる. ただし  $\bar{n}_1, \bar{n}_3$  は次のようになる.

$$\frac{1}{\bar{n}_1} = \frac{1}{2 C_n \bar{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) \cos \beta d\beta}$$

$$\frac{1}{\bar{n}_3} = \frac{1}{2 C_n \bar{r} \int_0^{\pi} E(\beta) \sin \beta d\beta} \quad (7.26)$$

ただし  $E(\beta)$  は次式を満足しなければならない.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) d\beta = 1 \quad (7.27)$$

### 7.3.5 応力比—構造関係式

7.2.2において述べたように, 粒子間力のベクトルは, その接点の法線を軸とする摩擦円錐の外に出ることはできない.

粒子間力ベクトルが摩擦円錐に接すると, その接点において, 粒子間のすべりが生じる.

このすべりの条件を, 粒子間力の成分を用いて表わすと, 軸対称あるいは平面応力の場合, 図 7.6 を参照して

$$\frac{\bar{f}_{i1}}{\bar{f}_{i3}} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \phi_\mu - \beta\right) \quad (7.28)$$

式 (7.28) の左辺に, 式 (7.23), (7.24) を代入して整理すると,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{8 \pi C_n \bar{r} \int_0^{\pi/2} E(\beta) \sin \beta \cos \beta d\beta}{4 \pi C_n \bar{r} \int_0^{\pi} E(\beta) \sin^2 \beta d\beta} \tan \beta \tan\left(\frac{\pi}{2} + \phi_\mu - \beta\right) \quad (7.29)$$

この式は Horne による m.p.s.p. の比  $m_1/m_3$  を用いると,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{m_1}{m_3} \tan \beta \tan\left(\frac{\pi}{2} + \phi_\mu - \beta\right) \quad (7.30)$$

となって簡単となる.

この式の右辺を  $\beta$  に関して微分し, 応力比が最小となるような  $\beta$  を求めると

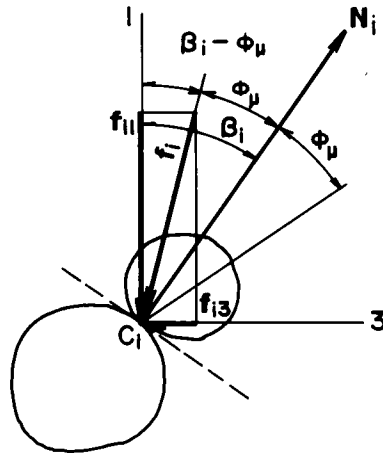


図 7.6 すべり接点における粒子間力

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{\mu}}{2} \quad (7.31)$$

となる。これを(7.30)式に代入すると

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{m_1}{m_3} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{\mu}}{2}\right) \quad (7.32)$$

となる。 $m_1/m_3$ は異方性の程度を表わす指数であって、小田の構造指数(fabric index)  $S_1/S_3$ と同一のものである。また平面応力の場合には、異方度  $A$ が同じ意味をもっている。すなわち

軸対称の場合

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{4\pi n \cdot \overline{A} S \int_0^{\pi/2} E(\beta) \sin\beta \cos\beta d\beta}{2\pi n \cdot \overline{A} S \int_0^{\pi} E(\beta) \sin^2\beta d\beta}$$

平面応力の場合

$$A = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) \cos\beta d\beta}{\int_0^{\pi} E(\beta) \sin\beta d\beta}$$

これらを、それぞれ、式(7.24)、(7.26)と比べると

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{S_1}{S_3} = A$$

であることがわかる。したがって、 $m_1/m_3$ の代りにこれらを使えば次式となる。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{S_1}{S_3} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{\mu}}{2}\right) \quad (7.33)$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = A \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2} \right) \quad (7.34)$$

$m_1/m_3$ ,  $S_1/S_3$ ,  $A$  はいずれも主応力方向を軸とする構造異方性を表わす指数であって、式(7.32)～(7.34)は粒状体の応力比が異方性の強さに比例していることを示すものであり、ひずみ硬化時の変形機構を表わすものである。

砂の場合に、(7.33)式の関係がほぼ満足されることは第4章図4.20で示されるが、二次元粒状体の場合には図4.12に見られるように、変形がある程度進んだ段階において、はじめて、式(7.34)の直線に乗ってくるようである。

### 7.3.6 粒子間力の推定値と測定値との比較

粒子間力の平均値は、これまで述べてきたところにより、応力や粒子構造と密接な関係にあり、その値は7.3.3, 7.3.4において導いた諸式によって推定できる。

粒子間力は、微視的観点から粒状体の変形・強度を考察する場合に、不可欠の要素であるばかりでなく、ロックフィル材などにおける粒子破碎を考える場合にも重要である。

粒子間力の絶対値は、次式を用いて計算される。

$$|f| = \sqrt{\bar{f}_1^2 + \bar{f}_2^2 + \bar{f}_3^2} \quad (7.35)$$

軸対称  $\sigma_2 = \sigma_3$  の場合には、

$$|f| = \sqrt{\bar{f}_1^2 + 2\bar{f}_3^2} \quad (7.36)$$

平面応力の場合には、

$$|f| = \sqrt{\bar{f}_1^2 + \bar{f}_3^2} \quad (7.37)$$

となる。右辺中の各応力成分に、7.3.3, 7.3.4で導いた諸式を代入してやれば、具体的に計算ができる。

ここでは、実験値との対応を調べるため、平面応力の場合について考えよう。

式(7.37)の右辺に(7.23)を代入すると

$$|f| = \bar{f}_0 \sqrt{\cos^2 \beta + \left( \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_3} \right)^2 \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \right)^2 \sin^2 \beta} \quad (7.38)$$

ただし、 $\bar{f}_0 = \sigma_1 / \bar{n}_1$  で、 $\beta = 0^\circ$  における粒子間力の平均値を表わす。また、 $\bar{n}_1 / \bar{n}_3$  は異方度  $A$  に等しい。そこで(7.34)を用いると

$$|f| = \bar{f}_0 \sqrt{\cos^2 \beta + \cot^4 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2} \right) \sin^2 \beta} \quad (7.39)$$

を得る。この式は、粒子間力の期待値を、接点の法線方向の主応力軸からの傾き  $\beta$  の関数として与えるものである。

図7.7に、第4章4.8で得た二軸圧縮試験における粒子間力の平均値と、式(7.39)による

推定値とを示した。破線が推定値であって、実測値に比べてやや大き目の値を与えるが、傾向的には一致していると言えよう。

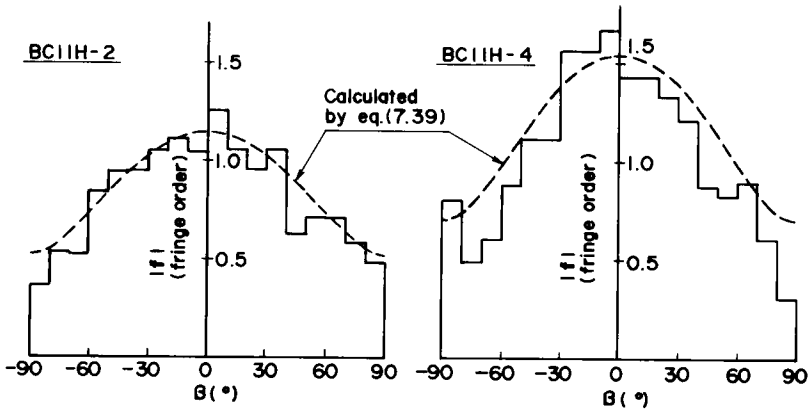


図 7.7 粒子間力の平均値の推定値と測定値の比較

また、単純せん断試験においては、せん断応力の増大につれて、主応力方向が回転するので、(7.38)、(7.39)は、そのままでは適用できないが、主応力軸の回転角 $\psi$ を考慮することによって、(7.39)と同じ形の推定式を導くことができ、推定値は実験値にほぼ一致する(次章 8.5 参照)。

ここに述べた粒子間力の推定値が実験値に傾向的に一致することから、その基本となった粒子間力の配分則式(7.12)の考え方がほぼ妥当であると言えよう。

### 7.3.7 まとめ

粒状体のひずみ硬化過程は、軸対称圧縮においても、主応力軸の回転が生じる単純せん断においても、最大主応力軸方向への、粒子接点の法線の集中によって特徴づけられる。このような集中によって、粒状体の粒子構造の異方性は増大するが、異方性の主軸は、ほぼ、主応力の主軸に一致していることは、第4章～第6章ですでに明らかにした。

本節では、粒子間力の配分則を式(7.12)のように仮定して、粒子間力の平均値を、粒子構造異方性と主応力の函数として求め、実験値と比較して、傾向的な一致をみた。さらに、粒子同志のすべり条件の考えを入れて、応力比と異方度とが、一次比例関係となることを示した。

なお、ここで扱った理論は、基本的に小田(1972c)のものと同じであるが、式(7.12)の係数 $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$ に関して、より厳密な正しい解釈を与えたものである。

## 7.4 粒状体の構造異方性について

### 7.4.1 はじめに

粒状体の構造異方性としては(a)粒子自体の配向性と(b)粒子相互の関係つまり粒子間接点数と

接点における法線方向の分布の異方性の2つが主要なものである。これらのうち、とくに、接点における法線方向の分布が、粒状体のひずみ硬化の機構に関連が深く、ダイレイタンスーや強度にも関係が深い。法線方向の分布は、確率密度函数  $E(\alpha, \beta)$  によってうまく表わすことができる。前節式(7.14)では、接点数の異方性が使われているが、これも Horne の m. p. s. p. の考えを入れると結局  $E(\alpha, \beta)$  で表わすことができるのである。ゆえに本節では、函数  $E(\alpha, \beta)$  に関して二、三の考察を行なうことにする。

函数  $E(\alpha, \beta)$  は普通粒状体全体あるいは代表とみなされた領域に関して定義される。ところが粒状体の異方性の表現法として松岡(1973)などによってなされているように、ある面(たとえば、いわゆるせん断面)上の粒子接点角の分布の偏りが問題とされることがある。また、ある特定の面上の応力と粒子間力を考える場合にその面上での粒子接点角分布が必要となってくる。

そこで、 $E(\alpha, \beta)$  と特定の面上における接点の法線方向の確率密度函数との関係について考察しておこう。そのあと異方性を表わす一種のテンソル量について考えてみることにする。

#### 7.4.2 $E(\alpha, \beta)$ と主応力面上の接点の法線方向の確率密度函数の関係

次に、各主応力面上の接点の確率密度函数  $E_1, E_2, E_3$  が、粒状体全体の接点の確率密度函数  $E$  といかなる関係にあるかについて考察しよう。

単位体積内に  $n$  個の粒子接点があるものとする。これらの接点における法線の方向は粒子接点角  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) で表わされ、 $n \rightarrow \infty$  とするとその確率密度函数は  $E(\alpha, \beta)$  なる連続函数で表わし得る。

この粒状体内部に任意の平面  $P$  (法線方向の方位角  $\alpha_P, \beta_P$ ) を仮想したとき、この平面上の接点に関する法線方向の確率密度  $E_P(\alpha, \beta)$  を求めることにする。粒状体内に1つの平面を想定すると、この平面上の接点が定まる(7.2.1参照)。これは  $E(\alpha, \beta)$  なる確率分布をしている全接点の中から、ある選択を行なって、特定の接点を抽出していることになる。接点の選択が全くのランダムなものならば、選ばれた接点の法線方向の分布  $E_P(\alpha, \beta)$  はもとの  $E(\alpha, \beta)$  に等しくなるはずであるが、方向を有する一つの平面に沿って選択が行われる場合には接点の性質によって選択される確率が異なるので  $E_P(\alpha, \beta)$  と  $E(\alpha, \beta)$  とは一般に等しくない。

これを2次元の例で示そう。ほぼ円形に近い形の粒子1と2とが接点  $i$  において接触している。接点  $i$  の粒子接点角を  $\beta_i$  とする。また粒子1, 2の重心  $G_1, G_2$  と接点  $i$  を結ぶ径の長さをそれぞれ  $r_{1i}, r_{2i}$  とする。粒子が完全な円形であれば  $G_1, G_2$  と接点  $i$  とは一直線上にならび、線分  $\overline{G_1 G_2} = r_{1i} + r_{2i}$  となるが、ここでは近似的に  $\overline{G_1 G_2} \approx r_{1i} + r_{2i}$  であるものとしよう。その法線が

さてこの接点  $i$  が、 $x$  軸と角  $\beta_P$  をなす直線  $P$  によって選択される確率を考えよう。

図7.8に接点  $i$  と直線  $P$  の関係を示す。直線  $P$  を仮想したときに  $P$  が線分  $\overline{G_1 G_2}$  と交われ

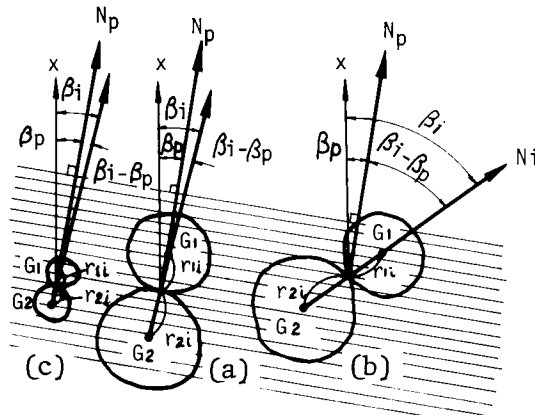


図 7.8 直線  $P$  によってある接点を選択される確率

ば、接点  $i$  は直線  $P$  上の接点に属する訳であるから、接点  $i$  が選択される確率は、 $P$  線が  $\overline{G_1G_2}$  と交わる確率に等価である。  $P$  線が  $\overline{G_1G_2}$  と交わる確率は、図に示すような無数の平行・等間隔な  $P$  線群を考えたとき、この  $P$  線群と  $\overline{G_1G_2}$  との交点の数に比例するであろう。この交点の数は  $r_1, r_2$  が変らないときには、  $\overline{G_1G_2}$  と  $P$  のなす角が大きいほど多く ((a) と (b) を比較されたい)、  $\overline{G_1G_2}$  と  $P$  とのなす角が同じ場合には、  $\overline{G_1G_2}$  の長さが大きいほど多い ((a) と (c))。すなわち、接点  $i$  が直線  $P$  によって選択される確率は、接点  $i$  を構成する 2 粒子重心間の距離  $\overline{G_1G_2}$  の  $P$  線に立てた法線方向 ( $N_p$  方向) への射影、すなわち、

$$(r_{1i} + r_{2i}) \times \cos(\beta_i - \beta_p) \quad (a)$$

に比例するものと考えられる。ここで、  $\overline{G_1G_2} \approx r_{1i} + r_{2i}$  と仮定している。

$E_p(\beta)$  を考える場合に、粒径に関する ( $r_{1i} + r_{2i}$ ) を考慮に入れることは困難であるが、  $\beta_i$  と ( $r_{1i} + r_{2i}$ ) との関係が全くランダムなものであれば、ある ( $r_{1i} + r_{2i}$ ) が現れる確率は  $\beta_i$  に無関係となるであろうから、全体の分布を考える場合にはこの項を考えなくてよいと思われる。

そこで、法線方向の確率密度関数が  $E(\beta)$  である粒状体に  $P$  線を仮想したとき、この面上の接点に関する確率密度関数  $E_p(\beta)$  を次のように表せると仮定する。  $m'$  を係数として

$$E_p(\beta) = m' E(\beta) \cos(\beta - \beta_p) \quad (7.40)$$

三次元の場合にも同様な考えを適用できる。すなわち、  $P$  面の法線方向 (方位角  $\alpha_p, \beta_p$ ) と接点  $i$  の法線方向 (方位角  $\alpha_i, \beta_i$ ) とのなす角を  $\beta'_i$  とすると、

$$E_p(\alpha, \beta) = m E(\alpha, \beta) \cos(\beta') \quad (7.41)$$

と考えることにする。ここに  $m$  は係数である。

ここで、  $\beta'$  と  $\alpha, \beta, \alpha_p, \beta_p$  との間には、球面三角法の公式によって、次の関係がある。

$$\cos \beta' = \cos \beta_p \cos \beta + \sin \beta_p \sin \beta \cos(\alpha - \alpha_p) \quad (7.42)$$

各主応面上の  $E_p(\alpha, \beta)$  を、それぞれ、  $E_1(\alpha, \beta), E_2(\alpha, \beta), E_3(\alpha, \beta)$  で表わし、  $\cos \beta'$

を計算して整理すると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \text{面} \quad E_1(\alpha, \beta) &= mE(\alpha, \beta) \cos\beta \\ \sigma_2 \text{面} \quad E_2(\alpha, \beta) &= mE(\alpha, \beta) \sin\beta \cos\alpha \\ \sigma_3 \text{面} \quad E_3(\alpha, \beta) &= mE(\alpha, \beta) \sin\beta \sin\alpha \end{aligned} \right\} (7.43)$$

ここに、 $m$ は係数である。次に $m$ の値を決めよう。

微小な角度範囲  $\alpha \sim \alpha + d\alpha$ ,  $\beta \sim \beta + d\beta$  に入る接点数は、 $\sigma_1$ 面上で、 $n_1 E_1(\alpha, \beta) \sin\beta d\alpha d\beta$  である。これを全角度範囲(半球)について集めると、 $n_1$ に等しくならなければならない。他の面についても同様のことが言えるから

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E_1(\alpha, \beta) \sin\beta d\alpha d\beta &= 1 \\ \int_0^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E_2(\alpha, \beta) \sin\beta d\alpha d\beta &= 1 \\ \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} E_3(\alpha, \beta) \sin\beta d\alpha d\beta &= 1 \end{aligned} \right\} (7.44)$$

$E(\alpha, \beta)$  については

$$2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin\beta d\alpha d\beta = 1 \quad (7.45)$$

が成立しなければならない。

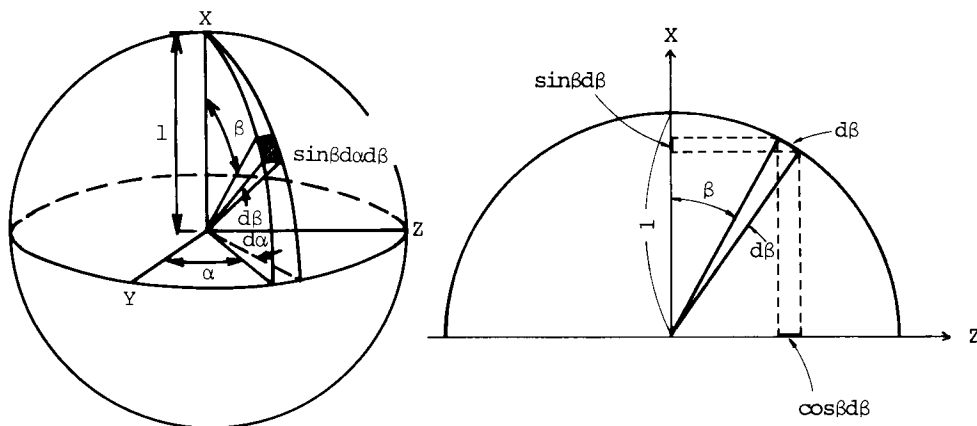


図7.9  $N_i$ の確率密度関数を定義するための単位球

いま、粒状体が統計的に等方体である場合を考えると、 $E(\alpha, \beta)$ は $\alpha, \beta$ に無関係な一定値となる。すなわち、

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin\beta d\alpha d\beta &= \{E(\alpha, \beta)\}_{\text{isotropic}} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta d\beta = 1 \\ \therefore \{E(\alpha, \beta)\}_{\text{isotropic}} &= \frac{1}{4\pi} \end{aligned} \quad (7.46)$$

これを、式(7.43)に代入すると、粒状体が等方的である場合の $E_1, E_2, E_3$ はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{E_1(\alpha, \beta)\}_{\text{isotropic}} &= m \{E(\alpha, \beta)\}_{\text{isotropic}} \times \cos \beta = \frac{m}{4\pi} \cos \beta \\ \{E_2(\alpha, \beta)\}_{\text{isotropic}} &= \frac{m}{4\pi} \cos \alpha \sin \beta \\ \{E_3(\alpha, \beta)\}_{\text{isotropic}} &= \frac{m}{4\pi} \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} (7.47)$$

これらは一定値とはならず， $\alpha, \beta$ の函数となっていることに注意する必要がある．これらを(7.44)式に代入すると，係数 $m$ は

$$m = 4 \quad (b)$$

となる．

ゆえに，式(7.43)は

$$\left. \begin{aligned} E_1(\alpha, \beta) &= 4 E(\alpha, \beta) \cos \beta \\ E_2(\alpha, \beta) &= 4 E(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin \beta \\ E_3(\alpha, \beta) &= 4 E(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} (7.43 a)$$

となる．また式(7.47)は

$$\left. \begin{aligned} \{E_1(\alpha, \beta)\}_{\text{isotropic}} &= (1/\pi) \cos \beta \\ \{E_2(\alpha, \beta)\}_{\text{isotropic}} &= (1/\pi) \cos \alpha \sin \beta \\ \{E_3(\alpha, \beta)\}_{\text{isotropic}} &= (1/\pi) \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} (7.47 a)$$

軸対称の場合には， $E$ は $\alpha$ に無関係となり $E_2 = E_3$ となる．この場合には

$$\left. \begin{aligned} E_1(\beta) &= 4 E(\beta) \cos \beta \\ E_3(\beta) &= 4 E(\beta) \sin \beta \end{aligned} \right\} (7.48)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} 4\pi \int_0^{\pi/2} E(\beta) \sin \beta \, d\beta &= 1 \\ 2\pi \int_0^{\pi/2} E_1(\beta) \sin \beta \, d\beta &= 1 \\ 2\pi \int_0^{\pi} E_3(\beta) \sin \beta \, d\beta &= 1 \end{aligned} \right\} (7.49)$$

なお，構造が等方的ならば，式(7.47 a)より

$$\left. \begin{aligned} \{E_1(\beta)\}_{\text{isotropic}} &= (1/\pi) \cos \beta \\ \{E_3(\beta)\}_{\text{isotropic}} &= (1/\pi) \sin \beta \end{aligned} \right\} (7.50)$$

となる．

次に，二次元の場合には，式(7.40)を用いて

$$\left. \begin{aligned} E_1(\beta) &= m' E(\beta) \cos \beta \\ E_2(\beta) &= m' E(\beta) \sin \beta \end{aligned} \right\} (7.51)$$

ここに， $E, E_1, E_2$ は次式を満足しなければならない．

$$\left. 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) \, d\beta = 1 \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E_1(\beta) d\beta &= 1 \\ \int_0^{\pi} E_2(\beta) d\beta &= 1 \end{aligned} \right\} (7.52)$$

粒状体が等方的であれば、式(7.48)第1式の条件より

$$\{E(\beta)\}_{\text{isotropic}} = 1/2\pi \quad (7.53)$$

である。そうすると、式(7.47)と式(7.48)の第2, 3式を用いて

$$m' = \pi \quad (c)$$

となる。

ゆえに、式(7.51)は

$$\left. \begin{aligned} E_1(\beta) &= \pi E(\beta) \cos \beta \\ E_3(\beta) &= \pi E(\beta) \sin \beta \end{aligned} \right\} (7.51 a)$$

となり、等方体の場合には

$$\left. \begin{aligned} \{E_1(\beta)\}_{\text{isotropic}} &= \frac{1}{2} \cos \beta \\ \{E_3(\beta)\}_{\text{isotropic}} &= \frac{1}{2} \sin \beta \end{aligned} \right\} (7.54)$$

以上、主応力面上の粒子接点角分布を考えてきたが、任意の傾きをもつ面上の分布についても、式(7.40)または(7.41)に $m'$ ,  $m$ の値を代入した次式によって変換することができる。

$$E_p(\beta) = \pi E(\beta) \cos(\beta - \beta_p) \quad (7.40 a)$$

$$E_p(\alpha, \beta) = 4 E(\alpha, \beta) \cos \beta' \quad (7.41 a)$$

ここに $\beta_p$ は二次元の場合の任意面の法線方向角であり $\beta'$ は任意面の法線方向と考えている接点の法線方向とのなす角である。

ある面上での粒子接点角の分布は、粒状体の構造が等方的であっても、一定値をとらず、余弦関数の形をとっていることに注意すべきである。

粒状体の粒子構造を接点の法線方向の分布で表わす場合には、その確率密度関数 $E(\alpha, \beta)$ によって記述される。一方、ある特定の面上における接点の法線方向の分布で粒状体の「構造」を表現する例(たとえば松岡, 1973など)があるが、ある面を定めることによってある特定の方向の接点は選ばれる確率が小さくなり、分布にほとんど現われないことになる。一般にある一つの面上の接点の確率密度だけでは構造を完全に記述することができず、二次元の場合には相異なる傾きをもつ2つの面、三次元の場合には相異なる傾きを有する3つの面に関する確率密度関数を知る必要がある。

このように考えると、一つの面上での粒子接点角分布およびその変化と粒状体の応力・ひずみとの関係を論じた応力-構造式は構造の記述が十分でないため、一般性に欠けるきらいがあ

るように思われる。

さて最後に本節で導いた  $E(\alpha, \beta)$  と  $E_p(\alpha, \beta)$  との関係式の妥当性を調べるために、二次元粒状体の単純せん断試験結果について、 $E(\beta)$  から  $E_p(\beta)$  への変換を行なった例を示すことにしよう。

図 7.10 は第 5 章で述べたゆるづめ粒状体のピーク付近 (L-12) において、 $\beta_p = 0^\circ$  面および  $\beta_p = 86^\circ$  面上で測定した接点の分布 (実線) と、全体の  $E(\beta)$  より、式 (7.51 a) によって推測した値 (点線) を示す。細かな凹凸はあるが全般的に両者はよく合っていると見える。したがって、本節における考え方は基本的に正しいと言えよう。

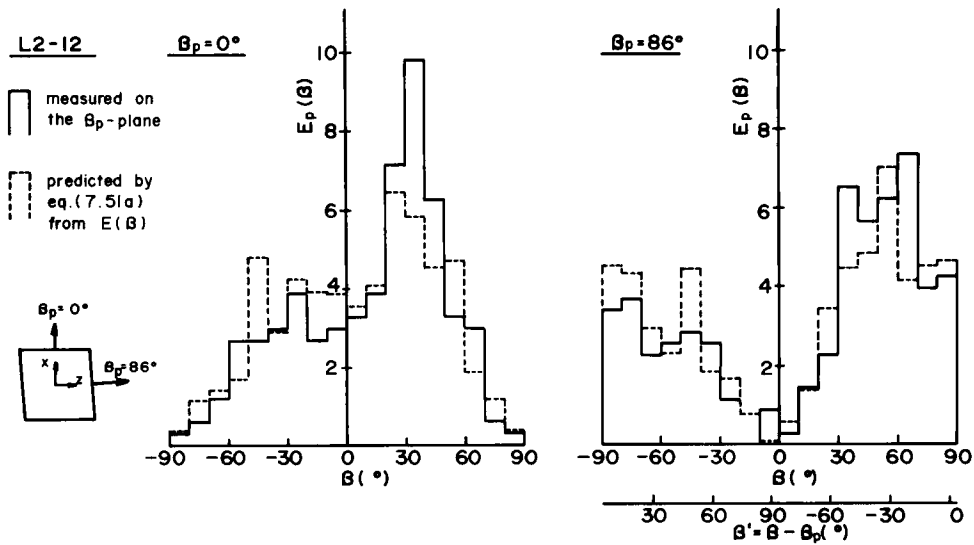


図 7.10  $\beta_p$ -面上の粒子接点角分布の計算値と測定値の比較

### 7.4.3 構造異方性を表わすテンソル量について

いま、粒状体内部に単位立方体を考えよう。立方体の各稜は直角座標  $X, Y, Z$  の各軸に平行とする。  $X$  軸に直交する  $X$  面上には  $n_x$  個の接点があり、その法線方向の確率密度関数は  $E_x(\alpha, \beta)$  である。  $Y$  面、  $Z$  面についても同様にして、  $n_y, E_y(\alpha, \beta); n_z, E_z(\alpha, \beta)$  とする。

$X$  面上の  $n_x$  個の接点における単位法線ベクトル  $N_i$  のベクトル和を  $N^X$  とする。すなわち、

$$N^X = N_1 + N_2 + \dots + N_i + \dots + N_{n_x} = \sum_{i=1}^{n_x} N_i \quad (a)$$

ベクトル  $N^X$  は、  $X$  面上の接点の平均的な法線ベクトルの方向を指している。  $N^X$  の  $X, Y, Z$  方向成分を  $N_{XX}, N_{XY}, N_{XZ}$  とし、  $N_i$  の  $X, Y, Z$  方向成分を  $N_{iX}, N_{iY}, N_{iZ}$  とすると、

$$N_{XX} = \sum_{i=1}^{n_x} N_{iX}, \quad N_{XY} = \sum_{i=1}^{n_x} N_{iY}, \quad N_{XZ} = \sum_{i=1}^{n_x} N_{iZ} \quad (b)$$

である。  $Y$  面、  $Z$  面についても同様にして、

$$\mathbf{N} = \sum_{j=1}^{n_Y} \mathbf{N}_j, \quad \mathbf{N}^Z = \sum_{k=1}^{n_Z} \mathbf{N}_k \quad (\text{a}')$$

$$\left. \begin{aligned} N_{YX} &= \sum_{j=1}^{n_Y} N_{jX}, \quad N_{YY} = \sum_{j=1}^{n_Y} N_{jY}, \quad N_{YZ} = \sum_j^{n_Y} N_{jZ} \\ N_{ZX} &= \sum_{k=1}^{n_Z} N_{kX}, \quad N_{ZY} = \sum_{k=1}^{n_Z} N_{kY}, \quad N_{ZZ} = \sum_{k=1}^{n_Z} N_{kZ} \end{aligned} \right\} (\text{b}')$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} N_{iX} &= \cos \beta_i, \quad N_{iY} = \cos \alpha_i \sin \beta_i, \quad N_{iZ} = \sin \alpha_i \sin \beta_i \\ N_{jX} &= \cos \beta_j, \quad N_{jY} = \cos \alpha_j \sin \beta_j, \quad N_{jZ} = \sin \alpha_j \sin \beta_j \\ N_{kX} &= \cos \beta_k, \quad N_{kY} = \cos \alpha_k \sin \beta_k, \quad N_{kZ} = \sin \alpha_k \sin \beta_k \end{aligned} \right\} (\text{c})$$

であることに留意し,  $n_X, n_Y, n_Z$  が十分大きいものとする, 総和は積分に変換でき, 次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{XX} &= \sum_{i=1}^{n_X} N_{iX} = n_X \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi E_X(\alpha, \beta) \sin \beta \cos \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_{XY} &= \sum_{i=1}^{n_X} N_{iY} = n_X \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi E_X(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_{XZ} &= \sum_{i=1}^{n_X} N_{iZ} = n_X \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi E_X(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_{YX} &= \sum_{j=1}^{n_Y} N_{jX} = n_Y \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E_Y(\alpha, \beta) \sin \beta \cos \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_{YY} &= \sum_{j=1}^{n_Y} N_{jY} = n_Y \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E_Y(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_{YZ} &= \sum_{j=1}^{n_Y} N_{jZ} = n_Y \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E_Y(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_{ZX} &= \sum_{k=1}^{n_Z} N_{kX} = n_Z \int_0^\pi \int_0^\pi E_Z(\alpha, \beta) \sin \beta \cos \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_{ZY} &= \sum_{k=1}^{n_Z} N_{kY} = n_Z \int_0^\pi \int_0^\pi E_Z(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_{ZZ} &= \sum_{k=1}^{n_Z} N_{kZ} = n_Z \int_0^\pi \int_0^\pi E_Z(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \end{aligned} \right\} (7.55)$$

これらを用いると, 式 (a), (a') は, 次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}^X &= N_{XX} \mathbf{e}_X + N_{XY} \mathbf{e}_Y + N_{XZ} \mathbf{e}_Z \\ \mathbf{N}^Y &= N_{YX} \mathbf{e}_X + N_{YY} \mathbf{e}_Y + N_{YZ} \mathbf{e}_Z \\ \mathbf{N}^Z &= N_{ZX} \mathbf{e}_X + N_{ZY} \mathbf{e}_Y + N_{ZZ} \mathbf{e}_Z \end{aligned} \right\} (7.56)$$

ここに,  $\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z$  はそれぞれ  $X, Y, Z$  方向の単位ベクトルである。

したがって,

$$\begin{bmatrix} N_{XX} & N_{XY} & N_{XZ} \\ N_{YX} & N_{YY} & N_{YZ} \\ N_{ZX} & N_{ZY} & N_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

なる9個の量は、一つのテンソル量である。

テンソルの対称性を仮定すると、

$$N_{XY} = N_{YX} \quad , \quad N_{YZ} = N_{ZY} \quad , \quad N_{ZX} = N_{XZ} \quad (7.58)$$

とならなければならない。  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  も  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  も  $E(\alpha, \beta)$  の函数となっているから、函数  $E(\alpha, \beta)$  の形が適当であれば、(7.57)式は対称テンソルとなるであろう。

式(7.57)が対称テンソルであるとすれば、座標軸を適当に選ぶことによって、その主値が求められる。応力やひずみの場合と同様にして、次の行列式を満足するような  $N$  を求めればよい。

$$\begin{vmatrix} N_{XX} - N & N_{XY} & N_{XZ} \\ N_{YX} & N_{YY} - N & N_{YZ} \\ N_{ZX} & N_{ZY} & N_{ZZ} - N \end{vmatrix} = 0$$

得られた3つの根  $N_1, N_2, N_3$  が主値である。この場合には、(7.57)は、

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

となる。座標軸 1, 2, 3 を主軸の方向にとると、式(7.55)で、 $X \rightarrow 1$ ,  $Y \rightarrow 2$ ,  $Z \rightarrow 3$  と変えて、

$$\begin{aligned} N_1 &= N_{11} = n_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi E_1(\alpha, \beta) \sin \beta \cos \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_2 &= N_{22} = n_2 \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E_2(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_3 &= N_{33} = n_3 \int_0^\pi \int_0^\pi E_3(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta \\ N_{12} &= N_{21} = N_{23} = N_{32} = N_{31} = N_{13} = 0 \end{aligned} \quad (7.60)$$

となる。

佐武(1978)は、二次元粒状体の異方性テンソル(anisotropy tensor)として、次の形のもを提案している。

$$\mathbf{J} = 2 \int_0^{2\pi} E(\beta) \mathbf{N} \mathbf{N} \, d\beta \quad (7.61)$$

ここに、 $\mathbf{J}$  は異方性テンソル、 $\mathbf{N}$  は法線ベクトルである。このテンソルは式(7.55)において  $n_x = n_y = n_z = n$ ,  $E_x = E_y = E_z = E$  と置いたものと等しく、その主値は、小田の  $S_1, S_2, S_3$  [式(4.15)], Horne の m. p. s. p.,  $m_1, m_2, m_3$  [式(7.16)] にほぼ等しい。

しかし異方性粒状体においては、一般に  $n_x \neq n_y \neq n_z$  であり、 $E_x \neq E_y \neq E_z \neq E$  であることは、すでに述べてきたところであり、式(7.61)は、この点において疑問が残る。

一方 Gudehus (1968) は応力テンソル  $\sigma_{ij}$  が作用する土の状態を表現するために、Affinität と呼ばれる構造テンソル (Strukturtenor)  $A_{ij}$  を導入している。  $A_{ij}$  はやはり接点法線の確率密度分布により定義されるが、(7.55)の形のものか(7.61)の形のものかは、参照できた論文からはわからなかった。

構造異方性を表わすテンソル式(7.55) [あるいは(7.61)] が対称であるとする、応力テンソルと同じように、楕円体を形成しなければならない。

実測された砂あるいは二次元粒状体の構造に即しての検証および応力テンソル・ひずみテンソルなどとの関係については、今後の検討課題とし、ここでは構造異方性のテンソル表示の可能性を指摘するに留めたい。

## 7.5 結 論

(1) 粒状体における応力は一種の平均応力であって、粒状体内に仮想した単位立方体各面上の応力成分は各面を通して伝達される粒子間力の和によって定義できる。その場合に、粒子間力は、普通、一様でないから、立方体内の平均応力状態を知るために立方体全域に各面に平行な多数の面を仮想して、それらの面上の応力の平均値を求めるべきである。

(2) 粒子間力は一般にランダムであるが、その平均値は応力、粒子構造および粒子接点角の函数であって、式(7.14)で表わすことができる。

(3) 粒状体の変形がある瞬間(時間の代りにひずみを考える)において、ごく少数の接点において生じるすべりによって支配されると仮定すれば、ひずみ硬化過程における応力比と粒子構造の関係が、式(7.32)のように求められる。この式は応力比の増大が  $N_i$  の集中による異方性の増大によるものであることを理論的に示したものと言える。

なおこの式は小田によるものと同じであるが、粒状体の応力や粒子間力に関してより厳密な定義により再構成したものである。

(4) 粒状体の構造異方性は  $N_i$  の確率密度函数  $E(\alpha, \beta)$  によって表わすことができる。この  $E(\alpha, \beta)$  とある面上の接点に関する  $N_i$  の確率密度函数  $E_p(\alpha, \beta)$  とは一般に異なる。

(5) 構造異方性を表わすテンソル量を考え得ることがわかったが、実測値を用いての検証、応力テンソル・ひずみテンソルなどとの関係については今後の課題である。

## 第8章 単純せん断における主応力軸の 回転に関する理論的考察

### 8.1 序 論

土の単純せん断あるいは一面せん断試験において、せん断応力を増加させてゆくと、主応力の方向が変わることはよく知られている。しかし、せん断中の主応力軸方向は、通常の試験機を用いた試験においては求めることができない。したがって、せん断型試験機による結果を、三軸圧縮試験結果と比較する場合や、応力不変量で土の降伏に関する問題を論ずる場合には、主応力軸方向について何らかの仮定が必要となる。

第5章において、二次元粒状体の単純せん断試験における粒子間力を測定し、これを巨視的応力に変換することによって、せん断に伴う応力状態の推移を調べた。その場合に、主応力軸がせん断中に次第に回転してゆく過程を、回転角の推移として定量的に求めるとともに、粒子間接点における接平面に立てた法線  $N_i$  の集中方向が最大主応力方向とほぼ等しくなることを確めた。

Roscoe, Bassett and Cole (1967) は、(初期に)直方体の供試体の各面において、垂直力およびその作用点とせん断応力を測定可能とした単純せん断試験機 (Cambridge SSA MK.5, MK.6) を開発し、これを用いて、砂のせん断時に生ずる主応力の大きさ及び方向、ひずみの主軸などを測定した。彼らは、主応力軸の回転は応力比  $\tau/\sigma_N$  の増大とともに生じ、ピークに達した後は、主応力軸の回転角  $\phi$  がある一定の値に漸近していくことを確めた。また、主応力軸と主ひずみ増分軸とは、ピークに近づくにつれて、一致してくることを確めている。

主応力軸の方向に関して、従来用いられてきた仮定は2つある (Gibson, 1953, Hansen, 1961, Morgenstern and Tchalenko, 1967)。最も普通に用いられている仮説は、土のせん断強度が見掛けのせん断応力 (加えたせん断応力) の方向に発揮されるとするものである。(図 8.1 a)。すなわち、水平面において、応力比  $\tau/\sigma_N$  が最大になると考えるから、応力の最大傾角  $\phi_m$  は

$$\tan \phi_m = \tau / \sigma_N \quad (8.1)$$

となる。すべり面は、水平面と水平面と  $90^\circ - \phi_m$  の角をなす面の2つであり、最大主応力の方向は、鉛直軸 ( $x$  軸) に対して、 $\phi = 90^\circ + \phi_m / 2$  傾くことになる。

一方、Hill (1950) は、見掛けのせん断応力の方向が、最大せん断ひずみ増分の方向になることを指摘し、もし主応力軸と主ひずみ増分軸の方向が一致するならば、見掛けの (加えた) せん断応力は最大せん断応力であると述べている。この場合、

$$\sin \phi_m = \tau / \sigma_N \quad (8.2)$$

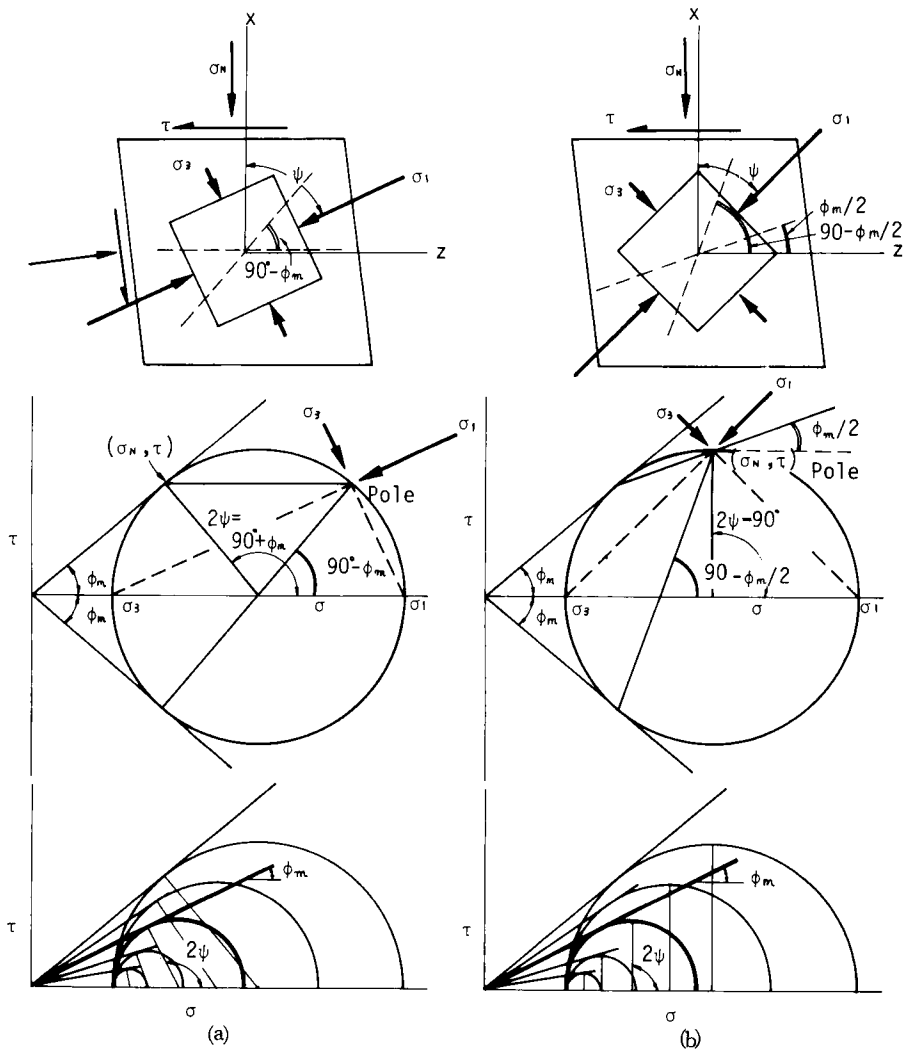


図 8.1 主応力の方向に関する従来の仮説(a)水平面が最大傾角面(b)水平面が最大せん断応力面

であって、すべり面は水平面と  $\phi_m/2$  及び  $90^\circ - \phi_m/2$  傾いていることになり、又、最大主応力の方向は、 $\psi = 45^\circ$  の方向となる (図 8.1, b)。

なお、de Josselin de Jong (1959) は、主応力軸と主ひずみ増分軸とは角  $\phi/2$  をなすと考え、水平面が  $\tau/\sigma_N$  最大面であり、かつ、最大せん断ひずみ増分の面であると仮定している。

これらの仮説においては、いずれも、すべり面を考えたモールの考え方に従っている。したがって、破壊時の主応力方向のみが考慮の対象となっている。

いま、せん断前の圧縮段階を考えると、一般にせん断箱や補強メンブラン等は、側方変位をほとんど許さないから、壁面摩擦がないものとするれば、応力状態はいわゆる  $K_0$  状態に近いも

のとなっている。この場合には、近似的に水平面上の垂直応力  $\sigma_N$  は最大主応力、鉛直面上の垂直応力は最小主応力で、 $K_0 \sigma_N$  と考えられる。すなわち、最大主応力の方向は、せん断前には、水平面から測って  $90^\circ$ 、鉛直軸から測って  $\psi = 0^\circ$  となっている。

上述の2つの仮説を採用するならば、最大主応力の方向  $\psi$  はせん断応力が加えられるや否や、 $0^\circ$  から  $45^\circ$  に不連続的に変化し、その後のせん断応力の増大に伴って、図 8.1 a では、 $45^\circ$  から  $45^\circ + \phi/2$  まで変化することになり、b では  $45^\circ$  のまま一定ということになる。いずれの場合も、圧縮過程とせん断過程がうまくつながらず、不自然である。これは、予めすべり面を想定した考え方に問題があるように思われる。Rowe (1962) が述べているように、すべり面というものは破壊の結果生じるものであって原因ではないのである。

したがって単純せん断あるいは一面せん断試験下における砂の変形挙動の解明のためには、主応力軸方向及び主ひずみ増分方向を、より合理的に見出す必要がある。

本章においては、第5章において述べた、二次元粒状体模型の単純せん断試験及び砂の一面せん断試験の結果に基づいて、小田・小西(1974 a, c)が行なった理論的研究を一部修正して述べることにする。

## 8.2 粒子間力，粒子構造と応力の関係

議論を簡単にするため、2次元粒状体を用いて、考察を進めることにする。

供試体のせん断領域内に、一辺の長さが1の単位正方形要素を考える(図 8.2 の a b c d)。

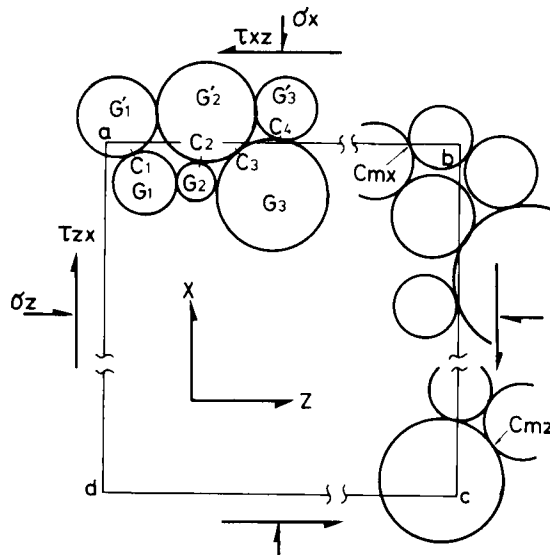


図 8.2 粒状体内の単位正方形

重心が一辺 a b の下、言いかえると正方形の中にある粒子  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  などは、接点  $C_1$ 、



$C_2, C_3, \dots, C_{n_x}$ において、重心を  $ab$  の上方に有する粒子  $G_1', G_2', G_3'$  などと接触している。 $n_x$  は、一辺  $ab$  ( $X$  面) を介して接触している接点数である。同様に辺  $bc$  ( $Z$  面) に関しては接点数は  $n_z$  である。 $X$  面上の接点、及び、 $Z$  面上の接点における接平面に立てた法線  $N_i$  の確率密度関数を、それぞれ  $E_x(\alpha, \beta), E_z(\alpha, \beta)$ , で表わす。

接点  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n_x}$  において粒子  $G_1', G_2', \dots$  から、粒子  $G_1, G_2, \dots$  に伝達される粒子間力を  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n_x}$  としその  $X, Z$  方向成分を  $f_{x1}^x, f_{x2}^x, f_{x3}^x, \dots, f_{xn_x}^x; f_{z1}^z, f_{z2}^z, f_{z3}^z, \dots, f_{zn_x}^z$  と書くと線分  $ab$  ( $X$  面) 上の粒子間力の  $x$  及び  $z$  方向成分の総和はそれぞれ  $\sum_{i=1}^{n_x} f_{xi}^x$  及び  $\sum_{i=1}^{n_x} f_{zi}^z$  となる。

ここに  $f$  に付した上付添字はこれらが  $X$  面上の力に関するものであることを示し、下付添字は第 1 のものが成分の方向を、第 2 のものが接点の番号を意味している。

粒子数が十分に多いならば、線分  $ab$  上の垂直応力及びせん断応力は、線分  $ab$  の長さは 1 であるから、

$$\sigma_x \equiv \sigma_N^x = \sum_{i=1}^{n_x} f_{xi}^x, \quad \tau_{xz} = \tau = \sum_{i=1}^{n_x} f_{zi}^z \quad (8.3)$$

となる。応力  $\sigma, \tau$  に付した添字は、第 1 のものが考えている面を、第 2 のものが作用方向を示している。同様にして線分  $bc$  上では

$$\sigma_z \equiv \sigma_N^z = \sum_{k=1}^{n_z} f_{zk}^z, \quad \tau_{zx} = \sum_{k=1}^{n_z} f_{xk}^x \quad (8.4)$$

である。要素はつり合い状態にあることから

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (8.5)$$

でなければならない。

なお、応力の符号は、垂直応力は圧縮を正ととり、せん断応力は、要素を反時計まわりに回転させようとするとき正とする。

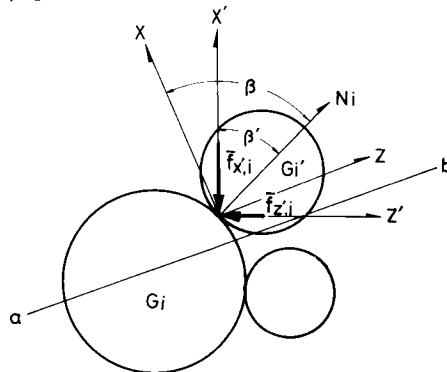


図 8.3 粒子間力の主応力方向成分  
 $X'$ : 最大主応力方向  
 $Z'$ : 最小主応力方向

次に、主応力の作用方向、すなわち、主応力軸の方向を $X'$ 、 $Z'$ とし、主応力軸 $X'$ の $X$ からの傾きを $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq \pi/2$ ) で表わそう ( $\psi$  は時計まわりを正とする)。

接点 $C_i$ に作用している粒子間力の $X'$ 、 $Z'$ 方向成分を考えよう (図 8.3)。これらを $f_{x'i}$ 、 $f_{z'i}$ と記す。又、この接点の法線 $N_i$ の方向は $X'$ から $\beta'$ 傾いているものとする。すると、次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \beta_i &= \beta'_i + \psi \\ f_{x'i} &= -f_{z'i} \sin \psi + f_{x'i} \cos \psi \\ f_{z'i} &= f_{z'i} \cos \psi + f_{x'i} \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

微視的変形は、粒子相互のすべりによって生じるものとする。すると、接点 $C_i$ における垂直応力とせん断応力の比は、 $\tan \phi_\mu$ の値を越えることはできないから、粒子間のすべりは、次式が満足されたときに生じる。

$$0 \leq \beta_i \leq \pi/2 \quad \text{又は} \quad \pi \leq \beta \leq 3\pi/2 \quad \text{のとき,}$$

$$\frac{f_{x'i}^s}{f_{z'i}^s} = \tan \left( \frac{\pi}{2} + \phi_\mu - \beta'_i \right) \quad (8.7)$$

$$\pi/2 \leq \beta_i \leq \pi \quad \text{又は} \quad 3\pi/2 \leq \beta \leq 2\pi \quad \text{のとき}$$

$$\frac{f_{x'i}^s}{f_{z'i}^s} = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \phi_\mu - \beta'_i \right) \quad (8.8)$$

ただしこの場合のすべりは、上側粒子が下側粒子の上を右側又は左側にすべり降りるような場合に限定している。

ここに、上付添字の $s$ はすべり接点を表わす。又、 $\phi_\mu$ は粒子間(物理)摩擦角である。

さて、粒子間力の主応力方向成分 $f_{x'i}$ 、 $f_{z'i}$ は、一般に、ランダムな値をとるが、その平均値 $\bar{f}_{x'i}$ 、 $\bar{f}_{z'i}$ に着目すると、ある法則が成り立っていることは、第4章、第7章で述べた。

すなわち、次のような力の配分則が成立している。

$$\left. \begin{aligned} |\bar{f}_{x'i}| &= k_1 \cdot \sigma_1 \cdot \cos \beta' \\ |\bar{f}_{z'i}| &= k_3 \cdot \sigma_3 \cdot \sin \beta' \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

ここに $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ はそれぞれ $X'$ 、 $Z'$ 方向の主応力であり、 $k_1$ 及び $k_3$ は粒状体の構造によって決まる値である。

式(8.9)を、式(8.7)及び(8.8)に代入すると、平均的な粒子間力が生じている接点において、すべりを生じさせる応力比が次のように表わされる。

$$0 \leq \beta < \pi/2 \quad \text{あるいは} \quad \pi \leq \beta \leq 3\pi/2 \quad \text{のとき}$$

$$\left( \frac{k_1 \cdot \sigma_1}{k_3 \cdot \sigma_3} \right)_{\text{at sliding contact}} = \tan \beta' \cdot \tan \left( \frac{\pi}{2} + \phi_\mu - \beta' \right) \quad (8.10)$$

$\pi/2 \leq \beta \leq \pi$ あるいは  $3\pi/2 \leq \beta \leq 2\pi$  のとき

$$\left(\frac{k_1 \cdot \sigma_1}{k_3 \cdot \sigma_3}\right)_{\text{at sliding contact}} = \tan \beta' \tan \left(\frac{\pi}{2} - \phi_\mu - \beta'\right) \quad (8.11)$$

第4章, 第5章において示したように, すべりが生じている接点は, ある任意の時点において, ごく少数であると考えられる. したがって, 式(8.10), (8.11)を満足するような, 少数の限界状態にある接点におけるすべりによって, 粒状体全体の変形が進行し, 加えられる応力に対して, より安定な粒子構造へ変化してゆくものと考えられる.

ある粒子構造の下で, 最もすべり易い方向の接点はいかなる接点であろうか. 最もすべり易いということは, 最小の応力比  $\sigma_1/\sigma_3$  で, すべり条件式(8.10)又は(8.11)を満足することであるから, 最もすべり易い方向の接点は, 式(8.10)又は(8.11)を最小にするような  $\beta'$  をもつ接点と考えてよいであろう. これを計算してみると, 式(8.10), (8.11)の右辺を最小にする  $\beta'$  の値は, それぞれ,  $\beta' = \pi/4 + \phi_\mu/2$  及び  $\beta' = -(\pi/4 + \phi_\mu/2)$  となり, これらを式(8.10)及び(8.11)に代入すると, 同一の式

$$\left(\frac{k_1 \cdot \sigma_1}{k_3 \cdot \sigma_3}\right)_{\text{at sliding contact}} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2}\right) \quad (8.12)$$

が得られる.

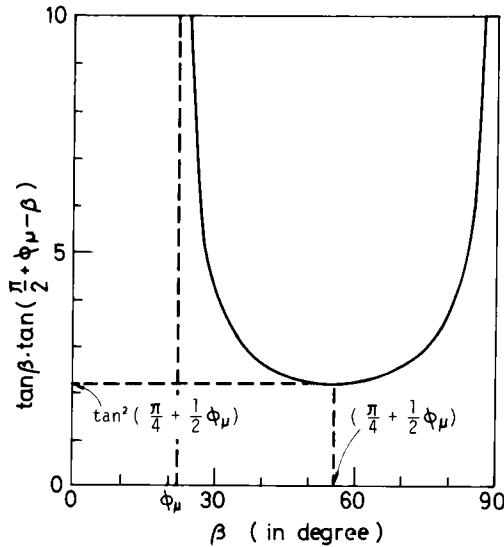


図 8.4  $\tan \beta' \cdot \tan(\pi/2 \pm \phi_\mu - \beta)$  と  $\beta'$  の関係 (小田, 1975)

小田(1975)によれば, 式(8.10), (8.11)の右辺は  $\beta'$  に対して図8.4のような変化をする. ここで注目すべきことは, 極値を与えるような  $\beta'$ , すなわち,  $\beta' = \pi/4 + \phi_\mu/2$  付近では,  $\beta'$  が少し位変化しても, 式(8.10)(8.11)の右辺の値はあまり変化しない点である. このことは, 粒子間のすべりが極値を与える  $\beta' = \pm(\pi/4 + \phi_\mu/2)$  の接点のみな

らず、その近傍の  $\beta'$  の接点においても生じている場合にも、式 ( 8.12 ) が近似的に成立し、粒子構造を表わす指数  $k_1/k_3$  と応力比  $\sigma_1/\sigma_3$  との関係論ずるのに使えることを意味している。

以上は、粒子間力の主応力軸方向への分力を用いて、議論を進めてきたが、ここで、粒子間力の鉛直 ( X ) 方向及び水平 ( Z ) 方向への分力、それぞれ  $\bar{f}_{xi}$ 、 $\bar{f}_{zi}$  に直しておこう。式 ( 8.6 ) に式 ( 8.9 ) を代入すれば、 $\beta' = \beta - \psi$  であることを考えて次式が得られる。

$$\begin{aligned}\bar{f}_{xi} &= (k_1 \sigma_1 \cos^2 \psi + k_3 \sigma_3 \sin^2 \psi) \cos \beta + \frac{1}{2} \sin 2\psi (k_1 \sigma_1 - k_3 \sigma_3) \sin \beta \\ \bar{f}_{zi} &= (k_1 \sigma_1 \sin^2 \psi + k_3 \sigma_3 \cos^2 \psi) \sin \beta + \frac{1}{2} \sin 2\psi (k_1 \sigma_1 - k_3 \sigma_3) \cos \beta\end{aligned}\quad ( 8.13 )$$

式 ( 8.4 ) によれば、 $\sigma_N = \sum_{i=1}^{n_x} f_{xi}^x$ 、 $\tau = \sum_{i=1}^{n_x} f_{zi}^x$  である。 $n_x$  個の接点  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n_x}$  のうち、法線が角  $\beta$  と角  $\beta + d\beta$  の間に入る接点の数は、 $2 n_x E_x(\beta) d\beta$  である。ここに、 $E_x(\beta)$  は X 面を介して力を伝達する接点の法線方向の確率密度函数である。これらの接点において伝達される粒子間力の平的平均の X, Z 方向成分を  $\bar{f}_x^x$ 、 $\bar{f}_z^x$  とすると、 $\bar{f}_{xi}$ 、 $\bar{f}_{zi}$  との間には、前章式 ( 7.13 ) と同様の関係が成り立つものとする。すなわち

$$\begin{aligned}\bar{f}_x^x &= \bar{f}_{xi} / \cos \beta \\ \bar{f}_z^x &= \bar{f}_{zi} / \cos \beta\end{aligned}\quad ( 8.14 )$$

を仮定する。同様にして Z 面上の粒子間力については

$$\begin{aligned}\bar{f}_x^z &= \bar{f}_{xi} / \sin \beta \\ \bar{f}_z^z &= \bar{f}_{zi} / \sin \beta\end{aligned}\quad ( 8.15 )$$

を仮定する。

すると、式 ( 8.4 )、( 8.13 )、( 8.14 ) から

$$\begin{aligned}\sigma_x^x &= \sum_{i=1}^{n_x} f_{xi}^x = \sum_{-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2} 2 n_x E_x(\beta) \frac{\bar{f}_{xi}}{\cos \beta} \Delta \beta \\ &= n_x \left\{ (k_1 \sigma_1 \cos^2 \psi + k_3 \sigma_3 \sin^2 \psi) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 E_x(\beta) d\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (k_1 \sigma_1 - k_3 \sigma_3) \sin 2\psi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 E_x(\beta) \tan \beta d\beta \right\}\end{aligned}\quad ( 8.16 )$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \sum_{i=1}^{n_x} f_{zi}^x = \sum_{-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2} 2 n_x E_x(\beta) \frac{\bar{f}_{zi}}{\cos \beta} \Delta \beta \\ &= n_x \left\{ (k_1 \sigma_1 \sin^2 \psi + k_3 \sigma_3 \cos^2 \psi) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 E_x(\beta) \tan \beta d\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (k_1 \sigma_1 - k_3 \sigma_3) \sin 2\psi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 E_x(\beta) d\beta \right\}\end{aligned}\quad ( 8.17 )$$

同様にして、Z 面 ( $\overline{bc}$ , 図 8.2 ) における応力は

$$\begin{aligned}\sigma_N^z &= \sum_{k=1}^{n_z} f_{zi}^z = \sum_{0 \leq \beta \leq \pi} 2 n_z E_z(\beta) \frac{\overline{f_{zi}}}{\sin \beta} \Delta \beta \\ &= n_z \left\{ (k_1 \sigma_1 \sin^2 \psi + k_3 \sigma_3 \cos^2 \psi) \int_0^\pi 2 E_z(\beta) d\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (k_1 \sigma_1 - k_3 \sigma_3) \sin 2\psi \int_0^\pi 2 E_z(\beta) \cot \beta d\beta \right\} \quad (8.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= \sum_{k=1}^{n_z} f_{xi}^z = \sum_{0 \leq \beta \leq \pi} 2 n_z E_z(\beta) \frac{\overline{f_{xi}}}{\sin \beta} \Delta \beta \\ &= n_z \left\{ (k_1 \sigma_1 \cos^2 \psi + k_3 \sigma_3 \sin^2 \psi) \int_0^\pi 2 E_z(\beta) \cot \beta d\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (k_1 \sigma_1 - k_3 \sigma_3) \sin 2\psi \int_0^\pi 2 E_z(\beta) d\beta \right\} \quad (8.19)\end{aligned}$$

さらに、前章式 ( 7.40 a ) の関係

$$\begin{aligned}E_x(\beta) &= \pi E(\beta) \cos \beta \\ E_z(\beta) &= \pi E(\beta) \sin \beta\end{aligned} \quad (8.20)$$

および、前章式 ( 7.26 ) で、 $1 \rightarrow X$ ,  $3 \rightarrow Z$  として、

$$\begin{aligned}n_x &= 2 C_n \bar{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) \cos \beta d\beta \\ n_z &= 2 C_n \bar{r} \int_0^\pi E(\beta) \sin \beta d\beta\end{aligned} \quad (8.21)$$

を仮定すれば、式 ( 8.16 ) ~ ( 8.19 ) は

$$A_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) \cos \beta d\beta, \quad A_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) \sin \beta d\beta \quad (8.22)$$

$$A_3 = \int_0^\pi E(\beta) \sin \beta d\beta \quad A_4 = \int_0^\pi E(\beta) \cos \beta d\beta$$

と置くと次のようになる。

$$\begin{aligned}\sigma_N^x &= 4 \pi C_n \bar{r} A_1 \left\{ (k_1 \sigma_1 \cos^2 \psi + k_3 \sigma_3 \sin^2 \psi) A_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (k_1 \sigma_1 - k_3 \sigma_3) \sin 2\psi \cdot A_2 \right\} \quad (8.16 a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= 4 \pi C_n \bar{r} A_1 \left\{ (k_1 \sigma_1 \sin^2 \psi + k_3 \sigma_3 \cos^2 \psi) A_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (k_1 \sigma_1 - k_3 \sigma_3) \sin 2\psi A_1 \right\} \quad (8.17 a)\end{aligned}$$

$$\sigma_N^z = 4 \pi C_n \bar{r} A_3 \left\{ (k_1 \sigma_1 \sin^2 \psi + k_3 \sigma_3 \cos^2 \psi) A_3 + \frac{1}{2} (k_1 \sigma_1 - k_3 \sigma_3) \sin 2\psi A_4 \right\} \quad (8.18 a)$$

$$\tau_{zx} = 4 \pi C_n \bar{r} A_3 \left\{ k_1 \sigma_1 \cos^2 \psi + k_3 \sigma_3 \sin^2 \psi \right\} A_4 + \frac{1}{2} (k_1 \sigma_1 - k_3 \sigma_3) \sin 2\psi A_3 \quad (8.19 a)$$

これらの各式と小田・小西(1974 a, c)における諸式との差異は, X面とZ面における接点数を一般には異なったものとしている点にある。

### 8.3 主応力軸の回転角

単位正方形はつり合い状態にあるので, 偶応力はないと考えると,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ とならなければならない。

そこで, 式(8.17 a)と(8.19 a)とを等置して,  $\tan \psi$  について整理し, (8.12) 式を考慮すると, 次の  $\tan \psi$  に関する二次式が得られる。

$$\begin{aligned} & (A_1 A_2 K - A_3 A_4) \tan^2 \psi + (A_1^2 - A_3^2) (K - 1) \tan \psi \\ & + (A_1 A_2 - A_3 A_4 K) = 0 \end{aligned} \quad (8.23)$$

ここに,  $K \equiv \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2} \right)$

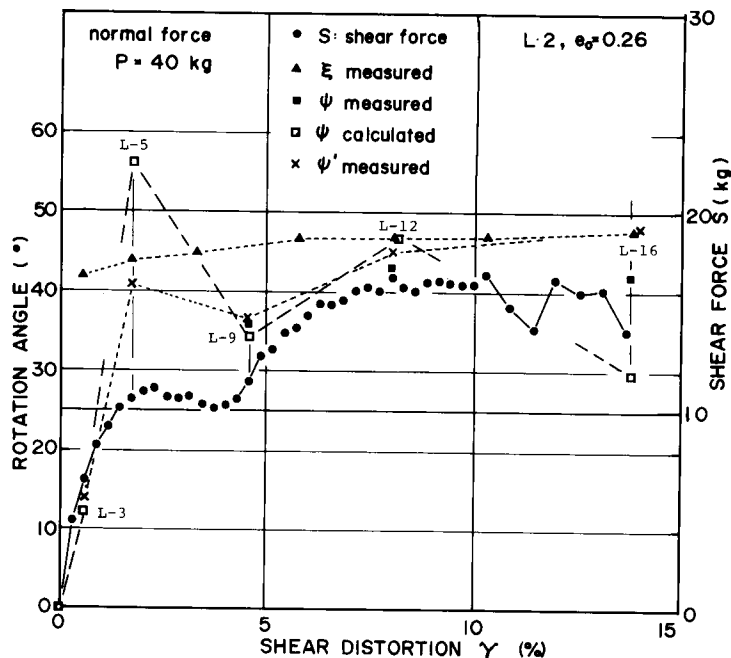


図 8.5 主応力軸の回転角  $\psi$ ,  $N_i$  の集中方向  $\psi'$ , 主ひずみ増分軸の回転角  $\xi$ , せん断力  $S$  とせん断ひずみ  $\gamma$  の関係 (ゆるづめの二次元粒状体, L2)

接点の法線 $N_i$ の確率密度函数 $E(\beta)$ の値は、第5章に述べたようにして決めることができるので、(8.23)式を $\tan \psi$ について解き、 $\tan \psi \geq 0$ の値をとれば、主応力軸の回転角 $\psi$ を求めることができ、主応力軸の方向が定められる。

図8.5に、このようにして求めた主応力の回転角 $\psi$ の計算値と、第5章で粒子間力を基にしたモールの応力円(図5.12a)より求めた $\psi$ の実測値を示し、あわせて、主ひずみ増分軸の回転角 $\xi$ と $N_i$ の集中方向 $\psi'$ をも示してある(L2供試体)。

式(8.20)による計算値は、L3, L9, L12の各点では、実測値ともほぼ一致する妥当な値を示しているが、L5ではかなり過大、L16ではかなり過小の値を与えている。この原因として考えられることは、式(8.20)における $A_1 \sim A_4$ および $K$ で計算される各項の係数値が、 $N_i$ の頻度分布の凹凸によって敏感に左右される点である。また、各係数値の大小関係によっては、式(8.20)の根が求まらない場合も生じる。これは使用したデータの精度の問題でもあろうが、式(8.20)そのものの問題点でもある。

この図を、Cole(1967)による砂での実測値(図8.6)と比較対照しながら見ると、主応力軸の方向は、応力比 $\tau/\sigma_N$ の増大とともに徐々に生じていることがわかる。従来の仮説に従うと、せん断が始まるや否や $\psi = 45^\circ$ にならなければならないが、これらの図はそうならないことを示している。

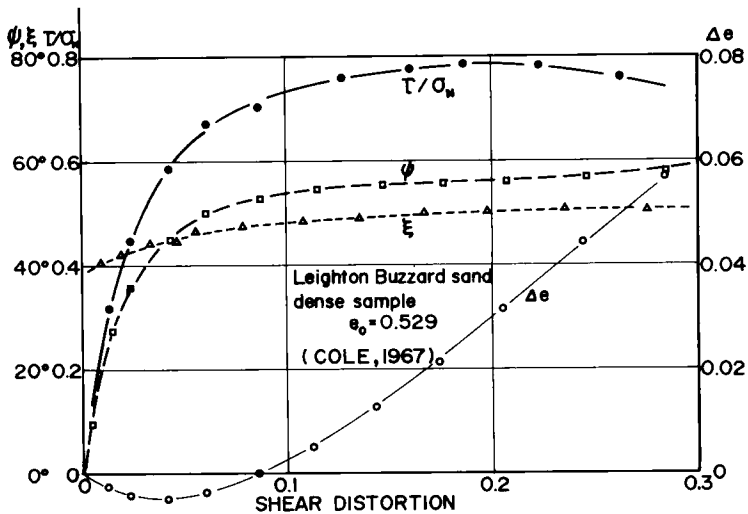


図8.6 砂の単純せん断における主応力軸の回転 $\psi$ と主ひずみ増分軸の回転角 $\xi$ (Cole, 1967による. 密な砂の例)

また、粒子間接点の法線方向 $N_i$ の集中方向の回転角 $\psi'$ が、ほぼ $\psi$ に一致することはすでに第5章5.6で述べた。

さらに $\psi$ と主ひずみ増分軸の回転角 $\xi$ の関係を調べてみると、せん断初期では、 $\xi > \psi$ であって両者は一致しないようであるが、ピーク近くになって両者は接近していることがわかる。塑

性理論の展開に当っては、普通、主応力軸と主ひずみ増分軸との一致（主軸の一致）が仮定されるが、少くともピーク近くまでは、この仮定は正しくないと言えよう。Roscoe *et al.* (1967), Cole (1967) も砂の単純せん断試験において同様の結果を得ている。

主応力軸と主ひずみ増分軸の不一致に関しては、de Josselin de Jong (1971) の理論的研究や、Drescher (1976), 八木・de Josselin de Jong (1978) による実験があり、ピーク以後の状態においても、粒子間摩擦角の半分程度の差が生じ得ることを示している。

#### 8.4 応力比 $\tau/\sigma_N$ と主応力軸の回転角 $\psi$ の関係

式(8.16 a), (8.17 a) と式(8.12)を用いると、応力比  $\tau/\sigma_N$  と主応力軸方向  $\psi$  との関係は次式で与えられる。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{B_4 K \tan^2 \psi + (K-1) \tan \psi + B_4}{\tan^2 \psi + B_4 (K-1) \tan \psi + K} \quad (8.24)$$

ただし、

$$B_4 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) \sin \beta d\beta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(\beta) \cos \beta d\beta}, \quad K = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2} \right) \quad (8.25)$$

本式は、Cole (1967) が実験によって密接な関係を確認した、 $\psi$  と  $\tau/\sigma_N$  の関係を理論的に導いたものである。しかし、式(8.25)中の  $\tan \psi$  は式(8.23)で明らかのように、粒子間摩擦角  $\phi_\mu$  を与えると、粒子構造を表わすパラメーター  $E(\beta)$  のみの函数であり、 $B_4$  もやはり  $E(\beta)$  のみの函数であるから、 $\tan \psi$  と  $B_4$  の間に何らかの函数関係が存在しているはずである。そこで二次元模型粒状体の単純せん断試験結果および Cole (1967) による実験結果を用いて、応力比  $\tau/\sigma_N$  と  $\tan \psi$  との関係を、直接調べてみると、両者の関係はほぼ原点を通る直線となる。図8.7は、Cole (1967) による Leighton Buzzard Sand の排水・非排水試験結果を用いて、 $\tau/\sigma_N$  と  $\tan \psi$  との関係を調べたものである。この関係のこう配を  $x$  で表わすと、 $x$  は粒子間摩擦角  $\phi_\mu$  のみに依存し、初期間隙比、初期構造、などには依存しない一種の材料定数であって、 $\tau/\sigma_N$  と  $\tan \psi$  の間には次式が成り立つ。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = x \tan \psi \quad (8.26)$$

この式は、小田・小西の式と呼ばれる。

図8.7の例では、落合によれば  $x = 0.574$  であって、これは  $\sin \phi_{cv}$  に一致する(落合, 1977)。式(7.21)と実験結果とは非常に良い一致を示している。

なお、式(8.24)が式(8.26)の形になるものとすれば、 $\tan \psi$  と  $B_4$  の間には

$$B_4 = \frac{x \tan^3 \psi + \{ (x-1) K + 1 \} \tan \psi}{\{ x - (x-1) K \} \tan^2 \psi + 1} \quad (8.27)$$



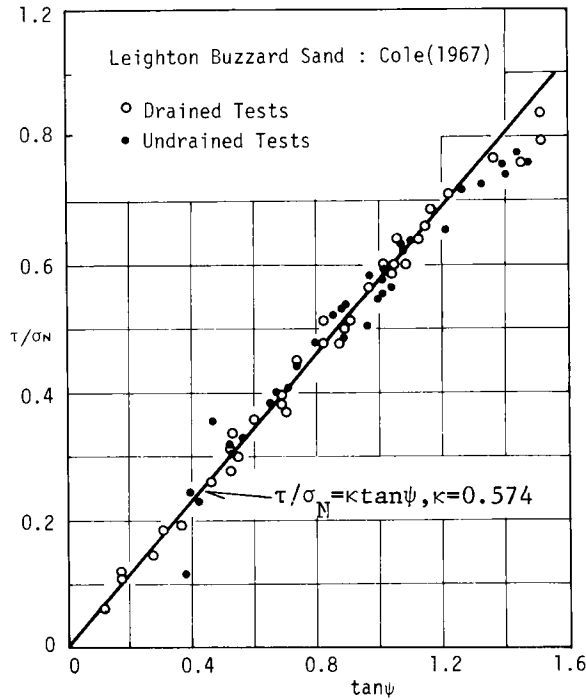


図 8.7 応力比  $\tau/\sigma_N$  と主応力軸の回転角  $\psi$  の関係 (Cole, 1967 に基づく落合, 1977 のプロット)

のような関係があるはずであるが、式 (8.27) の意味は必ずしも明瞭ではない。

$x$  については、落合 (1975) および小田 (1975) によって

$$x = \sin \phi_{cv} \quad (8.28)$$

のように与えられている。ここに  $\phi_{cv}$  は、限界間隙比における内部摩擦角である。

なお、落合 (1975) は、単純せん断における主応力の大きさを小田・小西の式 (8.26) に基づいて、次のように与えた。

$$\sigma_1 = \frac{\tau + x \sigma_N^2}{x \sigma} \quad (8.29)$$

$$\sigma_3 = (1 - x) \sigma_N$$

これによれば、最小主応力  $\sigma_3$  はせん断応力  $\tau$  に無関係で、垂直応力によって一義的に決まる。したがって、垂直荷重が一定のせん断試験では、最小主応力も一定ということになる。

## 8.5 主応力軸が回転する場合の粒子間力の推定式

前章 7.3.6.において、主応力軸が回転しない場合の粒子間力の推定式を示した。すなわち

$$|f| = \bar{f}_0 \sqrt{\cos^2 \beta + \cot^4 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2} \right) \sin^2 \beta} \quad (7.39)$$

ここに、 $\bar{f}_0$ は粒子間力の最大値で、 $\sigma_1 > \sigma_3$ の場合には $\beta = 0^\circ$ に現れる。

単純せん断のように、主応力軸の回転が生じる場合でも、粒子間力の配分則(8.9)式が成り立つとすれば、主応力軸の回転角 $\psi$ を考慮すれば、(7.39)式と類似の次式が得られる。

$$|\bar{f}'| = \bar{f}_0 \sqrt{\cos^2(\beta - \psi) + \cot^4(\pi/4 + \phi_n/2) \sin^2(\beta - \psi)} \quad (8.30)$$

ここに $\bar{f}'_0$ は粒子間力の平均値の最大値で、最大主応力方向に現れる。また $\psi$ は主応力軸の回転角で鉛直軸から測り、(8.26)より

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{\tau}{\sigma_N} \right), \quad x = \sin \phi_{cv} \quad (8.31)$$

で与えられる。

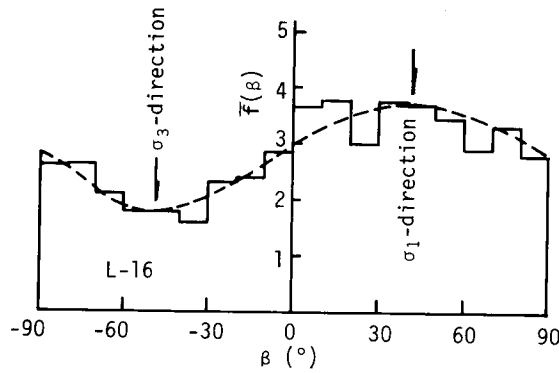


図 8.8 単純せん断における平均粒子間力の推定値(破線)と実験値(ゆるづめの二次元粒状体, L16)

図 8.8 に(8.30)式による推定値と、実測値の比較を行なった。両者の一致はよく、(8.30)式の妥当性を示している。主応力の回転を考慮すれば、二(三)軸圧縮と単純せん断における粒子間力発揮の機構はほぼ同じものと考えられる。また、 $N_i$ の集中方向は、単純せん断の場合にも、最大主応力方向であることから、粒状体のひずみ硬化の機構も基本的には同じものと言えよう。

## 8.6 結 論

本章で得られた結論は次のとおりである。

(1) 主応力軸が回転しない場合の、粒子間力の配分則は、単純せん断の場合にも、主応力方向を考慮することによって、同じように考えることができる。

粒子間力の推定値と実験値とはよく一致する。

(2) 粒子構造と粒子間摩擦角から、主応力軸の方向を求める式(8.20)を導いた。主応力軸は、せん断応力の増大とともに徐々に回転してゆくことがわかる。

(3) 主応力軸と主ひずみ増分軸とは、最大強度付近までは一般に一致しないようである。

(4) 最大主応力軸の回転角 $\psi$ と応力比 $\tau/\sigma_N$ との間には、

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = x \cdot \tan \psi$$

なる関係がある。比例係数  $x$  は、粒子間摩擦角に依存する一種の材料定数である。なお本式は、小田・小西の式と呼ばれている。

## 第9章 粒状体の静止土圧状態に 関する微視的考察

### 9.1 序 論

一般に、自然状態で堆積した沖積地盤は、側方変位を拘束された状態で、自重による圧密を受けた状態となっている。この状態は、いわゆる、静止土圧状態と呼ばれており、普通、有効土被り圧と側方の拘束応力の値は異なる。

一般に、水平方向の有効垂直応力  $\sigma'_h$  と、鉛直方向垂直応力  $\sigma'_v$  の比を  $K_0$  で表わし、これを「静止土圧係数」と称する。すなわち

$$K_0 = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_v} \quad (9.1)$$

$K_0$  は、普通地盤における応力状態を表わすものとして重要であるばかりでなく、地下壁や地中埋設物に対する土圧の評価、あるいは深い基礎の支持力算定に際しても不可欠のものとしてされている。

また、擁壁の設計は現在、主働土圧を基準として、主働土圧に耐える擁壁を作るという考え方に基いて行われている。周知のごとく、主働土圧は、

壁体が主働側に移動したときの土圧である。しかし、壁体の移動が止まると、土圧は次第に大きくなってゆくこと（土圧の回復）が知られており、擁壁の再変位が生じる可能性が大きい。したがって、『もし主働土圧を用いて設計した擁壁が静止土圧に耐えることができない場合には、主働側への壁体の変位→土圧の減少→土圧の回復→壁体の再変位、という繰返しが生じることになる。換言すると、静止土圧に耐えることができない擁壁が一旦変位すれば、それは結局、系としての擁壁の破壊につながることを示唆する。一般に、主働状態のまま、短時間だけ機能すればよいというような擁壁は考えられない。したがって、基本的には、「擁壁の設計は静止土圧を基準にして、静止土圧に耐える擁壁を作る」ことを目的とする必要がある』（松尾・富永，1975）。松尾・富永は、現行の設計法で設計した擁壁が役目を果し得ているのは、主働土圧にある安全率を乗じて、結果的に静止土圧に耐えるようになっているためであるとして、設計思想の転換の必要性を指摘し、静止状態における土圧諸特性の研究の重要性を説いている。

このように、静止土圧係数  $K_0$  は、土質工学的に非常に重要でありかつ従来考えられてきた以上に普遍的なものである。

近年、静止土圧係数  $K_0$  への関心が高まって、これに関する理論的あるいは実測的な研究が

比較的多くなってきた。しかし、この静止土圧状態は、従来より、弾性定数の1つであるポアソン比と結びつけられる一方、破壊状態において定義される内部摩擦角との関係が論じられている。このことから察せられるように、 $K_0$ 状態は、弾性状態とも塑性状態ともつかぬ中間的な状態と考えられており、この状態の物性論的な機構には、今だ不明の点が少くない。

そこで本章においては、2次元粒状体模型を用いて、粒子構造、粒子間力などの微視的要因を調べることにより、静止土圧状態とはいかなる状態であるかを明らかにしようとするものである。

## 9.2 静止土圧状態に関する従来の研究

静止土圧状態 ( $K_0$ 状態)、あるいは静止土圧係数  $K_0$  に関する研究は、次の範疇に分けて考えることができよう。

- 1)  $K_0$ の実測値に関する研究
  - a) 実験室における試験
  - b) 現地試験
- 2)  $K_0$ に関する理論的研究

1)において重要なのは、試験技術である。a)においては、 $K_0$ 状態の再現・制御および測定技術が、b)においては、測定機器の開発および機器挿入に伴う土の乱れの影響の評価が特に問題となろう。

また、2)においては、土の性質を支配する諸因子や土の性質を表わす他の諸係数との関係を適確に表現することが課題となっている。

表 9.1 a ~ c に、著者が参照できた  $K_0$  に関する従来の研究をまとめて示した。

表 9.1a  $K_0$  値に関する研究 (a) 室内実験による直接測定

	研究者	方法	対象土・測定値
1	Terzaghi 1920	圧密装置 鋼薄片の引抜抵抗	砂：海岸砂・川砂・石粉とも 0.42 (安息角 34 ~ 5°)
2	Tschebotarioff and Welch 1948	<i>lateral earth pressure meter</i>	粘土
3	Bishop and Henkel 1957	側方変位を零に制御した三軸 圧縮試験	締固め土：Moraine 0.36, Boulder clay 0.43. 乱さない砂質粘土 0.43, 乱した粘土 0.70, ゆるい砂 0.46, 密な砂 0.37

	研究者	方法	対象土・測定値
4	赤井・足立 1965	側方変位を零に制御した三軸圧縮試験, ただしペーパードレインによる水平排水を併用	粘土 0.40 ~ 0.45, 0.48
5	Moore 1971	供試体側面円周方向ひずみを零に制御した三軸圧縮試験	砂およびシルトに雲母を混入
6	Singh, Henkel and Sangrey 1973	側圧を測定できる圧密容器	過圧密粘土
7	Abdelhamid, Salah and Krizek 1976	側壁に土圧計および間隙水圧計を組込む.	カオリン粘土(分散構造と綿毛化構造とする) 分散構造: 初載荷 0.69 再載荷 0.68 綿毛化構造: " 0.75 " 0.66

表 9.1b  $K_0$  値に関する研究 (b) 現地における直接・間接測定

	研究者	測定方法	対象土
8	Sowers et al., 1957	擁壁に取付けた土圧計	締固めた砂質粘土・砂
9	Kenney 1967	鋼管に取付けた土圧・水圧計	<i>quick clay</i> (ノルウェー)
10	Massarsch et al. 1975	土中土圧計 <i>hydraulic fracturing</i>	軟弱粘土層 (スウェーデン)
11	Tavenas et al. 1975	土中土圧計 <i>hydraulic fracturing</i>	鋭敏な軟弱粘土層 (カナダ)
12	Bjerrum and Andersen 1972	<i>hydraulic fracturing</i>	軟弱粘土
13	Wilkes 1974	<i>hydraulic fracturing</i>	シルト質粘土
14	Wroth and Huges 1973	<i>Self-boring device</i> ( <i>Camkometer</i> )	シルト質粘土
15	Baguelin et al. 1974	<i>Self-boring device</i> ( <i>Pressiomètre autoforeur</i> )	

	研究者	測定方法	対象土
16	Chang et al. 1977	三軸圧縮	
17	Poulos and Davis 1972	三軸圧縮	

表 9.1c  $K_0$  値に関する研究 (c) 理論式

	研究者	提案式	備考
18	Jáky 1944	$K_0 = \frac{(1 - \sin \phi)(3 + 2 \sin \phi)}{3(1 + \sin \phi)}$ $\doteq 0.9(1 - \sin \phi)$ $K_0 = 1 - \sin \phi$	原理論式 原近似式 実験による修正式、いわゆる <i>Jaky</i> の式 $\phi$ : 砂の内部摩擦角
19	Rowe 1957	$K_0 = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi'_{e,m}}{2} \right)$	$\phi'_{e,m}$ : 圧密平衡時に動員される有効内部摩擦角
20	Skempton 1961	$K_0 = \frac{(P_k/P) - A_s}{1 - A_s}$	$P$ : 有効鉛直上載圧力 $P_k$ : 毛管圧力 $A_s$ : サンプリング時の間隙圧係数
21	山口 1972	$K_0 = \frac{1 - (2/\pi) \tan \phi_\mu}{1 + (\pi/2) \tan \phi_\mu}$ $K_0 = \frac{1 - 0.404 \tan \phi'}{1 + \tan \phi'}$	$\phi_\mu$ : 粒子間摩擦角 $\phi'$ : 有効内部摩擦角 <i>Caquot</i> の式 $\tan \phi' = (\pi/2) \tan \phi_\mu$ を適用。(原論文では分母が $1 + \sin \phi'$ となっているが誤りであろう)
22	Schofield and Wroth 1968	$K_0 = 1 \quad (M \leq (3/2) \Lambda)$ $K_0 = \frac{6 - 2M + 3\Lambda}{6 + 4M - 6\Lambda}$ $(M > (3/2) \Lambda)$	$M$ : 限界状態における応力比 $\Lambda = 1 - \kappa / \lambda$ $\kappa$ : $e - \log p$ 曲線の除荷・再載荷部のこう配 $\lambda$ : $e - \log p$ 曲線の処女圧縮部のこう配
23	Roscoe and Burland 1968	$K_0 = \frac{\eta - 3}{3 + 2\eta}$ $\eta^2 + 3\Lambda\eta - M^2 = 0$	$\eta$ : 応力比
24	山内・安原 1974		$\mu_{e,m}$ : 圧密平衡時に動員される有効

	研究者	提案式	
24		$K_0 = \frac{\sqrt{2} - \mu_{e,m} - \kappa_m}{\sqrt{2} + 2\mu_{e,m} + 2\kappa_m}$ $= \frac{\sqrt{2} - (2/\pi)\tan\phi' - \kappa_m}{\sqrt{2} + (4/\pi)\tan\phi' + 2\kappa_m}$	内部摩擦係数 $\kappa_m$ : 圧密平衡時に動員される有効粘着力係数 Caquotの式を適用
25	落合 1976	$K_0 = 1 - \kappa$ $= 1 - \sin\phi_{cv}$ $= \frac{1 - \sin\phi_\mu}{1 + \sin\phi_\mu}$ $K_0 = \frac{\sqrt{(\pi/2)^2 + \tan^2\phi' + \tan\phi'}}{\sqrt{(\pi/2)^2 + \tan^2\phi' + \tan\phi'}}$	$\kappa = \sin\phi_{cv}$ $\phi_{cv}$ : 体積一定時の内部摩擦角 Caquotの式を適用

注) Caquotの有名な式

$$\tan\phi' = \frac{\pi}{2}\tan\phi_\mu$$

は体積一定時の関係とみなすのが妥当であるから左辺の  $\phi'$  は  $\phi'_{cv}$  と考えた方がよい。したがって山口, 山内・安原, 落合の式における  $\phi'$  は  $\phi'_{cv}$  と読みかえた方がよい。

### 9.2.1 実験室における $K_0$ 値の測定 (表 9.1 a)

#### (a) Terzaghi の実験

Tschebotari offによれば, 静止土圧係数  $K_0$  を実験によって求めたのは Terzaghi が最初である (Tshebotari off, 1951, Terzaghi 1920, 1925)。

Terzaghi は, 側方変位を許さない剛な圧密容器 (砂の場合は正方形断面, 粘土の場合は円形断面) の中に, 各種の土を入れて, 圧密を行なった。そして, 土中の水平応力・鉛直応力を求めるために, 土中に挿入された鋼の帯片の引抜抵抗を測定している。すなわち, 砂の場合には, 壁面の1つに貼りつけるようにして, 3枚の帯片を水平に挿入しておく。これらの帯片の両面は紙で覆われ, 砂とは直接接触しない。

3枚のうち上下の2枚は壁面に固定されており, 砂に鉛直荷重を加えた状態で, 中央の1枚を引抜く。そのときの引抜抵抗と, 帯片と紙との摩擦係数から, 水平応力を求める。一方, 粘土の場合には, 供試体中央に, 1枚の鉛直に立てた帯片を挿入した試験と, 水平に寝かせた帯片を挿入した試験を行ない, 圧密平衡時における両試験での引抜抵抗値の比から,  $K_0$  値を求めている。Terzaghi の値は, 次のようであった。

$$\left. \begin{array}{l} \text{粗い海岸砂 (石英+長石, 息角 } 35^\circ) \\ \text{細かい海岸砂 (石英+長石, 息角 } 34^\circ) \\ \text{細かい川砂 (石英砂, 息角 } 34^\circ) \end{array} \right\} : K_0 = 0.42$$



粘土 I	: $K_0 = 0.70$
粘土 IV	: $K_0 = 0.75$

Tschobotarioff は、これらの  $K_0$  値について、砂については、ある場合に過小になり、粘土に対しては過大になると指摘している。粘土に対する値が過大になる理由について、鉛直方向の圧力を測定するために、水平に置いた鋼薄片の下の粘土は、鋼薄片のたわみのため、圧密容器の側壁付近が十分に圧密されず、そのため、鉛直方向の力の値を減少させ、真の値より大きな  $K_0$  値が得られたのであろうと述べている。

(b) Tschebotarioff と Welch の実験

Tschebotarioff は、*lateral earth pressure meter* (石井による訳は「土圧計」) と称する試験装置を用いて、いろいろな深さの点で、圧密時の側圧の変化を測定した。そして、最も浅い位置での測定値から、水平・鉛直応力比  $K_n$  を推定し、砂の場合に、 $K_n \approx 0.50$  となった。また、繰り返した、先行圧密を受けない、飽和した *blue clay* においては、鉛直圧を加えた直後において、 $K_n = 1$  であるが、圧密の進行とともに、 $K_n$  値は減少し、「圧密平衡状態」(*consolidated equilibrium state*) において、 $K_n \approx 0.5$  となることを示した。

(Tschebotarioff & Welch, 1948, Tschebotarioff, 1951)

(c) 三軸圧縮試験機による実験

Bishop と Henkel (1957) は、普通の三軸圧縮試験機に、側方変位計を併用して、供試体中央部の側方ひずみを常に零に制御する  $K_0$  試験を行なった。排水および非排水条件下で各種の土の  $K_0$  値を得ている。例を挙げると次のような値である。

乱さない砂質粘土	: $K_0 = 0.43$
乱した粘土	: $K_0 = 0.70$
ゆるい砂	: $K_0 = 0.46$
密な砂	: $K_0 = 0.37$

Bishop (1958) にも報告がある。

赤井と足立 (1965) も、側方ひずみ計を併用して、三軸試験機による排水  $K_0$  試験を行なった。その場合に、側方変位の均一性を得るため、ペーパードレーンによる水平方向への排水方式を採用して好結果を得ている。彼らの  $K_0$  値に関する結論をまとめると次のようである。

- 1) 一次元圧密中の、全応力で表わした水平-鉛直応力比  $K = \sigma_3/\sigma_1$  は、圧密開始時の  $K = 1.0$  から、終局には、 $K \approx 0.45$  まで減少する。
- 2) 一方、有効応力で表わした静止土圧係数  $K_0 = \sigma_3'/\sigma_1'$  は、圧密過程を通じてほぼ一定となる。
- 3) Jáky の理論式

$$K_0 = 1 - \sin\phi' \quad (9.2)$$

によって  $\phi'$  から  $K_0$  を推定することは、一応可能であるが、破壊時のせん断抵抗角  $\phi'$  と、非塑性状態における  $K_0$  値の関係がどのような意味をもつのかについて疑問の点が多い。

三軸圧縮試験機を用いた  $K_0$  試験においては、側方ひずみ計の読みの変化がわずかに現れたところで、側圧を制御して、側方ひずみを零に戻すという操作方法がとられる。したがって、側方ひずみは非常に小振幅ではあるが、圧縮・膨張を交互に繰返すことになる。

このひずみの反転が何らかの形で測定値に影響を与えていると考えられており、この点を改良に努力が払われ、高感度の側方ひずみ計の動きに応じて、自動的に側圧を調整する機構が工夫されている（たとえば Moore 1971 や Menzies et al. 1977 など）。

Poulos and Davis (1972) は、通常の圧密試験において先行圧密荷重を求めるのと類似の方法で、現地における有効水平応力を推定し、現地  $K_0$  値を間接的に推定している。すなわち、乱さない試料を三軸室に入れて、異方的な再圧密を行なう。その場合に、鉛直有効応力は現地におけるそれに等しくとり、水平応力の方は現地で生じていると思われる応力より小さい値から、段階的に増大させてゆき、最終段では、等方圧密とする。このような試験結果より、水平有効応力と体積変化との関係を図示する。土が正規圧密であれば、現地で生じていた水平応力付近で、曲線の勾配が変化することを利用するのである。

Chang 他 (1977) も、三軸試験により、現地  $K_0$  値を推定する方法を提案している。

### 9.2.2 現地における $K_0$ 値の測定 (表 9.1 b)

現地の地盤における  $K_0$  値を求める方法としては、直接測定による方法と、間接的推定法とが提案されている。

直接測定による方法としては、

- (a) 構造物に取付けた土圧計による方法 (Sowers et al., 1957, Kenney, 1967 など)、
- (b) 土中土圧計による方法 (Massarsch et al., 1975, Tavenas et al., 1975 など)
- (c) *Self-boring device* による方法 (Boguelin et al., 1974, Wroth and Huges, 1973 など) などがある。また、間接的方法としては、
- (d) *hydraulic fracturing* による方法 (Bjerrum and Andersen, 1972; Wilkes, 1974; Tavenas et al., 1975; Massarsch et al., 1975 など) がある。

### 9.2.3 $K_0$ 値に関する理論的研究 (表 9.1 c)

Jáky 以来、静止土圧係数  $K_0$  と、各種の摩擦角との理論的な関係式が提案されている。

有名な Jáky の式は、土の内部摩擦角  $\phi'$  と  $K_0$  とを関係づけており、その誘導過程はユニークなものであるが、問題が多いとされている。内部摩擦角というのは、土の破壊状態において定義される量であり、静止土圧状態との直接的な関係はないといってよい。しかし、Jáky の式は、多くの研究者によって実験値によく合致することが確められており、理論式というより、経験式として確固たる地位を築いている。このように、直接的な函数関係にないと思われる

$K_0$ と $\phi'$ の間に対応関係が認められるのは、この両者が共通の因子によって規定される量であるからであろう。両者を支配する諸因子としては、粒子間摩擦角 $\phi$ 、初期堆積構造、間隙比 $e$ 、過圧密比などが考えられる。

したがってこれらの諸因子と、 $K_0$ の関係を見出すことの方がより本質的と思われる。

なお、土を等方等質の弾性体とみなした場合には、 $K_0$ とポアソン比 $\nu$ との間に

$$K_0 = \frac{\nu}{1 - \nu} \tag{9.3}$$

という関係のあることは周知のことである。しかし、土のポアソン比を実際に求めることはかなりむずかしく、現在用いられているいくつかの方法はそれぞれかなり異なった見かけの $\nu$ 値を与えるようである。(今井, 1976),したがって、式(9.3)は実用的とは言えない。

以下にいくつかの研究について紹介する。

(a) Jákyの式

$K_0$ と内部摩擦角 $\phi$ との関係を表わすJákyの式は、式の簡単さと、実験値によく適合することから、よく用いられているが、今日われわれが用いている式は、Jákyが理論的に求めた式を、実験によって修正した半経験式とも言うべきものである。

Jákyは、両斜面が水平と角 $\phi$ をなす、図9.1に示すような土くさびを考え、くさび内の応力状態の考察から、静止土圧係数 $K_0$ を導いている。

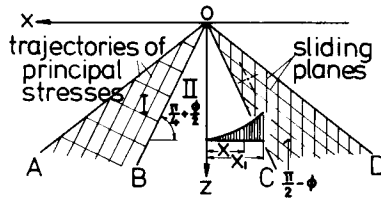


図9.1 土くさび内の主応力およびすべり線(Jáky)

くさび斜面の付近では、すなわち、図9.1のAOBおよびDOCの範囲では、ランキンの塑性状態になっていると仮定する。OBおよびOCは、水平と $(\pi/4 + \phi/2)$ の角をなしている。この領域を第I領域と呼ぶ。この領域では、2つのすべり線群が生じている。1つは斜面に平行、もう1つは鉛直方向である。また、この領域における最大主応力は、水平面と $(\pi/4 + \phi/2)$ の角をなしている。第I領域における塑性応力は、すべり面上のせん断応力が

$$\tau = z \gamma \sin \phi \cos \phi - x \gamma \sin^2 \phi \tag{a}$$

であるから( $\gamma$ は土の単位体積重量)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \tau \frac{1 + \sin^2 \phi}{\sin \phi \cos \phi} \\ \sigma_x &= \tau \cot \phi \\ \tau_{xz} &= \tau \end{aligned} \right\} \tag{b}$$

となる。

ランキン塑性領域に囲まれた、第Ⅱ領域 BOC においては、破壊条件は満足されず、塑性状態とならない。しかし、くさびの形成時にある運動が生じて、せん断強度の一部が発揮され、応力状態は塑性と弾性の過渡の状態であると考えられる。そこで、このせん断応力の水平方向分布を、次のように仮定する。

$$\tau_{xy} = \tau_1 \frac{x^2}{x_1^2} \quad (c)$$

ここに  $x_1$  および  $\tau_1$  は OB または OC 上の点の  $x$  座標およびその点におけるせん断応力であって、 $\tau_1 = x_1 \gamma \sin \phi$  である。

つり合い条件により、他の応力成分を計算すると、最終的に次のようになる。

$$\sigma_z = z \gamma - 2x\gamma \sin \phi \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \ln \frac{z}{x \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} - x\gamma \sin \phi \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (d)$$

$$\sigma_x = \frac{x^2}{z^2} \gamma \sin \phi \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (e)$$

対称軸 OZ 上の応力を、 $\sigma_{z0}$ 、 $\sigma_{x0}$  と書くと

$$\sigma_{z0} = z\gamma \quad (f)$$

$$\sigma_{x0} = z\gamma(1 - \sin \phi) \frac{1 + \frac{2}{3} \sin \phi}{1 + \sin \phi} \quad (g)$$

以上の応力は、いずれも、静止状態で生じているのであるから、静止土圧係数  $K_0$  は

$$K_0 = \frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{z0}} = (1 - \sin \phi) \frac{1 + \frac{2}{3} \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \left(1 + \frac{2}{3} \sin \phi\right) \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (9.4)$$

となる。これが、Jáky が理論的に導いた関係式である。ここで  $\frac{1 + (2/3)\sin \phi}{1 + \sin \phi}$  が  $\phi = 20 \sim 45^\circ$  の範囲でおよそ 0.9 であることから、(9.4) は、近似的に

$$K_0 \approx 0.9 (1 - \sin \phi) \quad (9.5)$$

となる。

この関係式はその後、実験による検証の結果

$$K_0 = 1 - \sin \phi \quad (9.6)$$

と修正された。また、Brooker and Ireland (1965) は、粘性土については

$$K_0 = 0.95 - \sin \phi' \quad (9.7)$$

の方がよく合うとしている ( $\phi'$  有効内部摩擦角)

Jáky の原式、式 (9.4) の誘導は、このように、独特のものである。こう配  $\phi$  の斜面でかこまれる土くさび内中心線上の応力を考えていること、および、くさび表面近くの半分の領域

がランキン塑性領域で、その内側は弾一塑性の過渡領域であるとして、せん断応力の分布を仮定していることの2点の普遍性に問題があるように思われる。すなわち、くさび中心線上の応力と、表面が水平の半無限体内の応力との対応関係に疑問がある。

しかし、実験によって修正された、半経験式とも言うべき式(9.6)は、非塑性状態の $K_0$ と破壊状態における $\phi$ を結びつけている点で批判もあるが、式の簡単さ、および実験値との対応もよいことから、実用的に価値が高いとされている。

(b) Roscoeらの研究

Roscoeを中心とするケンブリッジの研究者たちは、土の塑性力学を展開し、土のいろいろな力学的諸性質を统一的に説明し得る土の力学モデルを提案した。彼らの考え方は、Schofield and Wrothの著書“Critical State Soil Mechanics”(1968)にまとめられている。その中で、2つの力学モデル“Granta-Gravel”および“Cam-Clay”が提案され、種々の場合について検証されている。

静止土圧係数 $K_0$ についても検討されており、Cam-Clayに対する $K_0$ の推定式は次に示すようである。

$$K_0 = \frac{\sigma_r'}{\sigma_l'} = \frac{3 - \eta_{K_0}}{3 + 2\eta_{K_0}} \quad (9.8)$$

$$\eta_{K_0} = M - \frac{3}{2} \Lambda \quad (9.9)$$

(9.8)に(9.9)を代入すると

$$\left. \begin{aligned} M \leq \frac{3}{2} \Lambda \text{ のとき } K_0 &= 1 \\ M > \frac{3}{2} \Lambda \text{ のとき } K_0 &= \frac{6 - 2M + 3\Lambda}{6 + 4M - 6\Lambda} \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

ここに、 $\sigma_r'$  : 軸対称応力状態における半径方向有効直応力

$\sigma_l'$  : " " " " 軸方向 "

$\eta_{K_0} = (q/p)_{K_0}$  : 半径方向ひずみが零の状態における応力比

$M = (q/p)_{crit}$  : 限界状態における応力比

$\Lambda = (1 - \kappa/\lambda)$

$\kappa$  :  $e - \log p$  曲線の除荷・両載荷部のこう配

$\lambda$  :  $e - \log p$  曲線の処女圧縮部のこう配

式(9.10)による推定値は、測定値より大きい値を与える。その後、Cam-Clayの修正モデルが提案されているが、修正モデルによれば式(9.9)の $\eta_{K_0}$ 値は、次の2次方程式によって推定される。

$$\eta^2_{K_0} + 3\Lambda\eta_{K_0} - M^2 = 0 \quad (9.11)$$

しかし、式(9.8)および(9.11)による $K_0$ の推定値も、カオリンに対してやや過大となると述べられている(Roscoe and Burland, 1968)

(c) 落合の研究

落合(1976)は砂の直接せん断試験における主応力の表示式に基づいて砂の静止土圧係数を求めた。

彼はまず主応力軸の回転に関する小田・小西の式(第8章(8.23)式)

$$\tau/\sigma_N = x \tan \psi \quad (a)$$

から、直接せん断試験における主応力 $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ が、次式で与えられることを示した。

$$\sigma_1 = \frac{\tau^2 + x \sigma_N^2}{x \sigma_N} \quad (b)$$

$$\sigma_3 = (1 - x) \sigma_N \quad (c)$$

また、定数 $x$ は、Critical void ratio stateにおける摩擦角 $\phi_{cv}$ および粒子間摩擦角 $\phi_\mu$ と次のような関係にあることを示した。

$$x = \sin \phi_{cv} = \frac{2 \sin \phi_\mu}{1 + \sin \phi_\mu} \quad (d)$$

直接せん断試験において、水平方向の試料境界面に垂直応力 $\sigma_N$ のみを作用したせん断前の状態( $\psi = 0$ )は、側方変位が拘束された静止土圧状態であることに着目すると、式(b), (c)より、 $\sigma_1 = \sigma_N$ ,  $\sigma_3 = (1 - x) \sigma_N$ となる。それゆえ、静止土圧係数 $K_0$ は次式で与えられる。

$$K_0 = \sigma_3 / \sigma_1 = 1 - x \quad (9.12)$$

$x$ に式(d)を用いると、 $K_0$ は $\phi_{cv}$ または $\phi_\mu$ の函数として

$$K_0 = 1 - \sin \phi_{cv} \quad (9.13)$$

あるいは

$$K_0 = \frac{1 - \sin \phi_\mu}{1 + \sin \phi_\mu} = \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\phi_\mu}{2} \right) \quad (9.14)$$

で与えられる。式(9.12)~(9.14)が、落合の理論式である。

落合は、さらに、Caquotの式

$$\tan \phi' = \frac{\pi}{2} \tan \phi_\mu \quad (e)$$

を用いて、

$$K_0 = \frac{\sqrt{(\pi/2)^2 + \tan^2 \phi'} - \tan \phi'}{\sqrt{(\pi/2)^2 + \tan^2 \phi'} + \tan \phi'} \quad (9.15)$$

を提案しているが、これは、一種の実験式とみなすべきであるとしている。

## (d) 実験値との対応

図 9.2 に、砂の  $K_0$  値と、 $\phi'$  との関係に関する、諸研究者による実験値と提案式を示した (実験値は Ladd *et al.*, 1977 より読みとったものである). 実験値は非常に多種の砂に対する値である. Al Hussaini and Townsend による値は、大体、提案式に沿うような分布をなしているが、Sherif *et al.*, Moore による値は、 $\phi'$  の変化に対して、 $K_0$  変化が小さい. 図 5.2 からは、諸提案式が実験値にかなり合っているとも言えるが、実験値の散らばりが大きく、なお検討の余地があるように思われる. 一方、本図に掲げた諸提案式は、粘土に対する Brooker and Ireland の式を除くと、実験値の散らばりの大きさに比べれば、ほとんど差がないと言って差しつかえない. したがって、これらの諸式を経験式として取扱うのならば、いずれを用いてもよいといえよう.

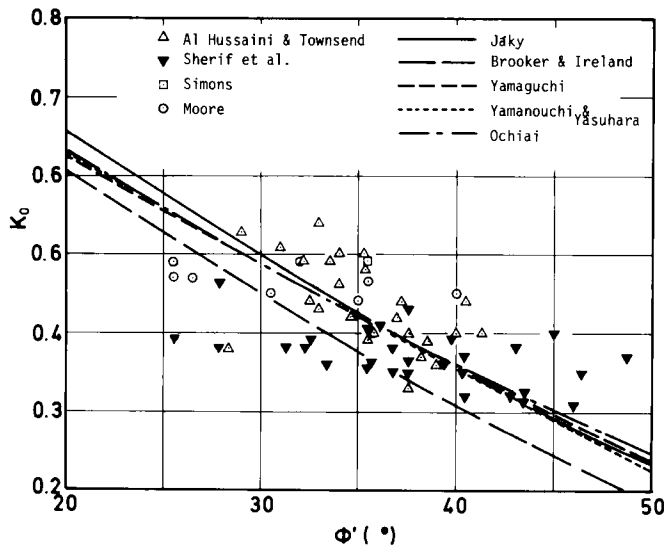


図 9.2 砂の静止土圧係数と内部摩擦角の関係

### 9.3 実験方法

#### 9.3.1 モデル粒子

本章で用いた粒子は、基本的には、前章までのものと同じであるが、材料のエポキシ樹脂板が異なるため、粒子の長さおよび材料の性質がやや異なっている.

モデル粒子は、長さ 15mm、直径 6, 8 および 10 mm の円柱形である. これらの粒子は厚さ 15 mm のエポキシ樹脂板より、特殊中空ドリルを用いて削り出し、中性洗剤で十分に清浄にした上、焼なましを行なったものである.

#### 9.3.2 粒子間摩擦角

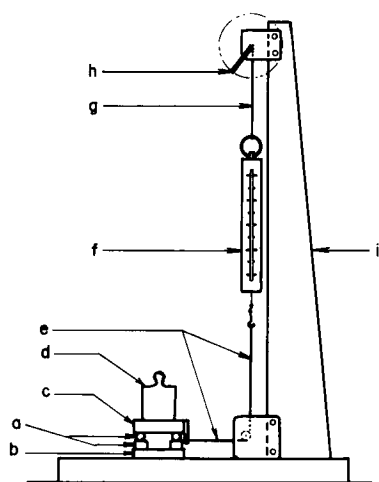


図 9.3 粒子間摩擦角測定装置

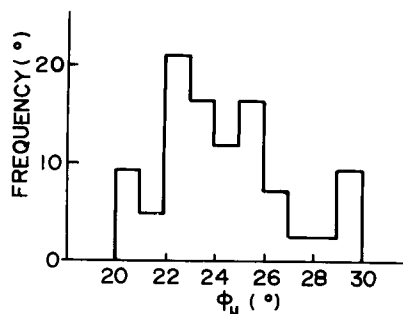


図 9.4 粒子間摩擦角の測定値

a : 粒子 ; b, c : 粒子取付板 ; d : 重錘 ; e : 糸  
 f : ばねばかり ; g : 糸 ; h : 巻上ハンドル  
 i : 支柱

図 9.3 に示すような装置を用いて、粒子間摩擦角を測定した。この装置は、十文字状に接触させた 3 組の粒子の平均的な摩擦角を測定するものである。各粒子は、粒子取付板 b および c に瞬間接着剤を用いて、所定位置に固定される。粒子が十文字状に接触するよう、c の位置を調整し、重錘 d を載せる（重錘の位置は、3 接点に均等に垂直力を加え得るように決めてある）。e の右端からおいた腕の、接点の高さのところ糸をとりつけ、ばねばかり f を介して、この糸を巻き上げることにより、粒子に相対変位を与える。

粒子接点にかかる垂直荷重  $P$  は、重錘 d、取付板 c および上側粒子の自重を加えたものであり、せん断荷重  $S$  は、ばねばかりの読みから中間プリーの摩擦を差引いたものである。

中間プリーの摩擦を差引いたものである。

粒子間摩擦角  $\phi_\mu$  は、次式によって計算される。

$$\phi_\mu = \tan^{-1} \frac{S}{P}$$

約 50 回の測定結果を図 9.4 に示す。20°~30°の間に値が分布しており、平均値は 24°であった。このばらつきの原因の主なものは、粒子作製時に生じる粒子表面の凹凸であると考えられる。また、大きな垂直力の下で一度すべった接点においては、摩擦角が 5~10°低下するのが観察された。

### 9.3.3 実験装置

実験装置は、写真 9.1 および図 9.5 に示すものを用いた。

供試体 = 2 次元粒状体 a は、鋼製の載荷枠によって囲まれている。供試体寸法は、高さ 18~20 cm、幅 20 cm である。

載荷枠を構成する部材のうち、底部材 b は固定されているが、上部材 c は鉛直方向に、側部



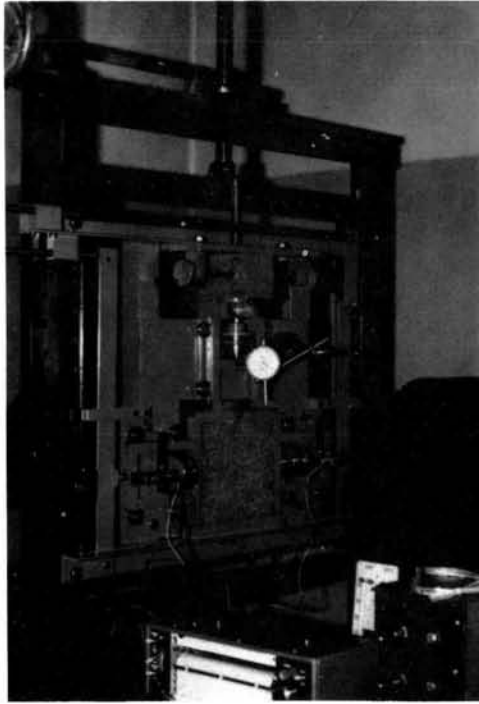


写真 9.1  $K_0$  圧縮用二次元二軸圧縮試験機

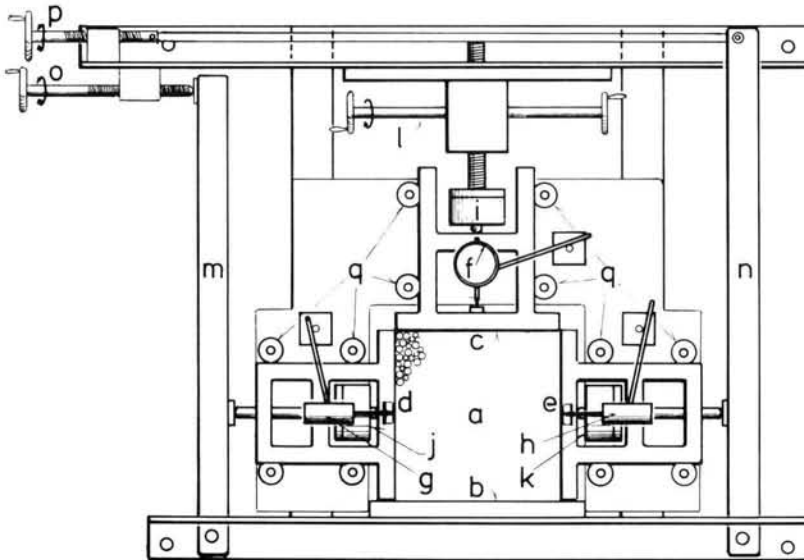


図 9.5  $K_0$  圧縮用二次元二軸圧縮試験機

材 d, e は左右とも水平方向に可動となっている。各部材の変位は、ダイヤルゲージ f および差動トランス (g, h) により検出する。また、各部材に加えられる垂直荷重は、荷重変換器 (i,

j, k)によって検出する。

各部材の変位制御は、上部材についてはねじ(l)によって直接に、また側部材については、てこ(m, n)を介してねじo, pにより行われる。

この装置を、光弾性実験装置の円偏光場に設置する。

#### 9.3.4 実験手順

- (1)  $\phi 6$ , 8および10 mm各粒子を, 3 : 2 : 1個の割合で混合しておく。
- (2) 粒子の初期応力を除去する。粒子をガラス板の上に立ててならべた状態で炉に入れ, 125℃で約1時間加熱の後, 徐冷して焼なましを行なう。
- (3) 供試体の形成。3種の粒径の粒子をボウルに入れ, よくかきまぜておく。載荷枠の側部材を動かないよう固定してから, 粒子をつめる。
  - a) 中位の密度につめるときはボウルからランダムに粒子をとり出し, 載荷枠内にランダムに静かに積み上げてゆく。大体所定の高さになったら, 上面をならし, 静かに上部材を降して接触させる。
  - b) 密づめの場合は, 載荷枠をたたいたり, 手でかく乱したりして, 密になるようにする。
  - c) ゆるづめの場合は, 粒子をランダムに積み上げた後, ランダムに粒子を抜きとって, 間隙を多くしてから, 上部材を置く。
- (4) 各荷重変換器, 変位計およびてこ, ねじ類の位置を調整し, 供試体寸法をノギスで測る。
- (5) 側部材と荷重変換器と水平載荷てこが正しく接触した状態で, 水平載荷てこをシャコ万力を用いて固定する。
- (6) ねじの操作により, 上部材を下降させ, 供試体に段階的に荷重をかけてゆく。各段階において, 荷重計の読みが落ちつくのを待って(3~10分), 鉛直荷重, 水平荷重(左, 右), 鉛直変位, 水平変位(左右)を記録する。
 

途中, いくつかの段階で, 光弾性等色線写真を撮影する。
- (7) 鉛直荷重が約100kgに達したら, 段階的に除荷する。

#### 9.3.5 側方変位について

試験機は, 側方変位を常に零にするよう調節できる機構になっているが, 実際には垂直荷重の載荷ねじの操作を手で行うため, 側方変位の連続的な制御を行うのがむずかしく, 5/100mm程度の変位が生じたら, ねじの操作によって, 側部材を元の位置に押し込んでやる形になってしまう。すると粒状体は押されることによって受働状態に若干移行するので,  $K_0$ 値としては, やや過大の値が得られる。そこで, 今回の試験では, 水平荷重用荷重計を万力で枠組に固定し, 調整をしないことにした。したがって, 荷重計および装置のひずみに起因する最大0.07~0.2 mm程度(ひずみに直すと0.03~0.1%程度)の側方変位を許している。このひずみを二次元二軸圧縮試験(第2章)におけるひずみ量に比べると最大荷重付近で1/40程度であって, は

るかに小さいが、試験は真の $K_0$ 状態ではなく、擬似 $K_0$ 状態で行われたことになる。

#### 9.4 実験結果と考察

測定値より、平均鉛直応力 $\sigma_v$ 、平均水平応力 $\sigma_h$ 、鉛直ひずみ $\epsilon_v$ を、次のようにして算出した。

$$\text{平均鉛直応力 } \sigma_v = (\text{鉛直荷重}) \div (\text{供試体の幅} \times \text{奥行 } 1 \text{ cm}) (\text{kg/cm}^2)$$

$$\text{平均水平応力 } \sigma_h = (\text{水平荷重 (左右の平均値)}) \div (\text{供試体の高さ} \times \text{奥行 } 1 \text{ cm}) (\text{kg/cm}^2)$$

$$\text{鉛直ひずみ } \epsilon_v = (\text{供試体高さの変化量}) \div (\text{供試体の初期高さ})$$

##### 9.4.1 鉛直ひずみ・鉛直応力の関係

図 9.6 は、鉛直応力 $\sigma_v$  (対数表示) に対して鉛直ひずみ $\epsilon_v$ を図示したものである。 $K_0$ 状態での圧縮であるから縦軸の $\epsilon_v$ は、間隙比と $\epsilon_v = \frac{\Delta e}{1 + e_0}$ の関係にあるから、これらの図は、圧密試験における $e \sim \log p$ 曲線と同等である。

載荷過程で、 $\sigma_v = 1 \sim 2 \text{ kg/cm}^2$  以上になると、 $\epsilon_v \sim \log \sigma_v$  関係はほぼ直線とみなし得る。

また、除荷過程も別の傾きをもつ直線上に載ってくる。これらの傾向は、粘土や砂の圧密試験で観察されるものに類似しており、直線の傾きは圧縮指数に対応している。

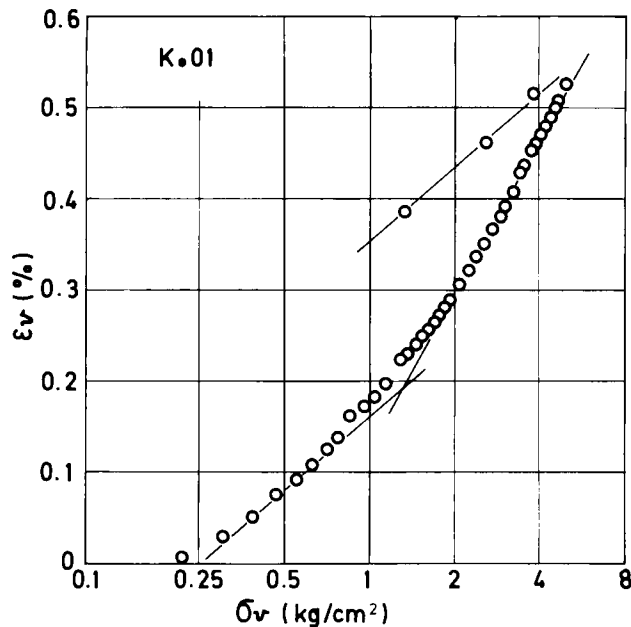


図 9.6 鉛直ひずみと鉛直応力の関係

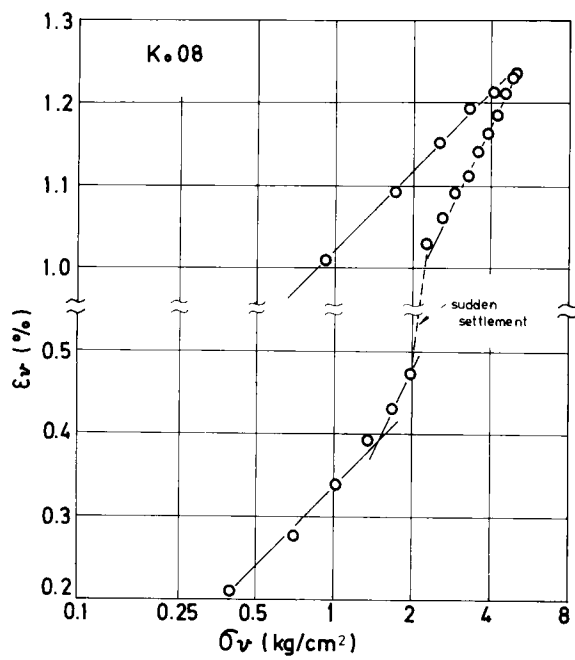
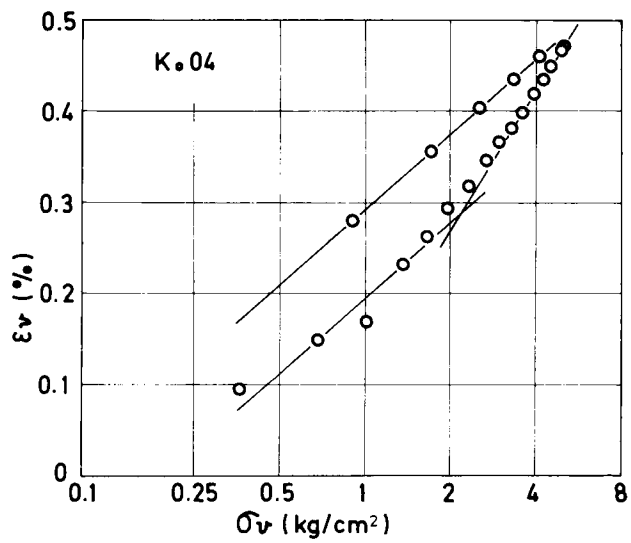


図 9.6 鉛直ひずみと鉛直応力の関係 (つづき)

9.4.2 水平応力  $\sigma_h$ ,  $K_0$  値と鉛直応力  $\sigma_v$  の関係

鉛直応力  $\sigma_v$  と水平応力  $\sigma_h$  および  $K_0$  の関係を図 9.7(a) に示す。載荷時における  $\sigma_v$  と  $\sigma_h$  の関係は、いずれの場合にも、初期部分を除いて、直線に近いものが得られているが、除荷時には、同じ線上を戻らず、 $\sigma_h$  が載荷時よりも大きくなるようなループを描いている。

次に  $\sigma_h$ ,  $\sigma_v$  の値より

$$K_0 = \frac{\sigma_h}{\sigma_v} \tag{9.24}$$

によって  $K_0$  値を求め、 $\sigma_v$  に対してプロットしたのが図 9.7(b) である。

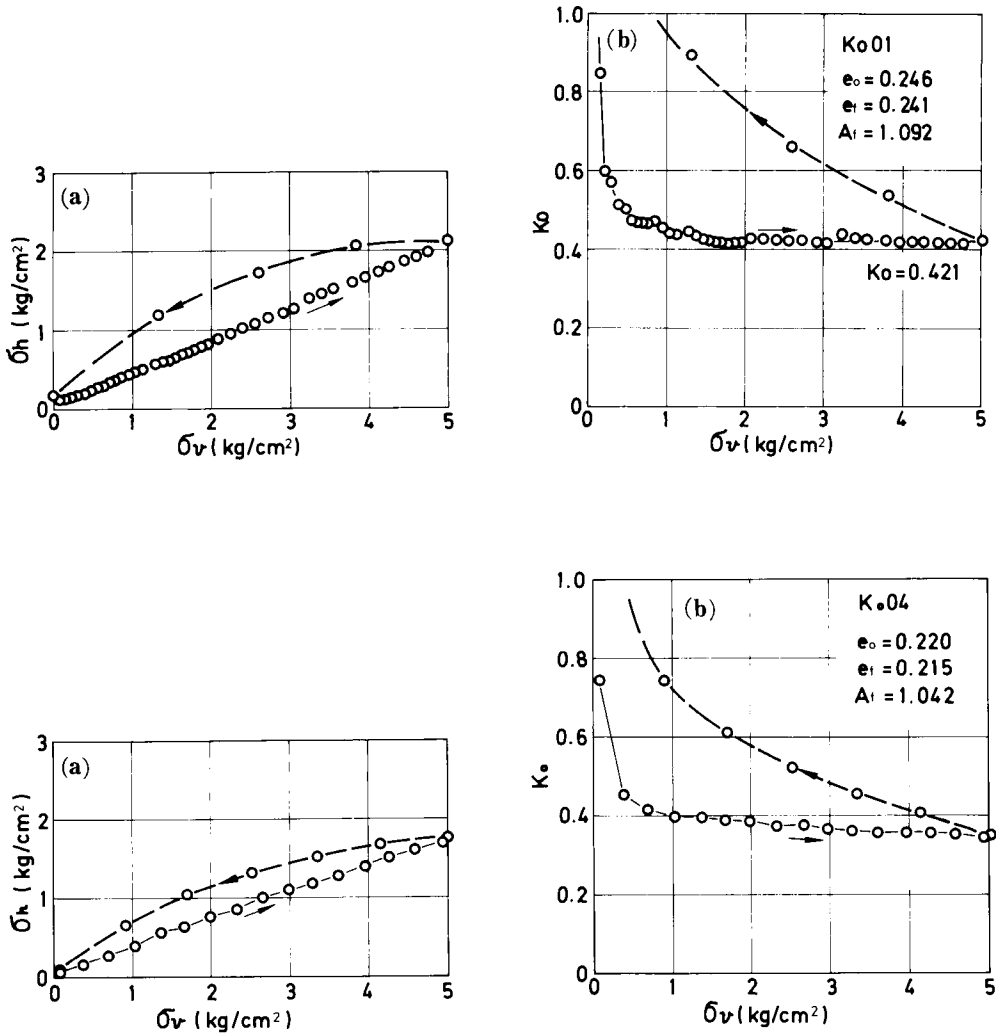


図 9.7 水平応力・静止土圧係数と鉛直応力の関係

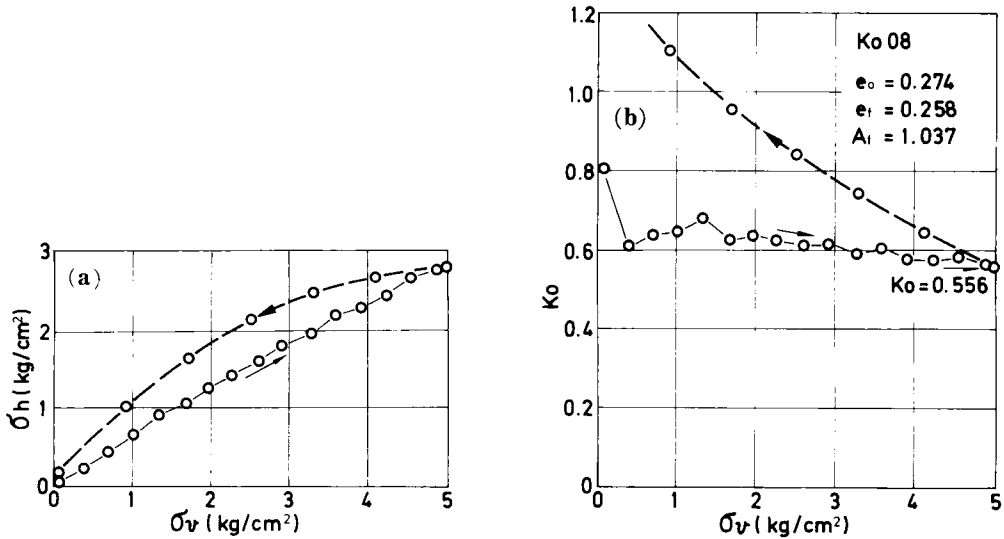


図 9.7 水平応力・静止土圧係数と鉛直応力の関係(つづき)

$K_0$  値は、最初、大きな値を示すが、圧縮の進行とともに急速に一定値に近づいてゆく。今回の実験では、 $K_0 01$  (試験番号を表わす、以下同じ) のように、比較的速やかにほぼ一定値となる場合と、 $K_0 08$  のように実験を行なった  $\sigma_v$  の範囲では、一定値に落ち着かず、わずかながら減少を続ける場合とが生じたが、大局的に見れば、 $\sigma_v = 1 \sim 2$  kg/cm<sup>2</sup> あたりで、ほぼ、一定値に落ち着くとみなしてよいと思われる。除荷過程では、載荷時と同じ経路を通らず、 $K_0$  値は  $\sigma_v$  の減少に伴って増大し、 $\sigma_v \sim K_0$  関係はループを描く。

以上述べたような、 $\sigma_h \sim \sigma_v$  関係および  $K_0 \sim \sigma_v$  関係は、傾向的に、粘土あるいは砂の  $K_0$  圧縮挙動と傾向的に全く同じであり (たとえば Abdelhamid *et al.*, 1976, Singh *et al.*, 1973 などと比較して)、本章に用いた円柱から成る 2 次元粒状体の挙動は、巨視的には、実際の土の挙動に非常によく似ており、少なくとも定性的には粒状体のモデルたり得ることを示唆していると言えよう。

#### 9.4.3 $K_0$ 値と間隙比の関係

間隙比が  $K_0$  値に及ぼす影響については、現在 2 通りの考え方がなされている。第 1 は、初期間隙比  $e_0$  が大きいほど  $K_0$  値も大きいとする考え方であり、第 2 は  $K_0$  は初期間隙比  $e_0$  によらないとする考え方である。

$K_0$  と内部摩擦角  $\phi'$  を関係づけたたとえば Jáky の式  $K_0 = 1 - \sin \phi'$  を用いれば、 $\phi'$  は  $e_0$  と密接な関係にあるから、 $K_0$  は  $e_0$  に依存することになる。

一方落合の提案式  $K_0 = 1 - \sin \phi_{cv}$  を用いることにすると、 $\phi_{cv}$  は初期間隙比によらない一種の材料定数であると考えられているから、 $K_0$  も  $e_0$  によらないことになる。

Cole (1967) その他の研究者による砂の  $K_0$  実測値を検討した落合 (1976) によれば、砂の  $K_0$  値が  $\phi'$  したがって  $e_0$  に依存することは実験的事実であるが、測定値にかなり大きなばらつきがあり、ある一つの土については (粘性土を除外して考えて)、 $e_0$  によりそれほど大きく変化するものではないようである。Moore (1971) の実測値についても同様のことが言える。

図 9.8 は、二次元粒状体についての  $K_0$  値と最終間隙比の関係を示している。 $e$  が大きいほど  $K_0$  が大きいという関係があるようにも見えるが、データ数が少ないこと、ばらつきが大きいことのために断定は困難である (小西, 1978)

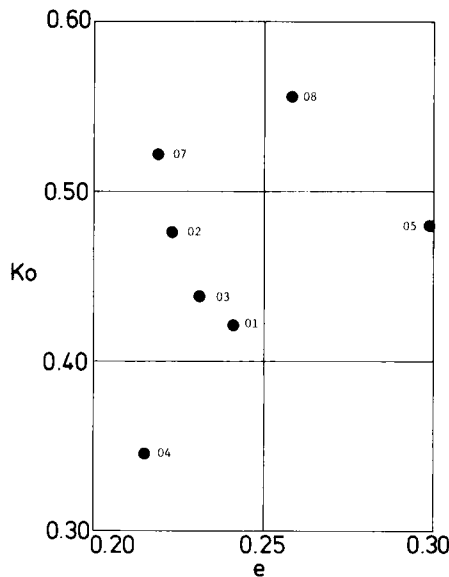


図 9.8 静止土圧係数と間隙比の関係

#### 9.4.4 $K_0$ 値と粒子構造異方性の関係

粒子構造と  $K_0$  値の関係を調べた例は少ない。Abdelhamid, Salah and Krizek (1976) は、カオリン粘土の分散構造スラリーと、綿毛構造スラリーとで、圧密平衡状態における  $K_0$  値に差を見出すことができなかつたと報告している。粒状土の粒子構造と  $K_0$  値に関する報告は今のところ見あたらないようである。しかし、他の諸性質、たとえば、強度や変形特性が、構造に左右されることは周知の事実であり、 $K_0$  値も構造によって左右されるであろう。そこで、粒子構造異方性と  $K_0$  の関係を調べてみた。

(a) 異方度  $A$  2次元粒状体の構造異方性を定量的に表わすため、第4章で導入した異方度 (degree of anisotropy)  $A$  を用いることにする。  $A$  は、粒子接点角  $\beta$  (図9.9) の確率密度関数  $E(\beta)$  を用いて、次のように定義されている。

$$A = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E(\beta) \cos \beta d\beta}{\int_0^{\pi} E(\beta) \sin \beta d\beta}$$

粒状体が統計的等方性であると、 $A = 1$  となる。

粒子接点角  $\beta$  は、試験の各段階で撮影しておいた写真上で測定する。境界の影響などを考慮して、供試体中央部の1/2面積内に重心を有する粒子を対象とした。

粒子接点角の頻度分布の例を、図9.10に示す。これらの分布より、異方度  $A$  を求め、 $K_0$  との関係を示したのが図9.11である。

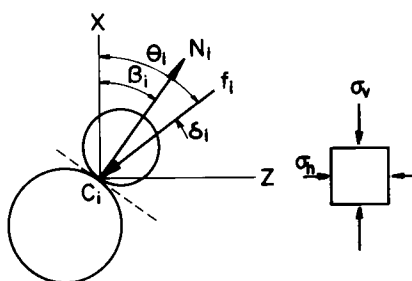


図9.9 粒子接点角と粒子間力の方向角

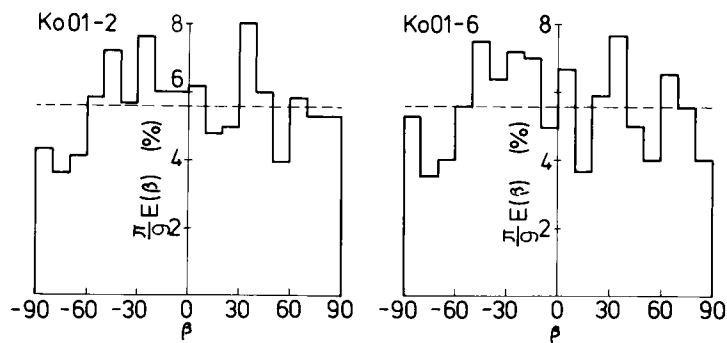


図9.10  $K_0$  圧縮の初期および最終状態における粒子接点角の分布

(左) 初期状態 (右) 最終状態



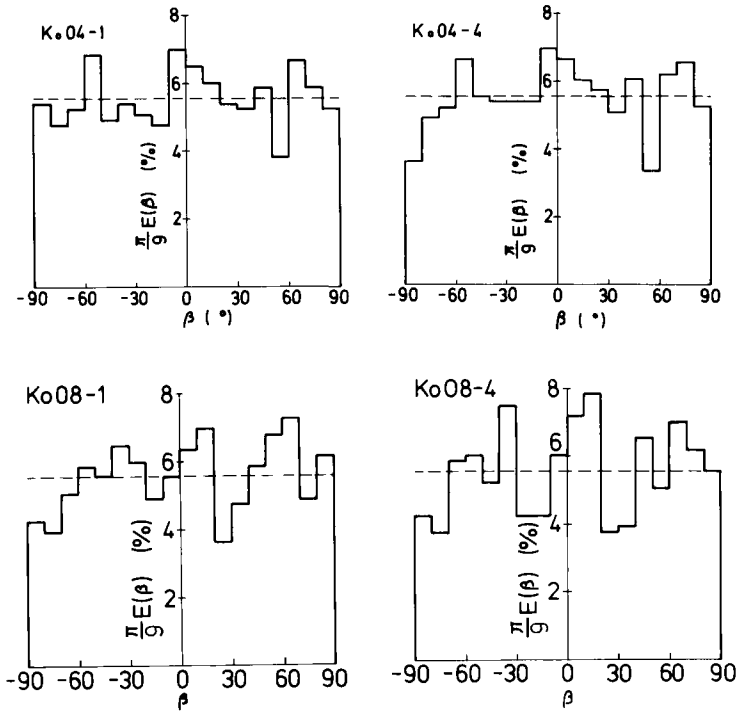


図 9.10  $K_0$  圧縮の初期および最終状態における粒子接点角の分布(つづき)  
(左)初期状態(右)最終状態

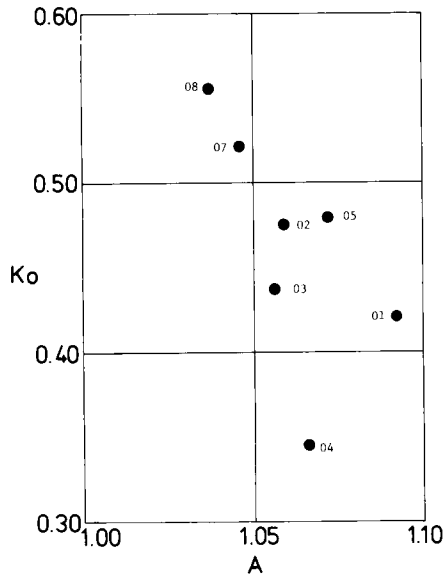


図 9.11 静止土圧係数  $K_0$  と異方度  $A$  との関係

図 9.10 においては、鉛直荷重を加える前の初期粒子接点角分布と、鉛直荷重を上限まで加えた状態における粒子接点角分布を示してある。载荷の初期において、若干の粒子のすべりが生じるので、粒子接点角分布は多少変化するが、第 4～6 章に示した塑性的な変形が卓越する場合に比べると、変化の程度はごく小さいことがわかる。これは、二軸圧縮やせん断の場合に比べて、変形の自由度が少ないことによるが、粒子形状が円であって、方向性を有しないものであることも関係がある。実際の砂においては、粒子形状は不規則で、程度の差こそあれ、粒子に方向性があるから、圧密過程で粒子の配向が生じる。この粒子の配向は粒子接点角分布の変化をもたらすであろう。したがって、実際の砂においては、初期粒子接点角分布とある程度  $K_0$  圧縮を受けたときの粒子接点角分布とは、ある程度の差異が生じるものと考えられる。

図 9.11 は、鉛直荷重最大時における  $K_0$  と、異方度  $A$  の関係を示している。異方度  $A$  が大きいほど、 $K_0$  が小さくなる傾向がはっきり現れている。図 9.8 で見たように、間隙比と  $K_0$  の間にはっきりした相関が現われなかったのに対して、 $A$  と  $K_0$  の間には負の相関があることがわかる。

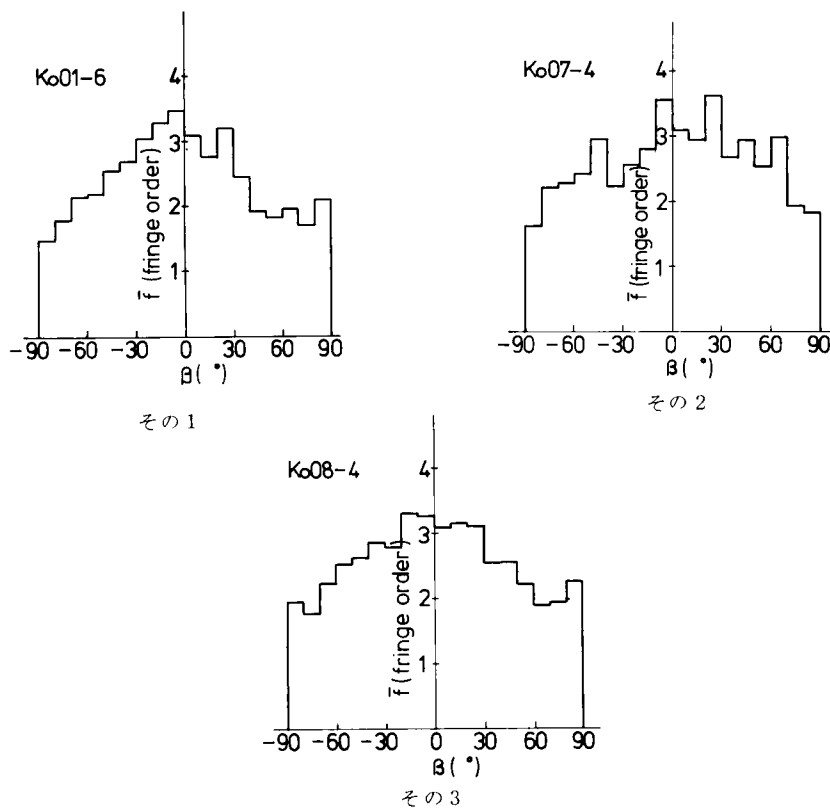


図 9.12 粒子間の平均値

### 9.4.5 粒子間力

$\sigma_v$  最大時に、各接点において生じている粒子間力を、光弾性等色線写真上で測定し、粒子接点角の各区分ごとの平均値を求めてみたのが図 9.12 である。これらの図よりわかることは、粒子間力の期待値は、 $\sigma_v$  方向（ほぼ最大主応力  $\sigma_1$  方向に等しい）に法線を有する接点で最も大きく、 $\sigma_h$  方向（ほぼ最小主応力  $\sigma_3$  方向に等しい）に法線を有する接点で最も小さいという事実である。これは、せん断において観察された事実と傾向的に同じである。

なお、粒子間力は、粒子内の中心より半径の 4/5 の点の縞次数の最大値で表わし、 $\phi 6$ 、 $\phi 10$  mm 粒子の縞次数は  $\phi 8$  mm の粒子のそれに換算、統一してある。また、0.5 次未満の縞次数の接点はほとんど測定対象からはずしてある。

### 9.4.6 接点において発揮されている摩擦角

粒子間力の方向を、等色線縞の形状（概ね粒子間力の方向に長くなる）から推定し、 $\sigma_v$  方向から測って  $\theta_i$  とする。この  $\theta_i$  と粒子接点角  $\beta_i$  との差を  $\delta_i$  とすると（図 9.9 参照）

$$\delta_i = \theta_i - \beta_i$$

は、接点  $C_i$  において発揮（動員、mobilize）されている摩擦角であって、そのとり得る

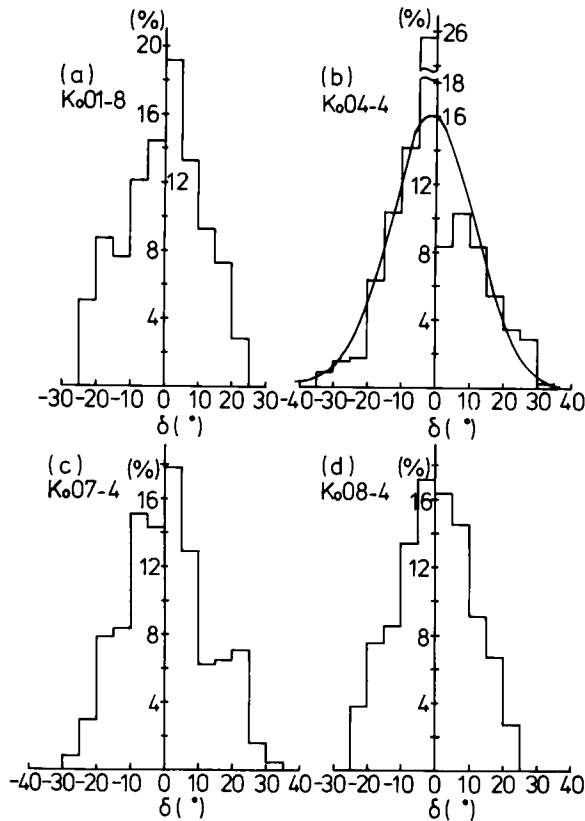


図 9.13 接点において発揮されている摩擦角の分布

範囲は、粒子間（物理）摩擦角を  $\phi_\mu$  とすれば、

$$|\delta_i| \leq \phi_\mu$$

であり、等号が成り立つとき、その接点  $C_i$  はまさにすべろうとする状態にあることになる。

供試体全体について、この  $\delta_i$  の分布を調べてみたのが図 9.13 である。この図に現れた分布は、二軸圧縮やせん断時のものと基本的に同傾向を示しており、 $0^\circ$  を中心に  $\pm \phi_\mu$  付近まで正規分布的な分布をしている。そして  $\delta_i = \phi_\mu$  の条件を満足する接点が  $K_0$  状態においても存在することを示している。

#### 9.4.7 考察

落合の式 ( 5.14 ) によって本実験に用いた粒子の粒子間摩擦角  $\phi_\mu = 20 \sim 30^\circ$  ( 平均  $24^\circ$  ) に対応する  $K_0$  値を計算すると  $K_0 = 0.490 \sim 0.333$  ( 平均値に対しては  $0.422$  ) となる。

一方、 $K_0$  の実験値は、 $K_0 = 0.345 \sim 0.556$  ( 平均  $0.473$  ) となっており、同じ粒子で構成されているにもかかわらず、前述のように粒子構造や間隙比の違いによって、かなりの幅に散らばっていることがわかる。

前項で観察したように、 $K_0$  状態においてもすべり接点が存在するので、第 7 章で導いた、すべり接点に支配される強度式 ( 7.34 )

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = A \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2} \right) \quad ( 7.34 )$$

を適用してみると、図 9.14 の実線のようになる。  $A = 1.0$  における  $K_0$  値が、落合による値に相当している。

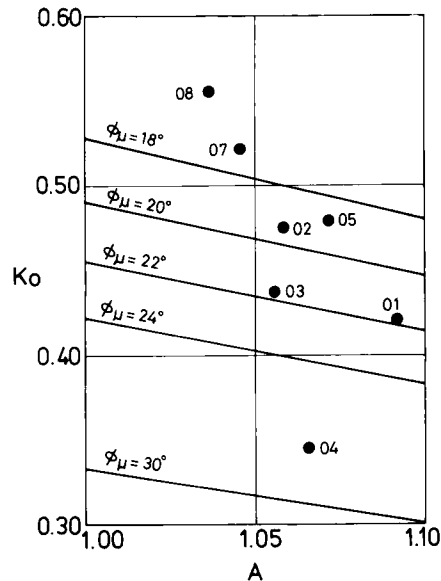


図 9.14 式 ( 7.14 ) による  $K_0$  の推定値 ( 実線 )

実験値は、 $A$  に対して、式 ( 7.34 ) 以上に大きく変化しており、式 ( 7.34 ) によっては完全には説明がつかないようである。式 ( 7.34 ) は、ひずみ硬化時の応力比が異方度  $A$  に比例することを示しており、ごく少数のすべり接点での挙動が全体を支配すると考えたものであった。側方変位を拘束した  $K_0$  圧縮においては、ごく少数の接点ですべりが生じ、粒子群と粒子群との間に相対変位を生じようとしても、二軸圧縮に比べて、拘束が大きく、二軸圧縮の場合と同じようなひずみ硬化はできない。むしろ、初期構造によって規定された粒子間力の伝達の仕方によって、鉛直応力と水平応力の大きさの比が決まってくるように思われる。

したがって、静止土圧状態は完全塑性の状態とは言い難く、かといって、弾性状態でもない。

## 9.5 結 論

本章においては、二次元粒状体の  $K_0$  圧縮を試みた。試験機各部や荷重計のひずみの相乗効果により、完全な静止土圧状態を再現することはできず、擬似的な静止土圧状態での試験となった。粒子接点角と粒子間力の測定も行なって、静止土圧状態を微視的観点から考察し、次のことがわかった。

(1) 二次元粒状体の鉛直応力～鉛直ひずみ関係、鉛直応力～水平応力関係、鉛直応力～静止土圧係数関係はいずれも実際の土の挙動と傾向的に同じであって、 $K_0$  圧縮の特徴をよく表わす。

(2) 静止土圧係数  $K_0$  は、しばしば、内部摩擦角  $\phi'$  との関係を議論されるが、諸研究者によって測定された値は、かなりの範囲に散らばっている。有名な Jáký の式以来、いくつかの  $K_0$  ～  $\phi'$  関係が提案されているが、いずれも大きな差はなく、散らばったデータの中ほどを横切っている。

(3) 二次元粒状体について間隙比と  $K_0$  との関係を調べたがはっきりした相関は見出せなかった。

(4) 粒子接点角の分布を、圧縮の各段階において調べてみると、初期状態と圧密平衡状態とを比べてみても顕著な差異は見出せなかった。したがって、 $K_0$  圧縮時に粒子構造はあまり変化していないと言える。

これは粒子が円柱状で、圧密による粒子配向が生じにくいことと、圧密による間隙比変化が小さいことによるものであろう。

(5) 粒子接点角分布より求めた異方度  $A$  と、 $K_0$  値との関係を調べてみると、 $A$  が大きいほど、つまり、接点の法線方向が鉛直応力方向に集中しているほど、 $K_0$  値は小さくなることがわかった。この傾向は、第7章で述べたひずみ硬化機構だけでは説明できない。

(6) 粒子間力の平均値は粒子接点角  $\beta$  によって変化し、鉛直応力方向において最大、水平応力方向において最小となる。

(7) 接点において発揮されている摩擦角の分布を調べてみると、二軸圧縮やせん断のときと同じく、正規分布状に散らばり、すべり条件を満足する接点も、二軸圧縮やせん断の場合と同程度に存在している。

(8) 以上の微視的観察の結果は、側方変位を許している二軸圧縮の場合や、単純せん断の場合と共通する性質も多いが、ひずみ硬化の機構は完全に同じでないようで、初期構造によって規定される粒子間力の伝達の仕方を考慮に入れなければならないだろう。静止土圧状態はかくして、完全な塑性状態ではないが、かと言って、弾性状態とも言い難い、独特の状態であると考えられる。

## 第10章 結 論

本論文は粒状体の変形・強度の機構を解明することを目的として、光弾性材料を用いた二次元模型粒状体の各種試験結果を述べ、ひずみ硬化の機構や主応力の回転に関する理論的考察を加えたものである。

各章において得られた結論をまとめると次のようになる。

第1章においては、粒状体力学についてその目的・範囲・方法などを述べ、本論文の目的を述べた。

第2章においては、粒状体の力学的性質を支配する諸要因について、従来の研究を引用しながら、物性論的に述べた。すなわち、粒状体の力学的性質は、粒子そのものの性質と粒子の集まりとしての性質に支配され、さらに現実的には試験条件によっても左右されることを述べ、各項について詳しく調べた。

第3章においては、粒状体の変形・強度に関するいくつかの研究について、ダイレイタンスーに関する初期の研究、微視的考察に基づく研究、塑性論的研究、統計論的研究の各々について、概観した。

第4章以降においては、光弾性材料で作られた円柱形粒子から成る二次元模型粒状体を用いて、各種試験を行なった。いずれの試験においても、いわゆる応力・ひずみ関係などの巨視的挙動は砂のそれらと傾向的によく一致しており、粒子レベルでの微視的観察を行うための砂のモデルとしては適当であると判断できる。なお、二次元粒状体で観察された結果は、できる限り、小田の行なった砂での観察結果と比較対照して、その妥当性を確めた。

第4章においては、二次元模型粒状体の二軸圧縮試験結果に基づいて、粒状体におけるひずみ硬化過程の微視的考察を行なった。

粒状体のひずみ硬化過程においては、粒子間接点における接平面に立てた法線方向  $N_i$  が、応力比の増大とともに、最大主応力  $\sigma_1$  の方向へ集中してゆく。ダイレイタンスーも又構造異方性の発達と密接な関係があることがわかった。

粒子間接点において伝達される粒子間力は、各接点において、区々の値をとるが、その平均値は粒子接点角  $\beta$  の函数となっている。すなわち、最大主応力方向で最大値、最小主応力方向で最小値となるような平均値をもつことがわかった。

粒子間接点において発揮されている摩擦角  $\delta_i$  の分布を調べてみると、粒状体全体では、およそ  $0^\circ$  を平均値とする正規分布となっており、すべり条件を満足する接点はごく少数であった。このことは、Horne が述べているように、粒状体の変形は、ある瞬間には剛である粒子群と

粒子群の間の少数の接点でのすべりによって生じていることを意味するものであろう。

第5章においては、二次元粒状体の単純せん断試験結果を述べた。

粒子間力から応力への変換を行ない、応力状態の変化を調べると、主応力軸は、せん断応力の増大に伴って、徐々に回転してゆくことがわかった。またせん断応力の負荷面(水平面)は、必ずしも最大傾角面ではなく、最大せん断応力面でもないことがわかった。

粒子接点の法線方向  $N_i$  は、せん断の場合にも、せん断応力の増大に伴い、最大主応力の方向に集中する傾向があることがわかった。主応力軸が回転するので、集中方向も回転してゆく。単純せん断におけるひずみ硬化の機構は、主応力方向に着目すれば、軸差応力系の下でのひずみ硬化と、ほぼ同じと考えてよいようである。

第6章においては、二次元粒状体の繰返し単純せん断試験結果を述べた。一方向繰返しせん断においては、第1回目のせん断における、ひずみ硬化によって生じた粒子構造が、除荷時にかなり保存されるので、第2回目以降の载荷に対しては、わずかのひずみで直ちに抵抗し得るようになっている。第1回目のせん断を除き、主応力軸の方向と  $N_i$  の集中方向とは、ピーク以外一致しない。第2回目以降の载荷に対しては構造変化の幅は小さく、最終的には、同一経路を往復するようになり、弾性状態に至る。

両方向繰返しせん断においては、せん断応力の向きが変わるごとに最大主応力方向も正負反転するから、 $N_i$  の集中方向も正負反転しなければならない。したがって、反転するごとに、大幅な粒子再配列を要する。また反転ごとにそれ以前のひずみ硬化の影響が(せん断ひずみに関しては)解消され、新たなひずみ硬化を繰返すことがわかった。定常状態においても変形は塑性的である。弾性的な変形は除荷時のみに観察された。これらの結果を基に、構造変化のモデルを考えてみた。

第7章においては、軸差応力下でのひずみ硬化機構を、理論的に考察し、応力比・構造式を導いた。また粒子間力の推定式を導いて、実測値と一致することを確めた。

粒状体全体での  $N_i$  の確率密度函数と、ある面上での確率密度函数の関係を理論的に考察した。

第8章においては、単純せん断における主応力軸の回転に関して、理論的考察を行なった。粒子構造から主応力軸の回転角を求める式を導くとともに、主応力軸の回転角  $\psi$  と応力比  $\tau/\sigma_N$  の間に  $\tau/\sigma_N = x \tan \psi$  なる関係があることを見出した。 $x$  は一種の材料定数である。

第9章においては、粒状体の静止土圧状態の微視的考察を行なった。粒状体の静止土圧状態は、完全な塑性状態でも弾性状態でもない独特の状態であることを認めた。

粒子接点において発揮されている摩擦角を調べると、二軸圧縮の場合と同様、少数のすべり接点が存在する。すべりが生じ、一次元圧密が起るのであるから塑性的な変形であるが、側方の変位が許されないので変形の自由度が小さく、ひずみ硬化は完全には生じることができない



ので、第7章で求めた応力比・構造式では完全には説明できない。

なお静止土圧係数値は初期構造異方性と密接な関係のあることがわかった。

本論文における研究は、土質力学の底辺の一角を占める粒状体力学に属し、土の性質の本質を解明するために、ささやかな貢献をしようとするものである。

このような基礎的研究は、土質工学的諸問題の解決に、直接寄与し得るものではない。しかし、土の性質の本質を把握することが、将来、土質力学および土質工学の真の発展を支える基盤となるであろうことを信じて疑わない。

## 参 考 文 献

略号

Proc.  $x$  th ICSMFE=Proceedings of the  $x$  th International Congress for  
Soil Mechanics and Foundation Engineering.

Jour. SMF Div., ASCE=Journal of the Soil Mechanics and Foundation  
Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers  
[Vol. 99 (1973) まで]

Jour. GTE Div., ASCE=Journal of the Geotechnical Engineering Division,  
Proceedings of the American Society of Civil Engineers [Vol. 100  
(1974) から]

Proc. Roy. Soc. London=Proceedings of the Royal Society of London.

ASTM=American Society for Testing and Materials.

- 1 Abdelhamid, M. Salah and Krizek, Raymond J. (1976) : "At-rest lateral earth pressure of a consolidating clay", Jour. GTE Div., ASCE, 102, GT7, pp. 721—738
- 2 赤井浩一 (1974) : 「土質力学特論」, 森北出版
- 3 赤井浩一・足立紀尚 (1965) : 「有効応力よりみた飽和粘土の一次元圧密と強度特性に関する研究」, 土木学会論文集第113号, pp. 11—27.
- 4 Al-Hussaini, M.M. (1973) : "Influence of relative density on the strength and deformation of sand under plane strain conditions," ASTM STP 523, ASTM, pp. 332~347.
- 5 Arthur, J.R.F. and Dunstan, T. (1969) : "Radiography measurements of particle packing." Nature, 223, pp. 464~468.
- 6 Arthur, J.R.F. and Menzies, B.K. (1972) : "Inherent anisotropy in a sand", Géotechnique, 22, No.1, pp. 115~125.
- 7 馬場賢三 (1969) : 「粒状体問題への光弾性実験法の適用に関する基礎的研究」, 京都大学大学院修士論文 (土木工学専攻) 修402号。
- 8 Baguelin, F., Jezequel, J.F, and Le Mehante, A. (1974), "Self-boring placement method of soil characteristics measurements", Proc. ASCE Spec. Conf. on Subsurface Exploration for Underground Excavation and Heavy Construction, Henniker, New Hampshire, pp. 312~332.
- 9 Barden, L. and Pusch, R. (ed.) (1973) : Proc. Int. Symp. on Soil Structure,

Gothenburg. 1973, Swedish Geotechnical Society.

- 10 Barden, L. and Khayatt, A.J. (1966) : "Incremental strain rate ratios and strength of sand in the triaxial test", *Géotechnique*, 16, No4, pp.338—357.
- 11 Bernal, J.D. and Mason, J. (1960) : "Co-ordination of randomly packed spheres," *Nature*, 188, pp.910—911.
- 12 Biarez, Jean, et Wiendieck, Klaus (1963) : "La comparaison qualitative entre l'anisotropie mécanique et l'anisotropie de structure des milieux pulvérulents", *Comptes-rendus, Académie des Sciences*, t. 256, pp.1217—1220.
- 13 Bishop, A.W., (1954) : Correspondence, *Géotechnique*, 4, pp.43—45.
- 14 Bishop, A.W. (1958) : "Test requirements for measuring the coefficient of earth pressure at rest", *Proc. Conf. Earth Pressure Problems*, Vol. 1, 1958, pp.2~14.  
(赤井・足立 (1965) による)
- 15 Bjerrum, L. and Andersen, K.H. (1972) : "In situ measurement of lateral pressures in clay", *Proc. 5th Eur. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.*, Madrid, Vol. 1, pp.11~20.
- 16 Borowicka Jun, H. (1973) : "Rearrangement of grains by shear tests with sand", *Proc. 8th ICSMFE Vol. 1—1*, pp.71~77.
- 17 Bowden, F.P. and Tabor, D (1950) : "The friction and lubrication of solids", Oxford at the Clarendon Press.
- 18 Brooker, E.W. and Ireland, H.O. (1965) : "Earth pressures at rest related to stress history", *Canadian Geotechnical Journal*, 2, No1, pp.1~15. (Ladd et al. (1977) による)
- 19 Caquot, A. (1934) : *Equilibre des massifs à frottement interne. Stabilité des terres pulvérulents et cohérentes*, Gauthier-Villars, Paris. (Caquot et Kerisel (1956) による)
- 20 Caquot, A. et Kerisel, J. (1956) : *Traité de mécanique des sols*, 3e édition, Gauthier-Villars, Paris.
- 21 Caquot, A. et Kerisel, J. (1965) : "Classification des propriétés des argiles saturées en fonction de l'indice des vides", *Proc. 6th ICSMFE*, Vol 1, pp.189~192.
- 22 Chang, M.F., Moh, Z.C., Liu, H.H. and Viranuvut, S. (1977) : "A method of determining the in situ  $K_0$  coefficient", *Proc. 9th ICSMFE*, Vol. 1, pp.61—64.
- 23 Cole, E.R.L. (1967) : "The behaviour of soils in the simple shear apparatus", Ph.D Thesis, Cambridge University.

- 24 Cornforth, D.H. (1973) : "Prediction of drained strength of sands from relative density measurements", ASTM STP523, ASTM, pp.281~303.
- 25 Curray J.R. (1956) : "Analysis of two-dimensional orientation data", Jour. Geol. Vol. 64, pp.117~131.
- 26 Dantu, P. (1957) : "Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents", Proc. 4th ICSMFE, 1, pp.144-148.
- 27 Dantu, P. (1968) : "Étude statistique des forces intergranulaires dans un milieu pulvérulent, Géotechnique, 18, pp.50~55.
- 28 de Josselin de Jong, G. (1959) : "Statics and kinematics in the failable zone of a granular material", Delft (Morgenstern and Tchalenko, (1967) による)
- 29 de Josselin de Jong, G. (1971) : "The double sliding, free rotating model for granular assemblies", Géotechnique, 21, pp.155-163.
- 30 Deresiewicz, H. (1958) : "Mechanics of granular matter", Advances in Applied Mechanics, Vol. V, Academic Press, New York, pp.233~306.
- 31 Drescher, A. and de Josselin de Jong, G. (1972) : "Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material", Jour. Mech. Phys. Solids, 20, pp.337-351.
- 32 Drescher, A. (1976) : "An experimental investigation of flow rule for granular material using optically sensitive glass particle", Géotechnique, 26, pp.591-601.
- 33 Drucker, D.C. and Prager, W. (1952) : "Soil mechanics and plastic analysis or limit design", Quarterly Appl. Math., 10, pp.157-165.
- 34 Farouki, O.T. and Winterkorn, H.F. (1964) : "Mechanical properties of granular systems". Highway Research Record No.52 pp.10~42. (最上編「土質力学」第8章による)
- 35 Fedá, J. (1969) : "Effect of structure on the shearing resistance of sand", Proc. 7th ICSMFE. Vol.1, pp.121~126.
- 36 Gibson, R.E. (1953) : "Experimental determination of the true cohesion and true angle of internal friction in clays", Proc. 3rd ICSMFE, 1, pp.126-130.
- 37 Gudehus, Gerd (1968) : "Gedanken zur statistischen Bodenmechanik", Der Banningenieur, 43, Seiten 320-326.
- 38 Hansen, Bent (1961) : "Shear box tests on sand", Proc. 5th. ICSMFE, 1, pp.127-131.
- 39 春山元寿 (1969) : "Effect of water content on the shear characteristics of

granular soils such as Shirasu”, *Soils and Foundations*, 9, No3, pp.35–57.

- 40 橋口公一 (1975) : 「粒状体の応力比一構造式に関する省察」, 土質工学会論文報告集, 15, No3, pp.83–91.
- 41 畠昭次郎, 太田秀樹, 吉谷進 (1969) : “On the state surface of soils”, 土木学会論文報告集, 172, pp.97–117.
- 42 Hill, Robert (1950) : “The mathematical theory of plasticity”, Oxford, Clarendon Press.
- 43 広瀬誠・砂の相対密度測定法小委員会 (1977) : 「相対密度測定法の現状と一斉試験結果」, 第12回土質工学研究発表会講演集, 土質工学会, pp.165~168.
- 44 Horn, H.M. and Deer, D.U. (1962) : “Frictional characteristics of minerals”, *Géotechnique*, 12, pp.319–335.
- 45 Horne, M.R. (1965) : “The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles”, Parts 1 and 2, *Proc. Royal Society of London, Series A*, 286, pp.62–97.
- 46 Horne, M.R. (1969) : “The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles”, Part 3, *Proc. Royal Society of London, Series A*, 310, pp.21–34.
- 47 今井常雄 (1976) : 「土のようなもののポアソン比」, 土と基礎, Vol.24, No7, pp.89–90.
- 48 石原研而 (1976) : 「土質動力学の基礎」, 鹿島出版会
- 49 石原研而, 龍岡文夫, 安田進 (1975) : “Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stresses”, *Soils and foundations*, 15, No1, pp.29~44.
- 50 Jáky, J. (1944) : “A nyugalmi nyomás tényezője (Ruhedruckziffer)”. *Magyar Mérnök és Építész Egylet Közlönye*, No22, pp.355~358. (Kézdi (1962) S.24~38, 148~151 による)
- 51 Jáky, J. (1948) : “Pressure in silos”, *Proc. 2nd ICSMFE*, 1, pp.103–107.
- 52 Kallstenius, Torsten and Bergau, W. (1961) : “Research on the texture of granular masses”, *Proc. 5th ICSMFE*, 1, pp.165–170.
- 53 Kenney, T.C. (1967) : “Field measurements of in situ stresses in quick clays”, *Proc. Geotechnical Conf. Oslo, 1967*, 1, 49–55.
- 54 Kézdi, Árpád (1962) “Erddrucktheorien”, Springer-Verlag, Berlin.
- 55 Kézdi, Árpád (1964) : Discussion to Winterkorn's paper, *Highway Research Record*, No52. (最上編, 「土質力学」第8章による)
- 56 Kézdi, Árpád (1966) : “Grundlagen einer allgemeinen Bodenphysik”, *VDI-Zeitschrift*, 108, Seiten 161~166.
- 57 Kolbuszewski, J.J. (1948) : “An experimental study of the maximum and minimum

- porosities of sands”, Proc. 2nd ICSMFE, 1, pp.158~165.
- 58 Kondner, Robert L. (1963) : “Hyperbolic stress-strain response : cohesive soils”, Jour. SMF Div., ASCE, 89, SM1, pp.115—143.
- 59 小西純一 (1972) : 「粒状体の変形機構について」, 土木学会第27回年次学術講演会講演集, 3, pp.69—70.
- 60 小西純一 (1973 a) : 「粒状体の変形機構について」, 土木学会中部支部昭和47年度研究発表会講演集, pp.243—246.
- 61 小西純一 (1973 b) : 「せん断変形中の粒状体における粒子間伝達力」, 第8回土質工学研究発表会講演集, pp.181—184.
- 62 小西純一 (1973 c) : 「微視的にみた粒状体のせん断過程」, 信州大学工学部紀要, 第34号, pp.179—194.
- 63 小西純一 (1973 d) : 「粒状体のせん断にともなう粒子間伝達力の変化について」, 土木学会第28回年次学術講演会講演集, 3, pp.62—63.
- 64 小西純一 (1974 a) : 「せん断中の粒状体における主応力軸について」, 土木学会中部支部昭和48年度研究発表会講演集, pp.111—112.
- 65 小西純一・小田匡寛 (1974) : 「粒状体のせん断における主応力軸の方向について——二次元光弾性モデル実験——」, 第9回土質工学研究発表会講演集, pp.179—182.
- 66 小西純一 (1974 b) : 「粒子間まさつ角のせん断強度および微視的構造に対する影響」, 土木学会第29回年次学術講演会講演集, 3, pp.43—44.
- 67 小西純一 (1975 a) : “A microscopic study on shear mechanism of granular materials”, Discussion, Soils and Foundations, 15, No.1, pp.98—102.
- 68 小西純一 (1975 b) : 「繰返しせん断を受ける粒状体の構造について」, 第10回土質工学研究発表会講演集, pp.121—124.
- 69 小西純一 (1975 c) : 「2次元粒状体せん断時の応力状態」, 土木学会第30回年次学術講演会講演集, 3, pp.9—10.
- 70 小西純一・吉田晃 (1976) : 「粒状体せん断時の主応力方向と粒子配列について」, 土木学会中部支部昭和50年度研究発表会講演集, pp.115—116.
- 71 小西純一 (1976 a) : 「粒状体の変形機構について——特に粒子回転の影響について——」, 土木学会第31回年次学術講演会講演集, 3, p.57.
- 72 小西純一 (1976 b) : 「粒状体の変形機構に関する光弾性モデル実験」, 第26回応用力学連合講演会講演論文抄録集, pp.215—216.
- 73 小西純一 (1977 a) : 「粒状体の応力と粒子間力について」, 土木学会中部支部昭和51年度研究発表会講演集, pp.139—140.

- 74 小西純一 (1977 b) : 「粒状体の微視的構造と応力の関係について」, 土木学会第32回  
年次学術講演会講演集, 3, pp.84—85.
- 75 小西純一 (1978) : “Microscopic model studies on the mechanical behaviour of  
granular materials”, Proc. US-Japan seminar on continuum mechanical and  
statistical approaches in the mechanics of granular materials, Sendai. (in print)
- 76 Ladd, C.C., Foott, R., Ishihara, K., Schlosser, F. and Poulos, H.G. (1977) :  
“Stress-deformation and strength characteristics”, State-of-the-art report, Proc. 9th  
ICSMFE, 2, pp.421—494.
- 77 Lee, I.K. (1966) : “Stress-dilatancy performance of feldspar”, Jour. SMF Div.,  
ASCE, 92, SM2, pp.79—103.
- 78 Litwiniszyn, Jerzy (1964) : “An application of the random walk argument to the  
mechanics of granular media”, IUTAM Symposium, Grenoble, Kravtchenko and  
Sirieys (ed.) : “Rheology and soil mechanics”, Springer, Berlin, 1966, pp.82—89.
- 79 Marsal, R.J. (1965) : “Stochastic processes in the grain skeleton of soils”, Proc. 6th  
ICSMFE, 1, pp.303—307.
- 80 Massarsch, K.R., Holtz, R.D., Holm, B.G. and Fredriksson, A. (1975), “Measure-  
ment of horizontal in situ stresses”, Proc. ASCE Spec. Conf. on In Situ Measure-  
ment of Soil Properties, Raleigh, Vol.1, pp.266—286.
- 81 松尾稔・富永真生 (1975) : 「土圧」, 最上監修: 土質工学基礎叢書 7, 鹿島出版会
- 82 松尾新一郎・福本武明 (1976) : 「マサ土の破碎性に影響する諸要因」, 土質工学会論  
文報告集, 16, No 4, pp.85~92.
- 83 松尾新一郎・福本武明 (1976) : 「マサ土の縮固め特性に及ぼす粒子破碎の影響」, 土  
質工学会論文報告集, 16, No 4, pp.93~102.
- 84 松岡元 (1973) : “Deformation characteristics of soil”, 工学博士論文, 京都大  
学
- 85 三笠正人 (1964) : 「土の工学的性質の分類法とその意義, 土と基礎」, 第12巻 4号,  
pp.17~24.
- 86 三浦哲彦・山内豊聡 (1977) : 「砂のせん断特性に及ぼす粒子破碎の影響」, 土木学会  
論文報告集, 260, pp.109—118.
- 87 三浦哲彦・山内豊聡・上山邦彦 (1977) : 「高圧三軸応力下における粒状材料の粒子  
破碎について」, 材料, 26, No288, pp.815—818.
- 88 最上武雄 (1965), “A statistical approach to the mechanics of granular materials”,  
Soil and Foundation, 5, No2, pp.26—36.

- 89 最上武雄 (1966) “Angle of internal friction of the granular material and a simple transient phenomenon”, 土木学会論文集., 128, pp.53—62.
- 90 最上武雄 (1966) : “On the deformation of granular material”, 土木学会論文集, 129, pp.39—44.
- 91 最上武雄 (1967) : “Mechanics of granular material composed of particles of various sizes”, 土木学会論文集, 137, pp.43—47.
- 92 最上武雄 (1968) : 「レキの内部摩擦角と常数  $k$  について」, 土と基礎, 16, No.11, pp.29—37.
- 93 最上武雄・今井五郎 (1967) : “On the failure of granular material”, Soil and Foundation, 7, No.3, pp.1—19.
- 94 最上武雄・吉越洋 (1969) : “On the angle of internal friction of rockfill materials”, Speciality Session No.13, 7th ICSMFE, pp.25—42.
- 95 最上武雄 (1969) : 「粒状体の力学」, 最上武雄編「土質力学」, 技報堂, 第8章
- 96 最上武雄 (1973) : 最上武雄博士論文選集, 東京大学工学部土木工学教室
- 97 最上武雄 (1976) : 「粒状体の力学」, 第26回応用力学連合講演会講演集, pp.25—30.
- 98 Moore, C.A. (1971) : “Effect of mica on  $K_0$  compressibility of two soils”, Jour. SMF Div, ASCE, 97, SM9, pp.1275—1292.
- 99 Morgenstern, N.R. and Tchalenko, J.S. (1967) : “Microscopic structures in kaolin subjected to direct shear”, Géotechnique, 17, pp.309—328.
- 100 諸戸靖史 (1976) : “A new parameter to measure degree of shear deformation of granular material in triaxial compression tests”, Soils and Foundations, 16, No.4, pp.1—9.
- 101 村山朔郎 (1964) : “A theoretical consideration on a behaviour of sand”, Rheology and Soil Mechanics, IUTAM Symposium, Grenoble. Springer-Verlag, Berlin 1966. pp.146—159.
- 102 村山朔郎 (1969) : “Stress-strain-time behavior of soils subjected to deviatoric stress”, Proc. 7th ICSMFE, 1, 1969, pp.297—305.
- 103 村山朔郎 (1975) : 「物性論的にみた砂の力学的挙動」, 京都大学防災研究所退官記念講演 (昭和50年2月4日)
- 104 村山朔郎 (1975) : 「弾性状態にある砂の構成式」, 土木学会論文報告集, 236, pp. 125—137.
- 105 村山朔郎 (1976) : 「塑性状態にある砂の構成式」, 土木学会論文報告集, 251, pp. 77—89.



- 106 村山朔郎・松岡元 (1970) : 「2次元モデルによる粒状体のせん断現象の微視的考察」京大防災研究所年報第13号B, pp.505~523.
- 107 村山朔郎・松岡元・坂東弘 (1970) : 「粒状体のヒステリシスループに関する2,3の考察」, 土木学会関西支部年次学術講演会講演集, III-25
- 108 Nascimento, U. (1977) : "Goniometer for determining interparticle friction", Proc. 9th ICSMFE, 1, pp.229~233.
- 109 Newland, P.L. and Allely, B.H. (1957) : "Volume changes in drained triaxial tests on granular materials", Géotechnique, 8, pp.17-34.
- 110 落合英俊 (1975) : 「直接せん断試験における砂の挙動」, 土質工学会論文報告集, 15, No.4, pp.93-100.
- 111 落合英俊 (1976) : 「砂の静止土圧係数」, 土質工学会論文報告集, 16, No.2, pp.105-111.
- 112 落合英俊 (1977) : 「砂の直接せん断試験における主応力の表示とその応用に関する研究」, 工学博士論文, 九州大学
- 113 小田匡寛 (1972 a) : "Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material", Soils and Foundations, 12, No.1, pp.17-36.
- 114 小田匡寛 (1972 b) : "The mechanism of fabric change during compressional deformation of sand", Soils and Foundations, 12, No.2, pp.1~18.
- 115 小田匡寛 (1972 c) : "Deformation mechanism of sand in triaxial compression tests", Soils and Foundations, 12, No.4, pp.45-63.
- 116 小田匡寛 (1974) : "A mechanical and statistical model of granular material", Soils and Foundations, 14, No.1, pp.13-27.
- 117 小田匡寛 (1975) : "Fabrics and their effects on the deformation behaviours of sand," 工学博士論文, 東京大学
- 118 小田匡寛 (1977) : "Co-ordination number and its relation to shear strength of granular material", Soils and Foundations, 17, No.2, pp.29-42.
- 119 小田匡寛・小石川功 (1977) : "Anisotropic fabric of sands", Proc. 9th ICSMFE, 1, pp.235-238.
- 120 小田匡寛・小石川功・樋口利男 (1978) : "Experimental study of anisotropic shear strength of sand by plane strain test", Soils and Foundations, 18, No.1, pp.25-38.
- 121 小田匡寛・小野寺透・小西純一 (1973) : 「クラスティック材料の強度変形に関する粒状体の力学から岩の力学へのアプローチ」, 第4回岩の力学シンポジウム講演集, pp.61-66.

- 122 小田匡寛・小西純一 (1974 a) : 「粒状体のせん断における主応力軸の方向について——理論的考察——」, 第9回土質工学研究発表会講演集, pp.183—186.
- 123 小田匡寛・小西純一 (1974 b) : “Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear”, *Soils and Foundations*, 14, No4, pp.25—38.
- 124 小田匡寛・小西純一 (1974 c) : “Rotation of principal stresses in granular material during simple shear”, *Soils and Foundations*, 14, No4, pp.39—53.
- 125 小田匡寛・小西純一 (1975) : 「粒状体の粒子接点間力について」, 土木学会第30回年次学術講演会講演集, 3, pp.3—4.
- 126 大草重康 (1972) : 「土木地質学」, 朝倉書店
- 127 大南正瑛・塩沢和章 (1976) : 「多結晶体の強度と破壊」, 培風館
- 128 Poorooshasb, H.B. (1971) : “Deformation of sand in triaxial compression”, *Proc. 4th Asian Reg. Conf. ISSMFE*, pp.63—66.
- 129 Poulos, H.G. and Davis, E.H. (1972) : “Laboratory determination of in-situ horizontal stress in soil masses”, *Géotechnique*, 22, pp.177—182.
- 130 Proctor, D.C. and Barton, R.R. (1974) : “Measurements of the angle of interparticle friction”, *Géotechnique*, 24, No4, pp.581—604.
- 131 Reynolds, Osborne, 1885, “On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact”, *Philosophical Mag. S.5*, 20, No127, pp.469—481.
- 132 Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Wroth, C.P. (1958) : “On the yielding of soils”, *Géotechnique*, 9, pp.72—83.
- 133 Roscoe, K.H., Bassett, R.H. and Cole, E.R.L. (1967) : “Principal axes observed during simple shear of a sand”, *Proc. Geotechnical Conf. Oslo, 1967*. pp.231—237.
- 134 Roscoe, K.H. and Burland, J.B. (1968) : “On the generalized stress-strain behaviour of ‘wet’ clay”, *Engineering Plasticity*, Cambridge Univ. Press, pp. 535—609.
- 135 Rowe, P.W. (1957) : “ $e_c = 0$  hypothesis for normally loaded clays at equilibrium”, *Proc. 4th ICSMFE, Vol.1*, pp.189—192.
- 136 Rowe, P.W. (1962) : “The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact”, *Proc. Royal Society of London, Series A*, 269, pp.500—527.
- 137 Rowe, P.W. (1963) : “Stress-dilatancy, earth pressures, and slopes”, *Jour. SMF Div., ASCE*, 89, SM3, pp.37—61.
- 138 Rowe, P.W. (1969) : “Osborne Reynolds and dilatancy”, *Géotechnique*, 19,

- pp.1~5. (散弾を入れた容器を手にした Reynolds の肖像画が添えられている)
- 139 Rowe, P.W. (1969) : "The relation between the shear strength of sands in triaxial compression, plane strain and direct shear", *Géotechnique*, 19, No.1, 75~86.
- 140 Rowe, P.W., Barden, L. and Lee I.K. (1964) : "Energy components during the triaxial cell and direct shear tests", *Géotechnique*, 14, No.3, pp.247~261.
- 141 佐武正雄 (1978) : "Constitution of mechanics of granular materials through the graph theory", Preprint, US-Japan seminar on continuum mechanical and statistical approaches in the mechanics of granular materials, Sendai, pp.203~215.
- 142 Schofield, A. and Wroth, P. (1968) : "Critical state soil mechanics" McGraw-Hill, London, p.146.
- 143 関陽太郎 (1976) : 「建設技術者のための岩石学」, 共立出版
- 144 Selig, E.T. and Ladd, R.S. (ed) (1973) : "Evaluation of relative density and its roles in geotechnical projects involving cohesionless soils", ASTM STP523, ASTM.
- 145 Silver, M.L. & H.B. Seed (1971a) : "Deformation characteristics of sands under cyclic loading", *Jour. SMF Div., ASCE*, 97, NoSM8, pp.1081~1098.
- 146 Silver, M.L. & H.B. Seed (1971b) "Volume change in sands during cyclic loading", *Jour. SMF Div., ASCE*, 97, NoSM9, pp.1171~1182.
- 147 Silver, M.L. and Park, T.K. (1976) : "Liquefaction potential evaluated from cyclic strain-controlled properties tests on sands", *Soils and Foundations*, 16, No.3, pp.51~65.
- 148 Singh, R., Henkel, D.J. and Sangrey, D.A. (1973) : "Shear and Ko swelling of overconsolidated clay", *Proc. 8th ICSMFE*, Vol.1.2, pp.367~376.
- 149 Skempton, A.W. (1961) : "Horizontal stresses in an over-consolidated Eocene clay", *Proc. 5th ICSMFE*, 1, pp.351~357.
- 150 Skinner, A.E. (1969) : "A note on the influence of interparticle friction on the shearing strength of a random assembly of spherical particles", *Géotechnique*, 19, pp.150~157.
- 151 Smith, W.O., Foote, P.D. and Busang, P.F. (1929) : "Packing of homogeneous spheres", *Physical Review*, 34, pp.1271~1274.
- 152 曾田範宗 (1954) : 「摩擦と潤滑」, 岩波全書192, 岩波書店
- 153 Sowers, G.F., Robb, A.D., Mullis, C.H. and Glenn, A.J. (1957) : "The residual lateral pressures produced by compacting soils.", *Proc. 4th ICSMFE*, II, pp.243~247.

- 154 谷本喜一 (1971) : 「液状化に関する実際上の諸問題」, 土木学会第26回年次学術講演会講演集Ⅲ, pp.Ⅲ-9~12.
- 155 龍岡文夫 (1974) : 「粒状体の塑性論的研究について」, 土質工学会粒状体の力学特性研究委員会資料
- 156 龍岡文夫・石原研而 (1974 a) : “Yielding of sand in triaxial compression”, *Soils and Foundations*, 14, No2, pp.63-76.
- 157 龍岡文夫・石原研而 (1974 b) : “Drained deformation of sand under cyclic stresses reversing direction”, *Soils and Foundations*, 14, No3, pp.51-65.
- 158 龍岡文夫 (1978) : 「粒状体の変形に関する理論的研究について」, 土と基礎, 26, 第6号, pp.82-89, 第7号, pp.55-63.
- 159 Tavenas, F.A., Blanchette, G., Leroueil, S., Roy, M., and La Rochelle, P. (1975), “Difficulties in the in-situ determination of  $K_0$  in soft sensitive clays,” *Proc. ASCE Spec. Conf. on In-Situ Measurement of Soil Properties*, Raleigh, Vol.1, p.450-476.
- 160 Taylor, D.W. (1948) : “Fundamentals of soil mechanics”, John Wiley and Sons.
- 161 Terzaghi, K. (1920) : “Old earth pressure theories and new test results”. *Engineering News Record*, 85, No14. pp.632-637, Sept. 1920. (“From Theory to Practice in Soil Mechanics”, John Wiley & Sons, 1960 所載)
- 162 Terzaghi, Karl, (1925) : “Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage” Franz Deuticke, Wien.
- 163 徳江俊秀 (1975) : 「粒状体のセン断機構に関する三次元モデル」, 第10回土質工学研究発表会講演集, pp.125-128.
- 164 徳江俊秀 (1978) : “A consideration about Rowe’s minimum energy ratio principle and a new concept of shear mechanism”, *Soils and Foundations*, 18, No1, pp.1-10.
- 165 陶野郁雄 (1975) : 「砂粒子の続成と一軸圧縮性状」, 第10回土質工学研究発表会講演集, pp.201-204.
- 166 陶野郁雄 (1975) : 「堆積物の続成作用と力学性状」, 地質学雑誌, 81, 第9号, pp.547-558.
- 167 陶野郁雄・砂の相対密度測定法小委員会 (1977) : 「紙漏斗による砂の最小密度試験」, 第12回土質工学研究発表会講演集, pp.161-164.
- 168 Tschebotarioff, G.P. (1951) : “Soil mechanics, foundations, and earth structures”, McGraw-Hill, 石井靖丸訳「チェボタリオフの土質工学」技報堂, 1958
- 169 Tschebotarioff, G.P. and J.D. Welch (1948) : “Effect of boundary conditions on lateral earth pressures”, 2nd ICSMFE, 3, pp.308-313.

- 170 Tschebotarioff, G.P. and Welch, J.D. (1948) : "Lateral earth pressures and friction between soil minerals", Proc. 2nd ICSMFE, 7, pp.135—138. (G.P. チェボタリオフ著, 石井靖丸訳 : 「チェボタリオフの土質工学」上巻, 技報堂, 1957, pp.130~134による)
- 171 辻二郎・西田正孝・河田幸三 (1965) : 「光弾性実験法」日刊工業新聞社, p.309.
- 172 Vesić, A.S. and Clough, G.W. (1968) : "Behaviour of granular materials under high stresses", Jour. SMF Div, ASCE, 94, SM3, pp.661—688.
- 173 Wiendieck, Klaus, (1967) "Zur Struktur körniger Medien", Die Bautechnik, 44. Jg., Heft 6, Seiten 196—199.
- 174 Windisch, Stephen J. and Soulie, Michel (1970) : "Technique for study of granular materials", Jour. SMF Div. ASCE, 96, SM4, pp.1113—1126.
- 175 Winterkorn, H.F. (1953) : "Macromeritic liquids", ASTM Spec. Tech. Publ. 156, pp.77—89.
- 176 Wroth, C.P. and Hughes, J.M.O. (1973) : "An instrument for the in-Situ measurement of the properties of soft clays", Proc 8th ICSMFE, Vol.1.2, 487—494. (1/ 75)
- 177 八木則男 (1971) 「繰返しせん断による砂の変形特性」第6回土質工学研究発表会講演集, pp.193—196.
- 178 八木則男 (1974) 「繰返し荷重を受けた砂の力学特性とその応用に関する研究, 工学博士論文, 京都大学
- 179 八木則男・de Josselin de Jong, G. (1978) : 「粒状土の流れ則に関する実験的研究——特に主応力方向と主ひずみ方向の不一致について——」, 第13回土質工学研究発表会, pp.401—404.
- 180 山口柏樹 (1972) 「静止土圧に関する二三の考察」土木学会第27回年次学術講演会講演集第3部, pp.109—110.
- 181 山内豊聡・安原一哉 (1974) : 「粘性土の静止土圧係数に関する一考察」, 土質工学会論文報告集, 14, No2, pp.113—118.
- 182 吉見吉昭・砂の相対密度測定法小委員会 (1977) : 「砂の相対密度測定法の試案」, 第12回土質工学研究発表会講演集, pp.157~160.
- 183 Yoshimi, Y. and Tohno. I. (1973) : "Statistical significance of the relative density", Evaluation of relative density and its role in geotechnical projects involving cohesionless soils, ASTM STP523, ASTM, pp.74~84.

## 主な記号

- $A$  : 異方度 ( 平面応力・二軸圧縮における ), 式 ( 4.11 )  
 $A_p$  : 定数, 式 ( 6.1 )  
 $A_1, A_2, A_3, A_4, B_4$  : 粒子構造を表わす係数, 式 ( 8.22 ), ( 8.25 )  
 $B, B_0$  : 供試体の幅, 供試体の初期の幅  
 $C_i$  :  $i$  番目の粒子間接点  
 $C_n$  : 定数, 式 ( 7.19 )  
 $C_1, C_2, C_3$  : 実験定数 ( 小田 ), 式 ( 4.16 ) ~ ( 4.18 )  
 $D = 1 - \dot{v} / \dot{\epsilon}_1$  ; ダイレイタンスー係数  
 $D$  : せん断変位  
 $E(\alpha, \beta)$  : 粒子間接点  $C_i$  における接平面の法線方向の確率密度函数, 式 ( 4.2 )  
 $E(\beta)$  : 同上, ただし軸対称あるいは平面応力の場合, 式 ( 4.4 ), ( 4.5 )  
 $E_p(\alpha, \beta)$  : 任意の傾きをもつ面  $P$  上の粒子間接点に関する確率密度函数, 7.4.2  
 $E_x, E_y, E_z$  :  $X$  面,  $Y$  面,  $Z$  面上の粒子間接点に関する確率密度函数, 7.4.3  
 $E_1, E_2, E_3$  : 各主応力面上の粒子間接点に関する確率密度函数, 7.4.2  
 $F, F_1, F_2, \dots$  : 函数を表わす  
 $H, H_0$  : 供試体高さ, 供試体初期高さ  
 $K = \tan^2(\pi/4 + \phi_\mu/2)$ , 式 ( 4.1 ), 式 ( 8.23 )  
 $K_0$  : 静止土圧係数, 第9章  
 $M$  : 全粒子数, 式 ( 4.6 )  
 $M_1, M_2, \dots$  :  $\beta$  の各区間に入る粒子数, 式 ( 4.6 )  
 $\bar{M}$  : 集中度, 式 ( 5.2 )  
 $N_{ij}$  : 粒子  $i$  で測定した, 粒子  $j$  との接点における編次数, 式 ( 4.19 )  
 $N_{xx}, N_{xy}, N_{xz} \dots$  : 粒子構造を表わすテンソルの成分, 7.4.3  
 $N_i, N_i^1, N_i^2$  : 粒子間接点  $C_i$  における接平面の法線方向  
 $N, N_i$  : 粒子間接における接平面の単位法線ベクトル  
 $N^x, N^y, N^z$  :  $X, Y, Z$  面上の接点の法線ベクトルの和, 7.4.3  
 $P$  : 垂直力  
 $R = \sigma_1 / \sigma_3$  ; 主応力比 ( 軸対称, 平面応力における )  
 $S$  : せん断力  
 $\bar{\Delta S}$  : 粒子間接点における平均接触面積 ( 小田 ), 式 ( 4.15 )  
 $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$  :  $X, Y, Z$  面の面積

$\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$  : 各主応力面の面積

$S_1/S_3$  : fabric index (小田); 構造異方性を表わす指数, 式(4.15),  
(4.16)

$X, Y, Z$  : 直交座標軸, 第4章, 第7章, 第9章ではそれぞれ最大, 中間, 最小主応力方向に一致させる. 第5章, 第6章, 第8章では $X$ は鉛直方向,  $Z$ はせん断方向に一致させる

$X', Y', Z'$  : 直交座標軸, 最大, 中間, 最小主応力方向に一致させる, 第8章

$a, b, c, d, e, f$  : 実験定数, 式(4.12)(4.14)

$a, b$  : 定数, 式(6.1)

$e, e_0$  : 間隙比, 初期間隙比

$e_x, e_y, e_z$  :  $X, Y, Z$ 方向の単位ベクトル

$f, \mathbf{f}$  : 粒子間力, 粒子間力ベクトル

$f_i, \mathbf{f}_i$  : 同上(接点 $C_i$ における)

$\bar{f}_{xi}, \bar{f}_{yi}, \bar{f}_{zi}$  : 粒子間力の $X, Y, Z$ 方向成分の平均値

$\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$  : 粒子間力の各主応力方向成分の平均値

$f_{xi}^x, f_{yi}^y, f_{zi}^z$  :  $X$ 面上の粒子間力の $X, Y, Z$ 方向成分(上付添字が考えている面を表わす)

$\bar{f}_x^x, \bar{f}_y^y, \bar{f}_z^z$  :  $X$ 面上の粒子間力の $X, Y, Z$ 方向成分の平均値

$\bar{f}_{11}, \bar{f}_{22}, \bar{f}_{33}$  : 各主応力面上の粒子間力の各主応力方向成分の平均値, 式(7.13)

$i$  : 個々の粒子あるいは個々の接点を表わす添字

$i, j, k$  : 同上, ただし区別する必要があるとき

$k_1, k_2, k_3$  : 構造を表わす係数

$l$  : 線分の長さ

$l_1, l_2, l_3$  : solid path を各主応力方向に単位距離進む間に通過する接点数;  
 $m_1, m_2, m_3$  の逆数; 式(7.15)

$m_1, m_2, m_3$  : mean projected solid path (Horne), 式(7.16)

$n$  : 接点数

$\bar{n}$  : 単位面積当り接点数

$n_1, n_2, n_3$  : 各主応力面上の接点数

$n_x, n_y, n_z$  :  $X, Y, Z$ 面上の接点数

$r, r_i, \bar{r}$  : 粒子半径, 粒子 $i$ の半径, 平均粒子半径

$v$  : 体積ひずみ

$\dot{v}$  : 体積ひずみ増分

- $x, y, z$  : 直交座標軸  
 $\alpha$  : 光弾性感度, 式 ( 4.19 )  
 $\alpha$  : 任意面の傾角 ( 二次元 )  
 $\alpha, \beta$  : 粒子接点角を表わす角度, 4.7.2  
 $\alpha_i, \beta_i$  : 接点  $i$  における粒子接点角, 4.7.2  
 $\beta$  : 粒子接点角, ( 二次元 ) 4.7.2  
 $\beta_p$  : 任意面  $P$  の傾角  
 $\beta'$  : 任意面の法線方向から測った粒子接点の法線方向の傾き  
 $\gamma$  : せん断ひずみ ( shear distortion ), 5.3.1  
 $\gamma_R, \gamma_p$  : 残留せん断ひずみ, せん断ひずみ振幅, 第 6 章  
 $\delta_i$  : 接点  $i$  において発揮されている摩擦角, 4.9  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  : 主ひずみ  
 $\varepsilon_n$  : 垂直ひずみ ( 単純せん断 ), 5.3.1  
 $\varepsilon_h, \varepsilon_v$  : 水平, 鉛直ひずみ, 第 9 章  
 $\theta_i$  : 接点  $i$  における粒子間力の傾斜角 ( 二次元 )  
 $\kappa$  : 定数, 式 ( 8.23 )  
 $\kappa_G$  : 定数, 式 ( 5.8 )  
 $\lambda$  : 定数, 式 ( 5.9 )  
 $\mu$  : 統計量の平均値を表わす  
 $\mu$  : 粒子間摩擦を示す添字  
 $\nu$  : ポアソン比, 式 ( 9.3 )  
 $\xi$  : 主ひずみ増分軸の方向  
 $\pi_i$  : 粒子間接点  $C_i$  における接平面  
 $\sigma$  : 統計量の標準偏差  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  : 主応力  
 $\sigma_h, \sigma_v$  : 水平, 鉛直応力, 第 9 章  
 $\sigma_N$  : 垂直応力 ( 単純せん断 )  
 $\sigma_N^x, \sigma_N^z$  :  $X$  面,  $Z$  面上の垂直応力  
 $\tau$  : せん断応力  
 $\tau_{xz}, \tau_{zx}$  :  $X$  面上の  $Z$  方向せん断応力,  $Z$  面上の  $X$  方向せん断応力  
 $\tau_p$  : せん断応力振幅  
 $\phi$  : 内部摩擦角  
 $\phi$  : 直径を表す記号



- $\phi'$  : 有効内部摩擦角
- $\phi_{\mu}$  : 粒子間摩擦角
- $\phi_{cv}$  : 限界間隙比における内部摩擦角
- $\phi_r$  : ダイレイタンスー補正を施した内部摩擦角, (Newland and Allely, Rowe)
- $\phi_{m0}$  : 現在の最大傾斜角 (松岡) 5.1 節
  - $\psi$  : 最大主応力軸の方向, 第 8 章
  - $\psi'$  :  $N_i$  の集中方向, 式 ( 5.1 )