

**勾配依存型弾粘塑性モデルによる  
粘性土の変形解析に関する研究**

**Studies on the deformation analysis of cohesive soil  
by gradient dependent elasto-viscoplastic models**

平成13年 8月

沢田和秀

勾配依存型弾粘塑性モデルによる  
粘性土の変形解析に関する研究

**Studies on the deformation analysis of cohesive soil  
by gradient dependent elasto-viscoplastic models**

平成13年 8月

沢田和秀

# 目次

<b>第1章 序論</b>	1
1.1 はじめに.....	1
1.2 非局所理論.....	2
1.3 本論文の構成.....	4
参考文献.....	6
<b>第2章 弾粘塑性構成式を用いた有限変形有限要素法の定式化</b>	7
2.1 概説.....	7
2.2 足立・岡の弾粘塑性構成式.....	7
2.2.1 弾粘塑性構成式の誘導.....	7
2.2.2 有限変形理論を用いた弾粘塑性構成式.....	9
2.2.3 粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項の導入.....	13
2.3 Updated-Lagrangian 法に基づく有限要素法の定式化.....	14
2.3.1 間隙水圧と有効応力テンソル.....	15
2.3.2 固体・流体二相混合体のつり合い式.....	16
2.3.3 流体相のつり合い式.....	20
2.3.4 構成式の弱形式化.....	21
2.4 まとめ.....	24
参考文献.....	26
<b>第3章 勾配依存型弾粘塑性モデルを用いた粘土の変形解析</b>	27
3.1 概説.....	27
3.2 これまでの研究.....	27
3.3 層状粘土地盤のせん断変形解析.....	29
3.4 層状粘土地盤のせん断変形解析の考察.....	34
3.5 粘土供試体の二次元平面ひずみ圧縮変形解析.....	34
3.6 粘土供試体の二次元平面ひずみ圧縮変形解析の考察.....	38

3.7	初期不整を持つ粘土供試体の変形解析	38
3.8	初期不整を持つ粘土供試体の変形解析のまとめ	42
3.9	勾配依存型弾粘塑性モデルを用いた粘土の変形解析のまとめ	43
	参考文献	44
<b>第4章</b>	<b>勾配依存型弾粘塑性構成式を用いた地盤材料中の一次元波動伝播解析</b>	<b>45</b>
4.1	概説	45
4.2	一次元波動支配方程式	45
4.3	差分法	45
4.4	方程式の差分化	46
4.5	ソリトン（孤立波）解	50
4.6	均質材料中の一次元波動伝播解析	51
4.7	均質材料の解析結果	53
4.8	均質材料の解析結果の考察	61
4.9	不均質材料中の一次元波動伝播解析	64
4.10	不均質材料の解析結果	64
4.11	不均質材料の解析結果の考察	65
4.12	波動伝播解析のまとめ	67
	参考文献	75
<b>第5章</b>	<b>コセラ連続体理論を用いた粘性土の変形解析</b>	<b>76</b>
5.1	概説	76
5.2	コセラ連続体理論	77
5.2.1	粒子の回転と偶応力	77
5.2.2	有限要素定式化	81
5.3	弾粘塑性コセラ体理論への拡張	86
5.3.1	弾粘塑性構成式	86
5.3.2	弾粘塑性コセラ体理論	89

5.4 弾粘塑性コセラ体理論を用いた有限要素解析.....	91
5.4.1 単純せん断のシミュレーション.....	91
5.4.2 解析結果.....	92
5.4.3 まとめ.....	93
5.4.4 盛土の変形解析.....	93
5.4.5 解析結果と考察.....	96
5.4.6 まとめ.....	101
5.5 コセラ連続体理論を用いた粘性土の変形解析のまとめ.....	101
参考文献.....	103
<b>第6章 異なる非局所理論を用いた粘性土の変形解析の比較</b> .....	<b>105</b>
6.1 概説.....	105
6.2 異なる非局所理論を用いた粘性土の変形解析.....	105
6.3 解析結果と考察.....	107
6.4 異なる非局所理論を用いた粘性土の変形解析のまとめ.....	113
<b>第7章 結論</b> .....	<b>114</b>
謝辞.....	118
付録2.1.....	
付録5.1.....	

## 第1章 序論

### 1.1 はじめに

地盤材料の変形が進むと、極度に変形の集中した領域が現れ、この領域は消えることなく成長して、破壊へと至る。このような現象を解析するために、非線形な構成式を用いた研究が行われてきた。破壊時近傍の非線形性を表現するために、非関連流動則に基づいたモデル、非共軸性を仮定したモデル、降伏曲面にとがり点を用いたモデル (Vertex モデル)、ひずみ軟化モデルなどが用いられている。これらの構成式を用いれば破壊以前の分岐現象が表現でき、せん断帯が発生する条件を予測することが可能となる。

通常、これらのモデルでは、ひずみに対する応力の関係は各物質点ごとに与えられる、つまり、構成関係が点ごとに与えられる局所理論に基づいて定式化されている。しかし、局所理論に基づいた古典的弾塑性構成関係を用いると、剛性マトリックスの正定値性がひずみ軟化領域で満足されなくなる。また、境界値問題の微分方程式の構造も、分岐後において、動的問題では双曲性の喪失、静的問題では楕円性の喪失をもたらし、解の一意性がなくなる。したがって、得られる解は有限要素メッシュサイズに強く依存することになる。地盤材料を初期状態から破壊まで連続して数値解析するためには、これらの問題点を解決しなければならない。

地盤材料、例えば砂の供試体に加わる外力が小さいときには、個々の砂粒子の挙動はほぼ同一と考えられる。しかし、外力が大きくなり、すべりが発生するときには、すべりは非常に小さい範囲で発生するため、その付近の砂粒子の挙動が砂の供試体に及ぼす影響は無視できない。通常の高さの尺度で観察すると均一であるとされる材料でも、より小さい尺度で観察すれば、様々に異なった微小要素から構成されており、当然不均一になっている。このような微視的な材料の不均一性を取り入れた連続体モデルを一般化連続体 (generalized continuum (Kröner(1968), Herrmann(1972))) という。特に、材料の変形が大きくなり破壊に近づく過程においては、材料の微視的不均一性が果たす役割は大きく、個々の要素の挙動や、要素間の相互作用を厳密に評価した力学理論が重要となる。地盤材料のような粒状材料では、材料の特性長さとして、粒子径やせん断帯の幅などが非常に重要な意味を持つことになる。

非局所理論は、一つの点の応力が周りの点のひずみの影響を受けて決定され、構成関係が点ごとではなく、周囲のひずみ場の影響が加味されて記述される。したがって、ある領域の点同士の相互作用が構成関係に取り込まれている。非局所理論は一般化連続体力学の一つである。非局所理論の考え方は新しいものではなく、各種結晶の格子構造の発展により、原子に作用する原子間力は隣り合う原子間距離の変化に依存することがわかっていた。すでに19世紀に、Voigt, Boltzmann, Cosserat らによつ

て、この非局所理論は認められていた。しかしながら、力学的モデルの中に、材料の不均質性の影響をそのまま取り込むことが困難であったため、最近に至るまであまり適用されてこなかった。非局所理論は、微視的力学と巨視的力学のギャップを埋める橋渡しのできる理論であり、破壊力学、転位、複合材料、流体力学、電磁気学の分野で広く応用されている。

Eringen (1992) は、非局所理論が最近まで用いられなかったことについて、次のように述べている。力学において時間の非局所性、つまり、履歴効果は広く受け入れられ、多くの構成関係に用いられている。しかしながら、空間的な非局所性にはほとんど注意が払われていなかった。Eringen は、非局所理論に基づいた弾性論を展開した (Eringen and Edelen(1972)) のち、この非局所理論の考え方をさまざまな問題、例えば、高周波～短周波の卓越する問題、転位とクラック近傍における応力の特異点 (Eringen and Kim(1974))、流体力学 (Eringen(1972))、熱力学 (Eringen(1974))、電磁気学等へ応用している。

## 1.2 非局所理論

非局所理論では、1つの点の応力が周りの点のひずみの影響を受けて決定され、構成関係が物質点ごとでなく、周囲のひずみ場の影響が加味されて記述される。したがって、点間の相互作用が構成関係に取り込まれている。

線形弾性を仮定すると、局所理論と非局所理論のそれぞれを用いた構成関係は以下ようになる。

$$\sigma(x) = C(x)\varepsilon(x) \quad (1.1)$$

$$\sigma(x) = \int_V C(x,y)\varepsilon(y)dy, \quad y \in V \quad (1.2)$$

ここで、 $\sigma(x)$  と  $\varepsilon(x)$  は点  $x$  における応力とひずみであり、積分領域  $V$  は相互作用の働く領域である。 $C(x)$  を通常の弾性係数とすると、 $C(x,y)$  は拡張された弾性係数と考えることができる。

非局所理論の簡単な例として多重連結した1次元バネ-質点モデルがある。この理論はKunin(1982)によって格子理論(Lattice theory)の1つとして、厳密に体系化されている。

非局所理論を用いた有限要素解析を紹介する前に、通常の古典的(局所的)モデルを用いた解析結果の問題点を紹介する。図1.1に示すような軟化特性を有する材料よりなる片持ばりを考える(和田1991)。図1.2は有限要素解析による荷重-変位関係を、メッシュサイズの大きさの関数として模式的に示したものである。固定壁にもっとも近傍する要素Aが最大応力点を越え、ひずみ軟化領域に入ると、応力が減少しはじめ、荷重も低下しはじめる。すると、A以外の要素は最大応力点に達しないまま除荷が起こる。要素の寸法を小さくすると、要素Aのひずみの局所化が顕在し、荷重-変位応答として極端

な場合には、図1.2の1の応答のようなスナップバック現象を予測することさえある。結局、既往の局所理論に基づく構成式では、ひずみ軟化挙動をともなう破壊領域の局所化現象を適切に評価しておらず、要素寸法に強く依存する応答結果を与える。このように、局所理論に基づく構成式（材料の特性長さを含まない構成式）を用いたせん断帯解析では、局所化する領域の大きさが特定できないため、解は有限要素メッシュサイズに依存する。もし、材料が残留強度を持たなければ、局所化した領域で消費されるエネルギーは、メッシュサイズを小さくしていけばゼロになる。そして、最終的にスナップバック現象を予測することになる。したがって、局所理論では、要素寸法を破壊領域の幅より小さくできなく、破壊領域内の挙動を解明できないことがわかる。

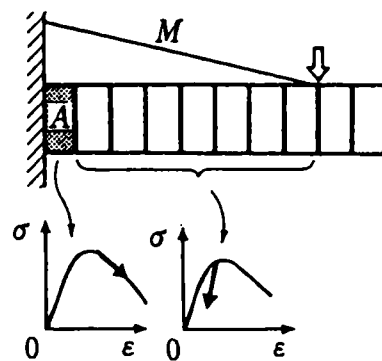


図1.1 軟化材料で作られた片持ちばり（和田，1991）

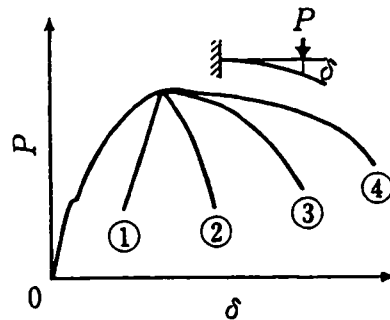


図1.2 荷重変位曲線（要素寸法は1,2,3,4の順に大きくなる）（和田，1991）

一方、非局所理論では、破壊過程において生じる微視的構造の変化、つまり、材料内に生じるマイクロレベルの不連続性を連続体として表現できる。破壊近傍で微視的クラックが大量に発生し、破壊が観察されると、場の方程式は楕円型ではなくなり、力学の数学的表現は意味をなさなくなる。この問題を解決する唯一の方法は、連続体表示の中に微視的構造の変化を取り組むことである。このようにすることによって、支配方程式は楕円型を保ち、局所的変形を追跡できるようになる。微視的構造の効果は、非局所理論を用いて巨視的レベルの構成関係の中に取り込むことができることである((1.2)式)。



古典的な局所理論に基づいた連続体力学の枠内でせん断帯解析を行うと、せん断帯の厚さは不確定のままである。しかし、非局所理論の枠内で同じ問題を解くと、有限なせん断帯幅（厚さ）が得られる。

非局所理論は種々提案されているが、ここでは、次の3つの理論を取り上げる。

- 1) マイクロポーラー連続体理論 (micro-polar continuum theory) もしくはコセラ理論 (Cosserat theory) (Cosserat and Cosserat(1909), De Borst and Mühlhaus(1991))
- 2) 積分平均化理論 (averaging integral theory) (Kröner(1968))
- 3) 勾配連続体理論 (gradient continuum theory) (L'Hermiteら(1952))

以上の3つとも、ミクロな不連続性を表現するために、長さの次元を有し、(材料の構造単位が) 破壊領域の寸法に比例すると考えられる特性長さ (characteristic length) を構成式中に導入している。したがって、ひずみ軟化領域においても有限の消散エネルギーを確保することができる。

本研究の目的は、弾粘塑性構成式を用いて数値解析を精度よく行うために、非局所理論に分類されるひずみ勾配や粒子回転の勾配を導入した弾粘塑性構成式を用いて数値解析を行い、これら非局所理論の性質を把握することにある。粘土の変形現象を初期値—境界値問題として予測する場合、有限要素法を用いるのが有効な手段である。有限要素法によって数値解析を行う場合、精度をよくするには一般的に有限要素サイズを小さくすれば正解に近づくと考えられる。しかしながら、地盤材料の破壊時に発生するせん断帯を有限要素解析を用いて予測したとき、メッシュサイズを小さくすればするほど、せん断帯の幅までも小さくなってしまい、ついにはせん断帯の幅がゼロになるという事態に陥る。せん断帯の幅は、地盤材料の特性長さ（土粒子の粒径など）に依存するためゼロではない。これに対して、非局所理論を用いて数値解析を行えば局所理論と違い、考えている点近傍の影響を考えるため、このような現象を回避できる。本論文では、勾配依存型構成式を用いて初期値—境界値問題を解き、勾配の効果を把握することにする。

### 1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下のとおりである。

第2章では、本論文全般で使用する弾粘塑性構成式の説明を行った。

本研究の特色は、先に述べたとおり、弾粘塑性構成式を用いて粘土の挙動をシミュレートする点にある。本章では、足立・岡の超過応力型弾粘塑性構成式 (Adachi and Oka(1982)) の誘導過程を述べ、有限変形理論に基づいた有限要素法によって離散化した。非局所理論の一つである勾配依存理論をもとに、粘塑性体積ひずみの二階空間勾配を構成式に組み込んだ (Aifantis(1987))。そのため、構成式を形状関数を用いて離散化した。

第3章では、勾配依存型理論を用いた、飽和粘土の変形解析を行った。本章では、第2章で導いた支配方程式を用いて、3つの簡単な初期値—境界値問題を取り上げた。その解析結果から、粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項を組み込んだ弾粘塑性構成式が、勾配項によってどのような結果を導き出すかを考察した。3つの解析とも、飽和粘性土を解析対象とし、また、境界では非排水条件、平面ひずみ条件という共通の境界を与えた。3つの解析の一連の結果から、勾配依存理論が解析結果に及ぼす影響を検討した。

第4章では、勾配依存型理論を用いた、1次元地盤材料での波動の伝播解析を行った。勾配依存理論の動的作用を考えるために、柱状地盤材料を1次元の棒として考え、その自由端からソリトン型応力波を入力し、応力波が供試体内を伝播していく様子から、勾配依存型理論の性質を考察した。弾粘塑性構成式、粘塑性ひずみの発展則、波動方程式は差分法を用いて定式化した。解析においては、粘性項、ひずみ軟化項、粘塑性ひずみの二階空間勾配項のパラメータに着目した。供試体は、均一な地盤材料と不均一な地盤材料を仮定し、両者に同じ入力波を与えて、内部での伝播特性を明らかにした。

第5章では、Cosserat理論(Cosserat,E. and Cosserat,F.,(1909))に基づく弾粘塑性構成式を導き、飽和粘土の変形解析を行った。コセラ連続体理論を参考に、偶応力と粘塑性回転速度を導入した弾粘塑性構成式を導いた。弾性変形に対しては、コセラ弾性体理論を用いた。本章では勾配依存型理論とは異なり、微小変形理論を用いて数値解析を行った。本章では、簡単な初期値—境界値問題を考え、有限要素法によって数値解析を行い、それらの結果から、粘塑性回転速度が数値解にどのような影響を及ぼすかについて検討した。また、簡単な数値解析で得られた結果を考慮し、盛土下の粘性土地盤の変形のシミュレーションを行った。数値解析の結果から、コセラ効果が層状地盤に及ぼす影響を明らかにした。

第6章では、第3章から第5章までの結果に基づき、勾配依存型理論とコセラ連続体理論の両理論を用いて、同じ境界条件を仮定し、初期値境界値問題について、有限要素法により数値解析を行い、それらの結果を比較した。勾配依存型理論による解析では、有限変形理論を用い、コセラ連続体理論による解析では、微小変形理論に基づいているため、直接的には結果を比較することはできなかったが、それぞれの結果について両理論の影響を考察した。

第7章では、得られた解析結果を基に、本論文の結論をまとめた。

## 参考文献

- Aifantis.E.C.(1987),The physics of plastic deformation, International Journal of Plasticity,Vol.3,pp.211-247.
- Adachi.T and Oka.F(1982),Constitutive equation for normally consolidated clay based on elasto-viscoplasticity,Soils and Foundation,22(4),pp.57-70.
- Cosserat, E. and Cosserat, F.,(1909), Théorie des corps déformables, Hermann, Paris.
- De Borst,R and Mühlhaus, H.-B.(1991), Continuum models for discontinuous media, Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics, eds.Van Mier,J.G.M., Rots,J.G., and Bakker,A.E. and Spon,F.N., pp.601-618.
- Eringen, A.C(1972), On nonlocal fluid mechanics, Int. J. Engng. Sci., 10(6),pp561-575.
- Eringen, A.C(1974), On nonlocal continuum thermodynamics, Modern Developments in Thermodynamics, Eds. B.Gal-Or. New York, John Wiley & Sons, pp121-142.
- Eringen, A.C(1992), Vistas of nonlocal continuum physics, Int. J. Engng. Sci., 30(10), 1551-1565.
- Eringen, A.C and Edelen, D.G.B(1972), On nonlocal elasticity, Int. J. Engng. Sci., 10(3), 233-248.
- Eringen, A.C and Kim, B.S(1974), On the problem of crack tip in nonlocal elasticity, Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics, Eds. P.Thoft-Christensen, Doedrecht, Holland, D.Reidel Publishing Co., pp107-238.
- Herrmann, G.(1972), Some applications of micromechanics, Experimental Mechanics, 12, pp.235-238.
- Kröner,E.(1968), Mechanics of generalized continua, Proc. of the IUTAM Symp. on the generalized Cosserat continuum and the Continuous Theory of Dislocations with Applications, Freudenstadt and Stuttgart(in German), Springer-Verlag.
- Kunin, I.A.(1982), Elastic Media with microstructure, Vol.1 and 2, Springer-Verlag.
- L'Hermite,R. and Grieu, J.J.(1952), "Etude experimentales recentes sur le retrait des ciments et des betous", Annales I.T.T.P., Paris, 5, pp.494-514.
- 和田 章(1991), コンピュータの進歩と有限要素法、RC構造の有限要素解析法-現状と将来性-, RC構造部門パネルディスカッション資料, 日本建築学会, pp43-50.

## 第2章 弾粘塑性構成式を用いた有限変形有限要素法の定式化

### 2.1 概説

本章では、次章の数値解析において使用する弾粘塑性構成式についてその誘導と、内容について示す。まず、足立・岡の弾粘塑性構成式(1981,1982)の誘導を行い、その後有限変形理論に基づき構成式を変形する。ここで、勾配依存理論に基づいて粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項を誘導された弾粘塑性構成式に導入する。求められた粘塑性体積ひずみ二階空間勾配依存弾粘塑性構成式をUp-dated-Lagrangian法に基づいて有限要素法を用いて離散化する。ここでは、有効応力原理に基づいて、固体・流体2相混合体のつり合い方程式と流体相のつり合い式(連続式)を誘導し、その後弱形式化を行い支配方程式を離散化する。

### 2.2 足立・岡の弾粘塑性構成式

#### 2.2.1 弾粘塑性構成式の誘導

足立・岡(1981,1982)は、Perzyna(1963)による弾粘塑性理論と、Roscoe(1963)らによるCam Clayモデルに基づき時間依存性をも表現できる正規圧密粘土の構成式を提案した。さらに、等方的正規圧密粘土の構成式に相対応力比 $\bar{\eta}^*$ を導入し異方圧密粘土に対しても適用できるよう拡張している。動的降伏関数 $f_d$ 、及び静的降伏関数 $f_s$ は次式で与えられる。

$$f_d = \frac{\bar{\eta}_{(0)}^*}{M^*} + M^* \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} - \ln \frac{\sigma_{my(d)'}}{\sigma_{m0}'} = 0 \quad (2.1)$$

$$f_s = \frac{\bar{\eta}_{(0)}^*}{M^*} + M^* \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} - \ln \frac{\sigma_{my(s)'}}{\sigma_{m0}'} = 0 \quad (2.2)$$

(2.1)式、(2.2)式の(s),(d)はそれぞれ静的、動的を意味する。静的とは二次圧密が終了した状態を表し、動的とはそれ以外の状態を表す。

ここで(2.1)式、(2.2)式において

- $\bar{\eta}_{(0)}^*$  : 相対応力比  $\bar{\eta}_{(0)}^* = \{(\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*)(\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*)\}^{1/2}$
- $\eta_{ij}^*$  :  $S_{ij}/\sigma_m'$  ,  $\eta_{ij(0)}^* = S_{ij(0)}/\sigma_{m(0)'}$
- $M^*$  : Critical Stateでの  $\sqrt{2J_2}/\sigma_m'$  の値
- $\sqrt{2J_2}$  :  $S_{ij}$ の二次不変量 ;  $\sqrt{2J_2} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$
- $S_{ij}$  : 偏差応力 ;  $S_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma'_m \delta_{ij}$  ,  $S_{ij(0)} = \sigma'_{ij(0)} - \sigma'_{m(0)} \delta_{ij}$
- $\delta_{ij}$  : Kronecker のデルタ
- $\sigma'_m$  : 平均有効応力 ;  $\sigma'_m = \frac{1}{3}(\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33})$
- $\sigma'_{m(0)}$  : 単位平均有効応力
- $\sigma'_{my}$  : 硬化パラメータ

ただし $S_{ij(0)}$ などの下添字(0)は、その値が異方圧密終了時の値であることを表す。

粘塑性ひずみ速度テンソル $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ について考える。以下簡単のため $f^{(d)}$ の(d)を省略する。

関連流れ則より

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}, \quad \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & (F \leq 0) \\ \Phi(F) & (F > 0) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\gamma \Phi(F) = M^* \sigma'_m C_N \exp \left\{ m'_N \left( \ln \left( \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{me}} \right) + \frac{\bar{\eta}^*}{M^*} - \frac{1+e}{\lambda-\kappa} v^p \right) \right\} \quad (2.4)$$

$$F = \frac{f - \kappa_s}{\kappa_s} \quad (2.5)$$

ここで、

$\sigma'_{me}$ :	初期圧密応力	$C_N, m'_N$ :	粘塑性パラメータ
$\gamma$ :	粘性係数	$e$ :	間隙比
$\lambda$ :	圧縮指数	$\kappa$ :	膨潤指数
$v^p$ :	粘塑性体積ひずみ	$\kappa_s$ :	硬化パラメータ

また、 $f=0$ は、降伏関数を表し、 $F=0$ は静的降伏関数である。 $\Phi$ は材料関数である。

$C_N, m'_N$ には以下に示す関係がある。

初期粘塑性ひずみ速度を $\dot{\epsilon}_0^{vp}$ とすると、

$$C_N = \frac{\dot{\epsilon}_0^{vp}}{M^*} \quad (2.6)$$

二次圧密速度を $\alpha$ とすると、

$$m'_N = \frac{\lambda - \kappa}{(1+e)\alpha} \quad (2.7)$$

である。

また、 $\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}$ について

$$f = \frac{\bar{\eta}^*}{M^*} + \ln \left( \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{my}} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$\bar{\eta}^*$ :	相対応力比	$M^*$ :	Critical Stateでの $\frac{\sqrt{2}J_2}{\sigma'_m}$ の値
$\sigma'_m$ :	平均有効応力	$\sigma'_{my}$ :	硬化パラメータ

連鎖則を用いると、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_m} \frac{\partial \sigma'_m}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial S_{kl}} \frac{\partial S_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (2.9)$$

ここで、 $S_{ij}$ は偏差応力テンソルである。 $(S_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma'_m \delta_{ij})$

(2.9)式の右辺のそれぞれの成分を求めると、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_m} = \frac{1}{M^*} \left( -\frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \frac{S_{kl}}{\sigma_m'^2} \right) + \frac{1}{\sigma'_m} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \sigma'_m}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_{kl}} = \frac{1}{M^*} \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \frac{1}{\sigma_m'^2} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial S_{kl}}{\partial \sigma_{ij}'} = \delta_{ki}\delta_{lj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (2.13)$$

よって、(2.9)式は(2.14)式となる。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} = \frac{1}{3\sigma_m'} \delta_{ij} - \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{3M^*\bar{\eta}^*\sigma_m'^2} S_{kl}\delta_{ij} + \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{M^*\bar{\eta}^*\sigma_m'} \quad (2.14)$$

このことから、(2.3)式は次式になる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma\langle\Phi(F)\rangle \left( \frac{1}{3\sigma_m'} \delta_{ij} - \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{3M^*\bar{\eta}^*\sigma_m'^2} S_{kl}\delta_{ij} + \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{M^*\bar{\eta}^*\sigma_m'} \right) \quad (2.15)$$

一方、ひずみ速度テンソルの弾性成分は、一般化されたHooke則より次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{\kappa}{(1+e)\sigma_m'} \dot{\sigma}_m' \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (2.16)$$

ここで、 $G$ はせん断弾性係数、 $\dot{\sigma}_m'$ は平均有効応力速度、 $\dot{S}_{ij}$ は偏差応力速度である。

以上のことから、全ひずみ速度テンソルは(2.15)式、(2.16)式より次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{\kappa}{(1+e)\sigma_m'} \dot{\sigma}_m' \frac{1}{3} \delta_{ij} + \gamma\langle\Phi(F)\rangle \left( \frac{1}{3\sigma_m'} \delta_{ij} - \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{3M^*\bar{\eta}^*\sigma_m'^2} S_{kl}\delta_{ij} + \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{M^*\bar{\eta}^*\sigma_m'} \right) \quad (2.17)$$

## 2.2.2 有限変形理論を用いた弾粘塑性構成式

本研究で用いる粘土の有限変形弾粘塑性構成式の誘導を以下に述べる。なお、誘導にあたって次の点を考慮した。

- ・有限変形理論を用いた構成式の拡張。
- ・構成式の数値積分における解の安定性、精度向上のため、接線剛性法(Peirceら(1984))を導入。
- ・クリープ破壊を説明するため、ひずみ軟化項を導入。

弾性ストレッチングテンソル  $D_{ij}^e$  と有効Cauchy応力のJaumann速度  $\hat{T}_{ij}$  の間に、次のような関係を仮定する。

$$\hat{T}_{ij} = C_{ijkl}^e D_{kl}^e \quad (2.18)$$

ここで、 $C_{ijkl}^e$ は弾性接線剛性マトリクスである。

また、弾性ストレッチングテンソルと全ストレッチングテンソル  $D_{ij}$ 、粘塑性ストレッチングテンソル  $D_{ij}^{vp}$  との間に、次の関係を仮定する。

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^{vp} \quad (2.19)$$

正規圧密粘土の構成式 (Adachi and Oka(1982)) に関しては、関連流れ則を仮定しており、 $T'_{ij}$  を有効 Cauchy 応力テンソルとして、 $D_{ij}^{vp}$  は次式で与えられる。

$$D_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial T'_{ij}} \quad (2.20)$$

$$F = \frac{f - \kappa}{\kappa}, \quad \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & (F \leq 0) \\ \Phi(F) & (F > 0) \end{cases} \quad (2.21)$$

ここで、 $f = 0$  は降伏関数を表し、 $\Phi$  は材料関数、 $\gamma$  は粘性係数、 $\kappa$  は硬化パラメータである。

また、Oka ら (1988) は、従来の超過応力型の弾粘塑性構成式では表現できなかったクリープ破壊を表現するため、限界状態においてのひずみ速度非依存性を考慮し、第二材料関数の導入を行った。

粘塑性ストッレチングテンソルは (2.22) 式となる。

$$D_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi_1(F) \rangle \Phi_2(\xi) \frac{\partial f}{\partial T'_{ij}} \quad (2.22)$$

(2.22) 式で、第二材料関数  $\Phi_2(\xi)$  は次式のように仮定した。

$$\Phi_2(\xi) = 1 + \xi \quad (2.23)$$

$$\xi = \frac{M_f^* \bar{\eta}_{(0)}^*}{G_2^* \left\{ M_f^* - \frac{\eta_{mn}^* (\eta_{mn}^* - \eta_{mn}^*(0))}{\bar{\eta}_{(0)}^*} \right\}} \quad (2.24)$$

$$\bar{\eta}_{(0)}^* = (\eta_{mn}^* - \eta_{mn}^*(0)) (\eta_{mn}^* - \eta_{mn}^*(0))^{1/2} \quad (2.25)$$

ここで、 $G_2^*$  は軟化パラメータ、 $M_f^*$  は破壊応力比、 $\bar{\eta}_{(0)}^*$  は相対応力比である。

第二材料関数は次の二つの条件を満たす。

- ・限界状態で  $\xi$  は無限大になり  $\Phi_2(\xi)$  も無限大になる
- ・ $\xi$  は正の値をとる

(2.22) 式において、

$$\gamma \langle \Phi_1(F) \rangle \Phi_2(\xi) = \langle \Phi(F, \xi) \rangle \quad (2.26)$$

とおくと、(2.22) 式は、(2.27) 式と書きかえることができる。

$$D_{ij}^{vp} = \langle \Phi(F, \xi) \rangle \frac{\partial f}{\partial T'_{ij}} \quad (2.27)$$

この構成式では、粘塑性体積ひずみ  $v^{vp}$  が硬化パラメータとして用いられる。

よって、(2.27) 式より、

$$\dot{v}^{vp} = \langle \Phi(F, \xi) \rangle \frac{\partial f}{\partial T'_{ii}} \quad (2.28)$$

(2.28) 式を増分形で表現すると次式となる。

$$\Delta v^{vp} = \langle \Phi(F, \xi) \rangle \frac{\partial f}{\partial T'_{ii}} \Delta t \quad (2.29)$$

ここで、 $\Phi(F, \xi)$  の時間微分をとると、式(2.26) から、

$$\dot{\Phi} = \left( \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial T'_{ij}} \Phi_2(\eta) + \Phi_1(F) \frac{\partial \Phi_2(\xi)}{\partial T'_{ij}} \right) \dot{T}'_{ij} + \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial v^{vp}} \Phi_2(\xi) \dot{v}^{vp} \quad (2.30)$$

(2.30) 式において以下の置換をする。

$$\left( \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial T'_{ij}} \Phi_2(\eta) + \Phi_1(F) \frac{\partial \Phi_2(\xi)}{\partial T'_{ij}} \right) = A_{ij} \quad (2.31)$$

これにより、(2.30) 式は次式となる。

$$\dot{\Phi} = A_{ij} \dot{T}'_{ij} + \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial v^{vp}} \Phi_2(\xi) \dot{v}^{vp} \quad (2.32)$$

(2.32) 式に客観性のある応力速度を導入する。客観性のある応力速度として、有効Cauchy応力のJaumann速度 $\hat{T}'_{ij}$ を用いる。これは、次式で定義される。

$$\hat{T}'_{ij} \equiv \dot{T}'_{ij} - W_{ik} T'_{kj} + T'_{ik} W_{kj} \quad (2.33)$$

ここで、 $W_{ij}$  はスピンテンソルである。

$\frac{\partial \Phi}{\partial T'_{ij}}$  を  $(AS_{ij} + B\delta_{ij})$  とおくと、(2.33) 式より、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T'_{ij}} \hat{T}'_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial T'_{ij}} \dot{T}'_{ij} + (AS_{ij} + B\delta_{ij})(-W_{ik} T'_{kj} + T'_{ik} W_{kj}) \quad (2.34)$$

A および B はスカラー関数、 $S_{ij}$  は偏差応力テンソルである。

ここで、

$$\begin{aligned} S_{ij}(T'_{ik} W_{kj} - W_{ik} T'_{kj}) &= S_{ij} T'_{ik} W_{kj} - S_{ij} W_{ik} T'_{kj} \\ &= S_{ij} T'_{ik} W_{kj} - S_{ki} W_{kj} T'_{ji} \\ &= (S_{ij} T'_{ik} - S_{ki} T'_{ji}) W_{kj} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$S_{ij}, T'_{ij}$  は、対称テンソルであるから、

$$\begin{aligned} (S_{ij} T'_{ik} - S_{ki} T'_{ji}) W_{kj} &= (S_{ji} T'_{ik} - S_{ki} T'_{ij}) W_{kj} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

また、

$$\begin{aligned} \delta_{ij}(T'_{ik} W_{kj} - W_{ik} T'_{kj}) &= T'_{ik} W_{ki} - W_{ik} T'_{ki} \\ &= T'_{ik} W_{ki} - W_{ki} T'_{ik} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$



(2.36) 式、(2.37) 式を(2.34) 式に代入して、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T'_{ij}} \hat{T}'_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial T'_{ij}} \dot{T}'_{ij} \quad (2.38)$$

上式の関係性を考慮すると(2.32) 式は次式となる。

$$\dot{\Phi} = A_{ij} \hat{T}'_{ij} + \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial v^{vp}} \Phi_2(\xi) \dot{v}^{vp} \quad (2.39)$$

上式を増分型で書くと、(2.40) 式を得る。

$$\Delta t \dot{\Phi} = \Delta \Phi = A_{ij} \hat{T}'_{ij} \Delta t + \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial v^{vp}} \Phi_2(\xi) \Delta v^{vp} \quad (2.40)$$

(2.40) 式より  $\Phi(F, \xi)$  の増分を求めると次式となる。

$$\Delta \Phi = \Phi_{t+\Delta t} - \Phi_t = \Delta t \dot{\Phi} = A_{ij} \hat{T}'_{ij} \Delta t + \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial v^{vp}} \Phi_2(\xi) \Delta v^{vp} \quad (2.41)$$

ここで、関数  $\Phi$  に関してパラメータ  $\theta (0 \leq \theta \leq 1)$  を用いて、差分化を行うと

$$\Phi = (1 - \theta) \Phi_t + \theta \Phi_{t+\Delta t} \quad (2.42)$$

ただし、 $\Phi$  は  $\Phi(t \leq T \leq t + \Delta t)$ 、また  $\Phi_t$  は  $\Phi_{t=T}$  である。

(2.41) 式を(2.42) 式に代入して次式を得る。

$$\Phi = (1 - \theta) \Phi_t + \theta \left\{ \Phi_t + A_{ij} \hat{T}'_{ij} \Delta t + \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial v^{vp}} \Phi_2(\xi) \Delta v^{vp} \right\} \quad (2.43)$$

さらに(2.18) 式、(2.27) 式、(2.29) 式を(2.43) 式に代入して

$$\Phi = (1 - \theta) \Phi_t + \theta \left\{ \Phi_t + A_{ij} C_{ijkl}^e (D_{kl} - \Phi \frac{\partial f}{\partial T'_{ij}}) \Delta t + \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial v^{vp}} \Phi_2(\xi) \Phi \frac{\partial f}{\partial T'_{pp}} \Delta t \right\} \quad (2.44)$$

(2.44) 式を変形して、

$$\Phi \left[ 1 + (\theta \Delta t) \left\{ A_{ij} C_{ijkl}^e \frac{\partial f}{\partial T'_{kl}} - \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial v^{vp}} \Phi_2(\xi) \frac{\partial f}{\partial T'_{pp}} \right\} \right] = \Phi_t + (\theta \Delta t) A_{ij} C_{ijkl}^e D_{kl} \quad (2.45)$$

上式において(2.46) 式のようにおくと、

$$\left[ 1 + (\theta \Delta t) \left\{ A_{ij} C_{ijkl}^e \frac{\partial f}{\partial T'_{kl}} - \frac{\partial \Phi_1(F)}{\partial v^{vp}} \Phi_2(\xi) \frac{\partial f}{\partial T'_{pp}} \right\} \right] = 1 + \xi' \quad (2.46)$$

よって、(2.45) 式は(2.47) 式となる。

$$\Phi = \frac{1}{1 + \xi'} \{ \Phi_t + (\theta \Delta t) A_{ij} C_{ijkl}^e D_{kl} \} \quad (2.47)$$

(2.47) 式を (2.27) 式に代入して

$$D_{ij}^{vp} = \frac{1}{1 + \xi'} \{ \Phi_t + (\theta \Delta t) A_{pq} C_{pqrs}^e D_{rs} \} \frac{\partial f}{\partial T'_{ij}} \quad (2.48)$$

さらに、(2.48) 式を (2.18) 式に代入して

$$\begin{aligned} \hat{T}'_{ij} &= C_{ijkl}^e D_{kl} - C_{ijkl}^e \left[ \frac{1}{1 + \xi'} \{ \Phi_t + (\theta \Delta t) A_{pq} C_{pqrs}^e D_{rs} \} \frac{\partial f}{\partial T'_{kl}} \right] \\ &= C_{ijkl}^e D_{kl} - C_{ijmn}^e \frac{\partial f}{\partial T'_{mn}} \frac{1}{1 + \xi'} (\theta \Delta t) A_{pq} C_{pqrs}^e D_{rs} \\ &\quad - C_{ijmn}^e \frac{\partial f}{\partial T'_{mn}} \frac{1}{1 + \xi'} \Phi_t \end{aligned} \quad (2.49)$$

上式において、(2.50) 式のように置き直すと、

$$C_{ijkl}^{tan} = C_{ijkl}^e - C_{ijmn}^e \frac{\partial f}{\partial T'_{mn}} \frac{1}{1 + \xi'} (\theta \Delta t) A_{pq} C_{pqkl}^e \quad (2.50)$$

最終的に正規圧密粘土における弾粘塑性構成式の、接線剛性法を用いた速度関係の表現として次式を得る。

$$\hat{T}'_{ij} = C_{ijkl}^{tan} D_{kl} - C_{ijmn}^e \frac{\Phi_t}{1 + \xi'} \frac{\partial f}{\partial T'_{mn}} \quad (2.51)$$

### 2.2.3 粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項の導入

変形の局所化挙動の解析を試みる手段として、Aifantis(1987)は、材料の弾粘塑性構成式に塑性ひずみの空間二階微分を導入する方法を提案した。本節では、粘塑性体積ひずみの二階微分（勾配項）の導入を行う。勾配項を導入する目的は次の2点が挙げられる。

#### (1) 物理的な目的

材料の特性長さ（粒径など）を考慮していない有限要素解析ではせん断帯の幅の予測ができない。そこで、弾粘塑性構成式の中に、長さの次元を持ったパラメータを導入することにより、せん断帯の幅が予測可能となる。また、材料の不均一性を高次の勾配を導入することにより評価できる。

#### (2) 数学的な目的

材料の特性長さ（粒径など）を考慮していない有限要素解析ではメッシュ分割の大きさにより、得られる解に差異が生じることが知られている。解析においてひずみ勾配は局所化の制限子として働く、つまり有限要素解析などにおいて、メッシュの大きさとともにせん断帯の幅が限りなく小さくなるのではなく、ある有限の大きさに収束する。

前節で述べた弾粘塑性構成式に粘塑性体積ひずみの二階勾配項を導入すると、(2.4) 式は次式のようになる。

$$\gamma \Phi(F) = M^* \sigma'_m C_N \exp \left\{ m'_N \left( \ln \left( \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{m0}} \right) + \frac{\bar{\eta}^*}{M^*} - \frac{1+e}{\lambda - \kappa} v^{vp} - a_3 \nabla^2 v^{vp} \right) \right\} \quad (2.52)$$

ここで、塑性ひずみ勾配の項を導入する力学的イメージを明らかにするために一次元圧縮のモデルを考える。そのモデルに対して塑性ひずみの二階微分の項を導入した粘塑性構成式を以下のように考える。

$$\dot{\epsilon}^{vp} = f(\sigma, \epsilon^{vp}) + \beta \frac{\partial^2 \epsilon^{vp}}{\partial x^2} \quad (2.53)$$

$\dot{\epsilon}^{vp}$  :粘塑性ひずみ速度  $\sigma$  :応力  $\beta$  :材料定数  $\epsilon^{vp}$  :粘塑性体積ひずみ、ただし、変形については圧縮を正とする。

ここで、図2.1のような場合について考えると、粘塑性ひずみの二階微分をとることによりA点のように、曲線が上に凸の箇所では $\frac{\partial^2 \epsilon^{vp}}{\partial x^2}$  は負の値となり、 $\beta > 0$ の場合、(2.53)式より、 $\dot{\epsilon}^{vp}$ の増加は抑制される。またB点のように下に凸の箇所では、 $\frac{\partial^2 \epsilon^{vp}}{\partial x^2}$  は正の値となり $\dot{\epsilon}^{vp}$ は増加する。その結果ひずみの局所化が抑えられることが分かる。

逆に $\beta < 0$ の場合はA点のような上に凸の箇所で $\dot{\epsilon}^{vp}$ は増加し、B点のように下に凸の箇所では $\dot{\epsilon}^{vp}$ は増加が抑制される。その結果、図2.1のようにA点の付近で局所的変形が進行することがわかる。

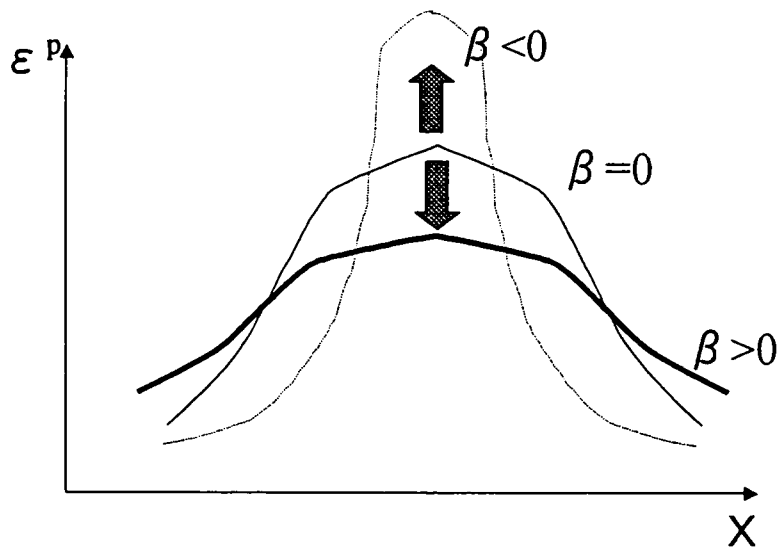


図2.1 粘塑性ひずみの分布図

### 2.3 Updated-Lagrangian法に基づく有限要素法の定式化

固相および流体相からなる2相系材料の有限要素定式化を有限変形理論に基づいて行う。定式化において、土粒子骨格の変形と間隙水移動の連成問題の支配方程式は、Biot(1963)の理論に基づいた2相混合体理論を用いて誘導した。

### 2.3.1 間隙水圧と有効応力テンソル

有限要素定式化においては、公称全応力速度を用いて速度型のつり合い式を解くが、2相系に対して構成式は土粒子骨格の有効応力を用いて定義されているため、間隙水圧を導入する手法をとらなければいけない。有効応力の定義式およびその速度形式は直接表記法を用いると、それぞれ以下のように定義される。

$$T = T' + u_w I \quad (2.54)$$

$$\dot{T} = \dot{T}' + \dot{u}_w I \quad (2.55)$$

ここで、 $T$ は全Cauchy応力テンソル、 $T'$ は有効Cauchy応力テンソル、 $u_w$ は間隙水圧、 $I$ は単位テンソル、ドット(  $\dot{\quad}$  )は時間微分を表す。また、有効応力テンソル、全応力テンソル及び間隙水圧は引張りを正とする。ただし、計算結果の図示では間隙水圧は圧縮を正とする。

(2.55)式にCauchy応力のJaumann速度 $\hat{T}$ ((2.56)式)を適用する。

$$\hat{T} = \dot{T} - WT + TW \quad (2.56)$$

$$\hat{T} = \dot{T}' + \dot{u}_w I - WT + TW \quad (2.57)$$

ここで $W$ はスピントテンソルである。公称応力速度 $\dot{S}$ とCauchy応力のJaumann速度の関係は次式で表される。

$$\dot{S} = \hat{T} + WT - TW + (trL)T - LT \quad (2.58)$$

ここで、 $\dot{S}$ は公称応力速度テンソル、 $L$ は速度勾配テンソルである。

(2.57)式を(2.58)式に代入して、

$$\dot{S} = \dot{T}' - \dot{u}_w I - WT + TW + WT - TW + (trL)T - LT \quad (2.59)$$

$$= \dot{T}' - \dot{u}_w I + (trL)T - LT \quad (2.60)$$

(2.54)式、(2.55)式を用いると

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dot{T}' - \dot{u}_w I + (trL)(T' - u_w I) - L(T' - u_w I) \\ &= \dot{T}' - \dot{u}_w I + (trL)T' - (trL)u_w I - LT' + Lu_w I \end{aligned} \quad (2.61)$$

(2.61)式において、次のようにおく。

$$\dot{S}' = \dot{T}' + (trL)T' - LT' \quad (2.62)$$

(2.61)式は、次式となる。

$$\dot{S} = \dot{S}' - \dot{u}_w I - (tr L) u_w I + L u_w I \quad (2.63)$$

(2.62)式を成分表示すると、

$$\dot{S}'_{ij} = \dot{T}'_{ij} - L_{ik} T'_{kj} + T'_{ij} tr L \quad (2.64)$$

(2.64)式の右辺第2項を次のように置くと、

$$[-L_{ik} T'_{kj}] = A_{ij} \quad (2.65)$$

(2.64)式は、次式となる。

$$\dot{S}'_{ij} = \dot{T}'_{ij} + A_{ij} + T'_{ij} tr L \quad (2.66)$$

(2.63)式を変形して、

$$\dot{S} = \dot{S}' - \dot{u}_w I - u_w I (tr L) + u_w I L^T \quad (2.67)$$

(2.67)式の  $u_w I (tr L) - u_w I L^T$  について ( $B_u = u_w I (tr L) - u_w I L^T$  とおく)、これを成分表示すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} B_{u11} \\ B_{u22} \\ B_{u33} \\ B_{u12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u_w & 0 & 0 \\ u_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_{11} \\ L_{22} \\ L_{33} \\ L_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

(2.68)式を  $B_u = [U]\{L\}$  とおくと、(2.67)式は次式のように表現できる。

$$\dot{S} = \dot{S}' - \dot{u}_w I - B_u \quad (2.69)$$

### 2.3.2 固体・流体二相混合体のつり合い式（速度型）

固体・流体2相混合体のつり合い式を離散化するにあたり、図2.2に示す境界条件を定義する。

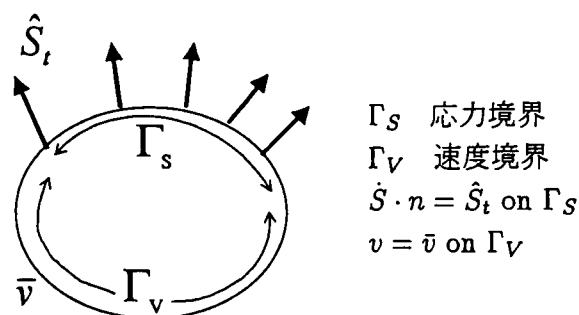


図2.2 境界条件

速度型のつり合い式は公称応力速度 $\dot{S}$ を用いて次のように示される。ただし、ここでは物体力の項を無視した。

$$\operatorname{div} \dot{S} = 0 \quad (2.70)$$

(2.70) 式をテンソル表示すると、

$$\dot{S}_{ij,j} = 0 \quad (2.71)$$

上式の両辺に仮想速度 $\delta v_i$ を乗じて弱形式を考えると、

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{S}_{ij,j} \delta v_i dv = 0 \quad (2.72)$$

ここで、

$$(\dot{S}_{ij} \delta v_i)_{,j} = \dot{S}_{ij,j} \delta v_i + \dot{S}_{ij} \delta v_{i,j} \quad (2.73)$$

より、

$$\dot{S}_{ij,j} \delta v_i = (\dot{S}_{ij} \delta v_i)_{,j} - \dot{S}_{ij} \delta v_{i,j} \quad (2.74)$$

であるから、(2.72) 式に代入して、

$$\int_{\mathcal{V}} (\dot{S}_{ij} \delta v_i)_{,j} dv - \int_{\mathcal{V}} \dot{S}_{ij} \delta v_{i,j} dv = 0 \quad (2.75)$$

(2.75) 式の左辺第 1 項より、Gauss の発散定理を用いて、

$$\int_{\mathcal{V}} (\dot{S}_{ij} \delta v_i)_{,j} dv = \int_{\Gamma_s} (\dot{S}_{ij} \delta v_i) n_j d\Gamma_s \quad (2.76)$$

(2.75) 式の左辺第 2 項より、 $L_{ij} = v_{i,j}$  ( $L_{ij}$  は速度勾配テンソル) の関係を用いて、

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{S}_{ij} \delta v_{i,j} dv = \int_{\mathcal{V}} \dot{S}_{ij} \delta L_{ij} dv \quad (2.77)$$

(2.76) 式及び(2.77) 式を(2.75) 式に代入して、

$$\int_{\Gamma_s} (\dot{S}_{ij} \delta v_i) n_j d\Gamma_s - \int_{\mathcal{V}} \dot{S}_{ij} \delta L_{ij} dv = 0 \quad (2.78)$$

(2.78) 式より、

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{S}_{ij} \delta L_{ij} dv = \int_{\Gamma_s} (\dot{S}_{ij} \delta v_i) n_j d\Gamma_s \quad (2.79)$$

(2.79) 式の左辺に(2.69) 式を代入して、境界条件を考えると、

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{S}'_{ij} \delta L_{ij} dv - \int_{\mathcal{V}} \dot{u}_w \delta_{ij} \delta L_{ij} dv - \int_{\mathcal{V}} B_{uij} \delta L_{ij} \delta v = \int_{\Gamma_s} \hat{S}_{ii} \delta v_i d\Gamma_s \quad (2.80)$$

上式において、平面ひずみ条件下で次の関係式が成り立つ。

$$\delta_{ij} \delta L_{ij} = \delta L_{11} + \delta L_{22} = \delta D_{11} + \delta D_{22} = \delta D_{ii} \quad (2.81)$$

これと(2.68)式を代入すると(2.80)式は次のようになる。

$$\int_v \dot{S}'_{ij} \delta L_{ij} dv + \int_v \dot{u}_w \delta_{ij} \delta D_{ij} dv + \int_v [U] L_{ij} \delta L_{ij} \delta v = \int_{\Gamma_s} \hat{S}_{ii} \delta v_i d\Gamma_s \quad (2.82)$$

上式に有効公称応力速度と有効Cauchy応力のJaumann速度との関係式(2.64)式を代入して、次式を得る。

$$\int_v \dot{T}'_{ij} \delta L_{ij} dv + \int_v A_{ij} \delta L_{ij} dv + \int_v T'_{ij} \text{tr} L \delta L_{ij} dv + \int_v \dot{u}_w \delta_{ij} \delta D_{ij} dv + \int_v B_{uij} \delta L_{ij} dv = \int_{\Gamma_s} \hat{S}_{ii} \delta v_i d\Gamma_s \quad (2.83)$$

(2.83)式の左辺第1項において応力の対称性により以下の関係がある。

$$\dot{T}'_{ij} \delta L_{ij} = \dot{T}'_{ij} \delta D_{ij} \quad (2.84)$$

また、左辺第4項において以下の関係がある。

$$\delta_{ij} \delta D_{ij} = \text{tr} \delta D \quad (2.85)$$

(2.84)式、(2.85)式の関係をも、(2.83)式に代入して次式を得る。

$$\int_v \dot{T}'_{ij} \delta D_{ij} dv + \int_v A_{ij} \delta L_{ij} dv + \int_v T'_{ij} \text{tr} L \delta L_{ij} dv + \int_v \dot{u}_w \delta \text{tr} D dv + \int_v B_{uij} \delta L_{ij} dv = \int_{\Gamma_s} \hat{S}_{ii} \delta v_i d\Gamma_s \quad (2.86)$$

ここで(2.86)式を直接表記法によって表すと、

$$\int_v \delta D^T \dot{T}' dv + \int_v \delta L^T A dv + \int_v \delta L^T T' \text{tr} L dv + \int_v \text{tr} \delta D^T \dot{u}_w dv + \int_v \delta L^T B_u dv = \int_{\Gamma_s} \delta v_i^T \hat{S}_i d\Gamma_s \quad (2.87)$$

式をマトリクス表示するために、以下の各関係式を定義して用いる。

$$A = -T' L = [D_s][M]\{v^*\}$$

$$B_u = u_w \text{Itr} L - u_w I L^T = [U][M]\{v^*\}$$

$$D = [B]\{v^*\}$$

[B]; ストレッチング-節点速度マトリクス  
{v\*}; 節点に置ける速度ベクトル

$$V = [N]\{v^*\}$$

V; 要素内の任意の点での速度ベクトル  
[N]; 要素内の任意の点での形状マトリクス

$$L = [M]\{v^*\}$$

[M]; 速度勾配-節点速度マトリクス

$$\text{tr} D = [B_v]\{v^*\}$$

[B\_v]; 体積ひずみ-節点速度マトリクス

$$\dot{u}_w = [N_h]\{\dot{u}_w^*\}$$

$\dot{u}_w$ ; 間隙水圧速度ベクトル  
{ $\dot{u}_w^*$ }; 節点に置ける間隙水圧速度ベクトル  
[N\_h]; 4節点の間隙水圧速度形状マトリクス

また、構成式を以下の関係式でマトリックス表示した。

$$\dot{\mathbf{T}}' = [\mathbf{C}]\mathbf{D} - [\mathbf{Q}] \quad (2.88)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{T}}'$  は有効 Cauchy 応力の Jaumann 速度ベクトル、 $[\mathbf{C}]$  は粘塑性剛性マトリックス、 $[\mathbf{Q}]$  は粘塑性に起因するベクトルである。

また、(2.56) 式から、次のようになる。

$$\dot{\mathbf{T}}' = [\mathbf{C}]\mathbf{D} - [\mathbf{Q}] + \mathbf{W}^* \quad (2.89)$$

ここで、 $\mathbf{W}^*$  は  $\mathbf{W}^* = \mathbf{W}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{W}$  で、スピントテンソルに関するベクトルである。以上のマトリックスを用いて(2.87) 式を変形し、仮想速度が任意であることより両辺を  $\{\delta v^*\}^T$  で除すると次式になる。

$$\begin{aligned} & \int_v [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] \{v^*\} dv - \int_v [\mathbf{B}]^T [\mathbf{Q}] dv + \int_v [\mathbf{B}]^T [\mathbf{W}^*] dv + \int_v [\mathbf{M}]^T [\mathbf{D}'_s] [\mathbf{M}] \{v^*\} dv \\ & + \int_v [\mathbf{M}]^T [\mathbf{T}'] dv \text{tr} \mathbf{L} + \int_v [\mathbf{B}_v] [\mathbf{N}_h] \{\dot{u}_w^*\} dv + \int_v [\mathbf{M}]^T [\mathbf{U}] [\mathbf{M}] \{v^*\} dv = \int_{\Gamma_s} [\mathbf{N}]^T \hat{\mathbf{S}}_t d\Gamma_s \end{aligned} \quad (2.90)$$

さらに以下のように各マトリックス、ベクトルを定義する。

$$[\mathbf{K}] = \int_v [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] dv \quad (2.91)$$

$$[\mathbf{K}_L] = \int_v [\mathbf{M}]^T [\mathbf{D}'_s] [\mathbf{M}] dv + \int_v [\mathbf{M}]^T [\mathbf{U}] [\mathbf{M}] dv \quad (2.92)$$

$$[\mathbf{K}_v]^T = \int_v [\mathbf{B}_v]^T [\mathbf{N}_h] dv \quad (2.93)$$

$$[\dot{\mathbf{F}}] = \int_{\Gamma_s} [\mathbf{N}]^T \hat{\mathbf{S}}_t d\Gamma_s \quad (2.94)$$

以上のマトリックスを用いて(2.90) 式を変形する。

$$[\mathbf{K}] \{v^*\} - \int_v [\mathbf{B}]^T [\mathbf{Q}] dv - \int_v [\mathbf{B}]^T [\mathbf{W}^*] dv + [\mathbf{K}_L] \{v^*\} - [\mathbf{K}_v]^T \{\dot{u}_w^*\} + \int_v [\mathbf{M}]^T [\mathbf{T}'] dv \text{tr} \mathbf{L} = [\dot{\mathbf{F}}] \quad (2.95)$$

仮想速度と仮想変位の関係は、Euler 近似を用いれば次式で定義される。

$$\{v^*\} = \frac{\{\Delta u^*\}}{\Delta t} \quad (2.96)$$

ここで、 $\Delta u^*$  は仮想変位ベクトルである。

また、間隙水圧速度に次式で定義される時間差分を用いる。

$$\{\dot{u}_w^*\} = \frac{\{u_w^*\}_{t+\Delta t} - \{u_w^*\}_t}{\Delta t} \quad (2.97)$$

(2.96) 式を(2.95) 式に代入して、

$$[\mathbf{K}] \frac{\{\Delta u^*\}}{\Delta t} - \int_v [\mathbf{B}]^T [\mathbf{Q}] dv + [\mathbf{K}_L] \frac{\{\Delta u^*\}}{\Delta t} - [\mathbf{K}_v]^T \frac{\{u_w^*\}_{t+\Delta t} - \{u_w^*\}_t}{\Delta t}$$



$$+ \int_v [B]^T \{W^*\} dv + \int_v [M]^T [T'] dv tr L = [\dot{F}] \quad (2.98)$$

上式を変形すると、最終的なつり合い式の弱形式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{[K] + [K_L]\} \{\Delta u^*\} - [K_v]^T \{u_w^*\}_{t+\Delta t} \\ & = \Delta t [\dot{F}] - [K_v]^T \{u_w^*\}_t - \Delta t \int_v [M]^T [T'] dv tr L + \Delta t \int_v [B]^T [Q] dv - \Delta t \int_v [B]^T \{W^*\} dv \end{aligned} \quad (2.99)$$

### 2.3.3 流体相のつり合い式

流体相のつり合い式を離散化するにあたり、図2.3に示す境界条件を定義する。

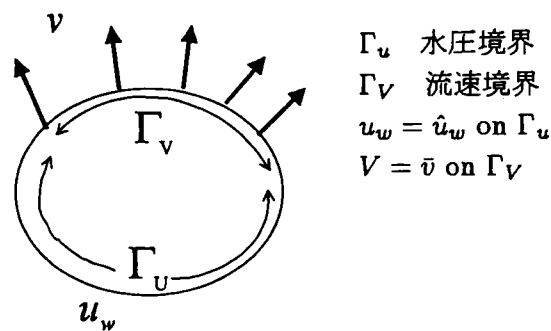


図2.3 境界条件

$k$ を透水係数、 $\gamma_w$ を水の単位体積重量として、ダルシーの法則から、流体相の釣り合い式は次式の連続式で表される。

$$\frac{k}{\gamma_w} u_{w,ii} + D_{ii} = 0 \quad (2.100)$$

ここで、 $D_{ii}$ はストレッチングテンソルを表す。

水圧境界 $\Gamma_u$ 上で $\hat{u}_w = 0$ となる試験関数 $\hat{u}_w$ を考え、連続式の弱形式を求める。

$$\int_v \left( \frac{k}{\gamma_w} u_{w,ii} + D_{ii} \right) \hat{u}_w ds = \frac{k}{\gamma_w} \int_v u_{w,ii} \hat{u}_w dv + \int_v D_{ii} \hat{u}_w dv = 0 \quad (2.101)$$

上式の両辺に Gauss の発散定理を適用すると、

$$\frac{k}{\gamma_w} \int_{\Gamma_v + \Gamma_u} \hat{u}_w^T u_{w,i} n_i ds - \frac{k}{\gamma_w} \int_v \hat{u}_w^T u_{w,i} dv + \int_v \hat{u}_w^T D_{ii} dv = 0 \quad (2.102)$$

ここで以下のような各マトリックスを定義する。

$$u_w = [N_h] \{u_w^*\} \quad (2.103)$$

$$\{u_{w,i}\} = [N_{h,i}] \{u_w^*\} = [B_h] \{u_w^*\} \quad (2.104)$$

$$D_{ii} = \text{tr}D = [\mathbf{B}_v]\{v^*\} \quad (2.105)$$

これらを(2.102)式に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{k}{\gamma_w} \int_{\Gamma_v + \Gamma_u} \{\hat{u}_w^*\}^T [N_h]^T [\mathbf{B}_h] \{u_w^*\} \{n\} ds - \frac{k}{\gamma_w} \int_v \{\hat{u}_w^*\}^T [\mathbf{B}_h]^T [\mathbf{B}_h] \{u_w^*\} dv \\ + \int_v [N_h]^T \{\hat{u}_w^*\}^T [\mathbf{B}_v] \{v^*\} dv = 0 \end{aligned} \quad (2.106)$$

試験関数の任意性を考慮し、上式の両辺を  $\{\hat{u}_w^*\}^T$  で除して次式を得る。

$$\frac{k}{\gamma_w} \int_{\Gamma_v + \Gamma_u} [N_h]^T [\mathbf{B}_h] \{n\} ds \{u_w^*\} - \frac{k}{\gamma_w} \int_v [\mathbf{B}_h]^T [\mathbf{B}_h] dv \{u_w^*\} + \int_v [N_h]^T [\mathbf{B}_v] dv \{v^*\} = 0 \quad (2.107)$$

ここで次の各マトリックスを定義する。

$$[\mathbf{K}_h] = \frac{k}{\gamma_w} \int_v [\mathbf{B}_h]^T [\mathbf{B}_h] dv \quad (2.108)$$

$$[\mathbf{K}_v] = \int_v [N_h]^T [\mathbf{B}_v] dv \quad (2.109)$$

$$[\mathbf{V}] = \frac{k}{\gamma_w} \int_{\Gamma_v + \Gamma_u} [N_h]^T [\mathbf{B}_h] \{n\} ds \{u_w^*\} \quad (2.110)$$

これらの各マトリックスを(2.107)式に代入して、

$$- [\mathbf{K}_v] \{v^*\} + [\mathbf{K}_h] \{u_w^*\} = [\mathbf{V}] \quad (2.111)$$

仮想速度と仮想変位の関係は、Euler近似を用いれば、次式で定義される。

$$\{v^*\} = \frac{\{\Delta u^*\}}{\Delta t} \quad (2.112)$$

ここで、 $\Delta u^*$ は仮想変位ベクトルである。

(2.112)式を、(2.111)式に代入すると、液体相のつり合い式の弱形式が得られる。

$$- [\mathbf{K}_v] \{\Delta u^*\} + \Delta t [\mathbf{K}_h] \{u_w^*\}_{t+\Delta t} = \Delta t [\mathbf{V}] \quad (2.113)$$

### 2.3.4 構成式の弱形式化

粘塑性体積ひずみの二階空間勾配を形状関数を用いて定式化する場合、従来の節点変位・間隙水圧の他に、粘塑性体積ひずみを独立変数として、節点において定義する必要がある。そのため、つり合い式・連続式のほかに、粘塑性体積ひずみの発展式（構成式）を離散化する(Okaら(1994))。

粘塑性体積ひずみの発展式の弱形式を、次式で表す。

$$\int_v (f - a_1 v^{vp} - a_3 \nabla^2 v^{vp} - g^{(\dot{v}^{vp})}) \delta \dot{v}^{vp} dv = 0 \quad (2.114)$$

ここで、

$$f = \frac{\sqrt{2J_2}}{M^* \sigma'_m} + \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{my}} \quad (2.115)$$

ここで、 $v^{vp} = \int dv^{vp}$ は粘塑性体積ひずみを表す。

降伏関数、すなわち粘塑性体積ひずみの発展式を書き換えると、

$$\dot{v}^{vp} = G(\sigma_{kl}, v^{vp}, \nabla^2 v^{vp}) \quad (2.116)$$

Taylor級数を用いて展開し、二次以降を無視すると、

$$\dot{v}^{vp} = \dot{v}_0^{vp} + \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial G}{\partial v^{vp}} \dot{v}^{vp} + \frac{\partial G}{\partial (\nabla^2 v^{vp})} \nabla^2 \dot{v}^{vp} \quad (2.117)$$

ここで、

$$\nabla^2 v^{vp} = \beta \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = [G_\sigma], \quad \frac{\partial G}{\partial v^{vp}} = G_{v^{vp}}, \quad \frac{\partial G}{\partial \beta} = G_\beta \quad (2.119)$$

とおくと、

$$\dot{v}^p = \dot{v}_0^p + [G_\sigma] \dot{\sigma}_{kl} + G_{v^{vp}} \dot{v}^{vp} + G_\beta \dot{\beta} \quad (2.120)$$

また、全ひずみ速度は、次式で与えられる。

$$[\dot{\epsilon}] = [L^*]^{-1} [\dot{\sigma}] + [\dot{\epsilon}_0^p] + [A] \dot{v}^{vp} + [A^*] [\dot{\sigma}] + [A^{**}] \dot{\beta} \quad (2.121)$$

ただし、 $[L^*]^{-1}$ は弾性コンプライアンステンソル、 $A = \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial v^{vp}}$ 、 $A^* = \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial \sigma_{kl}}$ 、 $A^{**} = \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial \beta}$ である。

また、 $[L]^{-1} = [L^*]^{-1} + [A^*]$

と、おくと

$$[\dot{\sigma}] = [L][\dot{\epsilon}] - [L][\dot{\epsilon}_0^p] - [L][A] \dot{v}^{vp} - [L][A^{**}] \dot{\beta} \quad (2.122)$$

(2.122)式を、(2.120)式に代入すると、

$$\dot{v}^{vp} = \dot{v}_0^{vp} + [G_\sigma] \{ [L][\dot{\epsilon}] - [L][\dot{\epsilon}_0^p] - [L][A] \dot{v}^{vp} - [L][A^{**}] \dot{\beta} \} + G_{v^{vp}} \dot{v}^{vp} + G_\beta \dot{\beta} \quad (2.123)$$

$$[1 - G_{v^{vp}} + [G_\sigma][L][A]] \dot{v}^{vp} = \dot{v}_0^p + [G_\sigma][L][\dot{\epsilon}] - [G_\sigma][L][\dot{\epsilon}_0^p] + [G_\beta - [G_\sigma][L][A^{**}]] \dot{\beta} \quad (2.124)$$

ここで、

$$\begin{aligned} H &= 1 - G_{v^{vp}} + [G_\sigma][L][A] \\ \dot{Q}_0^p &= \dot{v}_0^{vp} - [G_\sigma][L][\dot{\epsilon}_0^p] \\ R &= G_\beta - [G_\sigma][L][A^{**}] \end{aligned}$$

とおくと、(2.124)式は次式となる。

$$H \dot{v}^{vp} = \dot{Q}_0^p + [G_\sigma][L][\dot{\epsilon}] + R \dot{\beta} \quad (2.125)$$

よって、粘塑性体積ひずみの発展式の弱形式は、

$$\int_{\nu} \{R\dot{\beta} - H\dot{v}^{vp} + \dot{Q}_0^p + [G_\sigma][L][\dot{\epsilon}]\} \delta v^{vp} dv = 0 \quad (2.126)$$

ここで、

$$\dot{\beta} = \nabla^2 \dot{v}^{vp} \quad (2.127)$$

なので、

$$\delta v^{vp} \nabla^2 \dot{v}^{vp} = \nabla(\delta v^{vp} \nabla \dot{v}^{vp}) - \nabla \delta v^{vp} \nabla \dot{v}^{vp} \quad (2.128)$$

(2.128)式を(2.126)式に代入して、

$$\int_{\nu} R \{ \nabla(\delta v^{vp} \nabla \dot{v}^{vp}) - \nabla \delta v^{vp} \nabla \dot{v}^{vp} \} dv + \int_{\nu} \delta v^{vp} \{ -H\dot{v}^{vp} + \dot{Q}_0^p + [G_\sigma][L][\dot{\epsilon}] \} dv = 0 \quad (2.129)$$

$$\int_{\nu} R \nabla \delta v^{vp} \nabla \dot{v}^{vp} dv - \int_{\nu} R \nabla(\delta v^{vp} \nabla \dot{v}^{vp}) dv - \int_{\nu} \delta v^{vp} \{ -H\dot{v}^{vp} + \dot{Q}_0^p + [G_\sigma][L][\dot{\epsilon}] \} dv = 0 \quad (2.130)$$

ガウスの発散定理を第2項に適用すると、

$$\int_{\nu} R \nabla \delta v^{vp} \nabla \dot{v}^{vp} dv - R \int_{s} \delta v^{vp} \nabla \dot{v}^{vp} \bar{n} ds - \int_{\nu} \delta v^{vp} \{ -H\dot{v}^{vp} + \dot{Q}_0^p + [G_\sigma][L][\dot{\epsilon}] \} dv = 0 \quad (2.131)$$

ここで、形状関数 $[N^*]$ 、節点での粘塑性体積ひずみベクトル $\{\dot{v}^{vp*}\}$ 、ひずみ速度-速度関係マトリクス $[B]$ 、節点での速度ベクトル $\{\dot{u}^*\}$ 、また $[N^*]' = \nabla[N^*]$ を用いて、

$$\dot{v}^{vp} = [N^*] \{\dot{v}^{vp*}\} \quad (2.132)$$

$$\nabla \dot{v}^{vp} = [N^*]' \{\dot{v}^{vp*}\} \quad (2.133)$$

$$[\dot{\epsilon}] = [B] \{\dot{u}^*\} \quad (2.134)$$

$$[N^*]' = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^*}{\partial x} \\ \frac{\partial N^*}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

とすると、(2.131)式より、

$$\begin{aligned} & \{\delta \dot{v}^{vp*}\}^T \int_{\nu} R [N^*]'^T [N^*]' dv \{\dot{v}^{vp*}\} + \{\delta \dot{v}^{vp*}\}^T \int_{\nu} H [N^*]^T [N^*] dv \{\dot{v}^{vp*}\} \\ & - \{\delta \dot{v}^{vp*}\}^T \int_{\nu} [N^*]^T [G_\sigma][L][B] dv \{\dot{u}^*\} \\ & - \{\delta \dot{v}^{vp*}\}^T \int_{\nu} [N^*]^T \dot{Q}_0^p dv \\ & - \{\delta \dot{v}^{vp*}\}^T R \int_{s} [N^*]^T [N^*]' \{\dot{v}^{vp*}\} \{n\} ds \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.136)$$

$\{\delta \dot{v}^{vp*}\}$  を除して、

$$\begin{aligned} & \int_v (R[\mathbf{N}^*]^T [\mathbf{N}^*]'^T + H[\mathbf{N}^*]^T [\mathbf{N}^*]) dv \{\dot{v}^{vp*}\} - \int_v [\mathbf{N}^*]^T [G_\sigma][L][\mathbf{B}] dv \{\dot{u}^*\} \\ & - \int_v [\mathbf{N}^*]^T \dot{Q}_0^p dv - R \int_s [\mathbf{N}^*]^T [\mathbf{N}^*]' \{\dot{v}^{vp*}\} \{n\} ds = 0 \end{aligned} \quad (2.137)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_1] &= \int_v (R[\mathbf{N}^*]^T [\mathbf{N}^*]'^T + H[\mathbf{N}^*]^T [\mathbf{N}^*]) dv \\ [\mathbf{K}_2] &= - \int_v [\mathbf{N}^*]^T [G_\sigma][L][\mathbf{B}] dv \\ [\mathbf{F}] &= \int_v [\mathbf{N}^*]^T \dot{Q}_0^p dv + R \int_s [\mathbf{N}^*]^T [\mathbf{N}^*]' \{\dot{v}^{vp*}\} \{n\} ds \end{aligned}$$

とおくと、降伏関数の弱形式は次式で得られる。

$$[\mathbf{K}_1] \{\dot{v}^{vp*}\} + [\mathbf{K}_2] \{\dot{u}^*\} = [\mathbf{F}] \quad (2.138)$$

また、Eulerの近似式を用いると、

$$\{\dot{v}^{vp*}\} = \frac{\{\Delta v^{vp*}\}}{\Delta t}, \quad \{\dot{u}^*\} = \frac{\{\Delta u^*\}}{\Delta t} \quad (2.139)$$

よって、(2.138)式は、

$$[\mathbf{K}_1] \{\Delta v^{vp*}\} + [\mathbf{K}_2] \{\Delta u^*\} = \Delta t [\mathbf{F}] \quad (2.140)$$

(2.99)式、(2.113)式、(2.140)式より、有限要素法による支配方程式をまとめると、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_L] & -[\mathbf{K}_v]^T & [0] \\ -[\mathbf{K}_v] & \Delta t [\mathbf{K}_h] & [0] \\ [\mathbf{K}_2] & [0] & [\mathbf{K}_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u^* \\ \{u_{w,t+\Delta t}^*\} \\ \Delta v^{vp*} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \Delta t [\dot{\mathbf{F}}] - [\mathbf{K}_v]^T \{u_w\}_t - \Delta t \int_v [\mathbf{M}]^T [\mathbf{T}'] dv tr L + \Delta t \int_v [\mathbf{B}]^T [Q] dv - \Delta t \int_v [\mathbf{B}]^T \{\mathbf{W}^*\} dv \\ \Delta t [\mathbf{V}] \\ \Delta t [\mathbf{F}_1] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.141)$$

と表すことができる。

各マトリクスを誘導するために必要な式を付録2.1に付した。

## 2.4 まとめ

本章では、次章の数値解析において使用する弾粘塑性構成式についてその誘導と、内容について示した。有限要素法による支配方程式の離散化は以下の流れで行った。

- 足立・岡の弾粘塑性構成式(1981,1982)の誘導
- 有限変形理論に基づく構成式の変形
- 勾配依存理論に基づいて粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項を誘導された弾粘塑性構成式に導入

- 粘塑性体積ひずみ二階空間勾配依存弾粘塑性構成式を Updated-Lagrangian 法に基づいて有限要素法を用いて離散化
  - － 有効応力原理に基づき固体・流体 2 相混合体のつり合い方程式と流体相のつり合い式を誘導
  - － 弱形式化を行い支配方程式を離散化

離散化した支配方程式を解析プログラムに組み込み、次章で行う数値解析に用いた。

## 参考文献

- Adachi.T & Oka.F (1982), Constitutive equation for normally consolidated clay based on elasto-viscoplasticity, *Soils and Foundation*, 22(4), pp.57-70.
- Aifantis.E.C.(1987), The physics of plastic deformation, *International Journal of Plasticity*, Vol.3, pp.211-247.
- Biot.M.A (1963), Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *J. Appl. Phys.*, Vol.3, pp.1482-1498.
- Oka.F(1981), Prediction of time-dependent behavior of clay, *Proc. of the 10th ICSMFE*, Stockholm, Vol.1, Balkema, pp.215-218.
- Oka.F, Adachi.T and Mimura.M (1988), Elasto-viscoplastic constitutive model for clay, *Proceedings of the International Conference on Rheology and Soil Mechanics*, Edited by M.J.Keedwell, Coventry, UK., pp.12-16.
- Oka.F, Yashima.A, Kohara.I and Adachi.T(1994), Instability of a viscoplastic model for clay and numerical study of strain localization, *Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, Proc. 3rd Int. Workshop of Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks, Balkema, Chambon,R., Desrues,J. and Valdoulakis,I. eds., pp.237-247.
- Peirce.D., Shih.C.F & Needleman.A.(1984), A tangent modulus method for rate dependent soils, *Computers & Structures*, 18(5), pp.845-887.
- Perzyna.P.(1963), The constitutive equation for work hardening and rate sensitive plastic materials, *Proc. of Vibrational Problems*, Warsaw, Vol.4, No.3, pp.281-290.
- Roscoe.K.H., Schofield.A.N. & Thurairajah.A.(1963), Yielding of clays in state wetter than critical, *Geotechnique*, Vol.13, No.3, pp.211-240.

## 第3章 勾配依存型弾粘塑性モデルを用いた粘土の変形解析

### 3.1 概説

本章では、前章で誘導した弾粘塑性構成式を導入した有限要素プログラムを用いて数値解析を行う。特に、非局所理論の導入の妥当性を確認するために、変形が局所的に発生する境界条件を用いて、初期値境界値問題を解く。まず、第一に層状地盤を仮定した一次元的せん断変形を起こす境界値問題を考え、粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項が、数値解析結果にどのような影響を及ぼすか検討する。このとき、勾配項の影響だけでなく、せん断速度・透水係数など、粘土の変形挙動に関するパラメータと勾配項の関係も明らかにする。

次に、粘性土の二次元的変形を考え数値解析を行う。このとき、境界条件をトリガーとしてせん断帯を発生させ、粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項が粘性土の変形、特にせん断帯付近の挙動にどのような影響を及ぼすか検討する。

弾粘塑性構成式を用いた粘土の変形解析では、粘性材料自体が非局所的性質を示す。また、土-水連成解析でも、同様に、間隙水が非局所的な性質に等価な性質を示す。そのため、勾配理論を導入しても、空間勾配そのものの非局所モデルの局所化制限子としての性質を把握することに困難がある。そこで、二種類の数値解析結果をもとに、飽和粘土供試体の両側面に微小な初期不整を与え、数値解析を行う。この境界により、同じモードの変形で、局所的に変形を集中させ、構成式の持つ勾配項の非局所的性質を把握しやすくなる。先に行ったせん断変形の場合の数値解析結果の妥当性を検証するとともに、粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項が、数値解析結果にどのような影響を及ぼすか明らかにする。

### 3.2 これまでの研究

地盤材料のように粒状体の集合と考えられる材料は、変形が進行すると、粒と粒の間が滑ることによりせん断破壊に至る。せん断破壊を予測することは、地盤の破壊現象を予測する上で非常に重要な問題である。一般的に数値解析においては、これら粒状体の集まりを均一な材料と見なし、連続体力学に基づいて解かれる。連続体について変形解析を行う一般的な解法として有限要素法が挙げられる。有限要素法のような近似解法では、要素メッシュを小さくすればするほど、真の解へ収束することが知られている。粘土が、せん断帯をともなって破壊に至る場合をシミュレートするとき、実際にはある程度のせん断帯の幅が存在するにも関わらず、有限要素解析の精度を上げるため要素メッシュを小さくしていくとせん断帯の幅が小さくなりすぎる（あるいはなくなる）という問題が現れる。この問題を回避する方法として、非局所理論を用いた研究が多く行われている。コンクリート材料の研究分野で空間的な勾配の概念を最初に導入したのはL'Hermiteら(1952)であり、収縮ひび割れの形成が収縮



圧縮のみならず、その空間的な勾配にも依存すると考える必要があると示した。また、Aifantis(1987)は、内部状態変数だけでは記述できない現象（例えば、せん断帯の幅、間隙、進展速度など）が依存することを述べている。

先に述べたとおり、地盤の破壊を解析するためには、せん断帯の発生とひずみの局所化後のひずみ軟化挙動を解析しなければならない。特に、せん断帯については、発生条件やその方向だけでなく、厚さや分布を把握できることが好ましい。数値解析において、せん断帯が発生すると、支配方程式の楕円性が失われることにより問題が不適切になる。支配方程式の楕円性を回復させるためにも、非局所理論は有効である。ここでは特に、数値解析における Localization limiter として、ひずみの空間的勾配依存構成式を用いて、その効果を検討する。高次の塑性ひずみ勾配、ここでは2階勾配が果たす役割について、1次元問題を例に考えてみる。塑性ひずみ速度が塑性ひずみの2階勾配に依存するとして、次の関係を仮定する。

$$\frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 \varepsilon^p}{\partial x^2} + f(\varepsilon^p, \sigma) \quad (\beta > 0, f > 0) \quad (3.1)$$

いま、 $x$ 座標のある部分でひずみの局所化がおり、塑性ひずみはその部分で大きく蓄積しているような状況（図3.1）を考える。このとき、塑性ひずみの最大の点で、2階勾配は負になる。したがって、(3.1)式中の $\beta$ の値が正であれば、その場所での塑性ひずみ速度は負となり、それ以上の局所化が起きないことがわかる。

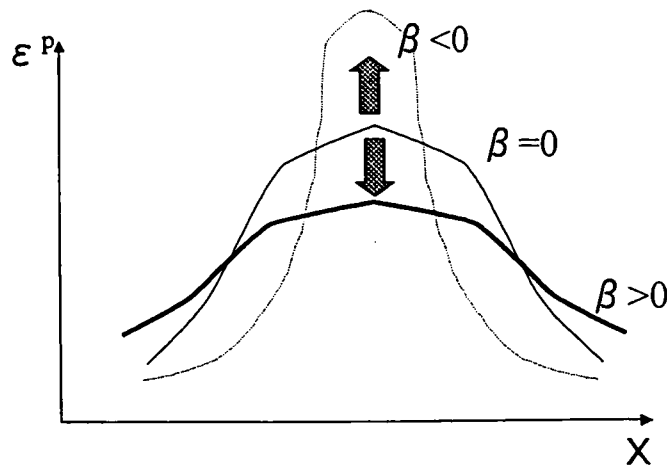


図3.1 塑性ひずみの空間的分布と $\beta$ の果たす役割

このように、塑性ひずみの2階勾配は、 $\beta$ の値が正であれば、localization limiterとして働くことがわかる。一方、 $\beta$ の値が負であれば、 $\varepsilon^p$ の増大は加速される。

局所理論を用いれば、ひずみ軟化領域において支配方程式の楕円性が喪失し、著しいメッシュサイズ依存性が現れるが、勾配理論はlocalization limiterとして作用し、支配方程式を楕円形のまま保持する役割を果たす。したがって、変形が局所化した後の挙動も安定的に解析することが可能となる。

また構成式中に材料の特性長さのパラメータが含まれるため、せん断帯の幅などが予測可能となる。さらに、クラックの進展解析においては、クラック先端のひずみの特異点を除去することができる。勾配連続体理論は、localization limiterとして用いられることが多いが、 $\beta$ の値を負にすることによって、局所化をさらに促進するunstabilizerの役目も果たすことができる。Okaら(1992)は、 $\beta$ の値を負とした勾配項を弾粘塑性構成式に組み込み、不安定化子(unstabilizer)として勾配項の果たす役割を検討している。彼らによれば、勾配項の導入によって、パターンの局所変形が再現できることが明らかになっている。Vardoulakisら(1991)は、砂や岩を用いた三軸圧縮試験の数値シミュレーションを勾配連続体理論に基づく構成式とコセラ理論を用いて行った。供試体寸法を種々に変えた解析を行うことによって、勾配理論に基づく構成式の方が、コセラ理論より顕著な寸法効果を示すことがわかった。

これまで、勾配項を含まない足立・岡の弾粘塑性構成式を用いて飽和粘土に対して、種々の数値解析が行われてきた。本章では、第2章で提案した粘塑性ひずみの2階勾配を考慮した弾粘塑性構成式を有限要素法により離散化したプログラムを用いて、簡単な初期値境界値問題を取り上げ、勾配項が変形解析結果に及ぼす影響を考察する。本論文で用いる有限要素解析プログラムにおいて、その特徴である有限要素における各自由度の定義を図3. 2に示す。ひずみは変位を空間微分したものであるため、ひずみ、応力、間隙水圧の近似度を合わせるという意味で、変位は二次の形状関数を用いて表現する。変位は1要素8節点、間隙水圧については1要素4節点のアイソパラメトリック要素で定義する。また、勾配項に関する粘塑性体積ひずみについては、2階の空間勾配項を形状関数の微分を用いて定義するため、1要素8節点のアイソパラメトリック要素で定義する。

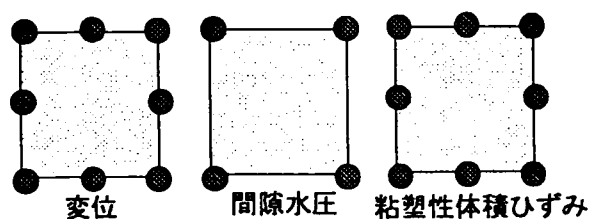


図3. 2 有限要素における自由度の定義

### 3.3 層状粘土地盤のせん断変形解析

勾配項を含んだ弾粘塑性構成式による数値解析において、勾配項が数値解析結果に与える影響を検討するために、半無限地盤がせん断力を受ける場合を想定し、図3. 3のような境界条件を持つ解析モデルを考える。

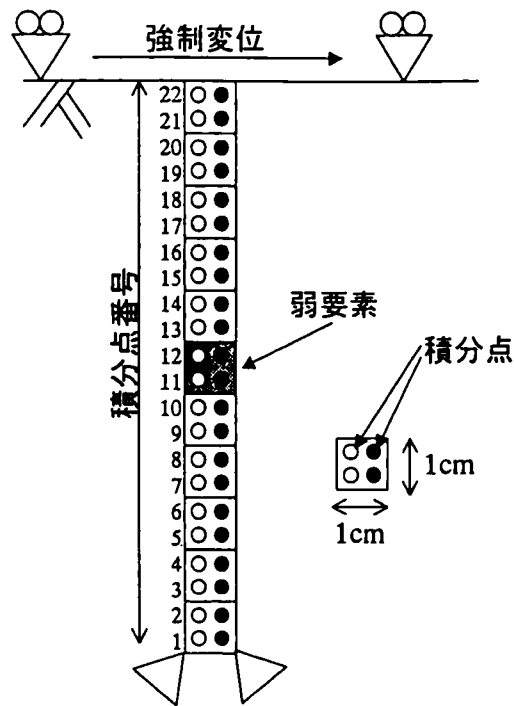


図3. 3 有限要素メッシュと境界条件

このモデル地盤では、変形の局所化のトリガーとして層状地盤中に強度の低い層を仮定し、11個の有限要素正方形メッシュを用いた。図3. 3で、色の濃い要素のある深さを強度の弱い層とした。強度の弱い層は表3. 1に示す通り破壊時の応力比を10%小さく設定した。要素境界全体としては非排水状態であるが、各要素間の間隙水の移動は許した。また、変位境界については、各要素とも鉛直方向には動かず、水平方向のみ変形可能とした。図3. 3の地表面（要素供試体上部端面）に強制変位を与えた。この、強制変位によって、中心にある弱要素に変形が集中し、塑性体積ひずみが蓄積し易いと考えたため、弱要素を層状地盤の中心の深さに設定した。図中の白丸と黒丸はそれぞれ、各要素の積分点を表し、図に向かって左側の積分点に、地表面から遠い順に番号を1から22番まで付した。解析に用いた材料定数を表3. 1に示す。ここで、勾配項にかかる係数 $\beta = m'\alpha_3$ (以後 $\beta$ )を種々に変化させ、粘塑性ひずみの2階空間勾配項が粘性土の変形解析結果に与える影響を考察する。勾配項にかかる係数 $\beta$ は-1, 0, 5の3ケース、ひずみ軟化に関する係数 $G_2^*$ は、20, 50, 100, 150の4ケースとした。

表 3. 1 材料定数

圧縮指数	$\lambda$	0.372
膨潤指数	$\kappa$	0.054
初期平均有効応力	$\sigma'_{m0}$	588(kPa)
間隙比	$e$	1.28
粘塑性パラメータ	$m'$	21.5
粘塑性パラメータ	$C$	$4.5 \times 10^{-8}(1/sec)$
破壊時の応力	$M^*$	1.05
弱要素の破壊時の応力	$M^*$	0.94
せん断弾性係数	$G$	12946(kPa)
透水係数	$k$	$1.16 \times 10^{-12}(cm/sec)$
ひずみ速度	$\dot{\epsilon}$	1.0(%/min)
軟化パラメータ	$G_2^*$	20, 50, 100, 150

1つ目の解析ケースとして、ひずみ軟化に関する係数 $G_2^*$ を100とし、解析を行った。図3. 4 aに見かけのせん断応力-水平変位関係を示す。勾配項にかかる係数 $\beta$ を種々変化させた結果である。ここで、見かけのせん断応力とは、供試体上端面の3つの節点の水平反力を上端面の長さ(1cm)で除したものである。また、水平変位とは、供試体上端面の左側の節点の水平に移動した量である。このときの水平変位速度は0.004cm/secである。

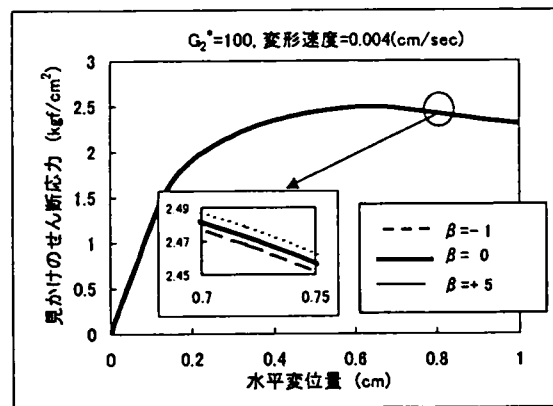


図 3. 4 a 見かけのせん断応力-水平変位関係

図3. 4 aでは、軟化している部分の応力に微小ではあるが差異が見られる。前節で示したとおり、勾配項が正(項 $> 0$ )の場合( $\beta > 0$ )は塑性ひずみの発生を抑制する。そのため、変形量が小さくなり、節点反力は大きくなると考えられる。逆に、勾配項が負(項 $< 0$ )の場合は、塑性ひずみの発展を加速させ、節点反力は小さくなると考えられる。この現象は、塑性ひずみの発達するひずみ軟化域において確認できる。図3. 4 bに粘塑性体積ひずみの分布を示す。横軸に積分点番号、縦軸に粘塑性体積ひずみを示した。このときの水平変位量は0.68cmである。粘塑性体積ひずみが発達している積分点1を拡大してみると、 $\beta = 5$ の場合、粘塑性体積ひずみが抑制されており、 $\beta = -1$ のときは、粘塑性体積ひずみが大きくなっている。同様に、間隙水圧の分布を図3. 4 cに示す。弱要素では間隙水圧は

他の部分に比べて小さくなっている。この部分を拡大してみると、正の $\beta$ での間隙水圧は、ゼロまたは負の $\beta$ の結果に比べて大きくなっている。

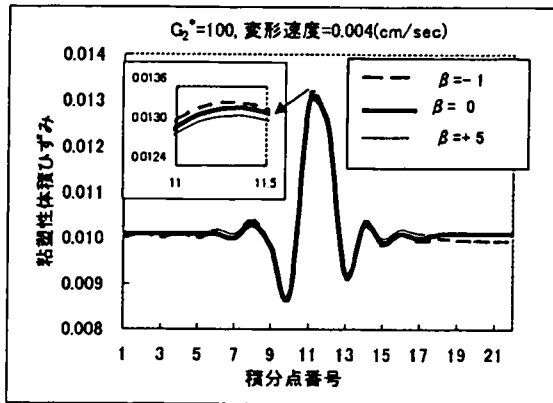


図3. 4 b 粘塑性体積ひずみの分布

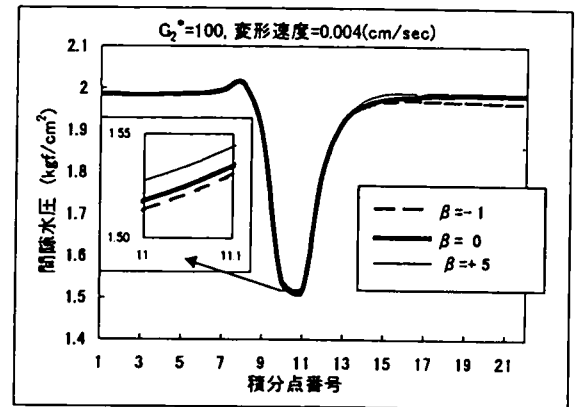


図3. 4 c 間隙水圧の分布

2つ目のケースとして、粘塑性体積ひずみの2階空間勾配項にかかる係数 $\beta$ を $\beta = +5$ 、ひずみ軟化に関するパラメータ $G_2^*$ を $G_2^* = 100$ とした場合に、変形速度を $0.001\text{cm/sec}$ 、 $0.005\text{cm/sec}$ 、 $0.01\text{cm/sec}$ の3種類に変化させ数値解析を行った。図3. 5 aに見かけのせん断応力-水平変位関係を示す。

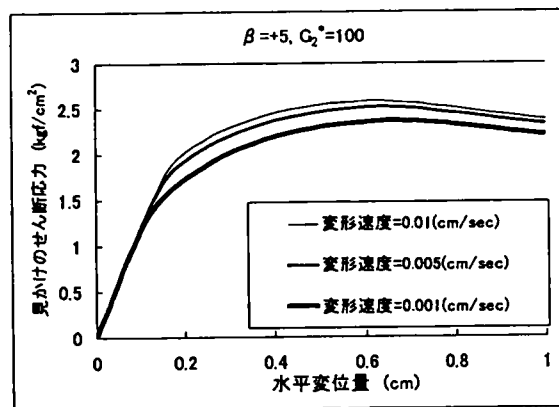


図3. 5 a 見かけのせん断応力-水平変位関係

水平変位速度が大きいほど、見かけのせん断応力が大きくなっているのが明確にわかる。水平変位速度の変化によって弾性域も変化することがわかる。図3. 5 bに粘塑性体積ひずみの分布、図3. 5 cに間隙水圧の分布を示す。粘塑性体積ひずみ(図3. 5 b)については、変形速度が小さいほど全体的に大きな値をとっているが、供試体内での分布の仕方は、同じで、供試体中心部にひずみが集中している。また間隙水圧は、供試体中心部の値が小さくなっており、粘塑性体積ひずみと同じように、変形速度が小さいほど全体の間隙水圧が大きくなっている。

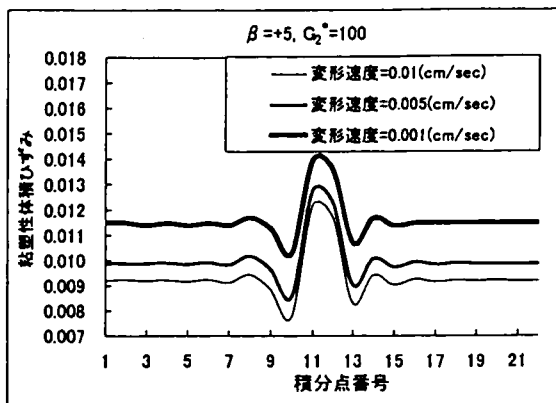


図3. 5 b 粘塑性体積ひずみの分布

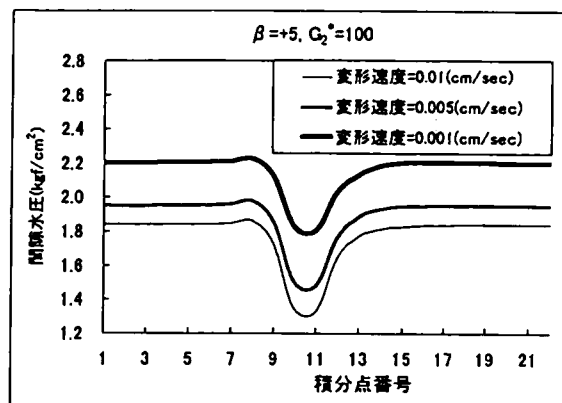


図3. 5 c 間隙水圧の分布

3つ目のケースとして、粘塑性体積ひずみの2階空間勾配項にかかる係数 $\beta$ を $\beta = +5$ 、変形速度を $0.004\text{cm/sec}$ として、ひずみ軟化に関するパラメータ $G_2^*$ を $G_2^* = 20, 50, 100, 150$ と4種類に変化させ数値解析を行った。図3. 6 aに見かけのせん断応力-水平変位関係を示す。

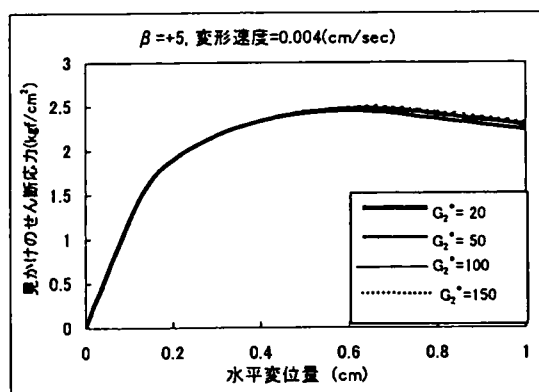


図3. 6 a 見かけのせん断応力-水平変位関係

ひずみ軟化に関する係数 $G_2^*$ はその値を大きくすると軟化の傾向が弱くなる係数である。この係数を変化させたときの粘塑性体積ひずみの分布 (図3. 6 b) と、間隙水圧の分布 (図3. 6 c) を示す。粘塑性体積ひずみの分布については、軟化の度合いが大きい場合 (例えば $G_2^* = 20$ のとき) の方が供試体中心部に粘塑性体積ひずみが集中している。このとき、供試体中心部以外は、粘塑性体積ひずみの値は全体的に小さくなっている。また、間隙水圧の分布については、供試体中心部の変形が集中した部分では $G_2^*$ の値が変化してもほとんど違いはないが、それ以外の部分では、 $G_2^* = 150$ の軟化傾向の小さい場合の方が値が大きくなっている。

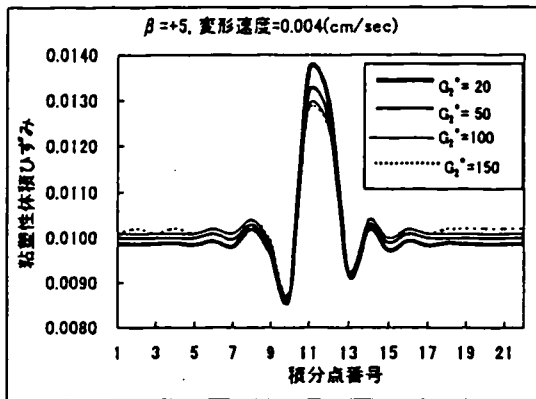


図3. 6 b 粘塑性体積ひずみの分布

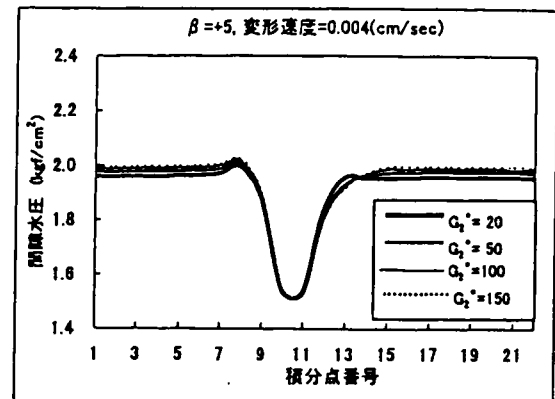


図3. 6 c 間隙水圧の分布

### 3.4 層状粘土地盤のせん断変形解析の考察

塑性体積ひずみの2階空間勾配項を導入した弾粘塑性構成式を用いた有限要素解析プログラムによって、粘性土の局所的な変形を数値解析した。境界条件により、供試体中央に変形が局所化するように設定した。ここでは、塑性体積ひずみの2階空間勾配項に関する係数だけでなく、ひずみ軟化に関する係数および変形速度を種々に変化させて、勾配項との関係についても比較した。

同じひずみ軟化の状態、変形速度一定で勾配項に関する係数を変化させた場合、勾配項全体の値が小さくなると、粘塑性体積ひずみの発生が押さえられて、軟化の傾向が小さくなった。

勾配項を正の値で固定して、ひずみ軟化に関する係数も一定にし、変形速度のみを変化させた場合、変形速度が速い場合はせん断応力は大きくなり、粘塑性体積ひずみも間隙水圧も全体的に小さくなった。

勾配項を正の値で一定に保ち、変形速度も一定に保ったとき、ひずみ軟化に関する係数を変化させて解析を行った。ひずみ軟化に関する係数を変化させると、変形の集中した部分では、軟化の度合いが大きい場合の方が、粘塑性体積ひずみ発生が大きい。

### 3.5 粘土供試体の二次元平面ひずみ圧縮変形解析

3.2節で行った層状地盤の変形解析の結果をもとに、粘性土が平面ひずみ状態で二次元的に変形する境界条件を設定し数値解析を行う。図3. 7に変形解析に用いた粘性土の境界条件を示す。また、解析に用いた粘性土の材料定数を表3. 2に示す。図3. 7のように供試体上部端面から1.0%/minの見かけの軸ひずみ速度で強制変形を与え変形させる。このとき、供試体の変形状態は左右対称である

示したとおり供試体の右部のみを用いて解析を行った。境界に対して非排水条件であるが、供試体内部での間隙水の移動は可能とした。同境界条件で粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項に関する係数 $\beta$ を変化させ、この変化が粘土の変形、特にせん断帯付近の試料の挙動にどのような影響を及ぼすか、解析結果から考察する。

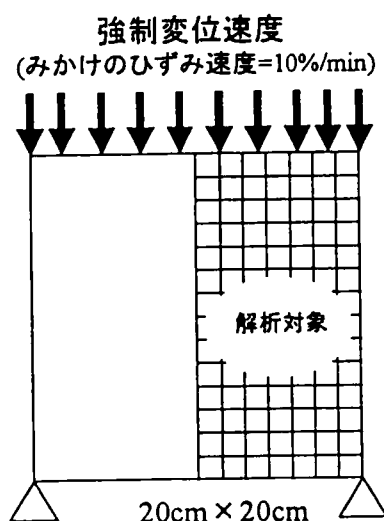


図 3. 7 粘土供試体モデルと境界条件

表 3. 2 解析に用いた粘性土の材料定数

圧縮指数	$\lambda$	0.372
膨潤指数	$\kappa$	0.054
初期平均有効応力	$\sigma'_{m0}$	588(kPa)
間隙比	$e$	1.28
粘塑性パラメータ	$m'$	21.5
粘塑性パラメータ	$C$	$4.5 \times 10^{-8}(1/sec)$
破壊時の応力	$M^*$	1.05
せん断弾性係数	$G$	12.9(MPa)
透水係数	$k$	$1.16 \times 10^{-12}(cm/sec)$
軟化パラメータ	$G_2^*$	100

上記の条件を用いて、解析対象部分を表 3. 3 のように 3 種類のメッシュ構成に分け、それぞれのメッシュについて粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項にかかる係数 $\beta$ を 0 と 10 と設定して、計六通りの数値解析を行った。3 種類のメッシュはそれぞれ (横×縦)、200 要素 (10 × 20)、800 要素 (20 × 40)、3200 要素 (40 × 80) で構成されている。



表 3. 3 数値解析のケース

	200要素 (10×20)	800要素 (20×40)	3200要素 (40×80)
勾配項なし ( $\beta = 0$ )	ケース 1	ケース 3	ケース 5
勾配項あり ( $\beta = 10$ )	ケース 2	ケース 4	ケース 6

図 3. 8 に勾配項なしのケース (ケース 1、ケース 3、ケース 5) 及び図 3. 9 に勾配項ありのケース (ケース 1、ケース 3、ケース 5) での軸ひずみ-軸差応力関係を示す。ここで軸ひずみとは、供試体高さで変形量を除したものであり、軸差応力とは、 $\sigma_1 - \sigma_3$  を示す。すべてのケースにおいて軸ひずみ 3%程度まではほぼ同じ曲線であるが、それ以上の軸ひずみになると、メッシュサイズの違いにより挙動に大きな違いが現れている。勾配項なしのケースでは、メッシュ数の大きいケースの方が軸差応力が小さいのに対して、勾配項ありのケースでは逆に、メッシュ数の大きいケースの方が軸差応力が大きくなっている。2つのグラフから、勾配項の導入は、軸差応力を大きくすること、また同じ大きさの解析対象に対して細かくメッシュを細分化させた方がより軸差応力を大きくさせることがわかる。

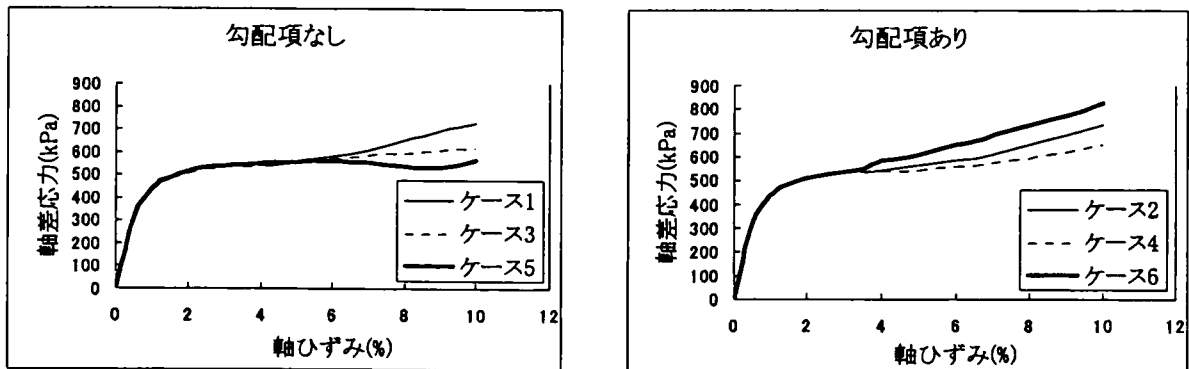


図 3. 8 軸ひずみ-軸差応力関係 (勾配項なし) 図 3. 9 軸ひずみ-軸差応力関係 (勾配項あり)  
 図 3. 10 に各ケースでの軸ひずみ 10% 時のせん断ひずみの分布を示す。ここでせん断ひずみは、 $\sqrt{\gamma_{xy}\gamma_{xy}}$  を示す。勾配項が導入されていない場合、メッシュ数が多くなるとせん断ひずみ測度の分布の幅が小さくなっていくのに対し、勾配項が導入されている場合、メッシュ数が多くなってもせん断ひずみの分布の幅は小さくなっていない。ここで、図 3. 8 と図 3. 9 で得られた結果と同じようにメッシュ数が少ない場合は勾配項の影響は現れないが、メッシュ数が多い場合 (ケース 5 とケース 6) 勾配項の影響が大きく現れていることがわかる。また、せん断ひずみが集中する部分では、勾配項を導入していないケースのせん断ひずみの値が大きくなっていることがわかる。つまり、勾配項の導入はせん断ひずみの集中を緩和させる。これらの結果から、勾配項の導入はメッシュサイズ依存性を緩和させる働きを持つことが分かる。ここで、各ケースでの軸ひずみ 10% 時の変形メッシュを図 3. 11 に示す。図 3. 10 の場合と同様に、勾配項を導入した場合 (ケース 2、ケース 4、ケース 6) メッ

シュが大きく変形した部分が集中していないことがわかる。

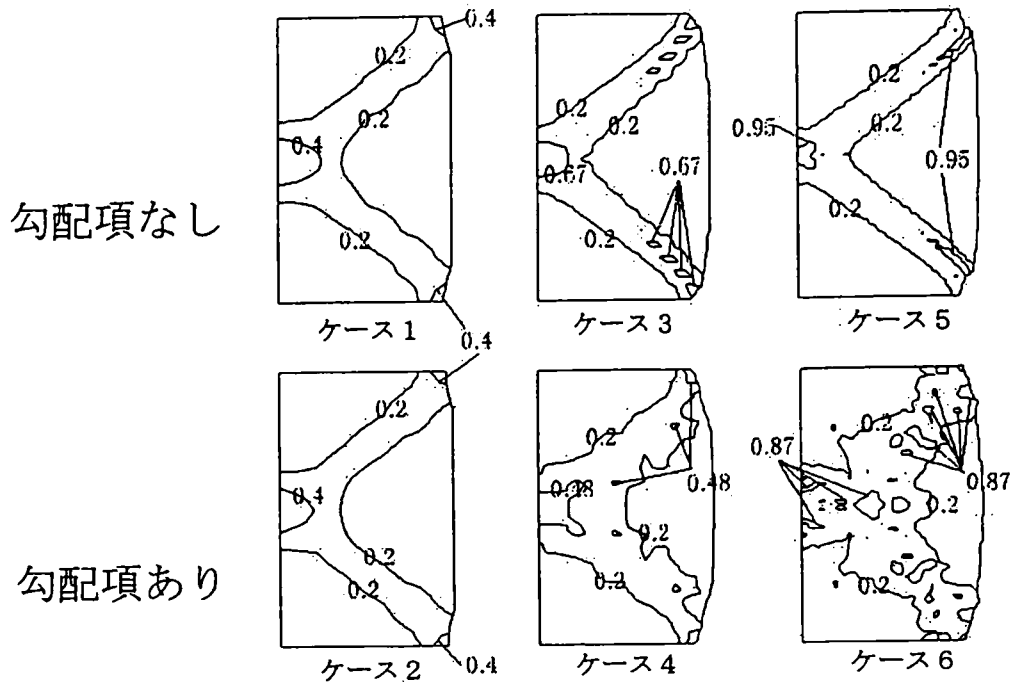


図3. 10 各ケースでのせん断ひずみの分布 (軸ひずみ10%のとき)

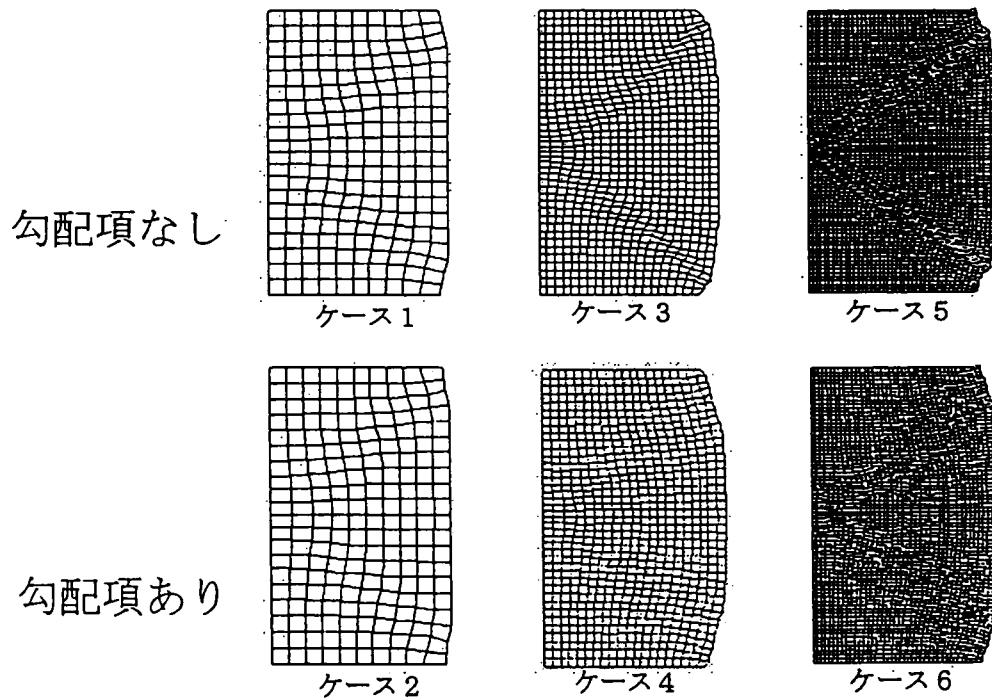


図3. 11 各ケースでの変形メッシュ (軸ひずみ10%のとき)

### 3.6 粘土供試体の二次元平面ひずみ圧縮変形解析の考察

粘性土が二次元的に変形する境界条件を設定し数値解析を行った。3.2節と同様、塑性体積ひずみの2階空間勾配項を導入した弾粘塑性構成式を用いた有限要素解析プログラムによって、粘性土の局所的な変形を数値解析した。境界条件により、供試体に変形が局所化する（せん断帯の発生）ように設定した。ここでは、塑性体積ひずみの2階空間勾配項に関する係数と有限要素メッシュ数を変化させ、計6ケースの数値解析を行い、それらの解析結果を比較した。粘土の変形、特にせん断帯付近の試料の挙動にどのような影響を及ぼすかを検討した。

軸ひずみー軸差応力関係から、すべてのケースにおいて軸ひずみ3%程度まではほぼ同じ曲線であるが、それ以上の軸ひずみになると、メッシュサイズの違いにより挙動に大きな違いが現れた。勾配項なしのケースでは、メッシュ数の大きいケースの方が軸差応力が小さいのに対して、勾配項ありのケースでは逆に、メッシュ数の大きいケースの方が軸差応力が大きくなった。2つのグラフから、勾配項の導入は、軸差応力を大きくさせ、また同じ大きさの解析対象に対して細かくメッシュを細分化させた方がより軸差応力を大きくさせた。

軸ひずみ10%時のせん断ひずみ測度の分布図と変形メッシュ図から、勾配項が導入されていない場合、メッシュ数が多くなるとせん断ひずみ測度の分布の幅が小さくなるのに対し、勾配項が導入されている場合、メッシュ数が多くなってもせん断ひずみ測度の分布の幅は小さくなった。変形メッシュからも同様の傾向を得ることができた。メッシュ数が少ない場合は勾配項の影響は現れないが、メッシュ数が多い場合、勾配項の影響が解析結果に大きく現れた。せん断ひずみが集中する部分では、勾配項を導入していないケースのせん断ひずみ測度の値が大きくなった。勾配項の導入はメッシュサイズ依存性を緩和させる働きを持つことが分かった。

### 3.7 初期不整を持つ粘土供試体の変形解析

前節までに行われてきた数値解析は、いずれも境界条件により強制的に局所的変形が発生するようなケースであった。これまでに勾配依存型理論を用いて粘性土の変形解析が行われている(Okaら(1997)),(Okaら(1997))。しかし、弾粘塑性構成式を用いた土-水連成解析では、粘性材料自体が非局所的性質を示す。また、土-水連成解析でも、同様に、間隙水が非局所的な性質に等価な性質を示した。そのため、勾配理論を導入しても、その空間勾配そのものの性質を把握することが困難であった。そこで、縦20cm×横10cmの飽和粘土供試体の両側面に微小な初期不整を与えた(図3.12)。このことにより、同じモードの変形になり、また、局所的に変形を集中させ、構成式の持つ勾配項の非局所的性質を把握しやすくした。

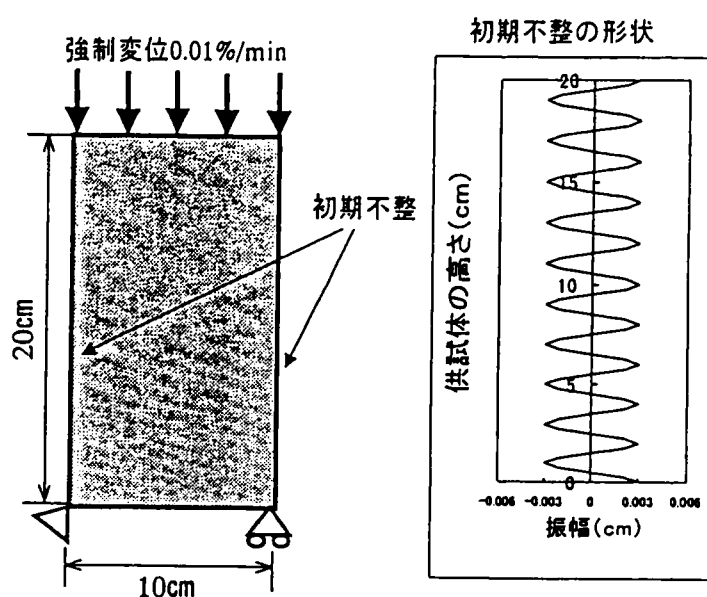


図3. 12 初期不整を持つ粘土供試体モデルと境界条件

本節でシミュレートする粘土モデルの有限要素メッシュと境界条件を図3. 12に示す。供試体の境界は非排水状態であるが、内部では間隙水は移動できる。有限要素メッシュは、これまでの研究で要素数が多い方が勾配項の影響が大きいことがわかっている（福島(2000)）。そこで20×40の800要素を用いた。供試体両側面に与えた初期不整は、形状は余弦波であり、その振幅は0.003cmとした（福島(2000)）。供試体両側面に同位相の初期不整を与えることによって、局所的変形のトリガーとすることを目的とした。また、平面ひずみ条件下で供試体上部端面に0.01(%/min)の速度で強制変位を与える。強制変位速度は、供試体高さで変位量を除したもの（見かけの軸ひずみ）を用いた。以上の条件において、粘塑性体積ひずみの2階勾配項にかかる係数を種々に変化させ、供試体上部端面から強制変位を加え変形させ、供試体の挙動について考察する。

解析に用いた粘土の材料定数を表3. 4に示す。

表3. 4 解析に用いた粘土の材料定数

圧縮指数	$\lambda$	0.372
膨潤指数	$\kappa$	0.054
初期平均有効応力	$\sigma'_{m0}$	588(kPa)
間隙比	$e$	1.28
粘塑性パラメータ	$m'$	21.5
粘塑性パラメータ	$C$	$4.5 \times 10^{-8}(1/sec)$
破壊時の応力	$M^*$	1.05
せん断弾性係数	$G$	12946(kPa)
透水係数	$k$	$1.16 \times 10^{-8}(cm/sec)$
軟化パラメータ	$G_2^*$	100

解析には3種類の勾配項に関する係数 $\beta$ を用いた。勾配項を考慮しない場合をケース1、 $\beta = 1.0$ の場合をケース2、 $\beta = 2.0$ の場合をケース3とした(表3.5)。

表3.5 初期不整を持つ供試体の解析ケース

$\beta$	0.0	1.0	2.0
解析ケース	ケース1	ケース2	ケース3

図3.13に各ケースによる計算結果の見かけの軸差応力-見かけの軸ひずみ関係を示す。ここで、見かけの軸差応力とは、供試体上部端面の節点反力を供試体上部端面の面積で除したものである。また、見かけの軸ひずみとは供試体全体の変形量を供試体高さで除したものである。

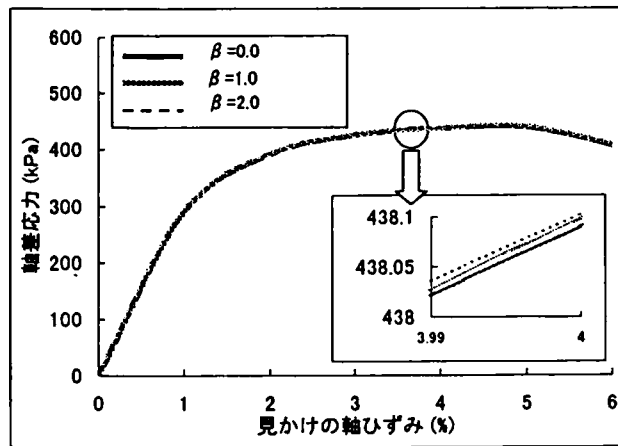


図3.13 見かけの軸差応力-見かけの軸ひずみ関係

見かけの軸差応力-見かけの軸ひずみ関係を見ると、6%まではほぼ同じ関係を持っている。しかしながら、拡大図を見ると、 $\beta$ が大きいケースの方が、微小ではあるが見かけの軸差応力が大きくなっている。この傾向は、弾性域が終わる1%以降から、軟化の始まる5%までほぼ同じである。また、この傾向は先に述べた、柱状粘土地盤のせん断解析の結果と同じである。

次に、 $\beta$ の大きさによって、変形後のメッシュ(供試体の形状)がどのように変化するかを示す(図3.14)。見かけの軸ひずみ6%までの各ケースの変形状態はほぼ同じであるが、見かけの軸ひずみが8%のとき、勾配項を考慮しないケース1ではせん断帯が確認できるが、ケース3では確認できず、供試体全体が変形しているように見える。このことは、柱状粘土地盤のせん断解析の結果と同じように、ケース3では粘塑性体積ひずみの発生が抑えられ、供試体全体の変形を抑制させていると考えられる。見かけの軸差応力-見かけの軸ひずみ関係では、ほとんど差異のない結果に見えるが、供試体の変形状態は大きく異なっている。

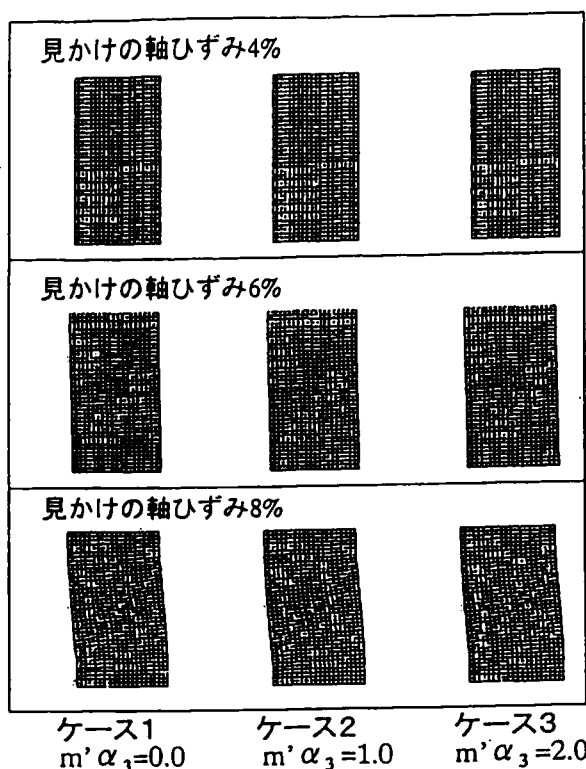


図3. 14 各ケースの変形後の有限要素メッシュ

(左からケース1、ケース2、ケース3、上から見かけの軸ひずみ4%、6%、8%)

勾配項に関する係数 $\beta$  (勾配項) の導入が、変形を抑制していることを確認するために、変形した供試体形状を用いて、せん断ひずみ測度の分布を示す (図3. 15)。ここで、せん断ひずみとは、各節点でのせん断ひずみの不変量 ( $\sqrt{\gamma_{xy}\gamma_{yx}}$ ) である。変形メッシュ図から、見かけの軸ひずみ4%および6%時のせん断ひずみ測度の分布状態は各ケースともほぼ同じであったため、見かけの軸ひずみ8%時の分布のみ示した。供試体内の分布量の数居値を0.13とし、数居値以上の値の部分に黒く塗りつぶした。

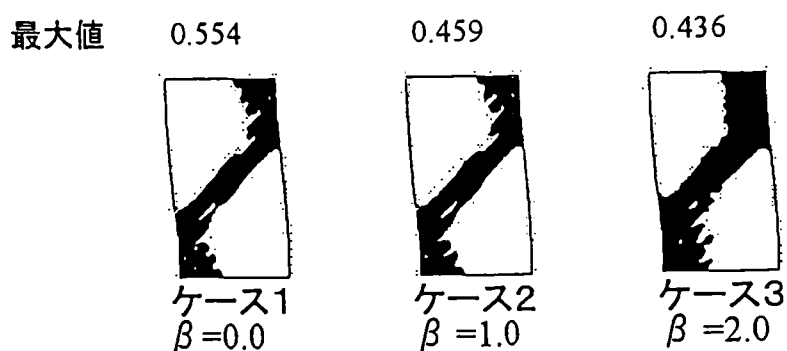


図3. 15 各ケースの変形後のせん断ひずみの分布

(見かけの軸ひずみ8%、数居値0.13)

図から、見かけの軸ひずみ8%のとき、明らかにケース1よりケース3の方がせん断帯の幅が大きくなっている。各分布図の上に示したせん断ひずみ測度の最大値から、ケース3の方がケース1より、せん断ひずみの値が抑えられていることがわかる。そのためケース3では、供試体全体が変形するようになったのではないかと考えられる。

次に、変形した供試体形状を用いて、間隙水圧の分布を示す(図3.16)。先述した図3.15と同じように、変形メッシュ図から、見かけの軸ひずみ4%および6%時のせん断ひずみ測度の分布状態は各ケースともほぼ同じであったため、見かけの軸ひずみ8%時の分布のみ示した。供試体内の間隙水圧の分布値の敷居値を500(kPa)とし、敷居値以上の値の部分を黒く塗りつぶした。また、各ケースでの間隙水圧の最大値を図の上に示した。ケース3では間隙水圧の低い部分が若干多くなっている。また、間隙水圧の最大値はケース3が最も小さくなっている。供試体全体の変形が一様であるため、間隙水が全体に分布したすれば、このことによって変形メッシュ図に見られるせん断帯の違いとなると考えられる。

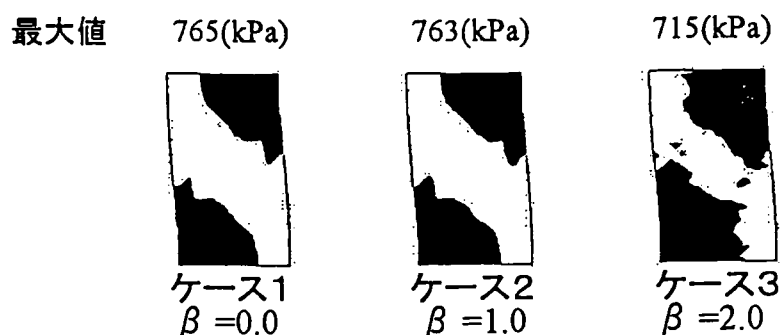


図3.16 各ケースの変形後の間隙水圧の分布  
(見かけの軸ひずみ8%、敷居値500(kPa))

### 3.8 初期不整を持つ粘土供試体の変形解析のまとめ

粘塑性体積ひずみの2階空間勾配項の有限要素解析結果に及ぼす影響について、把握するために、両側面に初期不整を持つ粘土のモデルを用いて数値解析を行った。粘土供試体の両側面に初期不整を与えることにより、変形状態を統一化させ、その状態で局所的変形のトリガーとすることを目的とした。

解析結果から、粘塑性体積ひずみの2階空間勾配項にかかる係数 $\beta$ を正の値とすると、(限られた $\beta$ の値であるが)変形が抑制される。このことは、せん断ひずみと間隙水圧の局所化が抑制されたことであり、結果としてせん断帯の幅を変化させた。

### 3.9 勾配依存型弾粘塑性モデルを用いた粘土の変形解析のまとめ

勾配依存型弾粘塑性構成式を導入した有限要素プログラムを用いて数値解析を行った。粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項が、数値解析結果にどのような影響を及ぼすか検討するため、層状地盤を仮定した一次元的せん断変形を起こす境界値問題を考え、粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項が、数値解析結果にどのような影響を及ぼすか検討した。同じひずみ軟化の状態で、変形速度一定で勾配項に関する係数を変化させた場合、勾配項全体の値が小さくなると、粘塑性体積ひずみの発生が押さえられて、軟化の傾向が小さくなった。勾配項を正の値で固定して、ひずみ軟化に関する係数も一定にし、変形速度のみを変化させた場合、変形速度が速い場合はせん断応力は大きくなり、粘塑性体積ひずみも間隙水圧も全体的に小さくなった。勾配項を正の値で一定に保ち、変形速度も一定に保ったとき、ひずみ軟化に関する係数を変化させて解析を行った。ひずみ軟化に関する係数を変化させると、変形の集中した部分では、軟化の度合いが大きい場合の方が、粘塑性体積ひずみ発生が大きくなった。

境界条件によりせん断帯を発生させるような、粘性土の二次元的変形数値解析を行った。粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項が粘性土の変形、特にせん断帯付近の挙動にどのような影響を及ぼすか検討した。軸ひずみ-軸差応力関係から、軸ひずみがある程度大きくなると、メッシュサイズの違いにより挙動に大きな違いが現れた。勾配項の導入は、軸差応力を大きくさせ、また同じ大きさの解析対象に対して細かくメッシュを細分化させた方がより軸差応力を大きくさせた。また、軸ひずみ10%時のせん断ひずみ測度の分布図と変形メッシュ図から、メッシュ数が少ない場合は勾配項の影響は現れないが、メッシュ数が多い場合、勾配項の影響が解析結果に大きく現れた。勾配項の導入はメッシュサイズ依存性を緩和させる働きを持つことが分かった。

変形状態を統一化させ、その状態で局所的変形のトリガーとさせることを目的とした初期不整を粘土供試体の両側面に与え、数値解析を行なった。粘塑性体積ひずみの2階空間勾配項にかかる係数 $\beta$ を正の値とすると、(限られた $\beta$ の値であるが、)変形が抑制された。このことは、せん断ひずみと間隙水圧の局所化が抑制されたことであり、結果としてせん断帯の幅を変化させた。

以上3種類の初期値境界値問題から、粘塑性体積ひずみの二階空間勾配を導入することで、各有限要素の変形が抑えられることによって、変形が集中する部分が少なくなり、結果として、供試体全体の変形を抑制させることがわかった。



## 参考文献

Aifantis, E.C. (1987), The physics of deformation, *Int. J. Plasticity*, 3, pp.211-247.

福島耕司 (2000)、勾配項を有する粘土の弾粘塑性モデルと土-水連成有限要素解析、岐阜大学修士論文

L'Hermite, R. and Grieu, J.J. (1952), "Etude experimentales recentes sur le retrait des ciments et des betous", *Annales I.T.T.P.*, Paris, 5, pp.494-514.

Oka, F., Yashima, A., Adachi, T. and Aifantis, E.C. (1992), Instability of gradient dependent viscoplastic model for clay saturated with water and FEM analysis, *ASME, Appl. Mech. Rev.* 45(3), Part2, pp.140-148.

Oka, F., Yashima, A., Sawada, K. and Adachi, T. (1997), Effects of viscoplastic strain gradient on strain localization analysis, *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, eds. A. Asaoka et al., Nagoya, Pergamon Press, pp.27-32.

Oka, F., Yashima, A. and Sawada, K. (1997), Static and dynamic characteristics of strain gradient dependent elastic and elasto-viscoplastic models, *Proc. 4th Int. Workshop on Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, Gifu, pp.71-79.

Vardoulakis, I. and Sulem, J. (1991), Size effect and microstructure in granular rocks, *Proc., 3rd Int. Conf. Const. Laws Engng. Mater.*, Tucson, pp.475-478.

## 第4章 勾配依存型弾粘塑性構成式を用いた地盤材料中の一次元波動伝播解析

### 4.1 概説

粘土や砂などの地盤材料は、材料の特性長さを持っている。したがって、斜面や基礎地盤の破壊の際に見られるせん断帯の幅はゼロではない。また、数値解析においても、材料の特性長さを考慮していない有限要素解析では、メッシュ分割の大きさにより得られた解に差異が生じることが知られている。このような問題を解決する方法として、偶応力を考慮したコセラ連続体理論や、構成則に塑性ひずみの勾配項を導入する塑性ひずみ勾配型理論があげられる。本章では、粘塑性ひずみ勾配型理論に着目し、弾粘塑性構成式に粘塑性ひずみの二階空間勾配項を導入したモデルの動的特性を明らかにするため、一次元モデルを用いて、地盤材料中を伝播する波動の数値解析を行った。

### 4.2 一次元波動支配方程式

本節では、ソリトン型の波の応力伝播特性を考えるにあたって、必要な一次元支配方程式(Oka and Mühlhaus(1994))を考え、差分法を用いて定式化する。一次元波動の支配方程式を以下のように示す。

運動方程式

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (4.1)$$

構成式

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = E^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial t} \quad (4.2)$$

粘塑性ひずみ速度の発展則

$$\frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial t} = \mu (\varepsilon - a \varepsilon^{vp} + b \varepsilon^{vp^2} + c \frac{\partial^2 \varepsilon^{vp}}{\partial x^2}) \quad (4.3)$$

ここで、上式中では以下のようにした。

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ : 全ひずみ速度	$\frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial t}$ : 粘塑性ひずみ速度
$\sigma$ : 応力	$u$ : 変位
$v$ : 速度	$\rho$ : 質量密度
$E$ : 弾性係数	$\mu$ : 粘性に関する係数
$\frac{\partial^2 \varepsilon^{vp}}{\partial x^2}$ : 粘塑性ひずみの二階微分 (二階勾配)	$a$ : ひずみ硬化に関する材料定数
$b$ : ひずみ軟化に関する材料定数	$c$ : 粘塑性ひずみ勾配に関する材料定数
$\varepsilon^{vp}$ : 粘塑性ひずみ	

### 4.3 差分法

4.2節で示された構成式、粘塑性ひずみの発展則、波動方程式を差分法を用いて数値的に解き、応力波の伝播特性を調べる。

差分法で定式化するために次のように定義する。

- ・長さ  $l$  の地盤材料において区間  $0 < x < l$  内に  $n - 1$  個の分点  $x_i$  を  
 $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = l$  となるようにとる。
- ・ここで、 $\Delta x = \frac{l}{n}$   $x_i = x_{i-1} + \Delta x$  とおく。  
 さらに、時間増分  $\Delta t$  を用いて時刻  $t_j$  を  $t_j = t_{j-1} + \Delta t$  ( $j = 1, \dots, m$ ),  $t_0 = 0$  と定める。  
 そして格子点  $(x_i, t_j)$  でのひずみの関数値を  $\varepsilon_{i,j}$  と表す。
- ・ $\sigma_{i,j}$ ,  $u_{i,j}$ ,  $\varepsilon^{vp}_{i,j}$  についても同じように定義する。
- ・また、時間微分、空間微分の差分法は次のように定義する。

(時間微分)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j}}{\Delta t} \quad (4.4)$$

(空間微分)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (4.5)$$

ここで  $\varepsilon_{i,j}$  は、 $i$  節点の  $j$  時間における全ひずみを表す。次に、二階の差分は次のように定義する。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{i,j}^{vp}}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left\{ \theta (\varepsilon_{i+1,j+1}^{vp} - 2\varepsilon_{i,j+1}^{vp} + \varepsilon_{i-1,j+1}^{vp}) + (1 - \theta) (\varepsilon_{i+1,j}^{vp} - 2\varepsilon_{i,j}^{vp} + \varepsilon_{i-1,j}^{vp}) \right\} \quad (4.6)$$

ここで  $\theta$  は差分パラメータ ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) である。

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta t^2} \quad (4.7)$$

これらの式を用いて、差分での定式化を行う。

#### 4.4 方程式の差分化

ここでは4.3節の定義に基づき、構成式、粘塑性ひずみの発展則及び波動方程式の差分を行う。

(差分法による定式化)

構成則(4.2)式より、

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial t} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \quad (4.8)$$

これを差分法を用いて表すと、

$$\frac{\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{E} \frac{\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j}}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{vp} - \varepsilon_{i,j}^{vp}}{\Delta t}, \quad \varepsilon_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (4.9)$$

$$\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})}{2\Delta x} = \frac{1}{E} (\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j}) + \varepsilon_{i+1,j}^{vp} - \varepsilon_{i,j}^{vp} \quad (4.10)$$

$$\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2\Delta x} - \frac{1}{E} \sigma_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j+1}^{vp} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{1}{E} \sigma_{i,j} - \varepsilon_{i,j}^{vp} \quad (4.11)$$

(端点での差分の処理)

$i = 1$  のとき

$$\varepsilon_{1,j+1} = \frac{u_{2,j+1} - u_{1,j+1}}{\Delta x}, \quad \varepsilon_{1,j} = \frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{\Delta x} \quad (4.12)$$

$$\frac{u_{2,j+1} - u_{1,j+1}}{\Delta x} - \frac{1}{E}\sigma_{1,j+1} - \varepsilon_{1,j+1}^{vp} = \frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{\Delta x} - \frac{1}{E}\sigma_{1,j} - \varepsilon_{1,j}^{vp} \quad (4.13)$$

$i = n$  のとき

$$\varepsilon_{n,j+1} = \frac{u_{n,j+1} - u_{n-1,j+1}}{\Delta x}, \quad \varepsilon_{n,j} = \frac{u_{n,j} - u_{n-1,j}}{\Delta x} \quad (4.14)$$

$$\frac{u_{n,j+1} - u_{n-1,j+1}}{\Delta x} - \frac{1}{E}\sigma_{n,j+1} - \varepsilon_{n,j+1}^{vp} = \frac{u_{n,j} - u_{n-1,j}}{\Delta x} - \frac{1}{E}\sigma_{n,j} - \varepsilon_{n,j}^{vp} \quad (4.15)$$

粘塑性ひずみの発展則(4.4)式より、

$$\frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial t} = \mu(\sigma - a\varepsilon^{vp} + b\varepsilon^{vp^2} + c\frac{\partial^2 \varepsilon^{vp}}{\partial x^2}) \quad (4.16)$$

ここで差分法を用いて表すと、

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{vp} - \varepsilon_{i,j}^{vp}}{\Delta t} &= \mu(\sigma_{i,j} - a\varepsilon_{i,j}^{vp} + b\varepsilon_{i,j}^{vp^2}) + \frac{c\mu}{\Delta x^2}\theta(\varepsilon_{i+1,j+1}^{vp} - 2\varepsilon_{i,j+1}^{vp} + \varepsilon_{i-1,j+1}^{vp}) \\ &\quad + \frac{c\mu}{\Delta x^2}(1-\theta)(\varepsilon_{i+1,j}^{vp} - 2\varepsilon_{i,j}^{vp} + \varepsilon_{i-1,j}^{vp}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{c\mu\theta\Delta t}{\Delta x^2}\varepsilon_{i-1,j+1}^{vp} + (1 + \frac{2c\mu\theta\Delta t}{\Delta x^2})\varepsilon_{i,j+1}^{vp} + (-\frac{c\mu\theta\Delta t}{\Delta x^2})\varepsilon_{i+1,j+1}^{vp} \\ &= \varepsilon_{i,j}^{vp} + \mu\Delta t(\sigma_{i,j} - a\varepsilon_{i,j}^{vp} + b\varepsilon_{i,j}^{vp^2}) + \frac{c\mu\Delta t}{\Delta x^2}(1-\theta)(\varepsilon_{i+1,j}^{vp} - 2\varepsilon_{i,j}^{vp} + \varepsilon_{i-1,j}^{vp}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

ここで、

$$P \equiv -\frac{c\mu\theta\Delta t}{\Delta x^2} \quad (4.19)$$

のようにPを定義すると(4.18)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} &P\varepsilon_{i-1,j+1}^{vp} + (1-2P)\varepsilon_{i,j+1}^{vp} + P\varepsilon_{i+1,j+1}^{vp} \\ &= \varepsilon_{i,j}^{vp} + \mu\Delta t(\sigma_{i,j} - a\varepsilon_{i,j}^{vp} + b\varepsilon_{i,j}^{vp^2}) - P(1-\theta)(\varepsilon_{i+1,j}^{vp} - 2\varepsilon_{i,j}^{vp} + \varepsilon_{i-1,j}^{vp}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

(端点での差分の処理)

端点では、二階微分が0になるように、次のように扱った。

$i = 1$  のとき

$$\varepsilon_{i-1,j+1}^{vp} = \varepsilon_{i,j+1}^{vp}, \quad \varepsilon_{i-1,j}^{vp} = \varepsilon_{i,j}^{vp} \quad (4.21)$$

これを(4.20)式に代入すると

$$(1 - P)\varepsilon_{i,j+1}^{vp} + P\varepsilon_{i+1,j+1}^{vp} = \varepsilon_{i,j}^{vp} + \mu\Delta t(\sigma_{i,j} - a\varepsilon_{i,j}^{vp} + b\varepsilon_{i,j}^{vp^2}) - P(1 - \theta)(\varepsilon_{i+1,j}^{vp} - \varepsilon_{i,j}^{vp}) \quad (4.22)$$

よって

$$(1 - P)\varepsilon_{1,j+1}^{vp} + P\varepsilon_{2,j+1}^{vp} = \varepsilon_{1,j}^{vp} + \mu\Delta t(\sigma_{1,j} - a\varepsilon_{1,j}^{vp} + b\varepsilon_{1,j}^{vp^2}) - P(1 - \theta)(\varepsilon_{2,j}^{vp} - \varepsilon_{1,j}^{vp}) \quad (4.23)$$

$i = n$  のとき

$$\varepsilon_{n+1,j+1}^{vp} = \varepsilon_{n,j+1}^{vp}, \quad \varepsilon_{n+1,j}^{vp} = \varepsilon_{n,j}^{vp} \quad (4.24)$$

これを(4.20)式に代入すると

$$(1 - P)\varepsilon_{i-1,j+1}^{vp} + P\varepsilon_{i,j+1}^{vp} = \varepsilon_{i,j}^{vp} + \mu\Delta t(\sigma_{i,j} - a\varepsilon_{i,j}^{vp} + b\varepsilon_{i,j}^{vp^2}) - P(1 - \theta)(\varepsilon_{i-1,j}^{vp} - \varepsilon_{i,j}^{vp}) \quad (4.25)$$

よって

$$(1 - P)\varepsilon_{n-1,j+1}^{vp} + P\varepsilon_{n,j+1}^{vp} = \varepsilon_{n,j}^{vp} + \mu\Delta t(\sigma_{n,j} - a\varepsilon_{n,j}^{vp} + b\varepsilon_{n,j}^{vp^2}) - P(1 - \theta)(\varepsilon_{n-1,j}^{vp} - \varepsilon_{n,j}^{vp}) \quad (4.26)$$

### 運動方程式

(4.1)式より、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (4.27)$$

これを差分法を用いて表すと、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j}}{2\Delta x} = \frac{1}{\Delta t^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{\rho} \Delta t^2 (\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j}) = 2\Delta x (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) \quad (4.29)$$

$$2\Delta x u_{i,j+1} = \frac{1}{\rho} \Delta t^2 (\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j}) + 2\Delta x (2u_{i,j} - u_{i,j-1}) \quad (4.30)$$

(端点での差分の処理)

$i = 1$  のとき

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{(\sigma_{2,j} - \sigma_{1,j})}{\Delta x} \quad (4.31)$$



$$\begin{bmatrix} A \\ (3n \times 3n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,j+1} \\ u_{1,j+1} \\ \varepsilon_{1,j+1}^{vp} \\ \vdots \\ \sigma_{i,j+1} \\ u_{i,j+1} \\ \varepsilon_{i,j+1}^{vp} \\ \vdots \\ \sigma_{n,j+1} \\ u_{n,j+1} \\ \varepsilon_{n,j+1}^{vp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(1) \\ D(2) \\ D(3) \\ \vdots \\ D(3i-2) \\ D(3i-1) \\ D(3i) \\ \vdots \\ D(3n-2) \\ D(3n-1) \\ D(3n) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$D(1)$ ,  $D(2)$ ,  $D(3)$ はそれぞれ(4.14)式, (4.32)式, (4.22)式による $i = 1$ の場合の端点での処理の右辺にあたり、 $D(3n-2)$ ,  $D(3n-1)$ ,  $D(3n)$ はそれぞれ(4.15)式, (4.34)式, (4.25)式による $i = n$ の場合の端点での処理にの右辺にあたる。また固定端では $u = 0$ なので $D(3n-1) = 0$ とし、応力を自由端から加えるので $D(1) = f(t)$ とした。これらのマトリクスとベクトルをプログラムに組み込み解析を行う。

#### 4.5 ソリトン（孤立波）解

ここでは、解析に用いる応力波について考える。入力する応力波に関して、岡ら(1994)は、非線形ひずみ勾配依存構成式の波動特性としてソリトン解の存在を報告している。次にその内容について示す。

簡素化するためにここでは次の構成式のみを取り扱う。

構成式

$$\sigma = (a\varepsilon - b\varepsilon_{xx} - 3b\varepsilon^2) \quad (4.36)$$

波動方程式

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (4.37)$$

以上より

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial(a\varepsilon - 3b\varepsilon^2 - b\varepsilon_{xx})}{\partial x} \quad (4.38)$$

$X = x - c_0 t$  を用いて左辺を書き換える。ここで  $c_0$  :速度

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \rho c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial x} \quad (4.39)$$

ここで  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$  を用いると

$$\rho c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial x} = \rho c_0^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \quad (4.40)$$

(4.37) 式及び(4.39) 式より

$$\rho c_0^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} = \frac{\partial(a\varepsilon - 3b\varepsilon^2 - b\varepsilon_{xx})}{\partial X} \quad (4.41)$$

$X$ で積分する。

$$\rho c_0^2 \varepsilon = a\varepsilon - 3b\varepsilon^2 - b\varepsilon_{xx} + E \quad (4.42)$$

ここで  $E = \text{定数}$

$E = 0$  とおくと

$$a'\varepsilon - 3b\varepsilon^2 - b\varepsilon_{xx} = 0 \quad (a' = a - \rho c_0^2) \quad (4.43)$$

広田の方法(Hirota(1976))を用いて、勾配依存型構成式におけるソリトン解を求める。ここで

$$\varepsilon = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log_e f \quad (4.44)$$

として (4.42) 式を変形すると

$$(AD_x^2 - bD_x^4)(f \cdot f) = 0 \quad (4.45)$$

広田の方法を用いると

$$f = 1 + Ce^{k_1 X} \quad (4.46)$$

と求められる。(  $k_1$  は定数) (4.43) 式, (4.45) 式より

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{2Ck_1^2 e^{k_1 X}}{(1 + Ce^{k_1 X})^2} = \frac{2Ck_1^2}{C^2 e^{k_1 X} + 2C + e^{-k_1 X}} \\ &= \frac{1}{2} k_1^2 e^{\eta_0} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} k_1 X + \eta_0 \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

ここで  $C = e^{\eta_0}$  : 定数である。

$X = 0$  とおくと

$$\varepsilon = \frac{2Ck_1^2}{(1 + C)^2} \quad (4.48)$$

このとき、 $X \rightarrow \infty$  で  $\varepsilon = 0$  となり、このことは得られた解がソリトン解であることを示している。

## 4.6 均質材料中の一次元波動伝播解析

ここでは均質地盤中の波動伝播解析を一次元モデルを用いて行う。

### 解析方法及び解析材料

図4.1に示すように片側自由、片側固定の均質な弾粘塑性体を考え、応力を自由端から与える。これを



一次元モデルで解析を行う。

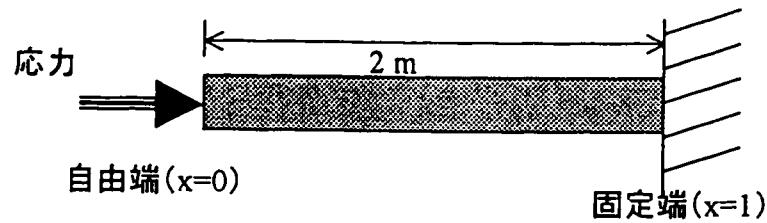


図 4.1 解析方法

境界条件を次のように示す。

$$\epsilon(x, 0) = 0 \quad U(x, 0) = 0 \quad U(l, t) = 0 \quad \sigma(0, t) = f(t) \quad (t > 0)$$

#### 入力波形

入力する波形は、 $\epsilon^{vp} = 0$ において既に局所解として求められているソリトン解（岡ら(1994)）より以下の式とする。

$$\sigma(0, t) = f(t) = 100 / \cosh^2(0.05(t - t_0) - 10)$$

$$t = \frac{T(\text{sec})}{\Delta t} \quad t_0 = \frac{T_0(\text{sec})}{\Delta t} \quad (t_0 = 1)$$

$$\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}(\text{sec})$$

また入力する波形は、図4.2に示す。

また、節点間隔 $\Delta x$ 、時間間隔 $\Delta t$ は、Courant-Friedrichs-Levy(1995)による双曲型偏微分方程式の安定性の条件 $C \times dt < dx$ より次の通りとする。

$$\Delta x = 1.0 \times 10^{-2}(\text{m})$$

$$\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}(\text{sec})$$

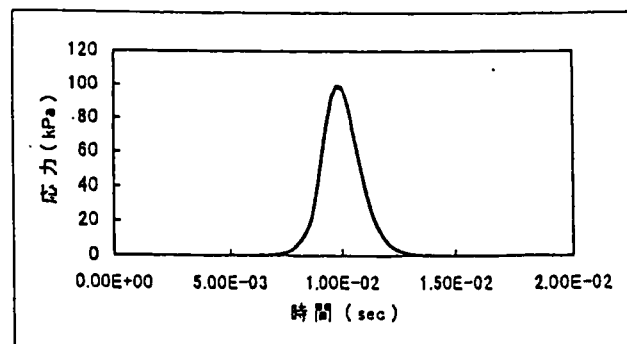


図 4.2 入力波形

## 定数

解析に使われる材料定数をここに示す。

$$\rho = 1.8(\text{g/cm}^3) = 1.8 \times 10^3(\text{kg/m}^3)$$

$$1(\text{kg/m}^3) = 1(\text{N sec}^2/\text{m}^4) = 10^{-3}(\text{kN sec}^2/\text{m}^4) = 10^{-3}(\text{kPa sec}^2/\text{m}^2) = 1.8(\text{kPa sec}^2/\text{m}^2)$$

$$C_0(\text{波速}) = 100(\text{m/sec})$$

$$\text{ここで } C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ より、}$$

$$E = \rho C_0^2 = 1.8 \times (100)^2(\text{kPa}) = 1.8 \times 10^4(\text{kPa})$$

$$\theta = 0.5$$

## 4.7 均質材料の解析結果

ここでは、一次元波動伝播解析において求められた応力伝播、ひずみ、変位、粘塑性ひずみについて、それぞれの解析結果を紹介する。それぞれのケースにおいて用いられたパラメータを表4.1に示す。

表 4.1 解析パラメータ

	$a(\text{kPa})$	$b(\text{kPa})$	$c(\text{kPa m}^2)$	$\mu(1/\text{sec kPa})$
Case0	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^7$	$1.0 \times 10^4$	0.0
Case1	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^7$	0.0	0.01
Case2	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^7$	$1.0 \times 10^4$	0.01
Case3	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^3$	0.0	0.01
Case4	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^3$	$1.0 \times 10^4$	0.01
Case5	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^7$	0.0	0.005
Case6	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^7$	$1.0 \times 10^4$	0.005

### それぞれのケースの特徴

以下に、それぞれの解析ケースの特徴及び図番号について記述する。

Case0 : 図 4.3 : 弾性状態 ( $\mu = 0$ )

Case1 : 図 4.4 : 勾配項にかかる係数  $c=0$ 、 $\mu = 0.01(1/\text{sec kPa})$

Case2 : 図 4.5 : 勾配項にかかる係数  $c=1.0 \times 10^4$ 、Case1 + c

Case3 : 図 4.6 : ひずみ軟化項にかかる係数  $b=1.5 \times 10^3$ 、勾配項にかかる係数  $c=0$

Case4 : 図 4.7 : ひずみ軟化項にかかる係数  $b=1.5 \times 10^3$ 、勾配項にかかる係数  $c=1.0 \times 10^4$ 、Case3 + c

Case5 : 図 4.8 : 粘性に関する係数  $\mu=0.005$ 、勾配項にかかる係数  $c=0$

Case6 : 図 4.9 : 粘性に関する係数  $\mu=0.005$ 、勾配項にかかる係数  $c=1.0 \times 10^4$ 、Case5 + c

また、各図において、記号 a,b,c,d は以下の通りである。

応力伝播図 : a	ひずみ図 : b	変位図 : c	粘塑性ひずみ図 : d
-----------	----------	---------	-------------

図 4.3

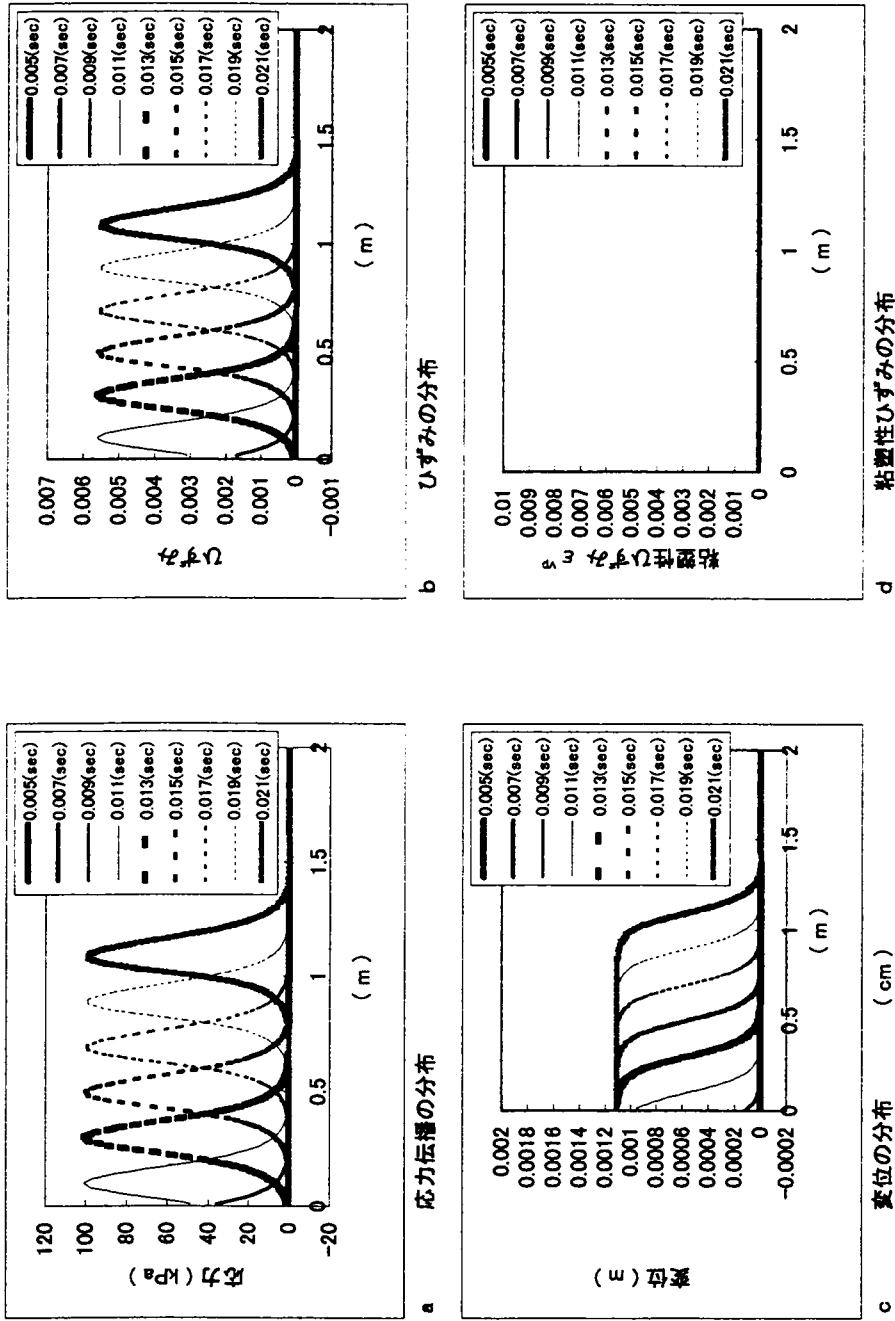


図 4.3 : Case0  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^7 (kPa)$ ,  $c = 1.0 \times 10^4 (kPa \cdot m)$ ,  $\mu = 0.0 (1/sec \cdot Pa)$

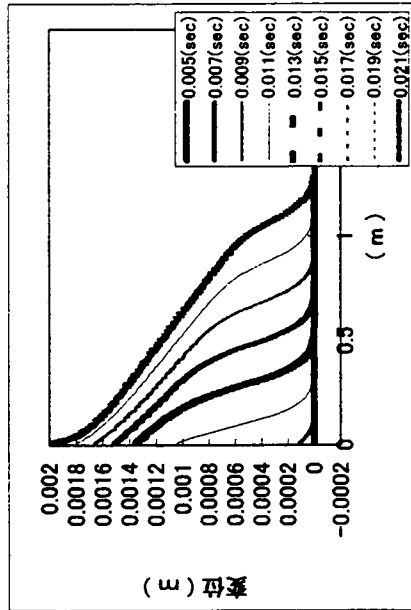
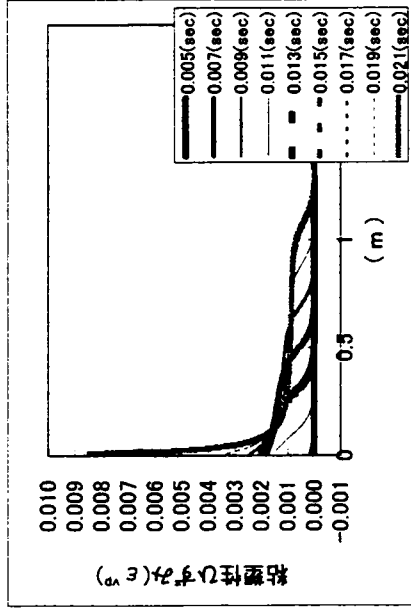
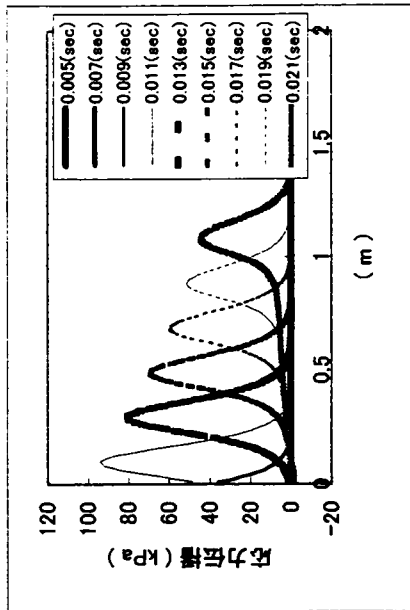
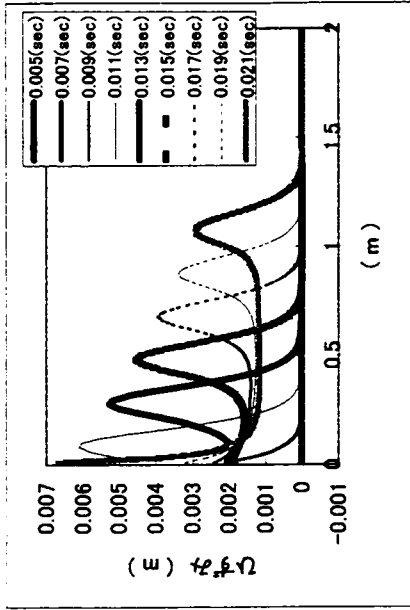


図 4.4 : Case1  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^7 (kPa)$ ,  $c = 0.0 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.01 (1/sec \cdot kPa)$

図4.5

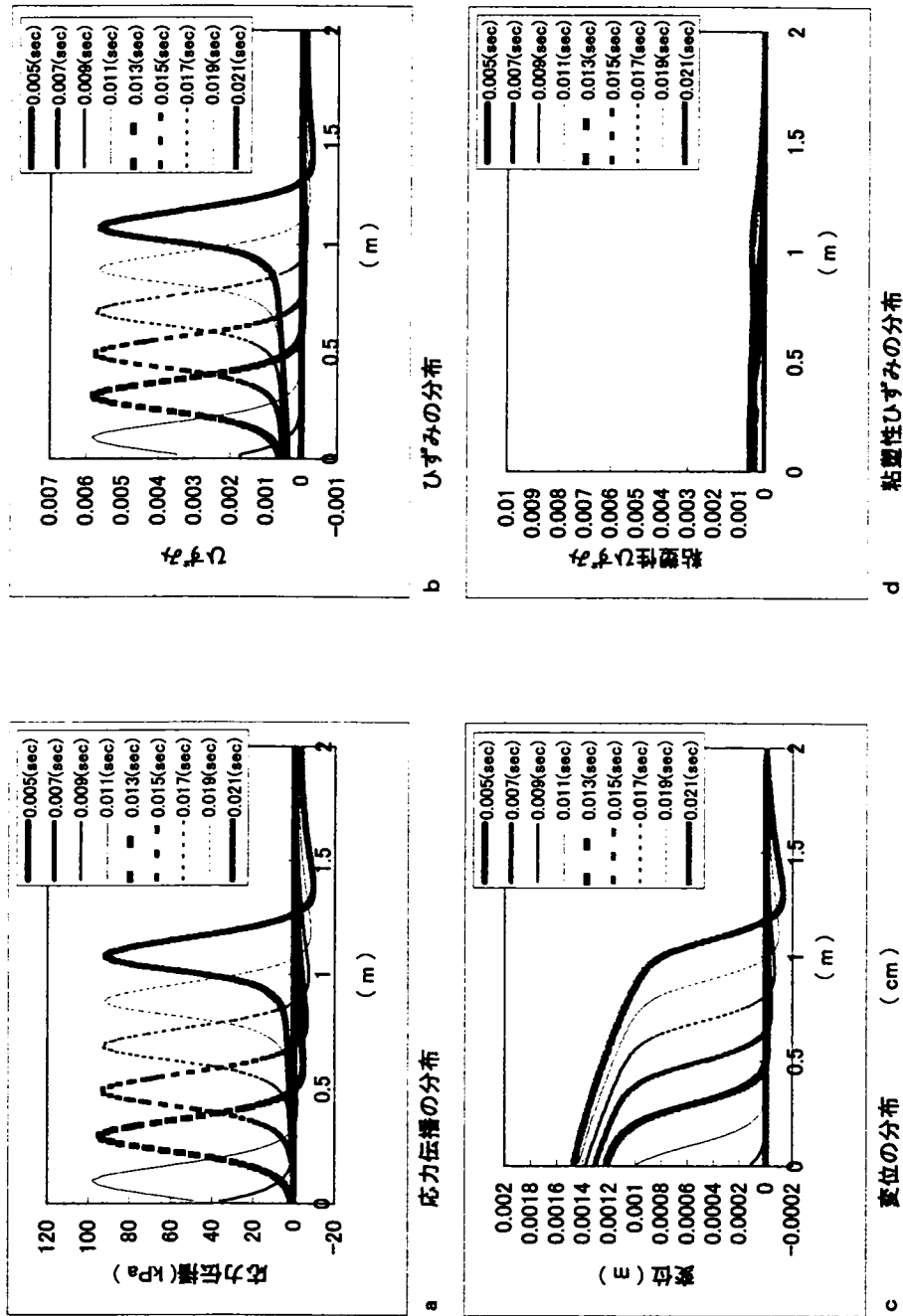


図4.5 : Case2  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^7 (kPa)$ ,  $c = 1.0 \times 10^4 (kPam^2)$ ,  $\mu = 0.01 (1/sec \cdot Pa)$

図4.6

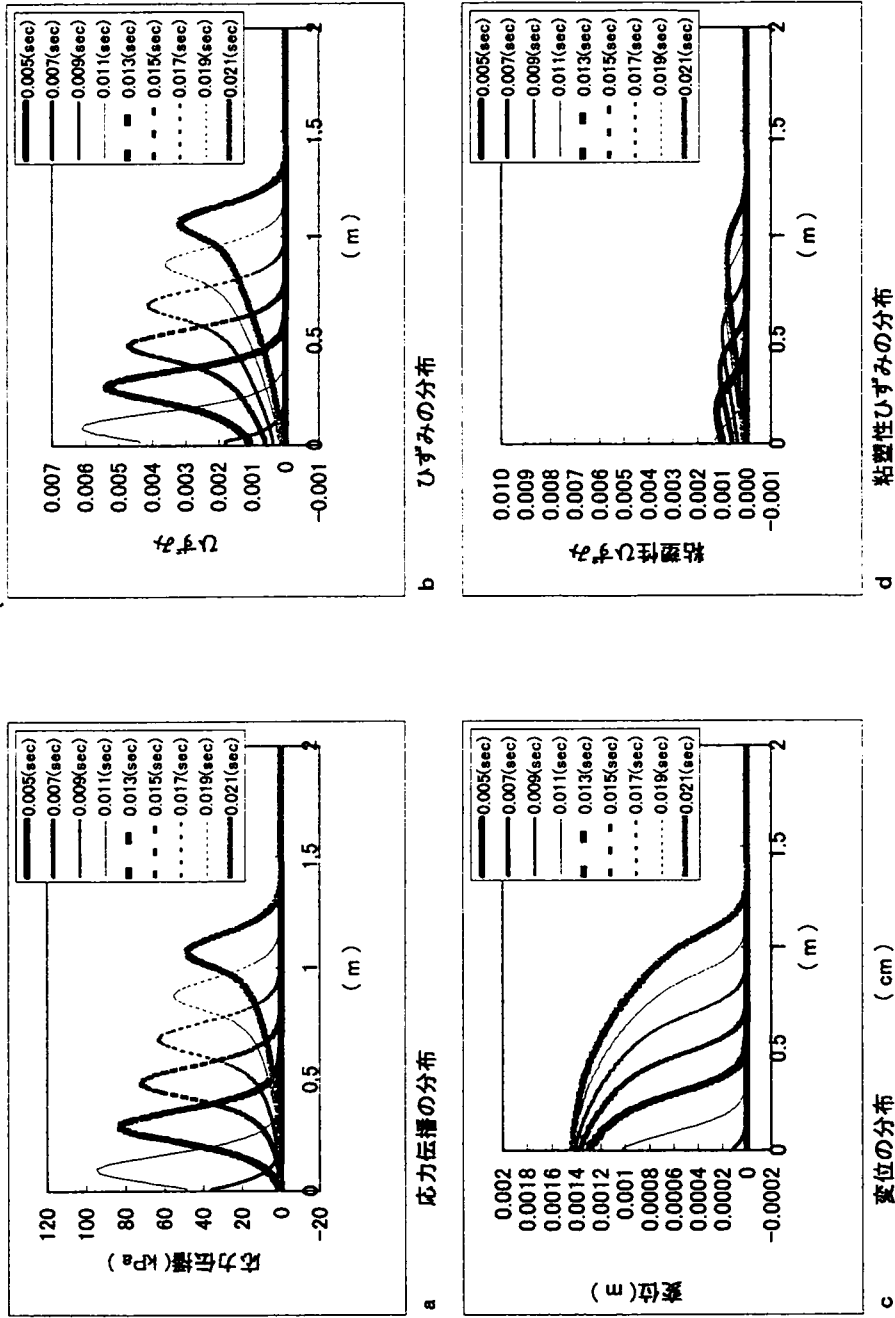


図4.6 : Case3  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^3 (kPa)$ ,  $c = 0.0 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.01 (1/sec \cdot kPa)$

図4.7

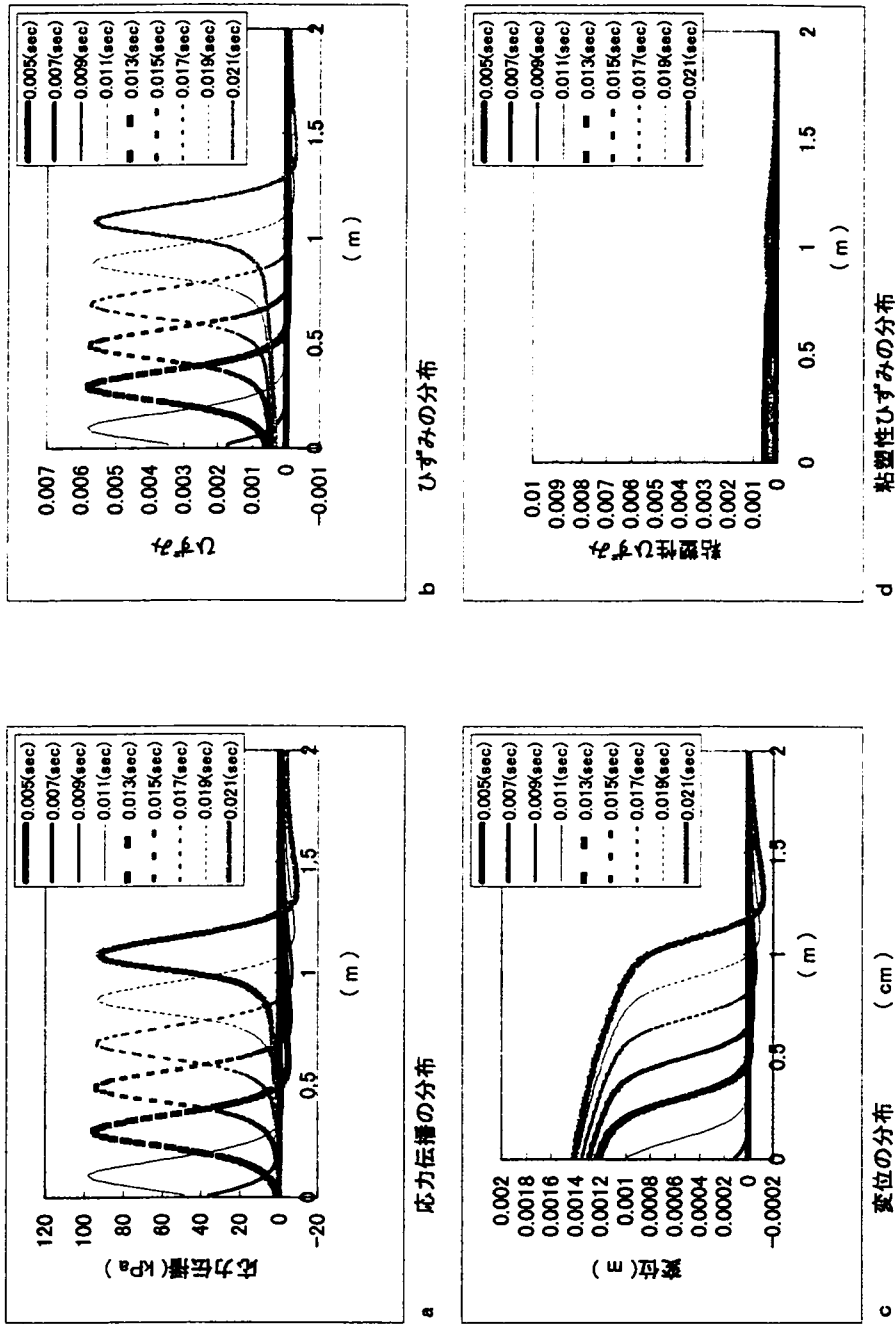


図4.7 : Case4  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^3 (kPa)$ ,  $c = 1.0 \times 10^4 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.01 (1/sec \cdot Pa)$

図 4.8

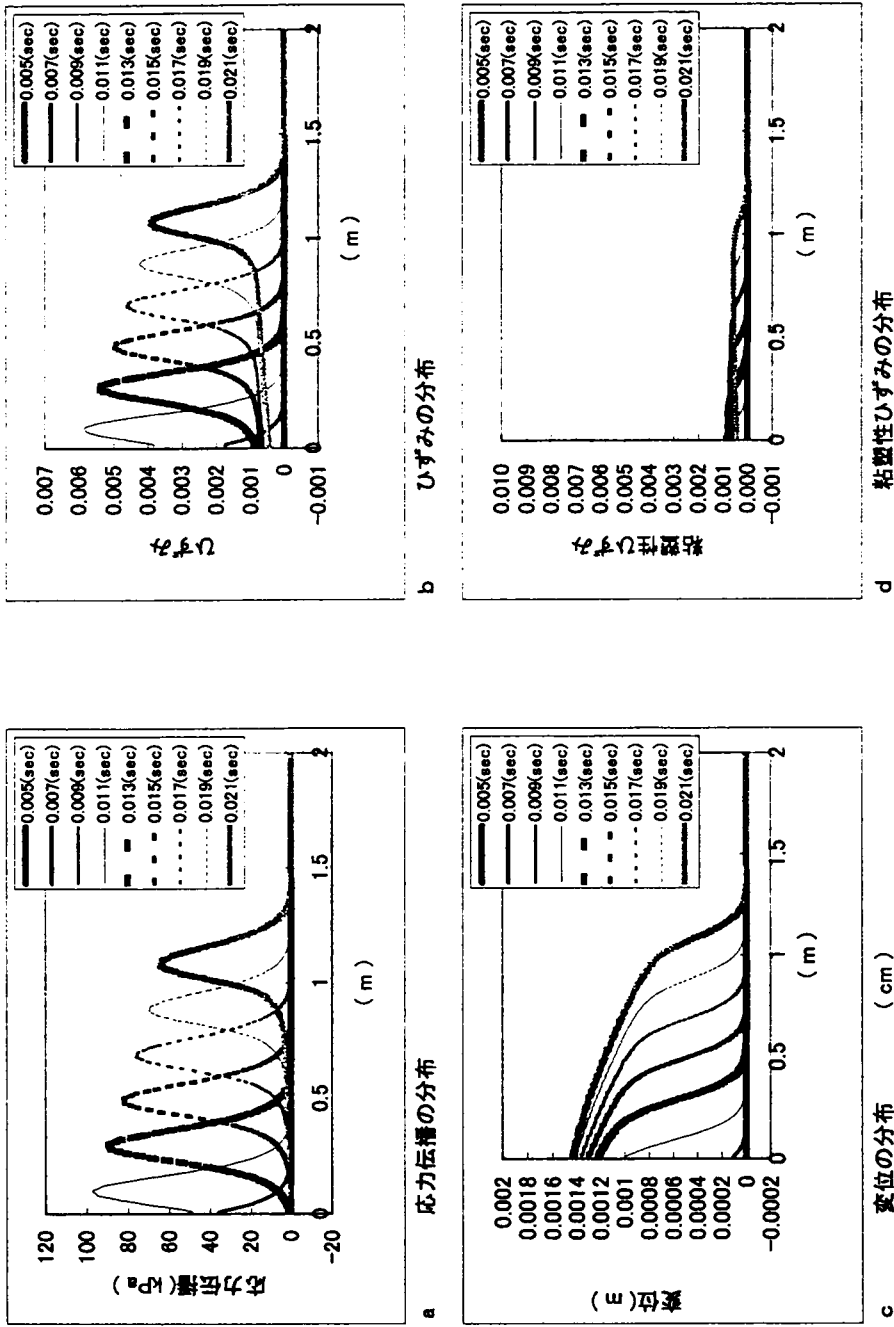


図 4.8 : Case5  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^7 (kPa)$ ,  $c = 0.0 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.005 (1/second)$



図 4.9

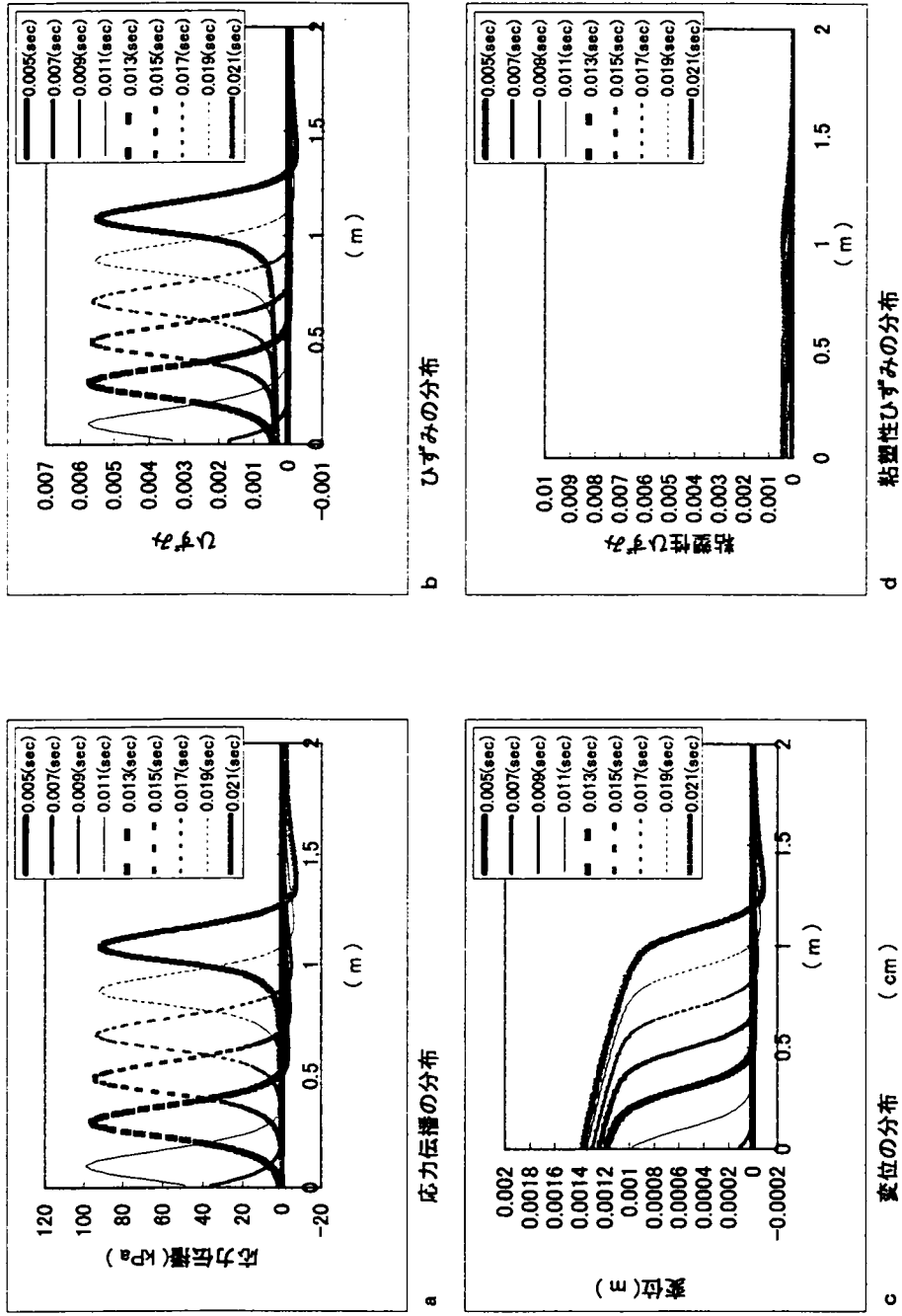


図 4.9 : Case6  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^7 (kPa)$ ,  $c = 1.0 \times 10^4 (kPam^2)$ ,  $\mu = 0.005 (1/sec)$

## 4.8 均質材料の解析結果の考察

### 4.8.1 応力伝播の考察

応力伝播についての図は、縦軸に応力 ( $kPa$ )、横軸に解析材料の長さ ( $m$ ) を示した。

図4.3aは、粘性に関する係数を  $\mu = 0$  ( $1/sec\ kPa$ ) とした場合 (Case0) は弾性体のケースであり、応力は減衰せずに伝播している。図4.4aでは、粘性に関する係数が  $\mu = 0.01$  ( $1/sec\ kPa$ ) で勾配項にかかる係数を  $c = 0$  ( $kPa\ m^2$ ) とした (Case1) 場合で、応力は大きく減衰しながら伝播している。一方、このケースで勾配項にかかる係数を  $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa\ m^2$ ) とした場合 (Case2)、図4.5aに示すように、応力の減衰は  $c = 0$  の場合と比べて小さくなっている。これは、粘塑性ひずみ速度の発展則より、勾配項にかかる係数を大きくすると粘塑性ひずみの発生が抑えられるためである。応力波が伝播するとき、応力がピークの前方で負になるのは、応力波の前方の部分で、勾配項が正 ( $\nabla^2 \epsilon^{\nu p}$ ) となり、減衰が大きくなったためと思われる。

図4.6aより、勾配項にかかる係数  $c = 0$  ( $kPa\ m^2$ )、ひずみ軟化項にかかる係数  $b = 1.5 \times 10^3$  ( $kPa$ ) としCase1より  $b$  を小さくした場合 (Case3)、Case1と同様の結果が得られ応力は大きく減衰している。ピーク応力と波後方の応力の減衰はCase1より小さい。図4.7aは、Case3に対して勾配項にかかる係数を  $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa\ m^2$ ) としたCase4の結果である。Case3に比較して応力の減衰は抑えられており、Case2の結果と比べてほとんど変わらなかった。Case1と比較するため、 $\mu$  をCase1より小さく  $\mu = 0.005$  ( $1/sec\ kPa$ ) としたとき (Case5) の結果を図4.8aに示すが、この場合、Case1に比べて応力の減衰は小さい。これは、粘性に関する係数を小さくしたことにより弾性状態に近づいたためと思われる。Case2に対して応力の減衰に関してはCase2とほとんど変化はなかった。しかし、応力が負になるところでは少し応力が増えた。これも粘性に関する係数を小さくすることにより弾性状態に近づいたため、 $\nabla^2 \epsilon^{\nu p}$  が小さくなったためと思われる。

### 4.8.2 ひずみの考察

ひずみに関する図は、縦軸にひずみ、横軸に解析材料の長さ ( $m$ ) を示した。ひずみの伝播特性は、ほぼ応力伝播特性の結果と同じ傾向となった。

図4.3bは、粘性に関する係数  $\mu = 0$  ( $1/sec\ kPa$ ) の場合 (Case0) は弾性体のケースである。応力は減衰せずに伝播していくので、ひずみも減衰しなかった。図4.4bは、粘性に関する係数が  $\mu = 0.01$  ( $1/sec\ kPa$ ) で勾配項にかかる係数を  $c = 0$  ( $kPa\ m^2$ ) とした場合 (Case1) で、初期にひずみが大きく発生し、波の通過後に大きいひずみが残留した。しかし、図4.5bに示すCase1について勾配項にかかる係数を  $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa\ m^2$ ) とした場合 (Case2)、粘塑性ひずみ速度の発展則より粘塑性ひずみが抑えられるので、波の通過後にほとんどひずみの残留はなかった。これは、応力の伝播特性に整合している。勾配項にかかる係数が  $c = 0$  ( $kPa\ m^2$ )、ひずみ軟化項にかかる係数  $b = 1.5 \times 10^3$  ( $kPa$ )

としCase1より $b$ を小さくした場合 (Case3) を図4.6bに示す。Case1と比べて波の通過後にひずみはあまり残留しなかった。これは、ひずみ軟化項が小さくなることによって粘塑性ひずみが抑えられたためと思われる。

Case3について、勾配項にかかる係数を $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa m^2$ )とした場合 (Case4) を図4.7bに示した。ひずみの伝播特性はCase2の場合と同様であった。また、ここでは、ひずみ軟化項の影響は見られなかった。図4.8bに示すように、勾配項にかかる係数が $c = 0$  ( $kPa m^2$ )で粘性に関する係数を $\mu = 0.005$  ( $1/sec kPa$ )と場合 (Case5)、つまりCase1の粘性に関する係数が小さい場合、波の通過後にひずみが残らなくなった。これは、粘性に関する係数が小さくなることによって、弾性状態に近づいたためと思われる。Case2に対して $\mu$ を小さくした場合のCase6の結果を図4.9bに示す。この場合のひずみの伝播特性は、Case2の場合とほぼ同様であった。勾配項の効果がある場合、応力が減衰せずに伝わるためひずみの最大値も大きい状態にあることがわかる。ただし、ピークひずみ前方のひずみと後方のひずみ分布には差異が見られた。

#### 4.8.3 変位の考察

変位の分布図では、縦軸に変位 ( $m$ )、横軸に解析材料の長さ ( $m$ ) を示した。

図4.3cに示す、粘性に関する係数 $\mu = 0$  ( $1/sec kPa$ )で弾性状態(Case0)の場合、ピークひずみあたりまで変位は一定となった。図4.4cは、粘性に関する係数が $\mu = 0.01$  ( $1/sec kPa$ )で勾配項の係数が $c = 0$  ( $kPa m^2$ )の場合 (Case1) である。载荷端 $x = 0$ で変位が大きく出て、伝播距離にともない変位が減少した。図4.5cより、勾配項にかかる係数を $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa m^2$ )とすると (Case2)、変位が抑えられ、Case1と比べると载荷点での変位が小さく、全体的に変位の分布はフラットとなっている。図4.6cは、勾配項の係数が $c = 0$  ( $kPa m^2$ )でひずみ軟化項にかかる係数 $b = 1.5 \times 10^3$  ( $kPa$ )の場合 (Case3) である。Case1に比較して、変位の減少が抑えられた。図4.7cに示すように、Case3で勾配項にかかる係数を $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa m^2$ )とした場合 (Case4)、Case2と同様の傾向である。勾配項の係数が $c = 0$  ( $kPa m^2$ )で粘性に関する係数を $\mu = 0.005$  ( $1/sec kPa$ )とした場合 (Case5) の結果を図4.8cに示す。粘性に関する係数を小さくすると弾性状態に近づくため、ピーク変位の減少が抑えられた。図4.9cは、勾配項にかかる係数を $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa m^2$ )とした場合 (Case6) であるが、Case2と同様にピーク変位の減少が抑えられた。波が伝播するにつれ、変位が波の前部で負になっている。これは応力伝播において、応力が負になっていることに対応して、粘塑性ひずみの2階勾配 ( $\nabla^2 \epsilon^{vp}$ ) の影響である。

#### 4.8.4 粘塑性ひずみの考察

粘塑性ひずみの分布図では、縦軸に粘塑性ひずみ、横軸に解析材料の長さ ( $m$ ) を示した。

図4.3dに示すように、弾性状態のとき (Case0) には粘塑性ひずみは発生しない。図4.4dでは、粘

性に関する係数が $\mu = 0.01$  ( $1/sec\ kPa$ )で勾配項の係数が $c = 0$  ( $kPa\ m^2$ )の場合 (Case1) である。粘塑性ひずみは載荷端 $x = 0$ でピークとなり、波が伝播していった後も粘塑性ひずみが大きく残る。

一方、図4.5dに示すように、勾配項にかかる係数が $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa\ m^2$ )の場合 (Case2)、粘塑性ひずみは載荷端でピーク値が抑えられ全体的になだらかな状態になり、粘塑性ひずみの発生も小さい。図4.6dは、勾配項の係数 $c = 0$  ( $kPa\ m^2$ )でひずみ軟化項にかかる係数が $b = 1.5 \times 10^3$  ( $kPa$ )の場合 (Case3) である。Case1に比べて $b$ が小さいため、粘塑性ひずみのピーク値が抑えられている。図4.7dは、勾配項にかかる係数が $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa\ m^2$ )の場合 (Case4) で、Case2と同様の結果が得られた。図4.8dに示すように、勾配項の係数が $c = 0$  ( $kPa\ m^2$ )で粘性に関する係数が $\mu = 0.005$  ( $1/sec\ kPa$ )の場合 (Case5) を示すが、Case1に比べて粘塑性ひずみは抑えられた。

図4.9dに示すように、勾配項にかかる係数が $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa\ m^2$ )の場合 (Case6)、ひずみの発生が小さくなり、粘塑性ひずみの分布は全体的になだらかな状態になった。応力伝播特性の考察と相関して、粘塑性ひずみの発生は、応力の減衰に対応していることがわかった。勾配項を導入すると粘塑性ひずみの発生が抑えられ、かつ、その分布はフラットになることが明らかである。

#### 4.8.5 均質材料の解析のまとめ

以下に、均質地盤の解析についての考察を簡単にまとめる。

弾性体として解析を行った場合、応力・ひずみ・変位の結果はすべて減衰せずに伝播している。粘塑性ひずみの二階空間勾配項を導入しない場合は、すべての解析結果において、粘塑性ひずみが発生し、応力・ひずみ・変位は減衰している。勾配項を導入すると、局所的な粘塑性ひずみの発生が抑えられ、応力波の通過後のひずみが抑えられた。それに対応して、応力の減衰が抑えられた。さらに、局所変形が抑えられて、応力波の通過後の変位分布はフラットとなった。ひずみ軟化項にかかる係数を変化させても、すべての結果に対してそれらの減衰にはほとんど影響しなかった。今回の解析に用いたひずみ軟化項の大きさでは影響が出にくかったと思われる。粘性に関する係数を小さくすると、解析対象材料を弾性状態に近づける効果があるため、応力の減衰が抑えられた。

### 4.9 不均質材料中の一次元波動伝播解析

次に不均質地盤中の波動伝播解析を一次元モデルを用いて行った。以下に解析方法を示す。

#### 解析材料及び入力波形

不均質地盤での解析材料は4.5節 (均質地盤) と同じ形状の不均質体とし、入力波形は、4.5節 (均質地盤) で用いたものを利用する。

#### 解析方法

4.5節で行った均質地盤を不均質地盤に変更する。その方法として弾性係数 $E$ を各節点ごとに変化さ

せる。これを利用し、均質地盤と同様の解析を行う。(弾性係数  $E$  の決定)

各節点ごとの弾性係数は、疑似一様乱数を乱数発生プログラムにより決定する。その際、 $E=1.8 \times 10^4 (kPa)$  をもとに  $\pm 10\%$  の範囲で変化させることとする。

#### 定数

解析に使われる材料定数をここに示す。

$$\rho = 1.8(g/cm^3) = 1.8 \times 10^3(kg/m^3)$$

$$1(kg/m^3) = 1(N \text{ sec}^2/m^4) = 10^{-3}(kN \text{ sec}^2/m^4) = 10^{-3}(kPa \text{ sec}^2/m^2) = 1.8(kPa \text{ sec}^2/m^2)$$

$$\theta = 0.5$$

波速  $C_0$  は、弾性係数を次の式に代入することにより得られ、各節点ごとに変化する。

$$C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

#### 4.10 不均質材料の解析結果

ここでは、不均質地盤の一次元波動伝播解析において求められた応力伝播、ひずみ、変位、粘塑性ひずみについて、それぞれの解析結果を紹介する。それぞれのケースにおいて用いたパラメータを表 4.2 に示す。弾性係数  $E$  の変化割合は  $\pm 10\%$  である。

表 4.2 解析パラメータ

	$a(kPa)$	$b(kPa)$	$c(kPa \text{ m}^2)$	$\mu(1/sec \text{ kPa})$
Case7	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^7$	$1.0 \times 10^4$	0.0
Case8	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^7$	0.0	0.01
Case9	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^7$	$1.0 \times 10^4$	0.01
Case10	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^3$	0.0	0.01
Case11	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^3$	$1.0 \times 10^4$	0.01
Case12	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^7$	0.0	0.005
Case13	$2.5 \times 10^4$	$1.5 \times 10^7$	$1.0 \times 10^4$	0.005

#### それぞれのケースの特徴

以下に、それぞれの解析ケースの特徴及び図番号について記述する。

Case 7 : 図 4.10 : 弾性状態 ( $\mu = 0$ )

Case 8 : 図 4.11 : 勾配項にかかる係数  $c=0$ 、 $\mu = 0.01(1/sec \text{ kPa})$

Case 9 : 図 4.12 : 勾配項にかかる係数  $c=1.0 \times 10^4$ 、Case1 +  $c$

Case10 : 図 4.13 : ひずみ軟化項にかかる係数  $b=1.5 \times 10^3$ 、勾配項にかかる係数  $c=0$

Case11 : 図 4.14 : ひずみ軟化項にかかる係数  $b=1.5 \times 10^3$ 、勾配項にかかる係数  $c=1.0 \times 10^4$ 、Case3 +  $c$

Case12 : 図 4.15 : 粘性に関する係数  $\mu=0.005$ 、勾配項にかかる係数  $c=0$

Case13 : 図 4.16 : 粘性に関する係数  $\mu=0.005$ 、勾配項にかかる係数  $c=1.0 \times 10^4$ 、Case5 +  $c$

また、各図において、記号 a,b,c,d は以下の通りである。

応力伝播図 : a	ひずみ図 : b	変位図 : c	粘塑性ひずみ図 : d
-----------	----------	---------	-------------

## 4.11 不均質材料の解析結果の考察

均質地盤と同様のケースで不均質地盤の解析を行った。勾配項なしの状態では (Case8 : 図 4.11a)、均質地盤 (Case1 : 図 4.4a) と同様に、波が伝わるにつれ応力が減少した。また、図 4.12a より、勾配項を  $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa m^2$ ) とすると、応力の減衰が抑えられ、均質地盤と同様に勾配項の影響が確認できた。また、ひずみ軟化項にかかる係数  $b$  (図 4.12b、図 4.13b、粘性に関する係数  $\mu$  の影響 (図 4.15a、図 4.16a) も確認できた。ここでは、不均質地盤だけに見られた現象について考察を行う。

### 4.11.1 応力伝播の考察

応力伝播図は、縦軸に応力 ( $kPa$ )、横軸に解析材料の長さ ( $m$ ) を示した。図 4.10a より、弾性状態の時、不均質地盤で弾性係数を節点ごとに变化させても応力は減衰せず伝播した。波の通過後、不均質地盤では弾性係数が変化しているため波速が変わり、伝播する波の応力に違いが生じるので残留する応力が生じた。

図 4.11a は、粘性に関する係数が  $\mu = 0.01$  ( $1/sec kPa$ ) で勾配項にかかる係数を  $c = 0$  ( $kPa m^2$ ) とした場合 (Case8) 結果である。粘性のため応力は減衰しながら伝播した。応力が減衰し、波の後方で残留する応力はほとんど生じていない。図 4.12a に示すように、勾配項にかかる係数が  $c = 0$  ( $kPa m^2$ ) の場合 (Case9)、波の減衰は抑えられるが、残留する応力が生じた。勾配項が粘塑性ひずみの発生を減少させ、波のピーク前でひずみが負になり応力も負になっている。ひずみ軟化項にかかる係数を  $b = 1.5 \times 10^3$  ( $kPa$ ) としたとき (Case10、Case11)、粘性に関する係数を  $\mu = 0.005$  ( $1/sec kPa$ ) とした場合 (Case12、Case13) も同様の結果が得られ、勾配項を導入すると、弾性状態 (Case7) のように、応力の減衰が小さくなった。

### 4.11.2 ひずみの考察

ひずみの分布図を図 4.10b～図 4.16b に示した。ひずみの分布図では、不均質地盤の影響が最も顕著に現れた。図 4.10b に示すように、弾性状態では、波が伝播するときピーク時にひずみが乱れて残ったが、ひずみは減少することはなかった。波の通過後には、応力伝播図と同じように、残留する応力に対応し節点ごとのひずみに乱れが生じた。図 4.11b は、粘性に関する係数が  $\mu = 0.01$  ( $1/sec kPa$ ) で、勾配項にかかる係数が  $c = 0$  ( $kPa m^2$ ) の場合 (Case8) である。応力の減衰とひずみの相対的減少が見られる。ひずみの発生が小さいので、不均質地盤の影響が現れにくくなっており、波のピーク時のひずみの乱れが小さくなっている。図 4.12b に示すように、勾配項にかかる係数を  $c = 1.0 \times 10^4$  ( $kPa m^2$ )

とした場合 (Case9)、ひずみの減少が抑えられ、波のピーク時のひずみの乱れが大きくなった。また、波の通過後には、ひずみの乱れが残った。ひずみ軟化項にかかる係数を  $b = 1.5 \times 10^3$  (kPa) とした場合 (Case10、Case11)、粘性に関する係数を  $\mu = 0.005$  (1/sec kPa) とした場合 (Case12、Case13) でも同様の結果が得られ、勾配項を導入すると、ピークひずみの減少が抑えられ、波のピーク時のひずみの乱れが大きくなった。また、この場合も波の通過後には、ひずみの乱れが残った。

#### 4.11.3 変位の考察

変位の分布図では、縦軸に変位 ( $m$ )、横軸に解析材料の長さ ( $m$ ) を示した。図4.10c～図4.16cに示すように、すべての解析結果は均質材料と近似した傾向であり、変位の分布には、地盤の不均質性の影響はほとんど見られなかった。

#### 4.11.4 粘塑性ひずみの考察

粘塑性ひずみの分布図は、縦軸に粘塑性ひずみ、横軸に解析材料の長さ ( $m$ ) を示した。図4.10d～図4.16dより、均質材料に対して粘塑性ひずみの発生量は大きいですが、粘塑性ひずみの分布には、地盤の不均質性からの影響は小さかった。

#### 4.11.5 不均質地盤の解析のまとめ

以下に、不均質地盤の解析についての考察を簡単にまとめる。

均質材料の場合と同様に、解析対象が不均質材料であっても、弾性体として解析を行った場合、応力・ひずみ・変位の結果はすべて減衰せずに伝播している。また、弾性材料の場合が最も応力伝播の速度は速い。粘塑性ひずみの二階空間勾配項を導入しない場合は、すべての解析結果において、粘塑性ひずみが発生し、応力・ひずみ・変位は減衰し、弾性材料に対する結果と同様の傾向であった。勾配項を導入すると、均質地盤の解析と同様に、局所的な粘塑性ひずみの発生が抑えられ、応力波の通過後のひずみが抑えられた。それに対応して、応力の減衰が抑えられた。さらに、局所変形が抑えられて、応力波の通過後の変位分布はフラットとなった。勾配項と粘性に関する項を大きくすると、残留応力と残留ひずみを減少させる効果があった。軟化項に関する係数の値が大きい場合、残留ひずみが減少することがわかった。

### 4.12 波動伝播解析のまとめ

弾粘塑性構成式に粘塑性ひずみの二階空間勾配項を導入したモデルの動的特性を明らかにするため、一次元モデルを用いて、地盤材料中を伝播する波動の数値解析を行った。均質及び不均質の二種類の弾粘塑性体を考え、応力を自由端から与え、一次元モデルで解析を行った。粘塑性ひずみに関する係数、ひずみ軟化に関する係数、粘性に関する係数をパラメータとして、14 ケースの解析を行った。

均質材料・不均質材料のどちらの材料に対しても、それらを弾性体としたときは、応力・ひずみ・変

位はすべて減衰せずに伝播した。均質材料・不均質材料のどちらの解析に関しても、粘塑性ひずみの二階空間勾配項を導入しない場合は、弾性材料の結果をのぞき、すべての解析結果において、粘塑性ひずみが発生し、応力・ひずみ・変位は減衰した。勾配項を導入すると、局所的な粘塑性ひずみの発生が抑えられ、応力波の通過後のひずみが抑えられた。それに対応して、応力の減衰が抑えられた。さらに、局所変形が抑えられて、応力波の通過後の変位分布はフラットとなった。均質材料・不均質材料のどちらの解析に関しても、ひずみ軟化項の係数の影響はあまりみられなかった。

均質材料・不均質材料のどちらの解析に関しても、粘塑性ひずみの勾配項の係数を大きくすると、粘塑性ひずみの発生が押さえられ、材料内の応力の伝播状況は、弾性材料に対するものに、近似することがわかった。



図4.10

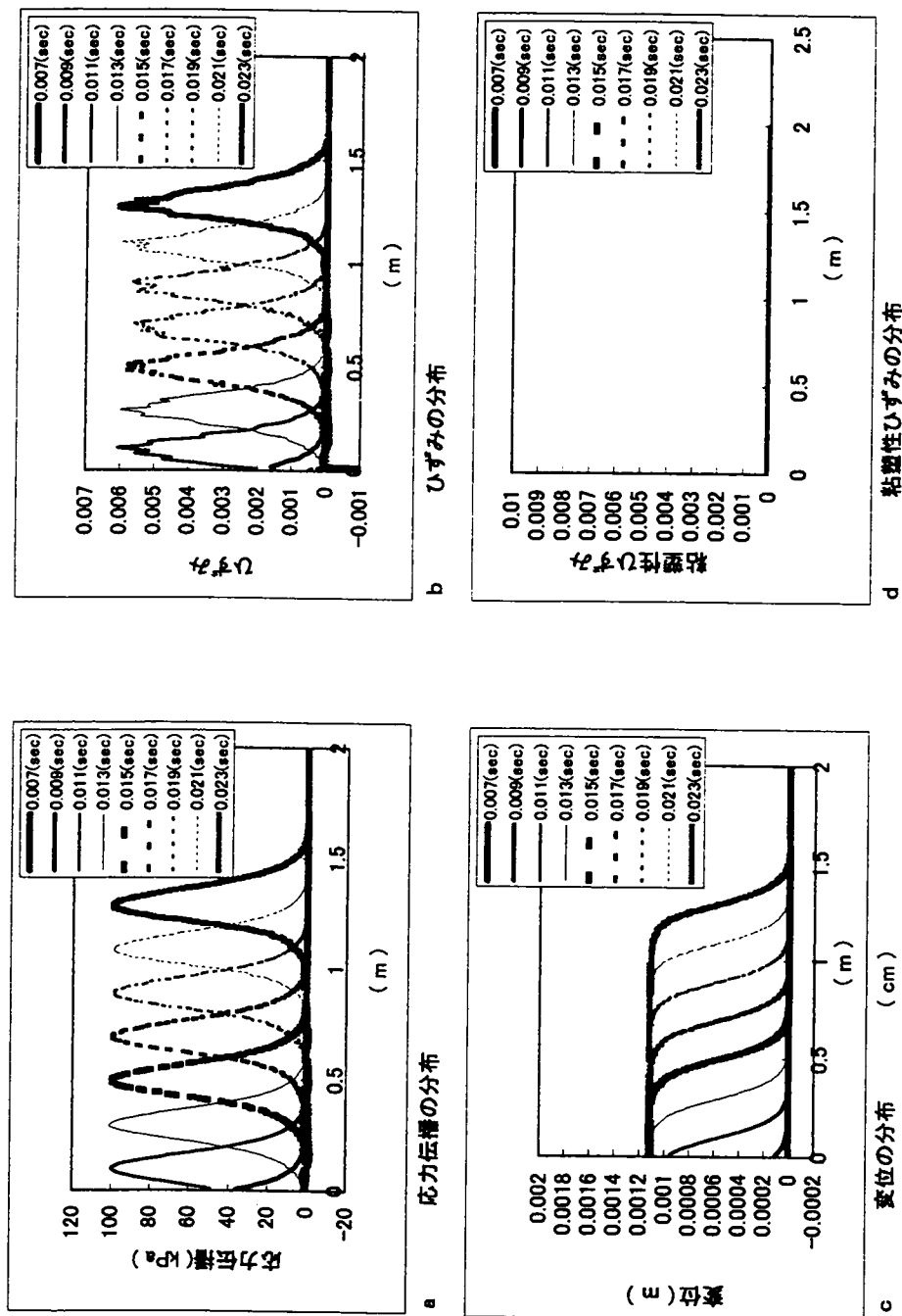


図4.10 : Case7  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^7 (kPa)$ ,  $c = 1.0 \times 10^4 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.005 (1/second \cdot Pa)$

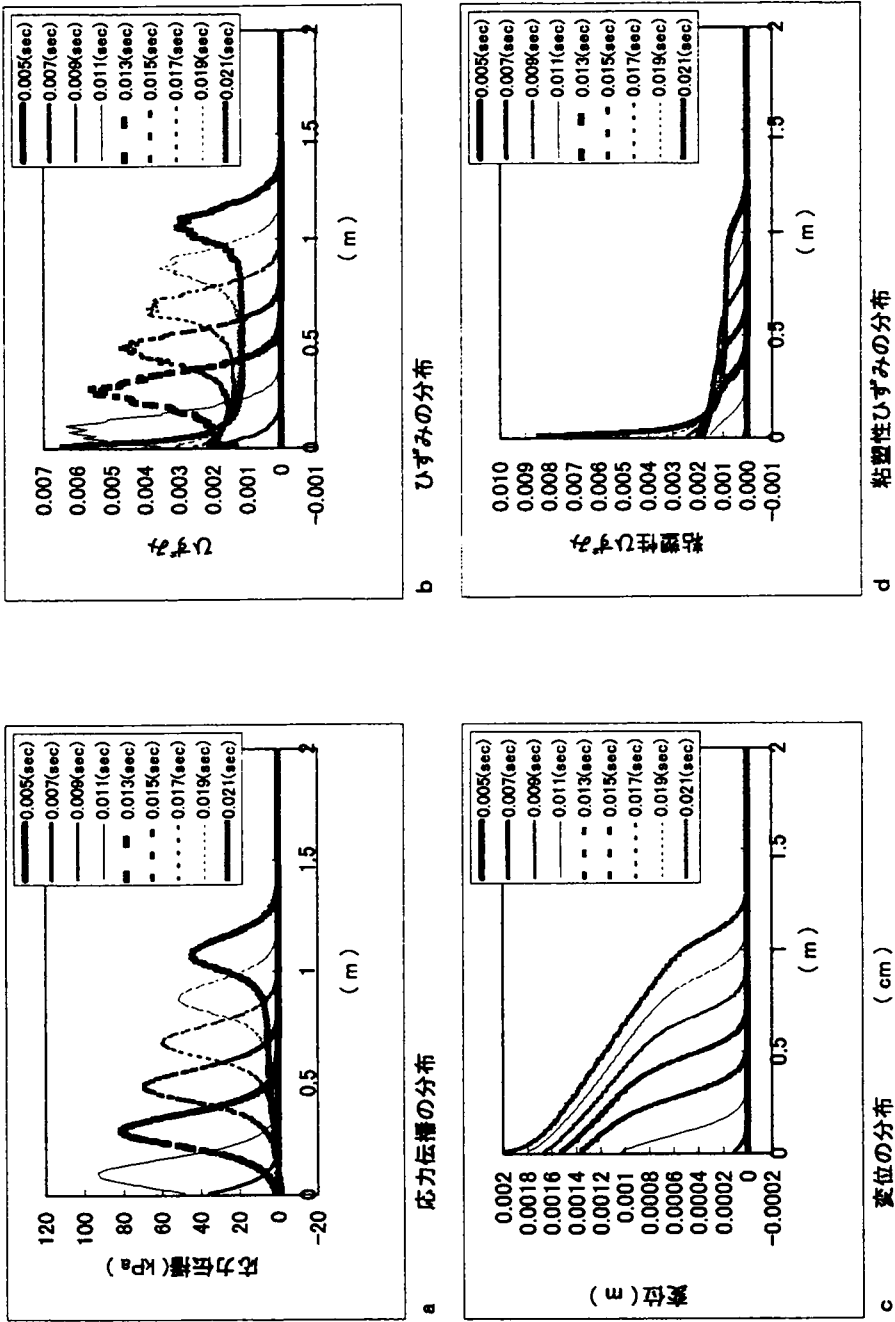


図 4.11 : Case8  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^7 (kPa)$ ,  $c = 0.0 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.01 (1/sec \cdot kPa)$

図4.12

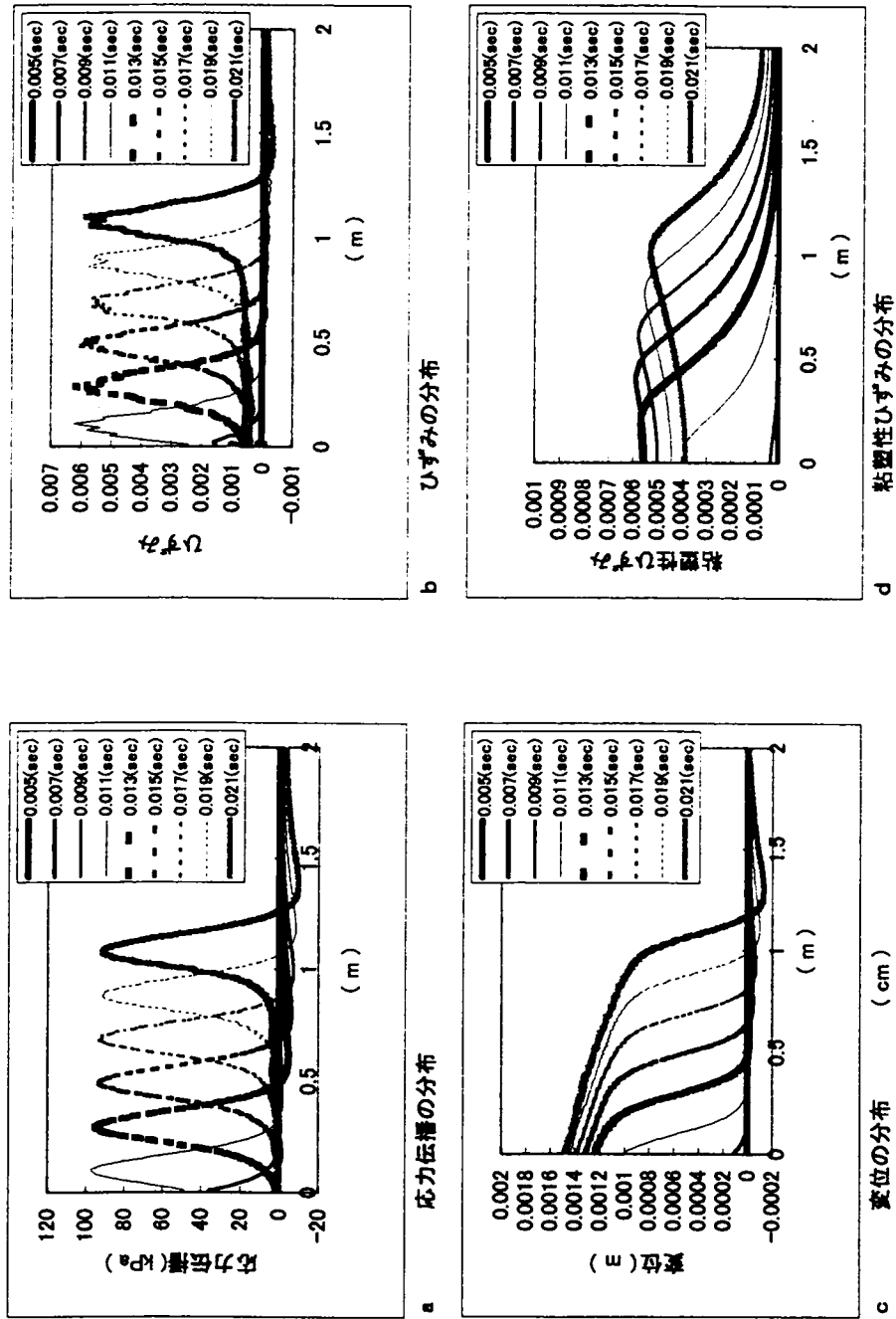


図4.12 : Case9  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^7 (kPa)$ ,  $c = 1.0 \times 10^4 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.01 (1/sec \cdot Pa)$

図 4.13

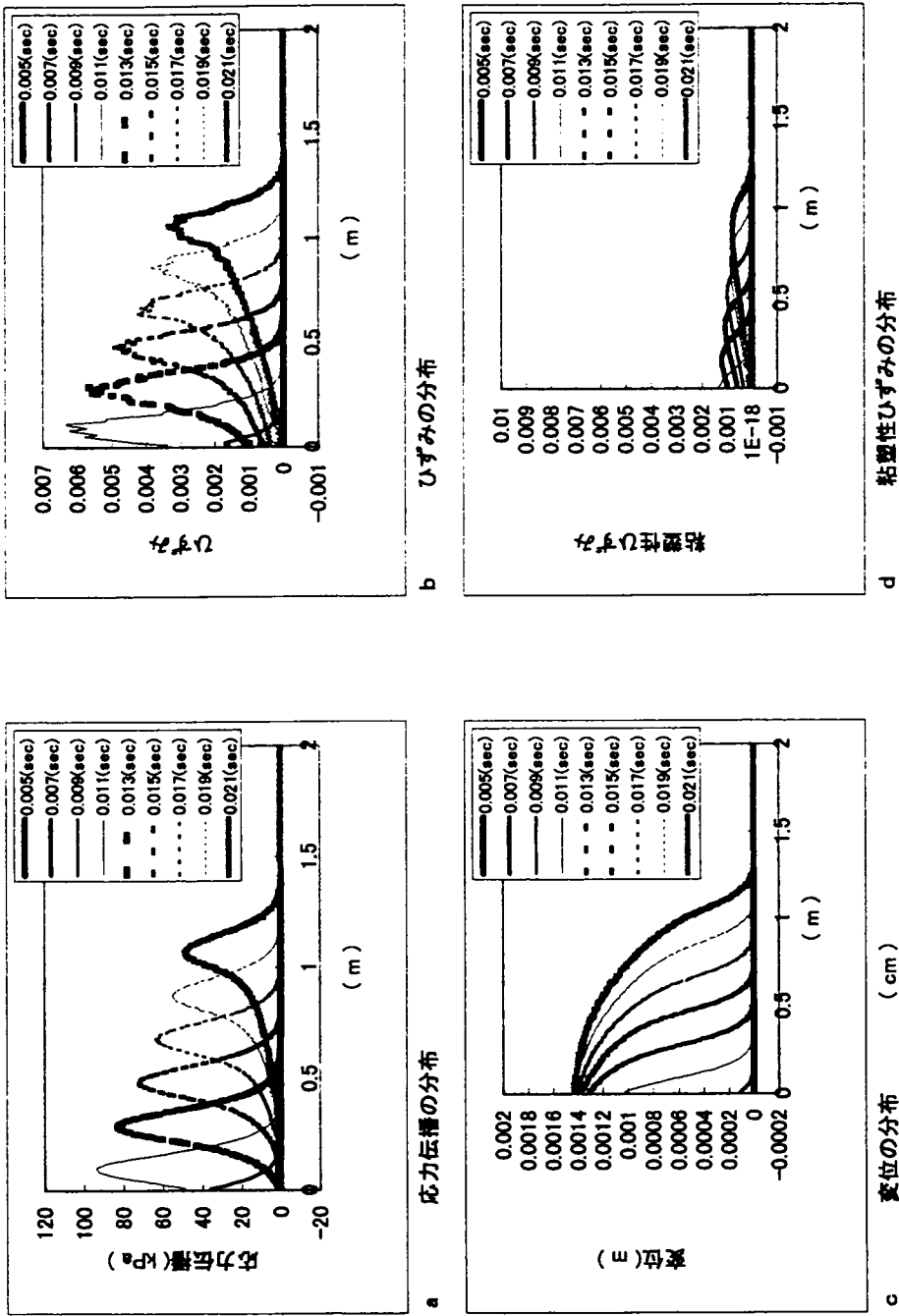


図 4.13 : Case10  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^3 (kPa)$ ,  $c = 0.0 \times 10^4 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.01 (1/sec \cdot kPa)$

図 4.14

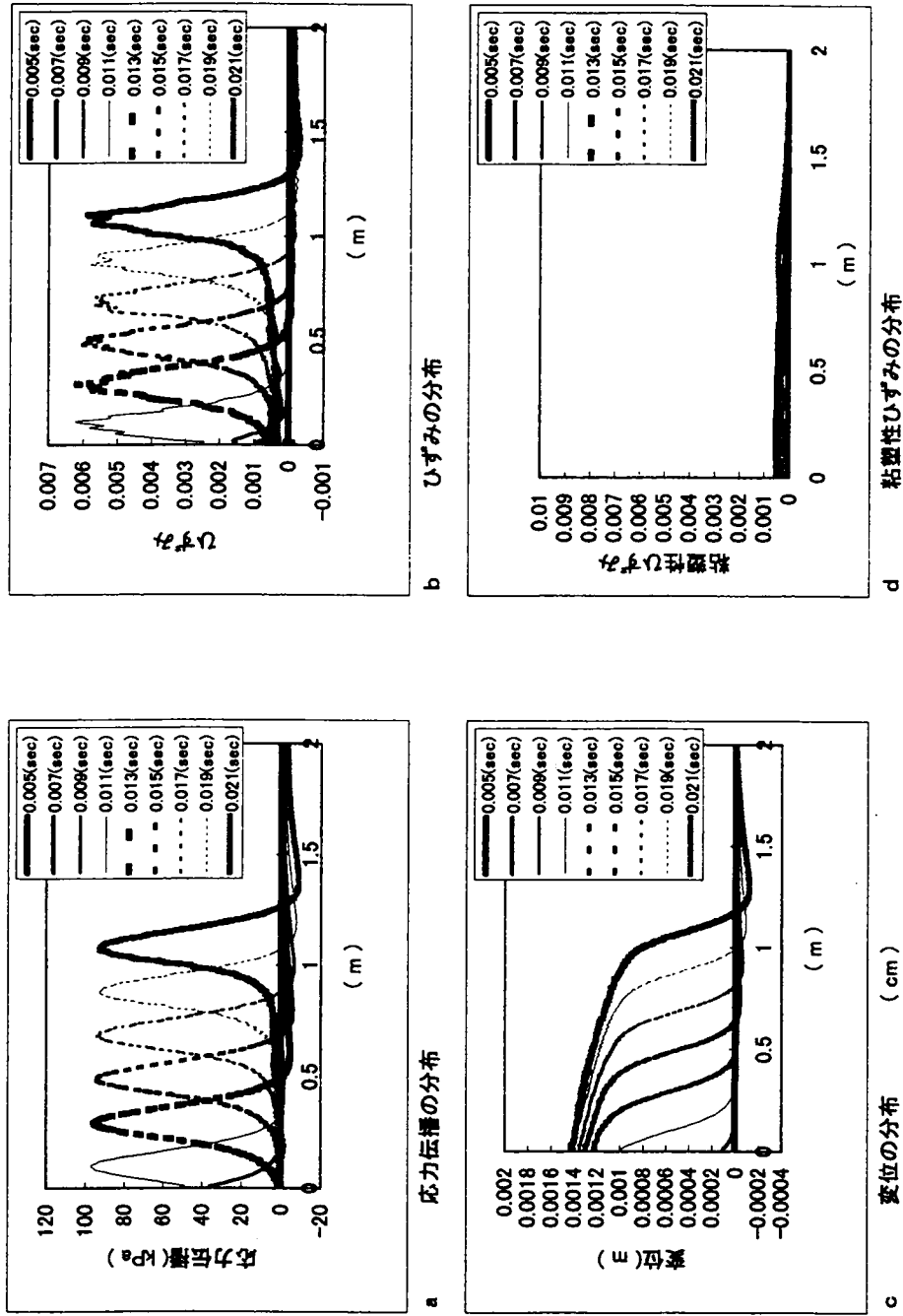


図 4.14 : Case11  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^3 (kPa)$ ,  $c = 1.0 \times 10^4 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.01 (1/second \cdot Pa)$

図4.15

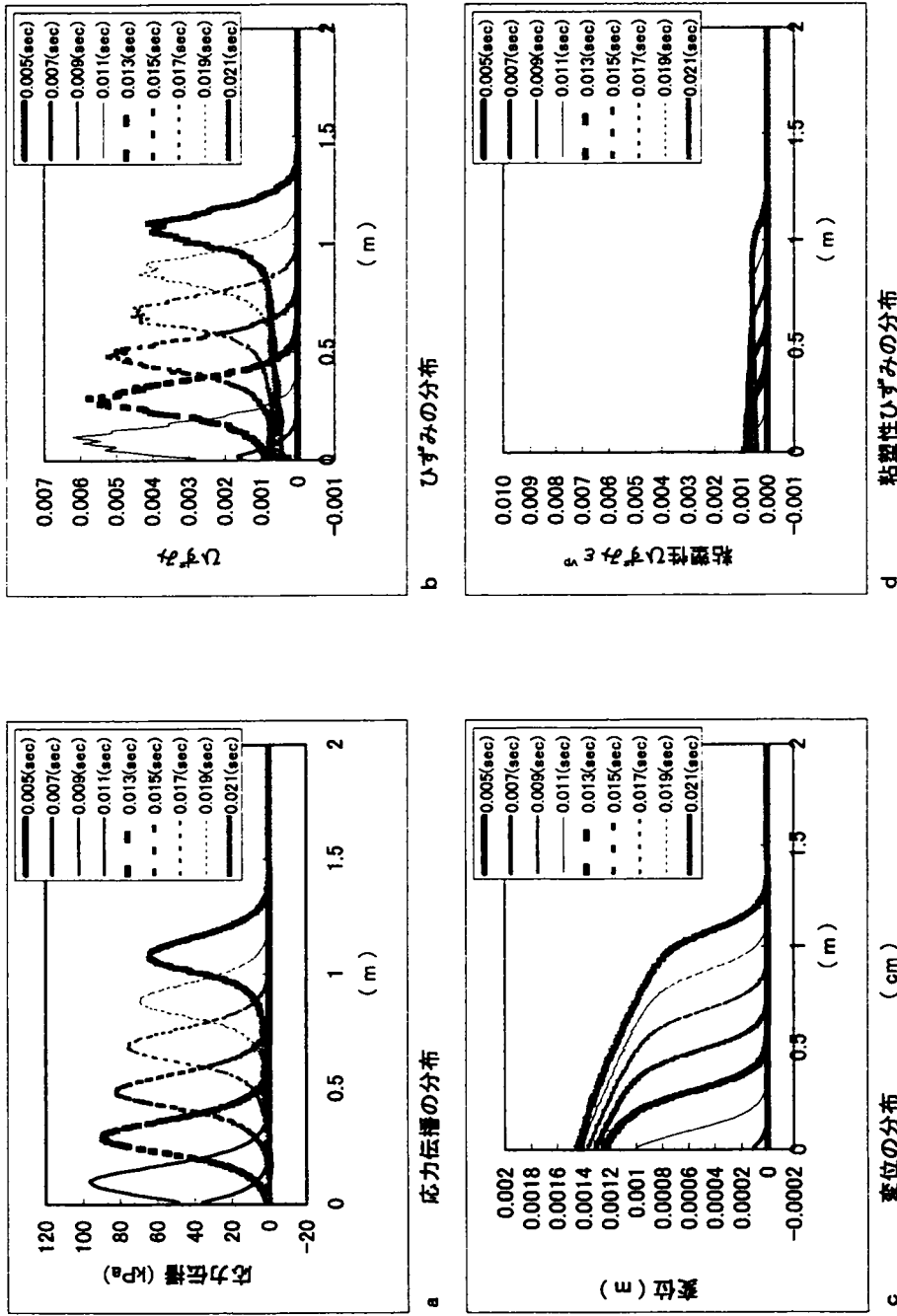


図4.15 : Case12  $\alpha = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^7 (kPa)$ ,  $c = 0.0 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.005 (1/sec \cdot kPa)$

図4.16

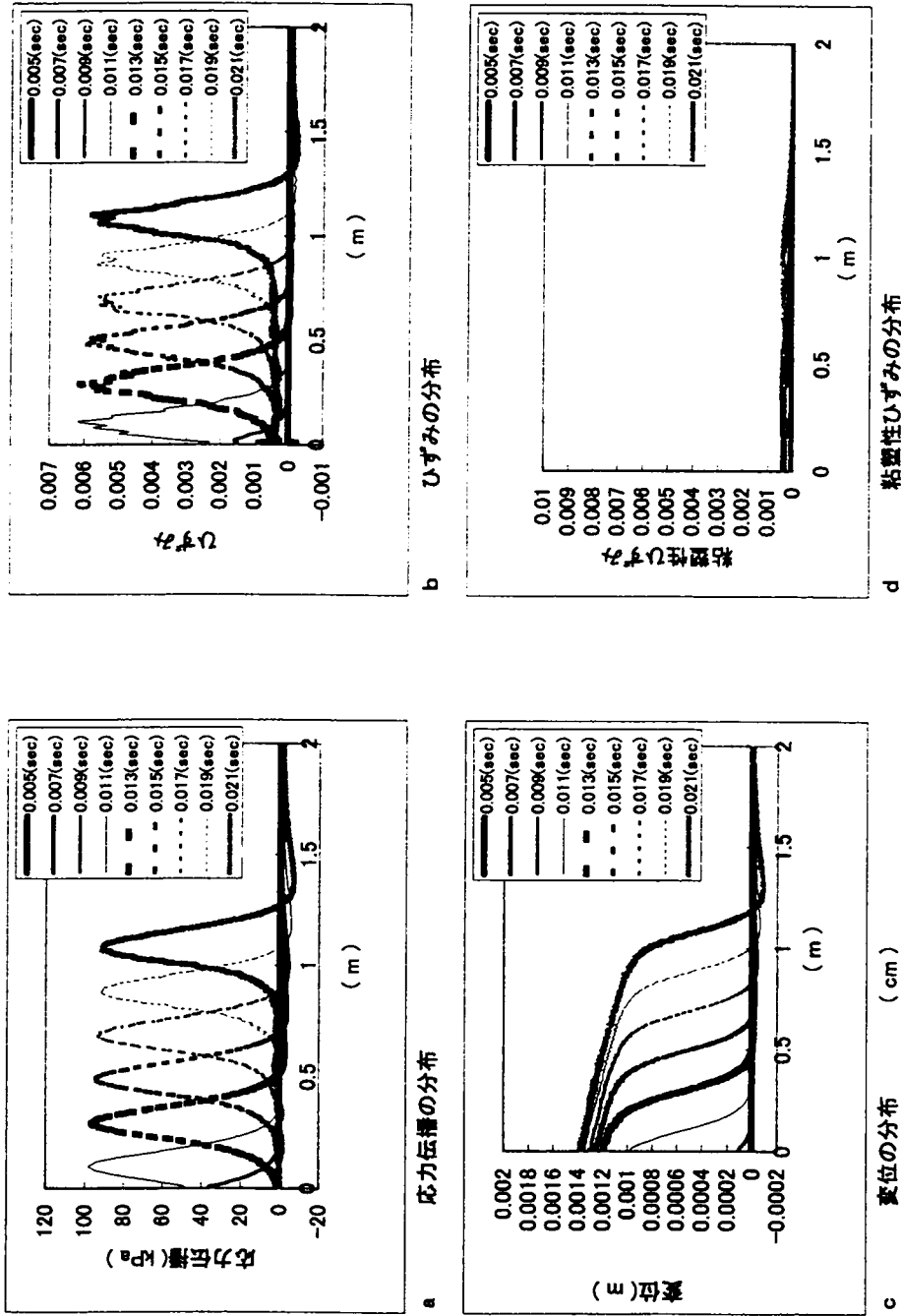


図4.16 : Case13  $a = 2.5 \times 10^4 (kPa)$ ,  $b = 1.5 \times 10^7 (kPa)$ ,  $c = 1.0 \times 10^4 (kPa \cdot m^2)$ ,  $\mu = 0.005 (1/sec \cdot kPa)$

## 参考文献

- Hirota. R.(1976), Direct methods of finding exact solutions of non-linear evolution equations, in Bäcklund Transformations, Miura.R.M. ed., Lecture notes in mathematics, 515, Springer-Verlag, New-York.
- Oka.F., Mühlhaus,H.-B., Yashima.A and Sugito.M.(1994), Wave propagation in the ground described by strain gradient dependent constitutive model, 第9回日本地震工学シンポジウム, Vol.3, pp. 301-306
- Oka.F. and H.B.Mühlhaus(1994), Analytical solutions of deformation in gradient dependent model, Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks , pp. 211-218
- 東京大学出版会 数値流体力学編集委員会編(1995), 圧縮性流体解析, pp. 35-115



## 第5章 コセラ連続体理論を用いた粘性土の変形解析

### 5.1 概説

すでに 第1章で述べたように、古典的な連続体構成モデルによる解析では、せん断帯の発生条件や不安定開始条件などは解析できるが、破壊後挙動は解析できない。これは、支配方程式が、非適切となり、数学的解析が困難となるためである。

このような問題は、ひずみ勾配依存型などの非局所化構成式で解決できるが、他の方法として、コセラ兄弟 (E.Cosserat, F.Cosserat(1909)) による回転の勾配と偶応力を考慮する Cosserat (コセラ) 体モデルがある。Mühlhaus (1986) ,Mühlhaus and Vardoulakis(1987) らによって、コセラ体モデルはせん断帯など変形の局所化問題に適用されてきた。一方、コセラ連続体理論は、層状材料の変形問題にも用いられてきているが、これは偶応力により、曲げに対する層間のインターフェイスの強さを表現する方法である。層状地盤のバックリングや褶曲変形の問題を古典的な異方性材料に対する平均化手法のみで解決することはできないことが明らかとなり、Mühlhaus(1986),Mühlhaus and Vardoulakis (1987) らによって提案されてきた方法である。コセラ体は物理的に見れば粒状体の粒状性を直接表現するものであるため、砂などを念頭に時間依存性のないモデルが議論されることが多く、コセラ弾性体や塑性体のモデルが用いられてきた。一方、粘性土は、本質的に時間依存性を持つ材料であるため、コセラ効果を導入する際にも粘性を考慮する必要がある。以上の理由により、本章では、粘性土を対象としてコセラ回転の効果を取り入れた非局所化粘塑性構成式を導き、有限要素解析によってその特性を明らかにする。

土の変形時、土の粒子は回転をしながら移動するため、破壊状態において、変形の集中するせん断帯が発生するような場合、せん断帯近くにおける土粒子の回転の動きは重要である。また、土石流などの解析では、速い流れ場で土の粒子が回転しながら互いに衝突し伝達しあうため、回転の動きを取り入れた解析が定着しつつある (Onishi(1978),Campbell(1991))。一方、これまでに、土の挙動の解析においても、土粒子の回転を考慮した非局所化理論の一つであるコセラ連続体理論を用いて研究がなされ、その効果も実証されてきている (Bardet and Proubet(1991), Yoshida et.al.(1997))。コセラ連続体理論とは、連続体力学において、付加的な物質点の自由度として回転 (スピン) を考え、回転に対する偶応力 (モーメント) を取り入れたものである。

本章においては、コセラ連続体理論を導入した弾粘塑性構成式を用いて、土の変形解析を行う。解析方法は、有限要素法である。数値解析により得られた解析結果から、コセラ連続体理論が、粘土の変形解析に及ぼす影響について考察した。

## 5.2 コセラ連続体理論

### 5.2.1 粒子の回転と偶応力

$x_i$ にある点が $u_i$ だけ変位するとすれば、その近傍 $x_i + dx_i$ にある点の変位は $u_i + du_i$ で与えられる。変位が連続である限り、 $du_i$ は、

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (5.1)$$

と書ける。さらに $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ を、その対称部分と反対称部分に分解すると、(5.1)式はさらに次のように変形できる。

以下、ベクトルやテンソルの成分計算については、アインシュタインの総和規約を用いて、 $a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ と表記している。

$$du_i = \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{ひずみテンソル} \quad (5.3)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{剛体回転を含めた回転テンソル} \quad (5.4)$$

$\omega_{ij}$ とそれに対応する回転ベクトル $\phi_i$ とは、次の関係にある。

$$\phi_i = -\frac{1}{2} e_{ijk} \omega_{jk} \quad (5.5)$$

ただし、 $e_{ijk}$ は交代記号であって、 $i, j, k$ が1,2,3の偶置換であれば+1、奇置換であれば-1、置換できなければ0とする。

また、ベクトル $\phi_i$ の方向は回転軸の方向を、その大きさは回転量を与える。

粒状体のような不連続な粒子からなる材料において、粒状体の変形は接点でのすべりや回転によって起こる。したがって、変位場が不連続となるため、一般には変位 $u_i$ を直接微分することはできない。そのため、特に粒状体を考える場合、巨視的回転 $\Phi$ とは独立に構成粒子自身が回転していると見なければならぬ。よって粒子自身の微視的回転 $\phi^c$ を巨視的回転 $\phi$ とは独立に考えなければならぬ。材料が純粋に連続であれば、微視的回転 $\Phi^c$ はその存在理由を失う。しかし、不連続な粒子からなる粒状体を、連続体力学の枠内で近似的に扱おうとすれば、粒子自身の回転を含んだより一般的な理論構成が求められる。E., Cosserat and F., Cosseratによって提案されたコセラ連続体理論(1909)では、その理論の中で偶応力(couple stress)が重要な働きをする。平均的回転 $\phi$ 、 $\phi^c$ の場所的変化(曲率)は偶応力によって引き起こされると考えられる。

微視的構造をより精度よく表現するためには、より多くの情報を物体の点に付し、変形量や回転量の

高次の量を用いることが望ましい。例えば、粒状体では、回転量は粒子の回転量と関連づけられる。コセラ連続体理論においては、変形勾配  $u_{i,j}$  から粒子の回転に対応するスピンテンソル  $\omega_{ij}^c$  との相対的ひずみテンソル  $\varepsilon_{ij}$  を以下のように考える。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ji} &= u_{i,j} - \omega_{ij}^c \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) - \omega_{ij}^c \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \omega_{ij} - \omega_{ij}^c\end{aligned}\quad (5.6)$$

ただし、 $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$  である。したがって、連続体スピン  $\omega_{ij}$  が粒子スピン  $\omega_{ij}^c$  に等しい場合、 $\varepsilon$  は通常のひずみテンソルとなる。一方、 $\omega_{ij}^c$  はそれに対応する回転ベクトル  $\phi_k^c$  と次のような関係がある（例えば、Spencer, A., 1980）。

$$\omega_{ij}^c = -e_{ijk}\phi_k^c \quad (5.7)$$

$$\phi_k^c = -\frac{1}{2}e_{ijk}\omega_{ij} \quad (5.8)$$

ゆえに、

$$\varepsilon_{ji} = u_{i,j} + e_{ijk}\phi_k^c \quad (5.9)$$

2次元の場で(5.9)式に表される運動学的関係を示すと、図5.1のようになる。

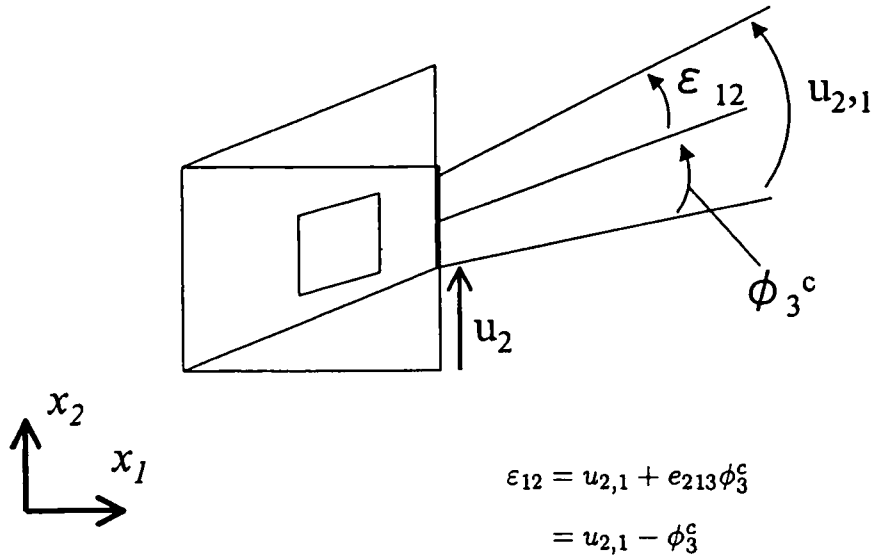


図 5.1 せん断時の運動学的関係

偶応力は、単位面積あたりの偶力と定義される。図5.2には、 $x_1$ 、 $x_2$  軸を含む二次元平面に、物質点0

近傍の応力、偶応力の成分がそれぞれ $\sigma_{ij}$ 、 $m_{j3}$ として示されている。偶応力の成分につけられている最初の添字は作用している面を、二番目の添字は偶応力の作用方向を指定している。したがって、偶応力 $m_{3j}$ の添字3は、単位面積当たりでの $x_3$ を軸とする偶力であることを意味する。応力や偶応力に場所的变化がある場合（図5.2）、力のつりあいとモーメントのつりあいが成立していなければならない。力のつりあい式は物体力がないとして、次式で与えられる。

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (5.11)$$

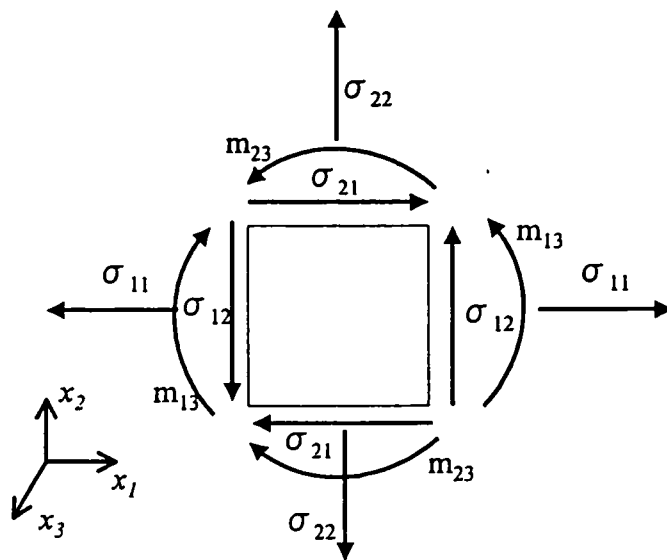


図 5.2 応力と偶応力の成分

偶応力の有無に関わらず、力のつりあい式は同じ形式で書かれるが、一方、モーメントのつりあいは、偶応力のある場合次式で表される。

$$\frac{\partial m_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \quad (5.12)$$

偶応力が存在しないか、あるいは偶応力に場所的变化のない特別な場所にものみ、

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (5.13)$$

が成立する。

偶応力は、回転の場所的变化、つまり曲率 (curvature) に対応している。二次元では $x_i$ 方向の曲率は、

$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ 、あるいは  $\frac{\partial \phi^c}{\partial x_i}$ 、と書ける（一般的な三次元の場合、回転は回転ベクトル  $\phi$ 、 $\phi^c$  で与えられ、従って、 $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) を回転軸とする三つの成分を持たなければならない。しかし、図5-1の場合、 $x_3$  軸が回転軸となり、また回転量  $\phi_3$ 、 $\phi_3^c$  のみが意味を持つので、ここではただ単にそれらを  $\phi$ 、 $\phi^c$  と記すことにする。

コセラ弾性体では、偶応力と曲率の関係として、次式が仮定される。

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x_i} = \frac{1}{4\eta_c} m_{i3} \quad (5.14)$$

ここで、 $\eta_c$  は曲率弾性係数 (elastic modulus of curvature) と呼ばれる定数である (コセラ弾性体では、回転が巨視的回転  $\Phi$  に制限されていることに注意する)。 $\eta_c$  をせん断剛性率  $\mu$  で割れば、長さの二乗の次元を持つ  $l_c^2$  が得られる (Mindlin(1963))。

$$l_c^2 = \frac{\eta_c}{\mu} \quad (5.15)$$

$l_c$  は偶応力理論に特有のパラメータであり、偶応力の効果を見るうえで非常に重要である。土石流のように、粒子の集合体が速い流れの場を作るとき、各粒子は高速で回転している。このような高速で回転する粒子が互いに衝突を繰り返せば、偶力が接点を介して伝達される。このことから、偶応力は、高速に流れている粒状体で重要な働きをするものと考えられている。このように、高速で流れる粒状体の運動を考える場合、偶応力への配慮は既に定着している (Onishi(1978))。しかし、通常のせん断破壊のような遅い挙動を対象にする分野では、偶応力への正しい評価が普及しているとは言い難い。しかし、近年この分野においても、偶応力への関心は急速に高まっている。例えば、せん断帯の形成には偶応力が重要な効果を及ぼすと考えられ、コセラ弾性理論では偶応力と曲率の関係として、すでに述べた次式が用いられる (Mühlhaus and Valdoulakis(1987))。

$$\frac{\partial \phi^c}{\partial x_i} = \frac{1}{4\eta_c} m_{i3} \quad (5.16)$$

ここで注意すべきは、曲率が巨視的回転ではなく、粒子の回転  $\phi^c$  によって定義されている点である。個別要素法を用いた数値シミュレーションの結果でも、せん断中粒子の回転は活発で、粒状体の変形に大きく貢献するといわれている。最近の研究成果を次に要約しておく。

1. 偶応力を取り入れた理論には、長さの次元を持つパラメータが必ず含まれる。このような理論によって初めて、せん断帯の方向だけでなくその幅についても予測が可能となる (Mühlhaus and Valdoulakis(1987))。
2. せん断帯の粒子構造の解析から、偶応力の存在が示唆されている (Mühlhaus and Valdoulakis(1987))。
3. 剛体要素法による数値シミュレーションによっても、せん断帯中の粒子の回転量の分布は、偶応力理論と整合的である (Bardet and Proubet(1991))。

### 5.2.2 有限要素定式化

この節では、コセラ連続体に対する有限要素定式化を示す。コセラ連続体理論においては、物体点の幾何学的（運動学的）状態変数として、位置だけでなく、回転量（ $\phi_i^c$ ）も変形量に含んでいる。回転量を考慮したことで次のような回転速度 (spin) が物質点に存在する。

$$\omega_i^c = \dot{\phi}_i^c \quad (5.17)$$

この角速度から慣性テンソル  $I_{ij}$  を介して生じる、新たな角運動量  $\eta_i$

$$\eta_i = I_{ij} \omega_j^c \quad (5.18)$$

を角運動量保存則に考慮しなければならない。この時、物質点における回転量を生ぜしめるようなトルク  $r_i$  を表面力  $t_i$  と同様に、また物体偶力  $\mu_i$  を物体力  $g_i$  と同様に考慮する必要がある。

したがって、運動量保存則より

$$\int_V \rho v_i dV = \int_{\partial V} t_i dS + \int_V \rho g_i dV \quad (5.19)$$

また、角運動量保存則より、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho e_{ijk} x_j v_k dV + \frac{D}{Dt} \int_V \eta_i \rho dV = \\ \int_{\partial V} e_{ijk} x_j T_{pk} n_p dS + \int_V \rho e_{ijk} x_j g_k dV + \int_{\partial V} m_{ji} n_j + \int_V \rho \mu_i dV = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

と書ける。ここで、 $\rho$  は密度を表す。運動量保存則は通常の連続体におけるそれと変わるところはない。運動量保存則(5.19)式にCauchyの応力定理 ( $t_i = \sigma_{ji} n_j$ ) を用いて部分積分すると、局所形として次の平衡条件を得る。

$$\rho v_i = \sigma_{ji,j} + \rho g_i \quad (5.21)$$

また、角運動量保存則(5.20)式に偶応力テンソル  $m_{ij}$  ( $r_i = m_{ji} n_j$ ) を導入して部分積分し、(5.21)式を代入すると、局所形として次式を得る。

$$\rho \dot{\eta}_i = m_{ji,j} + \rho \mu_i - e_{ijk} \sigma_{jk} \quad (5.22)$$

速度や角運動量の時間的変化が無視できる場合、(5.21)式、(5.22)式の左辺は0と考えられる。よって、(5.21)式、(5.22)式は、

$$\sigma_{ji,j} + \rho g_i = 0 \quad (\text{運動量保存則の平衡条件}) \quad (5.23)$$

$$m_{ji,j} + \rho \mu_i + e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (\text{角運動量保存則の平衡条件}) \quad (5.24)$$

(5.24)式において、偶応力勾配や物体偶力がともに作用しなければ、通常の連続体 ( $e_{ijk}\sigma_{jk} = 0$ ) となら変わらない。以下平面ひずみ解析を行うために、二次元における変形量  $u$ 、応力  $\sigma$ 、ひずみ  $\varepsilon$  の各成分を次のように書き下す (これにより一般性を失うことはない)。

$$u = \{u_1, u_2, \phi_3^c\}^T \quad (5.25)$$

$$\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, m_{31}, m_{32}\}^T \quad (5.26)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \kappa_{31}, \kappa_{32}\}^T \quad (5.27)$$

$\kappa_{ij}$  : 曲率

運動量、各運動量保存則の平衡条件、および運動学的条件をまとめて書けば以下のようになる。

$$L^T \sigma = 0 \quad (5.28)$$

$$\varepsilon = Lu \quad (5.29)$$

ただし、二次元平面における行列  $L$  は次のような演算子である。

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

(5.29)式は、運動量、角運動量保存則から決まるので、運動学的条件は行列  $L$  を通じて、(5.30)式のように定義される。支配式と境界条件を列記すると、以下のようになる。

運動量保存則の平衡条件

$$\sigma_{ji,j} + \rho g_i = 0 \quad in \ V \quad (5.31)$$

角運動量保存則の平衡条件

$$m_{ji,j} + \rho \mu_i + e_{ijk}\sigma_{jk} = 0 \quad in \ V \quad (5.32)$$

運動学的条件

$$\varepsilon_{ji} = u_{i,j} - e_{ijk}\phi_k^c, \quad \kappa_{ij} = \phi_{i,j}^c \quad (5.33)$$

弾性コセラ体の構成関係

$$\kappa_{ij} = \kappa_{ij}^e + \kappa_{ij}^{vp}, \quad \sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e, \quad m_{ij} = \mu_l^2 \kappa_{ij}^e \quad (5.34)$$

境界条件

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_u, \quad \phi_i^c = \bar{\phi}_i^c \quad \text{on } S_\phi \quad (5.35)$$

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } S_\sigma, \quad m_{ji}n_j = \bar{r}_i \quad \text{on } S_m \quad (5.36)$$

ここで、

$$S = S_u \cup S_\sigma, \quad S = S_\phi \cup S_m$$

$$0 = S_u \cap S_\sigma, \quad 0 = S_\phi \cap S_m$$

初期条件

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}|_{t=0} \quad \text{in } V \quad (5.37)$$

有効応力の原理 (圧縮を正として)

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u_w \delta_{ij} \quad (5.38)$$

ここで、

$\sigma_{ij}$  : Cauchy 応力テンソル     $g_i$  : 物体力     $\delta_{ij}$  : クロネッカーのデルタ  
 $m_{ij}$  : 偶応力テンソル     $\mu_i$  : 物体偶力ベクトル     $e_{ijk}$  : 交代記号  
 $\varepsilon_{ij}$  : ひずみテンソル     $\phi_i^c$  : コセラ回転ベクトル     $D_{ijkl}$  : 弾性係数テンソル  
 $l_c$  : 特性長さ     $n_i$  : 垂直ベクトル  
 $\kappa_{ij}$  : 曲率テンソル     $\sigma'_{ij}$  : 有効応力テンソル     $u_w$  : 間隙水圧  
 である。

有限要素法を用いて境界値問題を解くためには、(5.32)式、(5.33)式に対する弱形式を求める必要がある。そのため任意の仮想変位と仮想回転量 $\delta u_i$ 、 $\delta \phi_i$ を用いる。仮想仕事の原理より(5.32)式に( $\delta u_i = 0$  on  $S_u$ )、(5.33)式に( $\delta \phi_i = 0$  on  $S_\phi$ )を乗じて、その両方を領域 $V$ で積分する。

$$\int_V \delta u_i (\sigma_{ji,j} + \rho g_i) dV + \int_V \delta \phi_i (m_{ji,j} + \rho \mu_i - e_{ijk} \sigma_{jk}) dV = 0 \quad (5.39)$$

付録 (5-1) に示す誘導により、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_V \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV + \int_V e_{ijk} \sigma_{jk} \delta \phi_i dV + \int_V m_{ij} \delta k_{ij} dV \\ & = \int_V \rho g_i \delta u_i dV + \int_V \rho \mu_i \delta \phi_i dV + \int_{S_\sigma} \delta u_i \bar{t}_i dS_\sigma + \int_{S_m} \delta \phi_i \bar{r}_i dS_m \end{aligned} \quad (5.40)$$

↓

( $\varepsilon_{ji} = u_{i,j} + \phi_k e_{kij}$  より)

$$\begin{aligned} & \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V m_{ij} \delta k_{ij} dV + \int_V p_w \delta \varepsilon_{kk} dV \\ & = \int_V \rho g_i \delta u_i dV + \int_V \rho \mu_i \delta \phi_i dV + \int_{S_\sigma} \delta u_i \bar{t}_i dS_\sigma + \int_{S_m} \delta \phi_i \bar{r}_i dS_m \end{aligned} \quad (5.41)$$



一方、間隙水については、通常の式や条件がそのまま成立する。

水の質量保存則 (圧縮を正として)

$$\dot{\epsilon}_{kk} = v_{i,i} \quad (5.42)$$

ダルシー則

$$v_i = -kh_{,j} \quad (5.43)$$

ここで、 $v_i$ は間隙水の平均流速ベクトル、 $k$ は透水係数、 $h_{,j}$ は動水勾配を表す。 $h$ は $h = u_w/\gamma_w + z$ で表される全水頭である。

境界条件

$$v_i = \bar{v}_i \quad \text{on } S_v \quad (5.44)$$

ここで水の質量保存則(5.43)式を、境界 $S$ を持つ任意の要素の領域 $V$ で積分すると、

$$\int_V \dot{\epsilon}_{kk} dV = \int_S v_i n_i dS \quad (5.45)$$

一方、(5.44)式のダルシー則から(5.46)式は、

$$\int_V \dot{\epsilon}_{kk} dV = -k_{ij} \int_S h_{,j} n_i dS \quad (5.46)$$

となる。ここに $n_i$ は境界に立てた単位法線ベクトル成分である。(5.47)式は赤井・田村(1978)にならうと、左辺は、

$$\dot{\epsilon}_{kk} = \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{u}}^N \quad (5.47)$$

$$\mathbf{B}_v = \int_V \mathbf{C} dV \quad (5.48)$$

により空間的に離散化され、

$$\int_V \delta \epsilon_v dV = \mathbf{B}_v^T \delta \mathbf{u}^N \quad (5.49)$$

となる。ここに、 $\epsilon_v$ は体積ひずみ、 $\mathbf{u}^N$ は節点変位ベクトルである。一方、平面問題の場合右辺は、図5.3に示されるような要素 $M$ を取り込む要素を考える。全水頭が要素の重心で代表されており、鉛直透水係数、水平透水係数が等しいと仮定すれば、(時間 $t$ から時間 $t + \Delta t$ までの $\Delta t$ における間隙水の流入量が等しいとすれば) 差分法により、

$$\begin{aligned} k \Delta t \int_S h_{,j|t+\Delta t} n_i dS &= \Delta t \sum_{i=1}^4 k \left( \frac{h_{|t+\Delta t} - h_{i|t+\Delta t}}{l_i} \right) b_i \\ &= \alpha \gamma_w h_{|t+\Delta t} - \sum_{i=1}^4 \alpha_i \gamma_w h_{i|t+\Delta t} \end{aligned} \quad (5.50)$$

を得る。ただし、 $\alpha = \Delta t \sum_i^4 k_i^b$  ,  $\alpha_i = \Delta t \sum_i^4 k_i^b$  である。

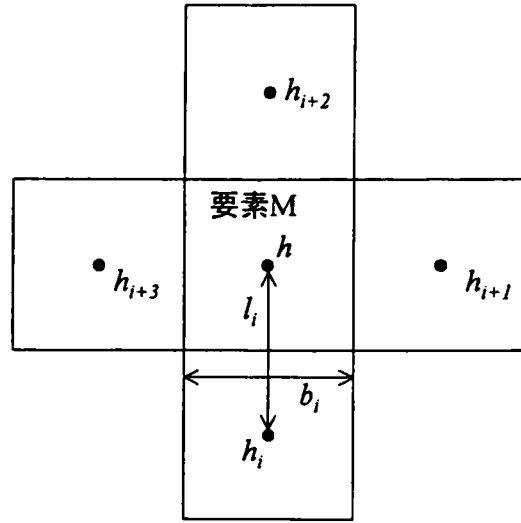


図 5.3 要素  $M$  を囲む要素と水頭の代表位置

以上、(5.49) 式 (5.50) 式により、最終的に水の連続式に対する要素に対する離散化された方程式が、

$$\mathbf{B}_v^T \Delta u^N + \alpha \gamma_w h_{|t+\Delta t} - \sum_i^4 \alpha_i \gamma_w h_{n|t+\Delta t} = 0 \quad (5.51)$$

と求まる。このようにして得られた離散化連立方程式を代数的に解けばよい。以下に結果のみを示すが、偶応力の効果が考慮されたことにより節点あたりの自由度が一つ増加することを除けば、連立方程式 (5.52) 式は通常の変位に対するそれと変わらない。

$$\begin{bmatrix} K & K_v \\ K_v^T & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u^N \\ \gamma_w h_{n|t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F - K_v \gamma_w h_{|t} \\ \Delta q + (1-\theta) A \gamma_w h_{|t} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

ここに、 $\mathbf{u} = \mathbf{N} u^N$  ,  $\mathbf{h} = \mathbf{N}_h \mathbf{h}$  ,  $h_{,i} = \mathbf{B}_h \mathbf{h}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = \mathbf{B}_v \mathbf{u}$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

$$\mathbf{K}_h = \int_v \mathbf{B}_h^T k \mathbf{B}_h dV$$

$$\mathbf{K}_v = \int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{N}_h dV$$

$$\mathbf{A} = \Delta t \mathbf{K}_h$$

$$\Delta F = \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS$$

$$\Delta \mathbf{q} = \Delta t \int_{S_v} \mathbf{N}_h^T \bar{\mathbf{q}} dS$$

$$\gamma_w h = (1 - \theta) A \gamma_w h|_t + \theta \gamma_w h_n|_{t+\Delta t}$$

ここで、 $\theta = 0$ は前進差分、 $\theta = 1$ では後退差分、また $\theta=1/2$ は中央差分に対応する。 $h$ は要素全水頭ベクトルである。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \mu_c & \mu - \mu_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_c & \mu + \mu_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu l_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu l_c^2 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

ここで、コセラせん断係数 $\mu_c$ は、2次元の粒子運動から $\mu_c$ を決定しているSchafer(1962)やMühlhausら(1990)にならい $\mu_c = 2 \times \mu$ とした。

Lamé定数 $\lambda$ 、 $\mu$ は、ヤング率 $E$ 、Poisson比 $\nu$ を用いて、それぞれ次式のようになる。

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.54)$$

### 5.3 弾粘塑性コセラ体理論への拡張

#### 5.3.1 弾粘塑性構成式

本研究で用いる粘土の構成式は、既に提案されている足立・岡(1982)の弾粘塑性構成式を拡張したものである。足立・岡の式は、Cam-ClayモデルにPerzyna(1963)らによる粘塑性理論を導入して、時間依存性をも表現できる正規圧密粘土の構成式を導いている。さらに、相対応力比 $\bar{\eta}^*$ を適用し、異方圧密された粘土に対しても拡張している。ここでは、まず足立・岡の構成式について述べる。

基本仮定として、全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は、弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ と粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ の和として与えられるとする。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} + \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (5.55)$$

静的降伏関数： $f_S$ は次式で表される。

$$f_S = \kappa_S \quad (5.56)$$

$$f_S = \frac{\bar{\eta}_{(0)}^*}{M^*} + \ln \left( \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{my(0)}} \right) \quad (5.57)$$

ここで静的とは、2次圧密の終了状態を表し、動的とは、それ以外の状態を表す。そして、それぞれ指標(s)、(d)を用いた。また、(0)は、その値が異方圧密終了時であることを示す。

ここで、

$\kappa_s$  : 硬化パラメータ

$\bar{\eta}^*_{(0)}$  : 相対応力比  $\bar{\eta}^*_{(0)} = \left\{ \left( \eta^*_{ij} - \eta^*_{ij(0)} \right) \left( \eta^*_{ij} - \eta^*_{ij(0)} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$

$$\eta^*_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sigma'_m}, \quad \eta^*_{ij(0)} = \frac{S_{ij(0)}}{\sigma'_{m(0)}}$$

$M^*$  : 限界状態での  $\frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma'_m}$  の値

$\sqrt{2J_2} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$  ( $S_{ij}$  の第 2 不変量)

$S_{ij}$  : 偏差応力 ( $S_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma'_m \delta_{ij}$ ,  $S_{ij(0)} = \sigma'_{ij(0)} - \sigma'_{m(0)} \delta_{ij(0)}$ )

$\delta_{ij}$  : クロネッカーのデルタ

$\sigma'_m$  : 平均有効応力 ( $\sigma'_m = \frac{1}{3}(\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33})$ )

$\sigma'_{m(0)}$  : 単位平均有効応力

ひずみ硬化パラメータ  $\kappa_s$  は次式で与えられる。

$$\kappa_s = \ln \left( \frac{\sigma'_{my}}{\sigma'_{my(0)}} \right) \quad (5.58)$$

(5.58) 式の右辺について次の関係がある。

$$\ln \left( \frac{\sigma'_{my}}{\sigma'_{my(0)}} \right) = \frac{1+e}{\lambda-\kappa} v^p \quad (5.59)$$

ここで、

$\lambda$  :  $e \sim \ln \sigma'_m$  曲線の正規圧密時の傾き

$\kappa$  :  $e \sim \ln \sigma'_m$  曲線の膨潤時の傾き

$v^p$  : 粘塑性体積ひずみ

$\sigma'_{my}$  : 圧密降伏応力

$\sigma'_{my(0)}$  : 圧密降伏応力の初期値

である。

Perzyna の弾粘塑性理論では、静的降伏関数:  $F$  (超過応力関数) = 0、動的降伏関数:  $f$  を次式で導入する。

$$F = \frac{f - \kappa_s}{\kappa_s} \quad (5.60)$$

ここで  $\kappa_s$  は、ひずみ硬化パラメータである。

Perzyna の理論は、 $F > 0$  の時、 $F$  が静的降伏関数からの超過応力に対応するために、超過応力型の理論と呼ばれている。

粘塑性ひずみ速度テンソル  $\dot{\epsilon}^{vp}_{ij}$  は、 $\sigma'_{ij}$  を有効応力テンソルとして次式で表される。

$$\dot{\epsilon}^{vp}_{ij} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (5.61)$$

$$\gamma \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & , F \leq 0 \\ \gamma \langle \Phi(F) \rangle & , F > 0 \end{cases}$$

ここで、 $\gamma \langle \Phi(F) \rangle$  ( $\gamma$  : 粘性係数)として足立・岡(1982)は実験より次式を与えている。

$$\gamma \langle \Phi(F) \rangle = M^* \sigma'_m C \exp \left\{ m' \left( \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{me}} + \frac{\bar{\eta}^*}{M^*} - \frac{1+e}{\lambda-\kappa} v^p \right) \right\} \quad (5.62)$$

ここで、パラメータは以下のように定義される。

$\sigma'_{me}$  : 初期圧密圧力

$C, m'$  : 粘塑性パラメータ

$\gamma$  : 粘性係数

$C, m'$ には、以下に示す関係がある。初期粘塑性体積ひずみ速度を $\dot{\epsilon}_{kk0}^{vp}$ とすると、

$$C = \frac{\dot{\epsilon}_{kk0}^{vp}}{M^*} \quad (5.63)$$

2次圧密速度を $\alpha$ とすると、

$$m' = \frac{\lambda - \kappa}{(1+e)\alpha} \quad (5.64)$$

$$f = \frac{\bar{\eta}_{(0)}^*}{M^*} + \ln \left( \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{my}} \right) = 0 \quad (5.65)$$

$\bar{\eta}_{(0)}^*$  : 相対応力比

$M^*$  : 限界状態(Critical State)での $\frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma'_m}$ の値

$\sigma'_m$  : 平均有効応力

$\sigma'_{my}$  : 初期圧密応力

(5.62)式に、連鎖則を用いると、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_m} \frac{\partial \sigma'_m}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial S_{kl}} \frac{\partial S_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (5.66)$$

それぞれの成分を求めると

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_m} = \frac{1}{M^*} \left( -\frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \frac{S_{kl}}{\sigma_m'^2} \right) + \frac{1}{\sigma'_m} \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial \sigma'_m}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_{kl}} = \frac{1}{M^*} \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \frac{1}{\sigma_m'^2} \quad (5.69)$$

$$\frac{S_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} = \delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (5.70)$$

よって、(5.66)式は次式となる。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{3\sigma_m'} \delta_{ij} - \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{3M^* \bar{\eta}_{(0)}^* \sigma_m'^2} S_{kl} \delta_{ij} + \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{M^* \bar{\eta}_{(0)}^* \sigma_m'} \quad (5.71)$$

以上より、(5.62)式は次式となる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \left( \frac{1}{3\sigma'_m} \delta_{ij} - \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{3M^* \bar{\eta}_{(0)}^* \sigma'^2_m} S_{kl} \delta_{ij} + \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{M^* \bar{\eta}_{(0)}^* \sigma'_m} \right) \quad (5.72)$$

一方、ひずみ速度テンソルの弾性成分は、次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{\kappa}{(1+e)\sigma'_m} \dot{\sigma}'_m \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (5.73)$$

よって、全ひずみ速度テンソルは(5.72)式、(5.73)式より

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} = & \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{k}{(1+e)\sigma'_m} \dot{\sigma}'_m \frac{1}{3} \delta_{ij} \\ & + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \left( \frac{1}{3\sigma'_m} \delta_{ij} - \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{3M^* \bar{\eta}_{(0)}^* \sigma'^2_m} S_{kl} \delta_{ij} + \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{M^* \bar{\eta}_{(0)}^* \sigma'_m} \right) \end{aligned} \quad (5.74)$$

となる。

### 5.3.2 弾粘塑性コセラ体理論

足立・岡(1982)によって提案されている粘塑性モデルでは、

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (5.62)$$

ここで、 $\gamma \langle \Phi(F) \rangle$ は以下のように定義される。

$$\gamma \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & (F \leq 0 \text{ のとき}) \\ \gamma \langle \Phi(F) \rangle & (F > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なお、 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ は、粘塑性速度ひずみテンソル、 $\sigma'_{ij}$ は有効応力テンソル、 $f$ は動的降伏関数、 $\Phi$ はひずみ速度依存性を表現する材料関数、 $F$ は動的降伏関数、 $\langle \cdot \rangle$ は $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(|x| + x)$  (MaCauley's bracket)である。また、弾粘塑性構成式は、次式を用いる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} + \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (5.56)$$

ここで、

$$f = \frac{\bar{\eta}_{(0)}^*}{M^*} + \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{my}} = 0 \quad (5.66)$$

$$\gamma \langle \Phi(F) \rangle = CM^* \sigma'_m \exp \left\{ m' \left( \frac{\bar{\eta}_{(0)}^*}{M^*} + \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{me}} - \frac{1+e}{\lambda - \kappa} v^{vp} \right) \right\} \quad (5.63)$$

そして、

$$\bar{\eta}_{(0)}^* = \sqrt{(\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*)(\eta_{ij}^* + \eta_{ij(0)}^*)} \quad (5.76)$$

ここで、 $C$ 、 $m'$ は粘塑性パラメータ、 $M^*$ は破壊パラメータ、 $\bar{\eta}^*$ は応力比の不変量、 $\lambda$ は圧縮指数、 $\kappa$ は膨張指数、 $e$ は間隙比である。次に、上記のモデルを偶応力と回転の自由度を持ったコセラ連続体に拡張する。偏差応力の第2不変量 $J_2$ を与えるスカラーは、均等径を持った2次元粒状体では、次のように表現できる(Mühlhaus and Vardoulakis(1987),Mühlhaus(1989))。

$$J_2 = \frac{3}{4}S_{ij}S_{ij} - \frac{1}{4}S_{ij}S_{ji} + \frac{1}{8l_c^2}m_{ij}m_{ij} \quad (5.77)$$

ここで、 $m_{ij}$ は偶応力テンソルである。 $m_{ij} = 0$ のとき、応力の対称性から $S_{ij} = S_{ji}$  ( $i \neq j$ )より $S_{ij} = S_{ij}$ となり、(5.76)式は $2J_2 = S_{ij}S_{ij}$ として成立する。

(5.77)式の拡張を用いて、(5.76)式で与えた $\bar{\eta}^*$ を拡張してみる。地盤の初期状態での偶応力 $m_{ij}$ はゼロと仮定すると、

$$\bar{\eta}_{(0)}^* = \left\{ \frac{3}{4} (\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*) (\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*) - \frac{1}{4} (\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*) (\eta_{ji}^* - \eta_{ji(0)}^*) + \frac{1}{lc^2} \frac{m_{ij}}{\sigma_m'} \frac{m_{ij}}{\sigma_m'} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.78)$$

(5.78)式において $m_{ij} = 0$ とすると、(5.78)式は(5.76)式と一致する。以上の拡張によって、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ および粘塑性曲率速度 $\dot{\kappa}_{ij}^{vp}$ は、以下のように求まる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} \quad (5.79)$$

$$\dot{\kappa}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial m_{ij}} \quad (5.80)$$

(5.79)式、(5.80)式を求めるためには、 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'}$ および $\frac{\partial f}{\partial m_{ij}}$ の演算が必要である。これらを計算すると以下のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_m'} \frac{\partial \sigma_m'}{\partial \sigma_{ij}'} + \frac{\partial f}{\partial S_{kl}} \frac{\partial S_{kl}}{\partial \sigma_{ij}'} \quad (5.81)$$

ここで、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_m'} = \frac{-1}{2M^*\bar{\eta}^*} \left( \frac{3}{2}\bar{\eta}_{ij}^* \frac{S_{ij}}{\sigma_m'^2} + \frac{1}{4}\bar{\eta}_{ij}^* \frac{S_{ji}}{\sigma_m'^2} + \frac{1}{4}\bar{\eta}_{ji}^* \frac{S_{ij}}{\sigma_m'^2} + \frac{4}{lc^2\sigma_m'^3} m_{ij}m_{ij} \right) + \frac{1}{\sigma_m'} \quad (5.82)$$

$$\frac{\partial \sigma_m'}{\partial \sigma_{ij}'} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (5.83)$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_{kl}} = \frac{1}{4M^*\bar{\eta}^*\sigma_m'} (3\bar{\eta}_{kl}^* + \bar{\eta}_{lk}^*) \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial S_{kl}}{\partial \sigma_{ij}'} = \delta_{ki}\delta_{lj} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij} \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_{ij}} = \frac{2}{M^*\sigma_m'^2} \frac{1}{\bar{\eta}_{(0)}^*} \frac{m_{ij}}{lc^2} \quad (5.86)$$

また、 $\bar{\eta}_{ij}^* = \eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*$ である。

## 5.4 弾粘塑性コセラ体理論を用いた有限要素解析

### 5.4.1 単純せん断のシミュレーション

本節では、コセラ連続体理論を導入した弾粘塑性モデルにより、簡単な初期値境界値問題を設定した。コセラ連続体理論における重要な特性長さのパラメータ $l_c$ を変化させ、その変化が解析結果に与える影響を検討した。弾粘塑性コセラモデルの基本特性を把握するために、図5.4のような要素供試体を用いて、飽和粘土をせん断変形させるシミュレーションを行った。

せん断変形させるために、図5.4のように供試体上面左端に強制変位を与えた。要素は $5 \times 5$ の正方形メッシュを用い、境界は非排水とした。ただし、供試体内部要素間の間隙水の移動は可能とした。有限要素メッシュ下部節点の回転を拘束し、それ以外の節点の回転拘束していない。飽和粘土の材料定数は、大阪沖積粘土を用いた室内試験より得られたパラメータを適用した(表5.1)。

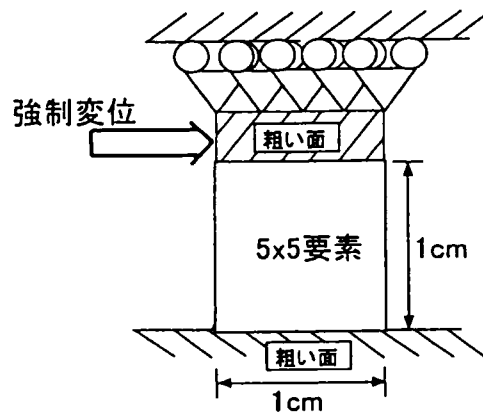


図5.4 境界条件

コセラ連続体理論導入の効果を把握するために、特性長さのパラメータ $l_c$ を3通り ( $l_c = 0\text{cm}$ :コセラ連続体の効果を考慮しない場合、 $1\text{cm}$ 、 $5\text{cm}$ )に変化させた。また、コセラ連続体理論と変形速度効果の関係を把握するために、強制変位速度を2通り ( $0.1\text{cm}/\text{min}$ 、 $0.001\text{cm}/\text{min}$ )に変化させ解析を行った。解析ケースを表5.2に示した。

表5.1 解析に用いた弾粘塑性材料定数

粘塑性パラメータ: $m'$	21.5	粘塑性パラメータ: $c$	$4.5 \times 10^{-8} \text{ 1/sec}$
水平方向の透水係数: $k_x/\gamma_w$	$1.16 \times 10^{-12} \text{ cm/sec}$	破壊応力比: $M^*$	1.05
鉛直方向の透水係数: $k_y/\gamma_w$	$1.16 \times 10^{-12} \text{ cm/sec}$	先行圧密応力: $\sigma'_{vo}$	$588 \text{ kPa}$
先行圧密応力時の応力比: $K_0$	1.00	現在の応力: $\sigma'_{vi}$	$588 \text{ kPa}$
現在の応力比: $K_{0i}$	1.00	圧縮指数: $\lambda$	0.372
膨張指数: $\kappa$	0.054	せん断弾性係数: $G$	$12945.8 \text{ kPa}$
初期間隙比: $e_0$	1.28		



表5.2 解析ケース

	$lc = 0.0cm$	$lc = 1.0cm$	$lc = 5.0cm$
変位速度 $0.1cm/min$	Case 1	Case 2	Case 3
変位速度 $0.001cm/min$	Case 4	Case 5	Case 6

## 5.4.2 解析結果

本節では、5.3.1節で行った数値解析の結果を表す。図5.5に、Case1、Case2、Case3のせん断応力～せん断ひずみ関係を示す。このときの強制変位速度は $0.1cm/min$ である。せん断応力は、供試体上部の節点反力の総和を上部端面の長さで除したものであり、せん断ひずみは供試体上部左端節点の変位を用いて示している。図より明らかなように、せん断ひずみ10%までは、 $lc = 0cm$ から $lc = 1cm$ の値では、順にせん断応力が大きくなっていることがわかる。

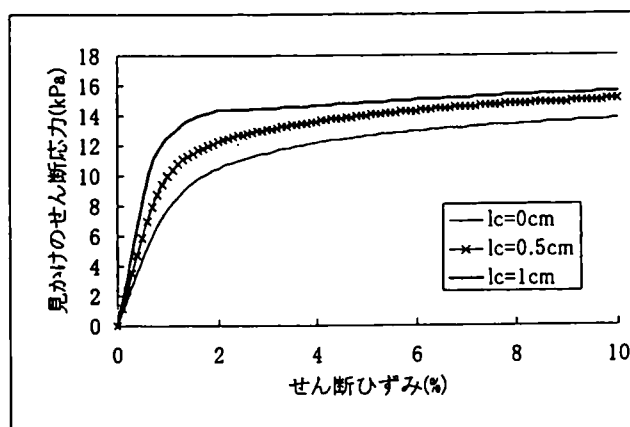
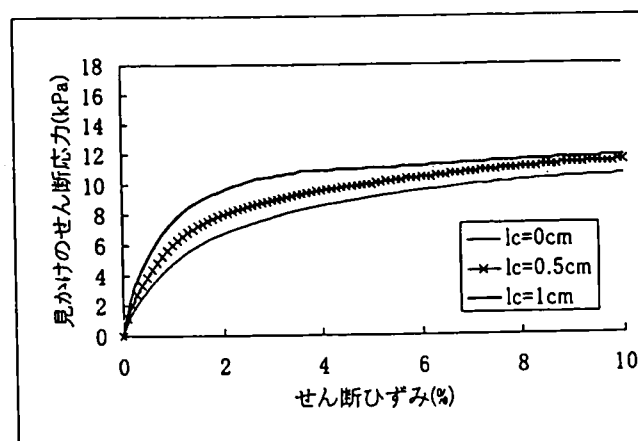
図5.5 せん断応力～せん断ひずみ関係(強制変位速度 $0.1cm/min$ )

図5.6に、Case4、Case5、Case6のせん断応力～せん断ひずみ関係を示す。このときの強制変位速度は $0.001cm/min$ である。図5.5の傾向と同じように、 $lc$ が大きくなると、せん断応力も大きくなっている。2つの図から、強制変位速度によらず、特性長さ $lc$ は、その値を大きくすると、粘土供試体のせん断応力を大きくしている。

図5.6 せん断応力～せん断ひずみ関係(強制変位速度 $0.001cm/min$ )

さらに、特性長さ  $lc$  と変形速度の関係を明らかにするために、 $lc = 0\text{cm}$  から  $lc = 300\text{cm}$  の値で同じ数値計算を行った。 $lc = 0$  のときのせん断ひずみ3%時のせん断応力で、 $lc = 0\text{cm}$  から  $lc = 2\text{cm}$  でのせん断ひずみ3%時のせん断応力を除して得られた、基準化した大きさの値と、特性長さ  $lc$  の関係を図5.7に示した。

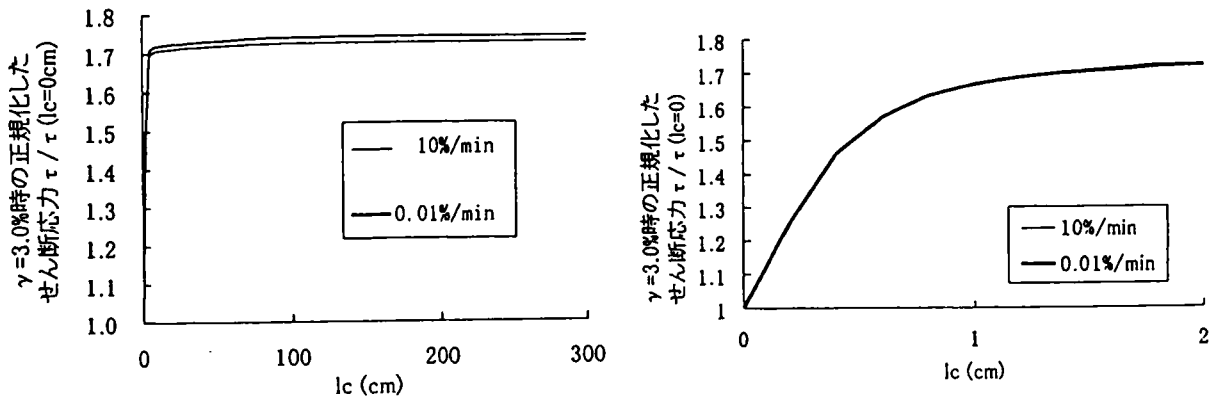


図5.7 基準化したせん断応力による  $lc$  の効果

図から、強制変位速度  $10\text{cm}/\text{min}$ 、 $0.01\text{cm}/\text{min}$  の二つの関係がほぼ一致しており、 $lc$  の効果は速度に依存していない。また、 $lc = 10\text{cm}$  以上の  $lc$  では、基準化したせん断応力はほとんど変化していない。

#### 5.4.3 まとめ

前節の解析結果より以下のことが示された。

飽和粘土供試体を用いた、せん断変形の数値解析では、

- 見かけのせん断応力-せん断ひずみ関係から、特性長さ  $lc$  が大きくなるとせん断応力の値も大きくなる。(図5.5、図5.6)
- せん断応力は強制変位速度によって変化するが、コセラ連続体理論を用いた場合の特性長さ  $lc$  の影響は、変位速度に依存しない。(図5.7)
- 特性長さ  $lc$  の影響は、 $0\text{cm}$  から徐々に大きくすると、それとともにせん断応力も大きくなるが、 $lc$  がある値以上になるとせん断応力は変化しない(図5.7)。

#### 5.4.4 盛土の変形解析

盛土を構築した場合の地盤の変形を予測する研究において、粒子の回転運動を考慮するために偶応力を導入した研究が報告されている。Yoshidaらの弾塑性コセラモデルを用いた有限要素解析(1997)

では、偶応力を考慮しない場合と、考慮した場合について、数値解析結果からその効果を鉛直沈下量などから評価している。その結果は以下のとおりであった。

1. 偶応力を考慮するしないにかかわらず、盛土を構築した時に回転量が一番大きいのは、盛土のり尻部の地表面である。
2. 特性長さを大きくすると、1.で述べた回転量が押さえらる。
3. 同じ荷重条件の場合において、 $lc = 0$ （偶応力を考慮しない場合）に比べて $lc$ を大きくした方が盛土中心部の鉛直沈下がおさえられる。

本研究では、前節において拡張した特性長さ $lc$ の表現できるコセラ連続体理論を導入した弾粘塑性モデルを用いて、数値解析を行う。特に、側方変位に着目して、盛土を構築したとき基礎粘土地盤の挙動を有限要素法を用いた数値解析によって詳しく調べる。

ここでは、岡らが行った解析(1991,1992)をもとに基礎粘土地盤の7層のうちの地表面にある第1層は通常乾燥したクラスト層（弾性）としてモデル地盤を仮定して、有限要素解析を行った。図5.8に採用したモデル地盤の有限要素メッシュ図を示す。軟弱地盤の厚さは13.8mであり、その下は堅固な地盤で支持されている。本研究では、盛土の盛立て速度は0.3m/dayで解析を行い、盛土材料の単位体積重量は、 $1.857\text{tf/m}^3$ であり、弾性体と仮定した。また、クラスト層にもコセラ弾性体理論を適用させた。図5.9は、解析メッシュの層序を示している。本研究では、コセラ特有の特性長さ $lc$ を考慮してその値を変化させ、基礎である地盤の挙動を検討する。

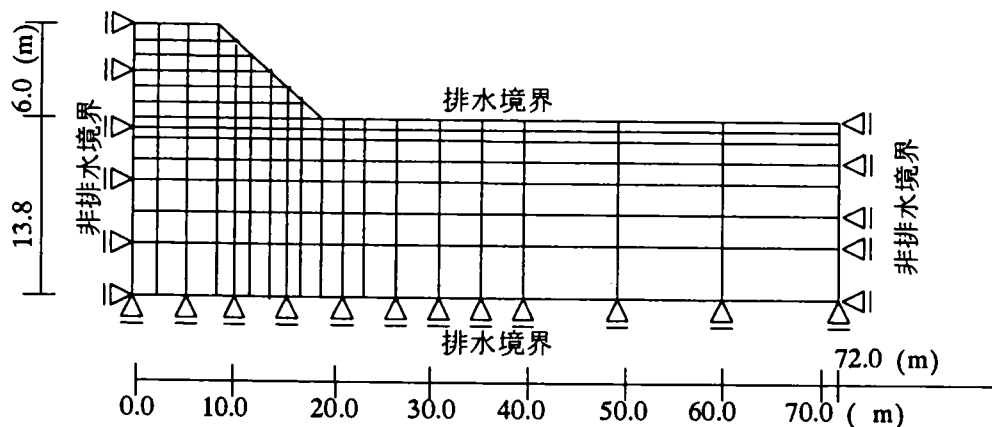


図5.8 有限要素メッシュと排水条件（単位：m）

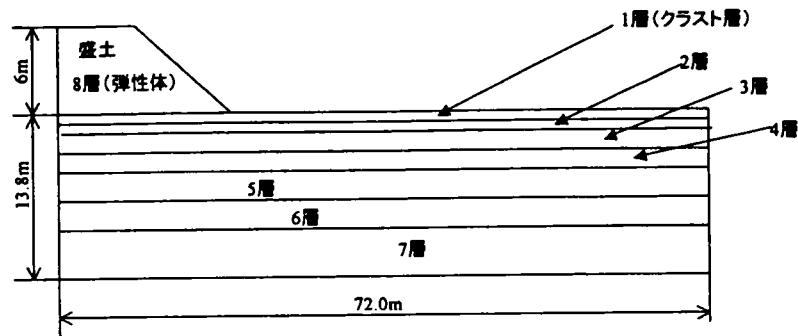


図5.9 モデル地盤の層序図

解析に用いた材料定数を表5.3、表5.4、表5.5に示す。表5.3は弾粘塑性材料で、表5.4は弾性材料、表5.5は盛土の材料定数であり、各層ごとに従来の研究(Okaら(1991,1992))を参考にパラメータを選定した。なお、盛土材料にはコセラ連続体理論は適用させていない。

表5.3 弾粘塑性材料定数

層番号	2	3	4	5	6	7
粘塑性パラメータ $m'$	17.8					
粘塑性パラメータ $C$	$0.14 \times 10^{-6} (1/sec)$					
破壊応力比 $M^*$	0.98					
透水係数 $k_x, k_y/\gamma_w$	$0.91 \times 10^{-3} (m/min)$					
先行圧密応力 $\sigma'_{vo} (tf/m^2)$	5.82	4.69	7.2	9.0	14.0	18.0
現在の応力 $\sigma'_{vi} (tf/m^2)$	1.33	1.84	2.56	3.57	4.59	7.14
圧縮指数 $\lambda_0$	0.523	0.0719	0.0387	0.246	0.0104	0.008
圧縮指数 $\lambda_1$	1.0	1.14	1.04	0.56	0.409	0.409
圧縮指数 $\lambda_2$	0.363	0.495	0.411	0.282	0.175	0.1
膨張指数 $\kappa$	0.0122	0.0149	0.0126	0.0126	0.0108	0.0108
ポアソン比 $\nu$	0.3					
初期間隙比 $e_0$	1.7	2.3	1.8	1.8	1.4	1.4
$e \sim \log k$ 関係の勾配 $\lambda_k$	0.85	1.15	0.9	0.9	0.7	0.7

表5.4 弾性材料定数

層番号	1
深度(m)	0 ~ 0.66
盛土中央部からの距離(m)	15 ~ 72
ラメの定数 $\lambda (tf/m^2)$	179.4
ラメの定数 $\mu (tf/m^2)$	89.7
現在の有効土かぶり圧 $\sigma_v (tf/m^2)$	1.02
静止土圧係数 $K_0$	0.8
透水係数 $k_x, k_y/\gamma_w (m/min)$	$0.907 \times 10^{-3}$
初期間隙比 $e_0$	1.1
$e \sim \log k$ 関係の勾配 $\lambda_k$	0.55

表 5.5 盛土部分の弾性材料定数

層番号	8
盛土高 (m)	0 ~ 6
ヤング率 $E(\text{tonf/m}^2)$	1000
現在の有効土かぶり圧 $\sigma_v(\text{tf/m}^2)$	1.02
静止土圧係数 $k_0$	0.8
透水係数 $k_x, k_y/\gamma_w(\text{m/min})$	$0.907 \times 10^{-3}$
初期間隙比 $e_0$	1.1
$e \sim \log k$ 関係の勾配 $\lambda_k$	0.55

下に示す図5.10は、解析によって得られた有効応力経路を示す要素番号を示したものである。

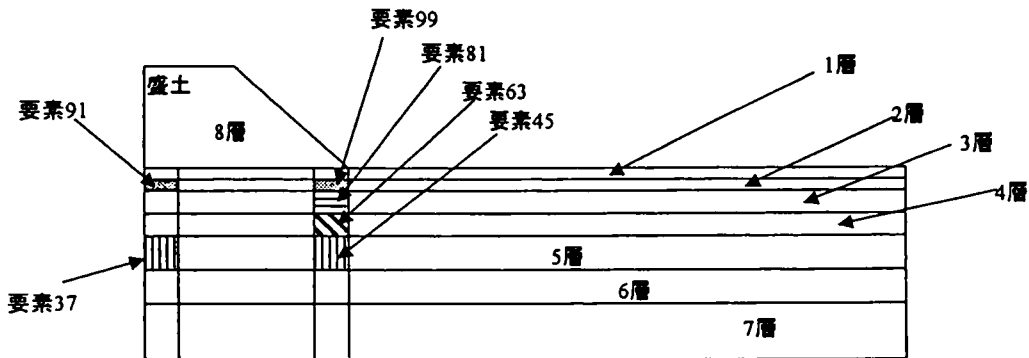


図 5.10 解析結果出力要素

5.4.5 解析結果と考察

まず、盛土法尻部直下の側方変位量と地表面の鉛直沈下量を図5.11と図5.12に示した。これはコセラ連続体理論の影響のない場合 ( $lc = 0\text{m}$ ) において土が破壊に至る盛土高(16.8m)のときの、 $lc = 0, 1, 3, 4, 5, 7, 10\text{m}$ の解析結果である。なお、鉛直沈下量は $lc = 0\text{m}$ と $lc = 10\text{m}$ の場合のみを図5.12に示す。

<側方変位>

盛土のり尻部の側方変位図(図5.11)を見ると、 $lc = 0 \sim 5\text{m}$ では、側方変位量が最大となる層が同じ4層目であり、 $lc$ が大きいくほど、側方変位の低減が見られる。 $lc = 7\text{m}$ では、側方変位量が最大値となる層が3層目、4層目ではなく1層目と2層目になっている。 $lc = 10\text{m}$ では地表面に近づくにつれて、側方変位量が増加している。ただし、 $lc = 7\text{m}$ 、 $lc = 10\text{m}$ においても1層目と2層目を除いては $lc = 0 \sim 5\text{m}$ よりも側方変位が抑えられる。つまり、地表面近くをのぞいては、 $lc$ が大きくなるにつれて、側

方変位量が小さくなっている。これは特性長さ $lc$ の効果が第1層目のクラスト層（弾性）に強く作用しているためと考えられる。今回の数値解析での $lc$ の最大値 $10m$ の場合は、5.4.2節の数値解析において得られた結果から、 $lc$ が数値解析結果に影響を与えない値であり、これ以上 $lc$ の値を大きくしても、土の変形状態は変化しないと考えられる。そのために、クラスト層と他の地盤の層が同じような変形状態を示している。

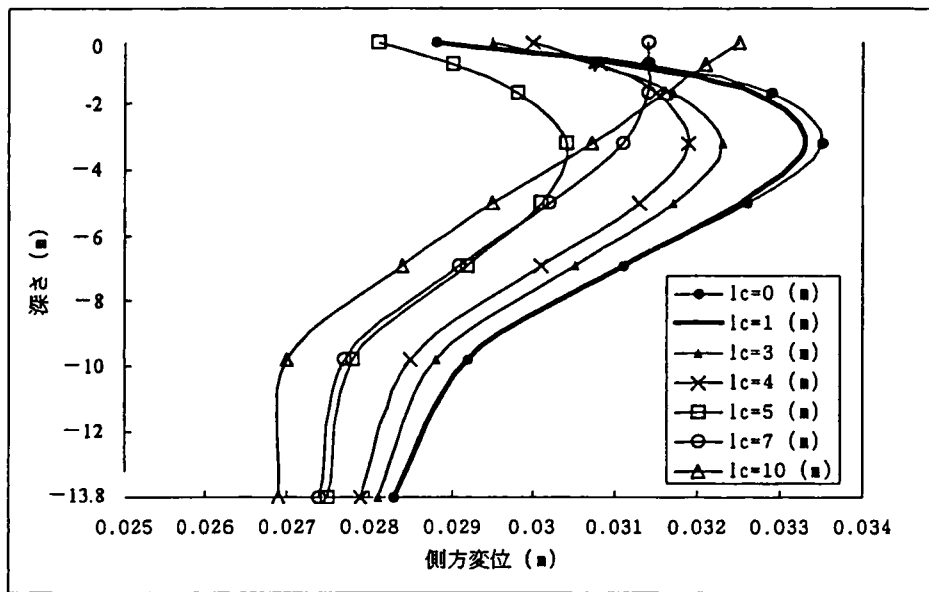


図5.11 側方変位の分布（のり尻部直下）

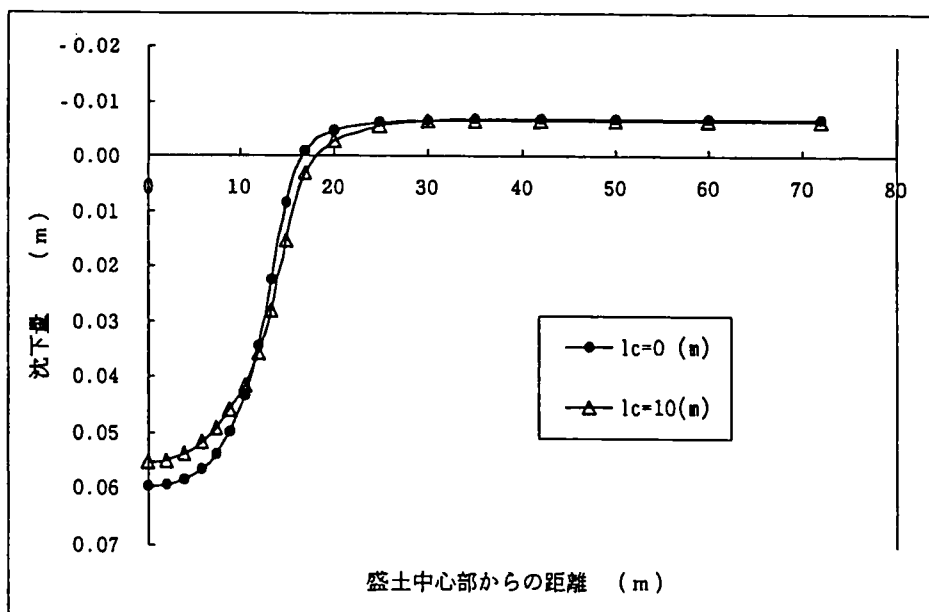


図5.12 鉛直沈下量の分布（地表面）

### <鉛直沈下量>

鉛直沈下については、 $l_c$ を大きくすると、盛土中心部の最大沈下量を4.2mm低減させ、のり尻部より外側の盛り上がる部分においても、2mm抑える結果が得られた。 $l_c = 1, 3, 4, 5, 7m$ の解析結果は、 $l_c = 0m$ の曲線から $l_c = 10m$ の曲線まで同じ傾向を保ちながら徐々に変化していた。これより、弾塑性モデルだけでなく弾粘塑性モデルにおいても、コセラ連続体理論を導入すると、沈下量が抑えられたことがわかる。

### <有効応力経路>

ここでは、図5.10に示した6つの要素の有効応力経路を $l_c$ について各要素ごとにまとめたものを表5.6に示した。各有効応力経路は、盛り土高3.5m時の値まで示してある。

表5.6 要素と図番号の対応

要素37 (盛土直下4.80m)	図5.13	要素45 (のり尻直下4.80m)	図5.14
要素63 (のり尻直下3.00m)	図5.15	要素81 (のり尻直下1.50m)	図5.16
要素91 (盛土直下0.66m)	図5.17	要素99 (のり尻直下0.66m)	図5.18

まず盛土直下にあるもっとも大きな荷重のかかる要素37 (図5.13) と要素91 (図5.17) は、 $l_c$ の値に関係なく有効応力経路が破壊線に到達しており、土が破壊したと考えられる。特に、盛土直下の要素91はすべての $l_c$ でほぼ同じ経路で破壊線に達している。盛土中心部のクラスト層のすぐ下にある要素91 (図5.17) は、盛土を構築しても側方変位がほとんど生じることがなく、 $l_c$ を大きくしても、効果がないと考えられる。要素37の有効応力経路図(図5.14) から、すべての $l_c$ において破壊線と接しているが、 $l_c$ を大きくすると有効応力経路の傾きが小さくなり、平均有効応力の大きい状態で破壊線と交わっている。これは $l_c$ を大きくすることによって、地盤全体の剛性が高まったと考えられる。盛土のり尻部下の要素45 (5.14図)、要素63 (5.15図) は5層目、4層目にあたるが、側方変位の結果から $l_c$ を大きくすると、側方変位量が減少する。要素81 (5.16図) も3層目ののり尻部下の要素であるが、これも $l_c = 0\sim 5m$ については、 $l_c$ を大きくすると、側方変位量が減少する。のり尻部下の $l_c$ によって側方変位が変化する3要素の結果を見ると、有効応力経路が破壊線から遠く、偶応力を導入しても有効応力経路には、あまり変化がない。のり尻部下の第2層にある要素99 (5.18図) は、 $l_c$ を大きくすると、有効応力経路の曲線の傾きが大きくなっており $l_c = 10m$ で破壊線に到達している。

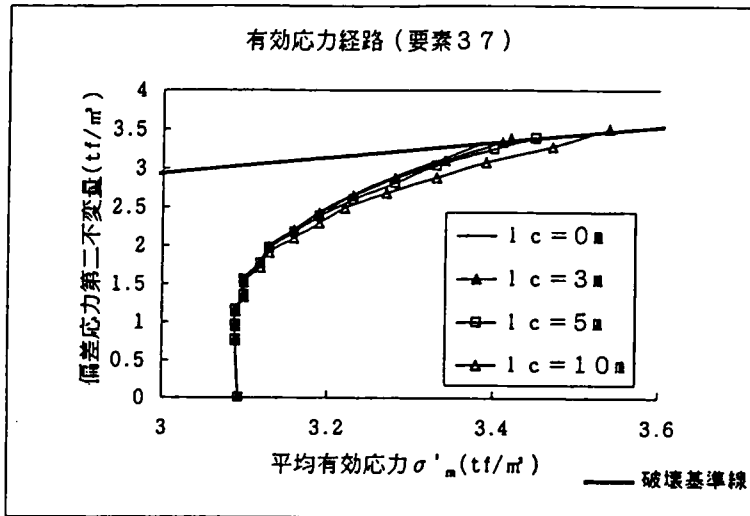


图 5.13 有效应力経路

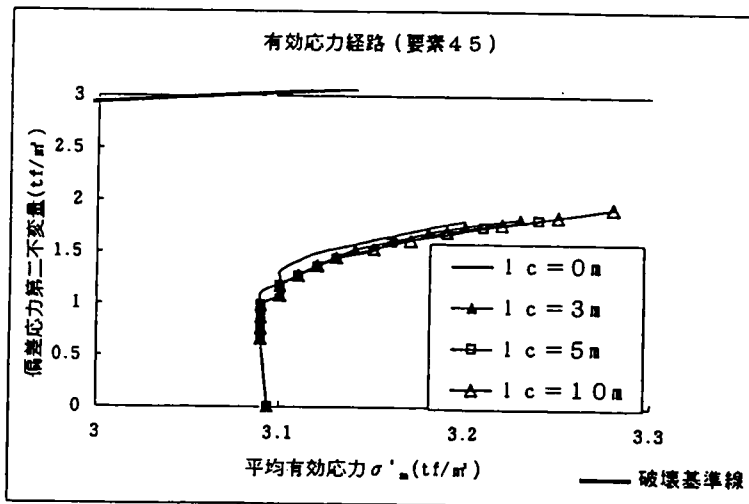


图 5.14 有效应力経路

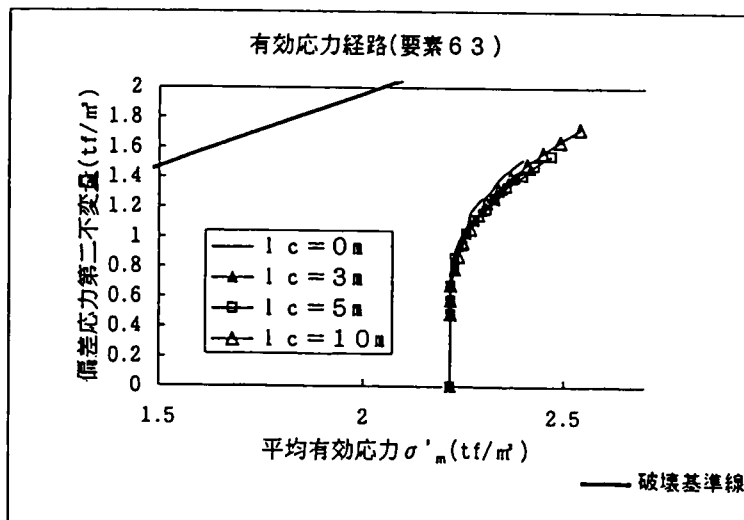


图 5.15 有效应力経路



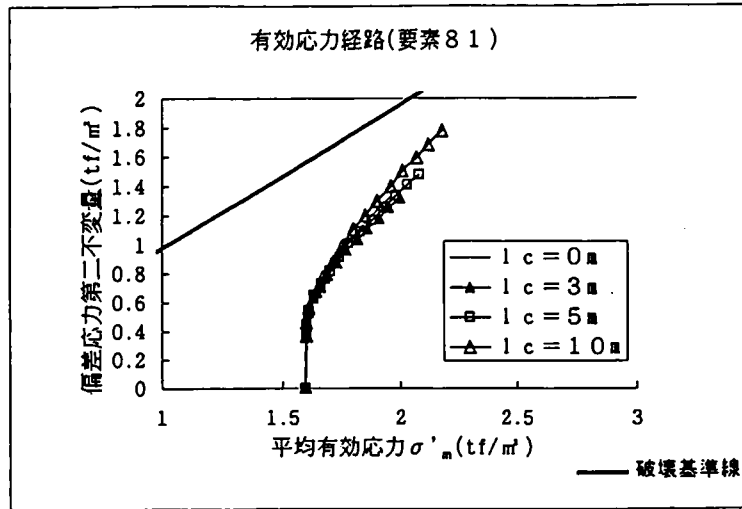


图5.16 有效应力経路

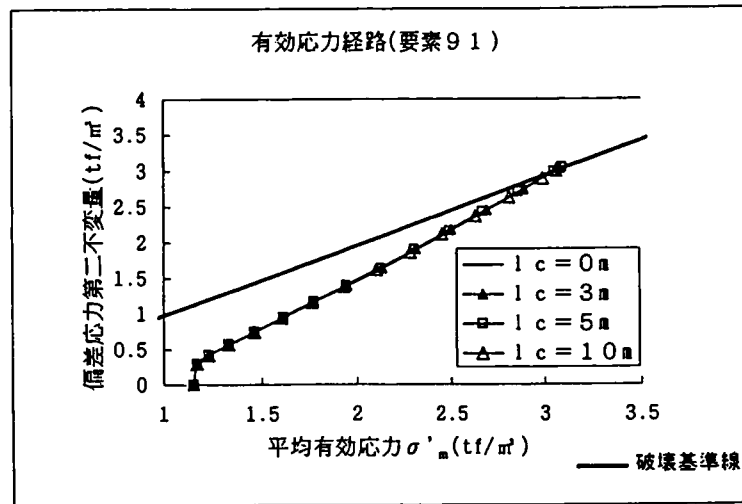


图5.17 有效应力経路

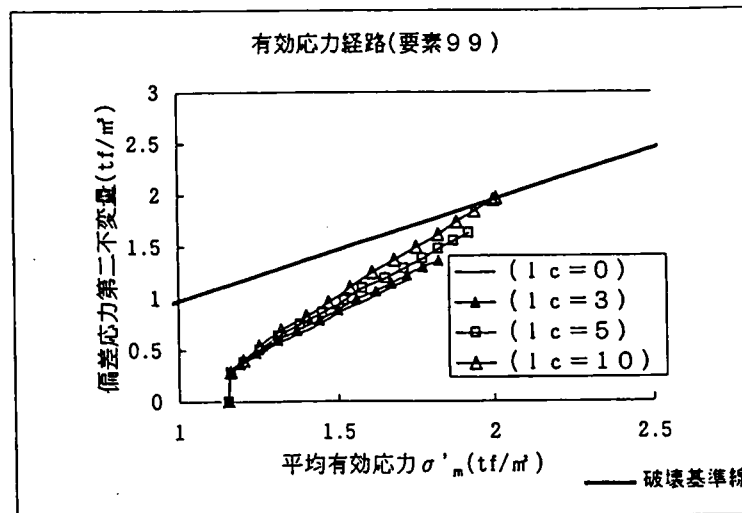


图5.18 有效应力経路

#### 5.4.6 まとめ

盛土の変形解析において、得られた結果を以下にまとめる。

- コセラ連続体理論を用いた盛り土地盤の変形解析を有限要素法によって行った。
- 有効応力経路から、盛土直下においては特性長さ $l_c$ の影響は受けない。コセラ連続体の場合、回転によるせん断応力に対して特性長さ $l_c$ の影響が発揮されるため、盛土直下のような鉛直応力のみ作用するような場合は、特性長さ $l_c$ の影響は見られない。
- 側方変位図から、特性長さ $l_c$ の値を徐々に大きくすると、地盤の深い位置では、側方変位量も徐々に小さくなるた。
- 側方変位図から、特性長さ $l_c$ の値によって側方変位量が変化する。特性長さ $l_c$ の値を徐々に大きくすると、側方変位量も徐々に小さくなるが、特性長さ $l_c$ の値が大きくなると、地盤の深さによって側方変位量の変化の傾向が変わった。
- 鉛直変位図から、特性長さ $l_c$ を大きくすると鉛直変形を抑制することができる。側方変位が抑えられることによって、鉛直変位量も変化する。
- このような数値解析で、実際の現象と比較した場合、数値解析解の方が実際の変形よりも変形量が大きくなる傾向があるが(関口ら(1991)、関口ら(1994))、今回の解析では、変形量を小さくさせることが可能であるため、実現象に近い挙動を表すことができる。

#### 5.5 コセラ連続体理論を用いた粘性土の変形解析のまとめ

本章では、コセラ連続体理論を導入した弾粘塑性構成式を用いて、有限要素法により土の変形解析を行った。用いた構成則は、足立・岡の弾粘塑性構成式(1982)である。数値解析により得られた解析結果から、コセラ連続体理論の導入が、土の変形解析に及ぼす影響について検討した。

弾粘塑性コセラモデルの特性を把握するために、以下の2つの数値解析を行った。

1. 飽和粘土をせん断変形させるシミュレーション
2. 層状地盤上に盛土を構築するシミュレーション

両数値解析において、コセラ連続体理論特有のパラメータである特性長さ $l_c$ を変化させ、解析対象の変形特性を検討した。

1. 飽和粘土をせん断変形させるシミュレーションから、

◇特性長さ $l_c$ が大きくなるとせん断応力の値も大きくなる

◇せん断応力は強制変位速度によって変化するが、特性長さ $l_c$ の影響は変形速度に依存しない

◇特性長さ $l_c$ の影響は、0cmから徐々に大きくすると、それとともにせん断応力も大きくなるが、 $l_c$ がある値以上になるとせん断応力は変化しない

ことがわかった。

2. 層状地盤上に盛土を構築する解析から、

◇盛土直下においては特性長さ $l_c$ の影響は受けない、つまり、回転によるせん断応力に対して特性長さ $l_c$ の影響が発揮される

◇特性長さ $l_c$ の値を徐々に大きくすると、地盤の深い位置では、側方変位量も徐々に小さくなる

◇特性長さ $l_c$ を大きくすると側方変位が抑えられることによって鉛直変形も抑制される

ことがわかった。

**参考文献**

- 赤井 浩一・田村 武(1978), 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, pp95-104.
- Adachi, T. and Oka, F. (1982), Constitutive equations for normally consolidated clay based on elasto-viscoplasticity, *Soils and Foundations*, 22(4), pp.57-70.
- Bardet, J.P. and Proubet, J. (1991), A Numerical investigation of the structure of persistent bands in granular media, *Geotechnique*, 41(3), pp.599-613.
- Biot, M.A. (1963), Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *Appl. Phys. J*, Vol.3, pp.1482-1498.
- Campbell, C.S. (1988), Boundary interaction for two-dimensional granular flows: A symmetric stress and couple stresses, *Studies in Applied Mechanics* 20, pp.169-173.
- Cosserat, E. and Cosserat, F. (1909), *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paris.
- Mindlin, R.D. (1963), Influence of couple-stresses on stress concentrations, *Experimental Mechanics*, 3, pp.1-7.
- Mühlhaus, H.-B. (1986), Shear band analysis in granular materials by Cosserat theory, *Ing. Arch.*, Vol.56, pp.389-399.
- Mühlhaus, H.-B. (1989), Stress and couple stress in a layered half plane with surface loading, *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 13, pp.545-563.
- Mühlhaus, H.-B., *Rockbursts and Seismicity in Mines*, Fairhurst ed., Balkema, 101 (1990).
- Mühlhaus, H.-B. and Vardoulakis, I. (1987), The thickness of shear bands in granular materials, *Geotechnique*, 37(3), pp.271-283.
- Oka, F., Tavenas, F. and Leroueil, S. (1991), An elasto-viscoplastic FEM analysis of sensitive clay foundation beneath embankment, *Proc. Computer Methods and Advanced in Geomechanics*, pp.1023-1028.
- Oka, F., Yashima, A. Iwasaki, Y. and Nagaya, J. (1992), Numerical analysis of the clay foundation beneath reinforced embankment, *Proceedings of the International Symposium on earth reinforcement practice*, eds., H. Ochiai et al, Fukuoka, Balkema, pp.665-670.

- Onishi, N.(1978), Continuum model of fluidized granular media, Proc. of the U.S-Japan Seminar on Continuum-Mechanical and Statical Approaches in the Mechanics of Granular Materials, pp.189-207.
- Perzyna, P.(1963),The constitutive equations for work hardening and rate sensitive plastic materials, Proc.of Vibrational Problems, Warsaw,4(3),pp.281-290.
- Schafer, H., Miszellarneen de angewandten Mechanik, Festschrift W. Tollmien, Berlin, Alademie-Verlag, 277 (1962).
- Sekiguchi, K. (1991), On the choice of finite elements in elasto-viscoplastic consolidation analyses, Proc. of the 28th Japan national conference on soilmechanics and foundation engineering, pp.1167-1170.
- Sekiguchi, K. (1994), Predicted behavior of a test embankment using elasto-viscoplastic constitutive models, Proc. of the 31th Japan national conference on soilmechanics and foundation engineering, pp.1327-1330.
- Yoshida, N. Arai, T. and Onishi, K.(1997), Elasto-plastic Cosserat finite element analysis of ground deformation under footing load, Deformation and Progressive Failure in Geomechanics, eds. A.Asaoka et al., Nagoya, Pergamon Press, pp.395-400.

## 第6章 異なる非局所理論を用いた粘性土の変形解析の比較

### 6.1 概説

これまで、勾配依存型理論とコセラ連続体理論を用いたいくつかの初期値—境界値問題について述べた。それぞれの非局所理論の性質について検討したが、それらの特徴について比較することはしなかった。そこで本章では、両理論を用いて、同じ境界値問題を取り扱うことにより、それらを比較する。

第3章では、勾配依存型弾粘塑性構成式有限要素プログラムを用いて、3種類の初期値—境界値問題について数値解析を行った。その結果、粘塑性体積ひずみの二階空間勾配を導入することで、各有限要素の変形が抑えられ、変形が集中する部分が少なくなり、結果として、供試体全体の変形を抑制させることがわかった。

第5章では、コセラ連続体理論を導入した弾粘塑性構成式を用いて、有限要素法により2種類の初期値—境界値問題について土の変形解析を行った。その結果、コセラ連続体理論特有のパラメータである特性長さ $l_c$ を変化させると、解析対象の変形が抑制されることがわかった。

勾配依存型理論を用いて数値解析を行った場合、コセラ連続体理論を用いて数値解析を行った場合のどちらの場合も、長さの次元を取り入れたパラメータを構成式中に導入することにより、地盤材料の変形が適切に表現できる可能性があることがわかった。そこで、本章では両解析手法を同じ境界条件の解析対象に適用させることによって、両者の特性をより深く把握することを目的とする。

第3章で行った勾配依存型理論を用いた数値解析では、有限変形理論に基づいて数値解析が行われている。一方、第5章で行ったコセラ連続体理論を用いた数値解析では、微小変形理論に基づいて数値計算が行われている。2つの理論の違いは、本章で比較する粘土供試体の境界条件においては、変形が進行したときの状態の差異に、大きな影響を与えている。しかしながら、本章では、勾配依存型理論とコセラ連続体理論という2つの非局所理論が、解析結果に与える影響を考察することを目的とするため、有限変形理論及び微小変形（勾配）理論についての差異については、直接的に比較しないことにする。

### 6.2 異なる非局所理論を用いた粘性土の変形解析

ここでは、勾配依存型理論とコセラ連続体理論を導入した弾粘塑性モデルにより、共通の初期値—境界値問題を設定し、変形解析を行うことによって両非局所理論が解析結果に与える影響について検討を行う。数値解析には、局所的せん断変形を発生させるために、図6.1のように要素供試体両側面に同形状の初期不整を境界条件として設定し、図の矢印の部分に強制変位を1%/minの速度で与えた。図6.1aは勾配依存理論に用いた境界条件、図6.1bはコセラ連続体理論に用いた境界条件である。有限

要素メッシュ数は、それぞれの理論に対し、 $5 \times 10 = 50$ 、 $10 \times 20 = 200$ 、 $20 \times 40 = 800$ 要素の計3種類のメッシュ構成を用い、境界は非排水とした。ただし、供試体内部要素間の間隙水の移動は可能とした。図6.1cには、供試体両側面に与えた初期不整の形状を示した。初期不整の形状は、振幅0.003cmの余弦波で、解析対象の両側面に同位相で与えた。飽和粘土の材料定数は、大阪沖積粘土を用いた室内試験より得られたパラメータを適用した(表6.1)。ただし、ひずみ軟化に関する軟化パラメータ $G_2^*$ は、コセラ連続体理論を用いた解析には使用していない。したがって、ピーク応力に至るまでの応力-ひずみ曲線には差異がないこととなる。また、コセラ連続体理論を用いた数値解析においては、有限要素メッシュ下部節点の1つを回転拘束し、それ以外の節点の回転は拘束していない(図6.1b)。

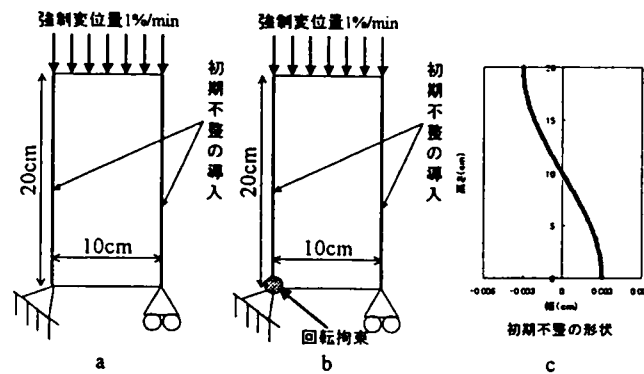


図6.1 境界条件 (a:勾配依存理論、b:コセラ連続体理論、c:初期不整の形状)

解析ケースは、それぞれの理論において、勾配依存理論については、勾配項の導入なし( $\beta = 0$ )と勾配項の導入あり( $\beta = +1$ )、コセラ連続体理論については、コセラの導入なし( $lc = 0cm$ )とコセラの導入あり( $lc = 100cm$ )の4通りとした。3種類のメッシュ構成数において、この4通りについて、計12通りの数値解析を行った。

表6.1 解析に用いた弾粘塑性材料定数

圧縮指数	$\lambda$	0.372
膨潤指数	$\kappa$	0.054
初期平均有効応力	$\sigma'_{m0}$	588(kPa)
間隙比	$e$	1.28
粘塑性パラメータ	$m'$	21.5
粘塑性パラメータ	$C$	$4.5 \times 10^{-8}(1/sec)$
破壊時の応力	$M^*$	1.05
せん断弾性係数	$G$	12946(kPa)
透水係数	$k$	$1.16 \times 10^{-12}(cm/sec)$
ひずみ速度	$\dot{\epsilon}$	1.0(%/min)
軟化パラメータ (勾配依存のみ)	$G_2^*$	100

解析ケースは、勾配依存型モデルを用いた解析は”a”、コセラ連続体モデルを用いた解析は”b”とし、それぞれのケースについて、要素分割数50要素、200要素、800要素について解析した。さらに、これらの6通りのケースについて、それぞれの非局所理論を導入するかしないか各2種類、全部で計12種類の解析を行った。ここで、勾配依存モデルを用いたCase aの場合、勾配項にかかる係数の値は $\beta = +1$ であり、コセラモデルを用いたCase bの場合、特性長さの値は $l_c = 100\text{cm}$ である。

### 6.3 解析結果と考察

本節では、前節で述べた数値解析の結果を示す。図6.2に、見かけの軸差応力ー見かけの軸ひずみ関係図を示す。見かけの軸差応力は、供試体上端部の節点反力を供試体上端部長さで除したものであり、見かけの軸ひずみは供試体高さと変形量から算出した。

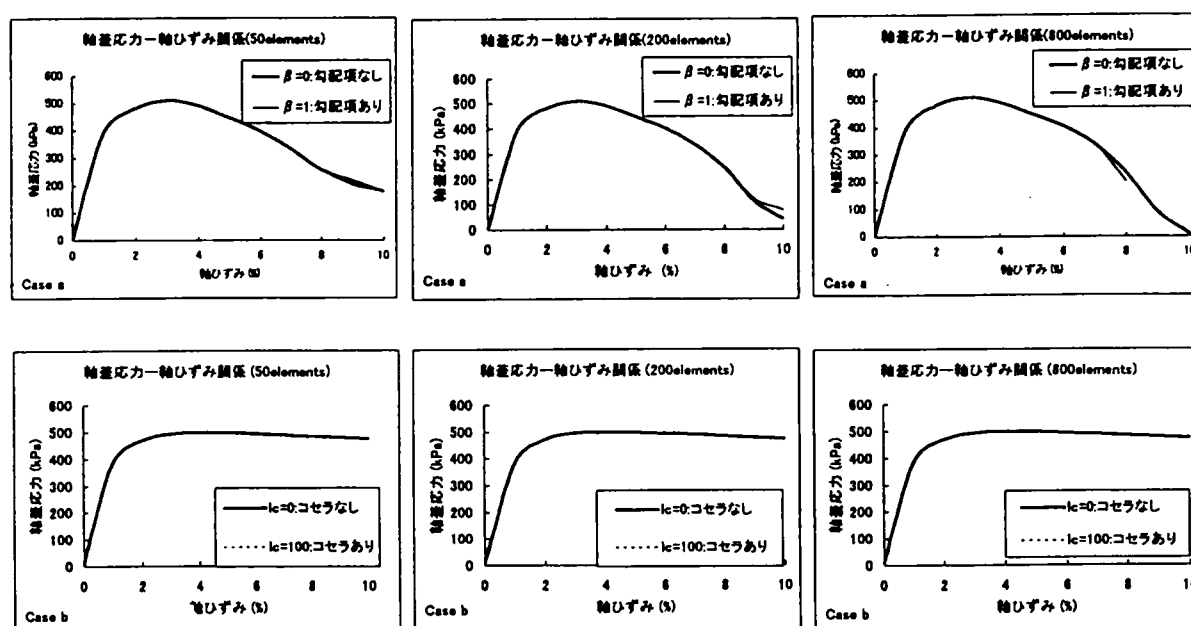


図6.2 応力ーひずみ関係の比較

図6.2からCase aでは、ピーク応力後のひずみでは、大きくひずみ軟化の傾向を示しているのに対し、Case bでは、ひずみ軟化の程度はそれほど大きくない。このことは、先に述べたように、Case aは有限変形理論、Case bでは微小変形理論に基づいて数値計算がなされているため、変形が進んだ場合のひずみの蓄積量に違いが現れていると考えられる。ひずみ軟化の挙動は大きく違うのに対して、両ケースのピーク強度までの挙動についてはほとんど違いは見られない。同じ材料データを用いて解析を行っているためであり、両解析手法が同程度の精度を持っていることがよく表現されている。



次に、各ケースごとの変形メッシュを示す。図6.3aには、Case aの軸ひずみ8%のときの変形メッシュを、図6.3bには、Case bの軸ひずみ8%のときの変形メッシュを示す。

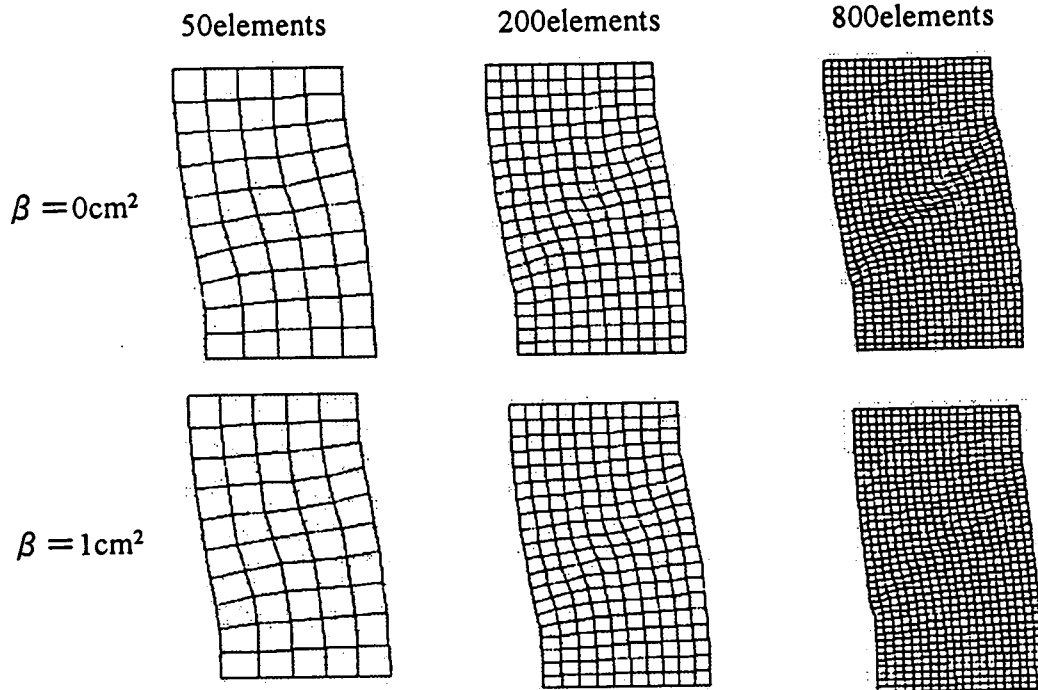


図6.3a Case a の変形メッシュ (軸ひずみ8%のとき)

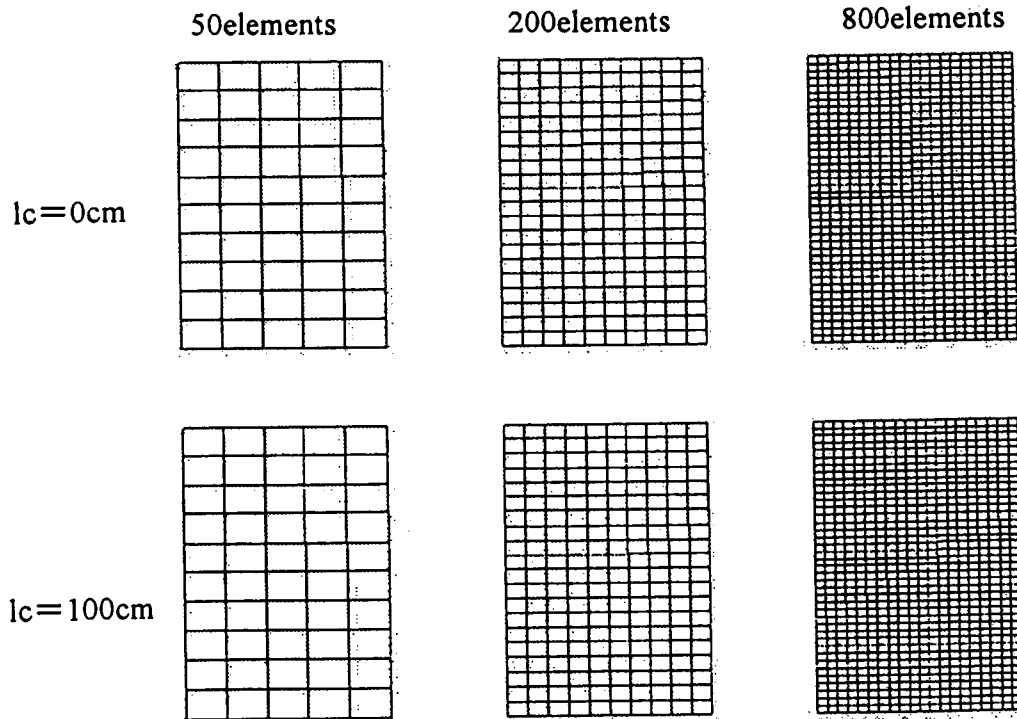


図6.3b Case b の変形メッシュ (軸ひずみ8%のとき)

図6.2と同様に、変形メッシュについても、Case aとCase bの結果には大きな違いがみられた。有限変形理論と微小変形理論では、変形が進行していき、ひずみ軟化の領域になった場合のひずみの蓄積量が異なることが理由と予想される。これまでの数値解析結果と同じように、勾配項の影響を考慮しない場合、有限要素メッシュが小さいケース（800要素）の方が有限要素メッシュが大きいケース（50要素）よりもせん断帯ははっきりわかる。一方、勾配項の影響を考慮した場合、800要素のときは、せん断帯ははっきりとわからなくなっている。Case bのコセラ連続体を用いた解析の場合、Case aのような変形の仕方は見られず、ほぼ均一に変形しているように見える。また、コセラ連続体理論を導入した場合（特性長さ $l_c = 100\text{cm}$ ）の変形状態も導入しない場合（特性長さ $l_c = 0\text{cm}$ ）と比べてもほとんど違いが見られない。この違いを確認するために、粘土供試体内の間隙水圧の分布とひずみ測度（ $\sqrt{\gamma_{xy}\gamma_{xy}}$ ）の分布を見ることにする。それぞれのケースにおいて、軸ひずみ8%のときの間隙水圧の分布図とひずみ測度（ $\sqrt{\gamma_{xy}\gamma_{xy}}$ ）の分布図を示す。Case aの間隙水圧の分布は、図6.4aに、Case bの間隙水圧の分布は、図6.4bに示した。図6.4aと図6.4bはともに、軸ひずみ8%のときの変形した供試体の上に間隙水圧の分布状態を重ねて表示した。

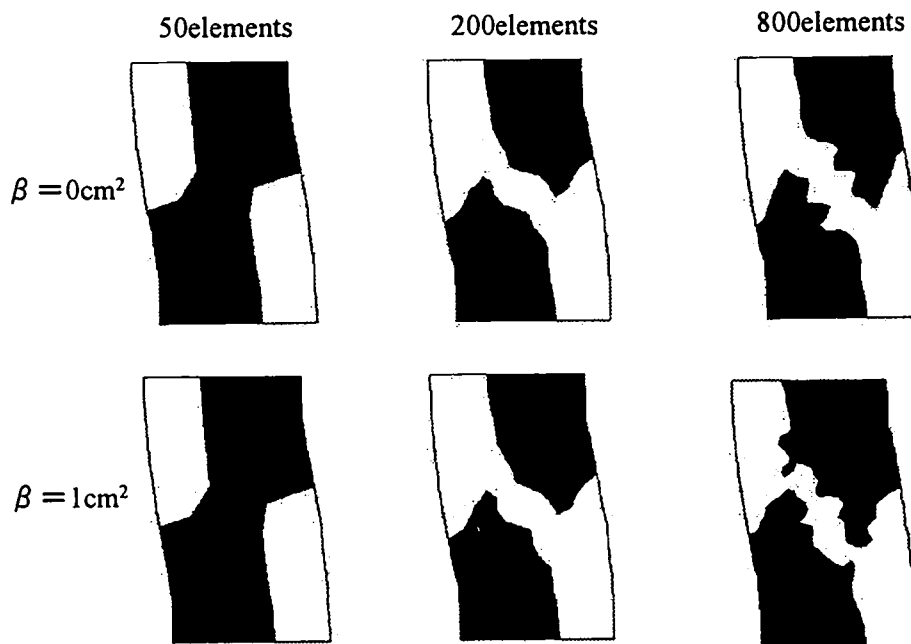


図6.4a Case a の間隙水圧の分布（軸ひずみ8%のとき）

図6.4aでは、間隙水圧が $400\text{kPa}$ 以上になっている部分を黒色で表した。図6.4aから、Case aの間隙水圧の分布は、せん断変形が集中していると考えられる部分の水圧が大きくなっていることがわかる。勾配項を導入したケースと導入していないケースの違いはほとんど見られない。もっとも大きい要素分割数の解析ケースでのみ、勾配項導入の影響が少し見られ、間隙水圧の高い部分の面積が導入なし

の場合に比べて少し大きい。

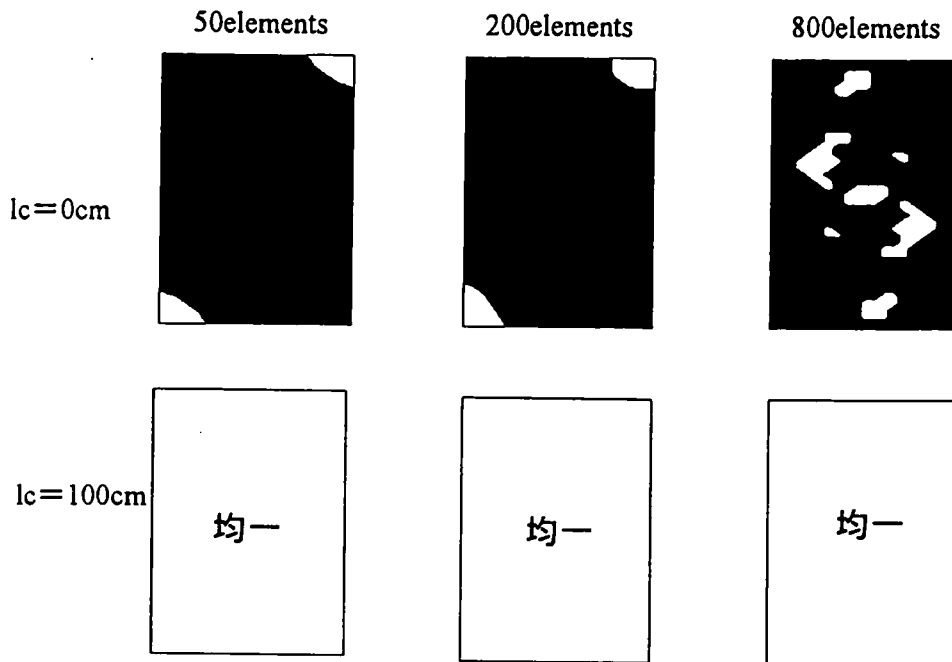


図6.4b Case b の間隙水圧の分布（軸ひずみ8%のとき）

コセラ連続体理論を用いた解析ケースでの間隙水圧の分布を図6.4bに示した。Case bでは、変形メッシュ図からもわかるとおり、すべての要素分割数の解析ケースにおいて、同じような変形をしている。このことから、Case bでは、要素供試体内の間隙水圧の分布はほぼ同じになっていることがわかる。ここで、間隙水圧分布図の黒色の部分は、間隙水圧が $125kPa$ 以上の部分であり、要素供試体内において全体的に間隙水圧が大きくなっている。特にコセラ理論を導入した解析ケースでは、どのメッシュ構成数の場合でも、要素供試体内の間隙水圧分布は均一である。ここで、Case aとCase bでの間隙水圧の大きさが異なっているのは、変形メッシュ図からもわかるように、要素供試体全体の変形状態が異なること、つまり、ひずみの集中の仕方の違いによると考えられる。

次に、図6.5aと図6.5bに、各ケースについてせん断ひずみ測度の分布を示した。せん断ひずみ測度の分布図は、 $\sqrt{\gamma_{xy}\gamma_{yx}}$ の分布状態を、軸ひずみ8%のときの変形した供試体の上に重ねて表示した。図6.5aでは、せん断ひずみ測度0.15以上になっている部分を黒色で表した。Case aの結果を示した図6.5aでは、勾配項を導入したケースと勾配項を導入しないケースとを比較しても、違いは見られないが、要素分割数が大きくなるにつれて、せん断ひずみの値が大きい部分の幅が狭くなることがよくわかる。しかし、変形メッシュ図で見られたような、せん断帯が不明瞭になるような現象は、せん断ひずみ測度分布図からは読みとることはできない。Case bの結果を示した図6.5bでは、せん断ひずみ測度が大きくなっている部分を黒色で表した。ただし、要素供試体の変形状態から想像できるように、せん断ひずみ測度の値は非常に小さいため、50要素のメッシュを用いた解析ケースでは、せん断ひずみ測度が

0.066 以上、200 要素と 800 要素のメッシュを用いた解析ケースでは、せん断ひずみ測度が 0.062 以上の部分を部分を黒色で表した。コセラ連続体理論の導入を行っていない  $lc = 0\text{cm}$  の場合には、供試体内にせん断ひずみ測度の分布に違いがあるが、コセラ連続体理論を導入した  $lc = 100\text{cm}$  のケースでは、すべてのメッシュ構成数でのケースで、要素供試体内のせん断ひずみ測度の分布は同じになった。

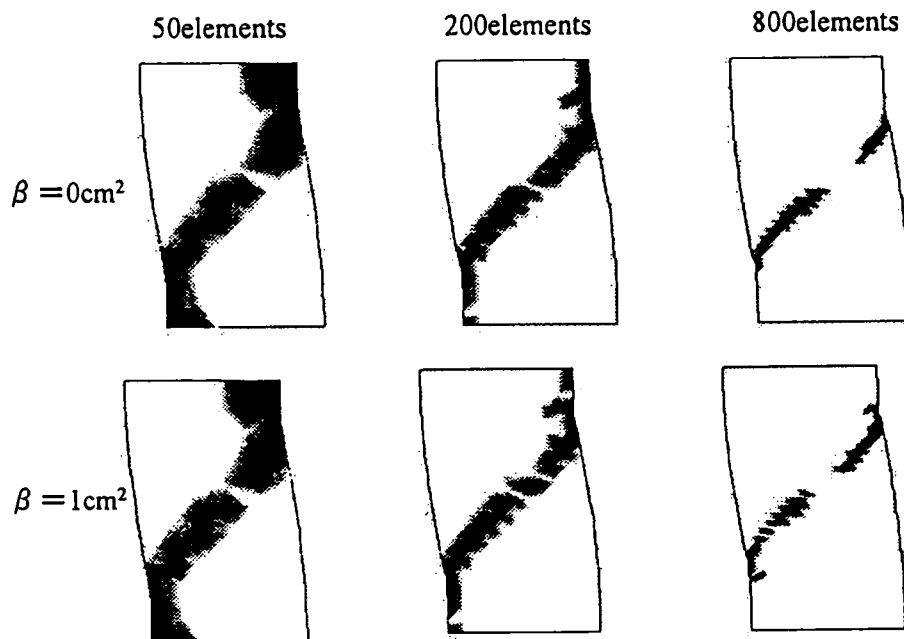


図 6.5a Case a のせん断ひずみ測度の分布 (軸ひずみ 8% のとき)

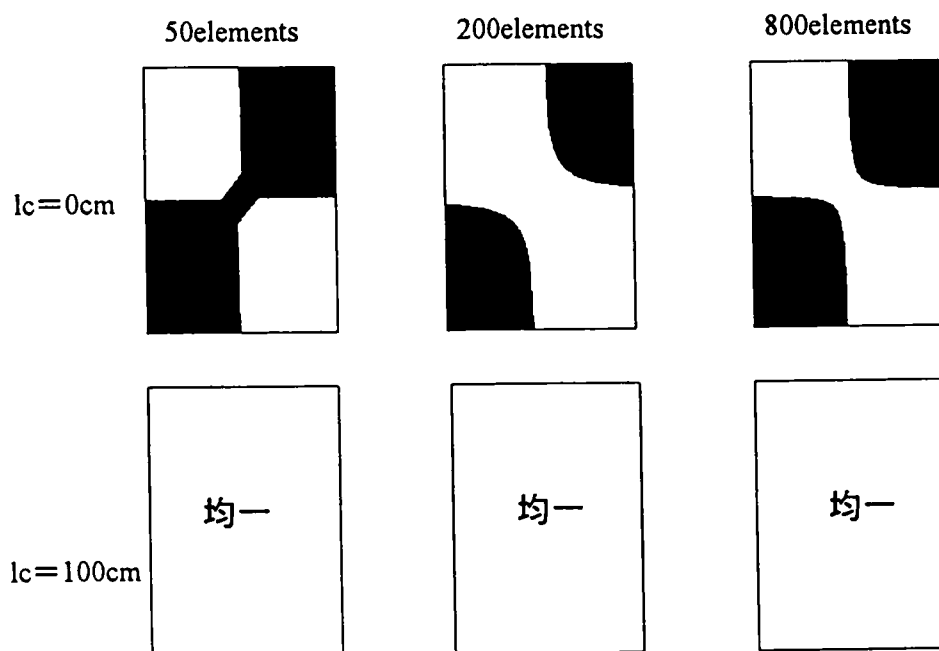


図 6.5b Case b のせん断ひずみ測度の分布 (軸ひずみ 8% のとき)

次に、要素供試体全体の変形状態を詳しく見ることにする。その方法として、要素供試体左側面の形状を1つのグラフ上に表す。Case aの供試体側面の変形状態を図6.6aに、Case bの供試体側面の変形状態を図6.6bに示した。Case aについては、メッシュ構成数が800要素で、勾配項にかかる係数 $\beta$ を $\beta = +1$ としたとき、供試体の下の部分に少々乱れが見られた。それ以外は、どのメッシュ構成数の解析結果についても、勾配項を導入した場合と導入しない場合を比較して、違いはほとんど見られない。Case bについては、コセラ連続体理論の影響を考慮しない場合の要素供試体側面の形状は構成要素数の違いによって異なったものとなっている。一方、コセラ連続体理論特有のパラメータである特性長さ $lc$ を $lc = 100\text{cm}$ とした場合、その供試体側面形状はどのメッシュ構成数での解析結果でも同じになっている。このことから、Case aについては、勾配項の導入は、要素供試体全体の形状に影響を与えることはない。Case bでは、コセラ連続体理論の影響によって、要素供試体全体の形状を変化させることがわかる。

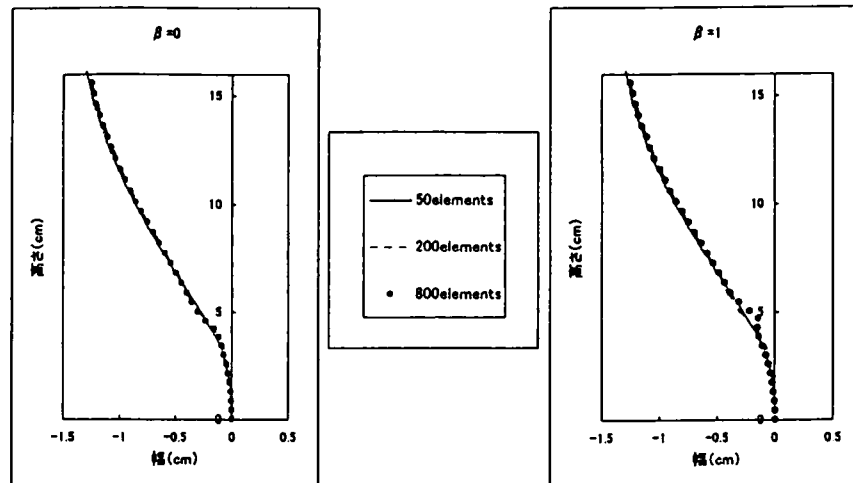


図6.6a Case a の供試体左側面の形状 (軸ひずみ8%のとき)

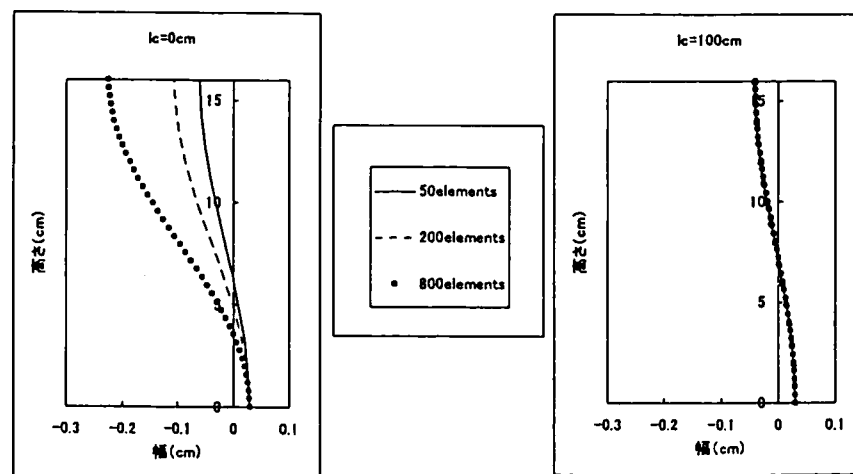


図6.6b Case b の供試体左側面の形状 (軸ひずみ8%のとき)

#### 6.4 異なる非局所理論を用いた粘性土の変形解析のまとめ

本節では、勾配依存理論とコセラ連続体理論を用いて同じ境界値問題を考えた粘土の変形解析において得られた結果をまとめた。

- 両側面に初期不整のある共通の境界条件を持つ粘土供試体を用いて、勾配依存理論とコセラ連続体理論を用いた数値解析を有限要素法によって行った。
- 数値解析においては、勾配依存理論を導入した数値解析には有限変形理論が、コセラ連続体理論を導入した数値解析には微小変形理論が用いられた。
- 見かけの軸ひずみ－見かけの応力関係図から、有限変形理論を用いた数値解析（勾配依存理論を導入した数値解析）では、ピーク強度を超える軸ひずみの後は、著しいひずみ軟化挙動を示した。一方で、微小変形理論を用いた数値解析（コセラ連続体理論を導入した数値解析）では、軸ひずみが大きくなって、ピーク強度を越える変形があっても、著しいひずみ軟化挙動の傾向を示すことはなかった。これは、第2材料関数を考慮していないことも原因である。
- 変形メッシュ図から、勾配依存理論を用いた解析では、勾配項の影響を考慮しない場合、有限要素メッシュが小さいケース（800要素）の方が有限要素メッシュが大きいケース（50要素）よりもせん断帯がはっきりわかる一方、勾配項の影響を考慮した場合、800要素のときは、せん断帯がはっきりとわからなくなった。
- 間隙水圧分布とせん断ひずみ測度分布図から、コセラ連続体理論を数値解析に導入した場合、要素供試体内の間隙水圧とせん断ひずみ測度の分布を均一にする影響を与えることがわかった。
- 変形した要素供試体の側面図から、コセラ連続体理論を用いて数値解析を行った場合、3つの異なるメッシュ構成数の要素供試体の変形後の形状が同じになった。

## 第7章 結論

一般的に、地盤材料の変形問題を数値解析で取扱うには、近似解法として、有限要素法が用いられることが多い。有限要素法はその手法から、有限要素メッシュ数が多ければ多いほど、正解に近づくといわれている。しかしながら、有限要素メッシュ数を多くすると、計算時間は膨大なものとなり、また、データ入力、出力とも煩わしいものとなる。さらに、有限要素メッシュ数を増やしていった場合、その数が無限大になったと仮定すれば、最も正解に近いはずである。ところが、例えば粘土の三軸圧縮試験などを行ってできるせん断帯等は、その幅を持っているにも関わらず、無限大個のメッシュを用いた有限要素法数値解析の場合、せん断帯の幅が消滅(0cmになる)することになる。しかしながら、実際の地盤材料では、せん断帯の幅はそれぞれの材料の特性長さ(粒径など)に依存する。このような問題点を解決する方法として、非局所理論が数値解析に導入されてきた(第1章参照)。非局所理論は、一つの物質点の応力が周りの点のひずみの影響を受けて決定され、構成関係が物質点ごとでなく、周囲のひずみ場の影響が加味されて記述される。したがって、ある領域の点同士の相互作用が構成関係に取り込まれている。このことにより、材料の特性長さ等長さの次元を持つパラメータを構成関係に取り入れることができる。

地盤材料の変形を考慮する場合、破壊の予測を行うために、せん断帯あるいはせん断帯付近の挙動を数値解析によって正確に予測することが非常に重要であり、このような問題には、数値解析に用いられる構成関係に、非局所理論を適用させることが有効である。本論文では、非局所理論の中で特に、Cosserat連続体理論と勾配依存型理論に着目した。それぞれの非局所理論について初期値境界値問題を設定し数値解析を行い、これらの理論が粘土の変形挙動の数値解析結果にどのような影響をもたらすかについて、検討したものである。

第1章では、非局所理論の概要と、本論文の構成を述べた。

第2章では、本論文全般で使用する弾粘塑性構成式の説明を行った。弾粘塑性構成式は、足立・岡の提案した超過応力型である。弾粘塑性構成式の誘導から、有限変形理論を導入する過程、有限要素法による離散化を本章にまとめた。定式化において、土粒子骨格の変形と間隙水移動の連成問題の支配方程式は、Biotの理論に基づいた2相混合体理論を用いた。

第3章では、勾配依存型理論を用いて、飽和粘土の変形解析を行った。第2章で提案した粘塑性ひずみの二階勾配を考慮した弾粘塑性構成式を有限要素法により離散化したプログラムを用いて、3種類の簡単な初期値境界値問題を取り上げ、勾配項が変形解析結果に及ぼす影響を検討した。解析プ

ログラムは、粘塑性体積ひずみの二階空間勾配を形状関数を用いて定式化するため、節点変位・間隙水圧の他に、粘塑性体積ひずみを独立変数として、有限要素の節点において定義する必要があり、つり合い式・連続式のほかに、構成式をも離散化した。

層状粘土地盤をモデルにしたせん断変形解析では、変形速度、構成式のひずみ軟化の程度、勾配項に関する係数の3つのパラメータを変化させ、勾配項の影響を考察した。同じひずみ軟化の状態、変形速度一定で勾配項に関する係数を変化させた場合、勾配項全体の値が小さくなると、粘塑性体積ひずみの発生が押さえられて、軟化の傾向が小さくなった。勾配項を正の値で固定して、ひずみ軟化に関する係数も一定にし、変形速度のみを変化させた場合、変形速度が速い場合はせん断応力は大きくなり、粘塑性体積ひずみも間隙水圧も全体的に小さくなった。勾配項を正の値で一定に保ち、変形速度も一定に保ったまま、ひずみ軟化に関する係数を変化させて解析を行った。ひずみ軟化に関する係数を変化させると、変形の集中した部分では、軟化の度合いが大きい場合の方が、粘塑性体積ひずみの値が大きくなった。

次に、粘性土が二次元的に変形する境界条件を設定し数値解析を行った。境界条件により、供試体に局所的な変形が起こる（せん断帯の発生）ように設定した。ここでは、塑性体積ひずみの二階空間勾配項に関する係数と有限要素メッシュ数を変化させ、計6ケースの数値解析を行い、それらの解析結果を比較した。ここでは、粘土の変形、特にせん断帯付近の試料の挙動にどのような影響を及ぼすかを検討した。軸ひずみ-軸差応力関係から、勾配項の導入は、軸差応力を大きくさせ、また同じ大きさの解析対象に対して細かくメッシュを細分化させた方がよりその影響が大きいことがわかった。せん断ひずみ測度の分布図と変形メッシュ図から、勾配項が導入されていない場合、メッシュ数が多くなるとせん断ひずみ測度の分布の幅が小さくなるのに対し、勾配項が導入されている場合、メッシュ数が多くなってもせん断ひずみ測度の分布の幅は小さくなった。変形メッシュからも同様の傾向を得ることができた。つまり、勾配項の導入はメッシュサイズ依存性を緩和させる働きを持つことが分かった。

最後に、縦20cm×横10cmの飽和粘土供試体の両側面に微小な初期不整を与え変形解析を行った。このことにより、同じモードの変形が得られ、また、変形を局所的に集中させ、構成式の持つ勾配項の非局所的性質を把握しやすくした。柱状粘土地盤の解析結果から、勾配項の影響をよりよく把握するために、変形速度・ひずみ軟化の度合いを一定として、勾配項にかかる係数のみを変化させた。粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項にかかる係数 $\beta$ を正の値にすると、限られた $\beta$ の値であるが、変形が抑制された。このことより、結果としてせん断帯の幅が変化した。

第4章では、弾粘塑性構成式に粘塑性体積ひずみの二階空間勾配項を導入したモデルの動的特性を明らかにするため、一次元モデルを用いて、地盤材料中を伝播する動的波動の数値解析を行った。



均一な地盤材料と不均一な地盤材料を仮定し、片持ち梁のような形状の材料の自由端からソリトン波応力を入力した。材料中に応力がどのように伝播するかを解析した。勾配理論を導入した場合、均一、不均一に関わらず応力伝播が非局所的になるため、応力伝播の減衰が抑制された。

第5章では、コセラ連続体理論を導入した足立・岡の弾粘塑性構成式を用いて、土の変形解析を有限要素法を用いて行った。第1に、弾粘塑性コセラモデルの基本特性を把握するために、飽和粘土をせん断変形させるシミュレーションを行った。飽和粘土供試体を用いた、せん断変形の数値解析では、ある一定のせん断変形までは、特性長さ $l_c$ を大きくするとせん断応力も大きくなった。せん断応力は強制変位速度によって変化するが、コセラ連続体理論を用いた場合の特性長さ $l_c$ の効果は、変位速度に依存しないことが確認された。特性長さ $l_c$ の効果は $l_c$ がある値以上になると変化しないことが確認された。

次に、コセラ連続体理論を導入した弾粘塑性モデルを用いて、側方変位に着目し、盛土を構築したとき基礎粘土地盤の挙動を有限要素法を用いて数値解析を行った。有効応力径路から、盛土直下においては $l_c$ の影響は受けなかった。側方変位図から、 $l_c$ の値によって側方変位量が変化（減少）した。鉛直変位図から、 $l_c$ を大きくすると鉛直変形が抑制されることが確認された。つまり、コセラ連続体理論の導入が、変形を抑制させることが確認された。

第6章では、第3章で用いた‘勾配依存型理論に基づく解析手法’と、第5章で用いた‘コセラ連続体理論に基づく解析手法’の2つの解析手法を用いて、共通の初期値—境界値問題について数値解析を行った。ここで、‘勾配依存型理論に基づく解析手法’では有限変形理論を、‘コセラ連続体理論に基づく解析手法’では微小変形理論を用いて解析を行ったためと、それぞれの解析で用いた構成式でのひずみ軟化についての取扱いに違いがあったため、それらの結果は大きく異なるものとなった。勾配依存理論を用いた解析手法では、変形メッシュ図から、この解析手法によって、せん断帯の幅を変化させることができることが確認された。コセラ連続体理論を導入した解析手法では、要素供試体内の間隙水圧とせん断ひずみ測度の分布が均一になり、異なるメッシュ構成数の要素供試体であっても、変形後の形状が同じになることがわかった。数値解析の結果から、第3章及び第5章で得られたそれぞれの非局所理論についての特徴を明らかにすることができた。

2つの非局所理論の特徴をより詳細に把握するためには、ひずみ軟化の取扱いを等しくするとともに、両非局所理論を用いた解析手法に、大変形問題にも適した有限変形理論を適用させ、共通の初期値—境界値問題を解くことにより詳しく検討する必要がある。コセラ連続体理論を用いた解析手法への有限変形理論の適用は、今後の課題として残された。

以上、非局所理論を用いた数値解析から得られた結果を述べた。これらのことから、両非局所理論が数値解析結果に及ぼす影響の基本的な特性が把握できた。しかしながら、土-水連成の粘性土の数値解析には、間隙水の移動による時間依存性や材料の粘性がもたらす時間依存性といった非局所理論とは別の、非局所作用がある。非局所理論を用いた解析モデルについて、さらに充実を図るには、実験や実測データとの比較検討を行う必要がある。本研究が、今後の非局所理論を用いた粘性土の数値解析を行う上での基礎となれば幸いである。

平成13年 8月

岐阜大学工学部土木工学科

沢田和秀

## 謝辞

本論文は、筆者が岐阜大学修士課程より継続中の研究成果をまとめたものです。本論文を結ぶに当たり、研究を遂行する上でご指導ご援助をいただいたすべての方々に深く感謝の意を表します。

本論文および本論文に関するすべての研究において、京都大学大学院工学研究科岡二三生教授には、絶大な影響力とともに、終始変わらぬ熱心で人情味あふれるご指導をいただきました。ここに書面を借りて、深く感謝の意を表します。岡二三生教授には、筆者が学生として、岐阜大学岡研究室（地盤機能学第3講座）に配属が決定してから現在に至るまで、土質力学の研究のみならず、いろいろなことについて刺激のあるご指導をいただきました。筆者のこれまでの生活に多大な影響を与えて下さいました。岡教授の絶対的で膨大な研究成果の礎にある、知識と探求心と向上心を見習い、今後も精進努力する所存であります。

岐阜大学工学部八嶋厚教授には、日頃から公私ともに多岐にわたるご示唆をいただきました。八嶋教授の視野の広い目的達成への前進の方法から多くのことを勉強させていただきました。これからもバイタリティー溢れる研究人生を歩んでいかれることを、勝手ながら期待させていただくとともに、深謝いたします。

京都大学大学院工学研究科足立紀尚教授、京都大学大学院工学研究科田村武教授には、ご多忙にもかかわらず、稚拙な本論文の審査を引き受けていただき、ご指導いただきました。的確な、そして明瞭なご指導により、本論文の方向性を見失わずに目的を達成することができました。ここに記して感謝いたします。

岐阜大学工学部、張鋒助教授、古本吉倫助手には地盤工学会支部活動の筆者の業務を援助していただき、多くの時間をいただくことができました。張助教授には、昼夜問わず筆者を冗談交じりで激励して下さいました。特に古本助手には、筆書の地盤工学会事務局の業務を多大に負担させる形となってしまうまいりました。ここにお詫びを申し上げるとともにお礼申し上げます。また、岐阜大学工学部杉戸真太教授、能島暢呂助教授には、日頃、杉戸・八嶋研究室と呼ばれるほど、親密な関係を続けていただきながら、助けを求めることしかできず、ご迷惑をおかけしたことをお詫びするとともに、お礼申し上げます。杉戸研究室の学生の皆様にも筆者の気晴らしにつきあっていただいたことに感謝いたします。

本論文に関する研究を国内外で発表させていただいたときに、多数の研究者の方々に意味深い質問やコメントをいただいたことにより、論文の内容に重みが増したと感じております。ありがとうございました。国内外の研究発表会に参加させていただいたことがこれらの経験を得られた基であること

は言うまでもありません。また、本論文の第3章、第4章、第5章の数値解析を研究時間を割いて手伝っていただきました今江礼行氏（現NTT）、福島耕司氏（現飛島建設）、平田雄一郎氏（現岐阜県）、岐阜大学大学院博士前期課程加藤治弘氏、彼らの協力なしでは本論文は完成し得ませんでした。

筆者の岐阜大学で助手としての業務が始まってから、研究室で苦楽をともに過ごしてきた学生諸氏に心からお礼申し上げます。筆者の気まぐれな言動につきあっていただいた、研究室の学生諸氏には、大変ご迷惑をおかけしました。特に、現博士後期課程古田竜一氏には、本論文作成に当たり、昼夜を問わず多大な協力をいただいたことを忘れることはできません。また、京都大学岡研究室の学生諸氏にも、筆者が岡教授の時間を束縛することが多々ありましたことをお詫び申し上げるとともに感謝いたします。

これまでの身勝手な行動と成長を温かく見守り、大学浪人や在学中の留年にも関わらず、岐阜大学大学院への進学を許していただいた両親と家族にも、この場を借りて感謝させていただきます。また、妻美奈子、長女悠と次女真穂には、日頃からの協力を感謝するとともに、今後の協力もお願いいたします。二人の娘の笑顔と柔軟な思考と柔軟な身体に負けないように努力します。

最後に、筆者がこの場にこのような結びを記すことができるまでにご協力いただいたすべての方々に厚くお礼申し上げますとともに、本論文に関して残された課題だけにとどまらず問題解決に対し努力を続ける所存であります。筆者が本論文に着手する機会を与えられたことに感謝します。ありがとうございました。

平成13年 8月

## 付録2.1 支配方程式に用いた各マトリクス誘導

各マトリクスを誘導するために必要な式を誘導する。

$$[A] = \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\partial v^{vp}}, [A^*] = \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\partial (\nabla^2 v^{vp})}, [A^{**}] = \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\partial \sigma'_{kl}} \quad (f2.1)$$

$$[G_{v^{vp}}] = \frac{\partial \dot{v}^{vp}}{\partial v^{vp}}, [G_\beta] = \frac{\partial \dot{v}^{vp}}{\partial (\nabla^2 v^{vp})}, [G_\sigma] = \frac{\partial \dot{v}^{vp}}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (f2.2)$$

2.1.1節, 2.1.2節より、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{v}^{vp}$ は、次式とおける。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Phi_1 \Phi_2 \left\{ \frac{1}{3\sigma_m} \delta_{ij} - \frac{(\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*) S_{mn}}{3M^* \bar{\eta}^* \sigma_m'^2} \delta_{ij} + \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{M^* \bar{\eta}^* \sigma_m'} \right\} \quad (f2.3)$$

右辺の括弧内を  $F_{ij}$  と置くと、

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Phi_1 \Phi_2 F_{ij} \quad (f2.4)$$

ここで、

$$\phi = \left\{ m'_N \left( \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma_{m(0)}'} + \frac{\bar{\eta}^*}{M^*} - \frac{1+e}{\lambda-\kappa} v^{vp} - a_3 \nabla^2 v^{vp} \right) \right\} \quad (f2.5)$$

とおくと、

$$\Phi_1 = M^* C_N \exp \left\{ m'_N \left( \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma_{m(0)}'} + \frac{\bar{\eta}^*}{M^*} - \frac{1+e}{\lambda-\kappa} v^{vp} - a_3 \nabla^2 v^{vp} \right) \right\} = M^* C_N \exp(\phi) \quad (f2.6)$$

$$\Phi_2 = 1 + \frac{M_f^* \bar{\eta}^*}{G_2 \left\{ M_f^* - \frac{\eta_{mn}^* (\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*)}{\bar{\eta}^*} \right\}} \quad (f2.7)$$

$$\dot{v}^p = \Phi_1 \Phi_2 F_{kk} \quad (f2.8)$$

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\partial v^{vp}} = -m' \frac{1+e}{\lambda-\kappa} \Phi_1 \Phi_2 F_{ij} \quad (f2.9)$$

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\partial (\nabla^2 v^{vp})} = -m' a_3 \Phi_1 \Phi_2 F_{ij} \quad (f2.10)$$

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \sigma'_{kl}} (\Phi_1 \Phi_2 F_{ij}) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma'_{kl}} \Phi_2 F_{ij} + \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma'_{kl}} F_{ij} + \Phi_1 \Phi_2 \frac{\partial F_{ij}}{\partial \sigma'_{kl}} \quad (f2.11)$$

(f2.11) 式の各項については、以下のようなものである。

$\left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma'_{kl}} \right\}$  について

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma'_{kl}} = M^* C_N \exp(\phi) \frac{1}{3} \delta_{kl} + M^* \sigma'_m C_N \exp(\phi) \left( \frac{1}{\sigma'_m} \frac{\delta_{kl}}{3} + \frac{1}{M^*} \frac{\partial \bar{\eta}^*}{\partial \sigma'_{kl}} \right) \quad (f2.12)$$

ここで、

$$\frac{\partial \bar{\eta}^*}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{\partial \bar{\eta}^*}{\partial \eta_{mn}^*} \frac{\partial \eta_{mn}^*}{\partial \sigma'_{kl}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \left( \frac{\partial \eta_{mn}^*}{\partial S_{pq}} \frac{\partial S_{pq}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial \eta_{mn}^*}{\partial \sigma'_m} \frac{\partial \sigma'_m}{\partial \sigma'_{kl}} \right) \\
&= \frac{\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \left\{ \frac{1}{\sigma'_m} (\delta_{mk} \delta_{nl} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{kl}) - \frac{S_{mn} \delta_{kl}}{3\sigma_m'^2} \right\} \\
&= \frac{\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*}{\bar{\eta}^* \sigma'_m} - \frac{(\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*) S_{mn} \delta_{kl}}{3\sigma_m'^2}
\end{aligned} \tag{f2.13}$$

よって、

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma_{kl}} = \left[ \frac{M^* C_N \delta_{kl}}{3} + M^* \sigma'_m C_N \left\{ \frac{\delta_{kl}}{3\sigma'_m} + \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{M^* \bar{\eta}^* \sigma'_m} - \frac{(\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*) S_{mn} \delta_{kl}}{3M^* \sigma_m'^2} \right\} \right] \exp(\phi) \tag{f2.14}$$

$\left\{ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma_{kl}} \right\}$  について、

ここで、次のように置く。

$$E_{MF} = M_f^* - \frac{\eta_{mn}^* (\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*)}{\bar{\eta}^*} \tag{f2.15}$$

$$E_{LF} = \eta_{mn}^* (\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*) \quad S_E = S_{mn} (\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*) \tag{f2.16}$$

$$S_{E1} = S_{mn} \eta_{mn}^* \quad , \quad S_{E2} = S_{mn} \eta_{mn(0)}^* \tag{f2.17}$$

よって、

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta_{ij}^*} \frac{\partial \eta_{ij}^*}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta_{ij}^*} \left( \frac{\partial \eta_{ij}^*}{\partial \sigma'_m} \frac{\partial \sigma'_m}{\partial \sigma'_{kl}} + \frac{\partial \eta_{ij}^*}{\partial S_{mn}} \frac{\partial S_{mn}}{\partial \sigma'_{kl}} \right) \tag{f2.18}$$

と書ける。また、

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta_{ij}^*} = \frac{M_f^* \left\{ \frac{\partial \bar{\eta}^*}{\partial \eta_{ij}^*} E_{MF} - \bar{\eta}^* \frac{\partial (E_{MF})}{\partial \eta_{ij}^*} \right\}}{G_2 (E_{MF})^2} \tag{f2.19}$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}^*}{\partial \eta_{ij}^*} = \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \tag{f2.10}$$

$$\frac{\partial (E_{MF})}{\partial \eta_{ij}^*} = - \frac{\frac{\partial}{\partial \eta_{ij}^*} \{ \eta_{mn}^* (\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*) \} \bar{\eta}^* - E_{LF} \frac{\partial \bar{\eta}^*}{\partial \eta_{ij}^*}}{\bar{\eta}^{*2}} \tag{f2.21}$$

$$= - \frac{(2\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*) \bar{\eta}^* - E_{LF} \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{\bar{\eta}^*}}{\bar{\eta}^{*2}} \tag{f2.22}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta_{ij}^*} = \frac{M_f^* \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{\bar{\eta}^*} E_{MF} + \frac{(2\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*) \bar{\eta}^{*2} - E_{LF} (\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*)}{\bar{\eta}^{*2}}}{(E_{MF})^2} \tag{f2.23}$$

$$\frac{\partial \eta_{ij}^*}{\partial \sigma'_m} \frac{\partial \sigma'_m}{\partial \sigma'_{kl}} = - \frac{S_{ij}}{3\sigma_m'^2} \delta_{kl} \tag{f2.24}$$

$$\frac{\partial \eta_{ij}^*}{\partial S_{mn}} \frac{\partial S_{mn}}{\partial \sigma'_{kl}} = - \frac{1}{\sigma'_m} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \tag{f2.25}$$

よって、 $\frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma'_{kl}}$  は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{M_f^*}{G_2(E_{MF})^2} \left[ -\frac{S_E E_{MF}}{3\bar{\eta}^* \sigma_m'^2} \delta_{ij} + \frac{(2\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*) S_{ij} \bar{\eta}^{*2} - E_{LF} S_E}{3\bar{\eta}^{*2} \sigma_m'^2} \delta_{ij} \right] \\ \left[ + \frac{(\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*) E_{MF}}{\bar{\eta}^* \sigma_m'} + \frac{(2\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*) \bar{\eta}^{*2} - E_{LF} (\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*)}{\bar{\eta}^{*2} \sigma_m'} \right] \quad (f2.26)$$

$\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial \sigma'_{kl}}\right)$  について、

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \sigma'_{kl}} \left( \frac{1}{3\sigma_m'} \delta_{ij} - \frac{\eta_{pq}^* - \eta_{pq(0)}^*}{3M^* \bar{\eta}^* \sigma_m'^2} S_{pq} + \delta_{ij} \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{M^* \bar{\eta}^* \sigma_m'} \right) \quad (f2.27)$$

ここで、次のように置く。

$$B_{ij} = \frac{\eta_{pq}^* - \eta_{pq(0)}^*}{3M^* \bar{\eta}^* \sigma_m'^2} S_{pq} \delta_{ij}, \quad C_{ij} = \frac{\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*}{M^* \bar{\eta}^* \sigma_m'} \quad (f2.28)$$

$$M_{ES2} = 3M^* \bar{\eta}^* \sigma_m', \quad M_{ES} = M^* \bar{\eta}^* \sigma_m' \quad (f2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma'_{kl}} \left( \frac{1}{3\sigma_m'} \delta_{ij} \right) = -\frac{1}{3\sigma_m'^2} \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (f2.30)$$

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial S_{pq}} \frac{\partial S_{pq}}{\partial \sigma'_{kl}} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_m'} \frac{\partial \sigma_m'}{\partial \sigma'_{kl}} \quad (f2.31)$$

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_m'} = \frac{1}{(M_{ES2})^2} \left\{ (2\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*) M_{ES2} - 3S_E M^* \sigma_m' \frac{\eta_{mn}^* - \eta_{mn(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \right\} \quad (f2.32)$$

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_m'} = \frac{1}{(M_{ES2})^2} \left\{ -\frac{S_{pq} S_{pq}}{\sigma_m'^2} M_{ES2} - 3S_E M^* \left( 2\bar{\eta}^* \sigma_m' - \frac{S_E}{\bar{\eta}^*} \right) \right\} \quad (f2.33)$$

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{\partial C_{ij}}{\partial S_{pq}} \frac{\partial S_{pq}}{\partial \sigma'_{kl}} + \frac{\partial C_{ij}}{\partial \sigma_m'} \frac{\partial \sigma_m'}{\partial \sigma'_{kl}} \quad (f2.34)$$

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial S_{pq}} = \frac{1}{(M_{ES})^2} \left\{ \frac{1}{\sigma_m'} M_{ES} \delta_{ip} \delta_{jq} - (\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*) M^* \frac{\eta_{pq}^* - \eta_{pq(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \right\} \quad (f2.35)$$

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial \sigma_m'} = \frac{1}{(M_{ES})^2} \left\{ -\frac{S_{ij}}{\sigma_m'^2} M_{ES} - (\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*) M^* \left( -\frac{S_E}{\bar{\eta}^* \sigma_m'} + \bar{\eta}^* \right) \right\} \quad (f2.36)$$

よって、 $\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial \sigma'_{kl}}\right)$  は次式で与えられる。

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial \sigma'_{kl}} = -\frac{1}{9\sigma_m'^2} \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{(M_{ES2})^2} \left\{ (2\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*) M_{ES2} - 3S_E M^* \sigma_m' \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \right\} \delta_{ij} \\ - \frac{1}{(M_{ES2})^2} \left\{ \eta^{*2} M_{ES2} - 3S_E M^* \left( 2\bar{\eta}^* \sigma_m' - \frac{S_E}{\bar{\eta}^*} \right) \right\} \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \\ + \frac{1}{(M_{ES})^2} \left\{ \frac{M_{ES}}{\sigma_m'} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) - (\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*) M^* \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \right\} \\ - \frac{1}{(M_{ES})^2} \left\{ -\frac{S_{ij}}{\sigma_m'^2} M_{ES} - (\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*) M^* \left( -\frac{S_E}{\bar{\eta}^* \sigma_m'} + \bar{\eta}^* \right) \right\} \frac{1}{3} \delta_{kl} \quad (f2.37)$$

$\left(\frac{\partial \dot{v}^P}{\partial \sigma'_{kl}}\right)$  について、

ここで、 $M_{ES1} = M^* \bar{\eta}^* \sigma'_m$  と置く。

$$\frac{\partial \dot{v}^P}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma'_{kl}} \Phi_2 F_{kk} + \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma'_{kl}} F_{kk} + \Phi_1 \Phi_2 \frac{\partial F_{kk}}{\partial \sigma'_{kl}} \quad (f2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{kk}}{\partial \sigma'_{kl}} = & -\frac{1}{3\sigma_m'^2} \delta_{kl} - \frac{1}{(M_{ES1})^2} \left\{ (2\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*) M_{ES1} - S_E M^* \sigma'_m \frac{\eta_{kl}^* - \eta_{kl(0)}^*}{\bar{\eta}^*} \right\} \\ & - \frac{1}{(M_{ES1})^2} \left\{ \eta^{*2} M_{ES1} - S_E M^* \left( 2\bar{\eta}^* \sigma'_m - \frac{S_E}{\bar{\eta}^*} \right) \right\} \frac{1}{3} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (f2.39)$$

$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma'_{kl}}$  は、(f2.14) 式、 $\frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma'_{kl}}$  は、(f2.26) 式で与えられる。

以上より、各マトリクスは定式化された。



## 付録5.1 式(5.40)から式(5.42)への展開

運動量保存の平衡条件式

$$\sigma_{ji,j} + \rho g_i = 0 \quad (5.32)$$

(5.32)式に $\delta u_i$ を乗じて体積 $V$ で積分すると、

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho g_i) \delta u_i dV = 0 \quad (f5.1)$$

角運動量の平衡条件式

$$m_{ji,j} + \rho \mu_i - e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (5.33)$$

(5.33)式に回転量 $\delta \phi_i$ を乗じて体積 $V$ で積分すると、

$$\int_V (m_{ji,j} + \rho \mu_i - e_{ijk} \sigma_{jk}) \delta \phi_i dV = 0 \quad (f5.2)$$

(f5.1)式、(f5.2)式より

$$\int_V \delta u_i (\sigma_{ji,j} + \rho g_i) dV + \int_V \delta \phi_i (m_{ji,j} + \rho \mu_i - e_{ijk} \sigma_{jk}) dV = 0 \quad (5.40)$$

これを分解して、

$$\int_V \sigma_{ji,j} \delta u_i dV + \int_V \rho g_i \delta u_i dV + \int_V m_{ji,j} \delta \phi_i dV + \int_V \rho \mu_i \delta \phi_i dV - \int_V e_{ijk} \sigma_{jk} \delta \phi_i dV = 0 \quad (f5.3)$$

$\int_V \sigma_{ji,j} \delta \phi_i dV$  ((f5.3)式左辺第1項)の展開

$$(\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} = \sigma_{ji,j} \delta u_i + \sigma_{ji} \delta u_{i,j} \quad \text{より} \quad \sigma_{ji,j} \delta u_i = (\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ji} \delta u_{i,j}$$

よって、

$$\int_V (\sigma_{ji,j} \delta u_i) dV = \int_V (\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV \quad (f5.4)$$

ガウスの発散定理より

$$= \int \sigma_{ji} \delta u_i n_j dS - \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV \quad (f5.5)$$

コーシーの定理より

$$= \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i dS - \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV \quad (f5.6)$$

$\int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV$  ((f5.6)式右辺第2項)の展開

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} - e_{jik} \phi_k^c \quad \text{より} \quad u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + e_{jik} \phi_k^c$$

$$\int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ij} \delta (\varepsilon_{ij} + e_{jik} \phi_k^c) dV$$

$$= \int_V \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \sigma_{ji} \delta e_{jik} \phi_k^c dV$$

$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p_w \delta_{ij}$  を考えて、

$$\begin{aligned} &= \int_V (\sigma'_{ji} + p_w \delta_{ij}) \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \sigma_{ji} \delta e_{jik} \phi_k^c dV \\ &= \int_V \sigma'_{ji} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V p_w \delta_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \sigma_{ji} \delta e_{jik} \phi_k^c dV \end{aligned}$$

書き直すと、

$$= \int_V \sigma'_{ji} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V p_w \delta \varepsilon_{kk} dV + \int_V \sigma_{ji} \delta e_{jik} \phi_k^c dV \quad (f5.7)$$

$\int_V m_{ji,j} \delta \phi_i dV$  ((f5.3) 式左辺第3項) の展開

$(m_{ji} \delta \phi_i)_{,j} = m_{ji,j} \delta \phi_i + m_{ji} \delta \phi_{i,j}$  より  $m_{ji,j} \delta \phi_i = (m_{ji} \delta \phi_i)_{,j} - m_{ji} \delta \phi_{i,j}$

よって、

$$\int_V m_{ji,j} \delta \phi_i dV = \int_V (m_{ji} \delta \phi_i)_{,j} dV - \int_V m_{ji} \delta \phi_{i,j} dV \quad (f5.8)$$

ガウスの発散定理より

$$= \int m_{ji} \delta \phi_i n_j dS - \int_V m_{ji} \delta \phi_{i,j} dV \quad (f5.9)$$

$m_{ij} n_j = \bar{\gamma}_i$  (on  $S_m$ ) を考え、 $\phi_{i,j} = k_{ij}$  とおくと、

コーシーの定理より

$$= \int_{S_m} \bar{\gamma}_i \delta \phi_i dS - \int_V m_{ji} \delta k_{ij} dV \quad (f5.10)$$

(f5.3) 式に (f5.6) 式、(f5.10) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} &\int_{S_\sigma} \bar{t}_i \delta u_i dS - \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV + \int_V \rho g_i \delta u_i dV + \int_{S_m} \bar{\gamma}_i \delta \phi_i dS - \int_V m_{ji} \delta k_{ij} dV \\ &\quad + \int_V \rho \mu_i \delta \phi_i dV - \int_V e_{ijk} \sigma_{jk} \delta \phi_i dV = 0 \end{aligned} \quad (f5.11)$$

(f5.11) 式の左辺第2項に (f5.7) 式を代入して、

$$\begin{aligned} &\int_{S_\sigma} \bar{t}_i \delta u_i dS - \int_V \sigma'_{ji} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V p_w \delta \varepsilon_{kk} dV - \int_V \sigma_{ji} \delta e_{jik} \phi_k^c dV + \int_V \rho g_i \delta u_i dV \\ &\quad + \int_{S_m} \bar{\gamma}_i \delta \phi_i dS - \int_V m_{ji} \delta k_{ij} dV + \int_V \rho \mu_i \delta \phi_i dV - \int_V e_{ijk} \sigma_{jk} \delta \phi_i dV = 0 \end{aligned} \quad (f5.12)$$

以上のことから、

$$\begin{aligned} & \int_V \sigma'_{ji} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V m_{ij} \delta k_{ij} dV + \int_V p_\omega \delta \varepsilon_{kk} dV \\ &= \int_V \rho g_i \delta u_i dV + \int_V \rho \mu_i \delta \phi_i dV + \int_{S_\sigma} \delta u_i \bar{t}_i dS_\sigma + \int_{S_m} \delta \phi_i \bar{\gamma}_i dS_m \end{aligned} \quad (5.42)$$