数理解析研究所講究録
第 1663 巻 2009 年 159-163

ネットワーク上のゲームダイナミクスとクラスタ係数

静岡大学　工学部 守田　智*

利己的な行動によって高い利得が得られる状況において協力行動が進化するメカニズムの一つとして空間的互恵主義がある [1, 2]. 個々のプレイヤーが低次元の空間に埋め込まれているためプレイヤーの接触や再生に制限がつくことによる互恵主義が保たれる. 低次元空間上のネットワークの大きな特徴の一つはクラスタ係数が高いことであり [3], 本研究の目的はクラスタ係数がゲームダイナミクスに与える影響を明らかにすることである.

まずネットワーク上のゲームを定義する. ここでネットワークとはノードと呼ばれる点の対のいくつかリンクによって結ばれている集合を指す. プレイヤーはノードに位置しリンクによって隣接するノードのプレイヤーとゲームを行い, その利得に応じて再生する. ネットワーク上のゲームダイナミクスについては多くの研究がある. [4] を参照されたい.

ネットワークのクラスタ係数とは, 次数 k のノード v のクラスタ係数は, v と隣接するノード間のリンクの数を $k(k-1)/2$ (つまりその取りうる最大値) で割ったものである. これはあるノードに着目してその隣接ノードを 2 つ選んだ時, その 2 つが隣接している割合に他ならない. ネットワーク全体のクラスタ係数は, すべての点にわたるクラスタ係数の平均値で与えられる [5]. クラスタ係数が高いという性質は, 2 つのノード間の最短距離がノードの総数に比べて微小であるという性質と合わせてスモールワールド性と呼ばれている. 現実のネットワークの多くがスモールワールド性を持つことが知られている [5].

本研究では, クラスタ係数が高いネットワークを以下のようにして導入する [6]. (i) すべてのノードの次数が等しいランダムネットワークを用意する. (ii) 2 つのリンクをランダムに選択し, 張り替えを試みる. リンクの張り替えによってクラスタ係数が増加しする場合には張り替えを実行し, それ以外の場合は何も行わない. ただし, リンクが多重になってしまう場合やネットワークの連結性が失われる場合に張り替えは行わないものとする. (iii) あらかじめ決めたクラスタ係数の値に達するまで (ii) の過程を繰り返す. この方法によって次数の分布を変えることなくクラスタ係数の大きなネットワークを作成することができる. 確率を用いているので得られるネットワークは実現例の一つにすぎないが, 以下で示す結果は, 実現例の違いにはほとんど依存しない. 得られたネットワークの例を図 1 に示した. ここで次数が一定な場合だけを考えていることに注意されたい. クラスタ係数の

email:morita@sys.eng.shizuoka.ac.jp

図 1: クラスタ係数が異なるランダムネットワークの例：左から $C = 0.02$, $C = 0.3$, $C = 0.6$.

影響に議論を集中するためスケールフリーのような非一様性が強いネットワークが結果に与える影響については扱わないこととした[1].

ここで用いるゲームダイナミクスの詳細は以下のとおりである．ネットワークのノードはゲームのプレイヤーに対応し，リンクはゲームを行うペアを表すと同時に戦略を更新する際のつながりを表すこととする．各ノードは隣合うノードすべてとゲームを行い利得の合計により以下のように適応度を決める．

$$(\text{適応度}) = 1 \quad w + w(\text{利得の合計})$$

w は選択圧の強さである（以下のシミュレーションでは $w = 0.5$ とした）．すべてのノードで次数が等しい場合は利得の合計を用いるか利得の平均値を用いるかは結果に影響を与えないことに注意しておこう．具体的には，以下の 4 通りの更新ルールを考える．

1. local competition process (LC): まずランダムにノードを選択する．そのノード i とリンクでつながるノードの中からランダムにノードを選択する（これをノード j とする）．それぞれの適応度を f_i と f_j をしたとき，ノード i の戦略は確率 $f_i/(f_i + f_j)$ でノード j に伝わる（ノード j にあった戦略は代わりに取り除かれる）．

2. birth-death process (BD): 適応度に比例した確率でノードを選択する．そのノードとリンクでつながるノードの中からランダムにノードを選択する．LC と同様に戦略が伝わる．

3. death-birth process (DB): まずランダムにノードを選択する．そのノード i とリンクのあるノードの中から適応度に比例する確率でノードを選択する（これをノード j とする）．ノード j の戦略がノード i に伝わる．

[1]次数の非一様性の影響は利得の計算法などのゲームダイナミクスの詳細に依存する．

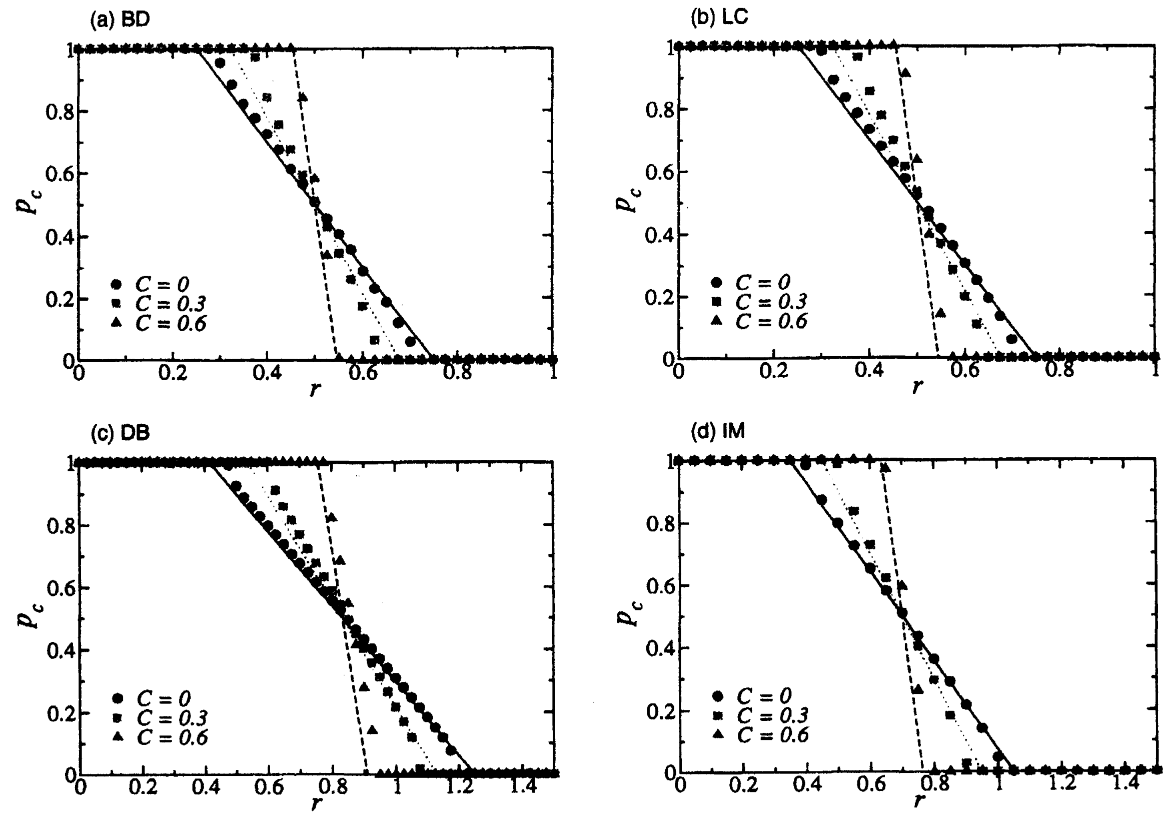

図 2: snow-drift ゲーム (1) の平衡状態における協力行動の比率をコスト対ベネフィット比 $r = c/(2b \quad c)$ の関数としてプロットした．ネットワークのノード数は 10000, 次数は 4 として 3 通りのクラスタ係数を用いている．10 通りのネットワークを構築してシミュレーションを行いその平均をプロットしている．

4. imitaion process (IM): まずランダムにノードを選択する．このノード i と隣合うノードとそのノード i 自身の中から適応度の比較した確率で一つのノードを選ぶ（これをノード j とする）．ノード j の戦略がノード i に伝わる．最初に選ばれたノードも含めて比較する点が DB と異なる．

先行研究の中で使われているモデルには，新たにノードが戦略を採用する際，上記のように確率的ではなく決定論的に最高利得を持つものを選択するものもある．しかし，確率的な更新ルールを取ることで次数や利得の特性がもたらす離散的な影響から結果が不連続になるのを避けることができ，解析的に扱う際にも有効である．また更新を同期的にするか非同期にするかによる影響も抑えられる．以下のシミュレーションでは非同期更新ルールを採用した．

以下に snow-drift ゲームと囚人のジレンマゲームを用いてシミュレーションを

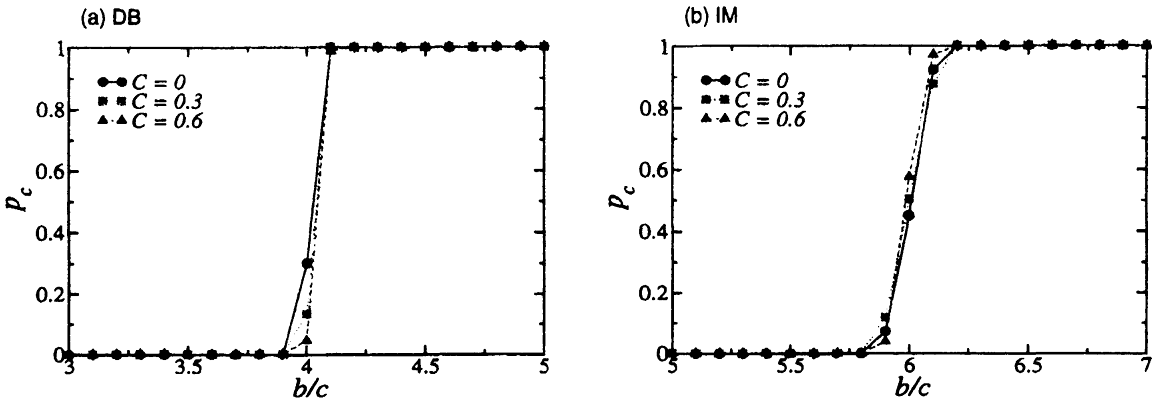

図 3: 囚人のジレンマゲーム (3) の平衡状態における協力行動の比率を b/c の関数としてプロットした．ネットワークは図 2 と同様のものを用いた．BD と LC はいずれも協力行動の比率が 0 になるので示しさなかった．

行った結果とペア近似による解析結果を示す．snow-drift ゲームの利得行列は

$$\begin{array}{ccc} & C & D \\ C & b \quad c/2 & b \quad c \\ D & b & 0 \end{array}\Bigg) \tag{1}$$

のように与えられる．コスト対ベネフィット比は $r = c/(2b \quad c)$ と定義される．このゲームは $r < 1$ の場合，タカハトゲームあるいはチキンゲームと呼ばれるものと同じ性質を持つ．2 つの戦略が共存する平衡状態がある．図 2 の結果が示しているようにクラスタ係数の増大によって共存領域は狭くなっている．ペア近似 [7] に解析によれば，LC と BD の更新ルールの場合

$$p_c = (1 \quad r)\frac{z' \quad 1}{z' \quad 2} \quad r\frac{1}{z' \quad 2} \tag{2}$$

ただし

$$z' = z \quad C(z \quad 1)$$

ここで z はノードの次数であり，C はクラスタ係数である．クラスタ係数 C の増加は見かけの次数 z' の減少に帰着されることがわかる．これにより共存領域が狭くなることを説明できる．DB と IM の更新ルールの場合には式 (2) より複雑になるが，見せかけの z' を導入することで同様の結論が導ける．

一方，囚人のジレンマゲームとしてしばしば用いられる利得行列 [2]

$$\begin{array}{ccc} & C & D \\ C & b \quad c & c \\ D & b & 0 \end{array}\Bigg) . \tag{3}$$

を用いた．BC と LC の更新ルールでは b や c によらず協力行動は速やかに絶滅してしまい，クラスタ係数による影響は見られない．DB と IM の結果を図 3 に示したように，b/c が次数で決まる一定の値を超えると協力戦略が裏切り戦略を駆逐する．この結果は，Ohtsuki ら [8] によるものと一致しており，やはりクラスタ係数による影響は認められない．また 2 つの戦略が共存する領域は存在しない．ペア近似を用いてこの結果を説明できる．クラスタ係数の影響を受けないという性質は T-R と S-P が等しいという利得行列の特殊な対称性により生じていることが示せる．すなわち共存領域も双安定領域も元々0の特殊な場合に対応するため変化しようがないのである．

まとめるとクラスタ係数の増加は 2 つの戦略の共存領域を減らす効果があり，クラスタ係数が小さいケースで比率の大きい戦略が促進される．すなわち，ばらばらな社会関係も協力行動が多いようなゲームで社会が表現できるなら，社会ネットワークがクラスター化することで協力行動が促進されるといえる．逆に協力行動が少数派になる場合は社会ネットワークのクラスターを取り除いたほうが協力行動の比率が上昇すると予想できる．

参考文献

[1] M. A. Nowak and R. M. May, Nature **359** , 826(1992).

[2] Martin A. Nowak, "Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life", Harvard University Press, Cambridge, (2006). 邦訳：竹内康博，佐藤一憲，厳佐　庸，中岡慎治監訳「進化のダイナミクスー生命の謎を解き明かす方程式ー」共立出版 (2008).

[3] S. Morita, Phys. Rev. E **73**, 035104R (2006).

[4] G. Szabó and C. Hauert, Phys. Rep. **44**, 97 (2007).

[5] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Nature **393**, 440 (1998).

[6] B. J. Kim, Phys. Rev. E 69, 045101 (2004).

[7] S. Morita, Prog. of Theor. Phys. **119**, 29 (2008).

[8] H. Ohtsuki, C. Hauert, E. Lieberman and M. A. Nowak, Nature **441**, 502 (2006).

[9] M. van Baalen, "Pair Approximations for Di erent Spatial Geometries", U. Dieckmann, R. Law and J. A. J. Metz (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000), 359.