

離散的な断面候補に対するトラスおよび骨組のトポロジー最適化

東京大学・情報理工学系研究科 勝見 佑平 (Yuhei Katsumi)
Graduate School of Information Science and Technology,
University of Tokyo

東京大学・情報理工学系研究科 寒野 善博 (Yoshihiro Kanno)
Graduate School of Information Science and Technology,
University of Tokyo

1 はじめに

建築, 機械, 航空工学などの分野において, 構造物を合理的に設計することは重要であり, 最適設計の研究が盛んに行われている。しかし, 既往の手法の多くは局所最適解を求めるものである。本稿では, 離散構造物のトポロジー最適化問題をグランドストラクチャ法 [8] に従って定式化し, 大域的最適解を求める手法を提案する。グランドストラクチャ法とは, 十分に多くの部材からなる初期構造物を用意し, 各部材断面積を変数として最適化問題を解き, 断面積が 0 となった部材を取り除くことで部材の接続関係 (トポロジー) を変化させる手法である。節点に作用する荷重によって生じる応答量に関する制約条件の下で, 部材の総体積が最小になるトポロジーと断面の形状寸法とを求めることが目的である。荷重に対する応答量には, 節点の変位, 部材応力, 振動数などが挙げられるが, 本研究では部材応力に関する制約を考える。

構造物としては, トラス構造物および骨組構造物の 2 種類を扱う。トラスの場合は部材に軸力しか作用しないので, 設計変数としては断面積のみを考慮すればよい。一方, 骨組の場合には曲げ変形も生じるため, 設計変数として断面 2 次モーメント, 曲げ方向の断面直径を追加する必要がある。本研究ではこれらの変数を離散変数, すなわち, あらかじめ与えられた集合の要素のみをとり得る変数として扱う。設計変数を離散変数として扱うことによる利点として, 工学的には規格に合わせて断面の寸法を設定できること, 数学的には混合整数線形計画問題 (MILP) に帰着でき, 大域的最適解を得られることが挙げられる。設計変数を連続変数として扱う場合, 応力制約の下での最適設計問題は非凸な非線形計画問題となる。トラス構造物の最適設計問題においては非線形性は強くななく, 大域的最適解を求める研究がなされている [13]。一方で, 骨組構造物を扱う場合, 4 節に示すように非線形性の強い制約条件を課す必要があり, 部材数の少ない設計問題に対しても大域的最適解を得るのは難しい。グランドストラクチャを構成する部材の断面積を離散変数として扱った先行研究は [1, 2, 3, 12, 14, 15]。などが挙げられる。本研究ではこのうち, 応力制約の下でトラス構造物の部材総体積を最小化する問題を扱っている Bollapragada et al. [2], Rasmussen and Stolpe [12] に注目し, 両研究の定式化の短所を明らかにして改良し, さらに骨組構造物の最適設計問題に拡張する。

第 2 節では, トラスのトポロジー最適化問題の MILP (Mixed Integer Linear Programming) の定式化, 第 3 節では, 同じ問題に関する MLLP (Mixed Logical Linear Programming) [5] の定式化を示す。第 4 節では, 第 2 節に示した定式化を骨組のトポロジー最適化問題を解く定式化に拡張する。続く第 5 節に数値実験の結果を示し, 最後に結論を第 6 節にまとめる。

2 トラスに関する定式化 (MILP)

この節では, Rasmussen and Stolpe [12] による MILP の定式化を改良したものを示す. Rasmussen and Stolpe [12] による MILP の定式化と同様の定式化は [2, 3, 14, 15] においても扱われている. この定式化の特徴は断面積が 0 であると定めた部材は応力制約から自由になる, という状況を 0-1 変数と十分大きな定数 (big-M) によってうまく実現している点である. 本研究では big-M を用いた式が, 0-1 変数を実数に緩和した際, 冗長で, かつ元の問題の実行可能領域と比較して非常に弱くなってしまふことを示し, それらの制約をより強く, 数の少ない制約に置き換え可能であることを示す.

以下では, $i = 1, 2, \dots, I$ は部材の index, $j = 1, 2, \dots, J$ は自由度の index, $p = 1, 2, \dots, P$ は断面積の種類 index とする. 平面トラスのグラッドストラクチャ (すなわち, 摩擦のない回転が自由なピン節点に接続する直線の部材の候補の集合) の各節点には並進の自由度 (2次元) が存在し, その各自由度に対し, 荷重 f_j が与えられ, その応答量として変位 u_j が定まる. この自由度を集めた座標 \mathbb{R}^J を系座標と呼ぶ. 荷重ベクトルを $f \in \mathbb{R}^J$, 変位ベクトルを $u \in \mathbb{R}^J$ と表す. 各部材 i に関する定数として, 弾性係数を E_i , 長さを l_i とする. 断面積は, 部材が存在するならば集合 $\{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{iP}\}$ のいずれかの値をとるものとする. また $0 < A_{i1} < A_{i2} < \dots < A_{iP}$ を満たすとし, 断面積のとりうる値は 0 も含め $P + 1$ 種類である. 各部材 i には荷重の応答量として伸び v_i , 応力 σ_i , 軸力 s_i が生じ, その部材の断面積を A_i とすると, 各応答量には以下の関係がある:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{l_i} v_i, \quad (1)$$

$$s_i = A_i \sigma_i, \quad (2)$$

$$v_i = b_i^t u. \quad (3)$$

応力と伸びの関係 (1) を構成則と呼ぶ. $b_i \in \mathbb{R}^J$ は系座標における部材方向余弦ベクトルであり, 変位 u と伸び v_i の関係 (3) を適合条件と呼ぶ. 応力制約として, 応力の下限 σ_i^L , 及び上限 σ_i^U を定める. (1) よりこの値から伸びの上下限 $v_i^L = \frac{l_i}{E_i} \sigma_i^L$, $v_i^U = \frac{l_i}{E_i} \sigma_i^U$ が決定する. 適合条件 (3) と構成則 (1) から, 応力は節点変位の関数であるので, 応力制約 $v_i^L \leq v_i \leq v_i^U$ を課すと変位にも結果的に制約が課されることになる. 部材の断面積が 0 の時, その部材の両端の節点の変位に制約がかかるのは不合理であるので, 制約が外れるように工夫する必要がある. この点が応力制約の下でのトポロジー最適化を難しい問題にしている. この問題点を解決する手法は 3 節の定式化に用いる方法と本節の定式化に用いる方法の 2 種類がある. 前者の方法は軸力変数を用いて応力制約と適合条件を課す方法である. 制約 $\sigma_i^L A_i \leq s_i \leq \sigma_i^U A_i$ は断面積が 0 の場合は自明な式になり, そうでない場合は応力制約 $v_i^L \leq v_i \leq v_i^U$ と等価である. ただしこの場合, 適合条件は $s_i = \frac{E_i}{l_i} A_i b_i^t u$ となり, 線形制約ではなくなってしまう (A_i, u は変数) ので, 適切な準緩和問題を考える必要がある. 後者の方法は断面積が 0 の場合のみ適合条件 (3) が外れるようにする方法である. この手法は big-M を用いて実現される.

系座標における部材剛性行列を全ての部材に関して足し合わせたもの (系剛性行列 $K \in \mathbb{R}^{J \times J}$) は

$$K = \sum_{i=1}^I A_i \frac{E_i}{l_i} b_i b_i^t \quad (4)$$

のように表され, これを用いて荷重 f と変位 u の関係 (釣合式) を記述できる:

$$Ku = f. \quad (5)$$

部材 i の断面積の候補 A_{ip} に対応する 0-1 変数 x_{ip} を次のように定義する:

$$x_{ip} = \begin{cases} 1 & (\text{部材 } i \text{ の断面積が } A_{ip} \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{部材 } i \text{ の断面積が } A_{ip} \text{ でないとき}). \end{cases} \quad (6)$$

構造物の部材断面積とトポロジーはこの 0-1 変数によって記述されることになる. 一つの部材につき一種類の断面積の値をもつか, その部材は存在しないかのいずれかであるので, 不等式

$$\sum_{p=1}^P x_{ip} \leq 1 \quad (7)$$

が必要である. このとき, 部材 i の断面積 A_i は

$$A_i = \sum_{p=1}^P x_{ip} A_{ip} \quad (8)$$

と表されることになる. (3), (4), (8) により釣合式 (5) は

$$\sum_{i=1}^I \sum_{p=1}^P x_{ip} A_{ip} \frac{E_i}{l_i} b_i v_i = f \quad (9)$$

のように書けるが, この等式は x_{ip} と v_i の双線形な等式である. 線形な等式で釣合式を表現するために変数 v_i を以下の式を満たすように分解する:

$$v_i = \sum_{p=1}^P v_{ip}, \quad (10)$$

$$x_{ip} v_i^L \leq v_{ip} \leq x_{ip} v_i^U, \quad (11)$$

$$|b_i^t u - v_{ip}| \leq (1 - x_{ip}) M. \quad (12)$$

ただし M は十分大きな正数 (big-M) であるとする. $x_{ip} = 1, x_{iq} = 0$ ($q \neq p$) の時, $v_{ip} = v_i$ となるので, (11) は応力制約に, (12) は適合条件に対応する. また, $x_{iq} = 0$ なる q に関して, (12) は $|b_i^t u| \leq M$ となるので適合条件が解消され, 不合理な制約条件は課されない. このことから $x_{ip} = 0$ ($\forall p$) の時, すなわち部材 i の断面積が 0 であるときは応力制約から自由となる. このように, 部材の消失を考慮した応力制約が (10)–(12) により正しく表現されている.

(6), (10), (11) より, $x_{ip} v_i = v_{ip}$ であるので釣合式 (9) は次の線形な等式で書ける:

$$\sum_{i=1}^I b_i \sum_{p=1}^P \frac{E_i A_{ip}}{l_i} v_{ip} = f. \quad (13)$$

目的関数値である部材総体積は $\sum_{i=1}^I l_i \sum_{p=1}^P x_{ip} A_{ip}$ と書けるので, 以上の制約条件 (7), (11),

(12), (13) から, Rasmussen and Stolpe [12] による MILP の定式化と等価な定式化が得られる:

$$\begin{aligned}
& \min_{x \in \{0,1\}^{IP}, u \in \mathbb{R}^J, v \in \mathbb{R}^{IP}} && \sum_{i=1}^I l_i \sum_{p=1}^P A_{ip} x_{ip}, \\
& \text{s.t.} && \sum_{i=1}^I b_i \sum_{p=1}^P \frac{E_i A_{ip}}{l_i} v_{ip} = f, \\
& && x_{ip} v_i^L \leq v_{ip} \leq x_{ip} v_i^U, \quad \forall (i, p), \\
& && |b_i^t u - v_{ip}| \leq (1 - x_{ip})M, \quad \forall (i, p), \\
& && \sum_{p=1}^P x_{ip} \leq 1, \quad \forall i, \\
& && x_{ip} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, p).
\end{aligned} \tag{14}$$

MILP(14) は制約 $x_{ip} \in \{0, 1\}$ を $0 \leq x_{ip} \leq 1$ に緩和した問題を利用し, 分枝限定法により大域的最適解を得ることができる. 変数の次元は $2IP + J$, 制約条件は $0 \leq x_{ip} \leq 1$ を除いて $4IP + I + J$ 個である.

以下では変数 x_{ip} を実数に緩和した際, 制約 (12) が許容する領域が必要以上に大きくなってしまふことを示し, それを改善する新たな制約 (17) を与える. この制約を線形制約として得るためには, 定式化 (14) のように伸び変数 v_i , または応力変数 σ_i を用いて定式化する必要がある. Rasmussen and Stolpe [12] は (伸び v_i ではなく) 軸力変数 s_i を用いて定式化しているので, 制約 (17) を定式化に導入する場合, $|A_i \sigma_i - s_i| \leq (1 - x_i)M$ のように A_i と σ_i の双線形な不等式になり, 得られる問題は MILP とならない.

記述の簡単のため, $\sum_{p=1}^P x_{ip} = x_i$ とする. 部材の index i を固定する. 各 p に対する P 個の制約 (11), (12) が許容する領域を $(b_i^t u, v_i, x_i) \in \mathbb{R}^3$ の空間に射影すると, 次の制約

$$v_i^L x_i \leq v_i \leq v_i^U x_i, \tag{15}$$

$$|P b_i^t u - v_i| \leq (P - x_i)M \tag{16}$$

が許容する領域となるが, 構成則と応力制約による元の問題の許容領域と比較して著しく大きい (図 1). そこで元の問題の許容領域の凸包を与える式で, (12) を置き換えることを考える. 制約 (15) と $2I$ 個の制約

$$|b_i^t u - v_i| \leq (1 - x_i)M \tag{17}$$

によって凸包が得られる.

以下の命題は定式化 (14) において制約 (12) を (17) で置き換えてよいことを保証する命題である.

命題 2.1. $-M \leq v_i^L, v_i^U \leq M$ を仮定する. この時, 変数 x_{ip}, v_{ip}, u が (12) を満たすための十分条件は, 変数 x_{ip}, v_{ip}, u が (11), (17) を満たすことである.

Proof. $\sum_{p=1}^P x_{ip} = x_i$ より (17) から

$$-M(1 - x_{ip}) \leq v_i + M \sum_{q \neq p} x_{iq} - b_i^t u \leq M(1 - x_{ip})$$

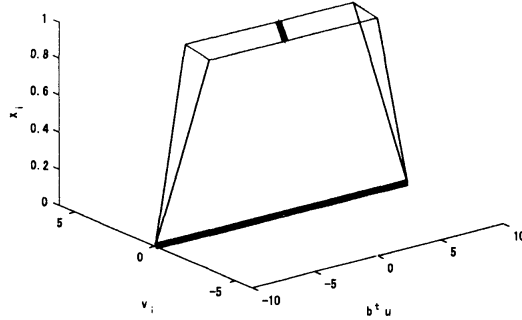


図 1: 緩和した際の (11), (12) の許容領域 ($P = 3, M = 10, v^U = 1, v^L = -1$ の例. 太線が元の問題の許容領域).

が得られる. この式に, (11) を p について和をとることで得られる v_i に関する不等式

$$\sum_{q \neq p} x_{iq} v_i^L \leq v_i - v_{ip} \leq \sum_{q \neq p} x_{iq} v_i^U$$

を適用し, 命題の仮定を利用して整理することで (12) が得られる. \square

$2IP$ 個の制約 (12) を $2I$ 個の制約 (17) に置き換えることで, x_{ip} を実数に緩和した際に生じる元の問題と緩和問題の許容領域のギャップが小さくなり, 目的関数値の差が小さくなる可能性がある. さらに (14) では制約条件の数が $4IP + I + J$ 個であったのが, 以下の定式化 (18) では $2IP + 3I + J$ 個と約半分になる:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \{0,1\}^{IP}, u \in \mathbb{R}^J, v \in \mathbb{R}^{IP}} \quad & \sum_{i=1}^I l_i \sum_{p=1}^P A_{ip} x_{ip}, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^I b_i \sum_{p=1}^P \frac{E_i A_{ip}}{l_i} v_{ip} = f, \\ & x_{ip} v_i^L \leq v_{ip} \leq x_{ip} v_i^U, \quad \forall (i, p), \\ & \left| \sum_{p=1}^P v_{ip} - b_i^t u \right| \leq M \left(1 - \sum_{p=1}^P x_{ip} \right), \quad \forall i, \\ & \sum_{p=1}^P x_{ip} \leq 1, \quad \forall i, \\ & x_{ip} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, p). \end{aligned} \tag{18}$$

3 トラスに関する定式化 (MLLP)

この節では Bollapragada et al. [2] による MLLP の定式化をベースに, 2 節に示した MILP と同じトラスのトポロジー最適化問題の定式化を導く. Bollapragada et al. [2] の定式化では, 断面積

が0の部材には応力制約が課されないようにする工夫がされていない。そのため断面積の候補として0を小さな正数で代用し、この値をとる部材は存在しないものとみなすが、この方法では正しい最適トポロジーは得られない。これは2節で述べた通り不合理な節点変位の制約が生じてしまうためである。一方で、MLLPの定式化は問題のサイズが断面積の種類の数 P によらないという利点がある。そこで本研究ではこの利点を保ちつつ、軸力変数を用いて応力制約を表すことにより、この問題点を解決する定式化を導く。

部材 i の断面積 A_i は最大値 A_i^U と最小値 A_i^L の凸結合で表す:

$$A_i = A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i), \quad (19)$$

$$0 \leq y_i \leq 1. \quad (20)$$

断面積が集合 $\{0, A_{i1}, \dots, A_{iP}\}$ の要素の値のみとり得る、という条件は離接 \bigvee を用いて表す。便宜的に $A_{i0} = 0$ とすると、

$$\bigvee_{p=0}^P [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i) = A_{ip}] \quad (21)$$

となる。Bollapragada et al. [2]は応力制約として $v_i^L \leq v_i \leq v_i^U$ を定式化に採用しているが、断面積が0の場合に制約が消えるように断面積との積をとり、軸力 s_i を用いて応力制約を記述すると、(2), (19)より

$$[A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i)] \sigma_i^L \leq s_i \leq [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i)] \sigma_i^U \quad (22)$$

となる。この式は $A_i = 0$ の時自明な等式となり、部材 i は制約から自由である。軸力 s_i と伸び v_i の関係は、(1), (2), (19)から次のように書ける:

$$s_i = [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i)] \frac{E_i}{l_i} v_i. \quad (23)$$

さらに釣合式(5)は(3), (4), (19), (23)より次のように書ける:

$$\sum_{i=1}^I b_i s_i = f. \quad (24)$$

以上の制約(20), (21), (22), (23), (24)に適合条件(3)を合わせて問題を定式化できる。(23)は y_i と v_i の双線形な等式になっている。そのため、適切な準緩和問題を分枝限定法の子問題として解くことを考える。後に示す準緩和問題との比較を容易にするため、冗長な変数 v_i を残し、さらに

$v_i = v_{i0} + v_{i1}$ と表して定式化を示す:

$$\begin{aligned}
& \min_{y \in \mathbb{R}^I, u \in \mathbb{R}^J, (v_0 + v_1) \in \mathbb{R}^I, s \in \mathbb{R}^I} \sum_{i=1}^I l_i [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i)], \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^I b_i s_i = f, \\
& \quad b_i^t u = v_{i0} + v_{i1}, \quad \forall i, \\
& \quad s_i = [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i)] \frac{E_i}{l_i} (v_{i0} + v_{i1}), \quad \forall i, \\
& \quad [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i)] \sigma_i^L \leq s_i \leq [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i)] \sigma_i^U, \quad \forall i, \\
& \quad \bigvee_{p=0}^P [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i) = A_{ip}], \quad \forall i, \\
& \quad 0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i.
\end{aligned} \tag{25}$$

問題 (25) を解く際には Bollapragada et al. [2] が示した方法と同様に離散断面の制約 (21) を除き、双線形な制約 (23) を適切に緩和した準緩和問題を構成する。定式化 (25) と Bollapragada et al. [2] が示した定式化は応力制約が異なるので、(25) に即した準緩和問題を新たに構成しなければならない。問題 Q が問題 P の準緩和問題であるとは、P の任意の実行可能解（目的関数値 obj ）に対し、 obj 以下の目的関数値をとる Q の実行可能解が存在する、ということである。

本研究が提案する準緩和問題は以下の線形計画問題である:

$$\begin{aligned}
& \min_{y \in \mathbb{R}^I, u \in \mathbb{R}^J, v_0 \in \mathbb{R}^I, v_1 \in \mathbb{R}^I, s \in \mathbb{R}^I} \sum_{i=1}^I l_i [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i)], \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^I b_i s_i = f, \\
& \quad b_i^t u = v_{i0} + v_{i1}, \quad \forall i, \\
& \quad s_i = [A_i^L v_{i0} + A_i^U v_{i1}] \frac{E_i}{l_i}, \quad \forall i, \\
& \quad [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i)] \sigma_i^L \leq s_i \leq [A_i^L y_i + A_i^U (1 - y_i)] \sigma_i^U, \quad \forall i, \\
& \quad |v_{i0}| \leq M y_i, \quad \forall i, \\
& \quad v_i^L (1 - y_i) \leq v_{i1} \leq v_i^U (1 - y_i), \quad \forall i, \\
& \quad 0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i.
\end{aligned} \tag{26}$$

ただし M は十分大きな正数 (big-M) である。以下の命題 3.1 は問題 (26) の解が問題 (25) の最適値の下界値を与えることを示し、さらに命題 3.2 はある条件のもとで上界値を与えることを示している。

命題 3.1. $|b_i^t u| \leq M$ であり、 $A_i^L = A_i^U = 0$ のときは $y_i = 1$ であると仮定すると問題 (26) は問題 (25) の準緩和問題である。

Proof. 目的関数値 obj をとる問題 (25) の任意の実行可能解 $(y, u, v_0 + v_1, s)$ に対し、

$$\tilde{y} = y, \quad \tilde{u} = u, \quad \tilde{v}_{i0} = y_i (v_{i0} + v_{i1}) \quad \forall i, \quad \tilde{v}_{i1} = (1 - y_i) (v_{i0} + v_{i1}) \quad \forall i, \quad \tilde{s} = s$$

とすると, $(\tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{s})$ は問題 (26) の実行可能解であり, 目的関数値は obj である. 問題 (26) の第 5, 6 番目の制約を満たすために上記の仮定が必要である. \square

命題 3.2. 目的関数値 obj をとる準緩和問題 (26) の実行可能解 $(\tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{s})$ が

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^P [A_i^L \tilde{y}_i + A_i^U (1 - \tilde{y}_i)] = A_{ip} & \forall i, \\ (1 - \tilde{y}_i) \tilde{v}_{i0} = \tilde{y}_i \tilde{v}_{i1} & \forall i \end{cases} \quad (27)$$

を満たす時,

$$v_0 + v_1 = \tilde{v}_0 + \tilde{v}_1, \quad y = \tilde{y}, \quad u = \tilde{u}, \quad s = \tilde{s}$$

とすると $(y, u, v_0 + v_1, s)$ は元の問題 (25) の実行可能解であり, 目的関数値は obj である. さらに, $A_i^L = A_i^U$ の場合は条件 (27) が成立しなくても同じ構成方法で元の問題の実行可能解が得られる.

非線形計画問題 (25) を解くために, 分枝限定法の各ノードで A_i^L, A_i^U を適切に変化させた緩和問題 (26) を解く (詳しくは 5.1 節参照). 分枝限定法の葉に対応するノードにおいては全ての i について $A_i^L = A_i^U$ となるので, 命題 3.2 はこの分枝限定法により (25) の大域的最適解を必ず得ることができることを保証している. なお, $A_i^L = A_i^U$ の時は y_i の値をどのようにしても断面積 A_i の値は変わらないので, $A_i^L = A_i^U \neq 0$ の場合 y_i は自由であるが, $y_i = 0$ と定めるのが良い. というのは, この時緩和問題 (26) の応力制約が元の問題 (25) のものと一致するためである. また, 命題 3.2 の条件 (27) より強い条件として, $\tilde{y}_i \in \{0, 1\}$ が挙げられる. $\tilde{y}_i \in \{0, 1\}$ が成立せずに (27) が成立する場合はほとんどないので, 実装の際は $\tilde{y}_i \in \{0, 1\}$ を上界値を得る条件とするのが良い.

緩和問題 (26) は変数が $4I + J$ 個, 制約条件が $8I + J$ 個である. 2 節で示した同じ問題を扱う MILP の定式化 (18) は問題のサイズが P に従って増加する分, この節で示した MLLP の定式化の方が有利だが, 緩和の程度を比較すると, 離散断面の制約に加えて応力制約にも緩和がかかる MLLP の定式化の方が不利である. 2 つの定式化の比較は 5.2 節の数値実験で行う.

4 骨組に関する定式化への拡張

骨組の場合, 部材に曲げ変形も生じるので, 問題の記述に断面 2 次モーメント μ_i , 曲げを考慮する方向の断面直径 d_i が必要であり, 断面積と同様離散変数であるとする. すなわち, $(A_i, \mu_i, d_i) \in \{(0, 0, 0), (A_{i1}, \mu_{i1}, d_{i1}), \dots, (A_{iP}, \mu_{iP}, d_{iP})\}$ である. 断面 2 次モーメントは断面積の非線形関数であるので, (19) のように上限と下限の凸結合で表そうとすると, 断面積との対応が崩れてしまう. 従って 3 節に示した MLLP の定式化は骨組の場合に向かないと考えられる. 一方, 2 節に示した方法と同様に $(A_{ip}, \mu_{ip}, d_{ip})$ に対応する 0-1 変数 x_{ip} を導入することで骨組のトポロジー最適化問題も MILP として定式化できる. 問題の定式化に必要な制約条件 (34), (36) は非常に非線形性が強く, この制約を線形制約として記述できることは断面のパラメータを離散変数として扱うことによる大きな利点であると言える.

骨組構造物の場合, 節点が剛節点であり節点まわりの部材同士の角度は不変なので, 一つの節点に接続している部材に関して, 節点における角度が全て同じであるような曲げ変形が生じる. 各節点の並進の自由度 (2 次元) に加え, この角度の自由度 (1 次元) を合わせて系座標 \mathbb{R}^J を構成する. 曲げ変形が生じるので, トラスの場合のように軸方向の応力に上下限を与えるだけでは不十分である. そこで本研究では軸力-曲げモーメント相関降伏条件 [9] を課すことにする. 部材 i の両端

の断面に働く軸力を N_{i1} , N_{i2} , 曲げモーメントを M_{i1} , M_{i2} とする. 軸方向応力の上限から軸力の上限 $N_i^U = \sigma_i^U A_i$, 曲げモーメントの上限 $M_i^U = \frac{d_i}{2} \sigma_i^U A_i$ が定まり, 同様に σ_i^L から下限が定まるが, 簡単のためにこの節では $\sigma_i^L = -\sigma_i^U$ とする. これらの上下限を用いて相関降伏条件は次のように書ける:

$$\left| \frac{N_{i1}}{N_i^U} \right| + \left| \frac{M_{i1}}{M_i^U} \right| \leq 1, \quad (28)$$

$$\left| \frac{N_{i2}}{N_i^U} \right| + \left| \frac{M_{i2}}{M_i^U} \right| \leq 1. \quad (29)$$

定数ベクトル $\bar{b}_1 = [1, 0, 0, -1, 0, 0]^t$, $\bar{b}_2 = [0, 1, \frac{l_i}{2}, 0, -1, \frac{l_i}{2}]^t$, $\bar{b}_3 = [0, 0, 1, 0, 0, -1]^t$ を部材 i のグランドストラクチャにおける向きに従って回転し, 系座標におけるベクトルに座標変換したベクトルを b_{i1} , b_{i2} , $b_{i3} \in \mathbb{R}^J$ とする. 適合条件

$$v_{ik} = b_{ik}^t u, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (30)$$

によって表される伸びに対応する変数 v_{i1} , v_{i2} , v_{i3} は軸力, 曲げモーメントと次の関係

$$|N_{i1}| = |N_{i2}| = \frac{E_i}{l_i} A_i |v_{i1}|, \quad (31)$$

$$\frac{|M_{i1} + M_{i2}|}{l_i} = 12\mu_i \frac{E_i}{l_i^3} |v_{i2}|, \quad (32)$$

$$\frac{|M_{i1} - M_{i2}|}{2} = \mu_i \frac{E_i}{l_i} |v_{i3}| \quad (33)$$

がある. この3つの変数を用いて相関降伏条件 (28), (29) を表すと,

$$|v_{i1}| + \frac{12\mu_i}{l_i d_i A_i} |v_{i2}| + \frac{2\mu_i}{d_i A_i} |v_{i3}| \leq v_i^U, \quad (34)$$

と非線形性の強い制約条件として書ける. また釣合式 $Ku = f$ も以下に示すように非線形な制約となる. 部材ごとの剛性行列を系座標に変換して足し合わせた系剛性行列は

$$K = \sum_{i=1}^I A_i \frac{E_i}{l_i} b_{i1} b_{i1}^t + \sum_{i=1}^I 12\mu_i \frac{E_i}{l_i^3} b_{i2} b_{i2}^t + \sum_{i=1}^I \mu_i \frac{E_i}{l_i} b_{i3} b_{i3}^t \quad (35)$$

のように書ける [9] ので, 釣合式 $Ku = f$ は

$$\sum_{i=1}^I \left(\frac{E_i A_i}{l_i} b_{i1} v_{i1} + 12\mu_i \frac{E_i}{l_i^3} b_{i2} v_{i2} + \mu_i \frac{E_i}{l_i} b_{i3} v_{i3} \right) = f \quad (36)$$

と双線形な等式で表される. 以上の2つの非線形な制約条件 (34), (36) を線形制約として表すため, 以下の条件を満たすように, 全ての部材 i に関して変数 v_{i1} , v_{i2} , v_{i3} を P 個に分解する:

$$\sum_{p=1}^P v_{ipk} = v_{ik}, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (37)$$

$$|v_{ip1}| + \frac{12\mu_{ip}}{l_i d_{ip} A_{ip}} |v_{ip2}| + \frac{2\mu_{ip}}{d_{ip} A_{ip}} |v_{ip3}| \leq x_{ip} v_i^U, \quad (38)$$

$$|v_{ipk} - b_{ik}^t u| \leq M_k (1 - x_{ip}), \quad (k = 1, 2, 3). \quad (39)$$

ただし, M_k は十分大きな正数 (big-M) である. 2節と同様の考察で, $x_{ip} = 1$ の時, (38) は相関降伏条件, (39) は適合条件に対応し, 全ての p に関して $x_{ip} = 0$ の時, 部材 i は相関降伏条件から自由になる. この新しい変数 v_{ipk} によって力の釣り合い (36) は

$$\sum_{i=1}^I \sum_{p=1}^P \left(\frac{E_i A_{ip}}{l_i} b_{i1} v_{ip1} + 12\mu_{ip} \frac{E_i}{l_i^3} b_{i2} v_{ip2} + \mu_{ip} \frac{E_i}{l_i} b_{i3} v_{ip3} \right) = f \quad (40)$$

と線形な等式として書ける. 命題 2.1 と同様の主張が成立するので (39) を線形不等式

$$\left| \sum_{p=1}^P v_{ipk} - b_{ik}^t u \right| \leq M_k (1 - \sum_{p=1}^P x_{ip}), \quad (k = 1, 2, 3) \quad (41)$$

で置き換えることができ, この制約と (7), (38), (40) を合わせ, 骨組のトポロジー最適化問題を MILP として定式化できる:

$$\begin{aligned} \min_{x, u, v} \quad & \sum_{i=1}^I l_i \sum_{p=1}^P A_{ip} x_{ip}, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^I \sum_{p=1}^P \left(\frac{E_i A_{ip}}{l_i} b_{i1} v_{ip1} + \frac{12E_i \mu_{ip}}{l_i^3} b_{i2} v_{ip2} + \frac{E_i \mu_{ip}}{l_i} b_{i3} v_{ip3} \right) = f, \\ & |v_{ip1}| + \frac{12\mu_{ip}}{l_i d_{ip} A_{ip}} |v_{ip2}| + \frac{2\mu_{ip}}{d_{ip} A_{ip}} |v_{ip3}| \leq x_{ip} v_i^U, \quad \forall (i, p), \\ & \left| \sum_{p=1}^P v_{ipk} - b_{ik}^t u \right| \leq M_k (1 - \sum_{p=1}^P x_{ip}), \quad \forall (i, k), \\ & \sum_{p=1}^P x_{ip} \leq 1, \quad \forall i, \\ & x_{ip} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, p). \end{aligned} \quad (42)$$

定式化 (42) の変数の次元は $4IP + J$, 制約条件の数は $8IP + I + J$ 個である. (41) の代わりに (39) を用いると制約条件の数は $14IP + I + J$ 個となるので, 骨組の場合も命題 2.1 による制約の置き換えは問題サイズの減少に大きく寄与している.

5 数値実験

この節の全ての数値実験は Xeon CPU 3.60 GHz 3.25 GB RAM を使用する. また, 緩和問題を解くための LP の solver には CPLEX 11.2 [6] を初期設定で用いる. プログラムは MATLAB R2007b [16] 上で動作し, CPLEX とのインターフェイスに CPLEXMEX [4] を用いる.

5.1 分枝限定法のアルゴリズム

以下に示すアルゴリズムは Bollapragada et al. [2] が MLLP の定式化を解くのに用いたアルゴリズムに, 分枝する部材の優先順位を定めるヒューリスティクスを加えたものである. このアルゴリズムの分枝方法は MILP の定式化においても複数の p について x_{ip} を同時に固定することにより実現可能である.

1. 緩和問題を解く
2. 枝切り判定 緩和問題の解の目的関数値が、すでに得られている上界値より大きければ終了。
3. 枝切り判定 2 緩和問題の解について、MILP なら整数性、MLLP なら条件 (27) を満たすなら終了。その際すでに得られている上界値より目的関数値が小さければ上界値を更新。
4. 分枝する部材の選択 緩和問題の解において最も断面積の大きい部材 i を選択。断面積を A_i とする。
5. 分枝 $A_i^L = (A_i$ 以上の断面積候補のうち最も小さいもの) とした枝 1 と, $A_i^U = (A_i$ より小さい断面積候補のうち最も大きいもの) とした枝 2 に分枝する。
6. 探索 枝 1, 枝 2 の順に深さ優先探索を行う (枝の各点で 1. に戻る)。

5.2 比較実験

本節では命題 2.1 を利用した MILP の定式化の改良の効果の検証, MILP の定式化 (14), (18) と MLLP の定式化 (25) の比較, CPLEX 11.2 [6] の MIP の solver (全て初期設定) と 5.1 節の分枝限定法の比較を行う。

表中の記法についてまとめる。MILP の定式化を解く場合, CPLEX の MIP の solver を利用したものは MILP(CPLEX), 5.1 節の分枝限定法を利用したものは MILP(5.1) と表す。MLLP の定式化を解くためには CPLEX は利用できない。そこで, 5.1 節の分枝限定法を利用し, MLLP(5.1) と表す。表中の '改良' (命題 2.1 を利用した制約の置き換えによる改良) の項目に関して, 改良の有無とそれぞれ表中の imp, old が対応している。なおこの項目は MILP に関してのみ意味がある。cpu は計算時間, relax は解いた緩和問題の数である。*は 2000 [s] 以内で計算が終了しなかったことを表す。また, relax の項に関して, x**と表した場合, x は実際解いた緩和問題の数を 100 の位で切り上げた数である。P の項目は断面積 0 を除いた断面の選択肢の数である。

実験は 20 部材骨組構造物, 20 部材トラス構造物, 45 部材トラス構造物の 3 種類を扱い, 計算結果をそれぞれ表 1, 2, 3 にまとめる。45 部材トラス構造物の実験に関しては, グラウンドストラクチャと $P = 10$ の場合の最適トポロジーを図 2 に示す。

以下, 比較実験の結果をまとめる。命題 2.1 を利用した MILP の定式化の改良の効果は, 表 1, 2, 3 における old と imp の項の比較により, アルゴリズムに依らず $P \geq 5$ のほとんどの場合で, 計算時間が減少していることがわかる。特に骨組の場合 (表 1) は改良の効果が顕著であり, 解いた緩和問題の数も減少している。次に, CPLEX の MIP の solver と, 5.1 節の分枝限定法の比較である。20 部材の実験においては, 表 1, 2 における MILP(CPLEX), MILP(5.1) の項が示す通り, 5.1 節の分枝限定法の方が計算効率が良い。一方で部材数が増えると CPLEX の MIP の solver の方が計算効率が良くなる傾向があり, 45 部材の実験 (表 3) はその一例である。最後に, 2 つの定式化の比較についてまとめる。同じ 5.1 節の分枝限定法のアルゴリズムを用いた場合, 表 2, 3 の MILP(5.1), MLLP(5.1) の項が示す通り, MLLP の定式化の方が計算効率が良いことがわかる。しかし, 表 3 の MILP(CPLEX) と MLLP(5.1) の項を比較すると, MILP(CPLEX) の方が計算効率が良い。部材数の多い実験においては, MLLP に適した切除平面や妥当不等式を利用したり, 5.1 節の分枝限定法のような単純な深さ優先探索ではないアルゴリズムを用いることができなければ, 本研究で提案した改良された MILP の定式化を CPLEX を利用して解く方法が最良であると考えられる。

表 1: 20 部材骨組構造物

P	改良	MILP(CPLEX)		MILP(5.1)	
		cpu [s]	relax	cpu [s]	relax
2	old	6.09	700**	2.61	131
	imp	3.20	400**	2.03	117
5	old	37.31	3200**	13.41	191
	imp	23.36	3300**	8.08	145
10	old	1820.1	150200**	177.67	765
	imp	531.41	62400**	78.20	471
20	old	*	*	1928.6	2295
	imp	*	*	431.70	771

表 2: 20 部材トラス構造物

P	改良	MILP(CPLEX)		MILP(5.1)		MLLP(5.1)	
		cpu[s]	relax	cpu[s]	relax	cpu[s]	relax
2	old	0.09	100**	0.55	121	0.56	121
	imp	0.09	200**	0.66	129		
5	old	0.42	400**	0.70	71	0.28	71
	imp	0.55	600**	0.59	73		
10	old	2.19	600**	1.67	73	0.36	73
	imp	0.77	400**	1.16	73		
20	old	3.28	600**	1.30	21	0.09	21
	imp	1.48	400**	0.75	21		

5.3 規格表を用いた骨組構造物の最適設計

井上 [7] 第 2 部 6.2.2 節「骨組の塑性設計」にある設計例に従い問題を設定する。5 層 3 スパンの 35 部材構造物の各層に鉛直荷重および水平力を作用させる。井上 [7] は荷重を各節点と梁中央に作用するものとしているが、本実験ではその荷重と力、モーメントが釣り合うように各節点のみに荷重を作用させる。左右両端の全ての節点に鉛直下方向に 225 [kN]、中央部 2 本の柱の全ての節点に鉛直下方向に 275 [kN]、各層の左端の節点に対し、下層から順に 158 [kN]、180 [kN]、213 [kN]、278 [kN]、671 [kN] の水平左方向の荷重を与える。全ての部材 i に関して弾性係数 $E_i = 20000$ [kN/cm²]、軸方向応力上限 $\sigma_i^U = 30$ [kN/cm²]、及び下限 $\sigma_i^L = -30$ [kN/cm²] とし、柱の部材に関しては角型鋼管 (正方形) を用い、梁の部材に関しては H 型鋼を用いる。角型鋼管の断面形状は表 4 に、H 型鋼の断面形状は表 5 にまとめる。表 4 は日鐵住金建材株式会社 [11] の角型鋼管断面性能表からの抜粋である。また、表 5 は若林 [17] に記載されている JIS G 3192-1990 の規格表を一部抜粋したものである。2 方向の水平力に対応するため、左右対称な位置にある部材は同じ部材を用い、また、施工上の理由から 1 本の柱は全て同じ部材を用いるとして、断面積 0 を許さずに定式化 (42) を利用して最適設計問題を解いた結果を表 6 にまとめる。部材総体積は 6.6462 [m³] で、計算時間は 21.42 [s] であった。

表 3: 45 部材トラス構造物

P	改良	MILP(CPLEX)		MILP(5.1)		MLLP(5.1)	
		cpu[s]	relax	cpu[s]	relax	cpu[s]	relax
2	old	2.03	900**	7.28	859	8.05	859
	imp	1.70	1200**	6.53	863		
5	old	19.05	9300**	139.38	5245	48.83	5237
	imp	20.52	15300**	101.25	5117		
10	old	236.59	61700**	*	*	998.08	108227
	imp	101.41	49300**	*	*		

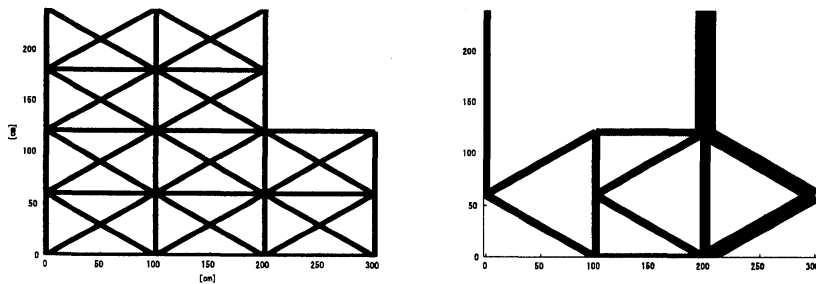


図 2: 45 部材トラスのグラッドストラクチャ (左) と最適トポロジー (右) (右端の 3 節点のうち中央の節点に鉛直下向きの荷重を与えている)

表 4: 角型鋼管 (正方形) の断面形状

部材番号	曲げ方向直径 [cm]	断面積 [cm ²]	断面二次モーメント [cm ⁴]
角 1	40	206.5	65400
角 2	50	230.5	90800
角 3	50	303.2	117000
角 4	50	356.3	136000
角 5	50	408.2	153000

表 5: H 型鋼の断面形状

部材番号	曲げ方向直径 [cm]	断面積 [cm ²]	断面二次モーメント [cm ⁴]
H1	39	136.0	38700
H2	41.4	295.4	92800
H3	42.8	360.7	119000
H4	45.8	528.6	187000
H5	49.8	770.1	298000

表 6: 最適設計解

部材位置	部材番号
端の 2 本の柱	角 4
中央の 2 本の柱	角 5
左右のスパンの梁 第 1 層	H4
左右のスパンの梁 第 2-5 層	H1
中央のスパンの梁 第 1, 5 層	H1
中央のスパンの梁 第 2, 3 層	H4
中央のスパンの梁 第 4 層	H3

6 おわりに

本研究では Rasmussen and Stolpe [12] による応力制約下でのトラスのトポロジー最適化問題を骨組の問題に拡張し, MILP として定式化した. この定式化は離散断面を扱うものであり, 数値実験では, 実際の規格の鋼材を用いた骨組の最適設計問題を解いた. また, Rasmussen and Stolpe [12] によるトラスに関する MILP の定式化を改善し, 0-1 変数を実数に緩和した際の許容領域がより元の問題の許容領域に近いものとなり, さらに問題のサイズが約半分になった. この結果に関して数値実験により, 断面の候補の数が 5 以上のほとんどの問題で計算効率の向上が確認できた. さらに, 同じトラスの問題を扱う Bollapragada et al. [2] による MLLP の定式化の問題点 (断面積が 0 の場合を正しく扱えない) を改善し, 新たな MLLP の定式化を提案した. 数値実験で MILP の定式化と比較を行い, 簡単な深さ優先探索の分枝限定法のアルゴリズムを用いた場合, MLLP の定式化が MILP の定式化より計算効率が良いことがわかった.

参考文献

- [1] W. Achtziger and M. Stolpe: Truss topology optimization with discrete design variables — guaranteed global optimality and benchmark examples. *Structural Multidisciplinary Optimization*, vol. 34, no. 1 (2007), pp. 1–20.
- [2] S. Bollapragada, O. Ghattas and J. N. Hooker: Optimal design of truss structures by logic-based branch and cut. *Operations Research*, vol. 49, no. 1 (2001), pp. 42–51.
- [3] O. N. Ghattas and I. E. Grossman: MINLP and MILP strategies for discrete sizing structural optimization problems. In: Ural, O.; Wang, T.-L. (eds.) *Electronic computation*, (1991), pp. 181–188. New York: ASCE.
- [4] N. Giorgetti: CPLEXMEX. <<http://www.dii.unisi.it/~hybrid/tools.html>>
- [5] J. N. Hooker and M. A. Osorio: Mixed logical-linear programming. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 96–97 (1999), pp. 395–442.
- [6] ILOG: ILOG Cplex11.2 User's Manual and Reference Manual. ILOG Inc., 2004. <<http://www.ilog.com>>
- [7] 井上一郎: 建築鋼構造の理論と設計. 京都大学学術出版会, 京都, 2003.

- [8] U. Kirsch: Optimal topologies of truss structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 72, Issue. 1 (1989), pp. 15–28.
- [9] 中村恒善 編, 石田修三, 須賀好富, 松永裕之, 永井興史朗: 建築構造力学図説・演習 II. 丸善, 東京, 1994.
- [10] 日本工業標準調査会 <<http://www.jisc.go.jp/index.html>>
- [11] 日鐵住金建材株式会社 <<http://www.ns-kenzai.co.jp/index.html>>
- [12] M. H. Rasmussen and M. Stolpe: Global optimization of discrete truss topology design problems using a parallel cut-and-branch method. *Computers & Structures*, vol. 86 (2008), pp. 1527–1538.
- [13] M. Stolpe: Global optimization of minimum weight truss topology problems with stress, displacement, and local buckling constraints using branch-and-bound. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, Issue. 8 (2004), pp. 1270–1309.
- [14] M. Stolpe: On the reformulation of topology optimization problems as linear or convex quadratic mixed 0-1 programs. *Optimization and Engineering*, vol. 34, no. 8 (2007), pp. 163–192.
- [15] M. Stolpe and K. Svanberg: Modelling topology optimization problems as linear mixed 0-1 programs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, Issue. 5 (2003), pp. 723–739.
- [16] The Mathworks: Using MATLAB. The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2008.
- [17] 若林實: 鉄骨の設計. 共立出版, 東京, 1998.