数理解析研究所講究録
第 1677 巻 2010 年 103-119

特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (III) —2

—２０世紀後半の主題（２）：前半から引き継ぐもの（新概念と応用の系列）—

代表例：Riemann-Hilbert の問題　Picard-Lefschetz 理論とその応用　流体運動の特異現象

芝浦工業大学　阿部剛久（Takehisa Abe）
Shibaura Institute of Technology

前回は、１９世紀後半に発生した最も伝統的な特異性の初期概念の系列に連なる２０世紀後半の主題（１）（［１］）について、それに先立つ本シリーズの以前の結果（［２］—［４］）に基づく総括的展望を兼ねた復習と補足的準備の後に代表例のいくつかを述べた。今回の本題（III）—２の主題（２）では、前回同様に後の議論に必要な復習と補足的準備の後、上記主題（１）に次いで起った微分方程式や位相幾何学における新しい代数的、幾何的特異性の概念、および応用上で新しい解析的概念を導入する契機の一つともなった流体力学における流れの特異現象の構造等を代表例として取りあげる。

今回のための復習と準備（［２］、詳しくは［３］）初期概念の系列として２０世紀前半から引き継いだ後半の主題は、(Hankel の実関数論的特異性を除いて) 簡単のため系列Ａと称したが、ここでの対象は主に１８６０年代後半から数学分野において新しく起った特異性の概念として、２０世紀前半にその数学の顕著な発展を見て後半に引き継がれた主題を系列Ｂとして、またほとんど同時期に起った応用分野における特異現象としての主題の系列をＣと略称した（［３］)。ここでは系列ＢとＣをまとめてとりあげる。

系列Ｂに属する主要な分野は、常微分方程式、力学系、（近年呼ばれる）特異点理論であり、系列Ｃに属する特異性の顕著な分野は、天体力学と流体力学であるが、代表例の選択の都合上、やむなく系列Ｂから力学系を、系列Ｃから天体力学をそれぞれ除いて、代表例を選択した分野についてこれまでに述べてきた内容をやや丁寧に再現するとともに代表例の選択と意義の理解に必要な事柄を最小限補っておきたい。

—　前半から引き継ぐ主題　—

１．系列Ｂの場合

微分方程式　G. Galilei, I. Newton たちに始まるこの分野は比較的長い歴史をもち、微積分の進歩とともにその解法的研究をはじめ、解の存在に関する理論的研究などが既に１８５０年代までに行われていたが、微分方程式とその解に関連づけた特異性の概念に関わる問題研究は、特異性の初期概念の起こりの影響下にあった１８６５年の L. I. Fuchs に始まる（［５］)。もっともその前（１８５６）に C. C. A. Briot と J. C. Bouquet による平面内の原点を特異点とする非線形単独一階の常微分方程式（Briot-Bouquet の微分方程式）の解法研究があるが、この型の方程式は近代的には力学系に属する対象でもあるから先の事情から省略し、ここで問題とする型の方程式は、Fuchs に始まるものを特異性問題に関する基本的なものとみて話を進める。Fuchs 型の微分方程式に関わる基本用語は、方程式の係数が解析的である点を通常点（非特異点）とよび、非通常点（特異点）として正則特異点（除去可能特異点)、非正則特異点（L. W. Thomé の呼称（１８７３))があるが、後者はそれぞれ極、高位の極を意味する。Fuchs はそれぞれを確定、不確定特異点とよび、他に真性特異点（位数∞の極)、見かけの特異点（係数に現れるが、解の特異点でない点）がある。これらの場合に対応した解の現象的特徴は、見かけの特異点を除いて概ね初期概念における R 系の特異性に類似し、他に解の拡大に関して W 系の意味の解析接続の性質にしたがう。本分野の特異点に関する結果だけでも膨大なことが知られている。

まず「**Fuchs 型方程式の理論とその拡張**」は、係数が特異点（極と対数的分岐点）をもつ２階線形微分方程式の Fuchs の一連の研究（１８６５（［５］)、６６，６８）に続いて J. Tannery(１８６６)、次に J. Thomae の Riemann-Fuchs の方法（超幾何級数の応用）による類似方程式の統一的扱いによる特異点近傍の解の挙動の研究（１８７０（［６］)、７４)、他方で Fuchs の理論の F. G. Frobenius による簡易化（１８７３、７５）

やC. Jordanによる行列の標準化理論の応用（１８７１）、その他が行われた、とほとんど同時にFuchs型以外の方程式へFuchsの理論の拡張がThoméによってなされた（１８７２（[７]）、７３）。以後、この方面の研究は、これらの方程式の解の漸近挙動の研究へと向けられた。ここでは１８８６年のH. Poincaréの研究が先駆をなし（[８]）、A. M. Lyapunov（１８９２）、その他の人々の研究が２０世紀に入って１９１４年まで続いた。次に１８８０年から９０年にかけてFuchsによる一般の非線形常微分方程式の動く特異点の研究は、後の「**非線形常微分方程式の大域的理論**」につながった。この方面はPainlevé方程式に関連して日本人による貢献が近年著しいが、古典論の近代的復活とみなされよう。また同時期に並行して微分方程式の解の特異点理論とモノドロミー、および代数方程式のGalois理論の融合とされる研究、すなわち「**微分方程式のGalois理論（Picard-Vessiot理論）**」は、E. Picardから始まって（１８８３、８７［９］）、E. Vessiot（１８９２［１０］）、F. Klein（１８９４）とPicard（１８９８）、L. Schlesinger（１８９９）へ至るとともに、また、P. Th. Pepin（１８８１）に基づいたA. Boulangerの研究（１８９８）があるが、いずれにせよ比較的短期間で１９世紀末までにその確立を得たことは特筆に値し得よう。それに引き換え、「**Riemann-Hilbertの問題（Hilbertの第２１問題）**」の解決は２０世紀末におよんだことは前者に極めて対照的である。この問題は、Riemann面とモノドロミーに関するもので、Poincaré（１８８０［１１］）に始まって、D. Hilbert（１９００［１２］，０４）からJ. Plemelj（１９０８［１３］）、G. D. Birkhoff（１９１３［１４］）へと受け継がれ、H. Röhrlによる一般的解決を得た（１９５７［１５］）が、後にRöhrlの結果を参考にして、同問題の全体像に関わる最終的な解決は２０世紀末近くに持ち越された（D. V. Anosov-A. A. Bolibruch［１６］）。

最後に今なおその複雑さと難解さによって完全かつ最終的な解決をみないでいる問題は、「**多変数超幾何偏微分方程式とその解の理論**」である。P. Appell（１８８０－８２）から始まって、Picard（１８８０－８３）以後に一般の多変数への拡張の試みがS. Pincherle（１８８８）、G. Lauricella（１８９３）によって行われた。以後長い空白の時が過ぎて、現代では方法を変えて再びアタックが試みられようとしている（たとえば、[１７]）。

特異点理論　１９世紀末近くから新しい分野として発祥がみられ始めて以来、２０世紀前半にかけて多大に進展した代数幾何学、位相幾何学、多変数関数論、力学系などにおける共通の特異性関連主題が融合された形でこの理論を形成するに至った。この分野の呼称も比較的近年（１９８０年代）に生まれたが、共通する特異性問題をこの分野独自の方法によって（、といっても原分野や他分野の手法を少なくとも援用することに変わりはないが、）包括的に研究することを目指している。ここでの一般的な特異点は、有限個の正則関数の共通零点の集合として定義される解析的集合上のある点の近傍で恒等的に零である有限個の正則関数の芽のなすイデアルの最小生成系に対して、その点でのヤコビ行列の階数＜最大階数　となる点と定める。そうでない場合は単純点（非特異点）とする。多項式の場合は代数多様体の場合に同じとなる。このような特異点に対する特異現象はこれまでのもの同様に、非特異点とその近傍での現象とは本質的に異なる場合が普通である。１８９５年のPoincaréの研究［１８］を近代的な位相幾何学的原点として以後、Picard（[１９]），Lefschetz（[２０]、［２１］）らが続いて２０世紀前半の研究を大きく進展させた。

彼らの仕事を含む近年までの主要なテーマは、まず「**特異点の解消問題**」であるが、これについては既に２０世紀後半に２，３の特別な場合を残して一般的に解決したことと合わせて概略説明が行われた（[３]、[１]）。また「**特異点の分類**」は、特に２次元解析空間の場合において特異点の解消概念を用いて、そのタイプを分類し、代数曲面の場合はその特例となることが知られる。次に「**孤立特異点に関する位相幾何学**」は、D. Mumford（１９６１）、E. Brieskorn（１９６６）等の研究結果を受けて、J. W. Milnorによる超曲面の特異点に対する位相幾何学方法による研究は超曲面のMlnor束（fibration）の概念を生むとともに顕著な成果を得た（１９６９［２２］）。これらの完全な理解のためには多くの準備が必要である。この主題と同様に、このような特異点研究のあり方が位相幾何学の多変数関数論への応用をはじめ、複雑な積分のサイクルを通してその分岐理論等への寄与ともなり得ている主題は歴史的にも重要な「**Picard-Lefschetz理論**」であろう。１９世紀末にPicardから始まり、後にLefschetzの貢献あって（—１９３０）、１９４０年代は彼やG. de Rhamたちによるこれらの近代化へ向けての努力、２０世紀後半に入ってからは、方法的にも内容的にも精緻な理論に一新され、特に１９６０年代以降はA. Grothendieck流の代数幾何学の影響もあって、この理論はさらに一般化されることと

なった。Picard や Lefschetz による原初的な古典論に対して、この隔絶したとも言えそうな近代論からの統一的説明（の一部）は O. Zariski（［２３］の Ch. VI への Mumford の解説）にみられる。さらに本来的には代数または解析幾何学的テーマの一つである「**複素射影空間内の超平面切断の位相幾何学**」は、代数的または解析的集合の特異点を含む超平面（ときには超曲面）切断に対して位相幾何学の手法であるホモとピーやホモロジーによる特徴づけが行われる。ここでも先の Milnor 束のファイバーに対して一種の Betti 数である Milnor 数も有効に用いられる。このように特異点理論は、次々に新しく導入される概念による特異点やその特異性の特徴づけと新しい問題の解決へ向けて極めて活発に展開中の分野へ成長した。

さて、最後に述べなければならない主題は２０世紀後半に入ってから R. Thom によって初めて定式化された「**カタストローフ理論とその応用**」である(１９６９［２４］、７２［２５］)。これはその基礎としての可微分写像の安定性をテーマとした彼と J. N. Mather による研究（１９６２［２６］、６９［２７］；６８－７１［２８］）において、開折の概念と可微分写像の特異点の分類に基づいて７個の初等カタストローフを導いた。これらの特異性を端的にいえば、特異点（集合）を境に現象の急激な、または突然の変化を特徴とするものである。それ以後、これらは現象の静的な構造モデルを与えるものとして E. C. Zeeman、その他の人々によって特に１９７０年代に生物学、医学、物理学をはじめ経済学、社会学、言語学などへの応用が活発になされた。

２．系列Ｃの場合

流体力学　天体力学における制限三体問題の漸近解の特異性およびその運動の力学系としての安定性の問題への帰着からの再議論も興味深いが、紙数の都合から、より身近に観察しやすい流体の運動によくみられる特異現象に専ら集中することにする。

粘性非圧縮性流体の運動を一般的に支配する方程式は Navier-Stokes の方程式系（粘性項をもつ運動方程式と連続の方程式）であり、非粘性非圧縮性の流体（縮まない完全流体）の場合は Euler 方程式系（粘性項をもたない運動方程式と連続の方程式）によることはよく知られている。前者の場合は今日も活発に研究が進められている流体力学、偏微分方程式、計算機科学等の重要な非線形問題のテーマの一つであるが、ここでは現象の特異性に関連するものは主に後者の場合であって、この方程式系の対象とする運動は、一般の平凡な流れの他に、流れの中に発生する渦や渦糸（集中渦）の運動である。縮まない完全流体に対する Kelvin 卿（W. Thomson）の循環則（１８７１）と渦の不生不滅に関する H. von Helmholtz の定理（１８６８）、および両者の同値性は当時既に明確に得られていたが、渦運動（の解）を流れの特異現象として数学的に意味づけるまでには至らなかった。

しかし、特異点の数学に関しては、初期の特異性概念が基本的に準備されつつあった時代であり、これらの概念が比較的に早期に定着した複素関数論の進歩により初めて流体運動の特異現象を理論的に解明できるようになった。まず１８９５年出版から１９３２年まで６版を重ねた H. Lamb の著書（［２９］）の中で「**渦、渦糸の解の特異性の研究**」が現れ、解や解のポテンシャル等の特異性を複素関数論的特異点によって説明が可能となった。また渦や渦糸は実際にハミルトン系としての力学系として理解され、運動中の渦の挙動の変化による個数の変化は構造安定でない力学系の分岐現象として説明されるであろう（［２］）。さらに、「**力学系としての渦糸系（渦糸の集合）の運動の特異性**」は、渦糸の個数が２，３の場合は天体力学の２体、３体の各問題に類似し、個数が３を超えると可積分でないがある初期条件下でカオス的な解の存在が知られている（［３０］）。また、特に気体（縮む完全流体）の高速流れにおける「**衝撃波現象の特異性**」は他に比較して著しい特性があることに注目したい。衝撃（波）は、進行する前後の波面どうしの接触面で物理量（温度、圧力、密度など）が不連続であるときのこの不連続面を指してよぶ。衝撃波の存在とその特異性は、気体の急激な圧縮に対する運動について考察した Riemann によって早くも１８６０年に知られていたし（［３１］）、特に Rankine-Hugoniot（ランキン－ユゴニオ）の式（衝撃波の前後におけるそれぞれの圧力と密度の間に成立する関係）が,W. J. M. Rankine（１８７０）と H. Hugoniot（１８８９）によって確立された意義は大きい。さらに等温不連続の発生条件式は１９１０年に S. J. W. Rayleigh によって見出された。また Riemann のテスト問題とよばれる数値的モデル（［３２］）は、このような流れとその特異性に関する解の計算機スキームの開発と評価に貢献してきた（［３３］、［３４］、［３５］）。ここで衝撃波の特異性とは、気体の運動に対する Euler

の方程式系を含む複数の非線形一階偏微分方程式からなる双曲型保存則系の初期値問題の解の弱解としての性質を指す。これは２０世紀前半末にL. Schwartzによる超関数の理論（[３６]）によってその意味が明晰になった。このような特異性をここでは超関数論的特異性と既に名づけた（[３]）。後半以後に入ってからこの理論は種々拡張されたが、いずれも可微分性に関する解析的特異性を特徴づけるにふさわしい。

最後に述べておきたいことは、Rayleighに始まる１８９２年の流体の流れの安定性に関する考察（[３５]）へのアンチテーゼとして、渦運動の時間的変化を分岐現象から説明することによって、「**力学系としての解の構造不安定性**」を理解することである。これは上記でも簡単に触れたが、既に講究録［２］の３節でやや詳しく述べたように、完璧な理解は乱流理論とともになお将来に待つかと思われる。

— 主題の代表例 —

系列Ｂの力学系と系列Ｃの天体力学は今回の話題では最初に断ったように改めて振り返ることは避けたが、それらの言葉や力学系が対象とする問題意識の一端は上記の両系列の各分野に多少とも現れたことによって、これらの一貫した復習の欠落に対して不満足ながらも特に力学系概念の重要さは察せられることであろう。

さて、Ｂ系列の微分方程式では５テーマ、特異点理論では６テーマ、Ｃ系列の流体力学では４テーマが挙げられた。これらの中から代表例を選ぶに当ってその選択基準としたものは、２０世紀前半から引き継ぐものでなければならないことが基本的であって、**１．** 比較的に完成度が高いこと、**２．** 著名であって基礎と応用の両面に寄与するところ大きいこと、**３．** 関連問題や関連分野に影響力を維持してきた、またはし続けていることのうち、少なくとも二つ以上の基準を満たすことを要請して、最終的に代表例の選択に至ることができた。

その結果、得られた主題は、新概念の系列では、微分方程式：「**Riemann-Hilbertの問題**」、特異点理論：「**Picard-Lefschetz理論とその応用**」。応用系列では、流体力学：「**力学系としての渦糸系の運動の特異性**」と「**衝撃波現象の特異性**」をまとめて「**流体運動の特異現象**」としたものとなる。

なお、上記の選択の基本条件から特定できない主題は、特異点理論の分野における「孤立特異点に関する位相幾何学」、「複素射影空間内の超平面切断の位相幾何学」および「カタストローフ理論とその応用」である。これらのテーマは２０世紀後半に入って初めて着手されて急速に確立をみたもので、上に特定列挙された、または除かれたテーマのように２０世紀前半（以前）のものから直接的に引き継いだ形跡の極めて濃いものではないことによる。今回の特異性概念を中心とした主題を新概念とよんだが、次回から現れる概念は‘新々概念’とよんで今回の場合と区別する。新々概念に属する主題は２０世紀後半の固有の主題であり、以前に示されたように（[２]）、後半に起った新しい概念である。よって、今回ここで除かれた上の３テーマのうち、特に「**カタストローフ理論とその応用**」を特異点理論の次回の一主題とする予定であることを予め断っておく。

代表例の展開　前回と同様に、ここでは基本事項から説き起こす体系的議論は不可能であるから、問題の核心に関わる事柄を中心的にかつ優先的に述べることにして（見出しの（**１**））、他の重要事項は「補足」（見出しの（**２**）：９ポイントの印字使用）で、主題ごとの発端から現状までの展開に関わる史的概略は「主題の歩み」（見出しの（３））で触れられる。

1. Riemann-Hilbertの問題

（１）与えられたモノドロミー群をもつ線形微分方程式の存在　Hilbert の第２１問題（[１２]）であるこの問題は、先にも述べたように Poincaré から数えれば最終的な解決に至るまでに一世紀以上も費やした、複雑で難解というよりは、むしろ歴史的に紆余曲折を経て解決した意味で厄介さを印象づけるかのような問題である（後の事項（３）参照）。ここで微分方程式とは、すべて常微分方程式であるとする。

まず最初にHilbertによって提起された本問題を述べておこう：**与えられた特異点と与えられたモノドロミー群をもつフックスのクラスの線形微分方程式が常に存在することを証明せよ。**

この問題における専門用語は基本的であるが、それらの個々の知識だけではこの問題の意味を理解することは容易でないかもしれない。複素関数論と微分方程式を中心とする解析学、トポロジーと群論といった幾何学と代数学が有機的につながり混然一体となって問題の意味が生じるからであろう。本主題はこのような性格の数学の中でも今日では長い年月を経て極めて古典的な趣をもった問題との印象が深い。

ここでは、厳密さをある程度犠牲にしても数学的意味の理解を重視したい。リーマン面上の適当な単連結領域をD、D上の既知の有理関数を$p_i(z)$ $(i=1,\ldots,n)$、未知関数をu、そのi階導関数を$u^{(i)}(i=1,\ldots,n)$とするn階線形微分方程式：$u^{(n)}+p_1(z)u^{(n-1)}+\cdot\ \cdot\ \cdot+p_{n-1}(z)u'+p_n(z)u=0 \quad (u'=u^{(1)})$ （*）

は、D上の既知の有理関数$a_{ij}(z)$ $(i,j=1,\ldots,n)$ を要素とする$n\times n$行列を$A(z)=\lfloor a_{ij}\rfloor$（行列式$|A|\neq 0$）、未知関数$u_i$ $(i=1,\ldots,n)$ を要素とする$n\times 1$行列を$U(z)=\lfloor u_i\rfloor$とする１階線形微分方程式系：

$dU/dz=A(z)U$ （*′）に同値である。

微分方程式（*）の特異点は有理関数の係数に対して複素関数論の特異点である極を用いて定義される。すべての$p_i(z)$が特異点として高々i位の極しかもたないとき、また少なくとも１つの$p_i(z)$が特異点として$i+1$位以上の極をもつとき、これらの極をそれぞれ確定特異点、不確定特異点とよぶ。単連結領域D上の点$z=a$が方程式の確定特異点である場合は、aが通常点（すべての係数が解析的である点）のときも特別な場合として含む。複素平面 **C**（リーマン球面＝$\mathbf{C}\cup\{\infty\}$）上に確定特異点以外の特異点をもたないときの線形微分方程式は特に重要で、この方程式はフックス型とよばれ、方程式系（*′）の場合は、係数行列の各成分がすべて高々１位の極しかもたないときをいう。微分方程式（*）のすべての係数の（真性特異点でない）極の集合を$\{a_i,\ldots,a_m\}$とする。

ところでRiemann-Hilbertの問題における‘フックスのクラス’という言葉の意味であるが、簡単に言えば、方程式（*）の係数がどれも有理関数であることを指している。そのような方程式をフックスのクラスの微分方程式とよんでいる。そのようなクラスの方程式の中でも確定特異点によって特徴づけられた特殊なものがフックス型の方程式である。話を進めやすくするため微分方程式はフックス型をこの問題の基準のタイプとする。

方程式（*）についてつぎの結果（証明：略）がある：

結果 1. 線形微分方程式（*）がフックス型 ⇔ 方程式の有理関数係数が

$$p_j=\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\alpha_i^{(j)}}{(z-a_i)^j}+\cdot\ \cdot\ \cdot+\frac{\alpha_i^{(1)}}{(z-a_i)}\right\}$$ の形に部分分数展開される

ただし、$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^{(k)}=0 \quad (k=1,\ldots,j-1)$.

また、上式の右辺は通分することによって詳しい有理関数の形が見出される。

ここで当初の問題にもどってみる。その中の‘与えられたモノドロミー群をもつ’を除けば、‘与えられた確定特異点をもつフックス型の微分方程式系が常に存在することを証明せよ’となるが、結果１によってそのような同値な微分方程式は容易に構成され、常に存在することが明らかとなる。これでは問題としてつまらぬものとなってしまうので、もう一つの条件、‘与えられたモノドロミー群をもつ’を加えてみよう。すなわち、

（1）方程式（*）がフックス型であって、モノドロミー群をもつ場合に起る問題を以下に述べておこう：

$\widetilde{D}$を普遍被覆面（単連結な被覆面）、pを被覆写像とする普遍被覆$\widetilde{D}\xrightarrow{p}D$（$D$はここでは必ずしも連結ではないとする）からそれ自身への同相写像である同値写像ω : $\widetilde{D}\to\widetilde{D}$（$\omega$はこのとき（普遍）被覆の被覆変換という）の全体を$\Gamma(\widetilde{D}\xrightarrow{p}D)$とすれば、$\Gamma$は（写像の合成を積として群をなすから）（普遍）被覆

の被覆変換群とよばれる。このとき被覆変換群$\Gamma \cong \pi_1(D)$：Dの基本群（または１－ホモトピー群、ポアンカレ群などとよばれる）であり、対応$L:\eta \mapsto L(\eta)(\eta \in \Gamma)$：群$\Gamma$の１次表現となるが、この表現$L$を微分方程式（＊）のモノドロミー（monodromy）表現とよんで、通常は行列を用いて表す。このとき、被覆変換群Γはモノドロミー群とよばれる。

さて、一般の微分方程式を解く場合の演算に触れよう。既知関数の集合を$\boldsymbol{F}$として、$\boldsymbol{F}$に属する要素（既知関数）に対して新たな関数を得るために演算：１°.四則算と一次結合　２°.微分　３°.不定積分　４°.eを底とする$f(x)(\in \boldsymbol{F})$の指数関数$\exp(f(x))$をつくること、を有限回行えば可能な操作をここではS_0型、新しくつくられた関数を‘$\boldsymbol{F}$上S_0型’とよび、さらに、上記の演算全体に５°.代数的演算（$\sqrt[n]{f}$（$f \in \boldsymbol{F}$）と代数方程式を解く操作）を加えることによって、新たな関数を得る有限回の操作を先と同様にS型、新しくつくられた関数を‘$\boldsymbol{F}$上S型’とよぼう。

いま微分方程式（＊）または（＊′）はフックス型であるとする。そのときこれらの方程式のn個の１次独立な解を求める初等的理論で上に述べた演算の意味で可解性の判定が可能である。一つの結果を挙げておく：

結果２　線形微分方程式（＊）が有理関数体$\mathbf{C}(z)$上S_0型　⇔　$D(=\mathbf{C}-\{a_1,\ldots,a_m\})$の基本群$\pi_1$（≅モノドロミー群$\Gamma$）の行列表現$L$が３角化可能、すなわち

$$\text{モノドロミー表現}L(\eta) \quad \approx \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ 0 & a_{22} & & * & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

この定理の証明は、線形微分方程式のガロア理論で知られる Picard-Vessiot の理論に基づいてなされる（Kaplansky［３７］を参照）。この結果から、フックス型方程式が$\mathbf{C}(z)$上S_0型でない（解の構成手続きが簡単でない）場合のモノドロミー表現をめぐって、Poincaré による保型関数の理論の創始と応用がなされた。

上に述べた Riemann-Hilbert の問題の意義は、指定された二つの条件を満たす微分方程式（系）がフックス型の場合についてのものである。２階の方程式に対しては詳しいモノドロミー表現による可解性の判定が示される。しかし非フックス型方程式の場合（不確定特異点の存在など）に対してはその意義はまた異なってくる（（２）補足　を参照）。この意味でもフックスのクラス内で Fuchs のいう‘正則な’クラス（係数や解に現れる特異点が確定特異点に限られるもの）の場合が議論しやすいであろう（方程式系では、フックス型と正則なクラスとは同一視できる概念ではないから、正則なクラスも系の場合は無視できない）。

（２）Riemann-Hilbert の問題は、基本的には指定された条件下での微分方程式（系）の決定問題であるとも言えるが、逆に微分方程式（系）が与えられて、そのモノドロミー表現を決定する問題は特別な場合を除いて一般的に解けていない（この辺りの問題は福原［３８］を参照）。特にフックス型においてモノドロミー表現が求められれば、微分方程式の大域的理論が目指す解の接続問題等の解決につながることになる。これらに関してはこれ以上触れないでおく（（２）補足　を参照）。

最後に Riemann-Hilbert の問題に対する解答を要約する。それは、問題が‘肯定的に’、あるいは‘否定的に’解決したかということである。この問題の解決とは、その中の中身（命題）が正しいかどうか証明することを意味する。これは長期にわたって問われた問題であった。Hilbert の問題提起以来、彼以外にこの問題に関して顕著な働きをみせた Plemelj（プレメルヒ［１３］）は、最終的にはこの問題を微分方程式の解の問題ととらえ、存在する解は（通常の意味で）正則で、それを解とする線形微分方程式はフックスのクラスの方程式

であることを示した。彼はすぐ後に続く Birkhoff(バーコフ［１４］)とともに両者はほぼ同じ線に沿ってこの問題を肯定的に解決したと考え、また斯界でも確定的な結果とされて８１年間これが信じられてきた（(3) 主題の歩みも参照)。彼らが確認しなかったことの一つは、方程式がフックス型（またはフックスの意味の正則なクラス）であるかどうかであった。その後、半世紀近く経て、Röhrl（レール［１５］）が特異点を確定特異点とし、これらとモノドロミー表現を任意に与えて、１階方程式系（*′）に対して解が存在することを一般的に証明した。ここまでは、Riemann-Hilbert の問題に対してフックス型、したがってフックスのクラスの方程式が常に存在するという肯定的解決を得た最終的結論と考えられてきた。

このRöhrlの結果は、Anosov（アノゾフ）と Bolibruch（ボリブルヒ）にとって、特異点やモノドロミー群を最初に特定的に与えて、これらをもったフックスのクラスの方程式系の非存在を示せばよいというアイディアを抱かせるに至った（１９８９)。このことを明確にするために、その後に彼らはこの考えを実行に移して多くの例示を行った（[１６]；否定的例ではモノドロミー表現が可約であること、それが既約であれば問題の命題は肯定的に解決されることを示した)。以上が Riemann-Hilbert の問題への解答のあらましである。

Riemann-Hilbert の問題に対する結論　Plemelj や Birkhoff の解等は肯定的結果とはいえ、十分な検証を得なかったために問題への明確な解答とはならなかった。Röhrl の解答は一般的に問題への肯定的結果を主張しているが、他方で Anosov と Bolibruch の解答は、前者の結果への反例というよりも、むしろ精密化に近いといえるかもしれない。結局、Riemann-Hilbert の問題における（方程式系に対する）‘命題’は、特異点とモノドロミーの与え方によって、肯定的にも否定的にも解釈が可能ということであろう。

（2）補 足　（1）では確定特異点が中心的な議論に終始したが、その問題を主題としたゆえにやむを得なかった。非フックス型の場合はモノドロミー表現の意義は低下し、解の大域的行動の究明が主要なテーマとなる。そのとき、形式的冪級数を要素とする解の漸近展開、方程式系の１次独立な基本解としての形式解どうしの間の接続公式と不確定特異点の存在によって起る解析的現象としてのストークス現象、また確定特異点がいくつか合流して不確定特異点となる合流型の解を含む種々の超幾何関数を解にもつ代表的な方程式（系）など、解析的な話題が多様にかつ豊富に提供されている（詳細は文献［３８］―［４０］を参照されよ)。

（３）主題の歩み　Riemann-Hilbert の問題の源となった考えは、Riemann がゲッチンゲンの１８５６、５７年の冬の学期において、２階線形微分方程式の２つの１次独立な解の挙動を分岐点の近傍で解析接続とモノドロミー表現を用いて解析した結果、最終的に少なくとも一つの微分方程式が与えられた分岐点とモノドロミーをもつためのある条件を見出したこと（[４１]）にあるとされる。１９００年の国際数学者会議で Hilbert が提起した第２１問題はこの原形とされる問題と異なっている。この違いについては何人かの数学者によって言及されているようであるが、大域的結果を求めるのに問題の出発点が局所的条件（Riemann）か大域的条件（Hilbert）かによる違いであるという。Riemann による上記の問題の原形は、方程式を与える以前にモノドロミーを特定する考え方であり、Riemann 以後、Poincaré が独立に見出したとされる（[４２]）。

Poincaré の考え方を継承した L. Schlesinger と先に既出の Plemelj の間に Riemann の問題の方法をめぐってかなり長い間論争が続き、やがて E. Hilb が,Poincaré と Schlesinger の方法による考察よりも Plemelj の論考（[１３]）が正しいする評価を与えたこと（[４３]）によって、１９８９年までの長期にわたって Riemann-Hilbert の問題は解決済みとの印象を与えてきたことは先に述べたとおりである。

今日もなお Riemann-Hilbert の問題と、その非線形可積分系への応用等に関しても研究が続けられている。また特殊だが適正な微分方程式系の決定をはじめ、不確定特異点をもつ場合の方程式の解の構造と振舞い等、局所と大域の両面にわたり、日本における数学者たちの寄与は顕著である。なお、筆者の講演時に Hilbert の当初における問題意識に関連して、真島秀行氏から貴重な指摘を戴いたことに対して心から謝意を表したい。

最後に、この方面に関する詳しい歴史的解説書として、近年傑出した数学史家 J. J. Gray の書［４４］があることを加えておきたい。特にこの事項（3）の一部ではこの著書を努めて参考にしたことを述べておく。

２．Picard-Lefschetz 理論とその応用

（１）理論の概要と応用問題　正則関数の特異点のトポロジー問題を議論した Picard-Lefschetz の理論は、Arnold によれば次のように要約できよう（[４５]）：**正則関数の複素等位超曲面の Dehn**（Dehn の補題で知られる M. Dehn（筆者注)）**の捩りによる、臨界値の周りの運動によって引き起こされたものを記述するもの、**

である。この理論の中心的な話題は、上記の引用にある‘臨界値の周りの運動によって引き起こされたもの’の記述であるから、まずこれに対する最も簡単な場合を示してから、一般的な結果をまとめておく。このような説明手段をとることで、限られたスペース内でのこの理論の詳細を避けて可能な限り概略的説明による概念的理解を優先させて、少なくとも理論のおおよそのイメージが得られるものと思う。

単純な型の特異点として、$(z_1,z_2)\mapsto z_1^2+z_2^2$ によって定義された関数 $f:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}$ の臨界点（A_1 型の特異点。次回の主題の１つで触れられる予定）は原点（0,0）、臨界値は $f(0,0)=0$ である。この臨界点は

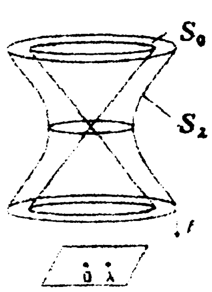
$$超曲面 S_0=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2\mid z_1^2+z_2^2=0\}$$

の上のただ１つの（孤立）特異点であり、原点で交わる２本の複素直線を母線とする光円錐（light cone）（：時間方向に上（未来）、下（過去）に開いた２つの錐がそれぞれの頂点で結ばれて１つの点となったものがここでの臨界点となるような空間）を想像するとよい（後の図参照)。また、$\forall\ \lambda(\neq 0)\in\mathbf{C}$ に対して、関数値 λ 上の f のファイバー（fiber）を

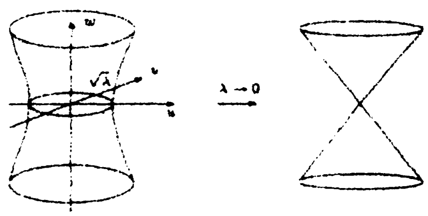
$$超曲面 S_\lambda=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2\mid z_1^2+z_2^2=\lambda\}$$

とすれば、S_λ にはどんな特異点も存在しないから、代数関数 $z_2=(\lambda-z_1^2)^{1/2}$ のリーマン面である。‘切り貼り’の手法を用いてこのリーマン面は容易に得られ、実４次元空間 $\mathbf{C}^2$ は0 上の特異ファイバー S_0 と $\lambda(\neq 0)$ 上の非特異ファイバー $S_\lambda\approx$ 円柱：$S^1\times\mathbf{R}$ に分解されることがわかる。また、$S_\lambda\to S_0(\lambda\to 0)$。

ここで、等位曲面に座標を入れる：複素数 z_i を実部 x_i と虚部 $y_i\,(i=1,2)$ によって表すことにより、曲面の方程式に同値な、これら実部と虚部によって表された方程式を得る。この新しい方程式において、座標変換、$x_1=u, x_2=v,\ \pm\sqrt{y_1^2+y_2^2}=w\ \ \Rightarrow$ 方程式 $u^2+v^2-w^2=\lambda$ ：$\mathbf{R}^3$ の双曲面、を表す。



写像 f のファイバー



S_λ と S_0 の関係

次に、λ が臨界値0 の周りを一周するとき、ファイバー S_λ の変化を見るために、$\lambda(t)=\eta\cdot\exp(i2\pi t),\eta>0, 0\le t\le 1$（$\lambda(t)$：半径 η の円周上を正の向きに原点の周りを一周する）　$\Rightarrow$　t の増大につれ、リーマン面としての $S_{\lambda(t)}$ の分岐点 $\pm\sqrt{\lambda(t)}=\pm\sqrt{\eta}\exp(i\pi t)$ は点0 の周りを回る。t の値の範囲での状況のうち、特に $S_{\lambda(0)}=S_\eta$ として、可微分写像　$h_t:S_\eta\to S_{\lambda(t)}$ の族を考える。また（ベル型の）ある関数を用いて定義された写像 $g_t:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$　に対して、h_t を被覆への g_t のリフティングであるとする。このとき f

の幾何学的モノドロミーと呼ばれる可微分写像　$h: S_\eta \to S_\eta$　の下記に定めるサイクルδ^*への効果（捩じれ）をみよう。まず双曲面のくびれた部分（水平面：$w=0$）の上に次の円

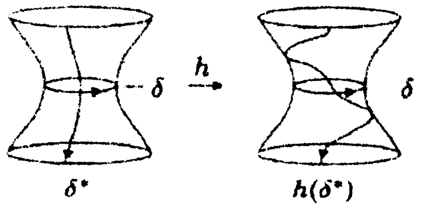
$$\delta = \{(u,v,w) \in \mathbf{R}^3 \mid u^2+v^2=\eta, w=0\}$$:消滅サイクル（$\eta \to 0 \Rightarrow \delta \to 0$）

と、この双曲面に代わって、複素１次元射影空間内の、先のリーマン面z_2（曲面S_λ）に対するコンパクトなリーマン面に対応するコンパクト化された曲線

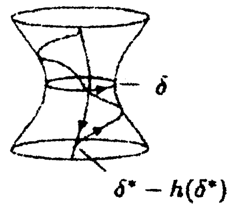
$$\delta^* = \{(u,v,w) \in \mathbf{R}^3 \mid v^2-w^2=\eta, \quad u=0, v<0\}$$ ：余消滅サイクル

を定める　⇒　δ^*の境界は２つの無限遠点から成り、$\langle \delta, \delta^* \rangle = 1$（：両サイクルの（ただ１点で交差する）交差数は１であることを示す)。

tの変化にしたがってこれらのサイクルに対する可微分写像h_tの振舞いを解析することによって、先のモノドロミーhによるサイクルδ^*への作用（捩じれ）$h(\delta^*)$の模様と閉サイクルとしての$\delta^*-h(\delta^*)$を図示しておこう：



モノドロミーhの効果



サイクル$\delta^*-h(\delta^*)$

結果１（最も簡単な場合の Picard-Lefschetz の公式） 閉サイクル$\delta^*-h(\delta^*) \sim \delta$。　記号～：左辺は右辺にホモローグ（homologous）であること、すなわち同じホモロジー類に属していることを示している。

結果１の一般化への図的手続き（素描）：一般のA_k型へ拡張するために、この型の正則関数の芽fの実モース化（とよばれる、チェビシェフ多項式を含む）$f_\lambda: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$　を考え、f_λの中のλの冪に含まれるkの偶、奇によってこれらが定める曲線の２重点と２つの最小値によって定まるサイクルは、消滅サイクルδと２つの余消滅サイクルδ_1^*, δ_2^*に区別され、一般的にこれらの交差数は　$\langle \delta_1^*, \delta \rangle = \langle \delta_2^*, \delta \rangle = 1$　であるようにそれぞれが向きづけられる。このように各２重点と各最小値に対応する消滅サイクルの決定やモノドロミーの議論に関して、正則関数のより一般の孤立特異点に対しても、グラフの頂点が消滅サイクルに対応して描かれる、コクセターーディンキン（Coxeter-Dynkin）の図形（たとえば、竹内［４６］）は有用である。ここではA_k型以外の特異点をもつ他の三つの型に対しても同様の議論が可能である。

最後に、一般の場合に対する結果を述べておきたい：これは、代数的位相幾何学の方法であるホモロジー論によって統一的に定式化されたものである（この方法に双対的なコホモロジー論は［１］の主題において現れた)。まず一般的な基本事項を準備する。

M ：$n+1$次元複素多様体、$f: M \to \mathbf{C}$ ：正則関数、$X: M$の開集合、$\overline{X}: X$の閉包で、境界$\partial\overline{X}$付き

2 $n+2$次元可微分多様体、 $\bar{\Delta}$ ：閉円板$\subset \mathbf{C}$として、fの制限写像：$\bar{X}\cap f^{-1}(U)\to U$ （U：$\bar{\Delta}$の近傍）やfが$\bar{\Delta}$内にその臨界値をとるように$\bar{X}\cap f^{-1}(U)$上に有限個の臨界点をもつ等の条件から、$\Delta'=\bar{\Delta}-\{$有限個の臨界値$\}$ ⇒ fの制限写像：$\bar{X}\cap f^{-1}(\Delta')\to\Delta'$は可微分ファイバー束（バンドル）の射影、よって$\bar{X}_s=\bar{X}\cap f^{-1}(s):s(\in\Delta')$上のこの束のファイバーで、境界$\partial\bar{X}_s=\bar{X}_s\cap\partial\bar{X}$付きコンパクト$2n$次元可微分多様体。最初の例の幾何学的モノドロミー$h$の一般化、$h_\gamma:\bar{X}_s\to\bar{X}_s$ （$\gamma\in\pi_1(\Delta',s),s\in\partial\bar{\Delta}\cap\Delta'$）によって誘導された$\bar{X}_s$の$q$次ホモロジー群に関する準同型写像$h_{\gamma\cdot}:H_q(\bar{X}_s)\to H_q(\bar{X})$：$\gamma$に関するモノドロミー作用素とよぶ。また、$h_\gamma$は相対ホモロジー群$H_q(\bar{X}_s,\partial\bar{X}_s)$から自分自身への準同型写像$h_{\gamma\cdot}$も誘導するから、準同型写像 $\mathrm{var}_\gamma:H_q(\bar{X}_s,\partial\bar{X}_s)\to H_q(\bar{X}_s)$も$[c]\mapsto[h_\gamma(c)-c]$によって定義され、変動作用素（variation operator）とよぶ。ω：sを始点かつ終点として、γに伴う単一閉ループ、γ^*をω^*で置き換えて、ωに関するモノドロミー作用素（**Picard-Lefschetz 変換**）$h_{\omega\cdot}$、およびγをωで置き換えた変動作用素var_ωの、それぞれが対応するホモロジー群への作用がもたらす効果を知ることが目的となる。

有限個の臨界値はすべて0とし、これらに対応する臨界点もすべて0である値の周りの複素$n+1$次元開球体に同型な近傍の上の関数を$f(z_1,\ldots,z_2)=z_1^2+\ldots+z_{n+1}^2$、基点$s=\eta\in\mathbf{R}$（$\eta<\varepsilon^2,\varepsilon$：開球体の半径,また半径$\eta$の円板内には他に異なる臨界値はないとする)、ループω：$I\to\mathbf{C}$ は $t\mapsto\eta e^{2\pi it}$で定めるとする。これらの仮定下で（以下、結論に至る過程はかなり省略して)、n次元単位球面（S^n）の接束の円板束（DS^n）に微分同相な、$w\in\Delta,0<|w|\leq\eta$に対して$\bar{Y}_w$を境界とする、多様体が存在して$\bar{Y}_\eta$はDS^nに同一視できる。S^nはDS^nの変形レトラクトであるから、$\bar{Y}_\eta$のホモロジー群$H_q(\bar{Y}_\eta)$は、n次元球面（S_η：$\bar{Y}_\eta$の変形レトラクト）のホモロジー類δ（消滅サイクル）によって生成され、S^nのそれと同じである：$H_n(\bar{Y}_n)=\mathbf{Z}\cdot\delta$。また、$S_\eta$と（$x_1=\sqrt{\eta},x_2=\ldots x_{n+1}=y_1=\ldots=y_{n+1},x+iy\in\bar{Y}_\eta$）を座標とする点で横断的に交差する部分多様体（$T_\eta$）の向き付けによって、$T_\eta$は相対サイクルδ$^*\in H_n(\bar{Y}_\eta,\partial\bar{Y}_\eta)$を表す：$H_n(\bar{Y}_\eta,\partial\bar{Y}_\eta)=\mathbf{Z}\cdot\delta^*$。ただし、$<\delta^*,\delta>=1$ とする。これまでの議論から得られる一つの結論（証明略）を示しておく：

定 理（var_ωに関する**Picard-Lefschetzの定理**） $\mathrm{var}_\omega(\delta^*)=-(-1)^{n(n-1)/2}\delta$。

相対サイクル$c\in Z_q(\bar{X}_\eta,\partial\bar{X}_\eta)$は、$c=c_1+c_2,c_1\in Z_q(\bar{Y}_\eta.\partial\bar{Y}_\eta),c_2\in C_q(\bar{X}_\eta\setminus Y_\eta)$と表され、$h_{\omega\cdot}(c)=$

$h_{\omega^*}(c_1)+c_2$, $\mathrm{var}_\omega(c)=\mathrm{var}(c_1)$、および $\mathrm{var}_\omega : H_q(\overline{X}_\eta, \partial\overline{X}_\eta) \to H_q(\overline{X}_\eta)$ は $q \neq 0, n$ に対して零化写像であることに注意れば、上記の Picard-Lefschetz の定理から次の結果を得る：

結 果 2（一般の場合の標準的 Picard-Lefschetz の公式）

1°．$\alpha \in H_n(\overline{X}_\eta, \partial\overline{X}_\eta)$ に対して、$\mathrm{var}_\omega(\alpha) = -(-1)^{n(n-1)/2} < \alpha, \delta > \delta$。

2°．$\alpha \in H_n(\overline{X}_\eta)$ に対して、$h_{\omega^*}(\alpha) = \alpha - (-1)^{n(n-1)/2} < \alpha, \delta > \delta$。

結 果 1は、結 果 2の（2）において、$\alpha = \delta^* \Rightarrow < \delta^*, \delta > = 1$、$n = 1$ から明らか。

次に応用問題に触れておきたい。これらは、どの問題一つを取り上げても幾何学的特異点に深く関係し、古典的問題から近年の新しい問題に至るまでその本質は Picard-Lefschetz 理論（今後は、P-L 理論、定理、公式などと略称）を基本とする、その変形または拡張（捩じれ（twisted）P-L, 層別（stratified）P-L 理論など）に帰着し、今日まで異分野にまたがる多くの課題が見出され、解決され、また新たな問題をよんでいる。ここでは、貴重なスペースを借りてこれらのうちの二つの古典的問題を概観するにとどめておきたい。

（1）代数的に可積分な物体に関する Archimedes–Newton の問題

あまり聞き覚えのない問題かもしれないが、興味深い問題で深い考察を要する代数・幾何・解析の三位一体型の問題である。$f(x)$ を多項式とするとき、実 n 次元ユークリッド空間の‘代数的物体’とは、集合 $\{x \mid f(x) < 0\}$ のコンパクト連結成分で、その境界上で $df \neq 0$（非特異）であるとする。任意の代数的物体 V が超平面 $X : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ で分離された二つの部分の体積は超平面上の２価関数 F_V で与えられる。このとき、F_V が‘代数的’（：平面 X と X 上の２つの関数値 $F_V(X)$ に対して、$S(a_1,\ldots,a_n,b,F_V(X))=0$ であるような多項式 $S(a_1,\ldots,a_n,b,F_V)$ が存在する）ならば、代数的物体 V は‘(代数的に) 可積分である’とよぶ。この代数的可積分性に関して、次の古くからの定理がある：

定 理 1（Newton の定理, Lemma XXVIII of *Principia* I（1687）） $\mathbf{R}^2$ には凸の非特異な代数的に可積分である代数的物体は存在しない。

定 理 2（Archimedes の定理） $\mathbf{R}^3$ の円板は代数的に可積分である。

Newton の定理の証明は、卵形線を境界とする物体が可積分であるならば、代数的であると仮定して代数性に矛盾する結果を引き出す彼自身の背理法によって行われている。しかし、これらの定理は次元が２と３の特別な場合に限られている。そこでこれらの一般化に関して次の結果が知られている：

定 理 3 $\mathbf{R}^{2k}$ には滑らかな凸の代数的に可積分である物体は存在しない。

定 理 4 $\mathbf{R}^{2k+1}$（$k \geq 1$）のほとんどすべての代数的物体は代数的に可積分でない。

定 理 4 は奇数次元の場合、代数的物体の非可積分性を弱い形で述べているが、これは Archimedes の定理による実３次元の場合を例外的現象として含む結果である。奇数次元の代数的物体の可積分性に対する障害に関しては、物体の複素化とそれに伴う空間の複素射影化をとおして様々に議論される。さて、定 理 3 であるが、この定理は、対（半径 ε の複素 n 次元閉球、特異点のない等位超曲面）のファイバー束に対する標準的な P-L 理論（特に P-L の公式）から得られる一つの補題に基づいた結果（：凸体 V の境界面を表す関数の最小値 m、最大値 M 区間の値をパラメータ t として、$W(m)=0, W(M)=V$ の体積となる関数 $W(t)$ のパラメータ区間を囲む閉曲線に沿う解析接続の増分に関するもの）によって証明される。また、代数的物体の可積分性の障害（、すなわち非可積分性の）問題も一般化された P-L 理論へ帰結されることによって明らかにされる。

（2）代数的層の Newton ポテンシャルに関する問題

先の問題は数学的特性の濃いものであったが、これは物理学固有の法則から生じた古典的な数理物理学的問

題である。この問題の発端から最近の進歩に至るまでの一端を紹介する：

（I.）**Newtonの定理**（Theorems XXX & XXXI of *Principia* I（1687））　ユークリッド空間内の均質な球体の層は、球体内の物質を引きつけるのでなく、球体外の物体が、質量が球体全体の質量に等しい点としてある粒子によって引きつけられるのと同様に、球体の中心へ引きつけられる。

（J.）**Ivoryの結果**（１８０９［４７］）　Ivoryは上記のNewtonの定理を、楕円体のニューロン・クーロン（Newton-Coulomb）引力へ一般化した：楕円体の標準的層は内部の点を引きつけるのでなく、外部へ向かう引力はすべての共焦楕円体にとって同じものである。

（V. I.）**Arnoldの結果**（１９８３［４８］）　ArnoldはIvoryの結果の中の楕円体に代わって任意の双曲型層の引力へ拡張した：その他、詳細　略。

（A. B.）**Giventalの結果**（１９８４［４９］）　GiventalはArnoldの結果を任意の定係数線形斉次楕円型偏微分作用素のポテンシャル関数へ一般化した：その他、詳細　略。

その後のこれらの問題研究の進展は、三つの主要な定理の形にまとめられるが、いずれもPicard-Lefschetzの理論を基礎とする。参考のため、そのうちの最も基本的な定理を紹介しておく：

定　理　$\mathbf{R}^2$の任意のd次狭義双曲型多項式Fに対して、$F=0$による曲線のニュートン・クーロン電荷ωによる引力は、この曲線の外部で代数的ベクトル関数である。さらに、任意の多項式（または１価正則）関数Pに対して、$P=0$によるコンパクト双曲型曲線上に分布した多項式（または正則）電荷$P\cdot\omega$の引力は、代数的（または有限多価解析的）ベクトル関数である。Pの次数$\leq d-2$　$\Rightarrow$　非コンパクト双曲型曲線に対しても同じことが成り立つ。（ここでの双曲型多項式は、双曲型偏微分作用素の定義多項式とわずかに異なる概念である。本シリーズの（III）－２―２０世紀後半の主題（３）―で再度触れる予定である。）

これらの定理に共通する証明の基礎には、P-L理論（特に公式）の適用が不可欠であり、Arnoldらによる近代的な概念（Arnold ホモロジー類、ホモロジー束など）の導入による新しい問題の解明は注目に値する。。

（２）**補 足**　応用の（１）について云えば、物体とはいわゆる図形であり、面積や体積など、その大きさが代数方程式の解として存在するか否かを述べたものである。Archimedesの例を除いてほとんどすべての次元で否定的であることは、このような数値の存在問題は、代数的な対象ではなく、したがってその代数的可解性が問われないということは、（微）積分の方法につながる必然性を示唆しているかのようである。応用の（１）、（２）の結果のP-L理論への帰結またはそれに基づいた証明に至る過程は長くかつ決して容易でない。その簡明な方法や叙述が将来見出されることが望ましいことは、単に容易さを求めるだけでなく、証明方法の改良とそれに伴う本質的に新しい問題への道が期待されるからである。以上の応用の他に、超幾何関数、双曲型作用素の基本解（［１］参照）、トモグラフィー（tomography(X線断層撮影法))、ファインマン（Feynman）積分等の特異性に関する問題があり、これらのうちから再びP-L理論の応用として一、二の問題が主題として取り上げられる予定である。

この主題に関して参考にした論文以外の一般的文献として、Ebeling［５０］とVassiliev［５１］があり、特に理論面の基礎に関しては前者、応用面は後者がそれぞれ詳しい。応用に関してVassiliev以後の新しい書については筆者はまだ知らない。

（３）**主題の歩み**　主要な流れについては冒頭の特異点理論において述べたからくり返す必要はないであろうが、そこで注意した１９６０年代以降についての進展のうち、Zariskiの書へのMumfordの注釈はP-L理論へ関連はするもののその理論自体の近代的記述にはなっていない。筆者の知る限り、P-L理論とその応用への少なくとも一つの重要な貢献であったPham（1965,&1967［52］）による研究は、ファインマン積分の特異性や、積分の分岐問題の研究に向けられたことが想起される。これらの問題に関しても、次回に触れる予定であることを告げてここでの主題を終える。

３．流体運動の特異現象

（１）**渦糸系と衝撃波、および解の特異性**　通常、渦は、流体内部の狭い範囲で回転運動を生じている部分を指す。この領域内では、渦度（$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}$:速度場）の役割が大きい。回転運動の中心に垂直軸があると考え、流線が円を描くことによって生じる円運動の渦、回転しながら中心軸に近づく渦、逆に遠のく渦が考えられる。これらの２次元渦に対して、特に、渦糸（中心軸沿いに分布して円運動する集中した３次元渦）の場合は、その回転速度$\propto r^{-1}$、角速度$\propto r^{-2}$（r：軸からの距離）から、$r\to 0 \Rightarrow$ 各速度$\to\infty$。よって、軸は特異点と

みなされ、渦糸は特異点のまわりの円運動と考えることができる。このことから、(x_0, y_0)：渦糸の軸（特異点）の位置座標、$\boldsymbol{v} = (u(x,y;t), v(x,y;t), 0)$ に対して、$\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega)$、$\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \Rightarrow \omega = \omega_n$（以下の dS への $\boldsymbol{\omega}$ の法線成分）$= \Gamma\,\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$（Kelvin の循環（$\boldsymbol{\omega}$ の強さを表す物理量 Γ）の表示式：$\Gamma = \oint_c \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S \omega_n dS$,（$d\boldsymbol{r}$：閉曲線 C の線素、dS：C を境界とする曲面 S の面素、）に整合）、すなわち特異点における渦度の z 方向の成分は δ 関数の特異性をもつことがわかる。

次ぎに、渦糸系（有限個の渦糸から成る集合）の力学（ハミルトン力学）をみよう。n 個の渦糸の集合に対して、個々の特異点の位置座標 $(x_i, y_i)(i = 1, \ldots, n)$ によって渦糸の時刻 t における位置を与えることにする。これらはまたそれぞれに位置する質点の座標とみなされ、それぞれの循環を Γ_i として、

方程式系：　$dx_j/dt = -(1/2\pi)\sum_{i\neq j}\Gamma_i(y_j - y_i)/r_{ij}^2$、$dy_j/dt = (1/2\pi)\sum_{i\neq j}\Gamma_i(x_j - x_i)/r_{ij}^2$　(*)

は、$r_{ij} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{1/2}$ に対して、ハミルトン関数：$H = (-1/4\pi)\sum_{i\neq j}\Gamma_i\Gamma_j \log r_{ij}$　を定義

$\Rightarrow$　方程式系（*）：$\Gamma_j dx_j/dt = \partial H/\partial y_j$,　$\Gamma_j dy_j/dt = -\partial H/\partial x_j$　(*′)

ここで、$x_i' = \sqrt{|\Gamma_i|}x_i$,　$y_i' = \sqrt{|\Gamma_i|}\,\mathrm{sgn}(\Gamma_i)y_i$, $\mathrm{sgn}(\Gamma_i) = 1(\Gamma_i > 0), = -1(\Gamma_i \le 0)$ とおく

$\Rightarrow$　方程式系（*′）：$dx_i'/dt = \partial H/\partial y_i'$,　$dy_i'/dt = -\partial H/\partial x_i'$　(*″)：ハミルトンの正準方程式系

を得る。正準方程式（*″）から直ちに、$dH/dt = 0$。すなわち、$H =$ 定数、である。このような定数を運動定数または保存量とよぶ。この場合は、すべての渦糸が同符号（したがって回転が同じ向き）であれば、渦糸どうしの衝突は起らないことを意味する。また、時刻 $t = 0$ で、$r_{ij} \neq 0 (i \neq j) \Rightarrow$ すべての $t > 0$ に対して（粘性の有無に関わらず）、この状態が維持される（どの２つの渦糸間の距離 $\to 0 \Rightarrow H \to \infty$ から）。このことは、外力の作用がない限り、特異点としての渦糸（の中心）は衝突しないことを示している。

H のような、第１積分で与えられた運動定数の包合性に基づく完全可積分性（求積解をもつこと）はハミルトン系に対しても議論が可能である（→Liouville-Arnold の定理、たとえば［５３］）から、ここの場合でも多くの定数が得られる（省略）が、渦糸系の個数別の解について簡単に触れておきたい（補 足参照）。

流体の流れを形成するすべての物理量（速度、密度、圧力、温度など）は常に連続的に変化するとは限らず、これらの量が不連続に分布する流れも存在し、その不連続は一つまたは複数個の面で起り得て、流れがその面を通過する前後で流れに伴う量が不連続的に変化する。この面を不連続面とよび、この面を境として諸量が不連続的に異なる流体運動の特異性（不連続性）を衝撃（波）とよぶ。物理学的には、衝撃は、流体が気体で非粘性かつ圧縮性のものであるとすれば、気体の流れが超音速のときその圧縮性効果によって諸量が急激に増大することによって発生する。現象的には流れの一部を形作る特異現象といえる。

衝撃の不連続性は、不連続面を境とする前後の気体の物理学的諸量の保存性に基づいて説明できるから、その前に簡単のため空間次元１の（１階仮線形）双曲型保存則系：$U_t + AU_x = 0$、$U : x,t$ を変数とする n 個の未知関数を成分とする $n\times 1$ 行列（ベクトル関数）、$A : x,t$ および U の成分を変数とする $n\times n$ 行列関数で、n 個の異なる実固有値をもつ（したがって、n 個の１次独立な固有ベクトルをもつ）ような特別な場合が対象

となる。(例) 1. ${}^t[\rho \quad u]_t + A\,{}^t[\rho \quad u]_x = {}^t[0 \quad 0]$: ρ (密度)、u (速度) の保存則系、$A = \begin{bmatrix} u & \rho \\ c^2/\rho & u \end{bmatrix}$, c : 音速。(A の固有値 : $u+c, u-c$) 2. ${}^t[\rho \quad u \quad p]_t + A\,{}^t[\rho \quad u \quad p]_x = {}^t[0 \quad 0 \quad 0]$: ρ, u, p (圧力) の保存則系。$A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix}$, γ : 比熱比。(A の固有値 : $u, u+\sqrt{\gamma p/\rho}, u-\sqrt{\gamma p/\rho}$)。

ここでは、衝撃現象を説明するモデルとして、$\rho, \rho u = m$ (運動量) ,e (エネルギー) を未知関数とする

保存則系 : ${}^t[\rho \quad m \quad e]_t + {}^t[m \quad m^2/\rho + p \quad (e+p)m/\rho]_x = {}^t[0 \quad 0 \quad 0]$ (1)

を取りあげる。(A を用いた表現は、比熱比 γ を含むかなり長大な表現となるからこの形式のほうが簡明。) 保存則系 (1) に対して、(x,t) 平面内の衝撃 (曲線) C を横切って密度、運動量、エネルギーの不連続的変化は、C の後方側と前方側におけるそれぞれの値の差によって示されるが、それぞれの流量の連続性 (: 流量は保存されて等しいこと) は重要である。このことを、時間の経過に伴う、原点(0,0)で生じた衝激のその軌跡C の描かれた動座標において考えよう。この座標の原点における、x 軸の負の側 (2で示される) から正の側 (1で示される) へ流入する各流量に関する連続性を$[\rho u] \equiv \rho_1 u_1 - \rho_2 u_2$ を用いて表そう :

$[\rho u] = 0$ (質量流量)、$[\rho u^2 + p] = 0$ (運動量流量)、$[(e+p)u] = 0$ (エネルギー流量) (2)

連続性 (2) を用いて、不連続性を詳しく眺めてみる。第1式において、$M = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ とする。$M = 0$ であれば、この不連続 (点) を接触不連続 (点) (または、すべり (点)) とよぶ。この場合は、$u_1 = u_2 = 0$ からこれらの不連続点は、流れとともに移動する。式 (2) の第2式から、$p_1 = p_2$。しかし、一般に $\rho_1 \neq \rho_2$。

(真の) 衝撃は、$M \neq 0$ である不連続性である。$u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ から、気体は衝撃を横切り、それ以外の気体でC の下部 (またはC の上部) の側の気体からなる領域を衝撃の前方 (または後方) とよぶ。衝撃の発生における前方と後方の密度比をそれぞれの圧力を用いて表された関係式等は、ランキン - ユゴニオ (Rankine-Hugoniot) の関係式 (または衝撃波断熱式) とよばれ、よく知られていよう (省略)。

最後に、一般の非線形 (双曲型) 保存則系において、衝撃 (波) にみられるような特異性をもつ解を広義の解として定め、その意義に触れる。一般的ではあるが、単独の非線形保存則方程式において定義することが基本的である : $u_t + (f(u))_x = 0 \quad (*)_1 \iff \mathrm{Div}\,\mathbf{F} = 0,\ \mathbf{F} = (f(u), u),\ \mathrm{Div}\ (f_1, f_2) = (f_1)_x + (f_2)_t$。

また、$\varphi : (x,t)$ 平面内にコンパクトな台をもつ滑らかな関数 (台の外では0) とする。方程式$(*)_1 \iff$ $\int \varphi \cdot \mathrm{Div}\,\mathbf{F}\,dxdt = 0, \forall \varphi \quad (*)_2 \Rightarrow$ (部分積分から) $(*)_2$: $\int \mathrm{Grad}\,\varphi \cdot \mathbf{F}\,dxdt = 0, \mathrm{Grad}\,\varphi = (\varphi_x, \varphi_t)$ $(*)_3$。このとき、**1°**.u : 滑らか $\Rightarrow$ 方程式$(*)_1 \iff$ 等式$(*)_3$。しかし、**2°**.u : 滑らかでない $\Rightarrow$ u : 方程式$(*)_1$ の真の解でなく、$(*)_1$ は方程式としての意味を失い、$(*)_3$ のみが意味をなす。この

とき、すべてのφに対して、等式$(*)_3$を満たす関数uを弱い解（または弱解）とよぶ。強い解（または真の解）は方程式の本来の解で、古典的な意味で可微分な解であるのに対して、不連続面をもつ衝撃（波）解は弱解であり、連続な線形汎関数として定義される超関数（[３６]）としての解（広義解の一種）である。

（2）補 足　渦糸系の運動は天体力学の問題に類似する。$n=2,3$に対して、２体問題、３体問題がよく知られている。これらの言葉を借りると（質量の違いを無視して）、２体の場合は、両者の距離は一定のまま、それぞれの循環と渦の中心の位置座標によって与えられる重心のまわりに同一角速度の円運動（２つの循環の和$\neq 0$）か、または回転の向きが異なる渦対となって一定の速度で直進運動（循環の和$=0$）をするかのいずれかであることが知られている。３体の場合は、この系が可積分系であること（Hをはじめとする３個の第１積分で与えられる運動定数が包合的）から、詳しい解析が行われている（[５４]、[５５]、[５３]）。一般の$n(\geq 4)$の場合は、系は可積分性を失い、渦糸の運動の初期値問題の解は複雑化し、一部にカオス軌道をえがくものが出現する。非粘性流体では乱流に発展し、その現象は完全にカオスの状況を呈することが知られている（[３０]）。

次にリーマン（のテスト、または衝撃波管）問題に触れておきたい。衝撃は、先の単独方程式の型（移流（advection）方程式ともよばれる）またはその方程式系の解が滑らかな初期値を与えられたときでさえ発生するが、このことは衝撃波補足（または追跡）スキームの開拓へつながり、双曲型保存則系の衝撃波動力学へと導いた。薄い隔膜で二分された細い管で、左側の定高圧の気体と右側の定低圧の気体に分離されているとして、$t=0$で隔膜は破られ、気体の流れは右側へ動くピストンとみなされ、その先端は圧縮波、背後は膨張波である。解析学的には、密度、速度、圧力に関する初期値問題であり、数値計算的には、数値スキームの精度（ロバストネス）を試すために用いられる。たとえば、密度に対するリーマン問題は５段階の発展領域をもち、III 段階とIV 段階の最終位置にある面はそれぞれ接触不連続集合と衝撃面である。J. Glimm による任意の流れに対する数値解の一般的構成の差分スキームはリーマン問題の解を用いている。この他にも補足すべきものは多々あるが、省略する。本主題に関する一般的事項は次の文献を参考にした：[５６]、[５７]、[３３]、[３４]。特に、[３３] と [３４] はリーマン問題に詳しい。

（3）主題の歩み　リーマン問題（１８６０）から Rayleigh の研究（１９１０）にかけて、また２０世紀のほぼ前半近くにわたって影響を与えてきた Lamb の著書等、流体の代表的特異現象について冒頭（前半から引き継ぐ主題）の２（系列Ｃの場合）で歴史的な概略に触れたが、衝撃に関する２０世紀後半の歴史を含む概観は、アメリカの著名な数学者 P. D. Lax の著書［３５］によってより専門的な立場から解説されている。彼を中心に今日までなされた衝撃波問題の解決とこれらの理論と実験のために開発された数値解析のスキームは非線形圧縮性流れの複雑な解の追跡に有効な手段となって寄与している（たとえば、[５８]）。第二次世界大戦前から、ドイツ系の数学者たちを中心としてニューヨーク学派（故 R. Courant を初代所長とするクーラント数理科学研究所を拠点として純粋および応用数学の研究を専門とする）の活動には目覚しいものがあったが、その中のメンバーの一人として活躍したのも彼であった。満８３歳（２００９年現在）を迎えて彼の優れた後継者たちに託された課題の一部は冒頭の２で触れた問題にも関連しているかと思われ、今後の展開が期待される。

参 考 文 献

［1］阿部剛久、特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか（III）－2 －２０世紀後半の主題（1）：前半から引き継ぐもの（初期概念の系列）一、数理解析研究所講究録　1625　「数学史の研究」, 95－107,　京都大学数理解析研究所（2009）.

［2］阿部剛久、同上（III）－1－２０世紀後半から現代に至る主題の展望、および未知の課題をめぐって一、数理解析研講究録　1546　「数学史の研究」, 88－108,　京都大学数理解析研究所（2007）.

［3］阿部剛久、同上（II）一特異性問題に関する近代数学の発展・形成：1880－1940s一, 数理解析研究所講究録　1392　「数学史の研究」, 149－162,　京都大学数理解析研究所（2004）.

［4］阿部剛久、同上（I）一初期の概念とその背景一, 数理解析研講究録　1317　「数学史の研究」, 39－49,　京都大学数理解析研究所（2003）.

［5］L. I. Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, *Jahrsber, Gewerbeschule Berlin*, Ostern, in *Werke*, I, 111－158（1865）.

［6］J. Thomae, Über die hheren hypergeometrischen Reihen, insbesondere über die Reihe..., *M. Ann.*, 2, 427－444（1870）.

[7] L. W. Thomé, Zur Theorie der linearen Differetialgleichungen, *JFM*, 74, 193−217 (1872).

[8] H. Poincaré, Sur les intégrals irregulières des équations linéaires, *Acta Mathematica*, 8, 295−344 (1886).

[9] E. Picard, Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1, A. 1−A. 15 (1887).

[10] E. Vessiot, Sur l'integration des équations différentielles linéaires, *Annales de l'École Normale*, 9 (3), 199−264 (1892).

[11] H. Poincaré, Extrait d'un Mémoire inédit de Henri Poincaré sur les functions fuchsiennes, *Acta Mathematica*, 39,58−93, Oeuvres, I, 578−613 (1880).

[12] Mathematische Probleme, *Göttinger Nachrichiten*, 253−297 (1900) (translated in *Bull. A. M. S.*, 437−479 (1902) reprinted in *Mathematical developments arising from Hilbert Problems*, Proc. Symp. Pure Math. A. M. S. vol. I, 1−34 (1972)).

[13] J. Plemelj, Riemannsche Functionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 19, 211−246 (1908).

[14] C. D. Birkhoff, (a) A Theorem on Matrices of Analytic Functions, *Math. Ann.* 74, 122−133 (1913). (b) Equivalent singular points ordinary linear differential equations, *Math. Ann.*,74, 134−139 (1913).

[15] H. Röhrl, Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann., 133, 1−25 (1957).

[16] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann-Hilbert Problem*, Steklov Institute of Mathematics, Vieweg (1994).

[17] M. Yoshida(吉田正章), *Fuchsian Differential Equations*, Max-Planck Institut für Mathematik, Bonn & Vieweg (1987).

[18] H. Poincaré, Analysis situs, J. École Polytech., 1, 1−121 (1895).

[19] E. Picard, G. Simart, *Théorie des functions algébriques de deux variables indépendantes*, 2 vols., Paris (1897−1906).

[20] S. Lefschetz, *L'Analysis Situs et la géométrie algébrique*, Paris (1924).

[21] S. Lefschetz, *Topology*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publ., 12, New York (1930).

[22] J. W. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Stud., Princeton Univ. Press (1969).

[23] O. Zarisky, *Algebraic surfaces*, 2nd supplemented ed., 61, Springer (1971).

[24] R. Thom, Topological models in biology, Topology, 8, 313−335 (1969).

[25] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Benjamin (1972).

[26] R. Thom, La stabilité topologique des applications polynomials, Enseign. Math., 8, 24−33 (1962).

[27] R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 240−284 (1969).

[28] J. N. Mather, Stability of C^∞-mappings, (I) Ann. Math. (2), 87, 89−104 (1968); (II) Ann. Math. (2), 89, 254−291 (1969); (III) Publ. Math. I. H. E. S., 35, 127−156 (1968); (IV) Publ. Math. I. H. E. S., 37, 223−248 (1969); (V) Advances in Math., 4, 301−336 (1970); (VI) in Springer Lect. Notes in Math., 192, 207−253 (1971).

[29] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed. Cambridge Univ. Press (1932) (日本語版：今井・橋本（訳）、流体力学、東京図書 (1978)).

[30] H. Aref, Integrable, Chaotic, and Turbulent Vortex Motion in Two dimensional Flows, Ann. Rev. Fluid Mech., 15, 345−389 (1983).

[31] B. Riemann, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Abb. Kön. Gesell. Wissen. Göttingen, 8, 43−65 (1860) (日本語版：足立・杉浦・長岡（訳）、リーマン論文集、朝倉書店 (2001)).

[32] R. Courant, K. O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience (1948).

[33] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, 3rd ed., Springer (1992).

[34] K. E. Gustafson, *Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*, 3rd ed., revised, Dover (1999) (日本語版(改訂増補第２版)：阿部（編&訳）・音田（訳)、応用偏微分方程式― 近代的方法への入門 ―（下)、海外出版貿易 (1992)).

[35] P. D. Lax, *Hyperbolic Partial Differential Equations*, Courant Lect. Notes 14, A. M. S. (2006).

[36] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris (1950) (日本語版：岩村 聯（訳)、超関数の理論、岩波 (1953)).

[37] I. Kaplansky, *Differential algebra*, Hermann, Paris (1957).

［３８］福原満洲雄、常微分方程式、第２版、岩波全書　116, 岩波（2000）..
［３９］M. Kohno, *Global analysis in linear differential equations*, Kluwer（1998）.
［４０］河合隆裕・竹井義次、特異摂動の代数解析学、岩波（1998）.
［４１］B. Riemann, Nachträge, 67−68（1857）.
［４２］H. Poincaré, Extrait d'un Mémoire inédit de Henri Poincaré sur les functions fuchsiennes, Acta Mathematica., 39,58−93（1923）, in *Oeuvres*, I, 578−613.
［４３］E. Hilb, Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet, Ene. Math. Wiss., IIB5, II.2, 471−562（1913）.
［４４］J. J. Gray, *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, 2nd ed., Birkhäuser (2000)（日本語版：関口・室（訳）、リーマンからポアンカレにいたる線形微分方程式と群論、シュプリンガー東京（2002））.
［４５］V. I. Arnold, Polymathematics: Is Mathematics a Single Science or a Set of Art?, 403−416, in *Mathematics: Frontiersa and Perspectives*, A. M. S.（2000）（日本語版：砂田（監修）・蟹江（訳）、多元数学：数学は単一の科学か、それとも技法の集まりか?、8−26、数学の最先端２１世紀への挑戦　Vol. 3、シュプリンガー東京（2003））.
［４６］竹内外史、リー代数と素粒子論、裳華房（1983）.
［４７］J. Ivory, On the Attraction of homogeneous ellipsoids, Philos. Trans., 99, 345−372（1809）.
［４８］V. I. Arnold, Magnetic field analogues of the theorems of Newton and Ivory, Uspekhi Mat. Nauk 38:5, 145−146（1898）.
［４９］A. B. Givental, Polynomiality of the electrostatical potentials, Uspekhi Mat. Nauk, 39:5, 253−254（1984）.
［５０］W. Ebeling, *Functions of Several Complex Variables and Their Singularities*, Graduate Studies in Math., 83, A. M. S（2007）.
［５１］V. A. Vassiliev, *Ramified Integrals, Singularities and Lacunas*, Math. and Its Appls., 315, Kluwer（1995）.
［５２］F. Pham, (a) Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des integrals, Bull. Soc. Math. France, 93, 333−367（1965）. (b) *Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau*, Gauthier-Villars, Paris（1967）.
［５３］R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Benjamin（1978）.
［５４］山内恭彦、一般力学、増訂第３版、岩波（1977）.
［５５］C. L. Siegel, J. K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Revised and enlarged ed., Springer（1971）.
［５６］今井　功、流体力学、裳華房（1973）.
［５７］エリ・ランダウ、イェ・リフシッツ（竹内　均（訳））、流体力学　２、東京図書（1975）.
［５８］阿部剛久、他、科学技術系の数値解析入門、昭晃堂（1992）.

<関連する文献の補足>　今回の内容に関連するごく最近出版された文献、およびこのシリーズ全般に関連深い最近の報告集を追加しておく：

（１）卜部東介、１次元代数的特異点とディンキン図形、遊星社（2009）.
（２）河原源太、流体方程式系における不安定周期解の数値計算、数学（日本数学会編集）、61 巻３号、306−316、岩波（2009）.
（３）J. P. Brasselet, et al.（eds.）, Proceedings of the meeting School and Workshop on the Geometry and Topology of Singularities, held inCuermavaca, Mexico, January of 2007, A. M. S.（2008）：
(a) Singularities I: Algebraic and Analytic Aspects, Contemporary Mathematics, 474.
(b) Singularities II:Geometric and Topological Aspects, Contemporary Mathematics, 475.