

数値電界計算法の高度化と  
帯電電荷測定法への応用

立松 明芳

# 目次

<b>第1章 序論</b>	<b>1</b>
<b>第2章 数値電界計算法</b>	<b>7</b>
2.1 表面電荷法	8
2.2 高速多重極表面電荷法	19
2.3 高速多重極境界要素法	28
<b>第3章 数値面積分および数値電界計算コードの計算精度</b>	<b>31</b>
3.1 数値面積分手法	32
3.2 表面電荷要素の電位・電界の解析式	38
3.3 数値積分精度	46
3.4 SCM, FMM-SCM, FMM-BEM コードの計算精度	48
3.5 まとめ	50
<b>第4章 帯電電荷測定法</b>	<b>61</b>
4.1 プローブ出力と電荷分布との関係	63
4.2 多点測定法	70
4.3 直接法と $\lambda$ 関数法の係数値の比較	74
4.4 係数値誤差および測定誤差の推定分布への影響	83
4.5 逆計算手法の検討	89
4.6 逆計算手順	128
4.7 逆計算の計算コスト	129
4.8 アレイ型プローブの適用	131
4.9 まとめ	135
<b>第5章 ブロック状絶縁物の帯電電荷測定</b>	<b>137</b>
5.1 実験装置と測定手順	137
5.2 プローブ指示値の較正	142

5.3	測定結果 . . . . .	145
5.4	まとめ . . . . .	162
<b>第 6 章</b>	<b>モデルスペーサの帯電電荷測定</b>	<b>165</b>
6.1	ラプラシアンフィルタの設計 . . . . .	165
6.2	モデルスペーサの帯電電荷測定 . . . . .	168
6.3	測定点数 19188 点, 帯電区分数 10140 個の帯電電荷測定の数値シミュレーション . . . . .	187
6.4	まとめ . . . . .	192
<b>第 7 章</b>	<b>結論</b>	<b>195</b>
	<b>謝辞</b>	<b>201</b>
<b>付 録 A</b>	<b><math>T_{M2M}</math>, <math>T_{L2L}</math>, <math>T_{M2L}</math> の配列確保に必要なメモリ容量</b>	<b>203</b>
<b>付 録 B</b>	<b>高次表面電荷要素の電位・電界の解析式</b>	<b>205</b>
B.1	二次三角形表面電荷 . . . . .	205
B.2	二次四角形表面電荷 . . . . .	212
B.3	三次三角形表面電荷 . . . . .	217
B.4	三次四角形表面電荷 . . . . .	221
<b>付 録 C</b>	<b><math>E_{LS}^{ref}</math>, <math>E_{LS}</math>, <math>E_{LS}^{app}</math> の導出</b>	<b>231</b>
C.1	$E_{LS}^{ref}$ の導出方法 . . . . .	231
C.2	$E_{LS}$ , $E_{LS}^{app}$ の導出方法 . . . . .	232
<b>付 録 D</b>	<b><math>E_{RLS}^{ref}</math>, <math>E_{RLS}</math>, <math>E_{RLS}^{app}</math> の導出</b>	<b>235</b>
D.1	$E_{RLS}^{ref}$ の導出方法 . . . . .	235
D.2	$E_{RLS}$ , $E_{RLS}^{app}$ の導出方法 . . . . .	236
<b>付 録 E</b>	<b>軸対称三次元表面電荷法</b>	<b>239</b>
<b>付 録 F</b>	<b><math>\frac{\ \delta b\ }{\ b+\delta b\ }</math> の近似値の算出方法</b>	<b>241</b>
	<b>参考文献</b>	<b>245</b>
	<b>発表論文リスト</b>	<b>251</b>

## 用語・記号の説明

本論文で使用する主な用語，記号についてここにまとめる。ただし，8.以降は第4章以降で使用する記号の説明である。

1. SCM : Surface Charge Method の略。表面電荷法を意味する。
2. BEM : Boundary Element Method の略。境界要素法を意味する。
3. FMM : Fast Multipole Method の略。高速多重極法を意味する。
4. TM : Tree Method の略。ツリー法を意味する。
5.  $C^n$  連続 : 曲面パッチの接続境界面において  $n$  階微分値までが連続性を有すること
6.  $G^n$  連続 : 曲面パッチの接続境界面において  $n$  階の幾何的連続性を有すること
7.  $t$ -design :  $K$  個の点を  $t$ -design 点に配置した場合， $t$  次までの任意の多項式の球面上での積分値がその多項式の  $t$ -design 点での値の和を  $4\pi/K$  した値に等しくなるような配置。
8.  $h$  : 第4章では絶縁物下面と接地面との間の距離を表し，第5章ではセンサと絶縁物表面との間の距離を表す。
9.  $h_g$  : ガード電極と絶縁物表面との間の距離を表す。
10.  $\mathbf{x}$  : 帯電電荷分布を数値離散化して表現したときの未知数を表す。
11.  $n$  : 帯電電荷分布を数値離散化して表現したときの未知数の個数を表す。
12.  $\mathbf{b}$  : 静電プローブによる測定値を表す。
13.  $m$  : 静電プローブによる測定点数を表す。
14.  $A$  : 静電プローブによる測定値  $\mathbf{b}$  と帯電電荷分布  $\mathbf{x}$  とを関係付ける  $m$  行  $n$  列の係数行列を表す。
15.  $\delta\mathbf{b}$  : 測定誤差を表す。
16.  $\delta A$  : 係数行列の計算誤差を表す。
17.  $\bar{A}$  : 係数計算誤差を含めた係数行列  $A + \delta A$  を表す。
18.  $\delta\mathbf{x}$  : 係数誤差  $\delta A$ ，測定誤差  $\delta\mathbf{b}$  に起因する推定解の変動 ( $\mathbf{x}$  からの変動) を表す。
19.  $A_d$  : 直接法を用いて計算した係数行列を表す。
20.  $A_\lambda$  :  $\lambda$  関数法を用いて計算した係数行列を表す。



21.  $D_j$  : 第 4 章では,  $j$  番目の帯電区分の推定誤差  $\delta x_j$  (ペナルティ付き最小二乗法を適用した場合は  $x_{ej} + \delta x_{ej} - x_j$ ) を仮定した帯電電荷分布  $\mathbf{x}$  の最大値  $x_{\max}$  で規格した値  $|\delta x_j|$  (もしくは  $x_{ej} + \delta x_{ej} - x_j$ )  $/|x_{\max}| \times 100$  [%] を表す。ただし第 6 章では, 100 を掛けない値を表す。
22.  $D_{\max}$  :  $D_j$  ( $j = 1 \sim n$ ) の最大値を表す。
23.  $D_A$  : 逆行列演算, 最小二乗法で解の推定を行った場合の係数計算誤差  $\delta A$  の推定誤差  $\delta \mathbf{x}$  への誤差拡大率  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} / \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$  を表す。もしくは, ペナルティ付き最小二乗法で解の推定を行った場合の誤差拡大率  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_p + \delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}\|} / \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$  を表す。
24.  $D_b$  : 逆行列演算, 最小二乗法で解の推定を行った場合の測定誤差  $\delta \mathbf{b}$  の推定誤差  $\delta \mathbf{x}$  への誤差拡大率  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} / \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$  を表す。もしくは, ペナルティ付き最小二乗法で解の推定を行った場合の誤差拡大率  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_p + \delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}\|} / \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$  を表す。
25. LS : Least Squares の略。最小二乗法を意味する。
26.  $A^+$  :  $A$  の Moore – Penrose 一般逆行列を表す。
27.  $I_n$  :  $n$  行  $n$  列の単位行列を表す。
28.  $K_n$  :  $n$  次元のベクトル空間を表す。
29.  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  : 逆行列演算, 最小二乗法で解の推定を行った場合の係数計算誤差  $\delta A$  や測定誤差  $\delta \mathbf{b}$  による  $\mathbf{x}$  からの変動  $\delta \mathbf{x}$  の上限値を表す。 $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  の相違は表 1 のとおりである。

表 1 :  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  の説明

	使用行列	補足事項	意味
$E_{LS}^{ref}$	$A$	–	$\frac{\ \delta \mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\ }$ の上限値
$E_{LS}$	$\bar{A} (= A + \delta A)$	–	$\frac{\ \delta \mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\ }$ の上限値
$E_{LS}^{app}$	$\bar{A} (= A + \delta A)$	仮定 : $\ \delta \mathbf{x}\  \ll \ \mathbf{x}\ $	$\frac{\ \delta \mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\ }$ の上限値
$E_{LS}^{ref'}$	$A$	–	$\frac{\ \delta \mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x}\ }$ の上限値

30. RLS : Regularized Least Squares の略。Tikhonov の正則化法の一手法であるペナルティ付き最小二乗法を意味する。
31.  $A_p$  : ペナルティ付き最小二乗法の解を推定する方程式の係数行列  $(A^T, \sqrt{\gamma}K^T)^T$  を表す。
32.  $\sqrt{\gamma}K$  : ペナルティ付き最小二乗法の適用の際に方程式に付加する拘束項を表す。 $\gamma$  は重み係数 (正則化パラメータとも呼ぶ) であり, 解に対する拘束の度合いを調節する役割を成す。
33.  $\mathbf{x}_e$  :  $\delta A$  や  $\delta \mathbf{b}$  が存在しない場合のペナルティ付き最小二乗法の推定解を表す。

34.  $\delta \mathbf{x}_p$  : ペナルティ付き最小二乗法で求めた推定解  $\mathbf{x}_e$  と解の真値  $\mathbf{x}$  との相違を表す。
35.  $\delta \mathbf{x}_e$  : ペナルティ付き最小二乗法を適用した場合の係数計算誤差  $\delta A$  や測定誤差  $\delta \mathbf{b}$  による  $\mathbf{x}_e$  からの解の変動を表す。
36.  $D_{RLS}$  :  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_p\|}{\|\mathbf{x}\|}$  の上限値を表す。
37.  $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$  : ペナルティ付き最小二乗法で解の推定を行った場合の係数計算誤差  $\delta A$  や測定誤差  $\delta \mathbf{b}$  による解の変動  $\delta \mathbf{x}_e$  の上限値を表す。 $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$  の相違は表 2 のとおりである。

表 2 :  $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$  の説明

	使用行列	補足事項	意味
$E_{RLS}^{ref}$	$A$	—	$\frac{\ \delta \mathbf{x}_e\ }{\ \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\ }$ の上限値
$E_{RLS}$	$\bar{A} (= A + \delta A)$	—	$\frac{\ \delta \mathbf{x}_e\ }{\ \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\ }$ の上限値
$E_{RLS}^{app}$	$\bar{A} (= A + \delta A)$	仮定 : $\ \delta \mathbf{x}_e\  \ll \ \mathbf{x}_e\ $	$\frac{\ \delta \mathbf{x}_e\ }{\ \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\ }$ の上限値

38.  $D_{eA}$  : ペナルティ付き最小二乗法で解の推定を行った場合の係数計算誤差  $\delta A$  の  $\mathbf{x}_e$  からの推定解の変動  $\delta \mathbf{x}_e$  への誤差拡大率  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e\|} / \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$  を表す。
39.  $D_{eb}$  : ペナルティ付き最小二乗法で解の推定を行った場合の測定誤差  $\delta \mathbf{b}$  の  $\mathbf{x}_e$  からの推定解の変動  $\delta \mathbf{x}_e$  への誤差拡大率  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e\|} / \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$  を表す。
40.  $t$  : ブロック状絶縁物の帯電電荷測定を行った際の測定試料の高さを表す。
41.  $\mathbf{x}_F$  : ファラデーケージを用いて測定した帯電電荷量を表す。



# 第1章 序論

高電圧絶縁機器では、高圧導体を支持するためにバルク状（シート状でない）固体絶縁物の存在が不可欠である。気中絶縁方式においては、シート状絶縁物の帯電が沿面放電の原因となり絶縁性能を低下させることが、古くから知られていたが、バルク状絶縁物の帯電については、帯電電荷の漏洩時定数が非常に小さいことから、絶縁性能の低下要因とはならないものと見られていた。ところが近年になって、ガス絶縁、真空絶縁などの高乾燥状態が維持される絶縁方式が普及したことにより、絶縁機器内の帯電電荷の漏洩時定数が従来よりも大きくなってきた。このため、バルク状絶縁物であっても帯電電荷の存在が、沿面放電、絶縁破壊の誘発要因となりえ、高電圧機器の絶縁性能を低下させる要因となりえることが分かってきた。ガス絶縁などの高度な絶縁方式を採用する電力機器は、一般的に重要責務を担っており、絶縁破壊事故が生じた場合の損害も責務相応に大きくなる傾向がある。こうした状況を受けて、帯電が生じても絶縁破壊に至らない機器の開発や、帯電状況の診断技術の開発の必要性が認識されるようになった。このための基盤技術の一つとして、バルク状絶縁物表面の帯電電荷測定法の重要性も広く認識されるようになってきた。シート状絶縁物表面の帯電電荷測定法としては、静電プローブ法などが古くから確立し、広く使用されてきた。しかし、バルク状絶縁物表面の帯電電荷測定法に関しては、十分な検討がなされておらず、汎用性、信頼性の高い測定法は未だに確立していない。

静電プローブ法は、プローブを絶縁物表面に近づけ、プローブ（センサ）に静電的に誘起される電荷量を検出した上で、この検出値（プローブ出力）から帯電電荷量を算出する手法である。測定対象が背後接地電極を有するシートやフィルムなどの薄板試料である場合は、静電プローブの出力と帯電電荷量との間に1対1の対応関係が成り立ち、1点の検出値が1ヶ所の帯電電荷量を直接的に意味する。しかし、スペーサのように測定試料が厚みを有する場合は、センサ直下の電荷だけでなく全ての電荷がプローブ出力に寄与する。このため、スペーサに類する厚板試料の帯電電荷測定では、数値電界計算を用いてプローブによる多点の測定値と帯電電荷との間の関係を表す係数行列を計算した上で、測定値から逆計算により電荷分布を推定する必要がある [1]。

多点測定に基づく手法以外の厚板試料の帯電電荷測定法としては、パルス静電応力法やレーザードップラー法が提案されている。パルス静電応力法は、測定試料に高電圧パ

ルスを加えた場合に、試料内部の電荷に働く静電気力に起因して発生する圧力波を圧電素子で検出することにより、試料内部の電荷分布を測定する方法である。パルス静電応力法では深さ方向の一次元電荷分布測定では大きな成功を収めている [2]。ところが、圧力波を検出する必要性のために、圧力波が空気中で減衰しないように測定試料－高電圧パルスを伝播させる電極間および測定試料－圧電素子間は密着させなければならない。また、圧力波の伝播による減衰のために測定可能な試料厚さにも限界があり、任意形状の三次元配置における試料表面の帯電電荷測定にはまだ課題を残している。レーザードップラー法は、帯電した測定試料表面が周辺電界による電気力を受けて振動している場合に、この振動速度をレーザ光の照射によるドップラー効果を利用して測定することで帯電電荷を検出する方法である [3]。文献 [3] では、課電導体表面の誘導電荷を視覚化した結果が報告されている。しかし、振動速度が試料の物性値に依存するため定量的な測定にはまだ課題を残す。また測定装置のサイズが大型で高価であることも実用化に向けての課題の一つに挙げられる。測定装置にかかるコストや測定原理がすでに確立されているという観点から、本研究では静電プローブを用いた帯電電荷測定を対象とした。

多点測定法に基づく帯電電荷測定の測定原理そのものは 20 年以上前から提案されている。ところが、実際に絶縁物表面の帯電電荷測定を行ったという報告は、最近まで文献 [4, 5, 6] の 3 件に限られていた。文献 [4] は、ブロック状絶縁物を対象として帯電電荷測定を行い、さらに推定値とファラデーケージによる測定値との比較を行うことにより、多点測定に基づく帯電電荷測定法の妥当性を定量的に示した最初の報告例である。文献 [5, 6] では、スペーサを円柱形絶縁物で模擬し、絶縁物表面の帯電電荷測定を行い、SF<sub>6</sub> 中での帯電メカニズムや帯電スペーサの絶縁特性について検討している。文献 [4, 5, 6] では、係数行列の計算アルゴリズムに宅間が提案した直接法（あるいはマトリックス法 I と呼ぶ）を適用している [1]。しかしながら、多点測定を利用する帯電電荷測定は定量性、汎用性の両面において実用レベルの測定法として確立されておらず、実機において定量的に帯電電荷を測定したという報告は未だにされていない。文献 [7, 8, 9] では、500 kV 級の GIS (Gas Insulated Switchgear) のスペーサ表面の帯電電荷の測定を行ったという報告がされている。しかしながら、文献 [7, 8] の結果は多点測定を適用しておらず、プローブ出力を直接帯電電荷として取り扱っている。また、文献 [9] の結果は多点測定に基づいた測定結果であるが、プローブ出力と帯電電荷との間の関係を表す係数行列の計算アルゴリズムに誤りがあることが文献 [1] において明らかにされている。

帯電電荷測定は数値電界計算や逆計算のような数値計算を必要とするが、多点測定に基づく測定原理が提案された当初は現在のように高速な PC が安価で簡単に手に入る時代ではなく、容易に数値計算を実行できる環境ではなかったこと、またそれとともに数値電界計算や逆計算などソフトウェア面の改良が不十分であったことなどが、帯電電荷測

定法の高度化が十分にされなかった大きな要因であると考えられる。近年の PC の性能の向上はめざましく、数値計算を実行する環境が容易に手に入る時代となった。そこで、本研究では、ソフトウェアの改良高度化とともに帯電電荷測定を実用レベルに発展させることを目的とし、次の 3 点に重点を置いて検討を行った。

(1) 係数行列の計算アルゴリズムとして、直接法以外に  $\lambda$  関数法と呼ばれる方法が提案されている [10, 11]。文献 [1] において、直接法と  $\lambda$  関数法で得られる係数行列は理論的に一致することは明らかにされているが、実際に数値電界計算を行って直接法と  $\lambda$  関数法による係数行列が一致することは確認されていない。この課題は使用する数値電界計算コードの計算精度にも大きく依存するため、数値電界計算の高度化も課題に含まれる。帯電電荷測定では逆計算を要するため、係数行列を高精度に計算することは非常に重要な課題である。

(2) 多点測定に基づく帯電電荷測定では、静電プローブによる測定値から逆計算によって帯電電荷を推定する。しかし、逆計算においては、係数行列の計算誤差や測定誤差に対して推定解は容易に振動、発散し、得られた推定解が真値とは全く異なる可能性がある。帯電電荷測定の推定精度について逆計算の観点から検討はされておらず、解の不安定性を抑制するために逆計算手法を適用した測定例もない。実用のスペーサを対象とした測定では、その構造の複雑性から静電プローブを用いて絶縁物近傍をくまなく走査することには限界があると予測される。そのようなプローブの到達不可能領域の存在によって係数行列が悪条件となる場合、逆計算結果は非常に不安定になり易く、この不安定性を抑制するためには逆計算手法の適用が不可欠であると考えられる。

(3) 係数行列の計算には測定位置毎に 1 回の電界計算を要するため、全ての係数値の計算に必要な計算コストが非常に大きい。また、逆計算の安定化には、帯電電荷を数値離散化して表現するための帯電区分数よりも測定点数が多いことが望まれる。さらに逆計算を要するために精度の高い係数値が要求され、計算精度の向上は電界計算時に使用する未知数の増加につながり、さらに計算コストを増大させる。帯電電荷分布を詳細に把握するためには帯電区分数を増加させる必要がある。しかし、係数行列の計算に必要な計算コストが膨大となり、帯電区分数を増加させることが非常に困難となるため、従来の帯電区分数は最大でも数 100 程度にとどまる。

本研究の目的は、特に上記の 3 つの課題について検討を行い、高精度、高速度、大容量の数値電界計算技術を適用し、さらに逆計算の推定精度についても数学的な検討を行うことで、より汎用的な帯電電荷測定法を確立することである。ただし、多点測定に基づく帯電電荷測定では、プローブ出力と帯電電荷とを関係付ける係数行列の計算が不可欠であり、絶縁物内部の任意の位置に存在する電荷の取り扱いは非常に困難となる。また、電荷の位置を特定できた場合においても、絶縁物表面からの深さによっては係数行列が

悪条件になったり、プローブの検出感度の低下の可能性があるため、絶縁物内部の電荷分布の推定は容易ではないと予想される。したがって、本研究では絶縁物内部には電荷は存在しないと仮定し、絶縁物表面の帯電電荷を対象とした多点測定法に基づく帯電電荷測定法の高度化を目的とする。

最近では筆者のグループ以外においても帯電電荷測定に関する報告が多数見られ、現在注目された分野となっている [12, 13, 14, 15]。文献 [12] では、3000 程度の帯電区分数を達成したという報告がされているが、係数値の計算精度に関する検討は全く行われておらず、逆計算の推定精度についても簡単な検討しかされていない。文献 [13, 14] では、400 の帯電区分数を、文献 [15] では 10000 の帯電区分数を達成しているが、やはり係数値の計算精度に関する言及は全くされておらず、帯電電荷分布の推定にも逆行列演算を適用したに過ぎない。他のグループに共通していることは、測定対象を簡略化することにより逆計算が比較的容易な測定条件の下で帯電電荷測定を行っていることである。測定対象を逆計算が安定に実行できる配置に限定することも一つの考え方ではあるが、その代わりに測定法としての汎用性は犠牲にされており、実用のスペーサでの測定には適切ではないと考えられる。

帯電電荷測定法では係数行列の計算に数値電界計算の適用が不可欠である。数値電界解析手法は、計算対象の分割方法によって差分法、有限要素法などの空間メッシュを用いる手法（以下、領域分割法と呼ぶ）と表面電荷法、境界要素法、電荷重畳法などの境界メッシュを用いる手法（以下、境界分割法と呼ぶ）の二種類に分類できる。領域分割法は電極内部以外の空間全体を分割し、領域各点の電位を未知数とする。一方、境界分割法は境界面のみを分割し、計算対象を模擬する要素の表面電荷密度あるいは電位・電界を未知数とする。領域分割法では任意の位置の電界は各点の電位から数値微分によって計算するため大きな数値誤差を生じるが、境界分割法では要素の表面電荷密度あるいは電位・電界から直接計算するため高精度の計算が可能である。特に高電圧分野においては電位よりも電界の高精度な計算値を必要とする。また電極（あるいは絶縁物）表面の電界を正確に計算するためには、形状誤差をできる限り低下させることが求められる。境界分割法では計算対象の境界面のみを分割するだけで良いので、領域分割法に比べて形状模擬を容易に行うことが可能である。さらに計算領域が無限遠まで広がっている場合、領域分割法では仮想的な境界を設けなければならないが、境界分割法では無限境界条件が自然に満足されるため、特別な工夫を必要としない。測定対象が非線形性を有する場合は、有限要素法などの領域分割法の適用が有効であるが、帯電電荷測定はラプラス場での解析を必要とするため境界分割法が適している。

境界分割法には表面電荷法、境界要素法、電荷重畳法などがある。電荷重畳法は仮想電荷を配置し、仮想電荷がつくる等電位面を用いて形状模擬を行うため、計算対象が複

雑な形状である場合や三次元形状である場合には、仮想電荷を適切に配置することが非常に困難になる。一方、表面電荷法や境界要素法は、計算対象形状を三角形パッチや四角形パッチを用いて模擬するため、一般的な形状に対するモデリングが容易であるので、本研究では表面電荷法、境界要素法を帯電電荷測定法に適用する。通常解法の表面電荷法や境界要素法を用いて三次元電界解析を行う場合、電界計算時に使用する未知数の個数を  $N$  とすると、 $N$  は一次元当たりの分割数  $D$  の二乗に比例するため  $N = O(D^2)$  となる。また、密行列となる方程式の係数行列の計算に  $O(N^2) = O(D^4)$  の演算量と  $O(N^2) = O(D^4)$  の記憶容量を必要とし、さらに求解に  $O(N^{2\sim 3}) = O(D^{4\sim 6})$  の演算量を必要とする。一方、差分法や有限要素法では  $N = O(D^3)$  であり、方程式の係数行列が疎行列となることから必要な記憶容量、演算量はそれぞれ  $O(N) = O(D^3)$ ,  $O(N^{1\sim 1.3}) = O(D^{3\sim 4})$  となる。つまり、通常解法の表面電荷法や境界要素法を使用した場合は、記憶容量、演算量の面では不利となる。ところが、記憶容量、演算量とともに  $O(N) = O(D^2)$  にまで削減可能となる高速多重極法が表面電荷法や境界要素法に適用され、記憶容量、演算量の面においても差分法や有限要素法を上まわることが可能となった [16, 17, 18]。本研究においても、通常解法の表面電荷法だけでなく高速多重極法を適用した表面電荷法、境界要素法を使用した。

本論文の構成は以下のとおりである。まず第 2 章において、本論文で使用した表面電荷法や境界要素法の仕様、高速多重極法の適用方法について述べる。第 3 章では、使用した数値面積分手法、表面電荷要素の電位・電界の解析式を導出した結果、解析式による計算値と数値積分による計算値を比較することにより数値積分の精度評価を行った結果について述べる。積分精度評価に加えて、高速かつ大容量の計算を可能とする高速多重極法を適用することで、精度、速度、容量、汎用性の全ての面で高度化された表面電荷法、境界要素法コードが実現される。第 4～6 章では、帯電電荷測定法について検討した結果について述べる。第 4 章では、係数行列の数値計算精度の向上、帯電電荷測定の数値シミュレーションを行い、測定誤差や係数計算誤差による逆計算時の解の不安定性、解の安定化のための逆計算手法の適用、推定精度に関する数学的な検討を行った結果について述べる。第 5 章では、厚みを有するブロック状の固体絶縁物を対象として帯電電荷測定の実験を実施し、第 4 章の検討結果について実験的な検証を行った結果について述べる。第 6 章では、モデルスペーサを対象として、高速多重極法を適用した表面電荷法（あるいは境界要素法）を係数行列計算に使用することにより帯電区分数を増加させ、帯電電荷測定の数値シミュレーション、実測を行った結果について述べる。最後に第 7 章において本研究で得られた結果についてまとめる。





## 第2章 数値電界計算法

本章では、本研究の数値電界解析に使用した表面電荷法、境界要素法の計算原理、各種仕様について述べる。

表面電荷法は境界分割型の解法であり、三角形や四角形の表面電荷要素を用いて計算対象を数値離散化して取り扱う [19, 20, 21]。また表面電荷法は間接型境界要素法とも呼ばれる。表面電荷法の計算精度は、主に次の3点に依存する。

- 要素の表面電荷密度分布を表す関数（電荷密度表現関数と呼ぶ）
- 要素形状（パッチ）を表現するための関数（形状表現関数と呼ぶ）
- 境界条件の定式化

本章の前半ではこれらの3点について述べる。なお、表面電荷法の計算精度は数値積分精度にも依存するが、これについては第3章にて別途議論する。

表面電荷法では未知数を求めるための方程式は非対称密行列となるため、電界計算時に使用する未知数の個数を  $N$  とすると、 $O(N^2)$  または  $O(N^3)$  の演算量と  $O(N^2)$  の記憶容量とを必要とする。そのため、通常の PC では一万程度の未知数までしか取り扱うことができない。しかしながら、近年になって高速多重極法やツリー法と呼ばれる高速解法が提案された [16, 22]。高速多重極法やツリー法では演算量、記憶容量を  $O(N)$  あるいは  $O(N \log N)$  にまで削減可能である。これらの高速解法を導入した表面電荷法が実用化されつつあり、Pentium IV 1.5 GHz の CPU, 1 GByte のメモリを搭載する PC において百万を超える未知数の電界計算を実行した結果も報告されている [17]。本研究でも高速多重極法を適用した表面電荷法を使用しており、本章の後半では、高速多重極法の原理や使用した高速多重極法のアルゴリズムについて述べる。また、高速多重極表面電荷法に加えて高速多重極境界要素法も一部の計算で併用しており、最後に高速多重極境界要素法について述べる。

## 2.1 表面電荷法

### 2.1.1 計算原理

ここでは電界解析の対象として、計算対象領域に空間電荷が存在せず、領域の媒体が均質であり非線形的な性質を有しない場合の、静電界を取り扱う。

高電圧分野において、電界計算の対象となる媒体は導体と誘電体であり、それらの周りに空気、ガスなどの気体（もしくは真空）が存在することが多い。これらの媒体の表面には真電荷と分極電荷の2種類の表面電荷が現れる。真電荷は、導体に電圧あるいは電界を印加した場合に静電誘導により導体表面に現れる電荷、あるいはコロナ放電など種々の要因によって絶縁物表面に付着（帯電）した電荷である。分極電荷は、印加した電圧、電界もしくは帯電電荷によって絶縁物表面に現れる電荷である。媒体表面の真電荷と分極電荷とを加えたものを「見かけの電荷」と呼ぶ。見かけの電荷を用いると、導体や誘電体が存在する複合誘電体系の静電場を、ある均質媒体中（例えば真空中など）に見かけの電荷のみが存在する単一誘電体系の静電場として等価的に表現することができる。表面電荷法（Surface Charge Method : SCM）は、有限個の表面電荷要素（電荷密度が未知数）で見かけの電荷を数値表現し、与えられた境界条件を満足するような表面電荷要素の電荷密度を求めることにより、計算対象領域の数値電界解析を行う手法である。

表面電荷要素が任意の位置に作る電位  $\phi$ 、電界  $\mathbf{E}$  は次式で与えられる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{t}{r} ds \quad (2-1)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{t}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} ds \quad (2-2)$$

ただし、表面電荷要素が張る面領域を  $S$ 、微小面積  $ds$  における見かけの表面電荷密度を  $t$ 、 $ds$  から計算点に向かうベクトルを  $\mathbf{r}$ （大きさ  $r$ ）、真空中の誘電率を  $\epsilon_0$  とする。

表面電荷法で与える境界条件は導体と誘電体の場合でそれぞれ異なり、一般的に導体表面では電位条件、絶縁物表面では電束密度法線方向成分の連続条件を与える。境界条件を与える点を、以下、輪郭点と呼ぶ。

計算対象を数値離散化した場合において、導体表面の  $i$  番目の輪郭点の指定電位を  $\phi_i$ 、 $z$  座標を  $z_i$  とすると、導体表面の電位条件は次式で与えられる。

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{t}{r} ds - z_i E_{oz} \quad (2-3)$$

ただし、計算対象を数値離散化したときの表面電荷要素の総数を  $N$  とし、 $j$  番目の表面電荷要素の面積を  $S_j$  とする。ここで右辺第2項は、計算対象に一様電界  $\mathbf{E}_o$  が印加さ

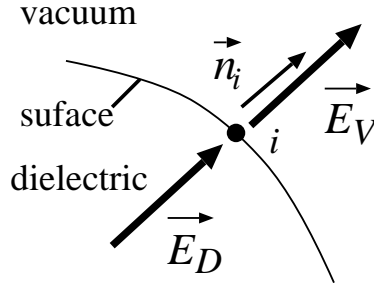


図 2-1: 誘電体境界面

れている場合を考慮したもので、ここでは  $\mathbf{E}_o$  が  $z$  方向成分をもつ場合について定式化している。

次に誘電体表面での電束密度法線方向成分の連続条件を与える式を示す。誘電体は真空中に存在しており、誘電体表面の  $i$  番目の輪郭点において真電荷密度  $\sigma_i$  の電荷が帯電している場合を考える。図 2-1 に示すように、 $i$  番目の輪郭点での真空側と誘電体側の電界をそれぞれ  $\mathbf{E}_V$ 、 $\mathbf{E}_D$  とし、 $i$  番目の輪郭点における法線方向単位ベクトルを  $\mathbf{n}_i$ 、誘電体の比誘電率を  $\epsilon_r$  とする。ただし図においては、記号の上に矢印を付記することにより、記号がベクトルであることを示している（以降も同様の表記を使用する）。 $i$  番目の輪郭点における見かけの表面電荷密度を  $t_i$  とし、 $\mathbf{E}_V$ 、 $\mathbf{E}_D$  はそれぞれ次式で表される。

$$\mathbf{E}_V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{t \mathbf{r}}{r^2 r} ds + \frac{t_i}{2\epsilon_0} \mathbf{n}_i + \mathbf{E}_o \quad (2-4)$$

$$\mathbf{E}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{t \mathbf{r}}{r^2 r} ds - \frac{t_i}{2\epsilon_0} \mathbf{n}_i + \mathbf{E}_o \quad (2-5)$$

右辺第 1 項は  $i$  番目の輪郭点において積分の特異性 ( $r = 0$  となる) を有しているため、この積分は Cauchy の主値として解釈する必要がある。また、境界面における電束密度法線方向成分の連続条件より

$$\mathbf{E}_V \cdot \mathbf{n}_i - \epsilon_r \mathbf{E}_D \cdot \mathbf{n}_i = \sigma_i \quad (2-6)$$

が成り立つ。(2-4) 式、(2-5) 式を (2-6) 式に代入すると、誘電体表面の電束密度法線方向成分の連続条件を表す次式が得られる。

$$\sigma_i + (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}_o \cdot \mathbf{n}_i = \frac{1 - \epsilon_r}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{t \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_i}{r^2 r} ds + \frac{1 + \epsilon_r}{4\pi\epsilon_0} 2\pi t_i \quad (2-7)$$

導体表面あるいは誘電体表面の見かけの表面電荷密度分布を表面電荷要素を用いて模擬し、(2-3) 式、(2-7) 式に基づいて未知数（見かけの表面電荷密度）の個数と同数の境界

条件式を与えることにより，表面電荷密度を求めるための連立一次方程式を形成することができる。

### 2.1.2 表面電荷要素

表面電荷法では，表面電荷要素を用いて計算対象を数値離散化して模擬するため，電界計算精度は表面電荷要素の要素性能に依存する。表面電荷要素の要素性能を規定する関数には，媒体境界面の見かけの表面電荷密度分布を模擬して表現するための電荷密度表現関数と，媒体の物理形状を模擬して表現するための形状表現関数の 2 種類がある。また，表面電荷要素は大きく分類すると三角形要素と四角形要素の 2 種類に分類される。本節では，電荷密度表現関数と形状表現関数について，三角形表面電荷および四角形表面電荷それぞれに対して述べる。

#### 電荷密度表現関数

三角形要素および四角形要素の電荷密度分布  $t$  は，次式に示すように節点と呼ばれる点における電荷密度  $t_i$  の重み付き平均によって表される [23]。

$$t = \sum_{i=1}^n N_i t_i \quad (2-8)$$

$n$  は表面電荷要素の節点数を表す。 $N_i$  は各節点値に対する重み関数を表し，補間関数（内挿関数，または基底関数）と呼ばれる。

三角形表面電荷において，電荷密度表現関数に一次，二次，三次関数を用いた場合の節点の位置を図 2-2 に示す。また，図 2-2(a) に示すように三角形に対して面積座標  $L_1, L_2, L_3$  ( $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ ) を定める。 $L_1 = 1, L_2 = 1, L_3 = 1$  がそれぞれ三頂点 1, 2, 3 に対応する。

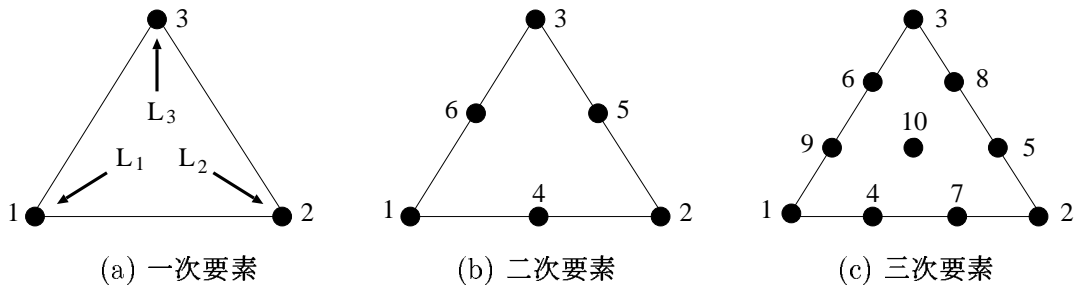


図 2-2: 三角形表面電荷

表 2-1: 三角形表面電荷の補間関数

次数	節点番号	補間関数
一次	1	$N_1 = L_1$
二次	1	$N_1 = L_1(2L_1 - 1)$
	4	$N_4 = 4L_1L_2$
三次	1	$N_1 = \frac{1}{2}L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$
	4	$N_4 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1)$
	10	$N_{10} = 27L_1L_2L_3$

電荷密度表現関数を一次関数とした場合、節点の位置は三頂点となり補間関数は面積座標と同じ値となる。また、電荷密度表現関数を二次関数とした場合、三角形の三頂点と各辺の中間点の 6 点が節点位置となり、補間関数は面積座標の二次関数で表される。補間関数は 6 種類存在するが、頂点でピーク値をとる場合と中間点でピーク値をとる場合の 2 種類に分類される。電荷密度表現関数を三次関数とした場合、三角形の三頂点と各辺の三等分点および重心点の 10 点を節点位置とし、補間関数は面積座標の三次関数で表現される。補間関数は 10 種類存在するが、頂点、三等分点および重心点それぞれでピーク値をとる場合の 3 種類に分類される。電荷密度表現関数を一次、二次、三次とした場合の代表的な節点に対応する補間関数を表 2-1 に示す。

次に四角形表面電荷の電荷密度表現関数について述べる。四角形表面電荷は節点の取り方によって Lagrange 型と Serendipity 型に分けられる。補間関数が一次関数までの場合は Lagrange 型と Serendipity 型は同じ節点位置をとるが、二次以上の高次関数になると Lagrange 型は要素内部に節点を持つようになる。この内部節点の存在が Lagrange 型の補間関数の表現能力を低下させる原因になるとされている [24]。まず Lagrange 型の補間関数について説明する。Lagrange 型の四角形表面電荷が  $XY$  平面上にある場合に要素の表面電荷密度  $t$  は次式で表される。

$$t = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_{ij} X^i Y^j \quad (2-9)$$

ただし  $m$  は電荷密度表現関数の次数を表す。(2-9) 式は双  $m$  次多項式であり、完全  $m$  次多項式の他に、それより高次の項を含んでいる(最高次の項は  $2m$  次項  $X^m Y^m$ )。しかし高次項の含み方は中途半端であって、関数の近似能力の観点からはあまり有効ではない。これに対して要素内部の節点を取り除き、それに対応して (2-9) 式の項数も減らして、できるだけ完全  $m$  次式に近づけたものが Serendipity 型である。Serendipity 型の補間関数は完全  $m$  次多項式に 2 つの付加項を加えた形になっており、Lagrange 型に比べて関数

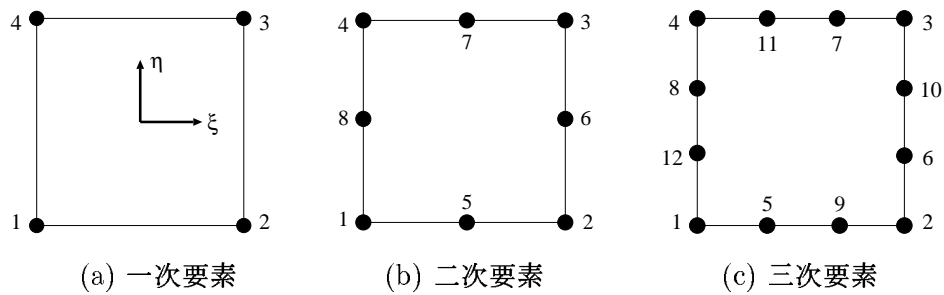


図 2-3: 四角形表面電荷

表 2-2: Serendipity 型の四角形表面電荷の補間関数

次数	節点番号	補間関数
一次	1	$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$
二次	1	$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)$
	5	$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$
三次	1	$N_1 = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 - \eta)(-10 + 9\xi^2 + 9\eta^2)$
	5	$N_5 = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - 3\xi)$

の近似能力が高くなる。また節点数を減らすことは未知数の総数を減らすことにつながる。数値計算上においても大きな利点となる。したがって、本研究では Serendipity 型の四角形表面電荷を使用した。Serendipity 型の四角形表面電荷における節点の位置を図 2-3 に示す。図 2-3(a) に示すように四角形に対して正規化座標  $\xi$ ,  $\eta$  を定める。 $\xi$ ,  $\eta$  はそれぞれ  $-1 \sim 1$  の値をもち、 $(\xi, \eta) = (-1, -1)$  は節点 1 に、 $(\xi, \eta) = (1, -1)$  は節点 2 に対応する。補間関数を一次関数とした場合は四角形の頂点が節点となる。二次関数とした場合は、四角形の四頂点と各辺の中間点の 8 点を節点とし、補間関数は 8 種類存在するが四角形の頂点でピーク値をもつものと、辺上の中間点でピーク値をもつものの 2 種類に分類できる。補間関数を三次関数とした場合、四角形の四頂点と各辺の三等分点の 12 点を節点とする。補間関数は 12 種類存在するが、四角形の頂点と辺の三等分点でピーク値をもつものの 2 種類に分類できる。電荷密度表現関数を一次、二次、三次とした場合の代表的な節点に対応する補間関数を表 2-2 に示す。

### 形状表現関数

計算対象を三角形あるいは四角形の平面パッチで模擬した場合、第 3 章で述べるように表面電荷要素が任意の位置に作る電位・電界を解析式で計算することができるので、数

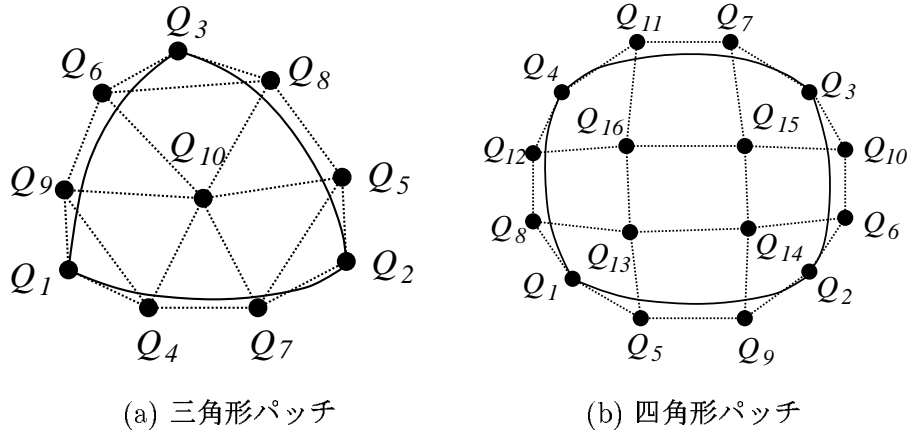


図 2-4: 三次 Bézier パッチ

値積分に伴う特異点の処理を行う必要がなく高速かつ高精度な計算が可能である。しかしながら、実用機器を対象として電界計算を行う場合、対象となるモデルは球や円柱など曲面を含むことが多い。そのため、平面パッチのみで形状を精度よく模擬できる場合はほとんどなく、多面体で形状を近似したときの形状誤差が大きくなる。特に高電圧機器では機器の表面またはその近傍での電界を高精度に計算することが必要であるため、形状をできるだけ正確に模擬することは非常に重要である。したがって、本研究では平面パッチに加えて曲面パッチを併用した。曲面を表現する三角形および四角形パッチには三次 Bézier パッチおよびその修正型パッチを使用した [25, 26]。

図 2-4 に示すように Bézier パッチでは、曲面上にあるとは限らない制御点と呼ばれる点列  $Q_i$  を補間することにより曲面を表現する。三角形パッチ、四角形パッチではそれぞれ 10 個、16 個の制御点を使用し、三角形パッチの制御点  $Q_1, Q_2, Q_3$  は三頂点に一致し、四角形パッチの制御点  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  は四頂点に一致する。三角形パッチおよび四角形パッチの各辺は 4 個の制御点（例えば、三角形パッチの  $Q_1, Q_4, Q_7, Q_2$  の 4 個の制御点）を用いて三次 Bézier 曲線で表現されるため、三角形パッチと四角形パッチとの接続も容易である。

次に頂点位置以外の制御点の位置を決定する方法について述べる。三角形の辺を形成する  $Q_4$  の制御点は、図 2-5 に示すように制御点  $Q_1$  を通る接線ベクトル  $t_{12}$  を用いて  $Q_4 = Q_1 + \frac{1}{3} t_{12}$  とする。図 2-5 において  $Q_1, Q_2, Q_4$  は制御点を、 $n$  は  $Q_1$  におけるパッチの法線方向単位ベクトルを、 $a_{12}$  はベクトル  $Q_2 - Q_1$  を表す。接線ベクトル  $t_{12}$  は、文献 [27] の方法に従い次式によって計算する。

$$t_{12} = |a_{12}| \times \frac{u_{12} - (u_{12} \cdot n)n}{|u_{12} - (u_{12} \cdot n)n|} \quad (2-10)$$

ただし、 $u_{12}$  は  $a_{12}$  の単位ベクトルを表す。つまり、 $Q_4$  は三角形の頂点  $Q_1, Q_2$  と法



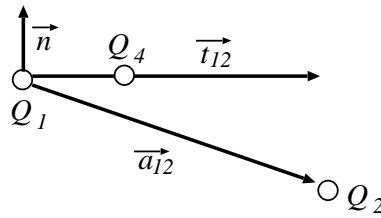


図 2-5: 制御点位置を決定するための接線ベクトル

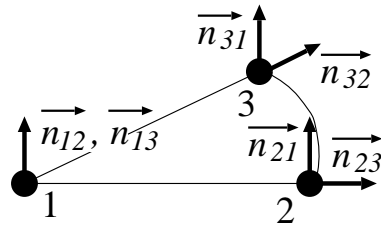


図 2-6: 法線方向ベクトルの指定

線方向単位ベクトル  $n$  によって決定される。同様にして、三角形パッチの制御点  $Q_5 \sim Q_9$  と四角形パッチの制御点  $Q_4 \sim Q_{12}$  を決定する。三角形パッチの内部制御点  $Q_{10}$  は  $Q_1 \sim Q_9$  を用いて次式に基づいて求める。

$$Q_{10} = -\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 Q_i + \frac{1}{4} \sum_{i=4}^9 Q_i \quad (2-11)$$

四角形パッチの内部制御点  $Q_{13} \sim Q_{16}$  は  $Q_1 \sim Q_{12}$  によって次式のように決定する。

$$\left. \begin{aligned} Q_{13} &= \frac{1}{9}(-4Q_1 - 2Q_2 - Q_3 - 2Q_4 + 6Q_5 + 3Q_6 + 3Q_{11} + 6Q_{12}) \\ Q_{14} &= \frac{1}{9}(-2Q_1 - 4Q_2 - 2Q_3 - Q_4 + 6Q_6 + 3Q_7 + 6Q_9 + 3Q_{12}) \\ Q_{15} &= \frac{1}{9}(-Q_1 - 2Q_2 - 4Q_3 - 2Q_4 + 6Q_7 + 3Q_8 + 3Q_9 + 6Q_{10}) \\ Q_{16} &= \frac{1}{9}(-2Q_1 - Q_2 - 2Q_3 - 4Q_4 + 3Q_5 + 6Q_8 + 3Q_{10} + 6Q_{11}) \end{aligned} \right\} (2-12)$$

このように頂点の座標と頂点での法線方向単位ベクトルを指定することにより、三次 Bézier パッチの制御点を全て決定することができる。制御点の位置は各パッチ毎に独立して定められるが、隣接パッチと共有する辺において頂点座標と法線方向単位ベクトルを隣接パッチと同じ値を使用することにより、隣接パッチとの  $C^0$  接続（頂点上では  $G^1$  接続）が自然に実現される。ただし、図 2-6 のような円板の一部を三角形パッチで模擬する場合を考えると、辺 12 および辺 31 上の制御点に対しては同じ法線方向ベクトル ( $n_{12}$  方向) を使用すればよい。しかし、辺 23 上の制御点に対しては別々の法線方向単位ベクトル  $n_{23}$  と  $n_{32}$  を指定しなければ、辺 23 の円弧を模擬するように制御点を配置するこ

表 2-3: 三次 Bézier パッチの制御点に対する重み関数

形状	制御点番号	重み関数
三角形	1	$N_{B1} = L_1^3$
	4	$N_{B4} = 3L_1^2L_2$
	10	$N_{B10} = 6L_1L_2L_3$
四角形	1	$N_{B1} = (1-u)^3(1-v)^3$
	5	$N_{B5} = 3u(1-u)^2(1-v)^3$
	13	$N_{B13} = 9u(1-u)^2v(1-v)^2$

とができない。そこで、図 2-6 に示すように各辺に対して端点での法線方向ベクトルを指定する。四角形パッチに対しても同様の方法で法線方向単位ベクトルを指定する。つまり、三角形パッチでは三頂点の座標と六個の法線方向単位ベクトルを、四角形パッチでは四頂点の座標と八個の法線方向単位ベクトルを指定することにより制御点の位置を定める。パッチ上の任意の点  $P$  は次式に示すように制御点の重み付き和で表される。

$$P = \sum_{i=1}^n N_{Bi} Q_i \quad (2-13)$$

ただし、 $n$  は制御点の数を表し、三角形パッチの場合は  $n = 10$ 、四角形パッチの場合は  $n = 16$  とする。 $N_{Bi}$  は制御点  $Q_i$  に対する重み関数を表す。三次 Bézier パッチの代表的な制御点に対する重み関数  $N_{Bi}$  について表 2-3 にまとめる。表において  $L_1, L_2, L_3$  は図 2-2(a) と同じであり、 $u, v$  は図 2-3(a) の  $\xi, \eta$  を用いて  $u = (1 - \xi)/2, v = (1 - \eta)/2$  とする。また、上記の方法で制御点を決定した三角形パッチ、四角形パッチはそれぞれ 9 自由度三次三角形形状関数、12 自由度三次 Serendipity 形状関数と同じ形状を表す [23, 27]。

しかしながら、三次 Bézier パッチを用いた場合、隣接するパッチ間の頂点では  $G^1$  連続であるが、頂点を除く辺上では  $C^0$  連続である。そのため、電荷密度表現関数を高次関数とし頂点以外の辺上に節点を有する場合には、その節点で法線方向が定まらないという問題が生じる。電荷密度表現関数を二次関数以上とした場合は辺上の節点で境界条件式を立てる。誘電体表面の境界条件は電束密度法線方向成分の連続条件であるため、辺上の節点において境界条件式が定まらない。この問題を解決するために、隣接パッチと辺上においても  $G^1$  接続が可能となるように、三次 Bézier パッチの内部制御点を可変型とした三角形パッチが提案されている [26]。また、内部制御点を可変型とするパッチは四角形に対しても提案されている [28, 29]。しかし、本研究では三角形パッチのみを適用したので三角形パッチについてのみ述べる。

内部制御点可変型三角形パッチでは、図 2-7(a) に示すように新たに内部制御点  $Q'_4 \sim Q'_9$  を導入し、これらの制御点を用いて制御点  $Q_{10}$  を次式によって可変表現する。

$$Q_{10} = \frac{L_1 L_2 \frac{L_1 Q'_4 + L_2 Q'_7}{L_1 + L_2} + L_2 L_3 \frac{L_2 Q'_5 + L_3 Q'_8}{L_2 + L_3} + L_3 L_1 \frac{L_3 Q'_6 + L_1 Q'_9}{L_3 + L_1}}{L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1} \quad (2-14)$$

$Q'_4 \sim Q'_9$  の重み係数は (2-14) 式に三次 Bézier パッチの  $Q_{10}$  の重み係数  $6L_1 L_2 L_3$  を掛けた値になる。このような可変型内部制御点を導入した場合においても、各辺では  $L_1, L_2, L_3$  のいずれかの値が零になるため、各辺は三次 Bézier 曲線で表現される。ただし、辺上での一階偏微係数値は内部制御点に依存する。例えば、 $Q_1, Q_4, Q_7, Q_2$  の制御点によって表現される辺に注目すると、この辺上の任意の点  $P$  での  $L_1, L_2$  による一階偏微係数ベクトル  $\frac{\partial P}{\partial L_1}, \frac{\partial P}{\partial L_2}$  は  $Q'_4, Q'_7$  の影響を受ける。つまり、辺上において自パッチの一階偏微係数ベクトルと隣接パッチの一階偏微係数ベクトルが同じ平面上になるように  $Q'_4, Q'_7$  を決めることにより、辺上の法線方向ベクトルを隣接パッチと一致させることが可能となる。この辺での  $G^1$  接続を可能とする  $Q'_4, Q'_7$  の位置の計算式の説明に図 2-7(b), (c) を使用する。図 2-7(b) において  $Q_i, Q'_i$  は自パッチの制御点であり、右側の黒丸は隣接パッチの制御点を表す。これらの制御点番号は隣接パッチがどの辺で自パッチと接続するかによって決定される。 $a_0, a_3$  はそれぞれ  $Q_9, Q_5$  から  $(Q_1 + Q_4)/2, (Q_2 + Q_7)/2$  に向かうベクトルであり、 $a_1, a_2$  はそれぞれ  $Q'_4, Q'_7$  から  $(Q_4 + Q_7)/2$  に向かうベクトルである。 $c_0, c_1, c_2$  はそれぞれ  $Q_1$  から  $Q_4, Q_4$  から  $Q_7, Q_7$  から  $Q_2$  へ向かうベクトルである。 $b_0 \sim b_3$  は隣接パッチから見た場合の  $a_0 \sim a_3$  に対応する（ただし、ベクトルは逆向き）。図 2-7(c) のベクトル関係図より、 $\alpha(0), \alpha(1), \lambda(0), \lambda(1)$  を計算する。辺の端点つまり三角形パッチの頂点において  $G^1$  接続されているものとする、 $a_0, c_0, b_0$  および  $a_3, c_2, b_3$  は同一平面上に存在するので、 $\alpha(0), \alpha(1), \lambda(0), \lambda(1)$  を求めることができる。このとき 辺での  $G^1$  接続の条件式は、 $\alpha(0) \neq \alpha(1)$  の場合は (2-15) 式で、 $\alpha(0) = \alpha(1)$  の場合は (2-16) 式で与えられる。

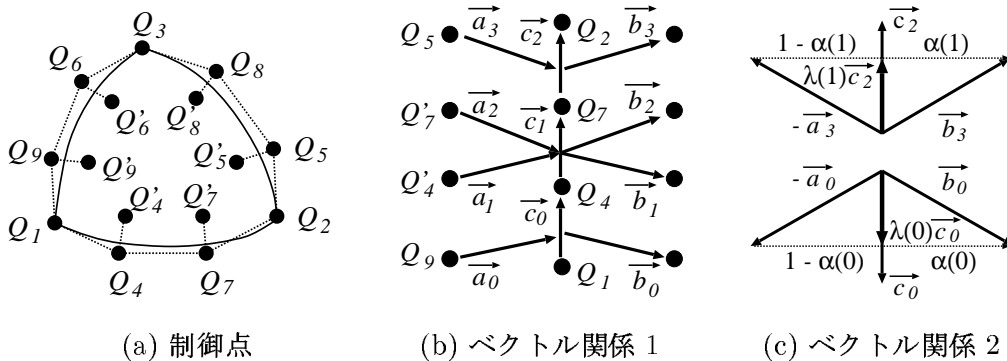


図 2-7: 内部制御点可変型三角形 Bézier パッチ

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -2\alpha(0) & 2(1-\alpha(0)) & 0 & 0 \\ -2\alpha(1) & 2(1-\alpha(1)) & -2\alpha(0) & 2(1-\alpha(0)) \\ 0 & 0 & -2\alpha(1) & 2(1-\alpha(1)) \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(1) & \alpha(1)-1 & 0 & 0 \\ \alpha(1) & \alpha(1)-1 & \alpha(0) & \alpha(0)-1 \\ 0 & 0 & \alpha(0) & \alpha(0)-1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda(1) & 2\lambda(0) & 0 \\ \lambda(1) & 2(\lambda(0)+\lambda(1)) & \lambda(0) \\ 0 & 2\lambda(1) & \lambda(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix} \quad (2-15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -2\alpha(0) & 2(1-\alpha(0)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha(1) & 2(1-\alpha(1)) \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(1) & \alpha(1)-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(0) & \alpha(0)-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda(1) & 2\lambda(0) & 0 \\ 0 & 2\lambda(1) & \lambda(0) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix} \quad (2-16)
\end{aligned}$$

(2-15) 式あるいは (2-16) 式から  $G^1$  接続を満足する  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  を求めることができるため制御点  $Q'_4, Q'_7$  を決定することができる。また同時に隣接パッチにおける制御点の位置も定まる。

### 2.1.3 境界条件式

表面電荷法では境界条件式を定める点を輪郭点 (KP と呼ぶときもある) と呼ぶ。計算対象を三角形表面電荷あるいは四角形表面電荷で数値離散化したときに、選点法では表面電荷要素の電荷密度表現関数の節点を輪郭点とするのが通常である。しかし、電荷密度表現関数に高次関数を使用した場合、表面電荷要素の頂点または辺上に輪郭点が存在することになる。計算対象が導体の場合は境界条件は電位条件のみで与えられるので、頂点あるいは辺上においてエッジ部 ( $C^0$  連続) つまり電界特異点が存在しても問題はなく、そのまま高次関数を適用することができる。しかし、計算対象に誘電体が含まれる場合は、境界条件は誘電体境界面での電束密度法線方向成分の連続条件であるので、パッチ間の接合部にエッジ部分が存在するとエッジ部分において法線方向が定まらないために高次関数を使用することができない。例えば、平面パッチを用いて形状を模擬した場合、

計算対象は多面体で表現されるためパッチの頂点や辺上にエッジ部分が存在する。また先に述べたように三次 Bézier パッチを用いて形状を模擬する場合、パッチの頂点では  $G^1$  連続であっても辺上では  $C^0$  連続であるため辺上で法線方向が不定となり、辺上の節点を輪郭点に設定することができない。ただし、可変型内部制御点を有するパッチを適用した場合は隣接パッチと  $G^1$  接続が可能であるため、辺上の節点を輪郭点に定めることが可能となる。しかしながら、誘電体が多面体である場合など  $C^0$  連続部分をもともと有する場合は、パッチの性能に関わらず法線方向が不定となる問題を回避することはできない。また、3 種類以上の媒質が点または線で接触する位置（三重点など）では境界条件式を定めることができない。

表面電荷法において、これらの問題を解決する方法として次の二つの方法が提案されている。

- 非適合要素を使用する方法（適合要素も併用）[30]
- ガラーキン法を使用する方法 [31]

後者の方法は計算精度は高いが、連立方程式を作成するときに電束密度を面積分する必要があり計算時間に問題がある。前者の方法は後者に比べて計算の精度は劣るが、選点法であるために計算時間の点で優れており、本研究では前者の方法を使用した。適合要素では、隣接する表面電荷要素間で共通の値を節点値とするため、要素間で電荷密度分布は連続的に変化する。一方、非適合要素では、表面電荷要素間で本来共有すべき節点値を各要素に対して別々に定義するものであり、要素間の電荷密度分布の不連続性を許容する方法である。非適合要素の輪郭点は要素の節点位置ではなく、非適合となる節点が属するそれぞれの要素内に輪郭点を設定する。要素内に輪郭点をもつことにより、エッジ部分で法線方向が定まらない場合でも要素内では法線方向が定まるので、複合誘電体場においても高次関数の使用が可能となる。また電界三重点となる場合においても、非適合要素を使用することにより、導体表面あるいは誘電体表面で輪郭点を有することになるので、境界条件式を立てることができないという問題を回避することができる。電荷密度補間関数を一次関数とした場合に、適合要素と非適合要素を使用したときの電荷密度分布を図 2-8 に示す。図 2-8(a) は隣接する要素が共有する節点で一つの値をとり、要素間で電荷密度が連続して変化するが、図 2-8(b) では 5 枚の要素が共有する節点を非適合とし、各要素に対して異なる節点値を与えているので、その節点で電荷密度は不連続に変化する。また図 2-8(b) に示すように、要素の一つの節点を非適合とした場合においても、他の節点もあわせて非適合とする必要はなく、適合要素と非適合要素を適宜使い分けることで未知数の個数の増加を抑えることができる。

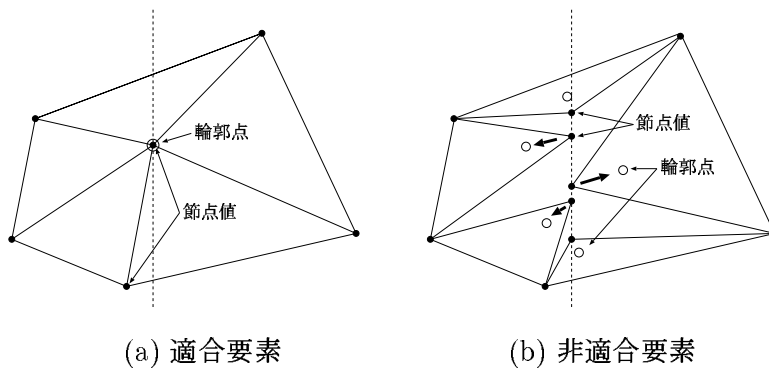


図 2-8: 適合要素と非適合要素

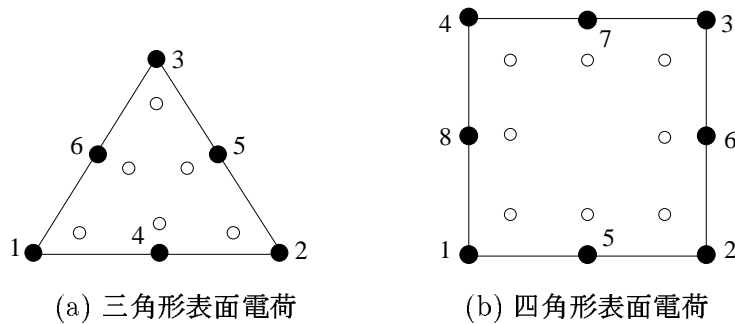


図 2-9: 電荷密度表現関数を二次関数とした場合の非適合要素の輪郭点位置

非適合要素の場合、輪郭点の位置は要素内部の点となるが、その位置の選定には任意性がある。本研究で使用した非適合要素の輪郭点位置を図 2-9 の白丸で表す。図 2-9(a) の三角形表面電荷の場合は 6 点三角形積分公式の積分点位置とした。図 2-9(b) の四角形表面電荷の場合は、3 個の一次元分点数を使用するガウス型積分を 2 方向に適用したときの 9 個の積分点から中心の積分点を除いた 8 点を輪郭点の位置とした。

## 2.2 高速多重極表面電荷法

境界分割型の表面電荷法において作成される係数行列は非対称の密行列であり、未知数の個数を  $N$  として、係数行列の計算に  $O(N^2)$  の演算量と  $O(N^2)$  の記憶容量を必要とし、さらに方程式の解法に  $O(N^3)$  の演算量が必要になる。したがって、メモリ容量の観点から見ると、市販 PC に搭載されるメモリ容量は現在のところ 2 GByte が上限であるため、使用できる未知数の数は一万から一万数千個程度が限界となる。しかし、最近になって、粒子間の相互作用が粒子間距離が大きくなるにしたがって小さくなるような問題に対する高速解法として高速多重極法 (Fast Multipole Method : FMM) やツリー法

(Tree Method : TM) が普及しつつある [16, 22]。FMM や TM は必要な演算量をそれぞれ  $O(N)$ ,  $O(N \log N)$  に、また必要な記憶容量も  $O(N)$  にまで削減可能な解法であり、市販 PC でも大規模問題を取り扱うことが可能となる。FMM, TM を適用した表面電荷法がすでに報告されている [17, 32]。本研究では、FMM-SCM を使用し、FMM の一部で TM を併用した。以下に FMM について述べる。

### 2.2.1 高速多重極法の原理

FMM や TM の計算原理の根底にある考え方は、ある注目点  $O$  に対して遠方にある粒子群からの寄与を計算する場合、一つの粒子毎ではなく粒子群をまとめて取り扱うことによって計算量を減らすことである [16, 22]。そのため、FMM や TM では注目点  $O$  と粒子群との相対的な位置関係の把握が必要となる。FMM や TM では粒子群を空間的に統括、把握するために、クイックソートなどに用いられる分割統治法を適用する。分割統治法では、対象とする集合を定めた規則に従って階層的な部分集合群に分割することにより、集合に対して木構造を作成する。木構造を利用することにより、ある部分集合群の探索あるいは部分集合群に対する何らかの操作を容易にかつ効率的に実行することが可能となる。FMM のアルゴリズムは、(1) 粒子群の分割統治、(2) 多重極展開、局所展開による各部分粒子群の表現、(3) 注目点  $O$  に対する粒子群からの寄与の計算の 3 段階に分けられる。

まず粒子群に対する分割統治法の適用方法について述べる。ここでは、簡単のため二次元の場合について説明する。図 2-10(a) に示すように粒子群が空間に点在している場合を考える。このとき全粒子群を取り囲むような正方形のセルを定義する。このセルをルートセルと呼び、ルートセルのレベル (階層) を零レベルとする。次にルートセルを 4 分割することによりサブセルを生成する。このサブセルを子セルと呼び、子セルに対して子セルを含む一つ上の階層に属するセルを親セルと呼ぶ。同様にして、生成したセルを

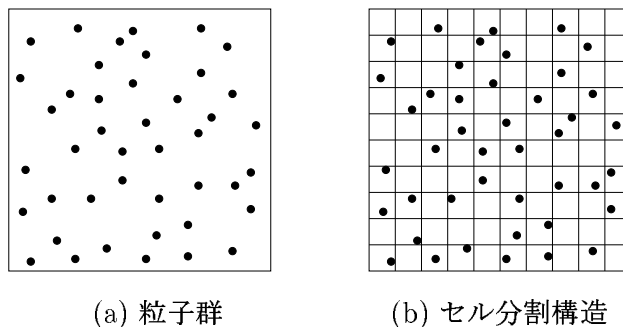


図 2-10: 粒子群の分割統治

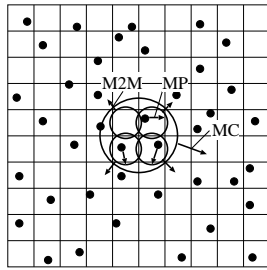


図 2-11: 多重極展開

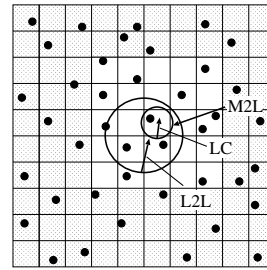


図 2-12: 局所展開

それぞれ 4 分割してサブセルを作成していく。この操作を繰り返すと図 2-10(b) に示すように、全ての粒子が 1 個のセル (ルートセル) に含まれていた状態から、0 もしくは 1, 2 個の粒子がサブセルに属する状態が得られる。このとき最下層に属するセルを葉セルと呼ぶ。また、ここでは粒子を含まないセルに対してもセル分割を行っているために、全ての葉セルが同層レベルとなっている。しかし、葉セルには必ず少なくとも一つの粒子が含まれるように、セルの分割を途中で停止してもよい。この場合、葉セルのレベルは不揃いになるが、粒子を含まない空セルの生成はメモリ、作業の両面において非効率である。これで粒子群の分割統治の準備が完了する。

次に各セルに対して多重極展開を定義する。図 2-11 に示すように、まず葉セルに含まれる粒子 (あるいは部分粒子群) の寄与をまとめて多重極展開で表現する (MP)。次に一つ上の階層の親セルにおいて、4 個の子セルに対して多重極展開で表現された場をまとめて一つの多重極展開で表現する (M2M)。この操作を全てのセルに対して繰り返し実行することにより、全てのセルにおいてセル内に含まれる粒子群の寄与を多重極展開で表現することができる。次に第 2 層以下に属するセルに対して局所展開を定義する。局所展開では、セルに対して近接セルを定義する必要がある、ここでは 2 隣接セルまでを近いと判定することにする。局所展開の説明に図 2-12 を用いる。以下に局所展開の手順を示す。(1) 親セルの近接セルに属する子セル群 (自セルに対して同層セル) の中で、自セルの近接セルを除いた全てのセルの多重極展開の寄与をまとめて局所展開で表現する (M2L)。図 2-12 では、一番小さな円で表されているセルを自セルとして、濃い色で表される全てのセルが M2L に必要なセル群を表す。(2) もし親セルにおいて局所展開が定義されていれば、親セルの局所展開による寄与を自セルの局所展開へ加える (L2L)。この (1), (2) の手順を第 2 層のセルから葉セルに向かって実行することにより、各セルに対する遠方セルの寄与を局所展開で定義することができる。

次に注目点  $O$  に対する粒子群からの寄与の計算について説明する。本研究では FMM の一部に TM を使用しているため、まず TM の場合について説明する。あらかじめ見込み角  $\theta$  の値を設定しておく。見込み角とは、点  $O$  とあるセルとの相対的な位置関係が



ら点  $O$  に対してセルが近いかわ遠いかを判別するための閾値である。注目点  $O$  とルートセルの中心点との距離  $d$  を計算する。この距離  $d$  のセルの多重極展開半径  $r$  に対する比  $d/r$  が  $\theta$  よりも大きければ「遠い」と判定し、セルに含まれる粒子群の点  $O$  に対する寄与を多重極展開を用いて計算する (図 2-11 の MC)。  $d/r < \theta$  であれば「近い」と判定し、もう一つ下の階層の 4 個の子セルそれぞれに対して同様の操作を行う。葉セルに対して  $d/r < \theta$  となった場合は、それより下層のセルは存在しないので、葉セルに含まれる粒子群の寄与を直接に計算する。FMM では、以下の手順にしたがって点  $O$  への寄与を計算する。(1) 点  $O$  を含むセル (自セル) および自セルの 1 隣接, 2 隣接セルに含まれる粒子群からの寄与を TM で計算する。(2) 自セルに局所展開が定義されていれば、局所展開による寄与を計算する (図 2-12 の LC)。(3) 自セルの先祖セルの同層近接葉セルに含まれる粒子群からの寄与を TM で計算する。(1) ~ (3) の手順により全ての粒子群からの寄与を計算することができる。

## 2.2.2 擬似粒子法

本研究では、多重極展開係数、局所展開係数を球面調和関数を用いて直接計算するのではなく、粒子群を取り囲む球面上に配置した仮想の (擬似) 粒子群からの寄与として間接的に多重極展開、局所展開を計算する擬似粒子法を使用した [17, 33]。図 2-13 を用いて擬似粒子法による展開表現方法について述べる。図 2-13 において、 $c$  は展開中心 (セルの中心) を表し、 $c$  を中心とし展開半径  $a$  の球内 (多重極展開) あるいは球外 (局所展開) に  $N$  個の粒子群 (ここでは点電荷群とする)  $Q_i$  ( $i = 1 \sim N$ ) が存在し、点電荷  $Q_i$  と展開中心との間の距離を  $\rho_i$  で表す。擬似粒子法では、点電荷群の多重極展開および局所展開を球面上に配置した  $K$  個の擬似粒子群  $q_k$  ( $k = 1 \sim K$ ) を用いて表現する。このとき、擬似粒子  $q_k$  と点電荷  $Q_i$  が成す角度を  $\gamma_{ki}$  とする。ただし、 $K$  個の擬似粒子は球面上の  $t$ -design 点に配置されているものとする [34]。点群を  $t$ -design 点に配置した場合、 $t$  次までの任意の多項式の球面上での積分値がその多項式の  $t$ -design 点での値の和を  $4\pi/K$  倍した値に等しくなる。つまり、 $t$ -design 点は積分重みが全て  $4\pi/K$  の球面上の数値面積分公式点と解釈できる。

図 2-13(a) に示すように点電荷群が球内に内包されている場合は、擬似粒子による展開表現は点電荷群が球外に及ぼす寄与を多重極展開で表現することに対応する。この場合の擬似粒子  $q_k$  は次式で与えられる。

$$q_k = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{\rho_i}{a}\right)^l P_l(\cos\gamma_{ki}) \quad (2-17)$$

$P_l$  は  $l$  次のルジャンドル多項式である。このとき、球外での電位・電界は擬似粒子を点

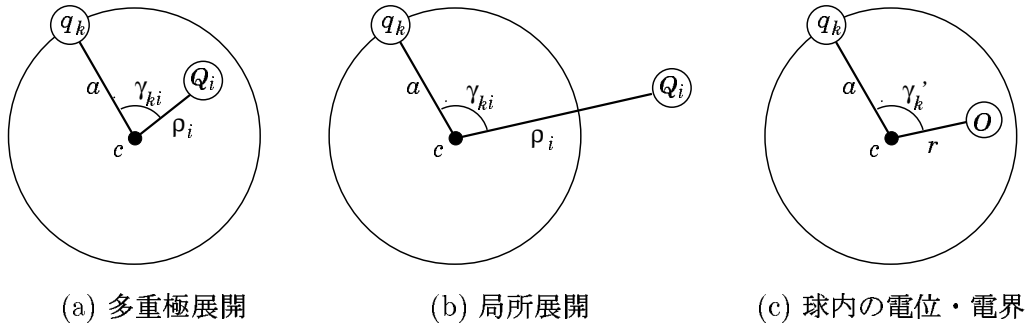


図 2-13: 擬似粒子法による展開表現

電荷とみなしてクーロンの式によって計算できる。図 2-13(b) に示すように点電荷群が球外に存在する場合は、擬似粒子による表現は点電荷群が球内の及ぼす寄与を局所展開で表現することに対応し、擬似粒子  $q_k$  は次式で表される。

$$q_k = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{a}{\rho_i}\right)^{l+1} P_l(\cos\gamma_{ki}) \quad (2-18)$$

図 2-13(c) のように、球内の点  $O$  での電位  $V$ 、電界  $E_x$  は擬似粒子を用いて次式によって表される。

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^K \frac{q_k}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{l+1} P_l(\cos\gamma'_k) \quad (2-19)$$

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^K \frac{q_k}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{l+1} \left\{ l \frac{r_x}{r} P_l(\cos\gamma'_k) + P'_l(\cos\gamma'_k) \right. \\ \left. \times \left( \frac{a_{kx}}{a} \frac{r_y^2 + r_z^2}{r^2} - \frac{a_{ky}}{a} \frac{r_x}{r} \frac{r_y}{r} - \frac{a_{kz}}{a} \frac{r_x}{r} \frac{r_z}{r} \right) \right\} \quad (2-20)$$

ただし、点  $O$  と展開中心  $c$  との距離を  $r$ 、点  $O$  と擬似粒子  $q_k$  とが成す角度を  $\gamma'_k$  とする。また、 $q_k$  の  $c$  に対する位置ベクトルの  $x$ ,  $y$ ,  $z$  成分をそれぞれ  $a_{kx}$ ,  $a_{ky}$ ,  $a_{kz}$  とし、点  $O$  の  $c$  に対する位置ベクトルの  $x$ ,  $y$ ,  $z$  成分をそれぞれ  $r_x$ ,  $r_y$ ,  $r_z$  とする。局所展開においても、多重極展開の場合と同様にしてクーロンの式によって電位・電界を計算することも可能である。しかしながら、局所展開の場合は点  $O$  が展開球面に近づく可能性があり、このとき (2-19) 式、(2-20) 式に比べてクーロンの式の計算精度は低下する [17]。そのため、局所展開では (2-19) 式、(2-20) 式のようにルジャンドル多項式を用いて電位・電界を計算したほうが良い。また、(2-19) 式、(2-20) 式において  $l$  の上限は無限大となっているが、使用した  $t$ -design に対して  $t/2$  を超える項を計算しても精度改善に寄与しないので  $t/2$  で打ち切ればよい [35]。

本研究では、多重極展開、局所展開の表現にそれぞれ 12-design ( $K = 84$ ), 14-design ( $K = 108$ ) の擬似粒子を使用した。ルジャンドル多項式の展開項数はそれぞれ 6 次, 7

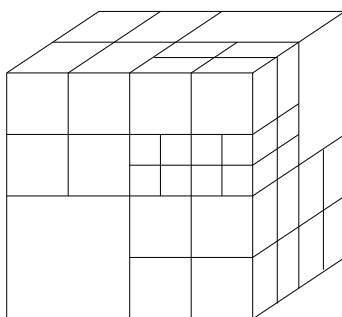


図 2-14: 八分木構造

次である。また、三角形表面電荷からそれと等価な点電荷群への変換には、文献 [36] に記載されている 25 点の三角形積分公式を使用した。なお、本研究で用いた FMM-SCM は四角形表面電荷は使用していない。

### 2.2.3 高速多重極法の計算アルゴリズム

本節では、本研究で使用した FMM コードの分割統治アルゴリズムと多重極展開、局所展開表現の計算アルゴリズムについて述べる。

#### 分割統治アルゴリズム

本研究では三次元の表面電荷法を使用しており、三角形パッチ群に対して分割統治法を適用する必要がある。そこで、三角形パッチ群の分割統治に図 2-14 に示すような葉セルのレベルが不揃いな八分木構造を使用した。八分木構造を作成するために使用したアルゴリズムを以下に示す。

- (1) 全ての三角形パッチを内包する立方体の八頂点の座標を初期値として設定する。この立方体を重心を中心として  $C_1$  倍に長さを拡大した立方体の頂点座標を計算する。また、三角形パッチの面積座標  $L_1 = L_2 = L_3 = 1/3$  の点をパッチの代表点として、代表点の集合である点群を作成する。この段階ではルートセルを含めて一つのセルも生成されない。セルの八頂点座標と点群とともに (2) へ進む。
- (2) 渡された立方体の八頂点座標からセルを生成する。セル内に含まれる点数が  $C_3$  以下ならこのセルを葉セルとし、点群に対応する三角形パッチをこの葉セルに所属させる。点数が  $C_3$  より多い場合は (3) へ進む。
- (3) セルの八頂点座標をもとに、セルを 8 分割したサブセル (子セル候補) の八頂点座標を計算する。セルに渡された点群に対して、点の座標とサブセルの頂点座標の位置関係

から、それぞれのサブセルに含まれる点群（サブ）を 8 個作成する。作成した 8 個の点群（サブ）に対して (4) の操作を行う。ただし、代表点を一つも含まないサブセルは子セル候補から除外する。

(4) 点群（サブ）に含まれる三角形パッチの制御点を用いて、このサブセルの生成が可能かどうかを判断する。全ての制御点に対して制御点とサブセルの中心点との距離を計算し、距離がこのサブセルの多重極展開半径を  $1/C_2$  倍した値より大きい場合は、三角形がサブセルから大きくはみ出すためこのサブセルの生成は不適切であると判断し、8 個のサブセルを生成せずにこのセルを葉セルとする。全てのサブセルに対して生成が可能であると判断された場合は、サブセルの頂点座標と点群（サブ）とともに (2) へ進む。

この (2) ~ (4) の手順を停止するまで繰り返すことにより、全三角形パッチが葉セルに所属する八分木構造を作成できる。輪郭点については、次の方法にしたがって各葉セルに所属させる。輪郭点を共有する三角形パッチが属する葉セルを候補セルとし、各候補セルの中心と輪郭点との距離を調べて、距離が最小となるセルに輪郭点を所属させる。

本研究では、 $C_1$  は 1 ~ 2 の範囲の 10 点程度の値に設定して、葉セルに含まれる三角形パッチ数の平均値が最も小さくなったときの値を採用した。 $C_2$ ,  $C_3$  はそれぞれ 1.05, 1 とした。また TM において注目点  $O$  とセルとの距離の判定に使用する閾値  $\theta$  は 2.0 とした。

### 擬似粒子法による多重極展開，局所展開表現の計算アルゴリズム

上記のアルゴリズムに従って作成した八分木構造を用いることにより、各セルに対して多重極展開および局所展開が定義できる。M2M, L2L, M2L の計算では、先に述べたように M2M には (2-17) 式を、L2L, M2L には (2-18) 式を使用する。

ここで、(2-17) 式で行われる計算に注目し、M2M に必要な計算について検討する。(2-17) 式の計算時に、 $N$  個の粒子群  $Q_i$  ( $i = 1 \sim N$ ) と  $K$  個の擬似粒子群  $q_k$  ( $k = 1 \sim K$ ) の座標が固定されているとすると、 $(\rho_i/a)$ ,  $\gamma_{ki}$  はともに定数となる。 $\gamma_{ki}$  が定数化されると当然ルジャンドル多項式の値も定数になる。ここで、 $N$  個の粒子の電荷量をベクトル  $Q$ 、 $N$  個の擬似粒子の電荷量をベクトル  $q$  で表すと、(2-17) 式に基づいて  $Q$  から  $q$  を計算する作業は、 $K \times N$  の変換行列  $T$  をあらかじめ計算しておき、 $q = T Q$  として計算することと同じである。M2M では  $Q_i$ ,  $q_k$  はともに擬似粒子であり、八分木構造を仮定した時点で全てのセルにおいて  $Q_i$  と  $q_k$  の座標が固定される。さて、もう一度 (2-17) 式の中身を見てみると、 $\gamma_{ki}$  はセルの中心座標に対する  $Q_i$  と  $q_k$  の相対的な位置関係によって決まり、展開半径  $a$ 、つまりはセルのサイズには依存しない。また、 $(\rho_i/a)$  も展開半径で規格化されるので、この値もセルのサイズに依存しない。つまり、M2M で使用

する変換行列  $T$  は全てのセルで同じとなる。

ここで M2M について述べたことは L2L および M2L の場合にも当てはまり、L2L, M2L で使用する変換行列も全てのセルで同じになる。M2M, L2L, M2L の変換行列をそれぞれ  $T_{M2M}$ ,  $T_{L2L}$ ,  $T_{M2L}$  で表す。上記の理由により、M2M, L2L, M2L において (2-17) 式あるいは (2-18) 式による計算を逐一実行する必要はなく、M2M, L2L, M2L を行う前に  $T_{M2M}$ ,  $T_{L2L}$ ,  $T_{M2L}$  を一度計算すればよい。付録 A において、 $T_{M2M}$ ,  $T_{L2L}$ ,  $T_{M2L}$  を配列に確保するために必要なメモリ容量について述べる。

#### 2.2.4 反復解法

FMM は、係数行列  $A$  の全ての要素の計算を行わずに、 $A$  と任意のベクトル  $\bar{x}$  との係数行列・ベクトル積  $A\bar{x}$  の計算を高速に実行する手法である。FMM では  $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$  の方程式の解法に、 $A\mathbf{x}$  のみの計算を行うことによって解を求める反復解法を使用する。本研究では、反復解法には Bi-CGSTAB2 法を用いた [37]。

FMM で計算される  $A\bar{x}$  は、次の二つのパートに分類される。

$$A\bar{x} = A_{\text{near}}\bar{x} + A_{\text{far}}\bar{x} \quad (2-21)$$

右辺第 1 項は近傍セルからの寄与を直接計算する部分を表し、第 2 項は遠方セルによる寄与を多重極展開、局所展開によって間接的に計算する部分を表す。反復計算時において  $A_{\text{near}}$  は常に同じ値であるので、一度計算した値を再利用することができる。 $A_{\text{near}}$  は一行当たりの非零要素数が数百程度の疎行列であり、圧縮行格納法によって  $A_{\text{near}}$  の非零要素を全てメモリ上に確保する [38]。しかしながら、電界計算時に使用するメッシュパターン（計算対象の分割パターン）によっては、作成した八分木構造において一つの葉セルに含まれる三角形パッチ数が非常に多くなる場合がある。この場合も  $A_{\text{near}}$  が疎行列であることには変わらないが、未知数の数が数万程度の場合に零でない要素数が一行当たり千個程度になると、 $A_{\text{near}}$  の確保だけで数百 MByte のメモリ容量が必要になる。したがって、 $A_{\text{near}}$  の非零要素を全て確保することができない場合は、文献 [39] の方法に従い  $A_{\text{near}}$  を次の二つの行列に分類する。

$$A_{\text{near}} = A_{\text{near}}^{\text{str}} + A_{\text{near}}^{\text{rcl}} \quad (2-22)$$

上式において、 $A_{\text{near}}^{\text{str}}$  (str: stored) はメモリ上に確保する要素から成る行列、 $A_{\text{near}}^{\text{rcl}}$  (rcl: recalculated) は確保しないで必要に応じて再計算する要素から成る行列を表す。 $A_{\text{near}}$  を  $A_{\text{near}}^{\text{str}}$  と  $A_{\text{near}}^{\text{rcl}}$  とに分割する際の判定基準として、次の二つの条件をできるだけ満足することが望まれる。(1) できるだけ計算負荷が高い要素を確保したい。(2) 確保すべき

かどうかの判定にかかる計算負荷を抑えたい。この条件を満たすように、ここではセル構造を用いて確保の判断を行うようにした。(1) に対しては、注目点  $O$  と三角形パッチとの間の距離が小さくなるほど数値積分精度を保つために要する積分点数が多くなるため、この距離が判定基準となる。(2) では、セル構造を利用することで、近傍、遠方に位置する三角形パッチ群に対する距離判定をまとめて行うことができる。本研究では、注目点  $O$  を含むセルと 1 隣接セルから直接計算によって求めた要素を確保し、それ以外の要素は再計算するようにした。

反復解法では、解の収束の速度は係数行列  $A$  の優対角性の度合いに依存するため、 $A$  の優対角性が崩れると収束が悪くなり計算速度が低下する。このような場合は、反復解法に前処理を施すことにより反復回数を削減して計算速度を加速するのが望ましい。ただし、前処理を適用することで常に計算時間を削減できるわけではない。反復解法に前処理を付加するためには、任意のベクトル  $\bar{b}$  に対して  $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$  の解を求める必要がある。行列  $\bar{A}$  は前処理行列と呼ばれ、 $A$  を近似した行列に対応する。本研究では、前処理に FMM アルゴリズムに基づく反復前処理と呼ばれる方法を用いた [39]。反復前処理では、 $\bar{A}$  として  $A$  の一部分を近似する行列ではなく、 $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$  を次式のように考えることにより、 $A$  の大域的な近似を行い FMM を用いて高速に解を求める。

$$\bar{b} = \bar{A}\bar{x} \quad (2-23)$$

$$= A_{\text{near}}^{\text{str}}\bar{x} + A_{\text{near}}^{\text{dmp}}\bar{x} + A_{\text{far}}^{\text{dmp}}\bar{x} \quad (2-24)$$

(2-24) 式の右辺第 1 項は確保した行列による係数行列・ベクトル積を表す。右辺第 2 項は、直接計算で係数を計算するがメモリ容量の都合上確保しなかった係数から成る行列  $A_{\text{near}}^{\text{rc1}}$  による、係数行列・ベクトル積を表す。直接計算による係数を全て確保した場合はこの第 2 項は無視して考える。第 3 項は遠方セルからの寄与を間接的に計算した係数行列・ベクトル積の値に対応する。第 2 項において  $A_{\text{near}}^{\text{rc1}}$  ではなく  $A_{\text{near}}^{\text{dmp}}$  (dmp : damped) としたのは、前処理では近似行列  $\bar{A}$  に対する解を高速に求めることが目的であり、前処理において  $A_{\text{near}}^{\text{rc1}}$  を高精度に計算する必要がないからである。そこで、 $A_{\text{near}}^{\text{dmp}}\bar{x}$  では多重極展開を用いて間接的に係数行列・ベクトル積を計算する。第 2, 3 項の間接計算は近似解でよいので計算精度よりも計算速度に重点を置き、多重極展開、局所展開の表現にはそれぞれ 2-design ( $K = 4$ ), 4-design ( $K = 14$ ) の擬似粒子を使用した。Bi-CGSTAB2 法の収束判定値は通常の計算では初期残差の  $10^{-8}$  としたが、前処理用の Bi-CGSTAB2 法の収束判定値は初期残差の  $10^{-5}$  とした。また反復計算では対角項が 1 になるように各行の要素を規格化した。なお、前処理用の FMM は計算精度を故意に低下させているが、この点は計算速度に影響するだけで最終的に求める解の計算精度には直接的には影響を与えない。

表 2-4: SCM および FMM-SCM コードの各種仕様

	SCM	FMM-SCM
表面電荷要素	三角形, 四角形	三角形
電荷密度表現関数	二次関数	二次関数
パッチの種類	平面パッチ, 曲面パッチ	曲面パッチ
曲面パッチ	三次 Bézier パッチ	内部制御点可変型三次 Bézier パッチ
境界条件表現	適合, 非適合要素	適合, 非適合要素
電位・電界の計算	解析式, 数値積分	数値積分
方程式の解法	ガウスの消去法	前処理付き Bi-CGSTAB2 法

ここで, SCM および FMM-SCM の実行コードの各種仕様について表 2-4 にまとめる。

## 2.3 高速多重極境界要素法

本研究では数値電界計算法として主に表面電荷法を使用した。しかし, 一部においては境界要素法により電界計算を実行し, 表面電荷法と境界要素法それぞれの結果を比較して計算精度のチェックを行った。本節では, 本研究で使用した高速多重極法を適用した境界要素法について述べる。

### 2.3.1 境界要素法

境界要素法 (Boundary Element Method : BEM) は表面電荷法と同じように境界分割型の数値解析手法である。BEM では, 解析対象である場の支配方程式に対する基本解をもとにして, 境界条件を満足する解を求める。

図 2-15 に示すような三次元ラプラス問題を考える。図 2-15(a) は開領域に対する境界値問題を表している。境界面  $S$  上では電位  $\phi$  および外向き法線方向電界  $E_n$  は未知であり, 境界面  $\bar{S}$  上では電位・外向き法線方向電界は既知とし, それぞれ  $\bar{\phi}$ ,  $\bar{E}_n$  で表す。ただし,  $E_n$ ,  $\bar{E}_n$  は開領域側での外向き法線方向電界として定義する。また,  $\mathbf{n}$  は境界面上の外向き法線方向単位ベクトルを表す。開領域において数値離散化した境界面上の  $i$  番目の輪郭点の電位  $\phi_i$  は次式で表される。ただし, 外部印加電界  $\mathbf{E}_o$  の  $z$  軸方向成分を  $E_{oz}$  とする。

$$C_i \phi_i - \int_S E_n^* \phi dS - \int_{\bar{S}} E_n^* \bar{\phi} dS - \int_S \phi^* E_n dS - \int_{\bar{S}} \phi^* \bar{E}_n dS = -E_{oz} z_i \quad (2-25)$$

上式において,  $z_i$  は  $i$  番目の輪郭点の  $z$  座標であり,  $C_i$  は  $i$  番目の輪郭点における立体

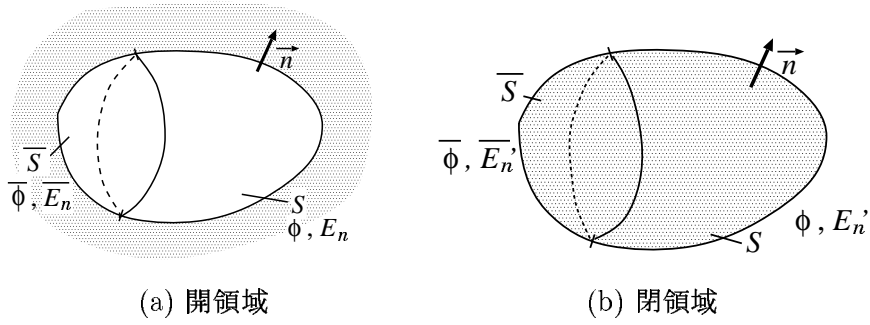


図 2-15: ラプラス問題

角を表す。 $C_i$  は等ポテンシャル条件を用いて次式で計算される。

$$C_i = 1 + \int_S E_n^* dS + \int_{\bar{S}} E_n^* dS \quad (2-26)$$

(2-25) 式の  $\phi^*$  はラプラス場の基本解を表し、 $E_n^*$  は基本解の法線方向微分値  $-\frac{\partial \phi^*}{\partial n}$  を表す。 $\phi^*$ 、 $E_n^*$  は次式で表される。

$$\phi^* = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \quad (2-27)$$

$$E_n^* = -\frac{\partial \phi^*}{\partial n} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}|} \quad (2-28)$$

ただし、 $\mathbf{r}$  は積分点位置から  $i$  番輪郭点へ向かうベクトルとする。

次に図 2-15(b) に示すような閉領域に対する境界値問題について述べる。図の説明は先と同じであるが、 $E_n'$ 、 $\bar{E}_n'$  は閉領域側での外向き法線方向電界とする。閉領域において境界面上の  $i$  番目の点での電位  $\phi_i$  は次式で与えられる。

$$C_i' \phi_i + \int_S E_n^* \phi dS + \int_{\bar{S}} E_n^* \bar{\phi} dS + \int_S \phi^* E_n' dS + \int_{\bar{S}} \phi^* \bar{E}_n' dS = 0 \quad (2-29)$$

$C_i'$  は閉領域内側での立体角を表し、先と同様に等ポテンシャル条件を用いて次式で求められる。

$$C_i' = - \int_S E_n^* dS - \int_{\bar{S}} E_n^* dS \quad (2-30)$$

(2-25) 式、(2-29) 式によって開領域、閉領域に関する方程式を立てることにより、与えた境界条件を満足する未知電位・未知法線方向電界を求めることができる。

### 2.3.2 高速多重極法の適用

BEM で使用する FMM の計算アルゴリズムは SCM のときと同じであるが、擬似粒子法によって多重極展開を間接的に計算する方法は少し異なる。BEM で境界条件を与



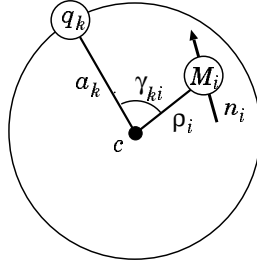


図 2-16: 電気双極子の多重極展開表現

える式は、前節で述べたように (2-25) 式, (2-29) 式である。開領域の境界条件式である (2-25) 式に (2-27) 式, (2-28) 式を代入すると次式が得られる。

$$C_i \phi_i - \int_S \frac{\phi}{4\pi|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}|} dS - \int_{\bar{S}} \frac{\bar{\phi}}{4\pi|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}|} dS - \int_S \frac{E_n}{4\pi|\mathbf{r}|} dS - \int_{\bar{S}} \frac{\bar{E}_n}{4\pi|\mathbf{r}|} dS = -E_{oz} z_i \quad (2-31)$$

(2-31) 式の左辺第 2, 3 項は電気双極子が作る電位場と同形で、左辺第 4, 5 項は点電荷が作る電位場と同形となる。点電荷が作る電位場を擬似粒子を用いて多重極展開表現する場合は、(2-17) 式を用いて点電荷を擬似粒子に変換すればよい。しかし、電気双極子が作る電位場を擬似粒子によって多重極展開表現する方法は点電荷の場合と異なる。図 2-16 に示すように展開中心  $c$ 、展開半径  $a$  の球内に  $N$  個の電気双極子  $M_i = M \mathbf{n}_i$  ( $i = 1 \sim N$ ) が存在するとする。球外に電気双極子が作る電位場を  $K$  個の擬似粒子  $q_k$  ( $k = 1 \sim K$ ) によって多重極展開表現する場合、電気双極子から擬似粒子への変換式は次式で表される [18]。

$$q_k = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^N M_i \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left( \frac{\rho_i}{a} \right)^l \frac{\mathbf{n}_i}{\rho_i} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{a}_k}{a} P'_l(\cos \gamma_{ki}) - \frac{\rho_i}{\rho_i} P'_{l-1}(\cos \gamma_{ki}) \right\} \quad (2-32)$$

ただし、 $\mathbf{a}_k$ ,  $\rho_i$  はそれぞれ  $c$  を基準にした  $q_k$ ,  $M_i$  の位置ベクトルを表す。ただし、 $i = j$  において  $\rho_j = 0$  となる場合、 $\gamma_{kj}$  が不定であるため  $i = j$  に対しては次式を用いる。

$$q_k = \frac{M_j}{K} 3 \frac{\mathbf{n}_j}{a} \cdot \frac{\mathbf{a}_k}{a} \quad (2-33)$$

このようにして、点電荷、電気双極子の多重極展開を擬似粒子で表現することができ、FMM-BEM を擬似粒子法に基づいて作成できるようになる。FMM-BEM の実行コードは FMM-SCM を基に作成した。ただし、擬似粒子による多重極展開、局所展開表現にはそれぞれ 14-design ( $K = 108$ ), 16-design ( $K = 144$ ) を使用し、ルジャンドル多項式の展開項数はそれぞれ 7 次, 8 次である。

# 第3章 数値面積分および数値電界計算コードの計算精度

本章では、表面電荷要素の電位・電界の計算に使用した数値面積分手法および解析式について述べる。また数値積分と解析式の計算値を比較することにより、数値積分精度を評価した結果についても述べる。最後に、本研究の電界計算に使用した SCM, FMM-SCM および FMM-BEM の計算コードを用いて電界計算を行った結果について述べる。

SCM では、境界条件を満足する解（数値離散化した表面電荷密度分布）を求めるための方程式、つまり電位係数・電界係数から成る係数行列を計算する必要がある。表面電荷要素の節点数を  $n$  個とし、各節点の電荷密度に対する補間関数を  $N_k$  ( $k = 1 \sim n$ ) とする。このときに数値離散化した媒体境界面上の  $i$  番目の輪郭点と一つの表面電荷要素の各節点の電荷密度との関係を表す電位係数  $C_{\phi k}$ 、電界係数  $C_{Ek}$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$C_{\phi k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{r} N_k ds \quad (3-1)$$

$$C_{Ek} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} N_k ds \quad (3-2)$$

上式において、 $S$  は表面電荷要素の面積を表し、 $\mathbf{r}$ ,  $r$  はそれぞれ積分点位置から  $i$  番目の輪郭点に向かうベクトルとその長さを表す。 $\mathbf{n}$  は  $i$  番目の輪郭点における境界面上の法線方向単位ベクトルを表す。また表面電荷要素は真空中に存在するとする。(3-1) 式、(3-2) 式から電位係数・電界係数を計算することができるが、係数行列が電位係数と電界係数に基づいて計算されることから、電位係数・電界係数の計算精度が最終的な電界計算精度に直接影響することになる。また方程式から求めた表面電荷密度を用いて空間中の電位・電界を計算する場合も同じである。そのため、(3-1) 式、(3-2) 式の計算を高精度に実行することが重要になる。

(3-1) 式、(3-2) 式の計算方法には、数値積分を使用する方法と解析式を使用する方法とがある。表面電荷要素が曲面パッチで表現されている場合は、表面電荷要素の電位・電界を与える解析式は存在しないので、数値積分を使用しなければならない。数値積分は、計算点と表面電荷要素との間の距離、つまり (3-1) 式、(3-2) 式に含まれる  $1/r$ ,  $1/r^2$  に起因する特異性によって、特異積分、準特異積分、通常積分の 3 種類に分類される。数

値積分の計算精度は使用する数値面積分手法，積分点数に依存するので，計算効率を上げるとともに数値積分精度を高精度に保つためには，計算点と表面電荷要素との間の距離に応じて積分手法，積分点数を適宜選択する必要がある。特に計算点が表面電荷要素の近傍に位置する場合は，積分の種類が通常積分から準特異積分に切り替わり，本来は準特異である積分を通常の積分として取り扱った場合に積分精度が著しく低下する。そのため表面電荷要素の近傍点における各積分手法の計算精度を調べる必要があるが，このときに精度評価の基準に使用する値を算出しなければならない。基準値を計算する方法として次の二つの方法が考えられる。

- (i) 計算に使用する積分点数を増加させる。
- (ii) 表面電荷要素を多数の小要素に細分割し，計算点と小要素の相対的な位置関係を遠くすることにより，表面電荷要素に対する準特異積分から小要素に対する通常積分に置き換える。

どちらの方法においても数値積分を使用するために，基準値として適切な計算精度を達成しているかどうかという問題が残る。一方，表面電荷要素が平面パッチで表現される場合，(3-1)式，(3-2)式の計算を解析式を用いて実行することができる。解析式を使用した場合は，計算点が表面電荷要素の近傍にある場合においても，準特異積分のような特別な処理を必要とせず高精度な計算を行うことができる。そのため平面パッチに対しては，数値積分の精度評価の基準値に解析式で計算した値を使用することが可能となる。

### 3.1 数値面積分手法

先にも述べたように計算点と表面電荷要素との位置関係によって(3-1)式，(3-2)式の数値積分は次の3種類に分類される。

- (a) 計算点が表面電荷要素上にある場合－特異積分
- (b) 計算点が表面電荷要素近傍にある場合－準特異積分
- (c) 計算点が表面電荷要素から離れている場合－通常積分

高精度な数値積分を実行するために(a)～(c)それぞれの場合に対して別々の面積分手法を使用しており，以下に本研究で使用した数値面積分手法について述べる。

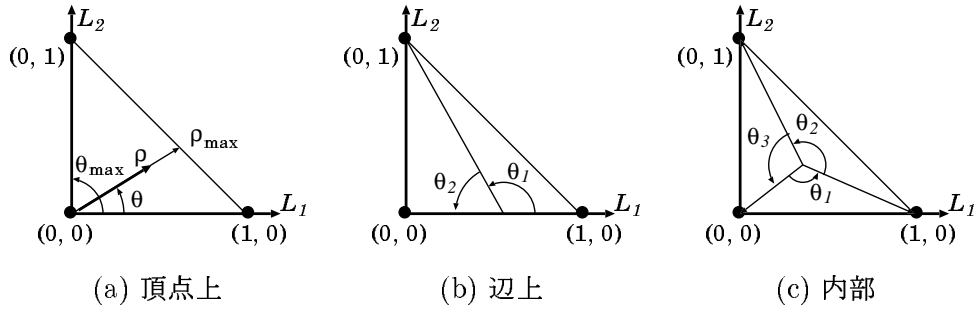


図 3-1: 極座標変換

### 3.1.1 特異積分

計算点が要素上にある場合は、被積分関数が特異になるため図 3-1 に示すように極座標変換を用いる。図 3-1(a) では、 $L_1, L_2$  ( $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ ) の軸から成る直交座標系で三角形表面電荷を表している。3.1 節では、三角形表面電荷を図 3-1 の直交座標系で表した場合について述べる。ここでは図 3-1(a) に示すように計算点は  $L_3 = 1$  ( $L_1 = L_2 = 0$ ) の点にあるとする。このとき三角形上の微小面積 (直交座標系)  $ds$  は  $\rho d\rho d\theta$  で計算され、 $\rho$  によって  $1/r$  の特異性を緩和することができる。(3-1) 式の計算は極座標変換によって次式に変換される。

$$C_{\phi k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\theta_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} \frac{\rho}{r} J N_k d\rho d\theta \quad (3-3)$$

上式において、 $J$  はヤコビアンであり、 $\rho, \theta$  によって決定される積分点の位置ベクトルを  $\mathbf{p}$  として次式で表される。

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial L_1} \Big|_{L_2=\text{const}} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial L_2} \Big|_{L_1=\text{const}} \right| \quad (3-4)$$

また図 3-1 の配置では  $\rho_{\max}$  は次式で与えられる。

$$\rho_{\max} = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \quad (3-5)$$

極座標変換して得られた (3-3) 式の  $\theta$  方向、 $\rho$  方向それぞれに一次元のガウス・ルジャンドル数値積分公式 (単にガウス数値積分公式と呼ぶこともある) を使用することにより、 $C_{\phi k}$  を次式によって計算することができる。

$$C_{\phi k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\rho_j}{r} J \frac{w_j}{2} \frac{w_i}{2} \rho_{\max} \theta_{\max} N_{kij} \quad (3-6)$$

上式において  $n_1, n_2$  はそれぞれ  $\theta$  方向、 $\rho$  方向に用いた積分点数を表し、 $w_i, w_j$  はガウス・ルジャンドル数値積分公式での積分点に対する重み係数を表す。 $\rho_j$  および積分点

位置の面積座標  $L_1, L_2, L_3$  は次式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \frac{1+\xi_{GLi}}{2} \theta_{\max} \\ \rho_j &= \frac{1+\xi_{GLj}}{2} \rho_{\max} \\ L_1 &= \rho_j \cos \theta_i \\ L_2 &= \rho_j \sin \theta_i \\ L_3 &= 1 - L_1 - L_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

上式の  $\xi_{GLi}$  (または  $\xi_{GLj}$ ) は一次元のガウス・ルジャンドル数値積分公式での積分点の正規化座標 ( $-1 \sim 1$ ) を表す。また, ここでは計算点が頂点上にある場合を対象としたが, 計算点が辺上や三角形の内部に位置する場合は, 図 3-1(b), (c) に示すように計算点において三角形要素を部分三角形に分割して, 各部分三角形毎に極座標変換を行う。ただし, (3-7) 式は図 3-1(a) の配置に従う式であり, (b), (c) には別の式を用いる。

SCM のコードでは上記の手法を用いたが, FMM-SCM, FMM-BEM では  $\rho$  方向の積分にはガウス・ルジャンドル数値積分公式ではなく, 有限部分積分 (Finite Part Integral) の積分公式を用いた。有限部分積分の積分公式は, 被積分関数が  $1/r$  の特異性を有する場合の積分公式である [40]。有限部分積分を使用した場合,  $C_{\phi k}$  の計算式は次式で表される。

$$C_{\phi k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_3} \frac{\rho_j}{r} J |\rho_j| w'_j \frac{w_i}{2} \theta_{\max} N_{kij} \quad (3-8)$$

$$\rho_j = \xi_{FPIj} \rho_{\max} \quad (3-9)$$

ただし, 有限部分積分公式における分点数を  $n_3$  とし,  $\xi_{FPIj}, w'_j$  はそれぞれ正規化座標 ( $0 \sim 1$ ) と重み係数を表す。

電界係数  $C_{Ek}$  の計算も電位係数の場合と同様に極座標変換を使用するが, 計算点における電荷の寄与を数値積分の計算結果に加算しなければならない。図 3-2 に示すように, 頂点における 2 方向の接線ベクトルが成す角度を  $\theta'$  とすると, 計算点における電荷の寄与は  $\theta'/(4\pi\epsilon_0)$  で表される。頂点での 2 方向の接線ベクトルは Bézier パッチの制御点か

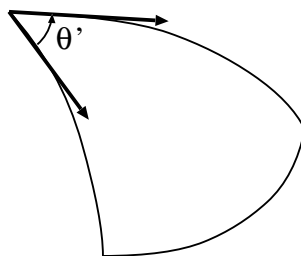


図 3-2:  $\theta'$  の計算

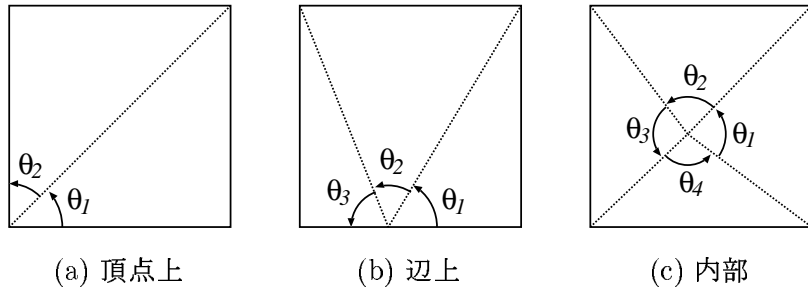


図 3-3: 四角形要素の部分三角形への分割

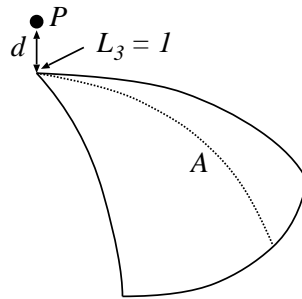


図 3-4: 計算点  $P$  が表面電荷要素近傍に位置する場合

ら求めることができる。一方、計算点が要素の边上あるいは内部にある場合はそれぞれ  $\theta' = \pi, 2\pi$  とする。前章の (2-4) 式, (2-5) 式の右辺第 2 項は  $\theta' = 2\pi$  としたときの値である。

ここでは三角形表面電荷について述べたが、四角形表面電荷においても図 3-3 に示すように 2 ~ 4 個の部分三角形に分割して極座標変換を適用する。本研究では積分点数を  $n_1 = n_2 = 32, n_3 = 8$  とした。

### 3.1.2 準特異積分

図 3-4 に示すように計算点が要素近傍にある場合、被積分関数は特異ではないが準（擬）特異となり、積分精度を高精度に維持するためには積分を準特異積分として取り扱う必要がある。図 3-4 において、計算点  $P$  との距離が最短となる表面電荷要素上の点（以下、投影点と呼ぶ）が  $L_3 = 1$  の頂点であるとし、 $d$  は点  $P$  と頂点との間の距離を表す。本研究では、準特異積分には極座標変換と文献 [41] に記載されている  $\log$ -L1 変換を適用した。まず前節で述べたように頂点において極座標変換を行う。さらに  $\rho$  方向に対して  $\log$ -L1 変換に基づいて座標変換を行う。 $\log$ -L1 変換では、対数関数に従って  $\rho$  方向の積

分点位置が頂点近傍で密となり、離れるにつれて疎となるように積分点位置が変換される。極座標変換と log-L1 変換によって  $C_{\phi k}$  の計算式は次のようになる。

$$C_{\phi k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\theta_{\max}} \int_{\ln|D|}^{\ln|\rho_{\max}+D|} \frac{1}{r} J e^{R_j} (e^{R_j} - D) N_k dR d\theta \quad (3-10)$$

上式に含まれる  $D$  は、図 3-4 に示すように  $\rho$  方向の実座標における長さを  $A$  として、次式によって計算する。

$$D = \rho_{\max} \times \frac{d}{A} \quad (3-11)$$

その他の記号は特異積分のときと同じとする。

(3-10) 式の  $R$  方向、 $\theta$  方向それぞれに一次元のガウス・ルジャンドル数値積分公式を適用することにより、 $C_{\phi k}$  は次式によって計算される。

$$C_{\phi k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{1}{r} J e^{R_j} (e^{R_j} - D) \left( \ln \left| \frac{\rho_{\max} + D}{D} \right| \right) \frac{w_j}{2} \frac{w_i}{2} \theta_{\max} N_{kij} \quad (3-12)$$

ただし、 $R_j$  は次式によって計算する。

$$R_j = (\ln|D|) \frac{1 - \xi_{GLj}}{2} + (\ln|\rho_{\max} + D|) \frac{1 + \xi_{GLj}}{2} \quad (3-13)$$

また、 $\theta_i$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  の計算は (3-7) 式に従うが、 $\rho_j$  は次式によって計算する。

$$\rho_j = e^{R_j} - D \quad (3-14)$$

電界係数  $C_{Ek}$  を計算する場合にも極座標変換と log-L1 変換を適用する。また、点  $P$  の投影点が要素の辺上や内部に位置する場合は、特異積分のときと同様にして、いくつかの部分三角形に分割したのち各部分三角形毎に極座標変換と log-L1 変換を行う。また四角形表面電荷に対しても同様に部分三角形に分割して  $C_{\phi k}$ ,  $C_{Ek}$  の計算を行う。本研究では、積分点数を  $n_1 = n_2 = 32$  とした。

また点  $P$  の表面電荷要素上への投影点  $P'$  の探索には、図 3-5 のベクトル関係から次式に基づいてニュートン・ラプソン法を適用した。ただし、 $\mathbf{x}_p$ ,  $\mathbf{x}'_p$  はそれぞれ  $P$ ,  $P'$  の位置ベクトルを表し、 $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  はそれぞれ点  $P'$  での  $L_1$ ,  $L_2$  方向の接線方向単位ベクトルを表す。また投影点が要素外の位置となった場合は、その点に対して要素上の近傍点を極座標変換の極とする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{x}_p - \mathbf{x}'_p}{|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}'_p|} \cdot \mathbf{t}_1 &= 0 \\ \frac{\mathbf{x}_p - \mathbf{x}'_p}{|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}'_p|} \cdot \mathbf{t}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

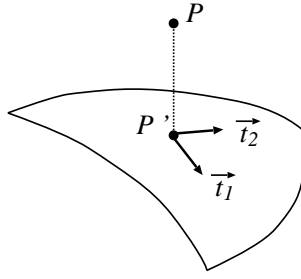


図 3-5: 計算点 P の表面電荷要素上への投影点 P'

### 3.1.3 通常積分

計算点が表面電荷要素から離れている場合は、ガウス・ルジャンドル数値積分公式を適用するだけで十分な計算精度が得られる。三角形表面電荷の場合は  $C_{\phi k}$  は次式で計算される。

$$C_{\phi k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \frac{1}{r} J N_k dL_2 dL_1 \quad (3-16)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{1}{r} J \frac{w_j}{2} \frac{w_i}{2} (1-L_1) N_{kij} \quad (3-17)$$

ただし、積分点の面積座標は次のように計算する。

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{1+\xi_{GLi}}{2} \\ L_2 &= (1-L_1) \frac{1+\xi_{GLj}}{2} \\ L_3 &= 1-L_1-L_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

また四角形表面電荷の場合は  $C_{\phi k}$  は次式で計算される。

$$C_{\phi k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{r} J N_k d\xi d\eta \quad (3-19)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{1}{r} J \frac{w_j}{2} \frac{w_i}{2} N_{kij} \quad (3-20)$$

ただし図 3-6 に示すように、四角形表面電荷に対して正規化座標  $\xi, \eta$  を定め、積分点の正規化座標を  $\xi = \xi_{GLj}, \eta = \xi_{GLi}$  とする。電界係数  $C_{Ek}$  の計算においてもガウス・ルジャンドル数値積分公式を適用して計算する。本研究では、積分点数  $n_1, n_2$  は計算点と表面電荷要素との距離に応じて  $n_1 = n_2 = 64, 32, 16, 8, 6, 4$  とした。

SCM のコードでは上記の手法を用いたが、FMM-SCM, FMM-BEM のコードでは三角形積分公式を使用した [36, 42]。三角形積分公式を使用した場合、 $C_{\phi k}$  は次のように計



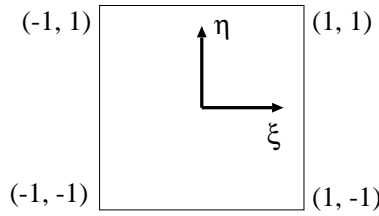


図 3-6: 四角形表面電荷上の正規化座標  $\xi, \eta$

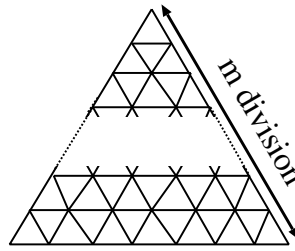


図 3-7: 三角形表面電荷の区分三角形への分割

算される。

$$C_{\phi k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n_4} \frac{1}{r} J \frac{w_i''}{2} N_{ki} \quad (3-21)$$

ただし、三角形積分公式の積分点数を  $n_4$  とし、積分点の重み係数を  $w_i''$  とする。 $C_{Ek}$  も同様に三角形積分公式によって計算する。文献 [36] に記載されている積分公式は  $n_4 = 73$  までであり、それ以上の積分点を得るために図 3-7 に示すように三角形を区分三角形に分割し、各区分三角形に対して 73 点の三角形積分公式を使用した。図 3-7 のように一辺を  $m$  分割すると積分点数は  $n_4 = 73 m^2$  となる。本研究では、 $m = 21, 12, 9, 6, 4, 3, 2$  とし、それぞれの分割数での積分点数は  $n_4 = 32193, 10512, 5913, 2628, 1168, 657, 292$  である。それに加えて  $n_4 = 73, 42, 25$  の三角形積分公式を使用した。

### 3.2 表面電荷要素の電位・電界の解析式

表面電荷要素が平面三角形や平面四角形の場合、任意の位置の電位・電界を解析式で計算することが可能である。解析式を使用した場合は、数値積分における特異積分や準特異積分のような特別な処理を行う必要がなく、電位・電界の高速かつ高精度な計算が可能となる。しかし、これまでに導出されている表面電荷要素の電位・電界の解析式は、電荷密度表現関数を一次関数とした場合までであり、それ以上の高次関数に対しては提

案されていなかった [19, 43]。本研究では、電荷密度表現関数をさらに高次とした以下の表面電荷要素について電位・電界の解析式を新たに導出した。

- (a) 電荷密度表現関数を二次関数とした三角形表面電荷（二次三角形表面電荷）
- (b) 電荷密度表現関数を二次関数とした四角形表面電荷（二次四角形表面電荷）
- (c) 電荷密度表現関数を三次関数とした三角形表面電荷（三次三角形表面電荷）
- (d) 電荷密度表現関数を三次関数とした四角形表面電荷（三次四角形表面電荷）

### 3.2.1 高次表面電荷要素の電位・電界の解析式の導出

本節では、三角形表面電荷の電荷密度表現関数を二次関数とした場合の解析式の導出について述べる。図 3-8 に示すように、三角形表面電荷が真空中  $XY$  平面上に存在する場合を考える。図において、 $(X_i, Y_i)(i = A \sim F)$  は 6 節点の座標を表す。電荷密度表現関数を二次関数としているため、表面電荷要素上の電荷密度  $\sigma$  は次式で表される。

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 X^2 + \alpha_5 XY + \alpha_6 Y^2 \quad (3-22)$$

このときに三角形表面電荷が点  $p$  に及ぼす電位  $\phi$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r} dS \quad (r = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}) \quad (3-23) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{X_A}^{X_B} \int_{Y_A}^{Y_B} \frac{\sigma}{r} dY dX + \int_{X_B}^{X_C} \int_{Y_B}^{Y_C} \frac{\sigma}{r} dY dX \right. \\ &\quad \left. + \int_{X_C}^{X_A} \int_{Y_C}^{Y_A} \frac{\sigma}{r} dY dX \right\} \quad (3-24) \end{aligned}$$

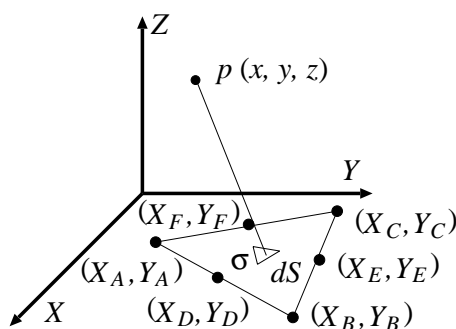


図 3-8: 電荷密度表現関数を二次関数とした三角形表面電荷

表 3-1: (3-25) 式の  $f_i(x, y)$ ,  $g_i(X, Y)$

$i$	$f_i(x, y)$	$g_i(X, Y)$
1	$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$	1
2	$\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y$	$X - x$
3	$\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y$	$Y - y$
4	$\alpha_4$	$(X - x)^2$
5	$\alpha_5$	$(X - x)(Y - y)$
6	$\alpha_6$	$(Y - y)^2$

(3-24) 式の右辺には 3 個の積分項が含まれるが、積分の範囲がそれぞれ異なるだけであるので、ここでは右辺第 1 項の積分項について述べる。右辺第 1 項に (3-22) 式を代入して、式を整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{X_A}^{X_B} \int_0^{MX+N} \frac{\sigma}{r} dY dX \\ &= \sum_{i=1}^6 f_i(x, y) \int_{X_A}^{X_B} \int_0^{MX+N} \frac{g_i(X, Y)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} dY dX \end{aligned} \quad (3-25)$$

ただし、

$$M = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \quad (3-26)$$

$$N = \frac{X_B Y_A - X_A Y_B}{X_B - X_A} \quad (3-27)$$

とする。(3-25) 式の  $f_i(x, y)$ ,  $g_i(X, Y)$  ( $i = 1 \sim 6$ ) について表 3-1 に示す。(3-25) 式に含まれる 6 個の二重積分の項のなかで  $g_i(X, Y)$  ( $i = 1 \sim 3$ ) を含む 3 個の項は電荷密度表現関数を一次関数とした場合にも現れる項であり、これらの二重積分の解析式が既に導出されている。そのため、残りの  $g_i(X, Y)$  ( $i = 3 \sim 6$ ) を含む 3 個の二重積分項の解析式を導出する必要があるが、 $g_5(X, Y)$  を含む項の解析式の導出は文献 [44] に記載されている積分公式を適用すればよい。したがって、ここでは  $g_4(X, Y)$  の解析式の導出について述べる。 $g_6(X, Y)$  は  $g_4(X, Y)$  の  $(X - x)$  を  $(Y - y)$  と考えればよく、導出過程で適用する考え方は基本的に同じである。

$g_4(X, Y)$  を含む二重積分項を  $I$  で表して、積分の順序を  $X$  と  $Y$  とを入れ替えると次式が得られる。

$$I = \int_0^{Y_B} \int_{\frac{Y-N}{M}}^{X_B} \frac{(X-x)^2 dX dY}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} - \int_0^{Y_A} \int_{\frac{Y-N}{M}}^{X_A} \frac{(X-x)^2 dX dY}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} \quad (3-28)$$

上式の内側の積分については、文献[44]に記載されている積分公式の適用が可能である。また内側の積分を実行した場合に  $M$ ,  $N$  を含まない項は、(3-24)式に代入したときに右辺第 2, 3 項と互いにキャンセルし合うので無視することができる。結局、(3-28)式は次のようになる。

$$I = -\frac{1}{2} \int_{Y_A}^{Y_B} \frac{Y-N-Mx}{M} \sqrt{\left(\frac{Y-N-Mx}{M}\right)^2 + (Y-y)^2 + z^2} dY$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{Y_A}^{Y_B} \{(Y-y)^2 + z^2\} \ln \left| \frac{Y-N-Mx}{M} + \sqrt{\left(\frac{Y-N-Mx}{M}\right)^2 + (Y-y)^2 + z^2} \right| dY \quad (3-29)$$

ここで、

$$t = \frac{Y-N-Mx}{M} \quad (3-30)$$

とすると、(3-29)式は次のように変形される。

$$I = -\frac{M}{2} \int_{X_A-x}^{X_B-x} t \sqrt{at^2 + bt + c} dt$$

$$+ \frac{M}{2} \int_{X_A-x}^{X_B-x} \{(a-1)t^2 + bt + c\} \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| dt \quad (3-31)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a &= M^2 + 1 \\ b &= 2M(N + Mx - y) \\ c &= (N + Mx - y)^2 + z^2 \end{aligned} \right\} \quad (3-32)$$

とする。(3-31)式の右辺第 1 項の積分に関しては積分公式がすでに存在するが、右辺第 2 項に含まれる積分の積分公式は文献[44]に記載がなく、筆者が知る限りでは存在しない。しかしながら、 $\int \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| dt$  の積分については、電荷密度表現関数を一次関数とした場合にすでに現れており、積分公式が既に導出されている。本研究では、残りの 2 個の積分  $\int t \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| dt$ ,  $\int t^2 \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| dt$  に関して新たに積分公式を導出したので、以下に示す。

$\int t \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| dt$  の積分公式

$$\int t \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| dt$$

$$= -\frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| + \frac{b}{4(a-1)} t - \frac{b}{4a(a-1)} \sqrt{at^2 + bt + c}$$

$$+ \frac{2(a-1)c - b^2}{4(a-1)^2} \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}|$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{b^2}{8a(a-1)\sqrt{a}} + \frac{b^2 - 2(a-1)c}{4(a-1)^2\sqrt{a}} \right\} \ln|2at + b + 2\sqrt{a(at^2 + bt + c)}| \\
& - \frac{b\sqrt{4(a-1)c - b^2}}{4(a-1)^2} \left\{ \arctan \frac{2(a-1)t + b}{\sqrt{4(a-1)c - b^2}} \right. \\
& \left. + \arctan \left( \frac{bt + 2c}{\sqrt{4c(a-1) - b^2}} \frac{1}{\sqrt{at^2 + bt + c}} \right) \right\} \tag{3-33}
\end{aligned}$$

$\int t^2 \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| dt$  の積分公式

$$\begin{aligned}
& \int t^2 \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| dt \\
= & -\frac{t^3}{9} + \frac{t^3}{3} \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| + \frac{b}{12(a-1)} t^2 - \frac{b^2 - 2c(a-1)}{6(a-1)^2} t \\
& - \frac{b}{12a(a-1)} t \sqrt{at^2 + bt + c} + \frac{b\{b^2 - 3c(a-1)\}}{6(a-1)^3} \ln|t + \sqrt{at^2 + bt + c}| \\
& + \left\{ \frac{b^2 - 2c(a-1)}{6a(a-1)^2} + \frac{b^2}{8a^2(a-1)} \right\} \sqrt{at^2 + bt + c} \\
& - \left\{ \frac{3b^2 - 4ac}{48a^2(a-1)} + \frac{b^2 - 2c(a-1)}{12a(a-1)^2} + \frac{b^2 - 3c(a-1)}{6(a-1)^3} \right\} \\
& \times \frac{b}{\sqrt{a}} \ln|2at + b + 2\sqrt{a(at^2 + bt + c)}| \\
& + \frac{\{b^2 - c(a-1)\}\sqrt{4c(a-1) - b^2}}{6(a-1)^3} \left\{ \arctan \frac{2(a-1)t + b}{\sqrt{4(a-1)c - b^2}} \right. \\
& \left. + \arctan \left( \frac{bt + 2c}{\sqrt{4c(a-1) - b^2}} \frac{1}{\sqrt{at^2 + bt + c}} \right) \right\} \tag{3-34}
\end{aligned}$$

ただし、(3-33) 式、(3-34) 式は次式の条件に基づいて導出した。

$$\left. \begin{aligned} a &> 0 \\ b^2 - 4c(a-1) &< 0 \\ c &> 0 \end{aligned} \right\} \tag{3-35}$$

ここで、(3-32) 式の関係より  $a > 0$ ,  $b^2 - 4c(a-1) \leq 0$ ,  $c \geq 0$  が常に成り立つ。ただし、 $b^2 - 4c(a-1) = 0$ ,  $c > 0$  のときは、(3-33) 式、(3-34) 式に含まれる  $\arctan$  の項を無視する。また  $b^2 - 4c(a-1) = 0$ ,  $c = 0$  ( $c = 0$  のときは必ず  $b^2 - 4c(a-1) = 0$ ) のときは (3-33) 式、(3-34) 式それぞれの式の右辺第 1 項と第 2 項のみが残る。

導出した積分公式の妥当性を確認するために、(3-33) 式、(3-34) 式の左辺の積分を数値積分と導出した積分公式によって計算を実行した。数値積分には、区間  $[a, b]$  を  $2n$  等

表 3-2: 数値積分と積分公式の比較

被積分関数	ケース	数値積分	積分公式
$t \ln t + \sqrt{at^2 + bt + c} $	(a)	2.559506608193481	2.559506608193480
	(b)	2.656994756801397	2.656994756801397
	(c)	2.397832869549216	2.397832869549214
$t^2 \ln t + \sqrt{at^2 + bt + c} $	(a)	4.052367629633651	4.052367629633657
	(b)	4.200504082615566	4.200504082615565
	(c)	3.810785716827692	3.810785716827690

分し、各分点  $t_0, \dots, t_{2n}$  における被積分関数  $f(t)$  の値をそれぞれ  $f_0, \dots, f_{2n}$  とし、次式のシンプソンの公式を使用した。

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{6n} (f_{2k} + 4f_{2k+1} + f_{2k+2}) \quad (3-36)$$

積分区間は  $[1, 2]$  とし、数値積分での積分区間の分割数は  $n = 2000$  とした。 $a, b, c$  の値として次の 3 ケースを対象とした。

- (a)  $a = 5.0, b = 2.0, c = 1.0$  ( $b^2 - 4c(a - 1) < 0$  かつ  $c > 0$  の場合)
- (b)  $a = 5.0, b = 4.0, c = 1.0$  ( $b^2 - 4c(a - 1) = 0$  かつ  $c > 0$  の場合)
- (c)  $a = 5.0, b = 0.0, c = 0.0$  ( $b^2 - 4c(a - 1) = 0$  かつ  $c = 0$  の場合)

これらの各ケースに対する数値積分と積分公式による計算結果を表 3-2 にまとめる。(3-33) 式, (3-34) 式ともに 3 ケースにおいて、数値積分と積分公式を用いて求めた値が 15 桁まで同じであり、導出した積分公式が正しいことがわかる。

ここで、導出した積分公式を (3-31) 式に適用することにより、(3-31) 式の解析式を導出することができる。結局、(3-25) 式の  $g_i(X, Y)$  を含む二重積分の項を全て解析式で表すことができ、電荷密度表現関数を二次関数とした三角形表面電荷の電位・電界の解析式の導出が可能となる。また他の高次表面電荷要素の電位・電界の解析式の導出過程において、(3-25) 式に新たに含まれる  $g_i(X, Y)$  ( $i = 6 \sim 12$ ) について表 3-3 にまとめる。これらの二重積分項の解析式表現には新たな積分公式を導出する必要はなく、数式変形と文献 [44] に記載されている積分公式を適用することにより解析式の導出が可能である。

表 3-3: 他の高次表面電荷要素において新たに現れる  $g_i(X, Y)$

表面電荷要素の種類	$g_i(X, Y)$
二次四角形表面電荷	$g_7(X, Y) = (X - x)^2(Y - y), g_8(X, Y) = (X - x)(Y - y)^2$
三次三角形表面電荷	$g_9(X, Y) = (X - x)^3, g_{10}(X, Y) = (Y - y)^3$
三次四角形表面電荷	$g_{11}(X, Y) = (X - x)^3(Y - y), g_{12}(X, Y) = (X - x)(Y - y)^3$

### 3.2.2 電位・電界の解析式表現に必要な項

前節で述べたように、高次表面電荷要素の電位・電界を解析式で与えるためには、12個の  $g_i(X, Y)$  を含む二重積分項を解析的に表現する必要がある。本節では、これらの二重積分項の解析式を示す。ここでは、 $g_i(X, Y)$  ( $i = 1 \sim 12$ ) を含む二重積分項を  $K_i$  で表現する。ただし、 $K_1 \sim K_3$  は一次三角形表面電荷のときに既に導出されていた項であり、本研究では  $K_4 \sim K_{12}$  の項の導出を行った。以下に  $K_1 \sim K_{12}$  について示す。また添え字の  $AB$  は積分区間が  $[X_A, X_B]$  であることを表す。

$$K_{1AB} = P_{AB}Q_{AB} + zR_{AB} \quad (3-37)$$

$$P_{AB} = \frac{-M_{AB}(X_B - x) + (Y_B - y)}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \quad (3-38)$$

$$M_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \quad (3-39)$$

$$Q_{AB} = \ln \left| M_{AB}(Y_B - y) + (X_B - x) + D_B \sqrt{M_{AB}^2 + 1} \right| \quad (3-40)$$

$$R_{AB} = \arctan \frac{M_{AB}(X_B - x)^2 - (X_B - x)(Y_B - y) + z^2 M_{AB}}{z D_B} \quad (3-41)$$

$$D_B = \sqrt{(X_B - x)^2 + (Y_B - y)^2 + z^2} \quad (3-42)$$

$$K_{2AB} = E_{AB}D_B - G_{AB}Q_{AB} \quad (3-43)$$

$$E_{AB} = \frac{M_{AB}x + M_{AB}^2 y + N_{AB}}{M_{AB}^2 + 1} \quad (3-44)$$

$$N_{AB} = \frac{X_B Y_A - X_A Y_B}{X_B - X_A} \quad (3-45)$$

$$G_{AB} = \frac{M_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}}(P_{AB}^2 + z^2) \quad (3-46)$$

$$K_{3AB} = -F_{AB}D_B + H_{AB}Q_{AB} \quad (3-47)$$

$$F_{AB} = \frac{x + M_{AB}y - M_{AB}N_{AB}}{M_{AB}^2 + 1} \quad (3-48)$$

$$H_{AB} = \frac{P_{AB}^2 + z^2}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \quad (3-49)$$

$$K_{4AB} = -\frac{M_{AB}D_B^3}{6(M_{AB}^2 + 1)} + \frac{z^3}{3}V_{AB} + J_{AB}\frac{M_{AB}^2P_{AB}D_B}{6(M_{AB}^2 + 1)} - \frac{M_{AB}D_B}{3(M_{AB}^2 + 1)}\left(\frac{z^2}{2} + P_{AB}^2\right) \\ + \left(\frac{2M_{AB}^2 - 1}{3(M_{AB}^2 + 1)}P_{AB}^2 - \frac{z^2}{M_{AB}^2 + 1}\right)\frac{P_{AB}Q_{AB}}{2} \quad (3-50)$$

$$J_{AB} = \frac{X_B - x + M_{AB}(Y_B - y)}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \quad (3-51)$$

$$V_{AB} = \arctan\frac{(Y_B - y)^2 + z^2 - M_{AB}(X_B - x)(Y_B - y)}{zM_{AB}D_B} \quad (3-52)$$

$$K_{5AB} = \frac{D_B^3}{3(M_{AB}^2 + 1)} - J_{AB}\frac{M_{AB}P_{AB}D_B}{2(M_{AB}^2 + 1)} - \frac{M_{AB}P_{AB}Q_{AB}}{2(M_{AB}^2 + 1)}(P_{AB}^2 + z^2) \quad (3-53)$$

$$K_{6AB} = \frac{M_{AB}D_B^3}{6(M_{AB}^2 + 1)} - \frac{z^3}{3}R_{AB} + J_{AB}\frac{P_{AB}D_B}{6(M_{AB}^2 + 1)} + \frac{M_{AB}D_B}{3(M_{AB}^2 + 1)}\left(\frac{z^2}{2} + P_{AB}^2\right) \\ + \left(\frac{2 - M_{AB}^2}{3(M_{AB}^2 + 1)}P_{AB}^2 - \frac{z^2M_{AB}^2}{M_{AB}^2 + 1}\right)\frac{P_{AB}Q_{AB}}{2} \quad (3-54)$$

$$K_{7AB} = -\frac{2M_{AB}P_{AB}D_B^3}{3(M_{AB}^2 + 1)\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} + \frac{I_{AB}D_B^3}{4(M_{AB}^2 + 1)} \\ + \frac{1}{8}\left(\frac{4M_{AB}^2 - 1}{M_{AB}^2 + 1}P_{AB}^2 - \frac{z^2}{M_{AB}^2 + 1}\right)\left\{I_{AB}D_B + \frac{(P_{AB}^2 + z^2)Q_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}}\right\} \quad (3-55)$$

$$I_{AB} = \frac{X_B - x + M_{AB}(Y_B - y)}{M_{AB}^2 + 1} \quad (3-56)$$



$$\begin{aligned}
K_{8AB} = & -\frac{2M_{AB}^2 P_{AB} D_B^3}{3(M_{AB}^2 + 1)\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} - \frac{M_{AB}^3 I_{AB} D_B^3}{4(M_{AB}^2 + 1)} \\
& - \frac{M_{AB}}{8} \left( \frac{4 - M_{AB}^2 P_{AB}^2}{M_{AB}^2 + 1} - \frac{M_{AB}^2 z^2}{M_{AB}^2 + 1} \right) \left\{ I_{AB} D_B + \frac{(P_{AB}^2 + z^2) Q_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \right\} \quad (3-57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{9AB} = & \frac{2M_{AB}^2 - 1}{12(M_{AB}^2 + 1)} (Y_B - y) D_B^3 + \frac{6M_{AB}^2 + 1}{12(M_{AB}^2 + 1)^2} (M_{AB} x + N_{AB} - y) D_B^3 \\
& - \frac{M_{AB}}{8} \left( \frac{2M_{AB}^2 - 3}{M_{AB}^2 + 1} P_{AB}^2 - \frac{2M_{AB}^2 + 3}{M_{AB}^2 + 1} z^2 \right) \left\{ I_{AB} D_B + \frac{(P_{AB}^2 + z^2) Q_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \right\} \quad (3-58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{10AB} = & \frac{M_{AB}^2 - 2}{12(M_{AB}^2 + 1)} (X_B - x) D_B^3 + \frac{M_{AB}(M_{AB}^2 + 6)}{12(M_{AB}^2 + 1)^2} (M_{AB} x + N_{AB} - y) D_B^3 \\
& - \frac{1}{8} \left( \frac{3M_{AB}^2 - 2}{M_{AB}^2 + 1} P_{AB}^2 + \frac{3M_{AB}^2 + 2}{M_{AB}^2 + 1} z^2 \right) \left\{ I_{AB} D_B + \frac{(P_{AB}^2 + z^2) Q_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \right\} \quad (3-59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{11AB} = & \frac{2M_{AB}^2 - 1}{15(M_{AB}^2 + 1)} (Y_B - y)^2 D_B^3 - \frac{12M_{AB}^4 - 24M_{AB}^2 - 1}{60(M_{AB}^2 + 1)^2} P_{AB}^2 D_B^3 \\
& + \frac{2M_{AB}^2 (M_{AB}^2 + 2) z^2}{15(M_{AB}^2 + 1)^2} D_B^3 + \frac{(8M_{AB}^2 + 1)(M_{AB} x + N_{AB} - y)}{20(M_{AB}^2 + 1)^2} (Y_B - y) D_B^3 \\
& - \frac{M_{AB} P_{AB}}{8\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \left( \frac{4M_{AB}^2 - 3}{M_{AB}^2 + 1} P_{AB}^2 - \frac{3z^2}{M_{AB}^2 + 1} \right) \left\{ I_{AB} D_B + \frac{(P_{AB}^2 + z^2) Q_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \right\} \quad (3-60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{12AB} = & \frac{M_{AB}^2 - 2}{15(M_{AB}^2 + 1)} (X_B - x)^2 D_B^3 - \frac{M_{AB}^4 + 24M_{AB}^2 - 12}{60(M_{AB}^2 + 1)^2} P_{AB}^2 D_B^3 \\
& - \frac{2(2M_{AB}^2 + 1) z^2}{15(M_{AB}^2 + 1)^2} D_B^3 + \frac{M_{AB}(M_{AB}^2 + 8)(M_{AB} x + N_{AB} - y)}{20(M_{AB}^2 + 1)^2} (X_B - x) D_B^3 \\
& + \frac{M_{AB} P_{AB}}{8\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \left( \frac{3M_{AB}^2 - 4}{M_{AB}^2 + 1} P_{AB}^2 + \frac{3M_{AB}^2 z^2}{M_{AB}^2 + 1} \right) \left\{ I_{AB} D_B + \frac{(P_{AB}^2 + z^2) Q_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \right\} \quad (3-61)
\end{aligned}$$

これらの  $K_{1AB} \sim K_{12AB}$  を用いた高次表面電荷要素の電位・電界の解析式を付録 B に示す。

### 3.3 数値積分精度

本節では、導出した解析式を用いて数値積分精度の評価を行った結果について述べる。図 3-9 に計算配置を示す。図 3-9(a) は三角形表面電荷に対する配置を表す。三角形表面電荷は  $XY$  平面上にあるとし  $(X, Y) = (0, 0), (1, 0), (0.5, \sqrt{3}/2)$  を頂点とする正三角形

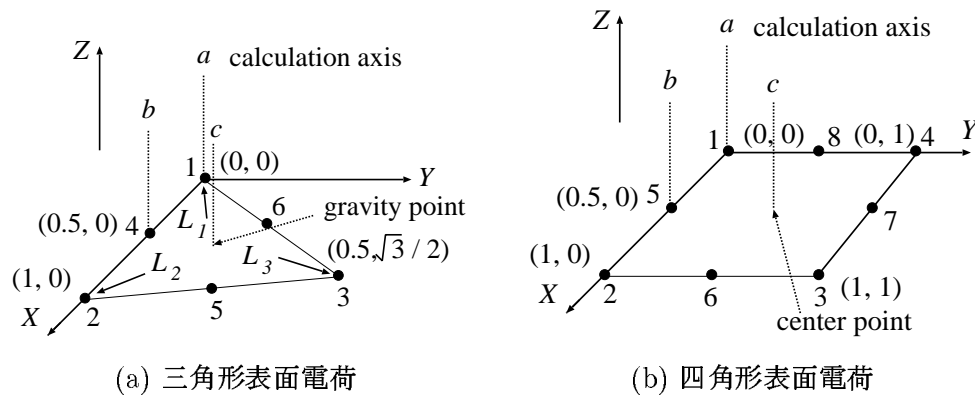


図 3-9: 数値積分精度の評価に使用した計算配置

とした。三角形表面電荷の電荷密度表現関数には、本研究で使用した SCM, FMM-SCM コードと同様に二次関数を使用した。電荷密度表現関数を二次関数とした場合の表面電荷要素は 6 個の節点を有し、図 3-9(a) の 1 ~ 6 が節点位置と節点番号を表す。また図において  $a \sim c$  は解析式と数値積分の比較を行った計算軸を表す。計算軸  $a$  は原点 (節点 1) を通り、 $b, c$  はそれぞれ節点 4, 表面電荷要素の重心を通る直線である。図 3-9(b) は四角形表面電荷を表しており、四角形表面電荷は  $XY$  平面上の  $(X, Y) = (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$  を頂点とする正方形とした。図 3-9(b) の 1 ~ 8 は節点位置および節点番号を表す。計算軸  $a \sim c$  はそれぞれ原点 (節点 1), 節点 5, 正方形の中心を通る直線とした。

表面電荷要素の電荷密度表現関数を二次関数とした場合は、各節点に対して電位係数・電界係数は 6 個計算する必要があるが、大きく分類すると頂点に位置する節点に対する係数と辺上の中間点に位置する節点に対する係数に分類できる。三角形表面電荷の場合は節点 1, 4 に対する電位係数・電界係数を、四角形表面電荷の場合は節点 1, 5 に対する電位係数・電界係数の計算精度を調べた。計算点は、計算軸に沿って表面電荷要素からの距離  $d$  が  $10^{-4} \leq d < 13.1$  となる位置とした。ここでは、3.1 節で述べた数値積分手法のうち次の手法の計算精度を調べた。

ケース (i) 三角形表面電荷 - log-L1 変換, ガウス・ルジャンドル数値積分公式 (一次元分点数 64, 32, 16, 8, 6, 4 点)

ケース (ii) 三角形表面電荷 - 三角形積分公式 (積分点数 32193, 10512, 5913, 2628, 1168, 657, 292, 73, 42, 25 点)

ケース (iii) 四角形表面電荷 - log-L1 変換, ガウス・ルジャンドル数値積分公式 (一次元分点数 64, 32, 16, 8, 6, 4 点)

数値積分の計算精度を調べた結果を図 3-10 ~ 図 3-15 に示す。図では解析式による計算値を基準として、数値積分による計算値の相対誤差を表示している。ただし、図で表示している誤差は、各計算点における電位係数  $C_\phi$  および  $x$ ,  $y$ ,  $z$  軸方向の電界係数  $C_{E_x}$ ,  $C_{E_y}$ ,  $C_{E_z}$  の相対誤差のうち最大誤差を表している。また、誤差が零になった点は表示していない。解析式を用いた場合は、計算点が表面電荷要素から離れると計算精度が低下する (付録 B 参照)。そのため  $d > 1$  の場合は、次に示す方法の数値積分を用いて計算した値を基準として相対誤差を求めた。三角形表面電荷の場合は、3.1.3 節で述べた方法により積分点数を 32193 点とした三角形積分公式を適用した。四角形表面電荷の場合は、4 個の区分四角形に分割し、それぞれの区分四角形において次元分点数 64 点のガウス・ルジャンドル数値積分公式を適用した (積分点数 : 16384)。図において、GL はガウス・ルジャンドル数値積分公式を表し、GL の右側の数字が次元分点数を表す。また TF は三角形積分公式を表し、TF の右側の数字が積分点数を表す。ガウス・ルジャンドル数値積分公式を使用した場合は、64 点の公式を使用しても  $d < 0.1$  では計算精度が  $10^{-8}$  % より大きくなる。一方で、log-L1 変換を使用した場合は、 $d < 0.1$  となる近傍点においても  $10^{-7}$  % 程度の計算精度を維持することができる。log-L1 変換による計算結果は  $d$  が小さくなるにしたがって計算精度が低下しているが、 $d = 10^{-4}$  においても誤差は  $10^{-7}$  % 以下である。一方、32193 点の三角形積分公式を使用した場合は  $d = 0.02$  においても  $10^{-7}$  % 程度の誤差で収まっている。

### 3.4 SCM, FMM-SCM, FMM-BEM コードの計算精度

本節では、本研究で使用した SCM, FMM-SCM, FMM-BEM コードの計算精度について述べる。真空中に存在する誘電体球 (半径 1 cm) に、 $z$  軸方向の一様電界 1 kV/cm を印加した場合を対象として電界計算を行った。この場合、任意の位置での電位・電界の解析解が存在するため、解析解との比較を行うことにより計算精度を評価することができる。まず SCM の計算結果について述べる。SCM の電界計算に使用した誘電体球のメッシュパターンを図 3-16 に示す。ただし、図 3-16 では 1/8 領域のみを示す。図に示すように球の極付近には三角形パッチを使用し、残りの部分は四角形パッチを用いて形状を模擬した。全体で使用したパッチ数は三角形が 48 枚、四角形が 528 枚であった。またパッチには Bézier パッチを使用しており、頂点上では  $G^1$  連続であるが辺上では  $C^0$  連続となる。そのため三角形あるいは四角形の頂点に位置する節点においては節点を輪郭点位置としたが、辺上に位置する節点では非適合要素の輪郭点位置を使用した。電界計算に使用した未知数の個数  $N$  は 2810 個であった。図 3-17 に SCM の計算結果を示す。図 3-17(a) は  $z$  軸上の点において計算した電位と解析解に対する相対誤差を表し、図

3-17(b) は電界の計算値と電界の相対誤差を表す。電位誤差・電界誤差の最大値は  $3.1 \times 10^{-3} \%$ ,  $3.7 \times 10^{-3} \%$  であった。また球内の点  $z = 0$  cm, 球表面の点  $z = 1$  cm, 球外の点  $z = 2$  cm での電界誤差はそれぞれ  $3.0 \times 10^{-3} \%$ ,  $1.4 \times 10^{-3} \%$ ,  $2.1 \times 10^{-4} \%$  であった。

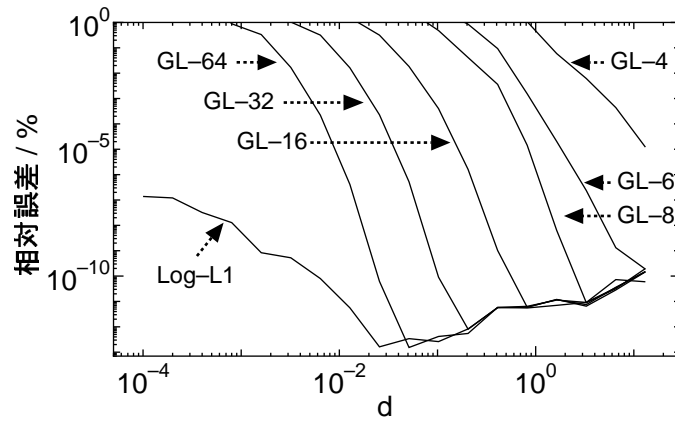
次に FMM-SCM の計算結果について述べる。FMM-SCM では誘電体球を内部制御点可変型の三角形パッチを用いて形状を模擬しており、パッチ間の  $G^1$  接続が実現されるため、全ての輪郭点の位置を節点とした。使用したパッチ数は 768, 3338, 19200, 32448 枚とし、それぞれのパッチ数を使用した場合の未知数の個数  $N$  は 1538, 7778, 38402, 64898 個であった。図 3-18 に 19200 枚のパッチを用いたときの電界計算用のメッシュパターン (1/12 領域) を示す。各未知数を使用した場合における  $z$  軸上の電位・電界の計算値の解析解に対する相対誤差を図 3-19 に示す。 $N$  を増やしても  $z = 0$  cm 付近での電位誤差が改善されないのは、 $z = 0$  cm に向かって電位の解析解が 0 kV に近づくためである。 $z = 0$  cm, 1 cm, 2 cm における電界誤差について表 3-4 にまとめる。球表面付近以外の点では、 $N$  の増加に伴い計算精度が改善されている。球表面において電界誤差が大きくなるが、 $N = 1538$  においても  $9.4 \times 10^{-3} \%$  以下の計算精度を達成している。また FMM-SCM において、計算を開始してから表面電荷密度を求めるまでの計算時間と、1 反復当たりの計算時間を図 3-20 に示す。ただし、図 3-20 ではパッチ数を 192 ( $N = 386$ ), 2352 ( $N = 4706$ ), 9408 ( $N = 18818$ ) 枚としたときの計算結果を加えている。解が収束するまでに要する反復回数は  $N = 7778$  以下では 3 回であり、それより  $N$  を増やした場合は 4 回であった。図 3-18(a), (b) を見てわかるように  $N$  に対して  $O(N)$  の計算時間で計算を実行できていることがわかる。

図 3-21 に FMM-BEM の計算結果を示す。電界計算に使用したパッチ数は 768, 3338, 19200 枚とし、FMM-SCM と同じメッシュパターンを使用した。ただし、BEM では各節点の電位値および法線方向電界値が未知数となるため、誘電体球の分割に SCM と同じメッシュパターンを使用した場合でも SCM に比べて倍の未知数を必要とする。パッチ数を 768, 3338, 19200 枚としたときの未知数の個数  $N$  はそれぞれ 3076, 15556, 76804 個であった。 $z = 0$  cm, 1 cm, 2 cm における電界誤差について表 3-5 にまとめる。FMM-BEM においても球表面付近以外では、 $N$  の増加にしたがって電位誤差・電界誤差はともに改善されている。電界誤差において、球外近辺では  $N = 15556$  のほうが  $N = 76804$  よりも精度が高くなっている。これは計算誤差を絶対値で評価しており (図 3-21 の縦軸は  $\log | \text{相対誤差} |$ )、誤差が零点と交差しているためである。このことは、 $z = 2$  cm 付近では  $N = 76804$  のほうが計算精度が高くなっていることからわかる。

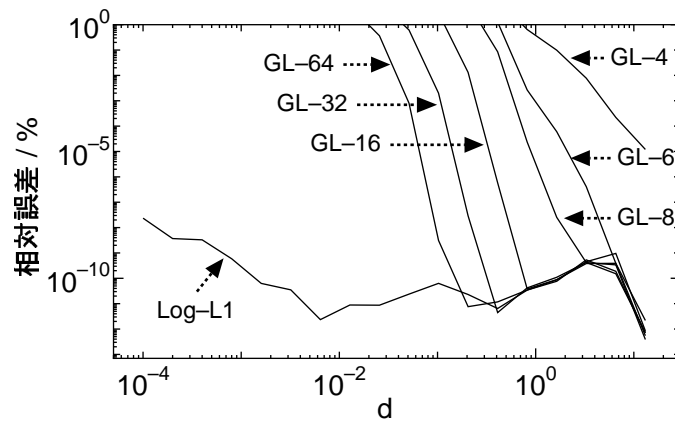
### 3.5 まとめ

本章では、使用した数値面積分の計算精度に関する検討や数値電界計算コードを用いて電界計算を行った結果について述べた。本章で得られた結果を次のようにまとめる。

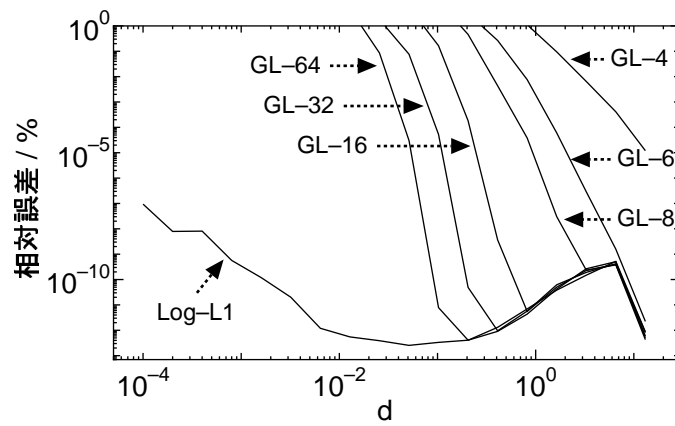
- 電荷密度表現関数を二次，三次関数とした三角形および四角形表面電荷の電位・電界の解析式を導出した。
- 導出した解析式と数値積分それぞれの方法を用いて電位係数，電界係数を計算し，両者の計算値を比較することにより数値積分の精度評価を行った。
- 数値積分精度評価に加えて高速多重極法を適用することにより，高精度，高速度，大容量の計算を可能とする SCM，BEM の計算コードを実現した。
- SCM，FMM-SCM，FMM-BEM の計算コードを用いて，一様電界中の誘電体球を対象として数値電界計算を行った。2810 個の未知数を使用した SCM の計算結果では， $z$  軸上の電界誤差は  $3.7 \times 10^{-3} \%$  以下であった。FMM-SCM，FMM-BEM の計算結果では未知数の増加とともに計算精度は向上し，FMM-SCM，FMM-BEM それぞれ 1538 個，3076 個の未知数を使用した場合においても  $z$  軸上の電界誤差が  $1.2 \times 10^{-2} \%$  以下となる計算精度を達成していることを示した。



(a) 計算軸  $a$

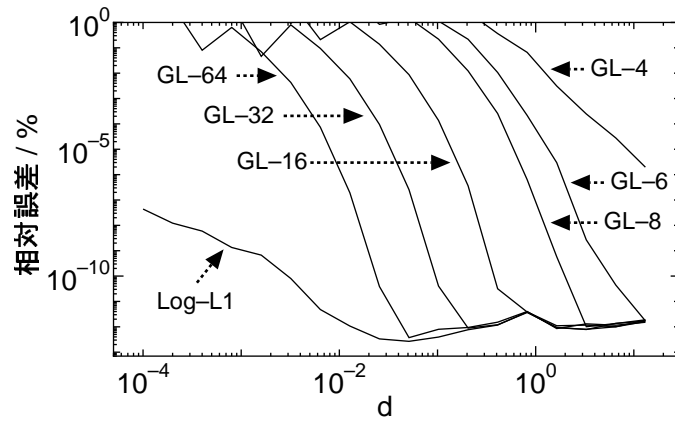


(a) 計算軸  $b$

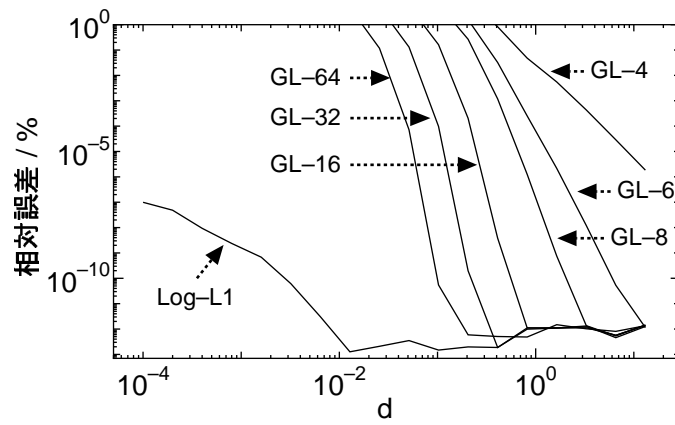


(c) 計算軸  $c$

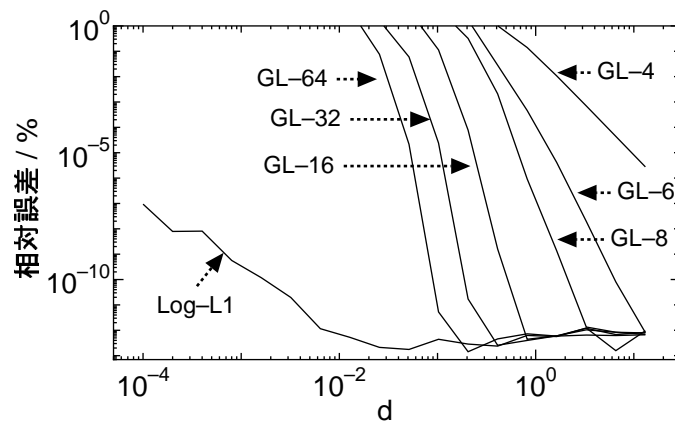
図 3-10: 数値積分精度—ケース (i) 三角形表面電荷の節点 1 に対する係数



(a) 計算軸  $a$

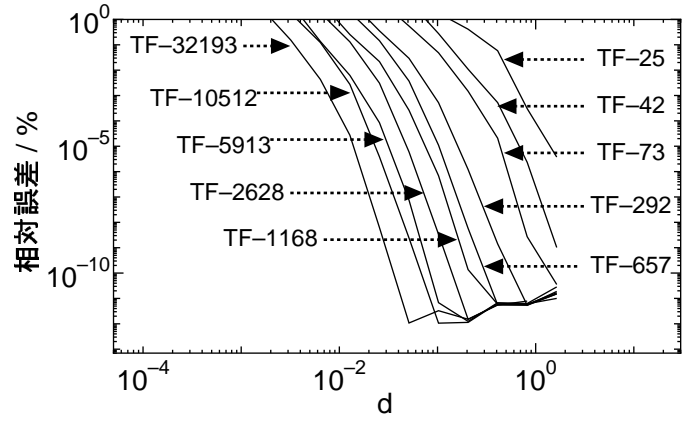


(a) 計算軸  $b$

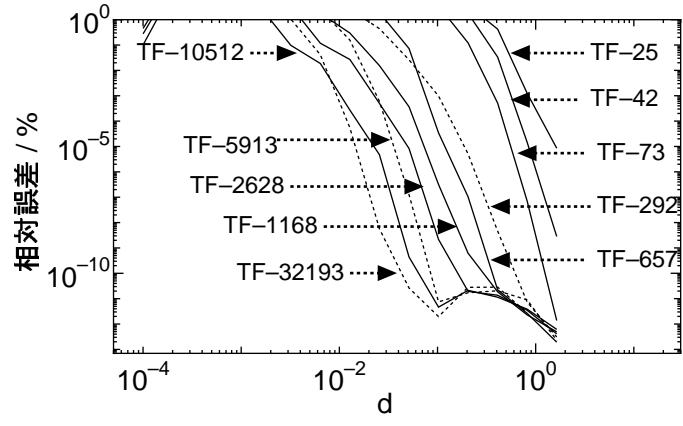


(c) 計算軸  $c$

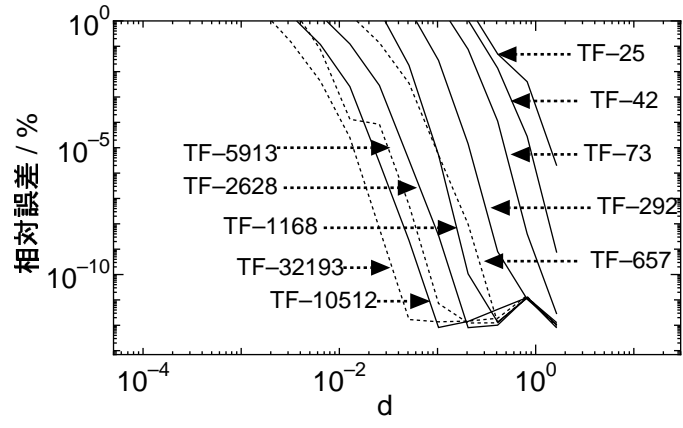
図 3-11: 数値積分精度—ケース (i) 三角形表面電荷の節点 4 に対する係数



(a) 計算軸  $a$



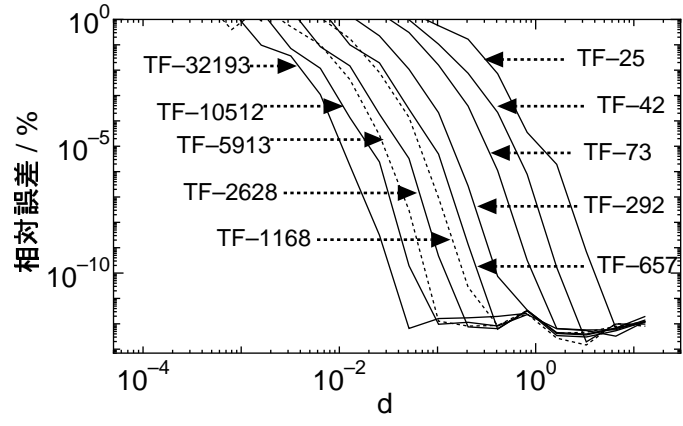
(a) 計算軸  $b$



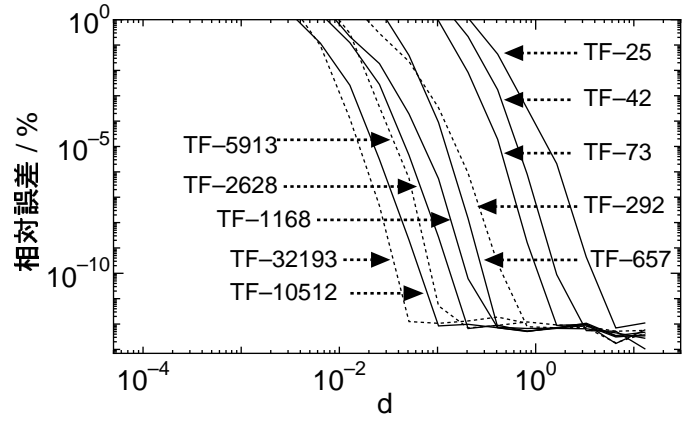
(c) 計算軸  $c$

図 3-12: 数値積分精度—ケース (ii) 三角形表面電荷の節点 1 に対する係数

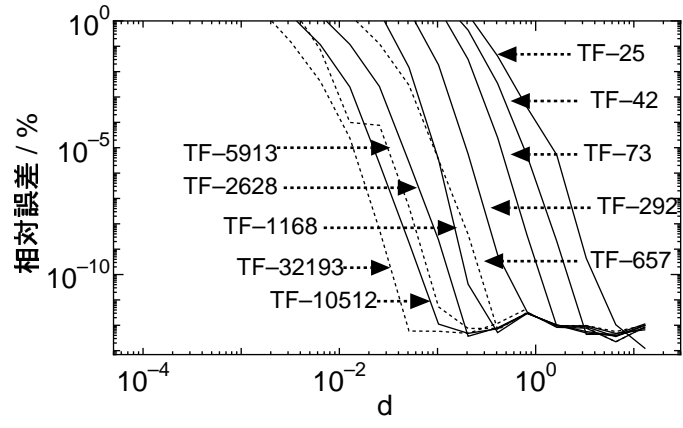




(a) 計算軸  $a$

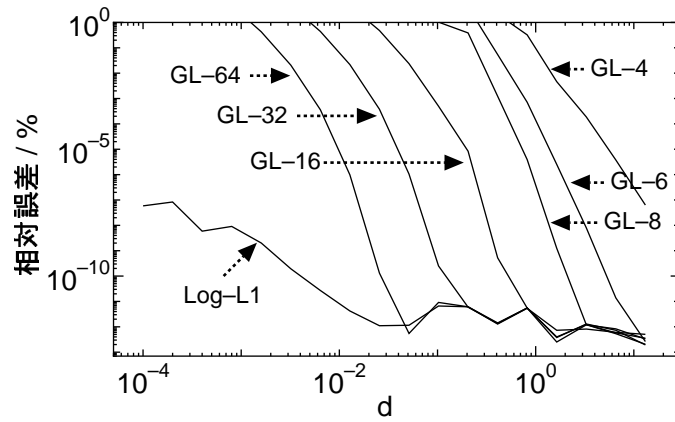


(a) 計算軸  $b$

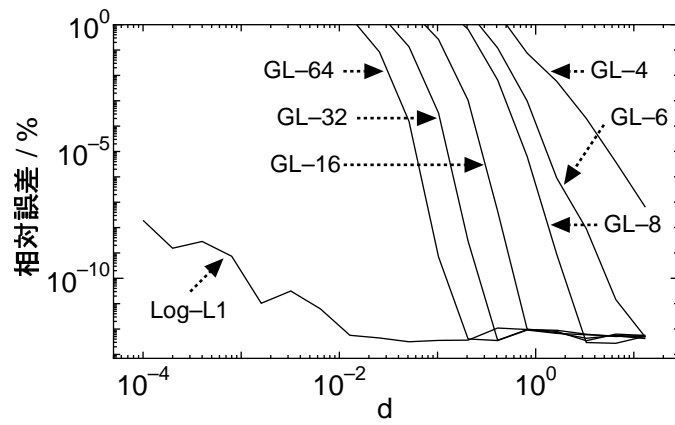


(c) 計算軸  $c$

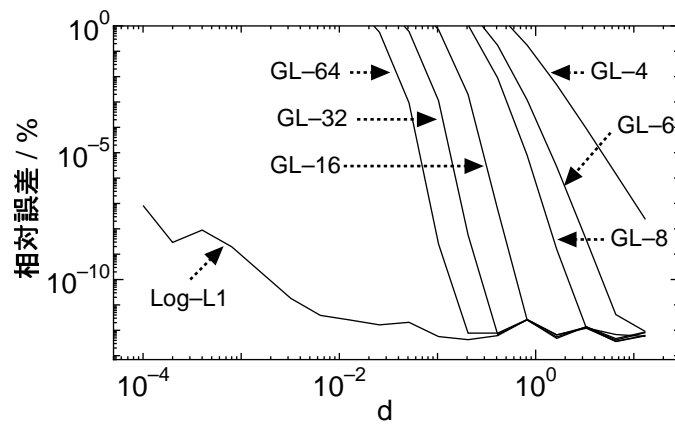
図 3-13: 数値積分精度—ケース (ii) 三角形表面電荷の節点 4 に対する係数



(a) 計算軸  $a$

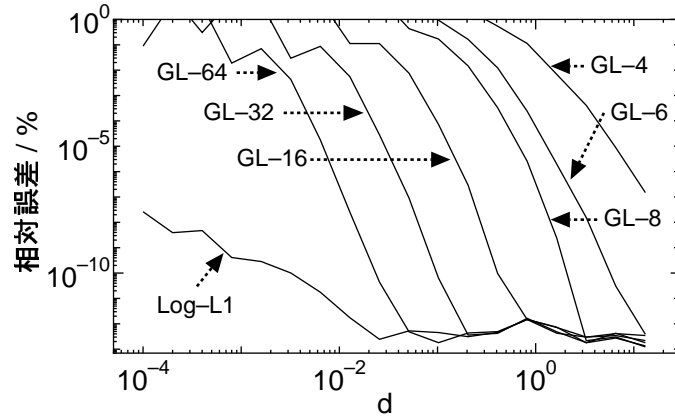


(a) 計算軸  $b$

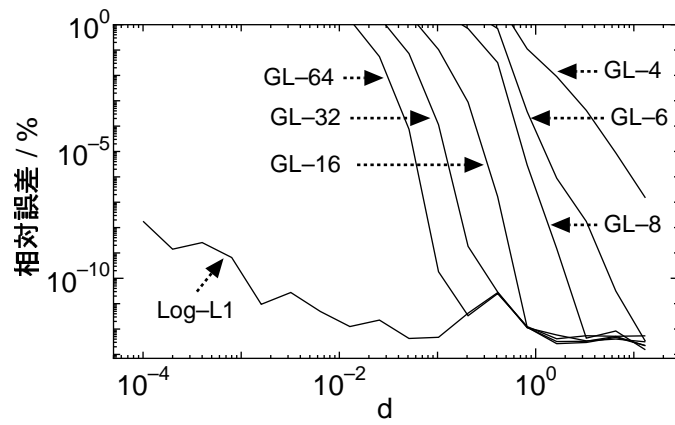


(c) 計算軸  $c$

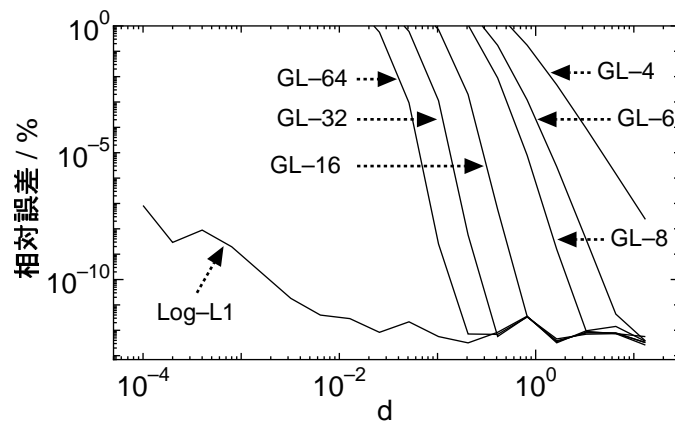
図 3-14: 数値積分精度—ケース (iii) 四角形表面電荷の節点 1 に対する係数



(a) 計算軸  $a$



(a) 計算軸  $b$



(c) 計算軸  $c$

図 3-15: 数値積分精度—ケース (iii) 四角形表面電荷の節点 5 に対する係数

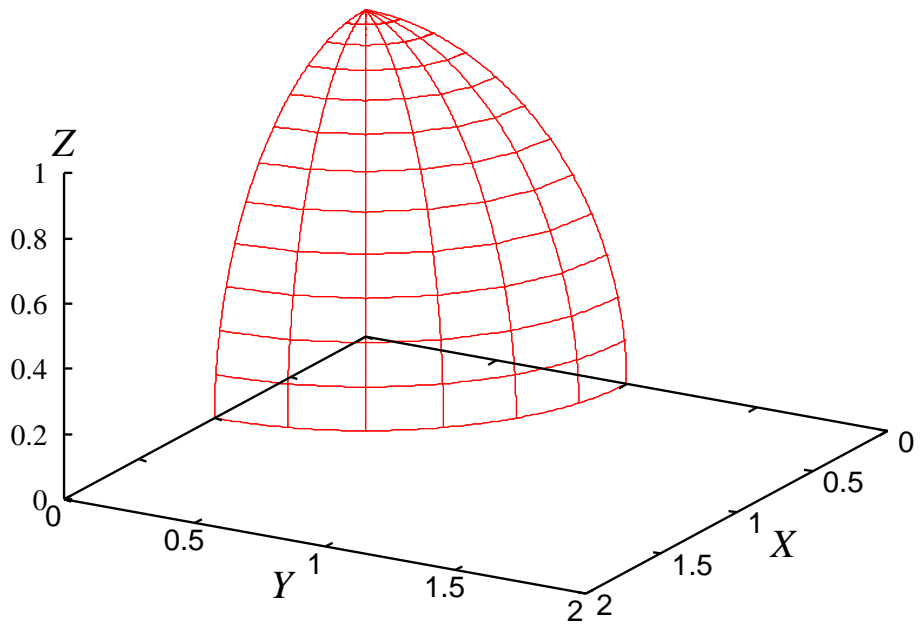


図 3-16: SCM で使用したメッシュパターン (1/8 領域)

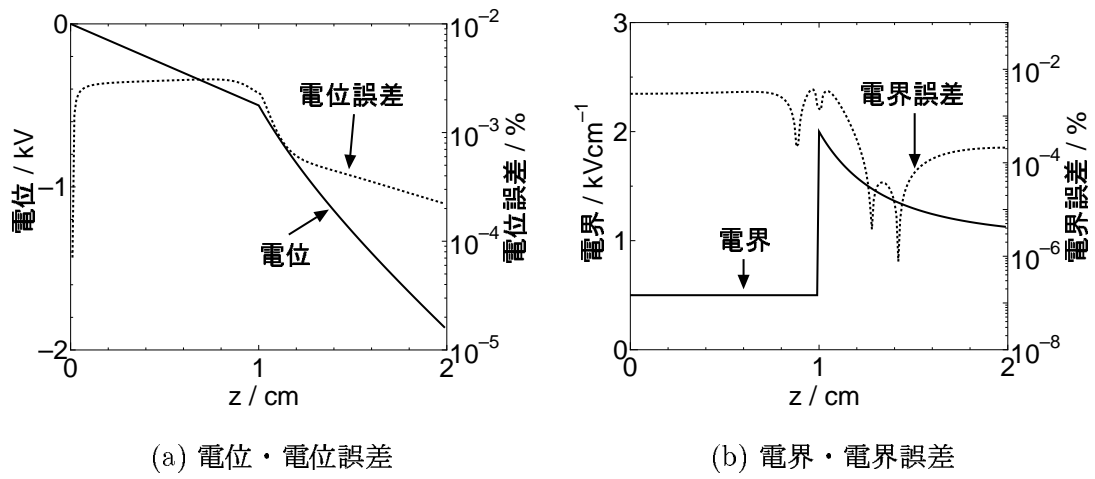


図 3-17: SCM の計算結果

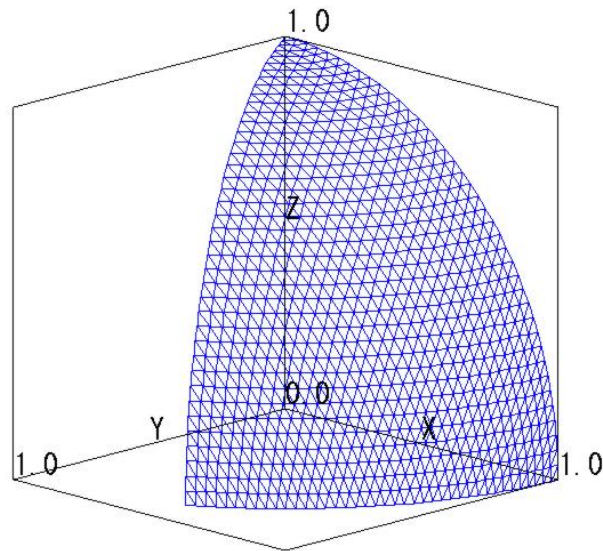


図 3-18: FMM-SCM で使用したメッシュパターン (1/12 領域)

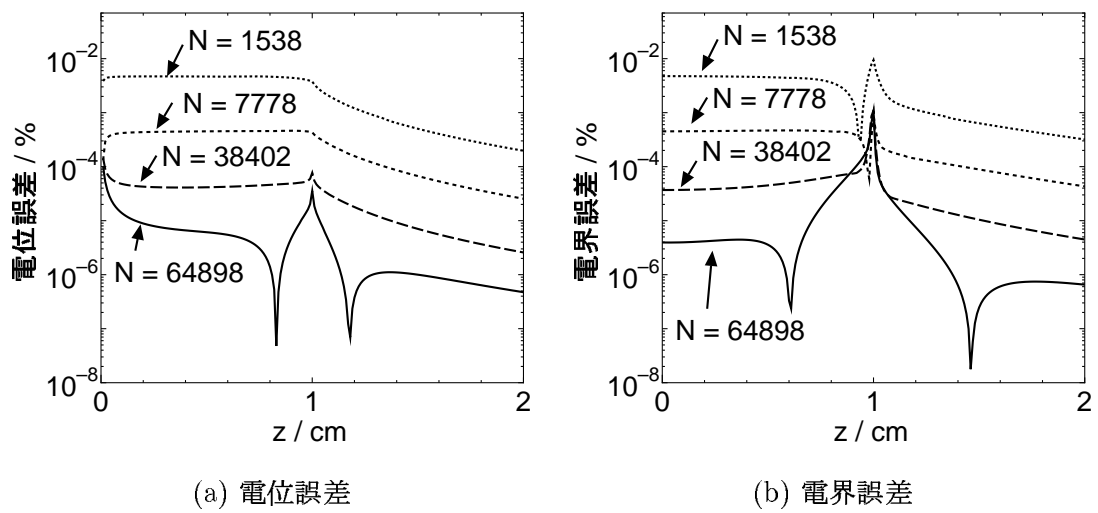


図 3-19: FMM-SCM の計算結果

表 3-4: FMM-SCM による計算の電界誤差

N	電界誤差 / %		
	$z = 0$ cm	$z = 1$ cm	$z = 2$ cm
1538	$4.7 \times 10^{-3}$	$9.4 \times 10^{-3}$	$3.2 \times 10^{-4}$
7778	$4.5 \times 10^{-4}$	$9.4 \times 10^{-4}$	$4.3 \times 10^{-5}$
38402	$3.7 \times 10^{-5}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$4.5 \times 10^{-6}$
64898	$4.0 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$6.5 \times 10^{-7}$

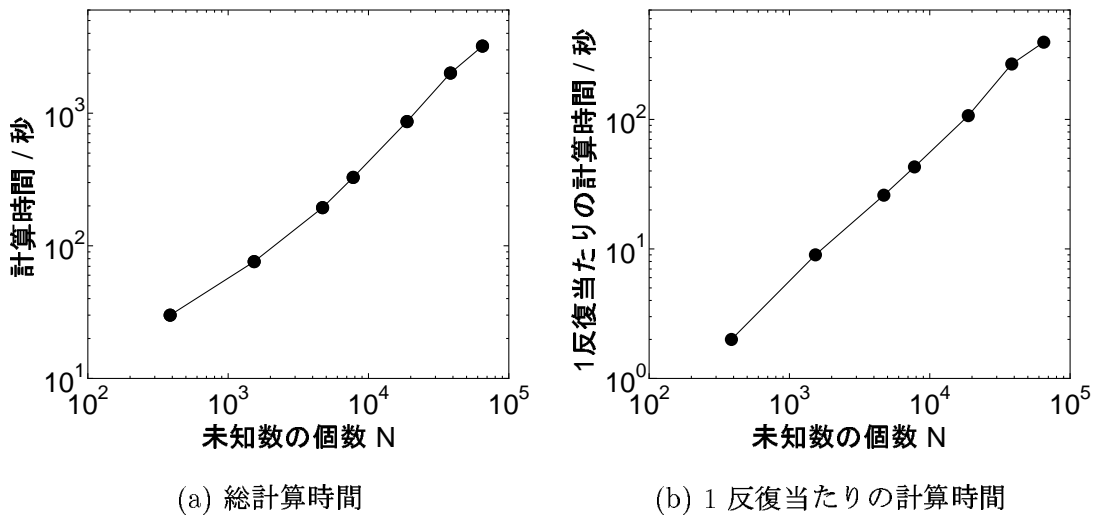


図 3-20: FMM-SCM の計算時間

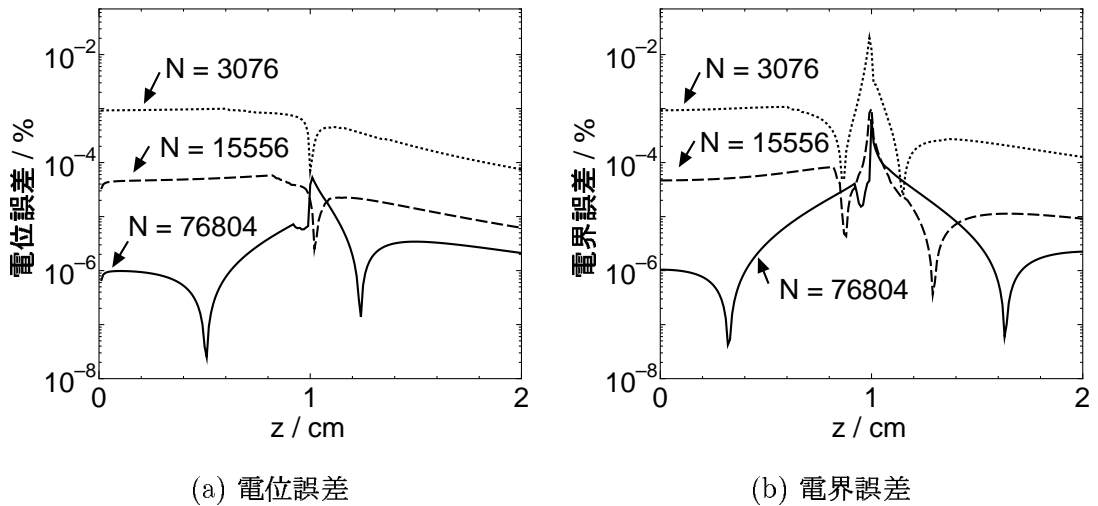


図 3-21: FMM-BEM の計算結果

表 3-5: FMM-BEM による計算の電界誤差

$N$	電界誤差 / %		
	$z = 0 \text{ cm}$	$z = 1 \text{ cm}$	$z = 2 \text{ cm}$
3076	$9.3 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-4}$
15556	$4.7 \times 10^{-5}$	$9.9 \times 10^{-4}$	$9.1 \times 10^{-6}$
76804	$1.0 \times 10^{-6}$	$6.4 \times 10^{-4}$	$2.3 \times 10^{-6}$

## 第4章 帯電電荷測定法

ガス、真空などの絶縁方式では高圧導体を支持するための固体絶縁物（スペーサと呼ばれる）の存在が不可欠である。固体絶縁物の表面に帯電が生じた場合、この帯電が沿面放電から絶縁破壊を引き起こす原因となる。そこで帯電を生じにくいもしくは帯電を生じても絶縁性能をできるだけ低下させないような絶縁機器の設計や絶縁性能の評価を行うためには、帯電電荷分布の定量的かつ詳細な把握が必要である。

帯電電荷の測定には通常、ガード電極を有するプローブを接近させ、帯電電荷によってセンサに静電的に誘起される電荷量を測定する静電プローブ法が使用される。背後接地電極を有する薄板試料表面の帯電電荷測定の測定配置を図4-1(a)に示す。静電プローブはセンサとガード電極から構成され、ガード電極はセンサと対向する絶縁物表面以外の帯電電荷のセンサに対する影響を遮蔽する役割を果たす。図において、 $C_p$  はセンサの誘起電荷量を検出するためにセンサー接地間に挿入されるコンデンサの容量を表し、 $S$  はセンサの面積を、 $V_p$  は帯電電荷によって誘起されるセンサ電位を表す。また、 $C_g$  はセンサと絶縁物表面（センサと対向する面積  $S$  の部分）との間の容量、 $C_d$  は絶縁物表面と接地電極との間の容量を表す。ここで、センサと対向する絶縁物表面（面積  $S$ ）において、帯電電荷密度  $x$  は一定であると仮定してその絶縁物表面の電位を  $V_s$  とすると、図4-1(a)の測定配置は図4-1(b)の等価回路で表すことができる [45]。この等価回路から次

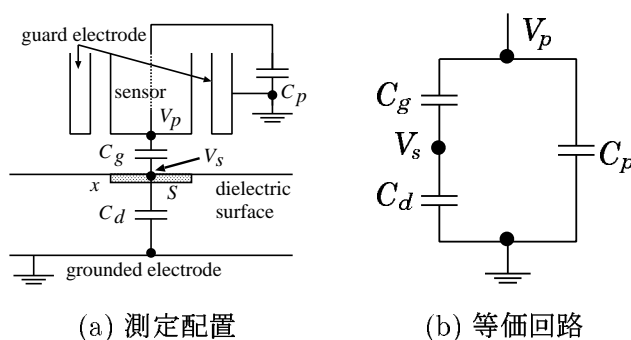


図 4-1: 薄板試料の帯電電荷測定



式の関係が得られる。

$$V_s = \frac{xS}{C_0} \left( C_0 = C_d + \frac{C_g C_p}{C_g + C_p} \right) \quad (4-1)$$

$$V_p = \frac{C_g}{C_g + C_p} V_s \quad (4-2)$$

また、容量  $C_d$ ,  $C_g$  は次式で表される。

$$C_g = \frac{\varepsilon_0 S}{h} \quad (4-3)$$

$$C_d = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{t} \quad (4-4)$$

ただし、 $h$  はセンサと絶縁物表面との間の距離を表し、 $t$  は絶縁物の厚さを表す。また、 $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_r$  はそれぞれ真空中の誘電率、絶縁物の比誘電率を表す。ここで、 $C_g \ll C_p$  とすると (4-2) 式より次式の関係が得られる。

$$\frac{V_s}{V_p} = \left( \frac{C_g + C_p}{C_g} \right) \simeq \frac{C_p}{C_g} = C_p \frac{h}{\varepsilon_0 S} \quad (4-5)$$

さらに、 $C_d \ll C_p$  の仮定の下に (4-5) 式を (4-1) 式に代入すると、

$$x = \frac{C_0 V_s}{S} = V_p \frac{C_p}{S} \left( 1 + \frac{h \varepsilon_r}{t} \right) \quad (4-6)$$

が得られ、センサ電位  $V_p$  から帯電電荷密度  $x$  を直接求めることができる。つまり、試料がシートやフィルムのような薄板試料であって、背後接地電極を有する場合は、センサ－試料表面－接地電極間で擬似平等電界を仮定することができる。そのため、測定値であるプローブの誘起電荷とプローブと対向する帯電電荷との間に 1 対 1 の対応関係が成り立ち、測定法としてすでに確立されている。

厚板試料の帯電電荷測定の測定配置を図 4-2(a) に、その等価回路を図 4-2(b) に示す。絶縁物の厚さが大きくなると、図に示すようにセンサ－試料表面－接地電極間における擬似平等電界の仮定が成り立たなくなり、センサと対向する部分以外の周辺の帯電電荷もセンサ出力へ影響するようになる [46]。つまり、厚みの大きな固体絶縁物の帯電電荷の測定においては、絶縁物が背後接地電極を有する場合においても、(4-6) 式を用いてプローブによる測定値から直接に帯電電荷量（あるいは帯電電荷密度）を知ることができない [46]。文献 [46] では、厚板試料の表面を静電プローブにより測定し、プローブと絶縁物表面との間の距離が 3 mm の場合、厚さ 3 mm の試料でも出力は真値の 30 ~ 60 % であり、10 mm 厚の試料では 50 ~ 110 % となり、出力が全く意味を成さないという測定結果を得ている。厚板試料の帯電電荷測定では、背後接地電極の有無に関わらず、プローブ出力と全ての帯電電荷との関係を考慮する必要があり、静電プローブによる多点測定と数値電界計算を併用する。つまり、数値電界計算を用いてプローブに誘起される電荷

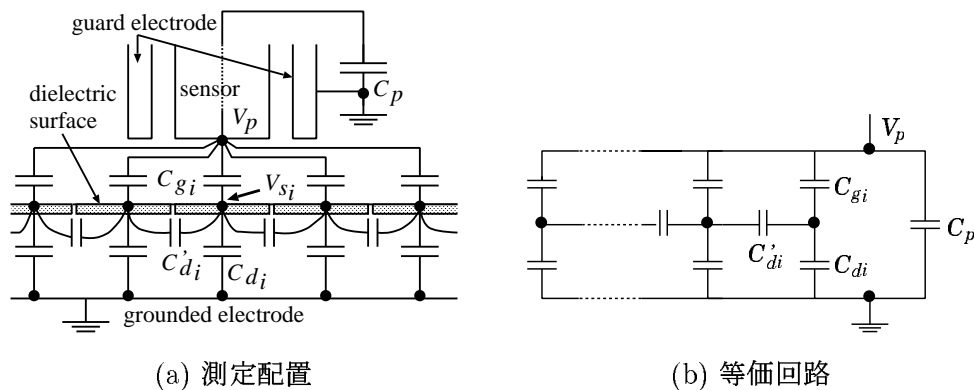


図 4-2: 厚板試料の帯電電荷測定

量と帯電電荷とを関係付ける係数行列を計算した上で、プローブによる多点の測定値から逆計算により帯電電荷を推定する [1]。しかし、このような多点測定法に基づく測定原理は早くから明らかにされながらも推定精度、実用性ともに高レベルの測定法として確立されていないのが現状であり、未だに実機のスペーサを対象として帯電電荷測定を行ったという報告はされていない。

本章では、実用的、定量的な帯電電荷測定法の確立を目的とし、帯電電荷測定の数値シミュレーションを用いて帯電電荷測定に存在する問題点を明らかにするとともに改善策について検討を行う。また本章の数値電界計算には第 2 章で述べた高次要素 SCM を主に使用し、一部の計算 (4.3.1 節) において電荷密度表現関数を零次あるいは一次とした SCM を使用した。

#### 4.1 プローブ出力と電荷分布との関係

厚みの大きな固体絶縁物表面の帯電電荷測定において、プローブの測定値から帯電電荷分布を直接求めることができないことは、文献 [46] において既に検討されている。ただし、文献 [46] では接地面上に配置した絶縁物の上面の帯電電荷測定を行っており、実際のスペーサの帯電電荷測定では測定対象面はスペーサの側面であるため接地面の影響が異なる。そこで、本節ではスペーサを簡単に模擬した配置を対象として、帯電電荷分布または静電プローブの測定位置を変化させた場合に、プローブに誘起される電荷量 (プローブ出力) がどのように変化するかを調べた。

### 4.1.1 計算配置

図 4-3 に計算に用いた配置を示す。固体絶縁物は一辺が 25 mm の立方体で、比誘電率は 4.0 とした。実際のスペーサでは様々な形状の固体絶縁物を使用されているが、ここでは基礎的な検討を目的としているため、固体絶縁物は立方体形状とした。絶縁物の配置については、絶縁物下面と接地面との間の距離が  $h = 30$  mm となる位置に配置した場合と接地面上に配置した場合 ( $h = 0$  mm) の 2 通りを対象とした。

図 4-3(a) に示すように静電プローブは絶縁物の側面に存在し、側面から一定の法線方向距離を保って平行に移動するとした。静電プローブは、実際に電力中央研究所で帯電電荷測定に用いられたプローブ形状を模擬した [46]。図 4-3(b) に静電プローブの形状を示す。センサ部は円筒形で、上下面が半径 2.5 mm の円形で厚さは 1 mm とした。ガード電極はセンサ部を取り囲むように存在し、内径、外径がそれぞれ 3.5 mm, 4.5 mm であり、長さは 20 mm とした。通常の測定ではセンサと接地面との間にコンデンサを挿入するが、コンデンサの容量が大きければ完全接地と同じであるので、センサの電位は零とし完全接地状態とした。またプローブと絶縁物表面との間の距離は 3 mm で一定とした。図 4-3(b) は数値電界計算に使用したモデルを表す。

図 4-4 に示すようにプローブと対向している絶縁物側面を  $5 \times 5$  mm<sup>2</sup> の区分に 25 分割し、 $i = 1 \sim 25$  が  $i$  番目の測定位置の番号を表す。プローブの位置はセンサの中心と各区分の中心が一致する位置とした。

本節の数値電界計算に用いたメッシュパターンを図 4-5 ~ 図 4-7 に示す。図 4-5, 図 4-6 はそれぞれセンサ, ガード電極のメッシュパターンを表す。図 4-6 ではガード電極の内側の側面を表示していないが、外側の側面と同様に分割を行った。図 4-7 は絶縁物の側面のうちプローブと対向する側面のメッシュパターンを示す。他の側面に対してはプローブと

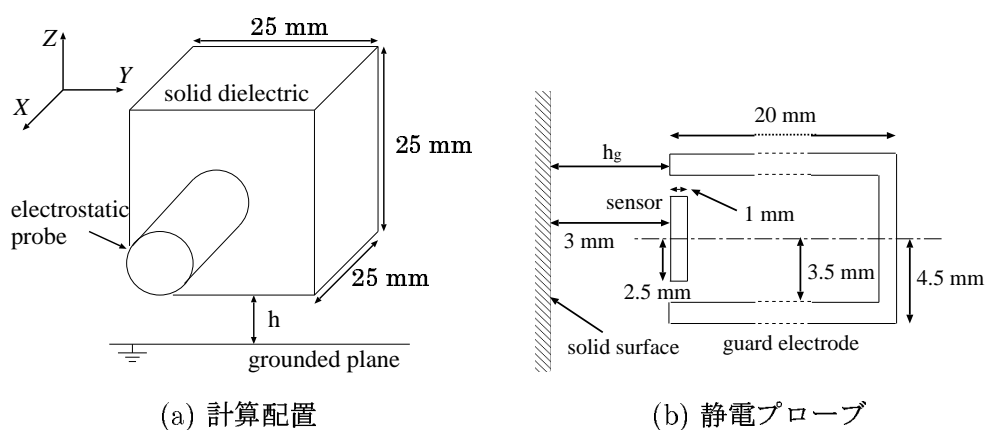


図 4-3: 帯電電荷測定の測定配置

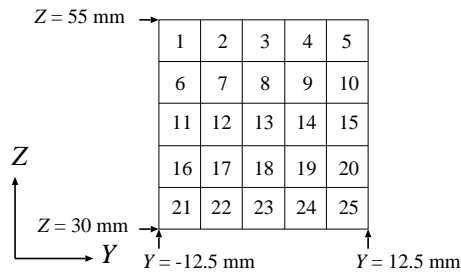


図 4-4: 静電プローブの測定位置番号  $i$

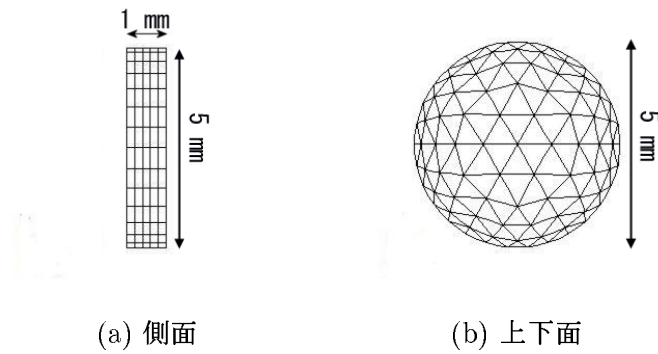


図 4-5: センサの電界計算用メッシュパターン

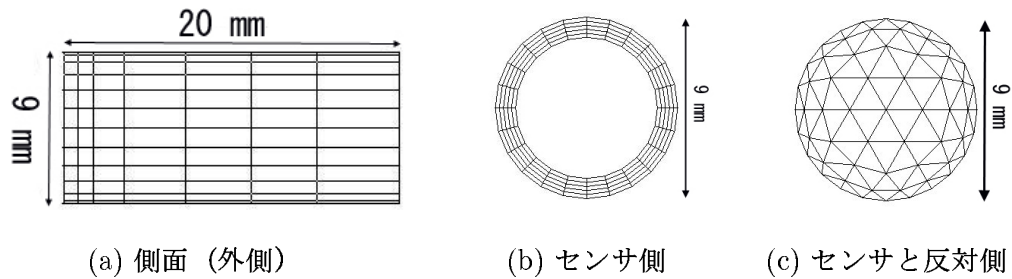
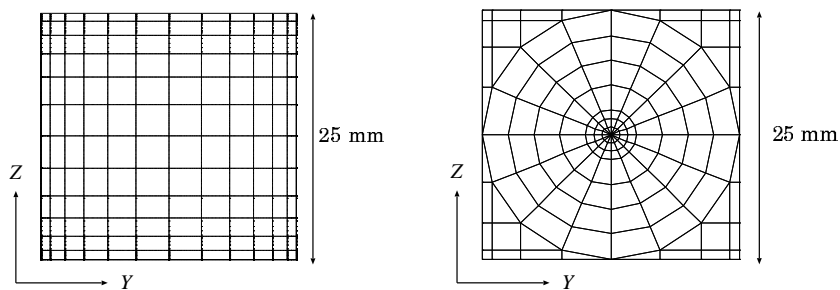


図 4-6: ガード電極の電界計算用メッシュパターン

離れるに従い粗くなるように分割した。

#### 4.1.2 測定位置の影響

プローブと対向する絶縁物の側面が一様に帯電している場合（後述する図 4-8(a)）の、各プローブ位置における出力を表 4-1 に示す。 $h = 30 \text{ mm}$ ，ガード電極ありとした場合の電界計算に使用した要素数，未知数の個数はそれぞれ 1770，5332 であった。絶縁物表面の帯電電荷密度は  $4.0 \text{ pC/cm}^2$  とした。このときプローブ直下部に帯電電荷が存在す



(a) 図 4-8(a), (d) 用

(b) 図 4-8(b), (c) 用

図 4-7: 絶縁物の電界計算用メッシュパターン (センサ対向面)

表 4-1: 測定位置とプローブ出力との関係

(a)  $h = 30 \text{ mm}$

プローブ位置 $i$	プローブ出力 / pC	
	ガード電極なし	ガード電極あり
1	-2.82	-0.76
7	-3.52	-0.97
13	-3.72	-1.01

(b)  $h = 0 \text{ mm}$

プローブ位置 $i$	プローブ出力 / pC	
	ガード電極なし	ガード電極あり
1	-1.69	-0.54
7	-2.14	-0.69
13	-2.08	-0.69
19	-1.57	-0.56

る場合、センサ直下の帯電電荷量は  $0.79 \text{ pC}$  (電荷密度  $4.0 \text{ pC/cm}^2 \times$  センサ面積  $0.25 \times 0.25 \pi \text{ cm}^2$ ) となる。前述したように背後接地電極を有する薄板試料の表面が一様に帯電している場合は、測定位置に依らずほぼ一定のプローブ出力が得られる。しかし、表 4-1 を見てわかるように厚板試料の場合は測定位置によって出力が大きく変化する。 $h = 30 \text{ mm}$  の場合、ガード電極が存在する場合も存在しない場合も側面の中心に位置する  $i = 13$  のときに最も出力が大きく、 $i$  が 13 から 7 になったときはプローブ出力は約 5 %

減少する。 $i = 1$  のとき、つまり絶縁物の角にプローブが位置するときは  $i = 13$  に比べて出力が約 25 % 減少する。 $i = 1$  のときの出力（ガード電極が存在する場合）がプローブ直下の帯電電荷量 0.79 pC に近い値となったが、これは  $i = 13, 7$  のときのようにセンサ直下周辺の帯電電荷が存在しなくなり、その分だけプローブ出力が小さくなったにすぎない。

絶縁物が接地面上にある場合 ( $h = 0$  mm) は、 $i = 1$  の出力は  $i = 13$  に比べて約 20 % 小さい値となる。また接地面上に誘導されて現れる逆極性の表面電荷の影響のために、中心の  $i = 13$  ではなく  $i = 7$  のときの出力が最大となった。 $h = 30$  mm, 0 mm とともにガード電極が存在しない場合は、出力は直下の電荷量 0.79 pC に比べて 2 ~ 5 倍の値となった。ガード電極によって周辺の電荷の影響を小さくすることはできるが、プローブと対向する帯電電荷量を直接に表す出力を求めることはできない。

このようにプローブ出力が位置毎に一定とならないのは、出力がセンサと対向する電荷だけでなく周辺に位置する電荷にも依存するためである。

#### 4.1.3 センサの周辺電荷の影響

本節では、センサ周辺に位置する電荷のプローブ出力に対する寄与について詳しく検討する。絶縁物表面の帯電電荷分布として次の 4 種類を対象とした。

- (a) プローブと対向する絶縁物側面が一様に帯電している場合
- (b) プローブ直下部の直径 5 mm の円形部分のみが一様に帯電している場合
- (c) プローブ直下部以外が一様に帯電している場合
- (d) 絶縁物表面全体が一様に帯電している場合

帯電電荷分布 (a) ~ (d) の様子を図 4-8 に示す。帯電電荷密度はすべて  $4.0 \text{ pC/cm}^2$  とした。また、プローブ位置は  $i = 13$ 、つまり絶縁物側面の中心に配置した。

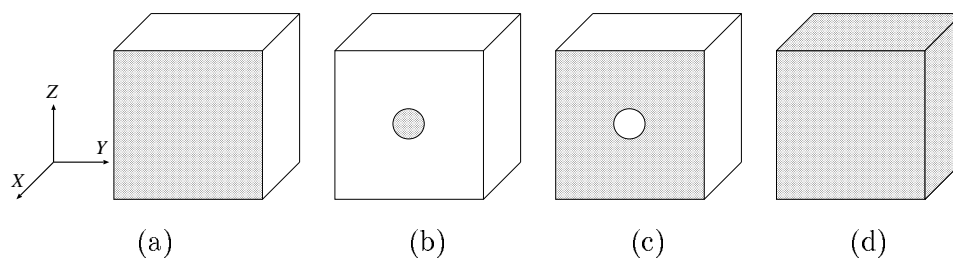


図 4-8: 絶縁物表面の帯電電荷分布 (a) ~ (d)

表 4-2: 帯電電荷分布とプローブ出力との関係 ( $i = 13$ )

(a)  $h = 30$  mm

帯電電荷分布	プローブ出力 / pC	
	ガード電極なし	ガード電極あり
(a)	-3.72	-1.01
(b)	-0.20	-0.10
(c)	-3.51	-0.91
(d)	-14.44	-3.67

(b)  $h = 0$  mm

帯電電荷分布	プローブ出力 / pC	
	ガード電極なし	ガード電極あり
(a)	-2.08	-0.69
(b)	-0.16	-0.09
(c)	-1.92	-0.59
(d)	-5.23	-1.59

$h = 30$  mm, ガード電極ありとした場合において, 帯電電荷分布 (a), (d) の電界計算に使用した要素数, 未知数の個数はそれぞれ 1770, 5332 であり, 帯電電荷分布 (b), (c) のときはそれぞれ 1474, 4292 であった。帯電電荷分布を (a) ~ (d) とした場合のプローブ出力を表 4-2 に示す。当然, 重ね合わせの理より (a) の出力 = (b) の出力 + (c) の出力である。帯電電荷分布 (a) と 帯電電荷分布 (b) を比較することにより, 出力の大部分がセンサ直下以外の帯電電荷によって誘導されていることがわかる。 $h = 30$  mm のときに, 帯電電荷分布 (b) の出力の 帯電電荷分布 (a) の出力に対する比はガード電極がない場合は約 5% であり, ガード電極がある場合でも約 10% に過ぎない。また,  $h = 0$  mm のときの比はガード電極がない場合, ある場合でそれぞれ約 8%, 約 13% であった。帯電電荷分布 (d) のように絶縁物表面が全て帯電している場合は, センサ直下の帯電電荷のプローブ出力への影響はさらに小さくなり, ガード電極が存在する場合でも 3 ~ 6% にしか過ぎない。つまりセンサ直下部以外の帯電電荷の影響をなくすためにセンサを取り囲むようにガード電極を配置しても, 帯電電荷からの電気力線が絶縁物の中を通り抜け, あるいはガード電極を回避して帯電電荷がセンサに電荷を誘起していることになる。すなわち固体絶縁物が大きな厚みを有するときは絶縁物内の電界分布は平等電界とは大きく異なることがよくわかる。

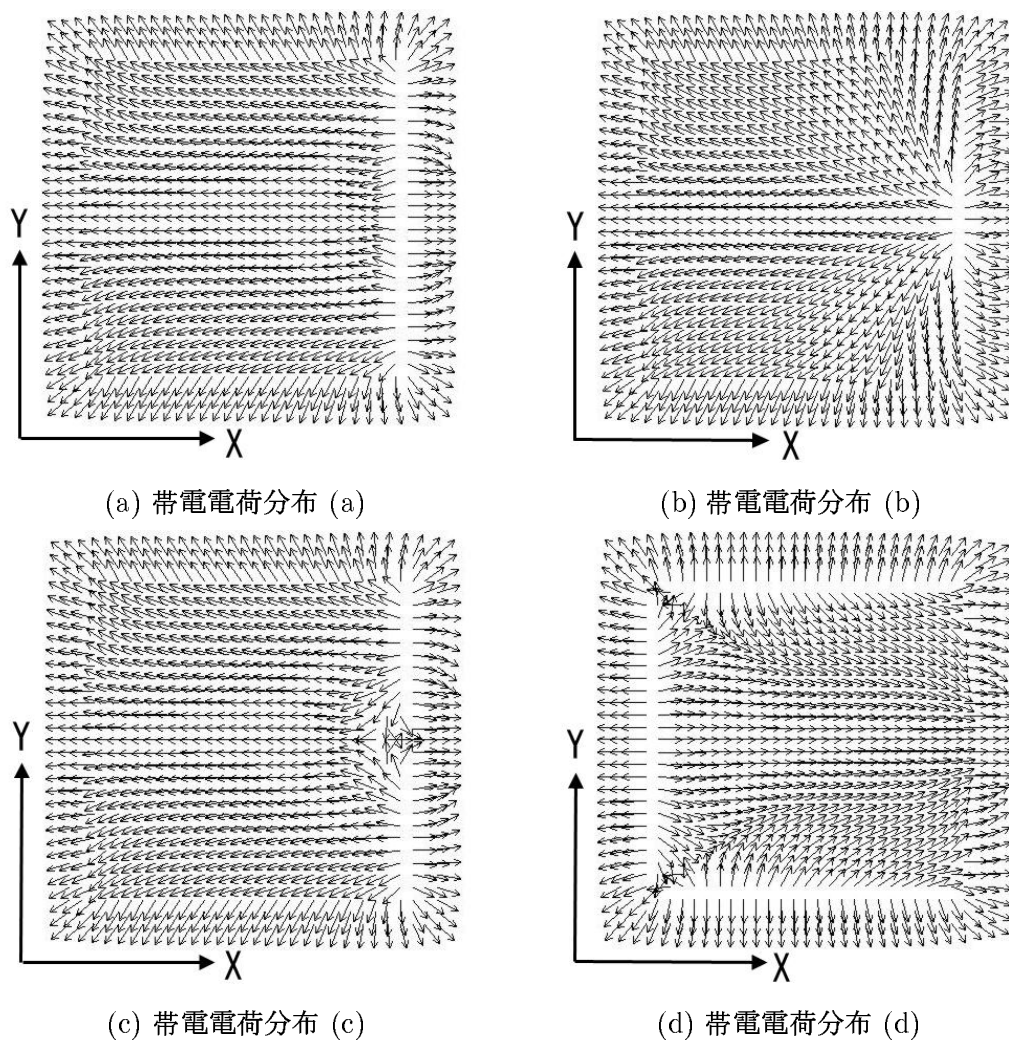


図 4-9:  $z = 42.5 \text{ mm}$  断面の電界方向

$h = 30 \text{ mm}$  のときに、帯電電荷分布を (a) ~ (d) とした場合の  $z = 42.5 \text{ mm}$  断面の電界方向を図 4-9 に示す。図の中では右側にプローブ（ガード電極を含む）が存在する。電界分布は帯電電荷分布によらずセンサ以外にも電気力線が至る不平等な分布となっており、ガード電極だけではセンサ直下部以外の帯電電荷の影響をすべて取り除くことは不可能であることを表している。



## 4.2 多点測定法

### 4.2.1 測定原理

静電プローブを用いた場合、厚みを有する固体絶縁物表面の帯電電荷測定は次の三段階を要する [1]。

- (1) 帯電電荷分布を数値モデル化して表現した  $x$  と静電プローブによる測定値  $b$  (帯電電荷がプローブのセンサに誘起する電荷量) との間の線形関係式  $Ax = b$  を表す行列  $A$  の計算 (数値電界計算を適用)。
- (2) 多点位置での静電プローブによる  $b$  の測定。
- (3) 測定値  $b$  から逆計算による  $x$  の推定。

このような多点測定に基づく考え方は文献 [47] で初めて報告されている。それ以降、多点測定法における係数行列の計算アルゴリズムとして次の 4 種類が提案されている。

- (a) マトリックス法 I [1][4]
- (b) マトリックス法 II [9][48]
- (c) マトリックス法 III [49]
- (d)  $\lambda$  関数法 [10][11]

ただし、これらの方法を論理的に調べることにより、(b)、(c) の方法は通常静電プローブの測定には適用できないことが明らかにされている [1, 50, 51]。

マトリックス法 I は帯電電荷とプローブ出力を直接関係付けて数値計算を行うため、以下では簡単のため「直接法」と呼ぶことにする。

次に直接法 (マトリックス法 I) と  $\lambda$  関数法の計算アルゴリズムについて述べる。

#### 直接法

この方法では、絶縁物表面の真電荷とその真電荷によってプローブに誘起される電荷との間の静電的な関係をそのまま (直接) 模擬して数値電界計算を行い、係数行列を計算する。そのため「直接法」と呼ぶ。

帯電電荷分布を数値離散化して表現するために、測定面積全体を  $n$  個の区分に分割し、 $j$  番目の区分の帯電電荷密度を  $x_j$  とする。また、ここでは各区分において帯電電荷密度

は一定であるとする。  $m$  点の位置におけるプローブ出力のうち、  $i$  番目の位置での出力（誘起される電荷量）を  $b_i$  とすると、重ね合わせの理から次式が成り立つ。

$$b_i = \sum_{j=1}^n A(i,j)x_j \quad (4-7)$$

$m$  点の位置でプローブ出力を測定すれば、(4-7)式に基づいた逆行列演算あるいは最小二乗法を用いて帯電電荷密度  $x_j$  を求めることができる。

直接法を用いて係数値を計算する場合、各区分に単位電荷をセットして電界計算を行い、センサの誘起電荷量を計算すればよい。この方法では、プローブ位置が  $m$  通り、単位電荷をセットする区分が  $n$  通り存在するので、 $m \times n$  回の電界計算を要する。しかし、表面電荷法の方程式を成す係数行列の逆行列を利用することにより、一つのプローブ位置に対して一回の電界計算で  $n$  個の係数値を計算することが可能となる。結局、係数行列の計算に必要な電界計算回数は  $m$  回となる。

#### λ 関数法

この方法は絶縁物表面の帯電電荷（真電荷）を  $dQ$ 、プローブ（のセンサ）に誘起する電荷を  $dq$  とし、次の関係式をもとにする。

$$dq = -\lambda dQ \quad (4-8)$$

この比例定数が  $\lambda$ （ラムダ）関数と呼ばれるもので、無次元の量である。面積  $S$  の表面要素に電荷密度  $x$  の電荷がある場合、(4-8)式は

$$q = - \iint_S \lambda x ds \quad (4-9)$$

となる。さらに  $S$  内で  $x$  を一定とすると、

$$q = -x \iint_S \lambda ds \quad (4-10)$$

となる。一方、直接法では、 $j$  番目の区分の帯電電荷密度  $x_j$  と  $i$  番目の位置でのプローブ出力  $b_i$  との関係は、他の  $x$  を 0 として (4-7) 式から

$$b_i = A(i,j)x_j \quad (4-11)$$

となる。すなわち、(4-10)式は(4-7)式と本質的に同じである。

直接法と相違するのは係数値を表す  $\lambda$  関数が次の方程式で与えられ、センサ表面では  $\lambda = 1$ 、他の導体表面では  $\lambda = 0$ 、固体絶縁物表面（誘電体表面）では電束密度の法線方向が連続であるという境界条件で求められることである。

$$\text{div} (\epsilon \text{ grad } \lambda) = 0 \quad (4-12)$$

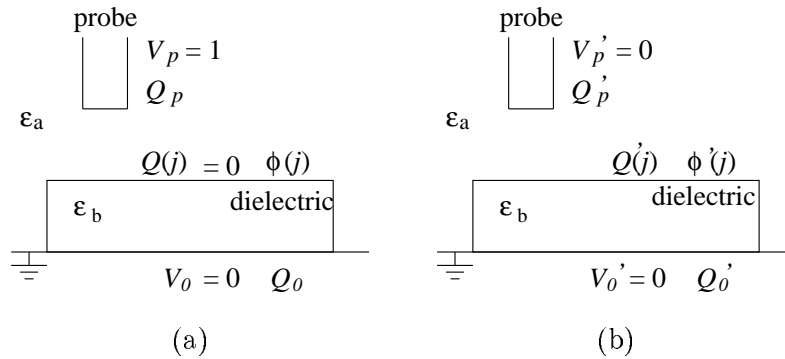


図 4-10: 複合誘電体場での相反定理

(4-12) 式は静電場のラプラス方程式である。すなわち  $\lambda$  関数はセンサの電位とそれにより絶縁物表面に生じる電位との比を表す関数である。

$\lambda$  関数法では、各プローブ位置において 1 回の電界計算を行い、各区分の表面電位を積分することにより係数値を計算することができる。したがって、全ての係数値を計算するのに要する電界計算回数は  $m$  回となる。

#### 直接法と $\lambda$ 関数法の等価性

図 4-10 のように、導体（プローブ）と誘電体（固体絶縁物）が存在する複合誘電体場において、センサの電位を  $V_p$ 、誘起電荷を  $Q_p$ 、区分  $j$  での絶縁物表面の電位を  $\phi(j)$ 、帯電電荷（真電荷）を  $Q(j)$ 、接地面の電位、電荷をそれぞれ  $V_0$ 、 $Q_0$  とする。ここで二つの系 (a)  $V_p = 1$ 、 $Q(j) = 0$  と系 (b)  $V_p = 0$ 、 $Q(j) = Q'(j)$  に対してグリーンの相反定理を用いると

$$V_p Q'_p + \sum \phi(j) Q'(j) + V_0 Q'_0 = V'_p Q_p + \sum \phi'(j) Q(j) + V'_0 Q_0 \quad (4-13)$$

が得られる。(4-13) 式に対して系 (a)、系 (b) の条件を代入すると次式が得られる。

$$Q'_p = - \sum \phi(j) Q'(j) \quad (4-14)$$

この式は (4-7) 式あるいは (4-8) 式に相当し、 $\lambda$  関数は系 (a) でのセンサ電位と絶縁物表面の電位の比に等しいことを意味する。

なお、複合誘電体場における相反定理は分極電荷を考慮せずに真電荷だけを対象として成り立つ [52, 53]。

## 係数行列 $A$ の計算に必要な計算コスト

帯電電荷測定法では絶縁物表面の電荷を測定対象としているので、表面電荷法のような境界分割型の解法が適している。しかし、境界分割型の電界計算法では方程式が密行列になるため、通常解法を使用すると、未知数の個数  $N$  に対して  $O(N^2)$  または  $O(N^3)$  の演算量と  $O(N^2)$  の記憶容量とを必要とする。一方、帯電電荷分布を表現するための帯電区分数  $n$  (測定点数は  $m$  とする) を増加させるには、電界計算用のメッシュパターンの細分割が必要であり未知数の個数  $N$  の増加につながる。このとき未知数の個数と帯電区分数とは  $N = O(n)$  の関係にある。また、係数行列  $A$  を計算するには、各測定点位置に対して電界計算を行う必要があり  $m$  回の電界計算を要する (測定対象が形状対称性を有する場合には、例えば  $m^{1/2}$  のオーダーに計算回数を削減できる)。逆計算の安定化のためには  $m > n$  であるのが望ましいがせいぜい数倍であるので  $m = O(n)$  である。結局、帯電区分数  $n$  の場合の係数行列の計算には  $m \times O(N^3) = O(n^4)$  の演算量と、 $O(N^2) = O(n^2)$  の記憶容量とを必要とし、係数行列に必要な計算コストが非常に高い。この計算コストをいかにして削減するかが帯電電荷測定法の実用化、汎用化に向けての課題の一つである。

計算コストを低減するための方法として次の 2 つが考えられる。

- (1) 多数のセンサ (アレイ型プローブと呼ぶ) を設けることで、1 回の測定で複数の測定値を得るようにする。例えば、 $m$  個のセンサで同時測定を行うことが可能である場合 (原理的には可能である) は、1 回の電界計算で  $A$  の全係数値を計算することができる。この場合、帯電区分数  $n$  の係数行列  $A$  の計算に必要な演算量、記憶容量はそれぞれ  $O(n^3)$ 、 $O(n^2)$  となる。ただし、計算速度の面では計算コストを抑えることができるが、電界計算時に必要な記憶容量は改善されないため、使用する PC のメモリ容量で帯電区分数  $n$  の限界値が決まることになる。なお、文献 [54] においてアレイ型プローブを用いてアクリル板上の電位分布の可視化を行った結果が報告されているが、厚板試料に対する適用例は見当たらない。
- (2) 電界計算に高速解法である FMM-SCM (あるいは FMM-BEM) を適用する。FMM の演算量、記憶容量はともに  $O(N)$  であり、帯電区分数  $n$  の係数行列  $A$  の計算に必要な演算量、記憶容量をそれぞれ  $O(n^2)$ 、 $O(n)$  に低減することが可能となる。FMM を適用した場合は計算速度、記憶容量の両面で計算コストを改善することができる。

ただし、アレイ型プローブによる計算コストの低減化では、電界計算時の係数行列の逆行列の使用が不可欠であり、アレイ型プローブと FMM を併用した場合は、アレイ型プ

ローブの適用による計算コストの低減化はできない。4.8 節においてアレイ型プローブを使用した帯電電荷測定の数値シミュレーションを行った結果について述べる。また第 6 章において FMM を適用して帯電区分数を増加させたときの結果について述べる。

### 4.3 直接法と $\lambda$ 関数法の係数値の比較

直接法と  $\lambda$  関数法は理論的には同じ係数行列を与える。しかし、数値計算を行うと境界条件が異なるために数値計算結果では両者の間に相違を生じる。帯電電荷分布は多点の測定値と係数行列から逆計算によって求められるが、逆計算で得られる解は不安定になりやすく、係数行列の僅かな誤差が逆計算結果に大きな相違を与える可能性がある。したがって、できるだけ精度の高い係数行列を計算することは非常に重要な課題である。しかし、これまで直接法と  $\lambda$  関数法を比較することにより、係数値の計算精度について詳しく検討したという報告はされていない。文献 [11] では、文献 [4] のブロック状絶縁物の帯電電荷測定を行った配置に対して、 $\lambda$  関数法を適用し直接法との比較を行っている。しかし、三次元の測定配置に対して、プローブ位置毎に電界計算を行うのではなく、プローブを中心とした回転対称配置に対して計算した 1 種類の  $\lambda$  関数を全てのプローブ位置で代用しており、精密な比較は行われていない。

本節では、まずブロック状絶縁物の帯電電荷測定配置を単純化した計算モデルを対象として、直接法と  $\lambda$  関数法を用いて計算した係数値の原理的な比較を行った結果について述べる。次に実際の帯電電荷測定に使用された静電プローブ形状を有する配置を対象として、二つの方法の比較を行った結果について述べる。

#### 4.3.1 原理的な比較

##### 計算配置

使用した計算配置を図 4-11(a) に示す。この配置は電力中央研究所で実際に帯電電荷測定に用いられた配置に近いが、ここでは直接法と  $\lambda$  関数法との原理的な比較を目的としており、計算配置を単純化するためにプローブはガード電極およびリード線を除いてセンサ部分のみとした。センサは  $5 \times 5 \text{ mm}^2$  の正方形で導体平板とし、固体絶縁物は上下面が  $25 \times 25 \text{ mm}^2$  の正方形で、厚さ 10 mm、比誘電率は 5.0 とした。プローブは絶縁物の上方 3 mm の距離に配置した。

帯電電荷は絶縁物上面だけに存在するとし、図 4-11(b) に示すように  $5 \times 5 \text{ mm}^2$  の 25 区分に分割し、1 ~ 25 の帯電区分番号を  $j$  で表す。また、図 4-11(b) は測定位置番号  $i$  も表しており、センサの中心が各区分の中心と一致する位置を測定位置とした。電界計算

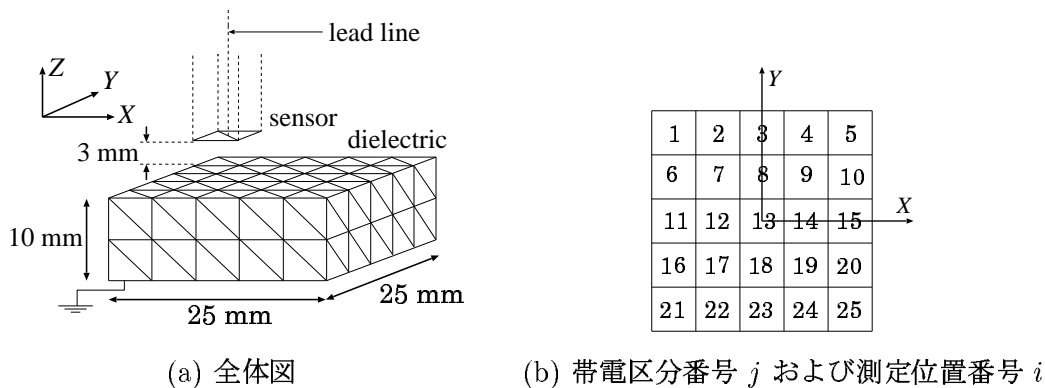


図 4-11: 原理的な比較に用いた計算配置

には、計算対象を三角形要素を用いて形状を模擬し要素内の電荷密度を一定とする、零次要素を用いた零次三角形表面電荷法を使用した。

### 零次表面電荷法による計算

図 4-11 に示す三角形分割で、零次三角形表面電荷法を用いて直接法と  $\lambda$  関数法それぞれの方法による係数値を比較したところ、最も値の大きい  $A(1, 1)$  で二つの方法の相違は約 12% であった。図 4-11 の分割はかなり粗い三角形分割であるので、分割を倍、すなわち三角形数を 4 倍として計算したところ、直接法、 $\lambda$  関数法ともに  $A(1, 1)$  の値は増大したが相対的な相違はほとんど変化しなかった。このように二つの方法で相違が生じる理由として、 $\lambda$  関数法での電位の積分点を三角形の重心点のみの 1 点としていることが考えられたので、 $5 \times 5 \text{ mm}^2$  の区分内の電位を詳細な積分によって計算したが、結果はほとんど変わらなかった。

そこで、以下のように様々な分割を用いて係数値を計算し、二つの方法の相違について検討した。以下に述べる  $n_s$  の値は、電界計算時に  $5 \times 5 \text{ mm}^2$  のセンサ表面で使用した未知数の個数を表す。

1. 一様分割 — 同じ大きさの三角形で分割
  - A :  $n_s = 2$  (図 4-11 の分割)
  - B :  $n_s = 8$  (case A に対して 4 倍の分割数)
2. センサのみ細分割 — 絶縁物表面は case B の分割を使用
  - C, D, E, F :  $n_s$  はそれぞれ 18, 32, 50, 72
3. 不平等分割 — 電界の集中するエッジ部分を細分割
  - G : エッジ部要素の長さを隣接要素の長さの 1/10 とし、 $n_s = 50$

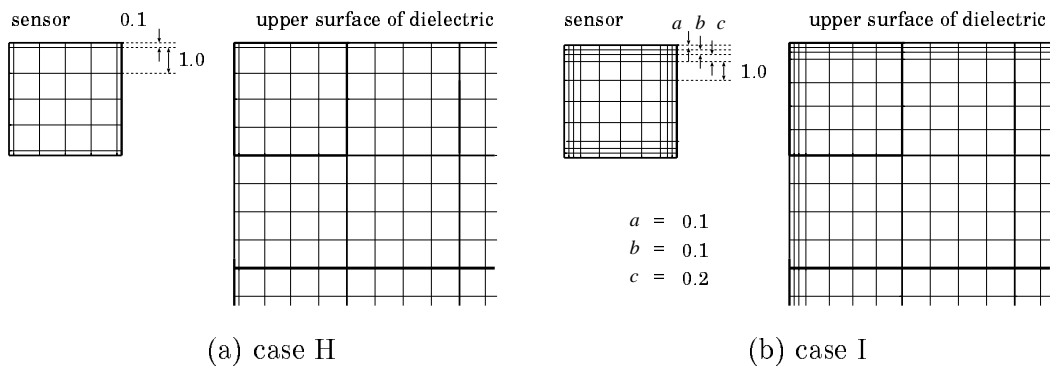


図 4-12: 分割状態

H: 同上,  $n_s = 72$  (図 4-12(a) の分割)

I: エッジ部分から 0.1, 0.1, 0.2, 1, ... の比率で細分割し,  $n_s = 200$  (図 4-12(b) の分割)

センサと絶縁物上面の一部の分割状態を, case H および I について図 4-12 に示す。ただし上面だけではなく, 側面にも同様の分割パターンを適用した。

### 計算結果

真電荷とセンサがともに絶縁物上面の角部に存在する場合, すなわち最も値の大きい係数値である  $A(1, 1)$  を, 直接法および  $\lambda$  関数法を用いて計算した結果を case A ~ I について表 4-3(a) に示す。また真電荷とセンサがともに中央部に存在する場合である  $A(13, 13)$ , 真電荷とセンサが最も離れている場合, つまり最も値の小さい係数値である  $A(1, 25)$  の二つの方法による係数値を表 4-3(b), 表 4-3(c) に示す。表において,  $n_s$ ,  $N$  はそれぞれセンサの未知数の個数と未知数の総数を表す。また, 係数値の真値がわからないため二つの方法による係数値の平均値を基準として相違を計算した。

分割を細かくしていくと, だいたいにおいて  $A(1, 1)$ ,  $A(13, 13)$ ,  $A(1, 25)$  は二つの方法のどちらでも値が増大する。直接法の場合, case I の  $A(1, 1)$  は case A の 1.30 倍である。 $\lambda$  関数法においてはこれより変化は少ないが, case I は case A の 1.19 倍である。直接法と  $\lambda$  関数法を比べると, 先に述べたように図 4-11 の分割 (case A) では  $A(1, 1)$  は約 12% 相違し, 分割数を 4 倍に増やした場合両方法とも計算値は約 10% ずつ増加するが, 相対的な相違はほとんど変化しない。またセンサのみを細かく分割した case C ~ F でも両方法とも  $A(1, 1)$  の値は増加するが, 相対的な相違は 13 ~ 14% でほとんど変わらない。エッジ部分を不平等に分割した case G ~ I では, 二つの方法の計算値はかなり

表 4-3: 係数値の比較 (零次要素)

(a)  $A(1,1)$

case	$n_s$	$N$	直接法 / $10^{-1}$	$\lambda$ 関数法 / $10^{-1}$	相違 / %
一様分割					
A	2	132	1.5334	1.7355	12.4
B	8	528	1.7012	1.9237	12.3
センサのみ細分割					
C	18	538	1.7423	1.9890	13.2
D	32	552	1.7665	2.0238	13.6
E	50	570	1.7823	2.0455	13.8
F	72	592	1.7935	2.0603	13.9
不平等分割					
G	50	1580	1.9362	2.0678	6.6
H	72	2624	1.9589	2.0668	5.4
I	200	3840	2.0009	2.0629	3.1

(b)  $A(13,13)$

case	直接法 / $10^{-1}$	$\lambda$ 関数法 / $10^{-1}$	相違 / %
一様分割			
A	1.3376	1.3436	0.45
B	1.3948	1.4225	2.0
センサのみ細分割			
C	1.4286	1.4700	2.9
D	1.4488	1.4952	3.2
E	1.4621	1.5110	2.2
F	1.4715	1.5217	3.4
不平等分割			
G	1.5087	1.5323	1.6
H	1.5131	1.5273	0.9
I	1.5199	1.5344	0.9



(c)  $A(1, 25)$ 

case	直接法 / $10^{-3}$	$\lambda$ 関数法 / $10^{-3}$	相違 / %
一様分割			
A	4.6226	5.3524	14.6
B	5.5109	6.1238	10.5
センサのみ細分割			
C	5.7584	6.3924	10.4
D	5.8907	6.5378	10.4
E	5.9732	6.6289	10.4
F	6.0296	6.6913	10.4
不平等分割			
G	6.5195	6.8521	5.0
H	6.6026	6.8827	4.2
I	6.7500	6.8942	2.1

接近するが、最も分割数の多い case I ( $n_s = 200$ ,  $N = 3840$ ) でも相違は 3.1 % である。

$A(13, 13)$  および  $A(1, 25)$  についても分割数に対する値の変化の傾向は  $A(1, 1)$  の場合と同じで、だいたいにおいて増加する。 $A(13, 13)$  の場合は、 $A(1, 1)$  に比べて二つの方法の相違は小さく、case H, I で 0.9 % になる。 $A(1, 25)$  では、値そのものは  $A(1, 1)$  の約  $1/30$  であるが、分割数に対する相対的な相違の変化は  $A(1, 1)$  と良く似ており、エッジ部を細分割すると二つの方法の値は近づくが、case I でも 2.1 % まで至る程度であった。

#### 部分非適合一次要素表面電荷法による計算

計算の精度を向上させるために、要素内の電荷密度を座標の一次関数で表現する一次要素を用いた三角形表面電荷法により電界計算を行った。零次要素のときと同様に、計算モデルに対して様々な分割を用いて直接法と  $\lambda$  関数法の比較を行った。図 4-11 に示す分割を case A とし、case B, C, D は case A に対してそれぞれ 4, 9, 16 倍の分割数とした (一様分割)。case G, H, I は 零次要素のときと同じ分割パターンとした。ただし、case G, H においてエッジ部要素の長さの隣接要素の長さに対する比を 0.5 とした。case I については図 4-12(b) の  $a$ ,  $b$ ,  $c$  の値をそれぞれ 0.4, 0.4, 0.5 とした。

## 計算結果

$A(1, 1)$ ,  $A(13, 13)$ ,  $A(1, 25)$  の直接法と  $\lambda$  関数法の係数値を表 4-4 (a) ~ (c) に示す。表の書式は表 4-3 のときと同じとする。ただし、電荷密度表現関数を一次関数とした場合は、直接法の計算において真電荷をセットした区分とその周りの区分との境界において非適合要素を使用しており、直接法と  $\lambda$  関数法の計算に使用する未知数の個数がそれぞれ異なる。表に示した未知数の個数は、直接法の計算に使用した値である。

一様分割である case A ~ D において、 $A(1, 1)$ ,  $A(13, 13)$  の二つの方法の値は、直接法では分割数の増加とともに大きくなり、一方  $\lambda$  関数法では分割数の増加とともに小さくなって、両方法の値はともに近づく。case D で二つの方法の相違は  $A(1, 1)$ ,  $A(13, 13)$  とともに 2 % 程度になる。エッジ部分を細分割した場合、case I のときに最も二つの方法の値は近づき、相違は  $A(1, 1)$  で 0.0972 %,  $A(13, 13)$  で 2.15 % である。

$A(1, 25)$  は分割数の増加にしたがい、両方法の計算値はともに増加し、両方法の相違は case B ~ D で約 0.2 ~ 0.4 % 程度になる。しかし、エッジ部分を細分割した case G, H, I では  $\lambda$  関数法に比べて直接法の値の増加が大きくなり、二つの値の相違も大きくなって case I で 1.71 % になる。これは case D の相違より大きい。一般にエッジ部分を細分割するほうが計算の精度は向上するので、case D の値よりも case I のほうが真値に近いと推測される。

センサと真電荷がともにエッジ部に位置する  $A(1, 1)$  の場合の二つの方法の相違は、case I において 1 % を下回る。しかし、センサと真電荷がともに中央部にある  $A(13, 13)$

表 4-4: 係数値の比較 (一次要素)

(a)  $A(1, 1)$

case	$n_s$	$N$	直接法 / $10^{-1}$	$\lambda$ 関数法 / $10^{-1}$	相違 / %
一様分割					
A	6	236	1.7857	2.1174	17.0
B	19	634	1.9335	2.0855	7.56
C	34	1188	1.9823	2.0632	4.00
D	51	1826	2.0060	2.0536	2.35
不平等分割					
G	70	1495	2.0634	2.0657	0.111
H	91	2182	2.0679	2.0549	0.631
I	195	2990	2.0586	2.0566	0.0972

(b)  $A(13, 13)$ 

case	直接法 / $10^{-1}$	$\lambda$ 関数法 / $10^{-1}$	相違 / %
一様分割			
A	1.4159	1.9637	32.4
B	1.4720	1.6105	8.99
C	1.4901	1.5518	4.06
D	1.4999	1.5351	2.32
不平等分割			
G	1.5150	1.5732	3.77
H	1.5180	1.5510	2.15
I	1.5228	1.5559	2.15

(c)  $A(1, 25)$ 

case	直接法 / $10^{-3}$	$\lambda$ 関数法 / $10^{-3}$	相違 / %
一様分割			
A	5.9094	5.7544	2.66
B	6.4975	6.4844	0.202
C	6.6719	6.6553	0.249
D	6.7533	6.7307	0.335
不平等分割			
G	6.9746	6.7401	3.42
H	6.9796	6.7904	2.75
I	6.9496	6.8320	1.71

やセンサと真電荷が最も離れた位置関係にある  $A(1, 25)$  では、case I においても 1% を越える差がある。次に case I の分割をさらに工夫して二つの方法による係数値を計算した。すなわち、直接法で真電荷を配置する  $5 \times 5 \text{ mm}^2$  の区分内および隣接区分においても真電荷に近い部分を細分割し、この分割を case I' とした。また  $\lambda$  関数法にもこの分割を適用した。case I' の計算結果を表 4-5 に示す。case I' では直接法の値はあまり変化しないが、 $\lambda$  関数法の値が小さくなり、 $A(1, 1)$  の相違は大きくなったが、 $A(13, 13)$  および  $A(1, 25)$  の相違は小さくなり、特に  $A(13, 13)$  の相違は 0.974% になった。

直接法と  $\lambda$  関数法のどちらの係数値の計算精度が高いのかは、真値がわからないためにこれらの結果からは判断しがたい。しかし、case I' の計算結果では、対角要素である

表 4-5: case I' の係数値の比較

係数	直接法	$\lambda$ 関数法	相違 / %
$A(1, 1)$	$2.0550 \times 10^{-1}$	$2.0490 \times 10^{-1}$	0.292
$A(13, 13)$	$1.5231 \times 10^{-1}$	$1.5380 \times 10^{-1}$	0.974
$A(1, 25)$	$6.9330 \times 10^{-3}$	$6.8342 \times 10^{-3}$	1.44

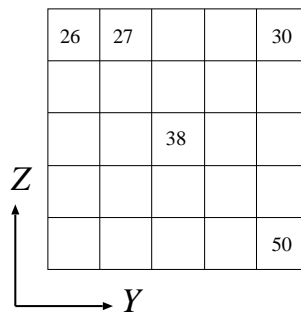


図 4-13: プローブと反対側の絶縁物側面の帯電区分番号  $j$

$A(1, 1)$ ,  $A(13, 13)$  において直接法と  $\lambda$  関数法との相違が 1 % 以内となり、二つの方法の係数値はかなり真値に近いと考えられる。

#### 4.3.2 実用プローブでの比較

##### 計算内容

図 4-3 に示した配置を対象として、直接法と  $\lambda$  関数法の比較を行った。絶縁物（比誘電率 4.0）は下面が接地面から 30 mm となる位置に配置し、センサの電位は零とした。帯電電荷はプローブと対向している側面に加えて、その側面に対して裏側に位置する側面にも存在するとし、図 4-4 に加えて図 4-13 に示すようにプローブと反対側に位置する側面を  $5 \times 5 \text{ mm}^2$  の区分に 25 分割し、帯電電荷分布を全体として 50 区分（区分番号  $j$ ）に分割して表現した。 $j = 26$ ,  $j = 30$  はそれぞれ  $j = 1$ ,  $j = 5$  の裏側に位置する。数値電界計算に使用したメッシュパターンについては、静電プローブのセンサやガード電極の分割は 4.1 節のときと同じとした。各係数値の計算に使用した絶縁物側面のメッシュパターンを図 4-14(a) ~ (c) に示す。図にはプローブと対向する側面のみを示しているが、他の側面ではプローブから離れるにつれて要素が粗くなるように分割した。

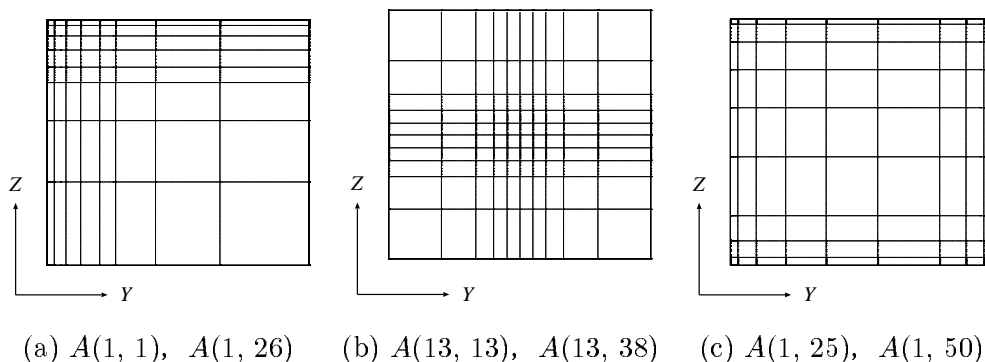


図 4-14: プローブと対向する側面のメッシュパターン

### 計算結果および考察

直接法およびλ関数法により計算した係数値を表 4-6 に示す。 $A(1, 1)$  はプローブと帯電電荷がともに絶縁物側面の角に位置するときの値、 $A(13, 13)$  はプローブと帯電電荷がともに側面の中央部に位置するときの値である。 $A(1, 1)$ 、 $A(13, 13)$  における相違はそれぞれ 0.751 %、0.163 % であった。これらはプローブと帯電電荷が対向した位置関係にあり、係数行列の対角要素を形成する。対角要素は他の要素より大きな値となるので、対角要素の計算精度は逆行列の計算結果に大きく影響する。したがって  $A(1, 1)$  や  $A(13, 13)$  の値の相違が 1 % 以下であることは非常に重要である。プローブと帯電電荷が絶縁物側面の対角に位置するときの  $A(1, 25)$  における相違は 1.77 % で、 $A(1, 1)$  や  $A(13, 13)$  の相違に比べて大きくなった。しかし  $A(1, 25)$  の相違は  $A(1, 1)$  の約 2 倍であるが、係数値の値自体は  $A(1, 1)$  の値の 1/10 以下である。プローブの位置に対して絶縁物の反対側の側面に帯電電荷が存在するときの係数である  $A(1, 26)$ 、 $A(13, 38)$ 、 $A(1, 50)$  においても、相違は 0.24 % ~ 1.8 % の範囲で直接法とλ関数法の値は一致した。

表 4-6: 直接法とλ関数法の比較

係数	$N$	直接法	λ関数法	相違 / %
$A(1, 1)$	4129	$1.4588 \times 10^{-1}$	$1.4698 \times 10^{-1}$	0.751
$A(13, 13)$	4180	$1.2269 \times 10^{-1}$	$1.2289 \times 10^{-1}$	0.163
$A(1, 25)$	4327	$1.2935 \times 10^{-2}$	$1.3166 \times 10^{-2}$	1.77
$A(1, 26)$	4353	$1.6730 \times 10^{-2}$	$1.6871 \times 10^{-2}$	0.839
$A(13, 38)$	4860	$1.9249 \times 10^{-2}$	$1.9295 \times 10^{-2}$	0.238
$A(1, 50)$	4575	$1.1452 \times 10^{-2}$	$1.1656 \times 10^{-2}$	1.77

## 4.4 係数値誤差および測定誤差の推定分布への影響

直接法および $\lambda$ 関数法を用いて計算した係数行列は理論的には一致するが、数値電界計算の結果には必ず相違を生じる。前節(4.3.2節)において、直接法と $\lambda$ 関数法それぞれの方法を適用して計算した係数値の比較を行ったが、いずれの係数値においても2%以下ではあるが差を生じた。帯電電荷測定では静電プローブによる測定値 $\mathbf{b}$ と計算した係数行列 $A$ から逆計算によって帯電電荷分布 $\mathbf{x}$ を推定する。このとき、係数行列の計算誤差 $\delta A$ や測定誤差 $\delta \mathbf{b}$ に起因する推定誤差 $\delta \mathbf{x}$ は、逆計算であるために $\delta A$ や $\delta \mathbf{b}$ の誤差レベルに比べて非常に大きくなることも稀ではない。

本節では、既知の帯電電荷分布を対象として、係数値誤差や測定誤差として典型的な誤差を与えた場合に、推定した帯電電荷分布がどの程度変動するのかを検討した。

### 4.4.1 計算配置

本節で使用した計算配置は図4-3とし、固体絶縁物は接地面の上方30mmの位置に配置した( $h = 30$  mm)。また、帯電電荷はプローブと対向する側面のみが存在するものとし、図4-4のように帯電区分番号 $j$ を定め、各帯電区分内では電荷密度は一定とした。また、静電プローブの測定点数も帯電区分数と同じ25点とし、測定位置はセンサの中心と各帯電区分の中心が一致する位置とした。また測定位置番号 $i$ は図4-4と同じとした。本節では、係数行列の優対角性を強くするために、センサと絶縁物表面との距離は3mmとするが、ガード電極と絶縁物表面との距離(図4-3(b)の $h_g$ )は2mmとした。

数値電界計算に使用した静電プローブのセンサやガード電極のメッシュパターンは4.1節のときと同じとした。プローブと対向する絶縁物側面のメッシュパターンを図4-15に示す。他の側面はプローブから離れるにつれて要素が粗くなるように分割した。

この配置に対して、直接法と $\lambda$ 関数法それぞれの方法により係数行列の計算を行った。直接法と $\lambda$ 関数法により求めた係数行列をそれぞれ $A_d$ 、 $A_\lambda$ で表す。 $A_d$ と $A_\lambda$ の対角要素の相違は0.78%~1.30%であり、全ての係数値での相違の最大値は1.62%( $i = 1$ ,  $j = 25$ )であった。ただし、ここで言う相違は $A_d$ の係数値を基準として $A_d$ と $A_\lambda$ の相対誤差の絶対値を計算した。 $A_d$ 、 $A_\lambda$ の計算時に使用した未知数の個数はそれぞれ4246個、3934個であった。直接法の計算では、1つのプローブ位置での1回の電界計算で $A_d$ の一行の係数値を全て計算するために、帯電区分の境界上で非適合要素の輪郭点を使用したため、 $\lambda$ 関数法のときに比べて未知数の個数が多くなった。

また本節の帯電電荷測定の数値シミュレーションにおいて、絶縁物表面に仮定した帯電電荷分布 $\mathbf{x}$ には次の4通りの分布を用いた。

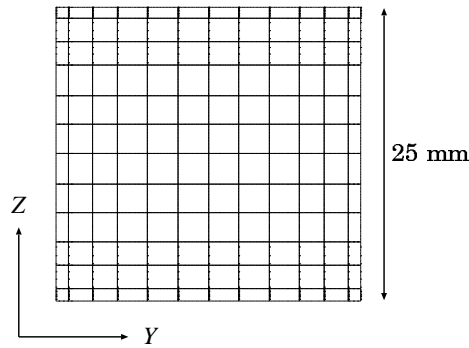


図 4-15: プローブと対向する側面のメッシュパターン

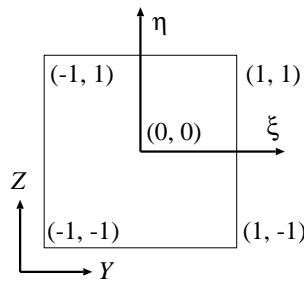


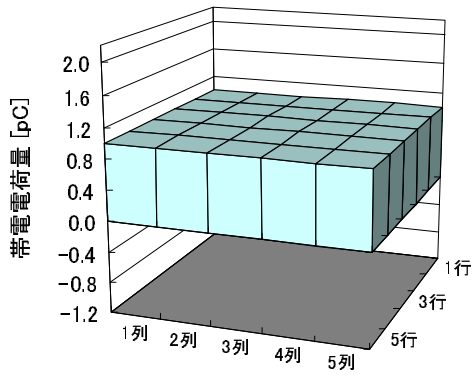
図 4-16: プローブと対向する側面に設定した正規化座標系

- (a) 側面全体が一様に帯電している場合 ( $x_j = 1 \text{ pC}$  ( $j = 1 \sim 25$ ))
- (b)  $j = 13$  の区分のみが帯電している場合 ( $x_{13} = 1 \text{ pC}$ )
- (c)  $j = 12$  の区分が正に帯電し,  $j = 14$  の区分が負に帯電している場合 ( $x_{12} = 1 \text{ pC}$ ,  $x_{14} = -1 \text{ pC}$ )
- (d) 側面全体が正に帯電し, 帯電電荷密度が座標の一次関数で変化する場合

(a) ~ (c) では帯電電荷密度は  $4.0 \text{ pC/cm}^2$  とした。帯電電荷分布 (d) は次のようにセットした。図 4-16 に示すように側面に対して正規化座標  $\xi, \eta$  を定める ( $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ )。  $(\xi, \eta) = (-1, -1)$  が  $(Y, Z) = (-12.5 \text{ mm}, 30 \text{ mm})$  に一致する。正規化座標を用いて側面の帯電電荷密度  $\sigma$  を次式で与えた。

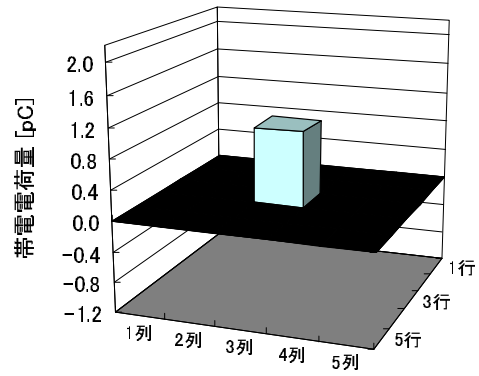
$$\sigma = (1 - \xi)(1 + \eta) \quad [\text{pC/cm}^2] \quad (4-15)$$

(4-15) 式に従って変化する電荷密度から各区分  $j = 1 \sim 25$  の電荷量を計算し, その値を分布 (d) としてセットした。仮定した帯電電荷分布の様子を図 4-17(a) ~ (d) に示す。図



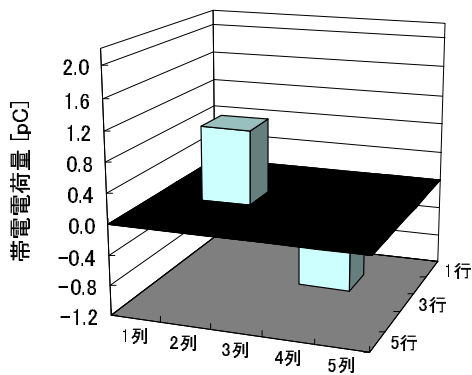
	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2行	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
3行	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
4行	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
5行	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

(a) 帯電電荷分布 (a)



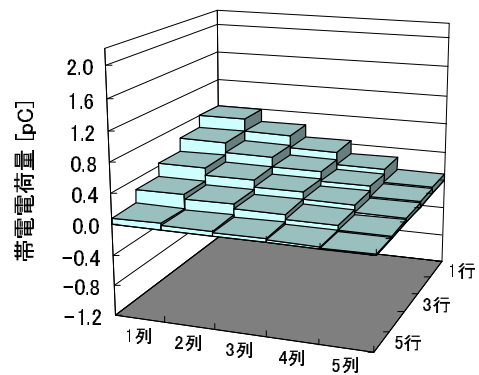
	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2行	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3行	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
4行	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5行	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

(b) 帯電電荷分布 (b)



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2行	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3行	0.00	1.00	0.00	-1.00	0.00
4行	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5行	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

(c) 帯電電荷分布 (c)



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.81	0.63	0.45	0.27	0.09
2行	0.63	0.49	0.35	0.21	0.07
3行	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05
4行	0.27	0.21	0.15	0.09	0.03
5行	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01

(d) 帯電電荷分布 (d)

図 4-17: 絶縁物表面に仮定した帯電電荷分布  $x$

では 1 行が  $j = 1 \sim 5$  の区分を 2 行が  $j = 6 \sim 10$  の区分を表しており, 3, 4, 5 行についても同様にして表示している。

また静電プローブによる測定値は実際に測定した値ではなく,  $b = A_d x$  として計算し



た値を使用した。ただし、計算誤差を含まない係数行列  $A$  を  $A = A_d$  と仮定した。

#### 4.4.2 係数値誤差の推定分布への影響

計算誤差を含む係数行列  $\bar{A} = A + \delta A$  として、次の 2 通りのケースを対象とした（ここでは、 $\delta b = 0$ ）。

- (i) 対角要素  $\bar{A}_{ii}$  ( $i = 1 \sim 25$ ) の中で  $k$  行  $k$  列の一つの係数値のみが  $-5\%$  の誤差を有し、それ以外の係数値誤差は零である場合 ( $\bar{A}_{kk} = 0.95 A_{kk}$ ,  $\bar{A}_{ij} = A_{ij}$  (ただし,  $i \neq k$  かつ  $j \neq k$ ))
- (ii) 誤差を有する係数行列に  $\lambda$  関数法により計算した係数行列を使用する場合 ( $\bar{A} = A_\lambda$ )

推定した帯電電荷分布  $x + \delta x$  は  $x + \delta x = \bar{A}^{-1} b = \bar{A}^{-1} A x$  として計算した。ケース (i) の誤差では、帯電電荷分布 (a), (b) の場合は  $k = 13$  とし、帯電電荷分布 (c), (d) の場合はそれぞれ  $k = 12$ ,  $k = 1$  とした。

帯電電荷分布 (a) に対して、ケース (i), (ii) の  $\bar{A}$  を用いて推定した帯電電荷分布を図 4-18 に示す。図 4-18(a) では  $j = 13$  で  $9\%$  の相違を、 $j = 13$  に隣接する区分において  $2\%$  の相違を生じた。図 4-18(b) では、 $A_d$  と  $A_\lambda$  の対角要素の相違が  $1.3\%$  以下であるのに対して最大で  $3\%$  の相違を生じた。

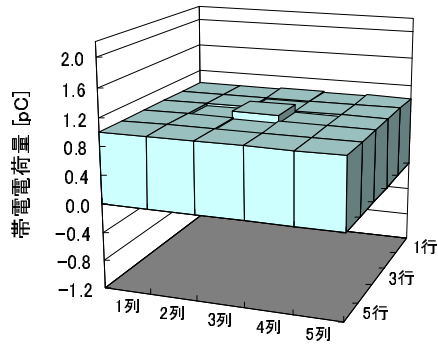
帯電電荷分布 (b), (c) の場合に推定した帯電電荷分布をそれぞれ図 4-19, 図 4-20 に示す。帯電電荷分布 (b), (c) に対して、ケース (i) の場合はそれぞれ  $j = 13$ ,  $j = 12$  において  $9\%$  の相違を生じ、ケース (ii) の場合はそれぞれ  $j = 13$ ,  $j = 12$  (または  $14$ ) において  $1\%$  の相違を生じた。ケース (i) の場合は帯電電荷分布 (a) のときと同程度の相違を生じたが、ケース (ii) の場合は分布 (a) の最大相違に対して局所的に帯電している場合は  $1/3$  の相違となった。

帯電電荷分布 (d) の場合に推定した帯電電荷分布を図 4-21 に示す。ケース (i) の場合は  $j = 1$  で約  $7\%$  の相違を生じ、隣接する  $j = 2$ ,  $j = 6$  において約  $3\%$  の相違を生じた。ケース (ii) の場合は  $0.1 \text{ pC}$  以上の区分で評価すると相違の最大値は  $2\%$  であった。

#### 4.4.3 測定誤差の推定分布への影響

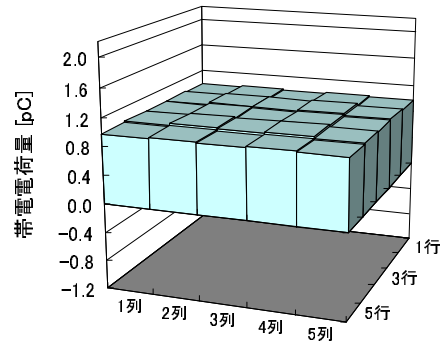
測定誤差  $\delta b$  として、次の 2 通りのケースを対象とした（ここでは、 $\delta A = 0$ ）。

- (i) 25 点の測定値の中で、測定位置番号  $i = k$  の測定値のみが  $-5\%$  の誤差を有する場合 ( $b_k + \delta b_k = 0.95 b_k$  かつ  $\delta b_i = 0$  ( $i \neq k$ ))



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2行	1.00	1.00	0.98	1.00	1.00
3行	1.00	0.98	1.09	0.98	1.00
4行	1.00	1.00	0.98	1.00	1.00
5行	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

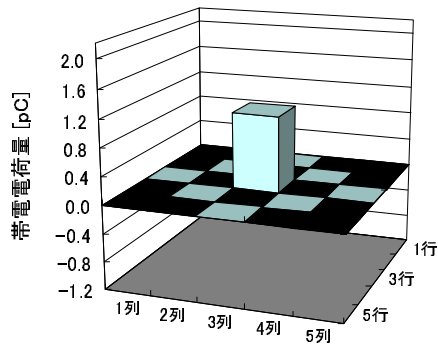
(a) ケース (i)



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.97	0.99	0.98	0.99	0.97
2行	0.99	1.01	1.00	1.01	0.99
3行	0.98	1.00	0.99	1.00	0.98
4行	0.99	1.01	1.00	1.01	0.99
5行	0.97	0.99	0.98	0.99	0.97

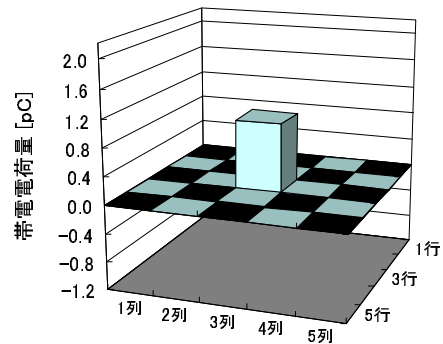
(b) ケース (ii)

図 4-18: 帯電電荷分布 (a) に対して推定した帯電電荷分布  $x + \delta x = \bar{A}^{-1} b$



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	-4.5E-04	-9.5E-04	2.7E-03	-9.5E-04	-4.5E-04
2行	-9.5E-04	1.5E-03	-2.3E-02	1.5E-03	-9.5E-04
3行	2.7E-03	-2.3E-02	1.09	-2.3E-02	2.7E-03
4行	-9.5E-04	1.5E-03	-2.3E-02	1.5E-03	-9.5E-04
5行	-4.5E-04	-9.5E-04	2.7E-03	-9.5E-04	-4.5E-04

(a) ケース (i)

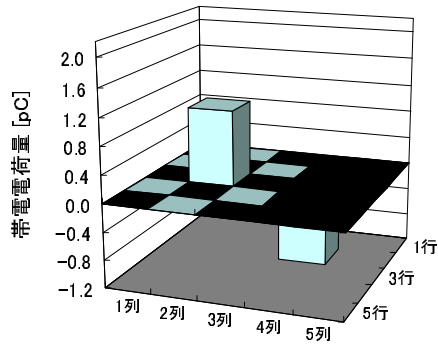


	1列	2列	3列	4列	5列
1行	-4.7E-04	5.0E-04	-1.6E-03	5.0E-04	-4.7E-04
2行	5.0E-04	-3.7E-03	6.5E-03	-3.7E-03	5.0E-04
3行	-1.6E-03	6.5E-03	0.99	6.5E-03	-1.6E-03
4行	5.0E-04	-3.7E-03	6.5E-03	-3.7E-03	5.0E-04
5行	-4.6E-04	5.0E-04	-1.6E-03	5.0E-04	-4.6E-04

(b) ケース (ii)

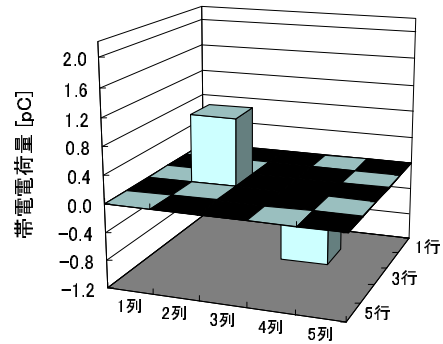
図 4-19: 帯電電荷分布 (b) に対して推定した帯電電荷分布  $x + \delta x = \bar{A}^{-1} b$

- (ii) 測定位置番号  $i = 1 \sim 25$  の測定値の中で、奇数位置番号の測定値が  $-5\%$  の誤差を有し、偶数位置番号の測定値が  $+5\%$  の誤差を有する場合 ( $b_i + \delta b_i = 0.95 b_i$  ( $i = 2k-1$  ( $k = 1 \sim 13$ )),  $b_i + \delta b_i = 1.05 b_i$  ( $i = 2k$  ( $k = 1 \sim 12$ )))



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	-1.1E-03	2.7E-03	-9.5E-04	-3.4E-04	-3.3E-04
2行	1.2E-03	-2.3E-02	1.5E-03	-8.2E-04	-2.6E-04
3行	-2.1E-02	1.09	-2.3E-02	-1.00	-9.7E-04
4行	1.2E-03	-2.3E-02	1.5E-03	-8.2E-04	-2.6E-04
5行	-1.1E-03	2.7E-03	-9.5E-04	-3.3E-04	-3.2E-04

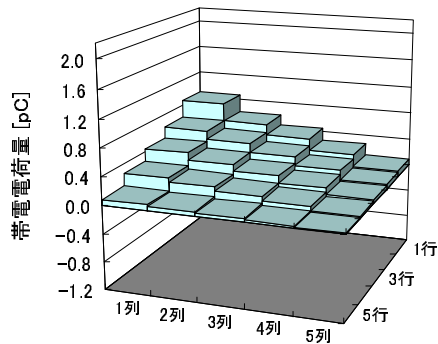
(a) ケース (i)



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	4.4E-04	-9.4E-04	2.4E-08	9.4E-04	-4.4E-04
2行	-4.5E-03	6.0E-03	-2.9E-08	-6.0E-03	4.5E-03
3行	5.4E-03	0.99	5.7E-08	-0.99	-5.4E-03
4行	-4.4E-03	6.0E-03	2.0E-08	-6.0E-03	4.4E-03
5行	4.4E-04	-9.4E-04	-8.2E-09	9.4E-04	-4.4E-04

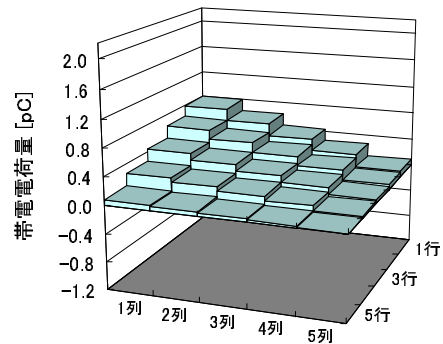
(b) ケース (ii)

図 4-20: 帯電電荷分布 (c) に対して推定した帯電電荷分布  $x + \delta x = \bar{A}^{-1} b$



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.87	0.61	0.45	0.27	0.09
2行	0.61	0.49	0.35	0.21	0.07
3行	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05
4行	0.27	0.21	0.15	0.09	0.03
5行	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01

(a) ケース (i)

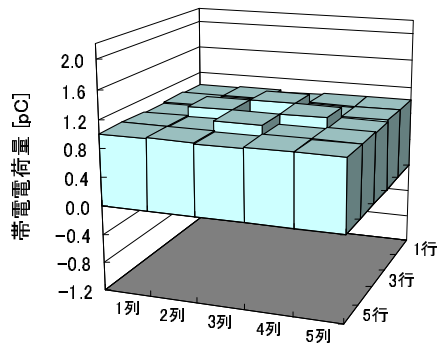


	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.79	0.62	0.44	0.27	0.09
2行	0.62	0.49	0.35	0.21	0.07
3行	0.44	0.35	0.25	0.15	0.05
4行	0.27	0.21	0.15	0.09	0.03
5行	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01

(b) ケース (ii)

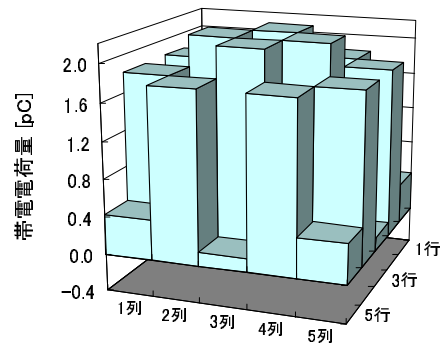
図 4-21: 帯電電荷分布 (d) に対して推定した帯電電荷分布  $x + \delta x = \bar{A}^{-1} b$

ケース (i) の  $k$  は、帯電電荷分布 (a), (b) の場合は  $k = 13$  とし、帯電電荷分布 (c), (d) の場合はそれぞれ  $k = 12$ ,  $k = 1$  とした。



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.00	1.01	0.98	1.01	1.00
2行	1.01	0.99	1.14	0.99	1.01
3行	0.98	1.14	0.45	1.14	0.98
4行	1.01	0.99	1.14	0.99	1.01
5行	1.00	1.01	0.98	1.01	1.00

(a) ケース (i)



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.42	1.82	0.14	1.82	0.42
2行	1.82	-0.10	2.16	-0.10	1.82
3行	0.15	2.16	-0.21	2.16	0.15
4行	1.82	-0.10	2.16	-0.10	1.82
5行	0.43	1.82	0.15	1.82	0.43

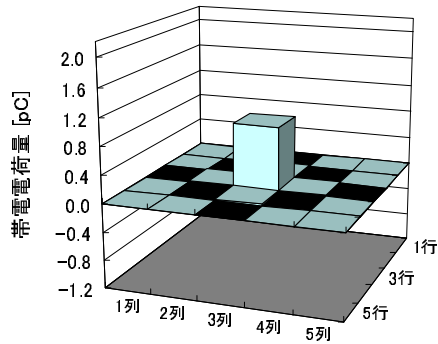
(b) ケース (ii)

図 4-22: 帯電電荷分布 (a) に対して推定した帯電電荷分布  $x + \delta x = A^{-1} (b + \delta b)$

帯電電荷分布 (a) の場合の、ケース (i), (ii) の測定誤差に対する推定帯電電荷分布を図 4-22 に示す。図 4-22(a) では、 $j = 13$  において 55 % の相違を生じ、その隣接区分においても 14 % の相違を生じた。また、ケース (ii) の場合は 5 % の測定誤差にも関わらず、100 % を超える相違を生じ一様帯電とは全く別の分布となった。帯電電荷分布 (b), (c) の場合の推定帯電電荷分布をそれぞれ図 4-23, 図 4-24 に示す。帯電電荷分布 (b) の場合の  $j = 13$  における相違は、ケース (i), (ii) それぞれにおいて 8 %, 12 % であった。帯電電荷分布 (c) の場合は、 $j = 12$  における相違はケース (i), (ii) それぞれにおいて 7 %, 8 % であった。帯電電荷分布 (b), (c) のように局所的に電荷が存在する場合は、一様帯電 (分布 (a)) の場合と比べて推定誤差が小さい結果となった。帯電電荷分布 (d) の場合の結果を図 4-25 に示す。ケース (i) の場合は  $j = 1$  において約 16 % の相違を生じ、その周りの区分  $j = 2, j = 6$  において約 7 % の相違を生じた。ケース (ii) の場合は  $j = 1$  の相違は約 30 % であり、 $j = 2, j = 6$  での相違はともに約 48 % であった。

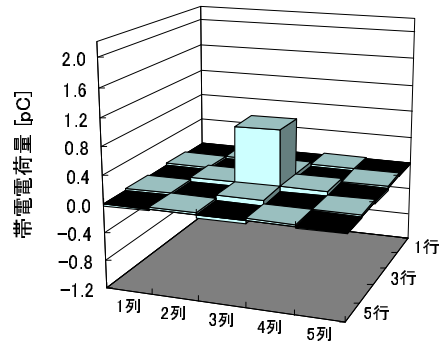
## 4.5 逆計算手法の検討

4.4 節で検討したように係数値誤差  $\delta A$  や測定誤差  $\delta b$  に起因する推定値誤差  $\delta x$  は、係数値誤差や測定誤差以上の値に拡大される。 $\delta A$  の要因としては数値電界計算の計算精度、数値電界計算時のモデリング誤差、帯電電荷分布の数値離散化時に生じるモデル化



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	4.2E-04	8.7E-04	-2.5E-03	8.7E-04	4.2E-04
2行	8.7E-04	-1.3E-03	2.1E-02	-1.3E-03	8.7E-04
3行	-2.5E-03	2.1E-02	0.92	2.1E-02	-2.5E-03
4行	8.7E-04	-1.3E-03	2.1E-02	-1.3E-03	8.7E-04
5行	4.1E-04	8.7E-04	-2.5E-03	8.7E-04	4.1E-04

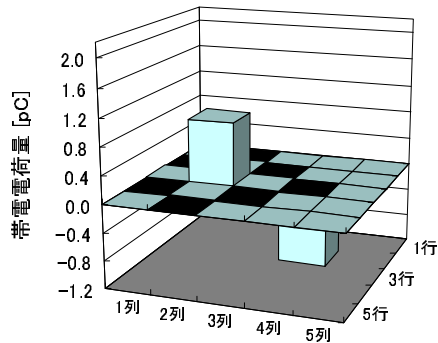
(a) ケース (i)



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	-1.8E-02	2.9E-02	-3.4E-02	2.9E-02	-1.8E-02
2行	2.9E-02	-5.1E-02	7.4E-02	-5.1E-02	2.9E-02
3行	-3.4E-02	7.4E-02	0.88	7.4E-02	-3.4E-02
4行	2.9E-02	-5.1E-02	7.4E-02	-5.1E-02	2.9E-02
5行	-1.8E-02	2.9E-02	-3.4E-02	2.9E-02	-1.8E-02

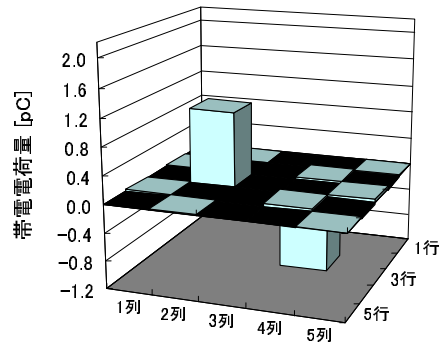
(b) ケース (ii)

図 4-23: 帯電電荷分布 (b) に対して推定した帯電電荷分布  $x + \delta x = A^{-1} (b + \delta b)$



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	8.2E-04	-2.0E-03	7.0E-04	2.5E-04	2.4E-04
2行	-8.6E-04	1.7E-02	-1.1E-03	6.0E-04	2.0E-04
3行	1.6E-02	0.93	1.7E-02	-1.00	7.2E-04
4行	-8.6E-04	1.7E-02	-1.1E-03	6.0E-04	1.9E-04
5行	8.1E-04	-2.0E-03	7.0E-04	2.5E-04	2.4E-04

(a) ケース (i)

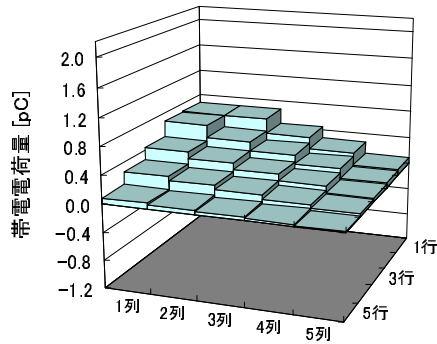


	1列	2列	3列	4列	5列
1行	-8.9E-03	1.2E-02	-3.9E-10	-1.2E-02	8.9E-03
2行	2.3E-02	-4.0E-02	1.5E-09	4.0E-02	-2.3E-02
3行	-4.2E-02	1.08	-3.6E-09	-1.08	4.2E-02
4行	2.3E-02	-4.0E-02	1.1E-09	4.0E-02	-2.3E-02
5行	-8.9E-03	1.2E-02	2.2E-10	-1.2E-02	8.9E-03

(b) ケース (ii)

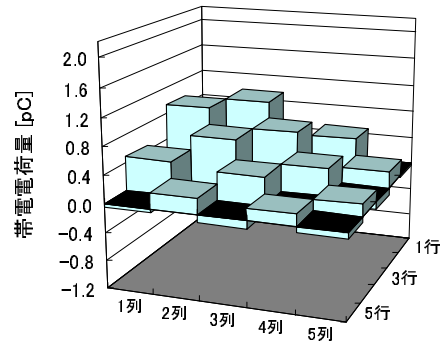
図 4-24: 帯電電荷分布 (c) に対して推定した帯電電荷分布  $x + \delta x = A^{-1} (b + \delta b)$

誤差, 測定時の静電プローブの位置精度あるいは絶縁物の比誘電率の計測誤差など種々の要因が考えられる。 $\delta b$  も外乱に起因するため,  $\delta A$  や  $\delta b$  を零にすることは基本的に



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.68	0.67	0.45	0.27	0.09
2行	0.67	0.49	0.35	0.21	0.07
3行	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05
4行	0.27	0.21	0.15	0.09	0.03
5行	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01

(a) ケース (i)



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.57	0.93	0.18	0.48	-0.04
2行	0.93	0.12	0.68	-0.05	0.24
3行	0.18	0.68	-0.05	0.40	-0.11
4行	0.48	-0.05	0.40	-0.11	0.17
5行	-0.04	0.24	-0.11	0.17	-0.08

(b) ケース (ii)

図 4-25: 帯電電荷分布 (d) に対して推定した帯電電荷分布  $x + \delta x = A^{-1} (b + \delta b)$

不可能である。逆計算で得られる解は  $\delta A$  や  $\delta b$  に対して一般的に不安定で容易に発散，振動するため，このような解の不安定性を抑制し，安定した解の推定を行うために逆計算手法を適用する必要がある。本節では，帯電電荷測定の数値シミュレーションを行い，帯電電荷推定への逆計算手法の適用について検討する。

#### 4.5.1 計算配置

本節の帯電電荷測定の数値シミュレーションに使用した計算配置を図 4-26 に示す。絶縁物はこれまで使用してきた形状と同じ立方体とし，接地面上方 30 mm の位置に配置した。また絶縁物の比誘電率は 4.0 とした。一方，静電プローブは絶縁物側面に配置し，センサは半径 2.5 mm の円板導体とし，ガード電極はセンサを取り囲むように存在し，半径 3.5 mm，長さ 10 mm の円筒形状とした。ここでは原理的な検討を目的としており，数値電界計算に使用する未知数の個数を低減し計算時間を短縮するためにセンサ，ガード電極の厚さは零とした。センサと絶縁物表面との間の距離は 3 mm とし，ガード電極と絶縁物表面との間の距離は 2 mm とした。帯電電荷はプローブと対向する側面のみが存在するとし，これまでと同様にして側面に区分数  $n = 25$  の帯電区分をセットし (図 4-4)，帯電区分毎に電荷密度は一定とした。測定点数は  $m$  点とし， $i$  番目の測定位置はセンサの中心座標を  $(Y_i, Z_i)$  とし，(4-16) 式のようにセットした。また，これまでと

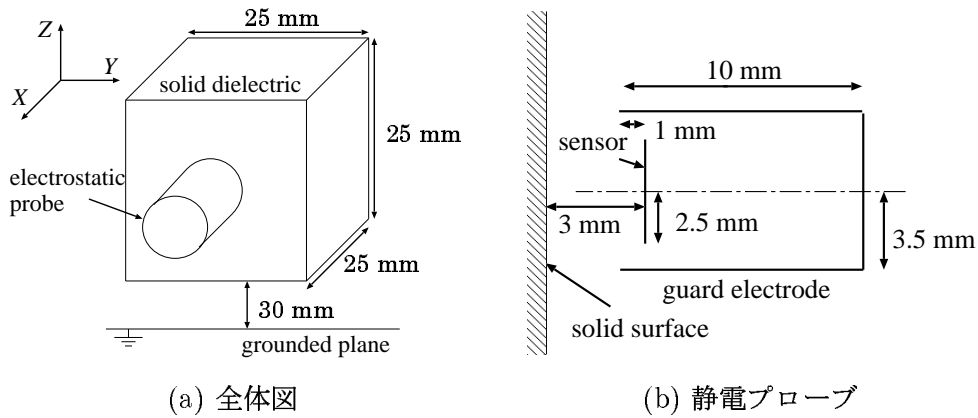


図 4-26: 逆計算手法の検討で使用した計算配置

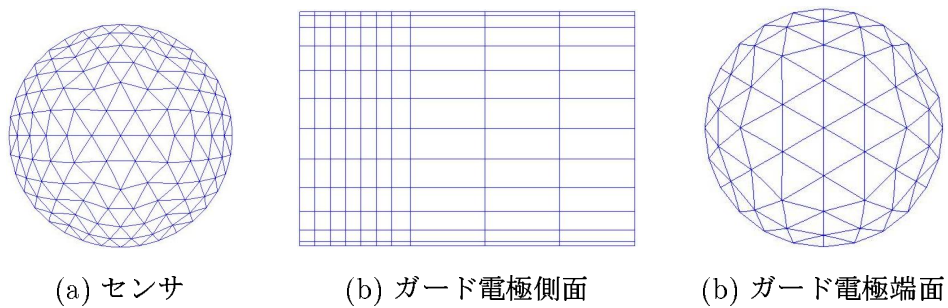


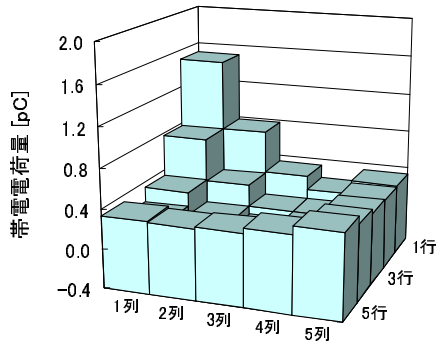
図 4-27: 静電プローブのメッシュパターン

同様に測定位置番号を  $i$ , 帯電区分番号を  $j$  で表す。

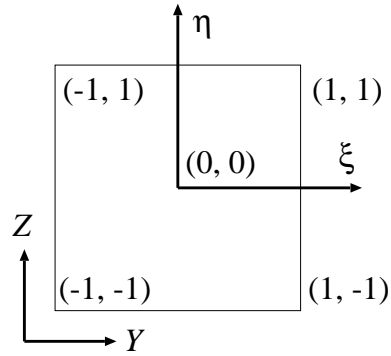
$$\left. \begin{aligned} i &= i_Y + \sqrt{m}(i_Z - 1) \quad (i_Y, i_Z = 1 \sim \sqrt{m}) \\ Y_i &= -10 + 20/(\sqrt{m} - 1) \times (i_Y - 1) \quad [\text{mm}] \\ Z_i &= 52.5 - 20/(\sqrt{m} - 1) \times (i_Z - 1) \quad [\text{mm}] \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

数値電界計算に使用した静電プローブのメッシュパターンを図 4-27 に示す。図 4-27(a) がセンサを, 図 4-27(b), (c) がそれぞれガード電極の側面と端面を表す。絶縁物表面のメッシュパターンには図 4-15 を使用した。また, 表面電荷要素の電位・電界を解析式で計算し数値電界計算の計算時間を削減することを目的として, これらのメッシュパターンは全て平面パッチで表現した。直接法および  $\lambda$  関数法の係数行列 ( $A_d$ : 直接法,  $A_\lambda$ :  $\lambda$  関数法) の計算に使用した電界計算時の未知数の個数はそれぞれ 3748, 3436 であった。

帯電電荷測定の数値シミュレーションにおいて, 絶縁物表面に仮定した帯電電荷分布  $\boldsymbol{x}$  を図 4-28(a) に示す。電荷分布  $\boldsymbol{x}$  には, 絶縁物側面に図 4-28(b) のような正規化座標系を設定し, 次式に従って変化する電荷密度を各帯電区分で積分して求めた電荷量を使



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.50	0.77	0.34	0.19	0.33
2行	0.77	0.32	0.10	0.09	0.31
3行	0.34	0.10	0.01	0.09	0.33
4行	0.19	0.09	0.09	0.18	0.37
5行	0.33	0.31	0.33	0.37	0.45



(a) 仮定帯電電荷分布  $x$

(b) 正規化座標系

図 4-28: 仮定帯電電荷分布

用した。

$$\sigma = 2(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1) + 2 \quad [\text{pC}/\text{cm}^2] \quad (4-17)$$

また計算誤差を含まない係数行列  $A$  には直接法で計算した  $A_d$  を用いて  $A = A_d$  とし、測定誤差を含まない測定模擬値  $b$  には  $b = Ax (= A_d x)$  として計算した値を使用した。

数値シミュレーションでは、係数行列の計算誤差を  $\delta A$ 、測定誤差を  $\delta b$  として次の 3 ケースを対象とした。

- (i)  $\delta A \neq 0, \delta b = 0$  の場合
- (ii)  $\delta A = 0, \delta b \neq 0$  の場合
- (iii)  $\delta A \neq 0, \delta b \neq 0$  の場合

$\delta A$  は先に述べたように様々な要因によって生じる誤差であるが、ここではその要因の一つである直接法と  $\lambda$  関数法の相違として定義し、 $\delta A = A_\lambda - A = A_\lambda - A_d$  とした。また計算誤差を含む係数行列  $A + \delta A$  を  $\bar{A}$  として表記する。また  $\delta b$  は、ガウス乱数で模擬できる場合が多く、ガウス乱数を発生させて求めたランダムノイズ  $R$  ( $m$  要素) として定義した。



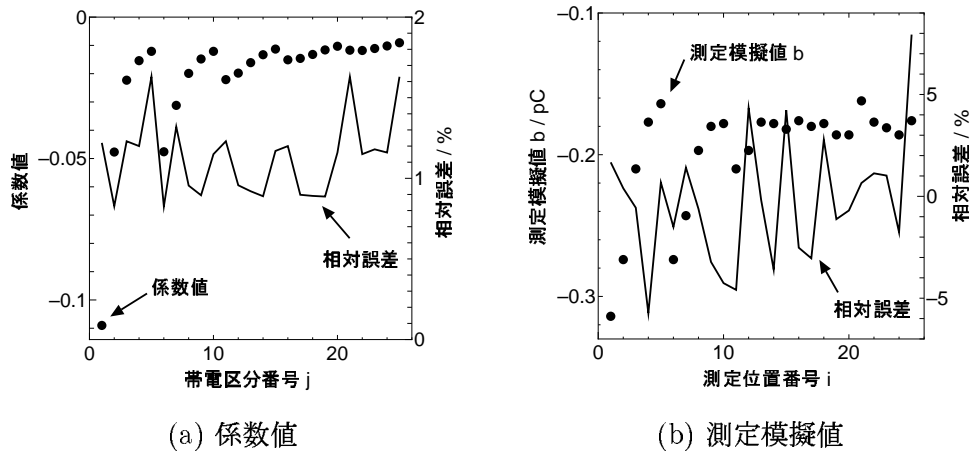


図 4-29:  $m = n = 25$  の場合の係数值, 測定模擬値

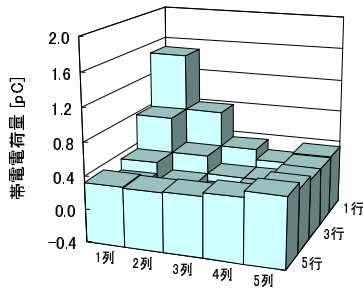
#### 4.5.2 逆行列演算, 最小二乗法による推定

まずは測定点数  $m$  を帯電区分数  $n = 25$  と同じ値に設定し  $m = 25$  として, 帯電電荷分布の推定を行った。  $m = n = 25$  において計算した  $A_\lambda$  の係数值の  $A_d$  の係数值に対する相対誤差の最大値は 1.63% ( $i = 1, j = 5$ ) であった。 図 4-29(a) に測定位置番号  $i = 1$  における  $A_d$  の係数值と  $A_d$  に対する  $A_\lambda$  の相対誤差の絶対値を示す。 またランダムノイズ  $R$  の計算に使用したガウス乱数の平均, 偏差はそれぞれ 0.0 pC,  $6.28 \times 10^{-3}$  pC とし, 偏差の値は  $b$  の最大値の 2% に設定した。 図 4-29(b) に測定模擬値  $b$  と測定誤差  $\delta b$  の  $b$  に対する相対誤差を示す。

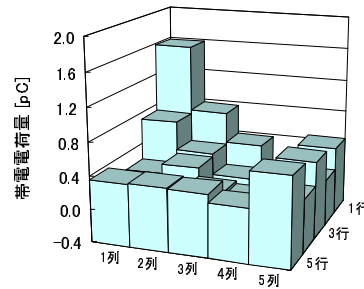
ケース (i) ~ (iii) の場合において, 測定模擬値から逆行列演算によって推定した帯電電荷分布  $x + \delta x$  を図 4-30 に示す。 推定誤差を仮定した帯電電荷分布  $x$  の最大値で規格した値  $D_j = |\delta x_j| / |x_{\max}| \times 100\%$  ( $j = 1 \sim n$ ) を用いて評価し,  $D_j$  の最大値を  $D_{\max}$  とする。 また, ここではノルムを用いて推定解の変動レベルを評価する。  $\delta A$ ,  $\delta b$  および  $\delta x$  の変動レベルをそれぞれ  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ ,  $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ ,  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$  として求める。 記号  $\|\cdot\|$  はベクトルの場合はユークリッドノルム (または  $L_2$  ノルムと呼ぶ) を表し, 行列の場合はスペクトルノルムを表す。 ユークリッドノルム, スペクトルノルムは次のようにして求める。

- $n$  個の要素から成るベクトル  $x$  のユークリッドノルム:  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- 行列  $A$  のスペクトルノルム:  $A$  の最大特異値 (特異値については後述する)

また,  $\delta A$ ,  $\delta b$  による解の変動をそれぞれ別々に評価している ケース (i), (ii) において,  $\delta A$  による誤差拡大率を  $D_A = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} / \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$  とし,  $\delta b$  による誤差拡大率を  $D_b = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} / \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$  とする。

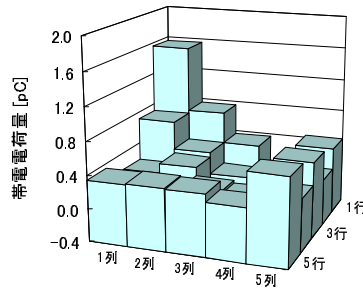


	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.47	0.77	0.33	0.19	0.32
2行	0.77	0.33	0.10	0.10	0.31
3行	0.33	0.10	0.01	0.09	0.32
4行	0.19	0.10	0.09	0.19	0.37
5行	0.32	0.31	0.32	0.37	0.44



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.58	0.76	0.38	0.04	0.44
2行	0.72	0.36	0.09	0.11	0.16
3行	0.19	0.31	-0.02	-0.03	0.54
4行	0.19	-0.07	0.21	0.17	0.25
5行	0.35	0.36	0.35	0.25	0.67

(a) ケース (i)  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = \bar{A}^{-1} \mathbf{b}$       (b) ケース (ii)  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = A^{-1} (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.55	0.75	0.37	0.04	0.43
2行	0.71	0.37	0.09	0.11	0.16
3行	0.18	0.31	-0.03	-0.03	0.53
4行	0.19	-0.06	0.21	0.18	0.25
5行	0.35	0.36	0.34	0.25	0.66

(c) ケース (iii)  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = \bar{A}^{-1} (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$

図 4-30: 逆行列演算により推定した帯電電荷分布 ( $m = n = 25$ )

ケース (i) ~ (iii) の場合の  $D_{\max}$ , 各ノルムの値,  $D_A$ ,  $D_b$  を表 4-7 にまとめる。ケース (i) で  $D_A = 2.1$  倍, ケース (ii) で  $D_b = 8.9$  倍となり, 今回の配置では, 推定解に対する影響は  $\delta A$  に比べて  $\delta b$  のほうが大きく約 4.2 倍であった。

帯電区分数  $n = 25$  (未知数の個数) よりも多くの測定点数を設定することで, 方程式の数つまり与える情報量を過大とし優決定問題として解の安定性を図ることを考える。ここでは測定点数  $m$  は未知数の個数 ( $n = 25$ ) の 16 倍とし  $m = 400$  として, 方程式の残差ノルム (ユークリッドノルム) を最小とする解を求める最小二乗法 (Least Squares : LS) を用いて帯電電荷分布の推定を行った。また先と同様にして, 測定誤差には, 平均 0 pC, 偏差  $6.28 \times 10^{-3}$  pC のガウス乱数から求めたランダムノイズ  $\mathbf{R}$  (400 要素) を

表 4-7: 逆行列演算による推定結果

ケース	$D_{\max} / \%$	$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$\frac{\ \delta b\ }{\ b\ }$	$\frac{\ \delta x\ }{\ x\ }$	$D_A / \text{倍}$	$D_b / \text{倍}$
(i)	1.56	$7.76 \times 10^{-3}$	0	$1.66 \times 10^{-2}$	2.1	—
(ii)	14.5	0	$2.84 \times 10^{-2}$	$2.52 \times 10^{-1}$	—	8.9
(iii)	14.2	$7.76 \times 10^{-3}$	$2.84 \times 10^{-2}$	$2.44 \times 10^{-1}$	—	—

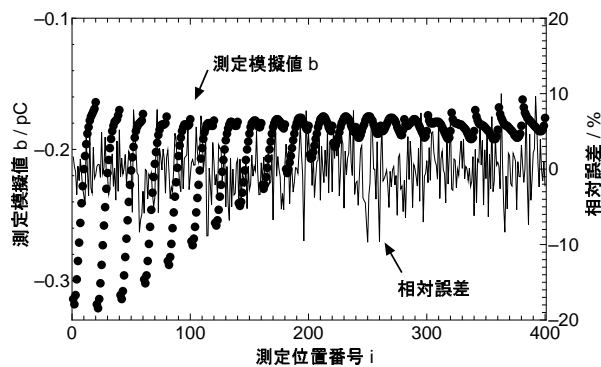


図 4-31:  $m = 400$ ,  $n = 25$  の場合の測定模擬値

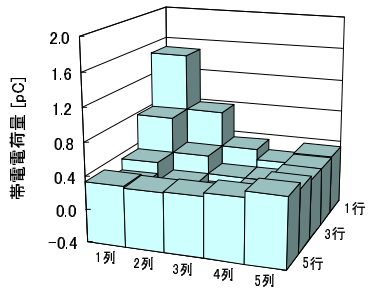
用いた。 $m = 400$  とした場合の測定模擬値と測定誤差の相対誤差を図 4-31 に示す。 $m = 400$ ,  $n = 25$  とした場合において,  $A_\lambda$  の係数値の  $A_d$  の係数値に対する相対誤差 (絶対値) の最大値は  $i = 7$ ,  $j = 21$  のときに 1.69 % であった。

ケース (i) ~ (iii) の場合に LS により推定した帯電電荷分布  $x + \delta x$  を図 4-32 に示す。図の説明において  $A^+$  は  $A$  の MP (Moore - Penrose : MP) 一般逆行列を表す。また, LS 適用時の  $D_{\max}$ , 各ノルムの値,  $D_A$ ,  $D_b$  を表 4-8 にまとめる。 $m = 25$  のときの結果と比較すると,  $D_{\max}$  はケース (i) ~ (iii) それぞれで約 15 %, 約 46 %, 約 44 % 改善され,  $D_A$ ,  $D_b$  も  $m = 25$  の場合に比べてそれぞれ約 10 %, 約 47 % 改善された。逆行列演算に比べて良好な推定解が得られたが, LS を適用した場合においてもケース (ii), (iii) のノルムで評価した推定誤差は 15 % 程度であった。

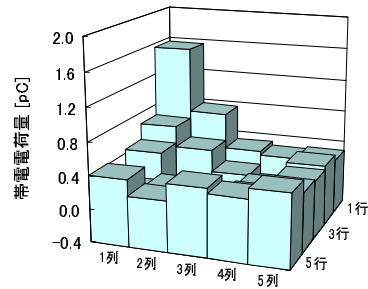
### 4.5.3 行列の特異値

$m$  行  $n$  列の行列  $A$  を考えると,  $A$  は次のように分解することができる。

$$A = UWV^T \tag{4-18}$$

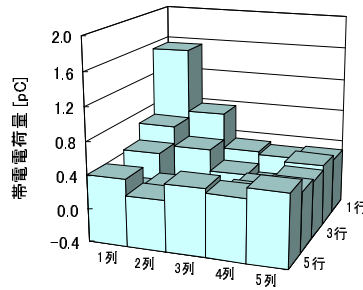


	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.48	0.77	0.33	0.19	0.33
2行	0.77	0.33	0.10	0.10	0.31
3行	0.33	0.10	0.01	0.09	0.32
4行	0.19	0.10	0.09	0.19	0.37
5行	0.33	0.31	0.32	0.37	0.44



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.55	0.74	0.30	0.26	0.28
2行	0.66	0.40	0.13	0.01	0.35
3行	0.45	0.00	0.02	0.15	0.30
4行	0.11	0.19	0.01	0.21	0.33
5行	0.41	0.21	0.42	0.35	0.48

(a) ケース (i)  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = \bar{A}^+ \mathbf{b}$       (b) ケース (ii)  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = A^+ (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.53	0.74	0.30	0.25	0.28
2行	0.65	0.40	0.13	0.02	0.35
3行	0.44	0.00	0.01	0.15	0.30
4行	0.11	0.19	0.01	0.21	0.32
5行	0.40	0.21	0.41	0.35	0.47

(c) ケース (iii)  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = \bar{A}^+ (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$

図 4-32: LS により推定した帯電電荷分布 ( $m = 400, n = 25$ )

ここで  $U$  は  $m$  行  $n$  列の行列,  $W, V$  は  $n$  行  $n$  列の行列である。ただし,  $W$  は次のように対角項のみに非零要素を有する行列である。

$$W = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \kappa_r & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (4-19)$$

上式の  $\kappa_i$  ( $i = 1 \sim r$ ) は非零 (かつ非負) の値であり特異値と呼ばれる。特異値の個数  $r$  は行列  $A$  の階数を表す。また最大特異値の最小特異値に対する比は行列  $A$  の条件数と

表 4-8: LS による推定結果

ケース	$D_{\max} / \%$	$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$\frac{\ \delta \mathbf{b}\ }{\ \mathbf{b}\ }$	$\frac{\ \delta \mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x}\ }$	$D_A / \text{倍}$	$D_b / \text{倍}$
(i)	1.33	$7.64 \times 10^{-3}$	0	$1.44 \times 10^{-2}$	1.9	—
(ii)	7.77	0	$3.27 \times 10^{-2}$	$1.53 \times 10^{-1}$	—	4.7
(iii)	7.94	$7.64 \times 10^{-3}$	$3.27 \times 10^{-2}$	$1.48 \times 10^{-1}$	—	—

して定義される。このような行列の分解を特異値分解 (Singular Value Decomposition : SVD) と呼び、この分解は行列  $A$  に対して一意に定まる [55, 56, 57]。ここでは  $m \geq n$  かつ  $r = n$  とする。 $U, V$  は直交行列であり  $UU^T = I_m, VV^T = V^TV = I_n$  となる。ただし、 $I_m, I_n$  はそれぞれ  $m$  行  $m$  列、 $n$  行  $n$  列の単位行列を表す。 $V$  の  $n$  個の列ベクトルは  $n$  次元ベクトル空間  $K_n$  の正規直交基底であり、一方  $U$  の列ベクトルは  $m$  次元ベクトル空間  $K_m$  の正規直交基底となる。 $A$  による像空間を  $\text{Image}(A)$  として表すと、当然  $m = n$  の場合は  $\text{Image}(A)$  は  $K_m$  全空間となるが、 $m > n$  の場合は  $\text{Image}(A)$  は  $K_m$  空間の部分空間となる。また (4-18) 式の関係からわかるように  $A$  と  $A$  の転置行列  $A^T$  の特異値は同じ値であり、 $A^TA$  の特異値は  $A$  の特異値の二乗となる。つまり、 $A^TA$  の条件数の値も  $A$  の条件数の二乗になる。

#### 4.5.4 逆行列演算, LS で求めた推定解の変動 $\delta \mathbf{x}$ の上限値

連立一次方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (ただし  $A$  は正方行列に限らない) に対し、逆行列演算, LS を用いて測定値  $\mathbf{b}$  から未知電荷分布  $\mathbf{x}$  を逆計算するときの推定誤差について考える。ただし、係数行列には計算誤差  $\delta A$  が、測定値には測定誤差  $\delta \mathbf{b}$  が加算されるとする。このとき、 $\delta A$  や  $\delta \mathbf{b}$  による推定値  $\mathbf{x}$  の変動  $\delta \mathbf{x}$  の上限は次式で表される [55]。

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa' \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \kappa' \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad \left( \kappa' = \frac{\|A\| \|A^+\|}{1 - \|\delta A\| \|A^+\|} \right) \quad (4-20)$$

ただし、(4-20) 式は次の仮定に基づいて導出されている。

仮定 1 :  $m \geq n = \text{Rank}(A)$

仮定 2 :  $\|\delta A\| \|A^+\| < 1$

仮定 3 :  $\text{Rank}(A + \delta A) = \text{Rank}(A)$

(4-20) 式において、 $\|A\| \|A^+\|$  は  $A$  の条件数であり、また  $A$  の計算誤差は必ず零ではないので  $\|\delta A\| \|A^+\| \neq 0$  である。つまり、推定した分布  $\mathbf{x}$  の  $\delta A$  や  $\delta \mathbf{b}$  による変動  $\delta \mathbf{x}$  の上限は、 $A$  の条件数以上の値  $\kappa'$  に支配されることになる。例えば、係数値の計算精度、

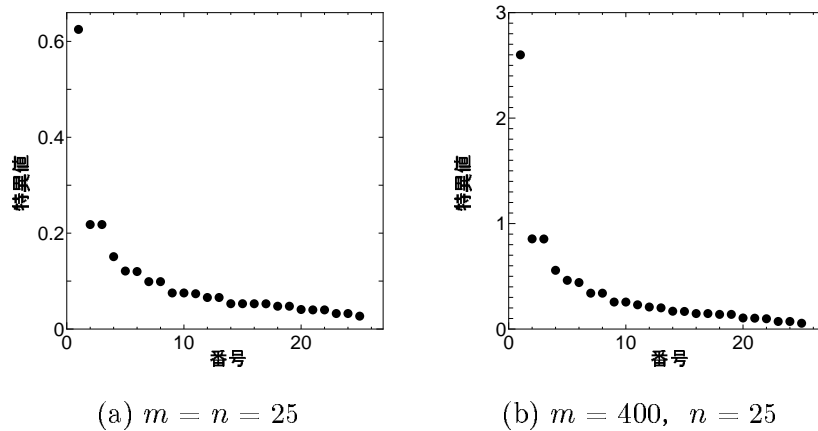


図 4-33: 係数行列  $A$  の特異値

測定精度がともに 1% 以下であったとしても、 $\kappa'$  が非常に大きい場合、解は容易に発散し推定した値は全く意味を成さないことになる。これが逆計算の不安定性である。通常の順計算であれば、一般的に数値計算精度や測定精度を向上することが直接に求めたい結果の精度の改善へ結びつく。一方、逆計算においてはそれだけでは推定精度を改善することはできず、条件数の小さい良条件の係数行列をいかに設計するか、つまり測定装置形状、測定位置、帯電区分（帯電電荷分布の数値モデル化）などの測定状況をうまく設定することが重要になる。

$m = n = 25$  および  $m = 400, n = 25$  とした場合の係数行列  $A (= A_d)$  の特異値を図 4-33 に示す。 $A$  の条件数は、 $m = 25$  とした場合は 24.3,  $m = 400$  とした場合は 47.2 であった。また  $\bar{A} = A_\lambda$  の条件数は  $m = 25$  の場合は 23.2,  $m = 400$  の場合は 45.6 であった。今回の数値シミュレーションで使用した係数行列は比較的良好な係数行列であると言えるが、それでも数値シミュレーションの結果から精度の高い解の推定は簡単ではないことがわかる。実用のスペーサを対象とした帯電電荷測定では、このような良好な係数行列の設計を行うことは簡単ではなく、条件数が  $10^2$  や  $10^3$  を超えるような悪条件の係数行列を対象としなければならない状態が容易に生じ得る。その理由は、実測の際に常に望みの位置にプローブを配置できるわけではなく到達不可能領域（物理形状から配置不可能、放電を生じる）が存在し得ることや、S/N 比がセンサのサイズ、測定位置、帯電量など測定時の状況に左右されるからである。つまり、様々な制限のある状況の中で係数行列の条件数を改善することには限界があり、そのなかで安定した解の推定を実現しなければならない。このため正方行列の逆行列演算もしくは LS で良好な推定が可能な問題は例外的で、一般には逆計算手法の適用によって推定解の安定性を改善する必要がある。

表 4-9:  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  の説明

	使用行列	補足事項	意味
$E_{LS}^{ref}$	$A$	–	$\frac{\ \delta\mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\ }$ の上限値
$E_{LS}$	$\bar{A} (= A + \delta A)$	–	$\frac{\ \delta\mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\ }$ の上限値
$E_{LS}^{app}$	$\bar{A} (= A + \delta A)$	仮定: $\ \delta\mathbf{x}\  \ll \ \mathbf{x}\ $	$\frac{\ \delta\mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\ }$ の上限値
$E_{LS}^{ref'}$	$A$	–	$\frac{\ \delta\mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x}\ }$ の上限値

方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  の LS (あるいは逆行列演算) による推定解  $\mathbf{x}$  の,  $\delta A$  や  $\delta\mathbf{b}$  による変動  $\delta\mathbf{x}$  の上限値は (4-20) 式で与えられる。しかし, 計算した係数行列は必ず数値誤差を伴うため実際に求めることができるのは  $A$  ではなく  $\bar{A} (= A + \delta A)$  であり, (4-20) 式は厳密な意味では計算できないことになる。そこで,  $A$  ではなく  $\bar{A}$  を用いて推定解の変動の上限値を求めるための式を導出した。ただし, 導出過程において  $\mathbf{x}$  を基準とすることができなかつたため, ここでは  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  を中心とした変動  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|}$  の上限値を与える式として 3 種類の式を導出した。それぞれの式で与えられる上限値を  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$  で表す。添え字の ref, app はそれぞれ reference, approximation の略である。また (4-20) 式の右辺から得られる  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  の上限値を  $E_{LS}^{ref'}$  で表す。表 4-9 に  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  の相違についてまとめる。

次式に  $E_{LS}^{ref}$  を与える式を示す。

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|} \leq E_{LS}^{ref} \quad (4-21)$$

$$E_{LS}^{ref} = C_1 \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + C_2 \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + C_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|A\|^2} + C_4 \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}\|}$$

$$C_1 = \|A\| \|A^+\|$$

$$C_2 = \|(A^T A)^{-1}\| \|A\| \frac{\|(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}) - A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|}$$

$$C_3 = \|(A^T A)^{-1}\| \|A\|^2$$

$$C_4 = \|A^+\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|}$$

ただし,  $m \geq n$ ,  $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A}) = n$  とする。(4-21) 式は,  $\mathbf{x}$  ではなく  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  を基準とした解の変動の上限値を与える式である。(4-20) 式と比べると,  $\|\delta A\| \|A^+\| < 1$  の仮定を必要としないという利点がある。しかし (4-20) 式と同様に, 実際には求めることができない  $A$  を含んでおり実用的ではない。次に  $\bar{A}$  を用いて上限値  $E_{LS}$  を計算す

る式を示す。

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} &\leq E_{LS} & (4-22) \\ E_{LS} &= \frac{D_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + D_2 \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}}{1 - D_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|}} \\ D_1 &= \|\bar{A}\| \|\bar{A}^+\| \\ D_2 &= \|\bar{A}^+\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} \end{aligned}$$

ただし,  $m \geq n$ ,  $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A}) = n$  とし, 次の条件を満たす必要がある。

$$\|\bar{A}^+\| \|\delta A\| < 1$$

ただし (4-22) 式の導出過程において,

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\| + \|\delta \mathbf{x}\| \quad (4-23)$$

という不等号関係を用いており,  $E_{LS}$  は過大な上限値となる可能性がある。そこで  $\|\delta \mathbf{x}\| \ll \|\mathbf{x}\|$  の仮定の下に (4-23) 式の左辺を次のように近似する。

$$\|\mathbf{x}\| \simeq \|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\| \quad (4-24)$$

(4-24) 式を用いて導出した上限値  $E_{LS}^{app}$  の式を次に示す。

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} &\leq E_{LS}^{app} & (4-25) \\ E_{LS}^{app} &= D_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + D_2 \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|} \end{aligned}$$

ただし,  $m \geq n$ ,  $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A}) = n$  とする。

付録 C において,  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$  の導出過程について述べる。

$E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$  の値を計算する場合,  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}$  および  $\frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A} + \delta A\|}$  の値が必要となる。数値シミュレーションにおいては  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}$ ,  $\frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A} + \delta A\|}$  を算出することが可能であるが, 実測ではそれらの値を知ることはできない。しかし本研究の実測時において  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$  を計算するときに  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}$ ,  $\frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A} + \delta A\|}$  の近似値を算出している。その算出方法については 4.6 節で述べる。

実際に  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  の上限値を計算するときは次の手順で行う。まず  $E_{LS}$  を算出する。もし仮定を満足していても  $E_{LS}$  を与える式の分母が非常に小さくなるために,  $E_{LS}$  が過大となる場合は,  $E_{LS}^{app}$  を計算する。同時に  $E_{LS}^{ref}$  を計算し, 参考値として用いる。実用上



使用して意味があるのは  $E_{LS}$  と  $E_{LS}^{app}$  であり,  $E_{LS}^{ref}$  はあくまで参考値であることに注意する。

逆行列演算によって推定した解 (図 4-30) に対して算出した  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  の値を表 4-10 に示す。ただし,  $A = A_d$ ,  $\bar{A} = A_\lambda$  とし,  $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ ,  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ ,  $\frac{\|\delta b\|}{\|b+\delta b\|}$ ,  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$  は数値シミュレーションで使用した値である。表の  $C_1 \sim C_4$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  は (4-21) 式, (4-22) 式, (4-25) 式に含まれる記号の計算値を表す。また,  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  との比較のために数値シミュレーションの結果から求めた  $\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|}$ ,  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$  の値も表に示している。ケース (i) では  $E_{LS}$  は  $2.18 \times 10^{-1}$  (分母値:  $8.21 \times 10^{-1}$ ), 近似値である  $E_{LS}^{app}$  は  $1.79 \times 10^{-1}$  であった。一方, 参考値である  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  はそれぞれ  $2.53 \times 10^{-1}$ ,  $2.32 \times 10^{-1}$  であった。数値シミュレーション結果では  $\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} = 1.68 \times 10^{-2}$  で, 上限値  $E_{LS}$  に対して約 7.7% であった。しかし,  $E_{LS}$  の値から  $\delta A$  が最悪のケースでは  $\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|}$  は  $2.18 \times 10^{-1}$  まで変動することがわかる。ケース (ii) では,  $\delta A = 0$  であるため,  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,

表 4-10: 逆行列演算による推定解の  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$

	ケース (i)	ケース (ii)	ケース (iii)
$\frac{\ \delta b\ }{\ b\ }$	0.0	$2.84 \times 10^{-2}$	$2.84 \times 10^{-2}$
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$7.76 \times 10^{-3}$	0.0	$7.76 \times 10^{-3}$
$\frac{\ \delta b\ }{\ b+\delta b\ }$	0.0	$2.84 \times 10^{-2}$	$2.84 \times 10^{-2}$
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$7.71 \times 10^{-3}$	0.0	$7.71 \times 10^{-3}$
$C_1$	$2.43 \times 10$	-	$2.43 \times 10$
$C_2$	3.82	-	3.70
$C_3$	$5.88 \times 10^2$	-	$5.88 \times 10^2$
$C_4$	-	$1.66 \times 10$	$1.69 \times 10$
$D_1$	$2.32 \times 10$	-	$2.32 \times 10$
$D_2$	-	$1.66 \times 10$	$1.61 \times 10$
$E_{LS}^{ref}$	$2.53 \times 10^{-1}$	$4.73 \times 10^{-1}$	$7.31 \times 10^{-1}$
$E_{LS}$	$2.18 \times 10^{-1}$	$4.73 \times 10^{-1}$	$7.74 \times 10^{-1}$
$E_{LS}^{app}$	$1.79 \times 10^{-1}$	$4.73 \times 10^{-1}$	$6.35 \times 10^{-1}$
$\frac{\ \delta x\ }{\ x+\delta x\ }$	$1.68 \times 10^{-2}$	$2.39 \times 10^{-1}$	$2.36 \times 10^{-1}$
$E_{LS}^{ref'}$	$2.32 \times 10^{-1}$	$8.48 \times 10^{-1}$	1.08
$\frac{\ \delta x\ }{\ x\ }$	$1.66 \times 10^{-2}$	$2.52 \times 10^{-1}$	$2.44 \times 10^{-1}$

表 4-11: LS による推定解の  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$

	ケース (i)	ケース (ii)	ケース (iii)
$\frac{\ \delta \mathbf{b}\ }{\ \mathbf{b}\ }$	0.0	$3.27 \times 10^{-2}$	$3.27 \times 10^{-2}$
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$7.64 \times 10^{-3}$	0.0	$7.64 \times 10^{-3}$
$\frac{\ \delta \mathbf{b}\ }{\ \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\ }$	0.0	$3.27 \times 10^{-2}$	$3.27 \times 10^{-2}$
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$7.58 \times 10^{-3}$	0.0	$7.58 \times 10^{-3}$
$C_1$	$4.72 \times 10$	–	$4.72 \times 10$
$C_2$	$1.36 \times 10$	–	$5.03 \times 10$
$C_3$	$2.22 \times 10^3$	–	$2.22 \times 10^3$
$C_4$	–	$3.20 \times 10$	$3.24 \times 10$
$D_1$	$4.56 \times 10$	–	$4.56 \times 10$
$D_2$	–	$3.20 \times 10$	$3.11 \times 10$
$E_{LS}^{ref}$	$5.94 \times 10^{-1}$	1.05	1.93
$E_{LS}$	$5.27 \times 10^{-1}$	1.05	2.08
$E_{LS}^{app}$	$3.45 \times 10^{-1}$	1.05	1.36
$\frac{\ \delta \mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\ }$	$1.45 \times 10^{-2}$	$1.51 \times 10^{-1}$	$1.48 \times 10^{-1}$
$E_{LS}^{ref'}$	$5.63 \times 10^{-1}$	2.41	2.97
$\frac{\ \delta \mathbf{x}\ }{\ \mathbf{x}\ }$	$1.44 \times 10^{-2}$	$1.53 \times 10^{-1}$	$1.48 \times 10^{-1}$

$E_{LS}^{app}$  を与える式は同じになり、その計算値は  $4.73 \times 10^{-1}$  であった。このとき  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  の値は  $E_{LS}$  に対して約 51 % であった。ケース (iii) では、 $E_{LS}$  は  $7.74 \times 10^{-1}$  (分母値 :  $8.21 \times 10^{-1}$ ) であり、 $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  は上限値に対して約 30 % であった。

LS によって推定した解 (図 4-32) に対して算出した  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  の値を表 4-11 に示す。ケース (i) ~ (iii) において  $E_{LS}$  はそれぞれ  $5.27 \times 10^{-1}$  (分母値 :  $6.55 \times 10^{-1}$ ) , 1.05 (分母値 : 1.0) , 2.08 (分母値 :  $6.55 \times 10^{-1}$ ) であった。また、ケース (i) ~ (iii) での数値シミュレーションの結果においては、 $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  はそれぞれ  $1.45 \times 10^{-2}$  ,  $1.51 \times 10^{-1}$  ,  $1.48 \times 10^{-1}$  であり、 $E_{LS}$  に対して約 2.8 % , 約 14 % , 約 7.1 % であった。

逆行列演算あるいは LS による推定結果において算出した  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  に対して、数値シミュレーション結果の  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  や  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  は最も大きい場合でも約 51 % であった。この理由として次の 2 つが挙げられる。一つ目は  $A$ ,  $\delta A$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\delta \mathbf{b}$  が最悪ケースではないことである。二つ目は  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref'}$  の導出過程において、行列・ベ

クトル積，ベクトル和，ベクトル差のノルムに関して次のような不等号関係を数回使用していることである。

$$\left. \begin{aligned} \|A\mathbf{a}\| &\leq \|A\|\|\mathbf{a}\| \\ \|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}\| &\leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

ここで， $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$  は  $n$  次元の任意のベクトルとする。(4-26) 式の不等号関係を使用しているために  $E_{LS}^{ref}$ ， $E_{LS}$ ， $E_{LS}^{app}$ ， $E_{LS}^{ref'}$  は大きい値が算出される可能性がある。いずれにしても， $E_{LS}^{ref}$ ， $E_{LS}$ ， $E_{LS}^{app}$ ， $E_{LS}^{ref'}$  は  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|}$  や  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  の上限値を与える数値であり、個別の状況下では，後者は前者よりもかなり小さな値となりうるのである。

#### 4.5.5 逆行列演算，LS で求めた推定解の変動 $\delta\mathbf{x}$ が上限値になる場合

逆行列演算，LS で解の推定を行うときに， $A$ ， $\delta A$ ， $\mathbf{b}$ ， $\delta\mathbf{b}$  がどのような場合に最悪ケース（ $\delta\mathbf{x}$  が上限値になるケース）となるのかは， $\delta A$  による線形写像の変動を考慮する必要があり，取り扱うパラメータが多すぎるため明らかにすることは非常に困難である。しかし， $\delta A = 0$  の場合には最悪ケースの  $\mathbf{b}$  や  $\delta\mathbf{b}$  を求めることが可能である [56]。 $\delta A = 0$  とした場合は (4-20) 式が適用可能であるため，ここでは (4-20) 式の最悪ケース（ $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = E_{LS}^{ref'}$  となるケース）について考える。ただし， $E_{LS}$  についても同様に最悪ケースを示すことができる。

$\delta A = 0$  とすると (4-20) 式は次のようになる。

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\|\|A^+\| \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (4-27)$$

(4-27) 式は，最悪ケースにおける  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  の  $\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$  に対する比  $\mu$  が条件数に等しくなることを意味する [56]。係数行列  $A$  の階数は  $n$  とする。 $K_m$  空間， $K_n$  空間の正規直交基底をそれぞれ  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1 \sim n$ )， $\mathbf{v}_i$  ( $i = 1 \sim n$ ) とし， $A$  の特異値分解を次式で表す。

$$A = \sum_{r=1}^n \kappa_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T \quad (4-28)$$

ただし，特異値  $\kappa_r$  は大きい順に並んでいるとする。

次に  $\mathbf{b}$ ， $\delta\mathbf{b}$  を正規直交基底  $\mathbf{u}_i$  で展開して次式のように表現する。

$$\mathbf{b}/\|\mathbf{b}\| = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i \quad (4-29)$$

$$\delta\mathbf{b}/\|\delta\mathbf{b}\| = \sum_{i=1}^n \delta a_i \mathbf{u}_i \quad (4-30)$$

このとき  $a_i, \delta a_i$  は展開係数を表し,  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1, \sum_{i=1}^n (\delta a_i)^2 = 1$  とする。 $\mathbf{b}$  は  $\text{Image}(A)$  に含まれるので,  $K_m$  空間の部分空間である  $\text{Image}(A)$  の正規直交基底  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1 \sim n$ ) を用いて (4-29) 式のように表現することができる。しかし,  $\delta \mathbf{b}$  は本来  $K_m$  全空間に属しており,  $K_m$  全空間を張る正規直交基底で表現する必要がある。ここで  $\delta \mathbf{b}$  は  $\text{Image}(A)$  に属しており,  $\delta \mathbf{b}^\perp$  が残りの部分空間である「 $K_m$  空間 -  $\text{Image}(A)$ 」に属するものとする。 $\perp$  の記号は,  $\text{Image}(A)$  と「 $K_m$  空間 -  $\text{Image}(A)$ 」が直和の関係にあることを意味する。このとき  $A^+ \delta \mathbf{b}^\perp = 0$  が成り立つので, (4-30) 式のように  $\delta \mathbf{b}$  も  $\text{Image}(A)$  の正規直交基底で表現すれば十分となる。

(4-29) 式を用いて  $\mathbf{x}$  は次式で表される。

$$\mathbf{x} = A^+ \mathbf{b} \quad (4-31)$$

$$= \left( \sum_{r=1}^n \kappa_r^{-1} \mathbf{v}_r \mathbf{u}_r^T \right) (\|\mathbf{b}\| \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i) \quad (4-32)$$

$$= \|\mathbf{b}\| \sum_{r=1}^n \kappa_r^{-1} a_r \mathbf{v}_r \quad (4-33)$$

また, 同様にして

$$\delta \mathbf{x} = \|\delta \mathbf{b}\| \sum_{r=1}^n \kappa_r^{-1} \delta a_r \mathbf{v}_r \quad (4-34)$$

が得られる。(4-33) 式, (4-34) 式から次式が得られる。

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \quad (4-35)$$

$$= (\|\mathbf{b}\| \sum_{i=1}^n \kappa_i^{-1} a_i \mathbf{v}_i)^T (\|\mathbf{b}\| \sum_{j=1}^n \kappa_j^{-1} a_j \mathbf{v}_j) \quad (4-36)$$

$$= \|\mathbf{b}\|^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \kappa_i^{-1} \kappa_j^{-1} a_i a_j \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \quad (4-37)$$

$$= \|\mathbf{b}\|^2 \sum_{i=1}^n \kappa_i^{-2} a_i^2 \quad (4-38)$$

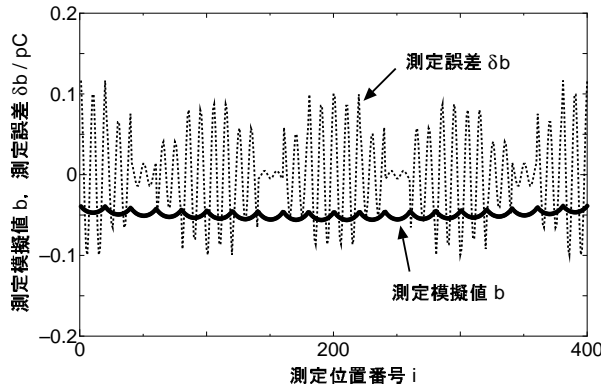
$$\|\delta \mathbf{x}\|^2 = \|\delta \mathbf{b}\|^2 \sum_{i=1}^n \kappa_i^{-2} \delta a_i^2 \quad (4-39)$$

したがって,  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  の  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$  に対する比  $\mu$  は次式で表される。

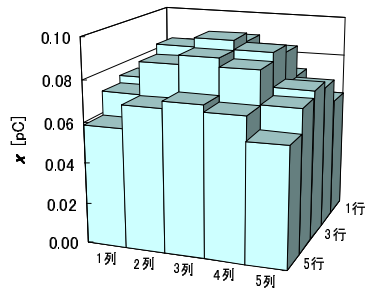
$$\mu = \frac{(\sum_{i=1}^n \kappa_i^{-2} (\delta a_i)^2)^{1/2}}{(\sum_{i=1}^n \kappa_i^{-2} a_i^2)^{1/2}} \quad (4-40)$$

$\mu$  が最大値となるときは分母が最小, 分子が最大になるときであり,

分母が最小:  $a_1 = 1, a_i = 0$  ( $i \neq 1$ )

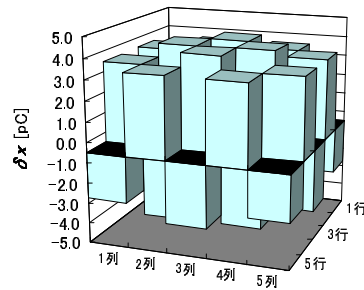


(a) 測定模擬値  $b$ , 測定誤差  $\delta b$



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.06	0.07	0.07	0.07	0.06
2行	0.07	0.09	0.09	0.09	0.07
3行	0.07	0.09	0.10	0.09	0.07
4行	0.07	0.09	0.09	0.09	0.07
5行	0.06	0.07	0.07	0.07	0.06

(b) 仮定帯電電荷分布  $x$



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	-2.76	3.49	-3.54	3.49	-2.76
2行	3.49	-4.00	4.17	-4.00	3.49
3行	-3.54	4.17	-4.26	4.17	-3.54
4行	3.49	-4.00	4.17	-4.00	3.49
5行	-2.75	3.49	-3.54	3.49	-2.75

(c) 推定誤差  $\delta x$

図 4-34:  $\delta A = 0$  の場合の LS の最悪ケース ( $m = 400$ ,  $n = 25$ )

分子が最大:  $\delta a_n = 1$ ,  $\delta a_i = 0$  ( $i \neq n$ )

である。つまり、 $\mu$  が最大になるときは  $b$  が  $u_1$  方向を、 $\delta b$  が  $u_n$  方向を向くときであり、このときの拡大率は

$$\mu = \frac{\kappa_1}{\kappa_n} = \|A\| \|A^+\| \quad (4-41)$$

となり条件数と一致する。図 4-34(a) に  $m = 400$ ,  $n = 25$  の場合 ( $A$  の条件数は  $4.72 \times 10$ ) に求めた最悪ケースの測定模擬値  $b$  ( $= u_1$ ) および測定誤差  $\delta b$  ( $= u_n$ ) を示す。ただし、 $\|b\| = \|\delta b\| = 1$  とした。図 4-34(b) に仮定帯電電荷分布  $x = A^+ b$  を、図 4-34(c) に推定誤差  $\delta x = A^+ \delta b$  を示す。このとき  $\|\delta x\| = 1.82 \times 10$ ,  $\|x\| = 3.85 \times 10^{-1}$  から  $\mu = 4.72 \times 10$  となり、 $\mu$  と  $A$  の条件数が一致していることが確認できる。

#### 4.5.6 カットオフ法による推定

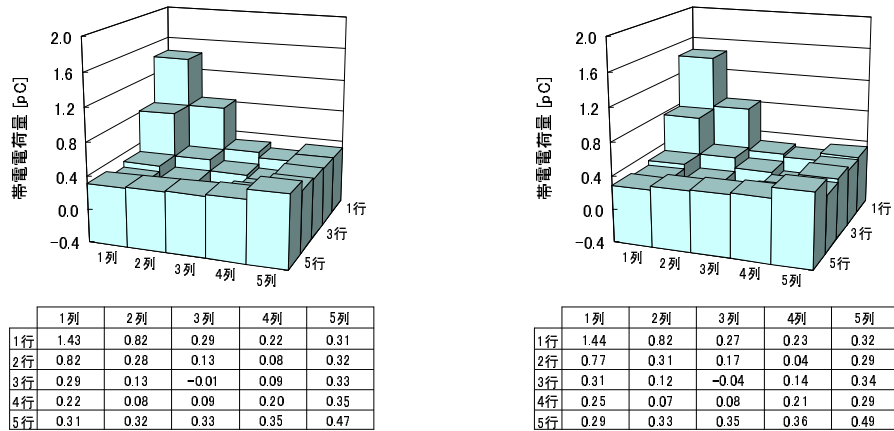
逆計算手法としてまずカットオフ法（あるいはランクの低減法）と呼ばれる手法がある [57, 58]。カットオフ法は、最大特異値に対して小さな特異値を故意に零とすることにより係数行列  $A$  の条件数を改善し、推定解の安定化を図る手法である。小さな特異値を零とした場合の係数行列を  $A_{\text{dmp}}$  (dmp : damped) で表す。この場合、 $\delta A$  や  $\delta b$  が零の場合でも真の解を推定することは基本的にできなくなるが、小さな特異値を零としているために真の解に近い推定解は得られる。特異値をどこまで零とするかの選定には任意性が残るが、ここでは、誤差ケース (i) ~ (iii) に対して小さな特異値  $\kappa_{23} \sim \kappa_{25}$  (3 個), あるいは  $\kappa_{20} \sim \kappa_{25}$  (6 個) を零とした場合の推定帯電電荷分布をそれぞれ図 4-35, 図 4-36 に示す。特異値を零とする前の  $A, \bar{A}$  の条件数はそれぞれ 47.2, 45.6 であり、それに対して  $\kappa_{23} \sim \kappa_{25} = 0$  とした場合の  $A_{\text{dmp}}, \bar{A}_{\text{dmp}}$  の条件数はそれぞれ 26.6, 26.3 となり、カットオフ前に比べて約 56 % の条件数となった。一方、 $\kappa_{20} \sim \kappa_{25} = 0$  とした場合は 18.7, 18.6 であり、カットオフ前の条件数に対して約 40 % の条件数となった。また、逆行列演算, LS のときと同様に、カットオフ法による推定解の  $D_{\text{max}}$ , 各ノルムの値,  $D_A, D_b$  を表 4-12 にまとめる。 $\kappa_{23} \sim \kappa_{25} = 0$  とした場合, LS の場合に比べてケース (ii), ケース (iii) の結果は改善され,  $\frac{\|\delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$  の値は LS の結果に対してそれぞれ約 59 %, 約 62 % となった。ただし, ケース (i) の場合の推定精度は悪化した。これは  $\delta A$  よりも,  $\bar{A}_{\text{dmp}}$  と  $A$  との相違のほうが大きくなったためである。 $\kappa_{20} \sim \kappa_{25} = 0$  とした場合は過度に特異値を零としたために, 全てのケースにおいて LS の結果に比べて推定誤差が大きくなった。また  $\delta A, \delta b$  が零の場合に推定される解  $A_{\text{dmp}}^+ \boldsymbol{b}$  と  $\boldsymbol{x}$  の差を  $\frac{\|A_{\text{dmp}}^+ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$  で評価すると,  $\kappa_{23} \sim \kappa_{25} = 0$  の場合は  $6.79 \times 10^{-2}$  で,  $\boldsymbol{x}$  に対して 7 % 程度の変動であった。一方,  $\kappa_{20} \sim \kappa_{25} = 0$  とした場合は  $\frac{\|A_{\text{dmp}}^+ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = 1.35 \times 10^{-1}$  であった。

#### 4.5.7 ペナルティ付き最小二乗法の適用

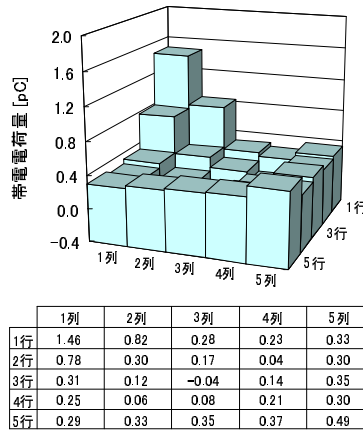
他の逆計算手法として、推定解がある条件を満足するように方程式に拘束項を付加して解くペナルティ付き最小二乗法 (Regularized Least Squares : RLS) が知られている [55, 59]。RLS は Tikhonov の正則化法の一手法である [60]。RLS の推定解  $\boldsymbol{x}_e$  は次式を最小二乗法で解くことにより得られる。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ 0 \end{pmatrix} = A_p \boldsymbol{x}_e, \quad A_p = \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\gamma} K \end{pmatrix} \quad (4-42)$$

ここで,  $\sqrt{\gamma} K$  が方程式に付加した拘束項に相当し,  $\gamma$  は重み係数 (正則化パラメータとも呼ぶ) であり解に対する拘束の度合いを調節する役割を成す。行列  $K$  の列数は  $n$  で



(a) ケース (i)  $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x} = \bar{A}_{\text{dmp}}^+ \boldsymbol{b}$       (b) ケース (ii)  $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x} = A_{\text{dmp}}^+ (\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b})$

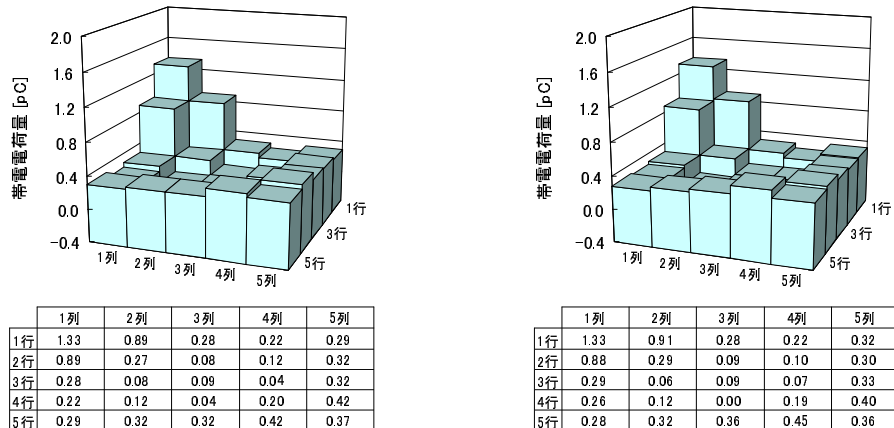


(c) ケース (iii)  $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x} = \bar{A}_{\text{dmp}}^+ (\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b})$

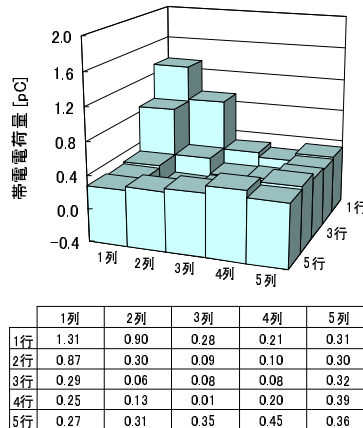
図 4-35: カットオフ法 ( $\kappa_{23} \sim \kappa_{25} = 0$ ) により推定した帯電電荷分布 ( $m = 400, n = 25$ )

あるが、行数は付加する拘束条件の数と同じになる。本研究では、帯電区分数と同じ数の  $n$  個の拘束条件を付加することとし、行列  $K$  は  $n$  行  $n$  列とする。

RLS の推定精度の検討に図 4-37 の線形写像を用いるので、まず図 4-37 について説明する。 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_e, \delta\boldsymbol{x}_e, \delta\boldsymbol{x}_p$  は図の左側の  $n$  次元のベクトル空間に、一方、 $\boldsymbol{b}, \delta\boldsymbol{b}$  は右側の  $m$  次元のベクトル空間に属し、これらのベクトル量を実線の矢印で表している。また  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_e$  の始点は  $n$  次元の零ベクトルであり、同様に  $\boldsymbol{b}$  の始点は  $m$  次元の零ベクトルである。 $\bar{A}_p$  は  $\bar{A}_p = (\bar{A}^T, \sqrt{\gamma}K^T)^T$  を表す。 $J$  は  $(m+n)$  行  $m$  列の行列であり、 $i = 1 \sim m$  に対して  $J_{ii} = 1$ 、それ以外の要素は全て 0 である行列を表す (つまり、 $m$  行  $m$  列



(a) ケース (i)  $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x} = \bar{A}_{\text{dmp}}^+ \boldsymbol{b}$       (b) ケース (ii)  $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x} = A_{\text{dmp}}^+ (\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b})$



(c) ケース (iii)  $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x} = \bar{A}_{\text{dmp}}^+ (\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b})$

図 4-36: カットオフ法 ( $\kappa_{20} \sim \kappa_{25} = 0$ ) により推定した帯電電荷分布 ( $m = 400, n = 25$ )

の単位行列 +  $n$  行  $m$  列の零行列)。  $A$  は  $n$  次元空間から  $m$  次元空間への線形写像を表し、  $A_p^+ J$ ,  $\bar{A}_p^+ J$  は  $m$  次元空間から  $n$  次元空間への線形写像を表す。 図 4-37 においてこれらの線形写像を点線の矢印で表す。  $A_p^+ J$ ,  $\bar{A}_p^+ J$  の線形写像は  $\boldsymbol{b}$  もしくは  $\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$  から、RLS の推定解を求めることを表す。

図 4-37 を用いて RLS の推定精度について検討を行う。 RLS の行列  $K$  の選定には任意性があるが、通常は  $\boldsymbol{x}$  に関する先験情報に基づいて  $\boldsymbol{x}$  にできるだけ適合するような拘束項 (別の言い方をすればフィルタ) を選択する。 しかし、RLS の方程式は、初期設定時に数値モデル化して得られた方程式  $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$  とは別物である。 そのため、たとえ  $\delta A$



表 4-12: カットオフ法による推定結果

(a)  $\kappa_{23} \sim \kappa_{25} = 0$  とした場合

ケース	$D_{\max} / \%$	$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$\frac{\ \delta b\ }{\ b\ }$	$\frac{\ \delta x\ }{\ x\ }$	$D_A / \text{倍}$	$D_b / \text{倍}$
(i)	4.65	$7.64 \times 10^{-3}$	0	$7.00 \times 10^{-2}$	9.2	—
(ii)	5.31	0	$3.27 \times 10^{-2}$	$9.00 \times 10^{-2}$	—	2.8
(iii)	5.18	$7.64 \times 10^{-3}$	$3.27 \times 10^{-2}$	$9.11 \times 10^{-2}$	—	—

(b)  $\kappa_{20} \sim \kappa_{25} = 0$  とした場合

ケース	$D_{\max} / \%$	$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$\frac{\ \delta b\ }{\ b\ }$	$\frac{\ \delta x\ }{\ x\ }$	$D_A / \text{倍}$	$D_b / \text{倍}$
(i)	11.1	$7.64 \times 10^{-3}$	0	$1.35 \times 10^{-1}$	17.7	—
(ii)	11.1	0	$3.27 \times 10^{-2}$	$1.42 \times 10^{-1}$	—	4.3
(iii)	12.1	$7.64 \times 10^{-3}$	$3.27 \times 10^{-2}$	$1.43 \times 10^{-1}$	—	—

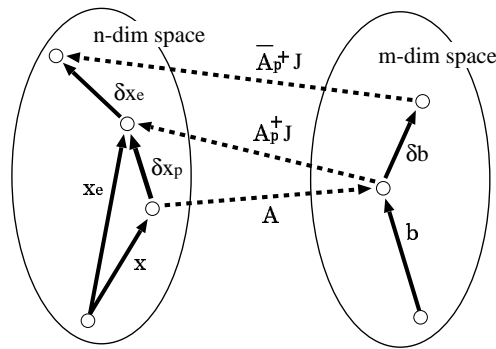


図 4-37: RLS における線形写像

や  $\delta b$  が存在しない場合でも RLS で求めることができるのは図 4-37 の  $x_e$  であり、 $x$  に対して  $\delta x_p$  の相違を生じる。この相違の大きさは、測定値  $b$ 、 $\delta b$  や係数行列の計算誤差  $\delta A$  には依存せず（ただし、パラメータ  $\gamma$  には依存する）、設計した行列  $K$  の特性によって決定される。設計したフィルタを適用した場合の  $\delta x_p$  の大きさの上限  $D_{RLS}$  は次式で表すことができる。

$$\frac{\|\delta x_p\|}{\|x\|} \leq D_{RLS} \tag{4-43}$$

$$D_{RLS} = \|(A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T A - I_n\|$$

また、フィルタの特性によって  $x$  がどのような分布をもつ  $x_e$  に変化するかを調べることによりフィルタの特性を評価する方法としてモデル解像度行列を用いる方法がある。モ

デル解像度行列を用いて次のようにしてフィルタの特性を評価する [58]。  $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$  を RLS により推定解を求める式 ((4-42) 式) に代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{x}_e = (A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T A \mathbf{x} \quad (4-44)$$

$$= R \mathbf{x} \quad (4-45)$$

$$= \mathbf{v}_{R1} x_1 + \mathbf{v}_{R2} x_2 + \cdots + \mathbf{v}_{Rn} x_n \quad (4-46)$$

行列  $R$  はモデル解像度行列と呼ばれる。  $\mathbf{v}_{Rj}$  は  $R$  の  $j$  番列ベクトルを表す。例えば、  $\gamma = 0$  とすると通常の最小二乗法の式になり、  $R$  は単位行列になるため常に  $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}$  が成り立つ。  $\gamma \neq 0$  であれば、  $R$  は単位行列ではなくなり、推定値は  $\mathbf{x}$  の重みつき平均で表されることになる。つまり、適用したフィルタの影響によって  $\mathbf{x}_e$  がどのように  $\mathbf{x}$  から外れるかを調べることができる。モデル解像度行列を数値的に評価する方法として、Dirichlet スプレッド関数と呼ばれるものがあり、次式で定義される [58]。

$$\text{spread}(R) = \|R - I_n\|^2 \quad (4-47)$$

上式に含まれる行列  $R - I_n$  は (4-43) 式の右辺の行列と同じであり、(4-43) 式と (4-47) 式は本質的に等価である。ただし、Dirichlet スプレッド関数では  $R - I_n$  の行列ノルムをユークリッドノルム (正確にはユークリッドノルムの二乗) で求めており、(4-43) 式ではスペクトルノルムで求めている。スペクトルノルム  $\leq$  ユークリッドノルム であるので、本研究では (4-43) 式のスペクトルノルムを用いて  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_p\|}{\|\mathbf{x}\|}$  の上限値を評価する。また、帯電電荷測定法分野では「逆計算の効果も含めた点像分布関数」を用いてフィルタの特性評価を行った例がある [12]。この方法では  $\mathbf{x}$  の要素のうち一つだけを 1 とし、それ以外の要素を 0 としたときの  $\mathbf{x}_e$  の分布の広がり方を調べる。これはモデル解像度行列の各列ベクトルの要素の分布の様子を調べることと同義である。また、これらの方法では  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_e$  との間の線形関係を取り扱っており、重ね合わせが可能である。本研究においても、(4-46) 式で  $x_j = 1$ ,  $x_k = 0$  ( $k \neq j$ ) として求められる  $\mathbf{x}_e$  (=  $R$  の  $j$  番列ベクトル  $\mathbf{v}_{Rj}$ ) を用いてフィルタの特性評価を行う。以下では、フィルタの特性評価を行う場合に  $x_j = 1$ ,  $x_k = 0$  ( $k \neq j$ ) とすることを単に  $x_j = 1$  として表記する。

(4-43) 式に含まれる  $D_{RLS}$  は上限値であり、 $\mathbf{x}$  と  $K$  との適合性が最も悪い状態であるときの値が算出されるために、使用する  $\gamma$  によっては容易に過大となる。この原因は次のように考えられる。Tikhonov の正則化法では一つの重み係数  $\gamma$  を用いて空間全体に対する拘束レベルを調整するが、実際には位置毎によって拘束条件を満足する度合いは異なるはずである (空間的に定常性を仮定できない)。つまり、どのようなフィルタを設計しても Tikhonov の正則化法を適用している限り、任意の  $\mathbf{x}$  に対して  $\delta \mathbf{x}_p$  を 0 にすることはできない。そのため、重み係数を多パラメータ化する方法や非線形フィルタ

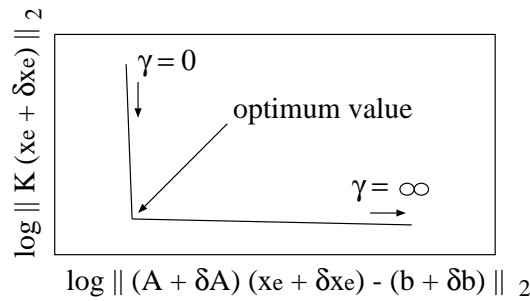


図 4-38:  $L$  カーブ法

を適用する方法などの開発が必要ではあるが、非線形問題を解くときの計算コストは線形問題に比べて遥かに高く実用性に問題がある。したがって、ここでは Tikhonov の正則化法の限界内での定量的かつ安定した推定を目的とする。

次に設計した行列  $K$  に対して 重み係数  $\gamma$  を決める必要がある。ここでは、 $\gamma$  の選定方法として  $K$ ,  $\delta A$ ,  $b$ ,  $\delta b$  を考慮した上で  $\gamma$  の最適値を決定する  $L$  カーブ法を用いる。 $L$  カーブ法では次のようにして  $\gamma$  の値を決定する [61]。ある  $\gamma$  に対して方程式を解いた結果  $x_e + \delta x_e$  に対し、方程式の残差項のノルム  $\|\bar{A}(x_e + \delta x_e) - (b + \delta b)\|$  と拘束項のノルム  $\|K(x_e + \delta x_e)\|$  を計算する。 $\gamma$  をパラメータとして同様の計算を繰り返し、得られた値を log-log プロットすると図 4-38 に示すような  $L$  字状のグラフ ( $L$  カーブ) が得られる。 $\gamma$  が小さいときは、拘束の度合いが小さくペナルティを付加した方程式は  $\bar{A}(x_e + \delta x_e) = b + \delta b$  が支配的である。このため、 $\gamma$  の変化に対して残差項のノルムの変化は比較的小さく、拘束項のノルムのほうがずっと大きく変化する (図 4-38 の曲線の左上側)。一方、 $\gamma$  がある程度大きくなると、この傾向は逆転し拘束項のノルムのほうが安定する (図 4-38 の曲線の右下側)。この曲線のコーナ付近 (左下付近) が  $\bar{A}(x_e + \delta x_e) = b + \delta b$  と  $K(x_e + \delta x_e) = 0$  の効果とが最も良くバランスした状態だと見なせるので、ここでの  $\gamma$  を最適値と判断する。実際には、コーナ位置の決定を定量的に行うために、 $L$  カーブの曲率最大点での  $\gamma$  を採用する。

#### 4.5.8 RLS で求めた推定解の変動 $\delta x_e$ の上限値

$\gamma$  を決定すると RLS による推定解  $x_e + \delta x_e$  が得られる。RLS においては  $\delta A$  や  $\delta b$  による推定解の変動  $\delta x_e$  の始点は  $x$  ではなく  $x_e$  となる (図 4-37 参照)。ところが、RLS を用いた場合の  $\delta b$  や  $\delta A$  による推定解の変動の上限は明らかにされていない。 $x_e + \delta x_e$  の推定精度に関する定量的な検討を行うために、 $\delta A$ ,  $\delta b$  による変動  $\delta x_e$  の上限値を与える式を導出した。ただし、導出過程において  $x_e$  を基準として数式を整理するこ

表 4-13:  $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$  の説明

	使用行列	補足事項	意味
$E_{RLS}^{ref}$	$A$	—	$\frac{\ \delta \mathbf{x}_e\ }{\ \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\ }$ の上限値
$E_{RLS}$	$\bar{A} (= A + \delta A)$	—	$\frac{\ \delta \mathbf{x}_e\ }{\ \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\ }$ の上限値
$E_{RLS}^{app}$	$\bar{A} (= A + \delta A)$	仮定: $\ \delta \mathbf{x}_e\  \ll \ \mathbf{x}_e\ $	$\frac{\ \delta \mathbf{x}_e\ }{\ \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\ }$ の上限値

とができなかったため、 $\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e$  を基準とした。したがって、導出した式によって計算した上限値が実用上意味を持つためには  $\|\delta \mathbf{x}_e\| \ll \|\mathbf{x}_e\|$  を満足する必要がある。

以下に、 $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}$  の上限値を与える式として 3 種類の式を示す。3 種類の式で与えられる上限値を、示す順にそれぞれ  $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$  として表す。式を示す前に  $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$  それぞれの計算式の相違について表 4-13 にまとめる。

$E_{RLS}^{ref}$  を与える式を次に示す。

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \leq E_{RLS}^{ref} \quad (4-48)$$

$$E_{RLS}^{ref} = E_1 \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + E_2 \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + E_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|A\|^2} + E_4 \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}$$

$$E_1 = \|(A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T\| \|A\|$$

$$\mathbf{r} = (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - A(\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e)$$

$$E_2 = \|(A_p^T A_p)^{-1}\| \|A\| \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}$$

$$E_3 = \|(A_p^T A_p)^{-1}\| \|A\|^2$$

$$E_4 = \|(A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}$$

ただし、 $m \geq n$ ,  $\text{Rank}(A_p) = \text{Rank}(\bar{A}_p) = n$  でなければならない。(4-48) 式は  $A$  を用いて上限値  $E_{RLS}^{ref}$  を計算する式である。しかし、数値電界計算によって計算した係数行列  $A$  は必ず数値誤差を含んでおり、実際に使用可能な行列は  $A$  ではなく  $A + \delta A$  である。計算した係数行列の計算精度が高い場合には近似的に  $A \simeq A + \delta A$  として、上式に代入することも考えられる。しかし、本質的に意味が異なるため、 $E_{RLS}^{ref}$  は参考値として上限値を与えるにすぎない。そこで、 $A$  ではなく  $\bar{A} (= A + \delta A)$  を用いて上限値  $E_{RLS}$  を計算する式を以下に示す。

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \leq E_{RLS} \quad (4-49)$$

$$E_{RLS} = \frac{F_0}{1 - F_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} - F_3 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} - F_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|\bar{A}\|^2}}$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= F_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + F_2 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + F_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|\bar{A}\|^2} \\
&\quad + F_4 \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|} + F_5 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|} \\
F_1 &= \|(\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \bar{A}^T\| \|\bar{A}\| \\
\mathbf{r} &= (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - \bar{A}(\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) \\
F_2 &= \|(\bar{A}_p^T \bar{A}_p)^{-1}\| \|\bar{A}\| \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \\
F_3 &= \|(\bar{A}_p^T \bar{A}_p)^{-1}\| \|\bar{A}\|^2 \\
F_4 &= \|(\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \bar{A}^T\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \\
F_5 &= \|(\bar{A}_p^T \bar{A}_p)^{-1}\| \|\bar{A}\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}
\end{aligned}$$

ただし,  $m \geq n$ ,  $\text{Rank}(A_p) = \text{Rank}(\bar{A}_p) = n$  とし, さらに次の条件を満たす必要がある。

$$F_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + F_3 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + F_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|\bar{A}\|^2} < 1$$

(4-49) 式が RLS 適用時の  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}$  の上限値を表す式として今回定義した中では最も近似が少ない式であるが, 式の導出過程において (4-50) 式の不等号関係を用いており, 上限値として大きな値が算出される可能性がある。

$$\|(\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - \bar{A} \mathbf{x}_e\| \leq \|(\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - \bar{A}(\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e)\| + \|\bar{A}\| \|\delta \mathbf{x}_e\| \quad (4-50)$$

そこで,  $\|\delta \mathbf{x}_e\| \ll \|\mathbf{x}_e\|$  を仮定することにより, (4-50) 式の左辺を次式で近似することを考える。

$$\|(\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - \bar{A} \mathbf{x}_e\| \simeq \|(\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - \bar{A}(\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e)\| \quad (4-51)$$

(4-51) 式の近似を用いて導出した上限値  $E_{RLS}^{app}$  を表す式を次に示す。

$$\begin{aligned}
\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} &\leq E_{RLS}^{app} \quad (4-52) \\
E_{RLS}^{app} &= \frac{F_0}{1 - F_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} - F_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|\bar{A}\|^2}}
\end{aligned}$$

ただし,  $m \geq n$ ,  $\text{Rank}(A_p) = \text{Rank}(\bar{A}_p) = n$  とし, さらに次の条件を満たす必要がある。

$$F_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + F_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|\bar{A}\|^2} < 1$$

付録 D において,  $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$  の導出過程について述べる。

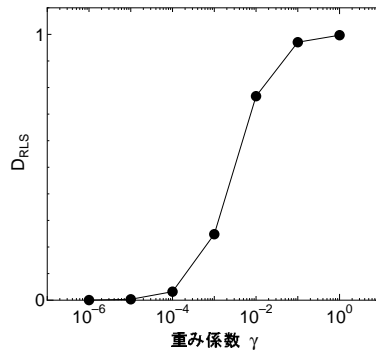
実際に  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}$  の上限値を計算するときは次の手順で行う。まず  $E_{RLS}$  を算出する。もし仮定を満足していても、 $E_{RLS}$  を与える式の分母が非常に小さくなるために  $E_{RLS}$  が過大となる場合は、 $E_{RLS}^{opp}$  を計算する。同時に  $E_{RLS}^{ref}$  を計算し、参考値として用いる。実用上使用して意味があるのは  $E_{RLS}$  と  $E_{RLS}^{opp}$  であり、 $E_{RLS}^{ref}$  はあくまで参考値であることに注意する。

#### 4.5.9 単純正則化法による推定

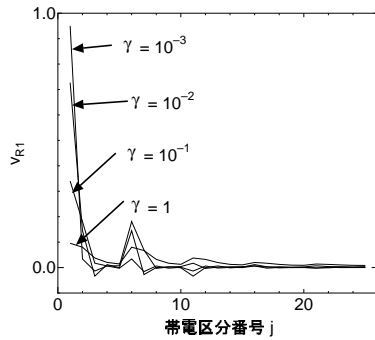
RLS の一つにフィルタ行列  $K$  を単位行列  $I_n$  とする手法があり、 $K = I_n$  とした場合は単純正則化法（あるいはダンプ付き最小二乗法）と呼ばれる [56, 58]。ここでは、単純正則化法を SRLS (Standard-form RLS) と呼ぶことにする。単純正則化法では  $K = I_n$  としていることから、 $\mathbf{x}$  のノルムを最小化するような拘束項を付加することになる。また単純正則化法は、特異値に小さな値を加えて係数行列の条件数を改善する方法であるとも解釈することができる。一方、先に述べたカットオフ法は、小さな特異値を零とすることにより係数行列の条件数を改善する方法である。つまり単純正則化法とカットオフ法とは特異値を操作して係数行列の条件数を改善するという点では類似の逆計算手法であり、カットオフ法も Tikhonov の正則化法の範疇に含まれる。

以下で SRLS による解の推定を行う。行列  $K$  に使用するフィルタが単位行列と決定されたので、次にフィルタの特性評価を行った。(4-43) 式の  $D_{RLS}$  を、重み係数  $\gamma$  をパラメータとして計算した結果を図 4-39(a) に示す。また  $x_1 = 1$ ,  $x_{13} = 1$  としてモデル解像度行列の 1 番, 13 番列ベクトルを求めた結果をそれぞれ図 4-39(b), 図 4-39(c) に示す。 $D_{RLS}$  は  $\gamma = 1.0 \times 10^{-4}$  のときに  $3.20 \times 10^{-2}$  であるが、 $\gamma$  を大きくすると拘束項の影響が大きくなるため、当然  $D_{RLS}$  は大きくなり  $\gamma = 1.0 \times 10^{-3}$  の場合は  $2.48 \times 10^{-1}$  となる。またモデル解像度行列の 1 番列ベクトルのピーク値を見てみると、 $x_1 = 1$  の場合  $\gamma = 1.0 \times 10^{-3}$  で  $x_{e1} = 9.50 \times 10^{-1}$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$  で  $x_{e1} = 7.27 \times 10^{-1}$  となる。 $x_{13} = 1$  のモデル解像度行列の 13 番列ベクトルのピーク値も  $x_1 = 1$  の場合とほぼ同レベルに低下する。ケース (i) ~ (iii) に対して SRLS を適用した場合の  $L$  カurve の計算結果を図 4-40 に示す。 $L$  カurve の曲率が最大となったときの  $\gamma$  は、ケース (i) では  $\gamma = 1.98 \times 10^{-6}$  であり、ケース (ii), (iii) ではともに  $\gamma = 1.37 \times 10^{-6}$  となった。

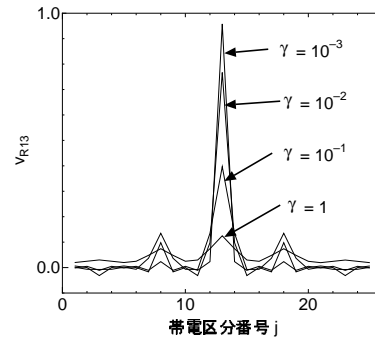
$L$  カurve 法で決定した  $\gamma$  を使用して SRLS で推定した帯電電荷分布を図 4-41 に示す。RLS を適用した場合は  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_e$  との間に相違  $\delta \mathbf{x}_p$  を必ず生じることは先に述べたとおりである。そこで、ここでは  $\mathbf{x}$  に対する推定誤差  $\delta \mathbf{x}_p + \delta \mathbf{x}_e$  および  $\mathbf{x}_e$  に対する解の変動  $\delta \mathbf{x}_e$  に対して、誤差拡大率を新たに  $D_A = \frac{\|\delta \mathbf{x}_p + \delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}\|} / \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ ,  $D_b = \frac{\|\delta \mathbf{x}_p + \delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}\|} / \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ ,  $D_{eA} = \frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e\|} / \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ ,  $D_{eb} = \frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e\|} / \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$  として定義し、これらの値を表 4-14 に



(a)  $D_{RLS}$



(b) モデル解像度行列の 1 番列ベクトル



(c) モデル解像度行列の 13 番列ベクトル

図 4-39: SRLS のフィルタ特性

示す。また表には  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_p\|}{\|\mathbf{x}\|}$ , 使用した  $\gamma$  における  $D_{RLS}$  の値,  $x_1 = 1$  あるいは  $x_{13} = 1$  としたときのモデル解像度行列の列ベクトルのそれぞれのピーク値  $x_{e1}$ ,  $x_{e13}$  の値も示している。L カーブから求めた  $\gamma$  が小さいために LS による推定解とほぼ同精度であり, 推定精度は改善されなかった。また  $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$  の計算結果を表 4-15 に示す。ここでは  $\gamma$  が小さいために  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \simeq \frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}$  と考えることができるが, 上限値を比較すると表 4-11 の  $E_{LS}^{ref}$  (LS の推定結果の値) と  $E_{RLS}^{ref}$  は同じ値となるが,  $E_{RLS}$  はケース (i), (iii) の場合に分母が負であるために不定となった。 $E_{RLS}^{app}$  も表 4-11 の  $E_{LS}^{app}$  に比べてケース (i) の場合で約 2.6 倍, ケース (iii) の場合で約 3.0 倍の値が算出されているが, これは  $E_{RLS}^{app}$  の計算式の分子よりも分母が原因となっている。今回の配置では SRLS の適用によって推定精度が改善されなかったが, そもそもフィルタ行列  $K$  は解の先験情報に基づいて作成するべきであり, 帯電電荷分布  $\mathbf{x}$  のノルムを最小化するという方法は帯電電荷の推定に必ずしも適合しない。

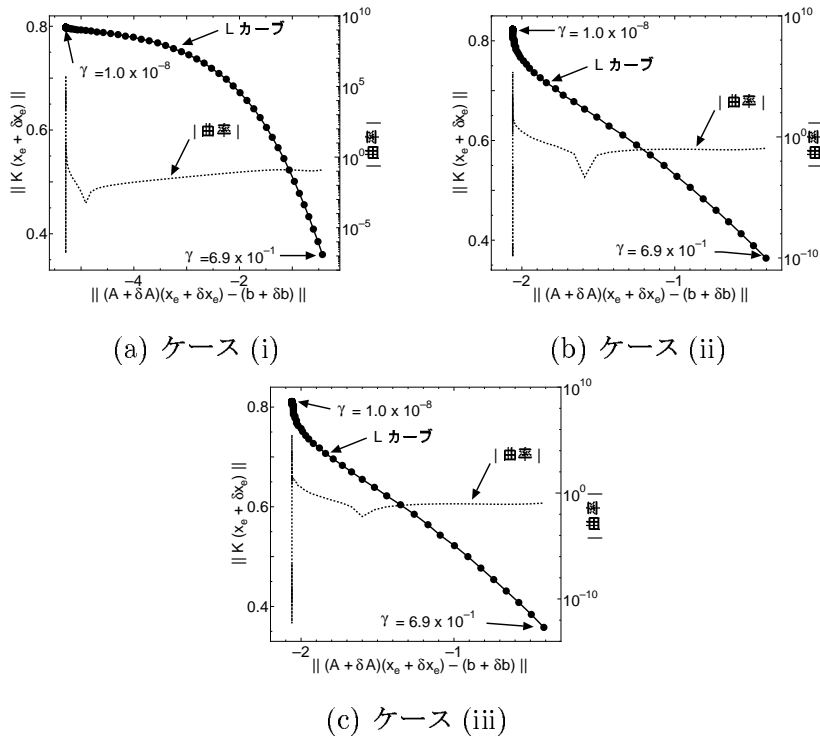
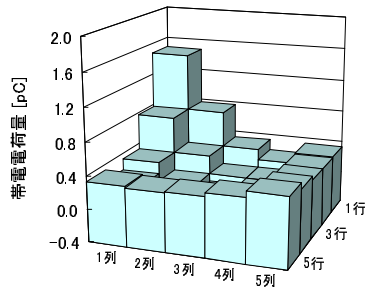


図 4-40: SRLS における  $L$  カーブの計算結果 ( $m = 400$ ,  $n = 25$ )

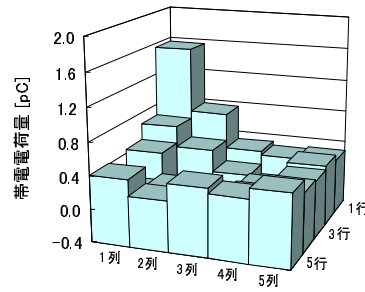
#### 4.5.10 ラプラシアンフィルタに基づいて設計した $K$ を用いた RLS による推定

絶縁物表面の電荷分布は場所毎に連続的に変化しているのが一般であり、ここでは帯電電荷分布の連続性の先験情報に基づき、場所毎に滑らかに変化するという仮定の下に、平滑化効果を有するラプラシアンフィルタに基づいて作成した行列  $K$  を用いた [59]。この仮定がどの程度満足されるかは、帯電電荷分布の数値モデル化方法（帯電区分数など）と実際の帯電電荷分布とがどれだけ適合しているかに依存する。ラプラシアンフィルタには画像処理などで使われる 8 方向成分に対する二次元のラプラシアンフィルタを使用した [62]。二次元 8 方向ラプラシアンフィルタは図 4-42(a) に示すように中心区分の重みを  $-8$ 、周囲の重みを  $1$  とする画像フィルタである。ラプラシアンフィルタを行列  $K$  に変換する方法は以下のとおりである。今回の配置では帯電区分数は  $n = 25$  としているため  $K$  のサイズは 25 行 25 列となり、対角要素がフィルタの中心区分に相当する。例えば 13 行目は区分番号 13 の要素に対するフィルタ設定になり、まず  $K(13, 13) = -8$  とする。13 番区分の周りには 7, 8, 9, 12, 14, 17, 18, 19 番区分が存在するので、これらの番号  $k$  に合わせて  $K(13, k)$  に  $1$  をセットする。13 行の他の要素は  $0$  とする。このような操作を繰り返して  $K$  の要素に値をセットしていく。ただし、区分 1, 5 など（端



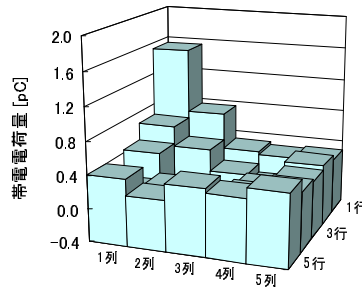


	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.48	0.77	0.33	0.19	0.33
2行	0.77	0.33	0.10	0.10	0.31
3行	0.33	0.10	0.01	0.09	0.32
4行	0.19	0.10	0.09	0.19	0.37
5行	0.33	0.31	0.32	0.37	0.44



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.55	0.74	0.30	0.26	0.28
2行	0.66	0.40	0.13	0.01	0.35
3行	0.45	0.00	0.02	0.15	0.30
4行	0.11	0.19	0.01	0.21	0.33
5行	0.41	0.21	0.42	0.35	0.48

(a) ケース (i)  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e = \bar{A}_p^+ \mathbf{b}$       (b) ケース (ii)  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e = A_p^+ (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.53	0.74	0.30	0.25	0.28
2行	0.65	0.40	0.13	0.02	0.35
3行	0.44	0.00	0.01	0.15	0.30
4行	0.11	0.19	0.01	0.21	0.32
5行	0.40	0.21	0.41	0.35	0.47

(c) ケース (iii)  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e = \bar{A}_p^+ (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$

図 4-41: SRLS により推定した帯電電荷分布 ( $m = 400, n = 25$ )

部 A) や区分 2, 3, 4 など (端部 B) のように端部に存在する区分では, 隣接区分数が 8 ではなくするためラプラシアンフィルタをそのまま適用することができない。そこで, 端部用のフィルタとして, 2 種類のフィルタを検討した。一つ目は図 4-42(b), (c) に示すように存在しない区分に対する重みは零とし, それにあわせて中心区分の重みを修正したフィルタである。例えば端部 A に属する区分 1 では, 図 4-42(b) のフィルタを使用し,  $K(1, 1) = 3, K(1, 2) = -1, K(1, 6) = -1, K(1, 7) = -1, K(1, k) = 0 (k \neq 1, 2, 6, 7)$  とする。これは端部では中心区分に対する差分値つまり一次微分値を零とするようなフィルタとなる。二つ目のフィルタの説明に図 4-43 を使用する。図 4-43 は中心区分の値  $e$  と隣接する 8 区分の値 ( $e$  以外) を表している。このときに中心区分でのラプ

表 4-14: SRLS による推定結果

	ケース (i)	ケース (ii)	ケース (iii)
$D_{\max}$	1.34	7.76	7.94
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$7.64 \times 10^{-3}$	0	$7.64 \times 10^{-3}$
$\frac{\ \delta b\ }{\ b\ }$	0	$3.27 \times 10^{-2}$	$3.27 \times 10^{-2}$
$\frac{\ \delta x_p + \delta x_e\ }{\ x\ }$	$1.44 \times 10^{-2}$	$1.53 \times 10^{-1}$	$1.48 \times 10^{-1}$
$D_A$	1.9	—	—
$D_b$	—	4.7	—
$\frac{\ \delta x_e\ }{\ x_e\ }$	$1.44 \times 10^{-2}$	$1.53 \times 10^{-1}$	$1.48 \times 10^{-1}$
$D_{eA}$	1.9	—	—
$D_{eb}$	—	4.7	—
$\frac{\ \delta x_p\ }{\ x\ }$	$4.49 \times 10^{-5}$	$3.11 \times 10^{-5}$	$3.11 \times 10^{-5}$
$D_{RLS}$	$6.53 \times 10^{-4}$	$4.52 \times 10^{-4}$	$4.52 \times 10^{-4}$
$x_{e1}$	1.00	1.00	1.00
$x_{e13}$	1.00	1.00	1.00

ラシアン  $L$  は、 $e$  を中心とした 4 方向の 2 次微分を考慮することにより次式で与えられる。ただし、隣接する区分間の距離は全て 1 とする。

$$\begin{aligned} L &= (a - 2e + i) + (c - 2e + g) + (b - 2e + h) + (d - 2e + f) \\ &= -8e + a + b + c + d + f + g + h + i \end{aligned} \quad (4-53)$$

上式の各係数値が図 4-42(a) の重みを表す。ここで、中心  $e$  は端部  $B$  ( $k = 2, 3, 4$  の場合) にあるとすると  $a, b, c$  は存在しないことになるが、 $a-e-i, b-e-h, c-e-g$  方向の二次微分値が零となるように  $a, b, c$  の値を次式のように仮想値として設定する。

$$\left. \begin{aligned} a &= 2e - i \\ b &= 2e - h \\ c &= 2e - g \end{aligned} \right\} \quad (4-54)$$

(4-54) 式を (4-53) 式に代入すると次式が得られる。

$$L = -2e + d + f \quad (4-55)$$

(4-55) 式の各係数値を重みとすることにより図 4-44(c) のフィルタが得られる。端部  $A$  に対しても同様に考えることにより図 4-44(b) のフィルタが得られる。つまり、図 4-44(b),

表 4-15: SRLS による推定解の  $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$

	ケース (i)	ケース (ii)	ケース (iii)
$\frac{\ \delta \mathbf{b}\ }{\ \mathbf{b}\ }$	0.0	$3.27 \times 10^{-2}$	$3.27 \times 10^{-2}$
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$7.64 \times 10^{-3}$	0.0	$7.64 \times 10^{-3}$
$\frac{\ \delta \mathbf{b}\ }{\ \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\ }$	0.0	$3.27 \times 10^{-2}$	$3.27 \times 10^{-2}$
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$7.58 \times 10^{-3}$	0.0	$7.58 \times 10^{-3}$
$E_1$	$4.71 \times 10$	–	$4.71 \times 10$
$E_2$	$1.36 \times 10$	–	$5.03 \times 10$
$E_3$	$2.22 \times 10^3$	–	$2.22 \times 10^3$
$E_4$	–	$3.20 \times 10$	$3.24 \times 10$
$F_1$	$4.55 \times 10$	–	$4.55 \times 10$
$F_2$	1.80	–	$4.51 \times 10$
$F_3$	$2.07 \times 10^3$	–	$2.07 \times 10^3$
$F_4$	–	$3.20 \times 10$	$3.11 \times 10$
$F_5$	–	–	$1.41 \times 10^3$
$E_{RLS}^{ref}$	$5.94 \times 10^{-1}$	1.05	1.93
$E_{RLS}$	不定	1.05	不定
$E_{RLS}^{app}$	$8.92 \times 10^{-1}$	1.05	4.06
$\frac{\ \delta \mathbf{x}_e\ }{\ \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\ }$	$1.45 \times 10^{-2}$	$1.51 \times 10^{-1}$	$1.48 \times 10^{-1}$

(c) のフィルタは領域外への仮想分布の線形補外を仮定してラプラシアンフィルタを修正したものである。図 4-42, 図 4-44 のフィルタをそれぞれラプラシアンフィルタ 1, ラプラシアンフィルタ 2 とする。

二つのフィルタの比較のために, 4.4 節で使用した図 4-17(d) の帯電電荷分布  $\mathbf{x}$  を対象として数値シミュレーションを行った。図 4-17(d) は一次関数で表される電荷分布であり, 全ての区分でラプラシアンが零になる。測定模擬値は  $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$  とし求め,  $\delta A$ ,  $\delta \mathbf{b}$  はともに零とした。ラプラシアンフィルタ 1, 2 を用いて RLS により推定した帯電電荷分布を図 4-45 に示す。ただし,  $\gamma = 100$  として拘束項の影響を故意に過大とした。図 4-45(a) では端部での一次微分値を零とするフィルタの効果が分布全体に波及したために平滑化されている。一方, 図 4-45(b) では付加した拘束項が仮定した帯電電荷分布に完全に適合しており, 推定した電荷分布は仮定した電荷分布と全く同じ値となった。この結果より, 行列  $K$  にはラプラシアンフィルタ 2 を適用するのが妥当だと判断する。ただし, 端部の

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

0	0	0
0	-3	1
0	1	1

0	0	0
1	-5	1
1	1	1

(a) 端部以外      (b) 端部 A      (c) 端部 B

図 4-42: ラプラシアンフィルタ 1

$a$	$b$	$c$
$d$	$e$	$f$
$g$	$h$	$i$

図 4-43: ラプラシアンフィルタの区分配置

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

0	0	0
0	0	0
0	0	0

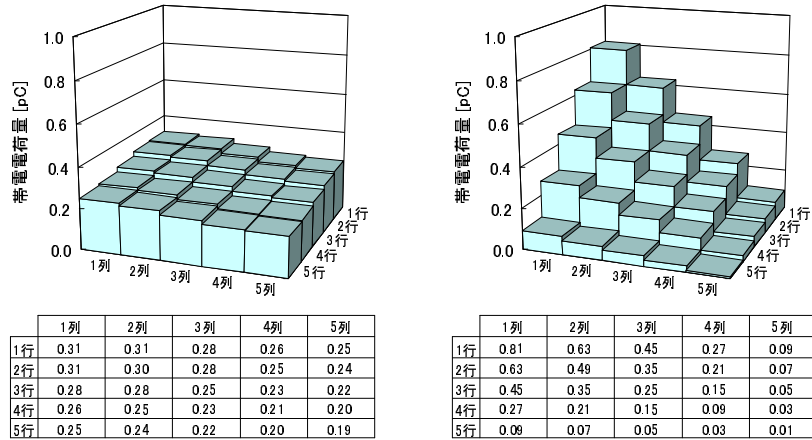
0	0	0
1	-2	1
0	0	0

(a) 端部以外      (b) 端部 A      (c) 端部 B

図 4-44: ラプラシアンフィルタ 2

存在のために区分毎に適用するフィルタ（重み）が異なるため  $K$  の各行のユークリッドノルムに相違を生じる。それでは重み係数の拘束項への影響が各区分で異なることとなるため、フィルタを  $K$  に設定したのちに  $K$  の各行のノルムが 1 になるように規格化を行う。図 4-45 の結果においても  $K$  の行ノルムの規格化を行った。

次に  $K$  をラプラシアンフィルタ 2 に基づいて作成し、ケース (i) ~ (iii) において RLS により帯電電荷分布の推定を行った結果について述べる。図 4-46 に  $K$  の特性評価を行った結果を示す。 $D_{RLS}$  は  $\gamma = 1.0 \times 10^{-4}$  のときに  $5.17 \times 10^{-2}$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-3}$  の場合は  $3.57 \times 10^{-1}$  となり、ラプラシアンフィルタが有する平滑化作用のために  $\gamma$  を大きくするにしたがって  $D_{RLS}$  の値は悪化する。またモデル解像度行列の列ベクトルのピーク値を見てみると、 $x_1 = 1$  の場合  $\gamma = 1.0 \times 10^{-3}$  で  $x_{e1} = 9.61 \times 10^{-1}$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$  で  $x_{e1} = 8.29 \times 10^{-1}$  となる。 $x_{13} = 1$  の場合は  $\gamma = 1.0 \times 10^{-3}$  で  $x_{e13} = 9.51 \times 10^{-1}$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$  で  $x_{e13} = 7.30 \times 10^{-1}$  で  $x_{e1}$  に比べて平滑化の影響が大きくなったが、これは  $x_{e1}$  では端部用のフィルタ（全ての重みが零）を使用しているためで



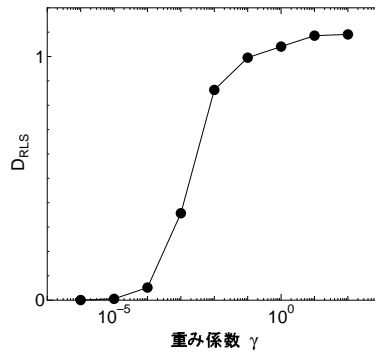
(a) ラプラシアンフィルタ 1      (b) ラプラシアンフィルタ 2

図 4-45: ラプラシアンフィルタの端部処理の相違

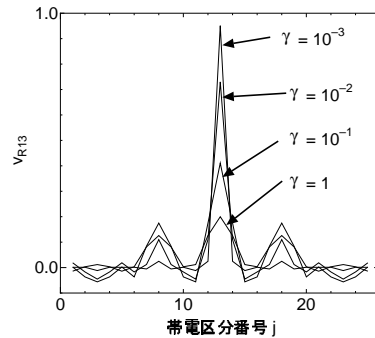
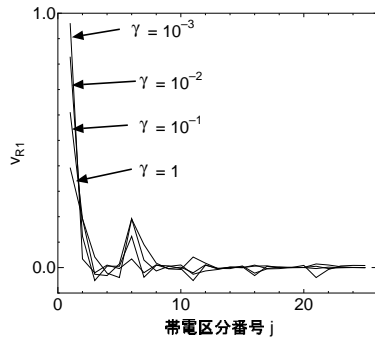
ある。

ケース (i) ~ (iii) に対して RLS を適用した場合の  $L$  カーブの計算結果を図 4-47 に示す。 $L$  カーブ法の結果から、ケース (i) では  $\gamma = 1.37 \times 10^{-6}$  となり、ケース (ii), (iii) ではともに  $\gamma = 4.48 \times 10^{-2}$  となった。ただし、ケース (ii), (iii) の  $L$  カーブではコーナー手前の点で曲率最大点 (図の左側のピーク) を有しているが、コーナー付近で曲率のピーク (図の右側のピーク) を持つ点での  $\gamma$  を使用した。これらの  $\gamma$  を用いて RLS により推定した帯電電荷分布を図 4-48 に示す。SRLS のときと同様に  $D_A$ ,  $D_b$  などの結果を表 4-16 に示す。ケース (i) の場合は  $\gamma$  の値が小さいために推定精度は LS のときの結果と同じである。ケース (ii), (iii) での推定精度はそれぞれ  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_p + \delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}\|} = 5.89 \times 10^{-2}$ ,  $6.48 \times 10^{-2}$  であり、LS, カットオフ法, SRLS に比べて推定精度は改善された。 $\mathbf{x}$  を基準とした誤差拡大率  $D_b$  が 1.8 倍であるのに対して、 $\mathbf{x}_e$  を基準とした  $D_{eb}$  は 0.72 倍であり、 $\mathbf{x}_e$  周りでの逆計算は  $\mathbf{x}$  に比べて安定した結果となった。 $D_{RLS}$  の値はケース (ii), (iii) において  $9.77 \times 10^{-1}$  であり、最悪ケースでは  $\delta \mathbf{x}_p$  は  $\mathbf{x}$  に対して 100% 程度になることになる。しかし、計算結果の  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_p\|}{\|\mathbf{x}\|}$  はケース (ii), (iii) とともに  $5.13 \times 10^{-2}$  であり、 $D_{RLS}$  の約 5.3% でしかない。また、 $\gamma$  の値を  $4.48 \times 10^{-3}$ ,  $4.48 \times 10^{-1}$  とした場合の推定精度は  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_p + \delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}\|} = 7.38 \times 10^{-2}$ ,  $1.81 \times 10^{-1}$  であり、 $L$  カーブ法で決定した  $\gamma$  を用いたときよりも推定精度は低下した。この結果から  $L$  カーブ法による  $\gamma$  の決定が妥当であることが確認できる。

また  $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$  の計算結果を表 4-17 に示す。ケース (i) の場合は SRLS の結果と同じになった。ケース (ii) では  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \leq 2.30 \times 10^{-1}$  となった。今回の結果で



(a)  $D_{RLS}$



(b) モデル解像度行列の 1 番列ベクトル

(c) モデル解像度行列の 13 番列ベクトル

図 4-46: RLS のフィルタ特性

は、 $x$  と  $x_e$  の相違は  $\frac{\|\delta x_p\|}{\|x\|}$  の値から 5% 程度で  $x$  と  $x_e$  が近いことから、以下において、 $x_e + \delta x_e$  を基準とした上限値  $E_{RLS}$  と LS の推定解の  $x + \delta x$  を基準とした上限値  $E_{LS}$  とを比較する。表 4-11 から、ケース (ii) のときに  $E_{LS} = 1.05$  であった。それに対して RLS を適用した場合には  $E_{RLS} = 2.30 \times 10^{-1}$  であり、LS の結果に対して解の変動の上限値は 1.05 から 0.23 にまで改善された。ケース (iii) の場合は  $E_{RLS}$  は分母が負となり不定であったが、 $E_{RLS}^{ref}$ 、 $E_{RLS}^{app}$  の値はそれぞれ  $E_{LS}^{ref}$ 、 $E_{LS}^{app}$  に比べて約 18%、約 25% となった。

今回の数値シミュレーションの結果では、ラプラシアンフィルタを適用した RLS の推定精度が最も高かった。また帯電電荷分布が場所毎に連続的に変化するという先験情報を使用する面、あるいは逆計算での解の安定性の面からも、ラプラシアンフィルタを使用した RLS は帯電電荷測定に適している。本研究では、ラプラシアンフィルタを使用するにあたり、帯電電荷分布は区分毎に滑らかに変化するという仮定を設けているが、RLS 適用時の推定精度は、電荷分布が先験情報をどれだけ満足しているかに依存する。しかし、区分毎に連続的に変化するという仮定は帯電区分数を増加させることでより満足させることが可能となる。以下では、ラプラシアンフィルタを用いた RLS を単に RLS と

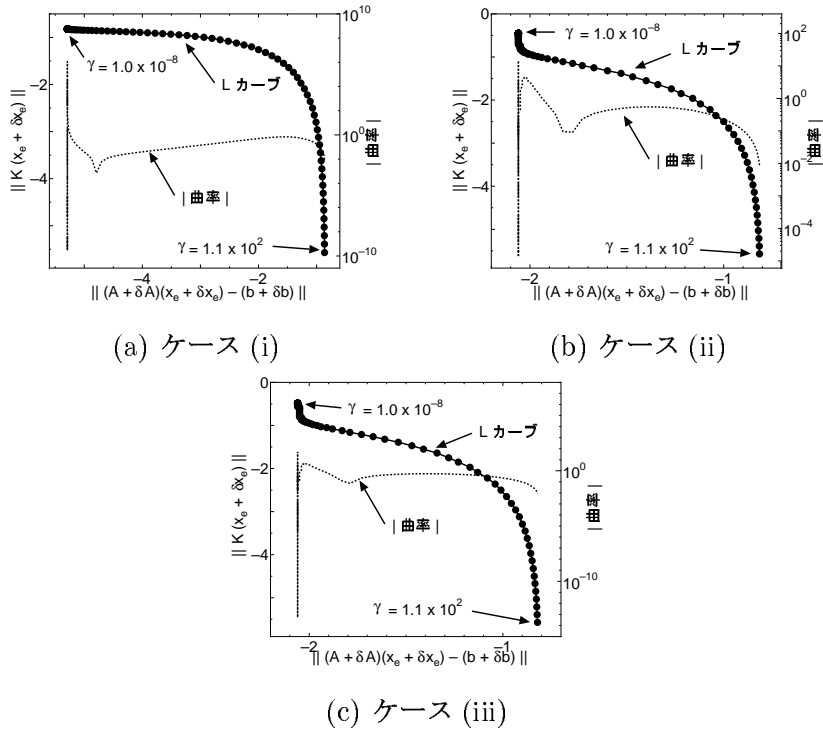


図 4-47: RLS における  $L$  カーブの計算結果 ( $m = 400, n = 25$ )

呼ぶことにする。

#### 4.5.11 RLS で求めた推定解の変動 $\delta x_e$ が上限値になる場合

LS のときと同様に, RLS を適用した場合に  $x_e$  を基準とした  $\delta b$  による解の変動  $\delta x_e$  が最大になるときの  $b, \delta b$  を求めることが可能である。ただし,  $\delta A = 0$  とする。 $\delta A = 0$  での RLS による推定解  $x_e$  は次式で表される。

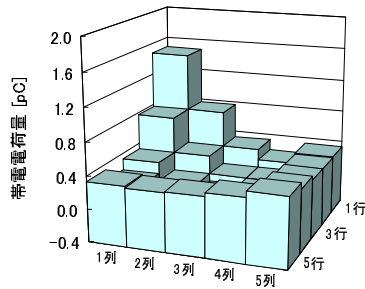
$$x_e = (A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T b \quad (4-56)$$

$$= A_p^+ J b \quad (A_p^+ J = (A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T) \quad (4-57)$$

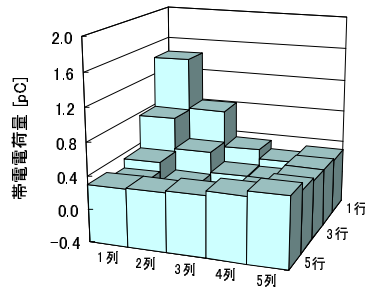
上式の  $J$  は, 図 4-37 の中で定義した行列であり,  $m$  行  $m$  列の単位行列 と  $n$  行  $m$  列の零行列から成る。 $A_p^+ J$  は  $n$  行  $m$  列の行列であり,  $A_p^+ J$  の特異値分解は次式で表される。ただし, ここでは  $m > n$  とするが,  $m = n$  の場合も考え方は同じである。

$$A_p^+ J = U' W' V'^T \quad (4-58)$$

$U', W', V'$  はそれぞれ  $n$  行  $m$  列,  $m$  行  $m$  列,  $m$  行  $m$  列の行列である。 $A_p^+ J$  の階数を  $n$  とすると  $W'$  の対角要素は  $n$  個の特異値  $\kappa'_i$  ( $i = 1 \sim n$ ) と  $m - n$  個の零要

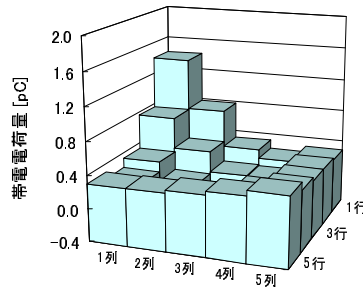


	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.48	0.77	0.33	0.19	0.33
2行	0.77	0.33	0.10	0.10	0.31
3行	0.33	0.10	0.01	0.09	0.32
4行	0.19	0.10	0.09	0.19	0.37
5行	0.33	0.31	0.32	0.37	0.44



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.42	0.78	0.32	0.20	0.29
2行	0.77	0.38	0.12	0.11	0.31
3行	0.33	0.09	-0.01	0.11	0.31
4行	0.21	0.12	0.08	0.20	0.35
5行	0.30	0.31	0.34	0.39	0.45

(a) ケース (i)  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e = \bar{A}_p^+ \mathbf{b}$       (b) ケース (ii)  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e = A_p^+ (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	1.41	0.78	0.32	0.20	0.28
2行	0.76	0.38	0.12	0.11	0.30
3行	0.33	0.09	-0.01	0.11	0.31
4行	0.21	0.12	0.08	0.20	0.35
5行	0.29	0.30	0.33	0.38	0.44

(c) ケース (iii)  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e = \bar{A}_p^+ (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$

図 4-48: RLS により推定した帯電電荷分布 ( $m = 400, n = 25$ )

素から成る。 $U'$  の  $n$  個の列ベクトル ( $K_n$  空間の正規直交基底) を  $\mathbf{u}'_i$  ( $i = 1 \sim n$ ),  $V'$  の非零特異値に対する  $n$  個の列ベクトル ( $K_m$  空間の部分空間の正規直交基底) を  $\mathbf{v}'_i$  ( $i = 1 \sim n$ ) で表すと, (4-58) 式は次式で表される。

$$A_p^+ J = \sum_{r=1}^n \kappa'_r \mathbf{u}'_r \mathbf{v}'_r^T \quad (4-59)$$

ただし, 特異値  $\kappa'_r$  は大きい順に並んでいるとする。ここで,  $\mathbf{v}'_r$  は  $A$  の像空間  $\text{Image}(A)$  の正規直交基底と等価であることに注意すると,  $\mathbf{b}$  を  $\mathbf{v}'_r$  で展開することができる。また, (4-56) 式に含まれる  $A^T$  と  $\delta\mathbf{b}$  の積を考慮すると,  $\delta\mathbf{b}$  も  $K_m$  空間の部分空間の基底  $\mathbf{v}'_r$



表 4-16: RLS による推定結果

	ケース (i)	ケース (ii)	ケース (iii)
$D_{\max}$	1.33	5.05	5.98
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$7.64 \times 10^{-3}$	0	$7.64 \times 10^{-3}$
$\frac{\ \delta b\ }{\ b\ }$	0	$3.27 \times 10^{-2}$	$3.27 \times 10^{-2}$
$\frac{\ \delta x_p + \delta x_e\ }{\ x\ }$	$1.44 \times 10^{-2}$	$5.89 \times 10^{-2}$	$6.48 \times 10^{-2}$
$D_A$	1.9	—	—
$D_b$	—	1.8	—
$\frac{\ \delta x_e\ }{\ x_e\ }$	$1.44 \times 10^{-2}$	$2.37 \times 10^{-2}$	$2.71 \times 10^{-2}$
$D_{eA}$	1.9	—	—
$D_{eb}$	—	0.72	—
$\frac{\ \delta x_p\ }{\ x\ }$	$1.25 \times 10^{-5}$	$5.13 \times 10^{-2}$	$5.13 \times 10^{-2}$
$D_{RLS}$	$7.46 \times 10^{-4}$	$9.77 \times 10^{-1}$	$9.77 \times 10^{-1}$
$x_{e1}$	1.00	$6.90 \times 10^{-1}$	$6.90 \times 10^{-1}$
$x_{e13}$	1.00	$5.07 \times 10^{-1}$	$5.07 \times 10^{-1}$

で展開することができる。 $b$ ,  $\delta b$  を基底  $v'_r$  を用いて次のように表す。

$$b/\|b\| = \sum_{i=1}^n a'_i v'_i \quad (4-60)$$

$$\delta b/\|\delta b\| = \sum_{i=1}^n \delta a'_i v'_i \quad (4-61)$$

ただし,  $a'_i$ ,  $\delta a'_i$  は展開係数を表し,  $\sum_{i=1}^n a_i'^2 = 1$ ,  $\sum_{i=1}^n (\delta a'_i)^2 = 1$  とする。(4-60) 式, (4-61) 式を用いて  $x_e$ ,  $\delta x_e$  は次のように表される。

$$x_e = \|b\| \sum_{r=1}^n \kappa'_r a'_r u'_r \quad (4-62)$$

$$\delta x_e = \|\delta b\| \sum_{r=1}^n \kappa'_r \delta a'_r u'_r \quad (4-63)$$

(4-62) 式, (4-63) 式より

$$\|x_e\|^2 = (\|b\| \sum_{i=1}^n \kappa'_i a'_i u'_i)^T (\|b\| \sum_{j=1}^n \kappa'_j a'_j u'_j) \quad (4-64)$$

$$= \|b\|^2 \sum_{i=1}^n \kappa_i'^2 a_i'^2 \quad (4-65)$$

表 4-17: RLS による推定解の  $E_{RLS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$

	ケース (i)	ケース (ii)	ケース (iii)
$\frac{\ \delta \mathbf{b}\ }{\ \mathbf{b}\ }$	0.0	$3.27 \times 10^{-2}$	$3.27 \times 10^{-2}$
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$7.64 \times 10^{-3}$	0.0	$7.64 \times 10^{-3}$
$\frac{\ \delta \mathbf{b}\ }{\ \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\ }$	0.0	$3.27 \times 10^{-2}$	$3.27 \times 10^{-2}$
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$7.58 \times 10^{-3}$	0.0	$7.58 \times 10^{-3}$
$E_1$	$4.71 \times 10$	–	9.98
$E_2$	$1.36 \times 10$	–	3.53
$E_3$	$2.22 \times 10^3$	–	$1.45 \times 10^2$
$E_4$	–	7.03	7.10
$F_1$	$4.55 \times 10$	–	$1.00 \times 10$
$F_2$	1.80	–	3.39
$F_3$	$2.07 \times 10^3$	–	$1.46 \times 10^2$
$F_4$	–	7.03	7.06
$F_5$	–	–	$1.03 \times 10^2$
$E_{RLS}^{ref}$	$5.94 \times 10^{-1}$	$2.30 \times 10^{-1}$	$3.44 \times 10^{-1}$
$E_{RLS}$	不定	$2.30 \times 10^{-1}$	不定
$E_{RLS}^{app}$	$8.92 \times 10^{-1}$	$2.30 \times 10^{-1}$	$4.00 \times 10^{-1}$
$\frac{\ \delta \mathbf{x}_e\ }{\ \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\ }$	$1.45 \times 10^{-2}$	$2.38 \times 10^{-2}$	$2.74 \times 10^{-2}$

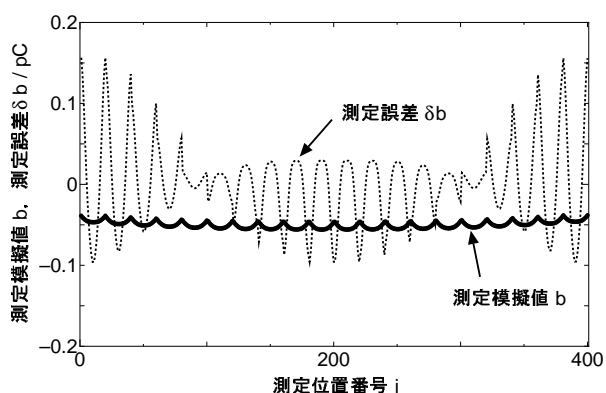
$$\|\delta \mathbf{x}_e\|^2 = \|\delta \mathbf{b}\|^2 \sum_{i=1}^n \kappa'_i \delta a'_i{}^2 \quad (4-66)$$

となるので,  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e\|}$  の  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$  に対する比  $\mu'$  は次式で表される。

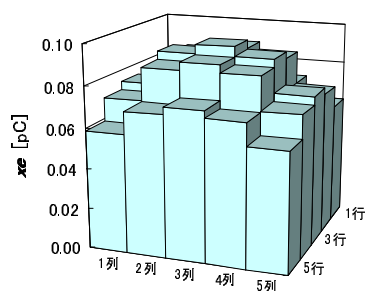
$$\mu' = \frac{(\sum_{i=1}^n \kappa'_i{}^2 (\delta a'_i)^2)^{1/2}}{(\sum_{i=1}^n \kappa'_i{}^2 a_i'^2)^{1/2}} \quad (4-67)$$

上式より,  $\mu'$  が最大となるのは  $\mathbf{b}$  が  $\mathbf{v}'_n$  方向を,  $\delta \mathbf{b}$  が  $\mathbf{v}'_1$  方向を向くときであることがわかる。

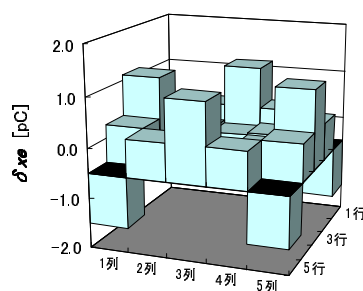
図 4-49(a) に  $m = 400$ ,  $n = 25$  の場合に RLS ( $\gamma = 4.48 \times 10^{-2}$ ) における最悪ケースの測定模擬値  $\mathbf{b}$  ( $= \mathbf{v}'_n$ ) および測定誤差  $\delta \mathbf{b}$  ( $= \mathbf{v}'_1$ ) を示す。ただし,  $\|\mathbf{b}\| = \|\delta \mathbf{b}\| = 1$  とした。図 4-49(b) に帯電電荷分布  $\mathbf{x}_e = A_p^+ J \mathbf{b}$  を, 図 4-49(c) に  $\delta \mathbf{b}$  による変動  $\delta \mathbf{x}_e = A_p^+ J \delta \mathbf{b}$  を示す。このとき  $\|\delta \mathbf{x}_e\| = 3.84$ ,  $\|\mathbf{x}\| = 3.85 \times 10^{-1}$  で  $\mu' = 9.98$  とな



(a) 測定模擬値  $b$ , 測定誤差  $\delta b$



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	0.06	0.07	0.07	0.07	0.06
2行	0.07	0.09	0.09	0.09	0.07
3行	0.07	0.09	0.10	0.09	0.07
4行	0.07	0.09	0.09	0.09	0.07
5行	0.06	0.07	0.07	0.07	0.06



	1列	2列	3列	4列	5列
1行	-1.51	0.26	1.11	0.26	-1.51
2行	0.26	-0.07	-0.13	-0.07	0.26
3行	1.11	-0.13	-0.47	-0.13	1.11
4行	0.26	-0.07	-0.13	-0.07	0.26
5行	-1.50	0.26	1.10	0.26	-1.50

(b) 仮定帯電電荷分布  $x_e$

(c) 推定誤差  $\delta x_e$

図 4-49:  $\delta A = 0$  の場合の RLS の最悪ケース ( $m = 400$ ,  $n = 25$ )

り,  $\mu'$  は  $A_p^+ J$  の条件数と一致することが確認できる。

## 4.6 逆計算手順

以後使用する逆計算の手順をまとめると以下のようなプロセスになる。

- (1) 逆行列演算, LS により帯電電荷分布を推定する。
- (2)  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$  を計算し,  $x + \delta x$  まわりでの変動レベルを評価する。

逆行列演算, LS で推定した解の変動レベルが過大である場合は, 以下の RLS による解の推定を行う。

- (3) 行列  $K$  の設計および  $\gamma$  をパラメータとした  $K$  の特性評価を行う。

(4)  $L$  カープ法を用いて  $\gamma$  を決定する。それと同時に決定した  $\gamma$  における  $K$  の特性が決まる。

(5) 決定した  $\gamma$  を用いて RLS により帯電電荷分布を推定する。

(6)  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$ ,  $E_{RLS}^{ref}$  を計算し,  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e$  まわりでの変動レベルを評価する。

$E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$ ,  $E_{RLS}$ ,  $E_{RLS}^{app}$ ,  $E_{RLS}^{ref}$  を計算する場合に  $\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}\|}$  および  $\frac{\|\delta A\|}{\|A+\delta A\|}$  の値を必要とする。ここまでの検討では, 数値シミュレーションであったために  $\delta A$  や  $\delta\mathbf{b}$  は既知であり  $\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}\|}$  および  $\frac{\|\delta A\|}{\|A+\delta A\|}$  の値を算出することができたが, 実際の測定では両者の値を知ることは不可能である。本研究では, 両者の値の近似値を以下のように計算することとした。 $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$  については測定誤差  $\delta\mathbf{b}$  はガウス乱数で模擬できる場合が多く, 測定値を観察することにより  $\delta\mathbf{b}$  が測定値の最大値に対してどの程度の偏差であるかを, およそではあるが見積もることができる。そこで, 近似的に  $\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}\|}$  を測定値の最大値に対する偏差の割合として求める。一方,  $\delta A$  は電界計算時のモデリング誤差, 計算精度, 測定時の位置誤差, 比誘電率  $\epsilon_r$  の誤差など様々なことが要因となって現れるものであり, その程度を見積もることは非常に困難である。そこで, ここでは理論的には同じ係数値となる  $A_d$  (直接法) と  $A_\lambda$  ( $\lambda$  関数法) の相違を  $\delta A$  として近似し,  $\frac{\|\delta A\|}{\|A+\delta A\|} = \frac{\|A_\lambda - A_d\|}{\|A_d\|}$  で算出する。 $A_\lambda$  を帯電電荷推定に使用した場合は  $\frac{\|\delta A\|}{\|A+\delta A\|} = \frac{\|A_\lambda - A_d\|}{\|A_\lambda\|}$  とする。電界計算に通常解法の SCM を使用した場合は, 直接解法で方程式を解くため 1 回の計算で  $A_d$  の 1 行の全要素を計算することができ,  $A_d$  と  $A_\lambda$  の二つの係数行列を計算することが可能である。ただし FMM-SCM を使用した場合は, 電界計算時に方程式を表す係数行列 (帯電電荷測定の係数行列ではない) を作成しないので, 直接法で計算する場合は 1 回の計算で 1 行の全要素を計算することができない。つまり, FMM-SCM で直接法の係数値を計算するには  $m \times n$  回の電界計算を必要とし,  $A_d$  の全係数値の計算に必要な計算コストが高い。そこで, FMM-SCM を使用した場合は主要な係数値の相対数値誤差を  $\frac{\|\delta A\|}{\|A+\delta A\|}$  に使用することにする。主要な要素の相違であることから近似値としては妥当であると推定する。

## 4.7 逆計算の計算コスト

帯電電荷測定で使用する係数行列  $A$  は必ず密行列である。LS, RLS の解法に, それぞれ (4-68) 式, (4-69) 式の正規方程式の形にして, ガウスの消去法, LU 分解などの直接解法を適用した場合に必要な演算量, 記憶容量はそれぞれ  $O(n^3)$ ,  $O(n^2)$  である ( $n$  は

未知数の個数)。

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b} \quad (4-68)$$

$$(A^T A + \gamma K^T K) \mathbf{x}_e = A^T \mathbf{b} \quad (4-69)$$

$L$ カーブ法では  $\gamma$  を変えるごとに方程式を解かなければならず、 $\gamma$  を決定するまでに  $O(n^3) \times$  計算回数 の演算量を要する。方程式の解法に QR 分解や 特異値分解を用いる場合は上式のような正規方程式ではなく  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  あるいは (4-42) 式をそのまま解くことができるが、一回あたりの演算量は  $O(n^3)$  であり、同時に  $O(n^2)$  の記憶容量を必要とする。一般的に行列  $K$  は  $n$  行  $n$  列であり、(4-42) 式に対して直接解法を適用する場合、RLS は LS に比べて  $O(n^2)$  の記憶容量を余分に必要とする。係数行列  $A$  が非常に悪条件 (条件数が非常に大きい) のときに LS の解を計算する場合は、 $A^T A$  を必要としない QR 分解や特異値分解を利用するほうがよい。なぜなら、 $A^T A$  の条件数は  $A$  の条件数の二乗になるため、数値誤差のために精度よく計算できない可能性があるからである。RLS を用いた場合は、 $K$  にもよるが一般的には  $A_p$  の条件数は  $A$  に比べて改善されるので、正規方程式の形にして解いても通常は十分な精度で計算できる。本研究では  $A$  あるいは  $A_p$  の行数あるいは列数が数百程度である場合は、最近の PC の演算速度では計算時間はほとんど問題にならないため、解法に特異値分解を使用した。特異値分解には文献 [63] に記載されている公開コードを使用した。

ただし、 $A$  や  $A_p$  の行数 (列数) が数千のレベルになると、(4-42) 式を直接解法ではなく反復解法で解く LSQR を使用したほうがよい [64]。LSQR は CG 法に似た反復解法であり、一回の解法に必要な演算量は  $O(n^2)$  であるため、直接解法に比べて高速に計算が可能である。ただし、 $A_p$  の条件数が大きい場合は LSQR の収束性が悪くなる、もしくは収束しないことがあるので、この場合は直接解法で解く必要がある。LSQR の計算プログラムは文献 [65] に記載されている公開コードを使用した。

LSQR において  $A$  (あるいは  $A_p$ ) に対する演算は  $A$  ( $A_p$ ) や  $A^T$  ( $A_p^T$ ) とあるベクトルとのベクトル積のみであり、疎な行列に対して零要素を含めて全ての要素をメモリ上に確保する必要がない。RLS に含まれる行列  $K$  は通常疎行列であり、LSQR では非零要素のみメモリ上に確保すればよいので  $K$  に必要な記憶容量は  $O(n)$  となる。

LSQR を帯電電荷測定に適用した場合に必要な記憶容量は基本的には  $O(n^2)$  である。しかし、測定対象が形状対称性を有する場合、係数行列  $A$  は部分行列の要素を行あるいは列に対して組替えることによって全ての要素を表現することができる (対称行列に限らない) ので、この部分行列のみメモリ上に確保すればよく、大規模演算を通常の PC でも容易に実行することができる。

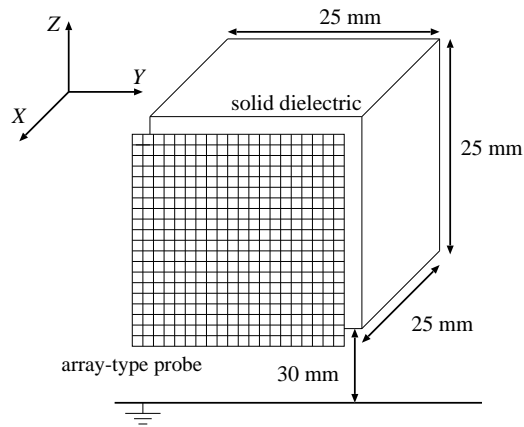
## 4.8 アレイ型プローブの適用

帯電電荷測定では、係数行列  $A$  を計算するために測定位置毎に 1 回の電界計算を必要とするため、係数行列の計算に必要な計算コストが高い。本節では、通常解法の SCM を使用した場合に係数行列に必要な計算コストを演算量の点で改善することを目的として、多点同時測定を可能とするアレイ型プローブを用いた帯電電荷測定の数値シミュレーションを行った結果について述べる。

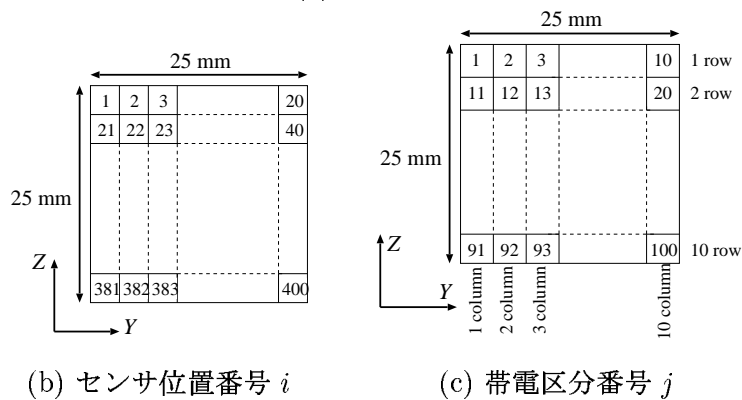
### 4.8.1 計算配置

図 4-50(a) に計算配置の全体図を示す。固体絶縁物は 1 辺が 25 mm の立方体で、比誘電率は 4.0 とした。絶縁物は下面と接地面との距離が 30 mm となる位置に配置した。アレイ型プローブの全体形状は 1 辺が 25 mm の正方形で、センサの総数は  $20 \times 20 = 400$  とした。これまでの解析では各位置で 1 点の測定値を得る走査型プローブを用いてきたが、今回の配置のように測定点数を 400 とすると、走査型プローブを用いた場合は  $YZ$  平面での左右対称性を考慮したとしても係数行列の計算に 200 回の電界計算が必要となる。一方、アレイ型プローブを用いた場合は 1 回の電界計算で全ての係数値を計算することができ、係数行列の計算コストを  $1/m$  にまで削減することが可能となる。1 個のセンサは  $1.25 \times 1.25 \text{ mm}^2$  の測定面積を有し、各センサの位置番号  $i$  を図 4-50(b) のように設定し、全てのセンサは完全接地状態とした。帯電電荷はプローブと対向している絶縁物側面にのみ存在するとした。これまでの解析では帯電区分数を  $n = 25$  としてきたが、本節ではこれまでの 4 倍の  $n = 100$  とし、図 4-50(c) に示すように帯電区分番号  $j$  を設定した。また各帯電区分内において帯電電荷密度は一定とした。

この配置に対して、直接法と  $\lambda$  関数法それぞれの方法により係数行列の計算を行った。 $A_d$  (直接法) と  $A_\lambda$  ( $\lambda$  関数法) の係数値の相対誤差 (絶対値) の最大値は 2.77 % ( $i = 400, j = 100$ ) であった。 $A_d, A_\lambda$  の計算に使用した未知数の個数はそれぞれ 11738 個, 13250 個であった。これまでの場合と異なり、 $A_\lambda$  の計算に使用した未知数の個数が  $A_d$  の場合よりも多くなったが、これは 1 回の計算で  $A_\lambda$  の全ての係数値を計算するためにセンサの境界上で非適合要素を適用したためである。ここでは  $A = A_d$  とし  $\delta A = 0$  とした。また係数行列  $A_d$  の条件数は  $4.28 \times 10^2$  であった。4.4 節で使用した係数行列と比較して、本節で使用した係数行列が悪条件になったのは、前節ではガード電極をセンサに対して 1 mm 絶縁物表面に近づけていたことと、今回の配置では前節に対してセンサのサイズを小さくしており、センサー帯電区分の相対的な距離が大きくなったことが主な原因である。



(a) 測定配置



(b) センサ位置番号  $i$

(c) 帯電区分番号  $j$

図 4-50: アレイ型プローブを用いた測定配置

絶縁物表面に仮定した帯電電荷分布  $\boldsymbol{x}$  を次のように設定した。図 4-28(b) に示したように、側面に対して正規化座標  $\xi, \eta$  を設定し、帯電電荷密度  $\sigma$  を次式で与えた。

$$\sigma = 4(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1) + 8 \quad [\text{pC}/\text{cm}^2] \quad (4-70)$$

(4-70) 式に従って変化する電荷密度から計算した各区分  $j = 1 \sim 100$  の電荷量を  $\boldsymbol{x}$  とした。帯電電荷分布  $\boldsymbol{x}$  を 4-51(a) に示す。

測定模擬値は  $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$  として計算し、 $\delta\boldsymbol{b}$  は平均 0 pC、偏差  $1.97 \times 10^{-3}$  のガウス分布によって計算したランダムノイズとした。ガウス分布の偏差は  $\boldsymbol{b}$  の最大値の 1% に設定した。図 4-51(b) に測定模擬値  $\boldsymbol{b}$  と測定誤差  $\delta\boldsymbol{b}$  の  $\boldsymbol{b}$  に対する相対誤差を示す。

#### 4.8.2 計算結果

LS を用いて推定した結果を図 4-52 に示す。推定解は激しく振動しており、前節で定義した  $D_{\max}$  は 86.8% であった。 $\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = 2.81 \times 10^{-2}$  に対して  $\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = 1.28$  であり、誤

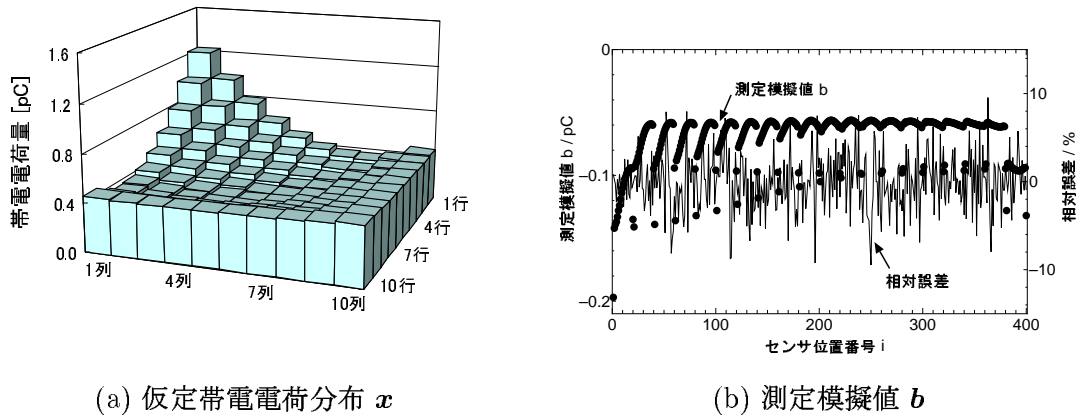


図 4-51: 仮定帯電電荷分布と測定模擬値

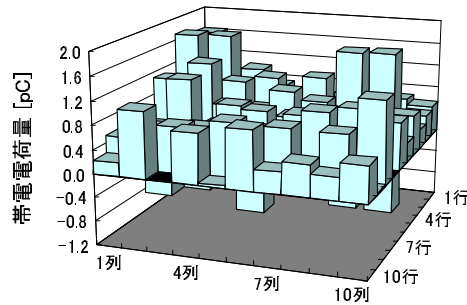
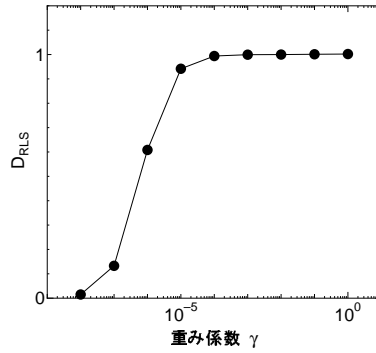


図 4-52: LS による推定帯電電荷分布  $x + \delta x$  ( $m = 400, n = 100$ )

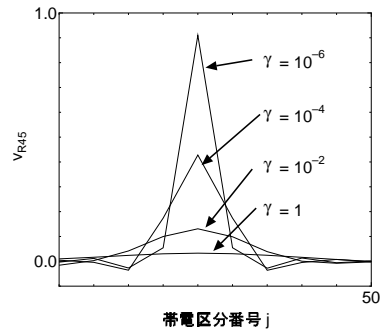
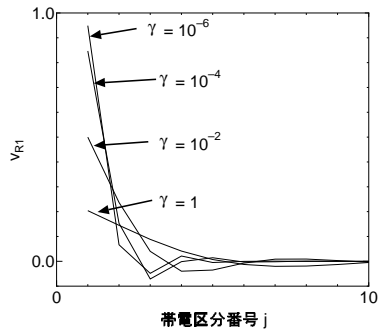
差拡大率  $D_b = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} / \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 45.6$  倍となった。このケースでは  $\delta A = 0$  としており、 $x$  を基準とした推定解の変動の上限値を  $E_{LS}^{ref'}$  で評価すると  $E_{LS}^{ref'} = 1.20 \times 10^{-1}$  であった。また  $x + \delta x$  を基準として誤差変動を評価すると  $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|} = 2.81 \times 10^{-2}$ ,  $\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = 7.88 \times 10^{-1}$ ,  $E_{LS} = E_{LS}^{app} = E_{LS}^{ref} = 7.00$  となった。

次に RLS による推定結果を示す。図 4-44 のラプラシアンフィルタを用いて行列  $K$  を設計した。フィルタの特性評価として、 $D_{RLS}$  を計算した結果および  $x_1 = 1, x_{45} = 1$  ( $j = 45$ : 側面中心付近の区分) としてモデル解像度行列の列ベクトルを求めた結果をそれぞれ図 4-53(a), (b), (c) に示す。ただし、図 4-53(b) では 1 番列ベクトルの 1 ~ 10 行のベクトル要素のみを、図 4-53(c) では 45 番列ベクトルの 41 ~ 50 行のベクトル要素のみを表示している。 $D_{RLS}$  は  $\gamma = 1.0 \times 10^{-6}$  のときに  $6.08 \times 10^{-1}$  で、 $\gamma = 1.0 \times 10^{-5}$  以上では 0.94 を超える値となった。モデル解像度行列の列ベクトルのピーク値を見てみると、 $x_1 = 1$  の場合  $\gamma = 1.0 \times 10^{-5}$  で  $x_{e1} = 9.49 \times 10^{-1}$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$  で





(a)  $D_{RLS}$



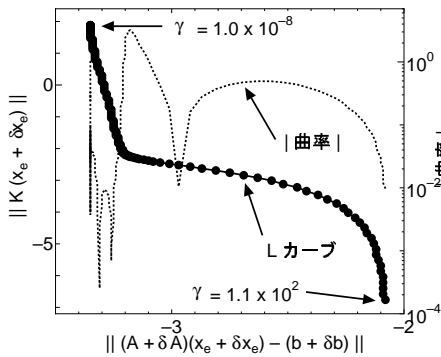
(b) モデル解像度行列の 1 番列ベクトル

(c) モデル解像度行列の 45 番列ベクトル

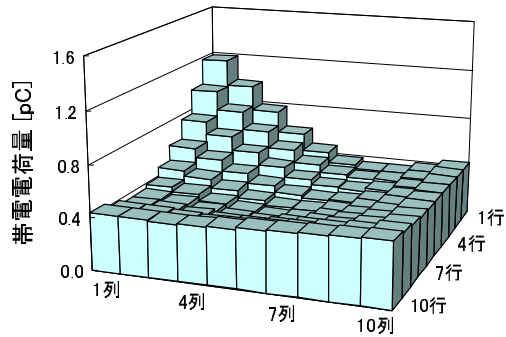
図 4-53: RLS のフィルタ特性

$x_{e1} = 5.00 \times 10^{-1}$  となる。 $x_{45} = 1$  の場合は  $\gamma = 1.0 \times 10^{-5}$  で  $x_{e45} = 9.10 \times 10^{-1}$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$  で  $x_{e45} = 1.31 \times 10^{-1}$  となる。 $x_{e1}$  と  $x_{e45}$  のピーク値の低下の度合いに相違があるが、これは端部と端部以外で使用するフィルタ重みが異なるためである。図 4-54(a) に  $L$  カurve の計算結果を示す。 $L$  カurve 法から  $\gamma = 5.38 \times 10^{-2}$  となり、この  $\gamma$  に対して RLS で推定した帯電電荷分布  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e$  を図 4-54(b) に示す。このときに  $\mathbf{x}$  を基準とした推定精度は  $\frac{\|\delta\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_p\|}{\|\mathbf{x}\|} = 3.60 \times 10^{-2}$  で 4% 程度の推定誤差となった。 $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e$  を基準とすると  $\frac{\|\delta\mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e\|} = 1.18 \times 10^{-2}$  であった。また推定解の変動  $\frac{\|\delta\mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e\|}$  の上限値は  $E_{RLS} = E_{RLS}^{app} = E_{RLS}^{ref} = 1.19 \times 10^{-1}$  であった。 $\gamma = 5.38 \times 10^{-2}$  において  $D_{RLS} = 1.00$ , モデル解像度行列の列ベクトルのピーク値  $x_{e1} = 3.74 \times 10^{-1}$ ,  $x_{e45} = 8.23 \times 10^{-2}$  となるが、実際の計算値では  $\frac{\|\delta\mathbf{x}_p\|}{\|\mathbf{x}\|} = 3.43 \times 10^{-2}$  であった。

アレイ型プローブを用いた今回の配置での数値シミュレーションの結果では、推定誤差は 4% 程度であり、さらに  $E_{RLS}$  の計算値から推定解の変動を  $\frac{\|\delta\mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e\|} \leq 1.19 \times 10^{-1}$  で保証できる結果が得られた。本節の結果から、係数行列の計算コスト、推定精度の両面においてアレイ型プローブの帯電電荷測定へ適用が有用であると判断できる。



(a) L-カーブの計算結果



(b) 推定帯電電荷分布  $x_e + \delta x_e$

図 4-54: RLS による推定帯電電荷分布  $x + \delta x$  ( $m = 400$ ,  $n = 100$ )

## 4.9 まとめ

本章では、帯電電荷測定法を定量性・汎用性の両面において高度化することを目的として、係数行列の計算精度、係数計算誤差  $\delta A$  や測定誤差  $\delta b$  による逆計算の解の不安定性および逆計算手法の適用による逆計算の安定化などについて検討した。本章で得られた結果を次のようにまとめる。

- スペーサを簡単に模擬した配置を対象として数値電界計算を行い、周辺電荷のプロープ出力への影響について検討した。絶縁物表面が全て帯電している場合に、全ての帯電電荷がセンサに誘起する電荷量に比べて、センサ直下の帯電電荷がセンサに誘起する電荷量は 3 ~ 6 % にしか過ぎず、スペーサを測定対象とした場合においてもプロープ出力から直接帯電電荷量を知ることができないことを確認した。
- 直接法および入関数法の係数値の計算に高精度化した表面電荷法を適用することで、主要な係数値に対する両者の相違を 1 % 以内にする事ができ、高精度な係数値計算が可能となった。
- 帯電電荷分布の推定精度について逆計算の観点からの検討を行った。
- 検討した配置では、 $\delta b$  や  $\delta A$  の一箇所だけに 5 % の誤差を与えた場合でも推定した帯電電荷分布では最大で 55 % 程度の推定誤差を生じ、帯電電荷測定においても逆計算で得られる解が不安定であることを示した。
- 帯電電荷測定の数値シミュレーションを行い、逆計算手法の適用について検討した。今回の配置では、逆行列演算、LS、カットオフ法、単純正則化法で推定した場合

と比較して、電荷密度分布が区分毎に滑らかであるという仮定の下、ラプラシアンフィルタに基づいて設計したフィルタ行列を用いた RLS で推定した場合の推定精度が最も高かった。

- 逆行列演算、LS を用いて解の推定を行った場合に、実際には知ることができない  $A$  ではなく  $A + \delta A$  を用いて推定解の変動の上限値  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  を計算する式を導出した。
- RLS を適用した場合の  $\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e$  を基準とした  $\delta A$ ,  $\delta \mathbf{b}$  による推定解の変動  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}$  の上限値を与える式を導出し、RLS を適用した際の推定精度について定量的な検討を可能とした。
- RLS を用いて解の推定を行う場合に  $\mathbf{x}_e$  を基準とした  $\delta \mathbf{b}$  による解の変動  $\delta \mathbf{x}_e$  が最大になるときの  $\mathbf{b}$ ,  $\delta \mathbf{b}$  を示した。
- 通常解法の電界計算法を用いた場合に係数行列の計算コストの低減を可能とするアレイ型プローブを用いた場合の帯電電荷測定の数値シミュレーションを行い、バルク状固体絶縁物の帯電電荷測定へのアレイ型プローブの適用が可能であることを示した。

## 第5章 ブロック状絶縁物の帯電電荷測定

本章では、前章で得られた検討結果を実験的に検証するためにブロック状絶縁物の帯電電荷測定を行った結果について述べる。帯電電荷測定では、次の点について検討を行った。

- (1) 直接法と  $\lambda$  関数法による係数行列の相違が及ぼす影響
- (2) 比誘電率の計測誤差による係数値誤差が及ぼす影響
- (3) 測定位置の影響
- (4) 逆計算手法の適用
- (5) 静電プローブ形状の影響
- (6) 測定試料高さの影響
- (7) 優決定問題化の影響

本章の実験を行ったときにはまだ FMM-SCM（あるいは FMM-BEM）を帯電電荷測定に適用しておらず、本章の数値電界計算には第2章で述べた高次要素 SCM を使用した。

### 5.1 実験装置と測定手順

ブロック状絶縁物の帯電電荷測定を行った実験配置を図5-1に示す。この配置は、電力中央研究所で実施された帯電電荷測定に用いられた配置と同じである [4]。測定試料には、上下面の面積が  $5 \times 5 \text{ mm}^2$  で、高さ  $t = 10 \text{ mm}$  の直方体形状（ブロック状）のテフロン製絶縁物を使用した。図5-1(a)に示すように  $5 \times 5 = 25$  個の測定試料を並べ、全体の上下面が  $25 \times 25 \text{ mm}^2$  の正方形で高さを  $10 \text{ mm}$  とした固体絶縁物を測定対象とした。固体絶縁物の高さ  $t$  を  $t = 20 \text{ mm}$ ,  $30 \text{ mm}$ ,  $40 \text{ mm}$  とした場合の測定も行ったが、このときは上下面の面積が  $25 \times 25 \text{ mm}^2$  の直方体形状のテフロン製架台を25個のブロック状絶縁物と接地面との間に挿入することにより絶縁物高さを調節した。絶縁物の比誘電率は2.37であり、この値は（株）日立製作所の比誘電率計測サービスによるものであ

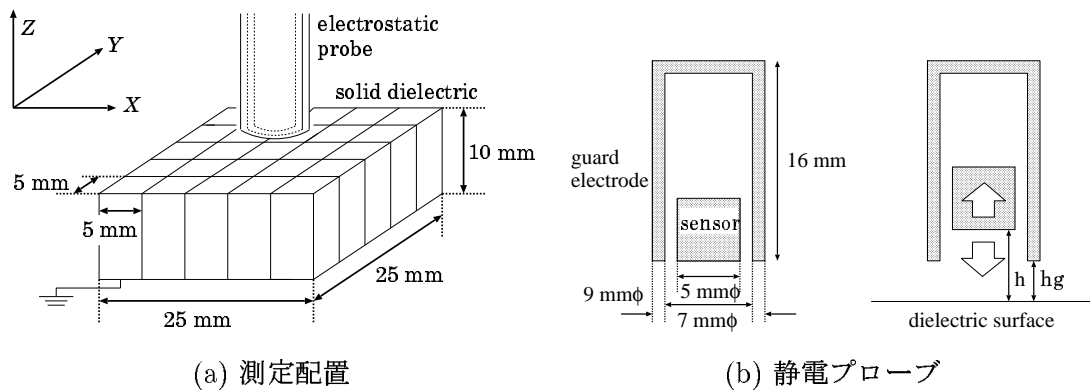


図 5-1: ブロック状絶縁物の帯電電荷測定配置

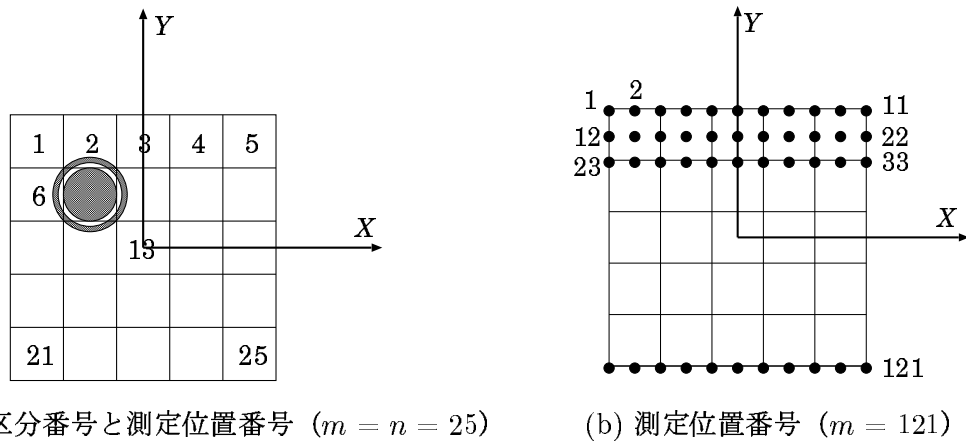


図 5-2: 測定位置番号  $i$  と帯電区分番号  $j$

る。比誘電率は静電容量から算出しており、使用した測定器は総研電気製自動シェーリングブリッジ（型番：DAC-PSU-UA）である。また測定雰囲気は大気、測定時気温は 23 度、測定周波数は 50 Hz、測定精度は  $\pm 1\%$  である。

測定に使用した静電プローブ形状を図 5-1(b) に示す。センサは直径が 5 mm、長さが 5 mm の円筒形状とした。ガード電極はセンサを取り囲むように存在し、内径、外径をそれぞれ 7 mm、9 mm とし、長さを 16 mm とした。図 5-1(b) には測定に使用した静電プローブを数値電界計算用にモデル化した形状を表示している。図 5-1(b) に示すようにガード電極は固定されているが、センサは上下に可動でありガード電極に対してセンサ位置を調節することができる。図 5-1(b) において  $h$  はセンサと絶縁物表面との間の距離を表し、 $h_g$  はガード電極と絶縁物表面との間の距離を表す。

帯電電荷は絶縁物上面のみに存在するとし、図 5-2(a) に示すように 25 個の帯電区分 ( $n = 25$ ) を絶縁物上面に設定した。また帯電区分番号を  $j$  とする。各帯電区分が 1 個

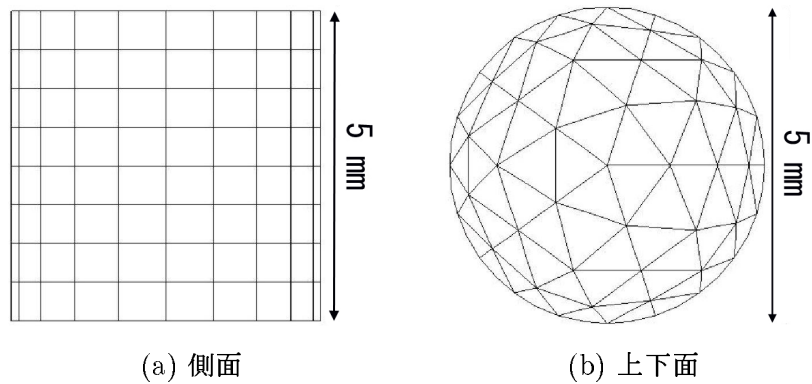


図 5-3: センサの電界計算用メッシュパターン

のブロック状絶縁物の上面に対応し、帯電区分内の電荷密度は一定値と仮定した。また、絶縁物上面を静電プローブで走査して各位置での測定値を得るが、図 5-2(a) は測定点数  $m$  を 25 点とした場合の測定位置番号  $i$  も表している。測定位置は、各区分中心とセンサの中心軸が一致する位置とした。図 5-2(b) は  $m = 121$  とした場合の測定位置番号  $i$  を表しており、図中の黒丸で示した点とセンサの中心軸が一致する位置を測定位置とした。帯電電荷測定の実験は以下の手順で行った。

- (1) 測定配置を対象として数値電界計算を行い、係数行列  $A$  の計算を行う。電界計算に使用したセンサ、ガード電極、絶縁物のメッシュパターンをそれぞれ図 5-3 ~ 図 5-5 に示す。ただし、図 5-5 は絶縁物の高さを  $t = 10$  mm とした場合に使用したメッシュパターンを示している。高さを  $t = 20 \sim 40$  mm とした場合は、絶縁物上面のメッシュパターンは図 5-5(a) と同じとするが、側面は設定した高さにあわせて上面から離れるに従って分割が粗くなるようにした。文献 [66] では、センサー-接地面間のコンデンサ容量の係数値への影響が検討されており、コンデンサ容量を考慮し容量の大きさを 1 nF とした場合の係数値と、コンデンサ容量を無視しセンサを完全接地状態とした場合の係数値の相違が 0.02 % であることが報告されている。本研究で使用した測定装置において、センサと接地面との間に挿入されるコンデンサの容量は 1 nF で、センサを完全接地状態と仮定した場合に生じる係数値誤差は、直接法と  $\lambda$  関数法の係数値誤差に比べて小さいため、数値電界計算時のセンサ電位は零とし完全接地状態とした。直接法、 $\lambda$  関数法の係数行列の計算に使用した未知数の個数は、 $t = 10$  mm の場合はそれぞれ 3841, 3529 であった。 $t = 20$  mm, 30 mm とした場合は、直接法の計算にはそれぞれ 4321 個, 4961 個の未知数を使用し、 $\lambda$  関数法の計算には 4009 個, 4649 個の未知数を使用した。 $t = 40$  mm の場合に、直接法、 $\lambda$  関数法の計算に使用した未知数の個数はともに  $t = 30$  mm のと

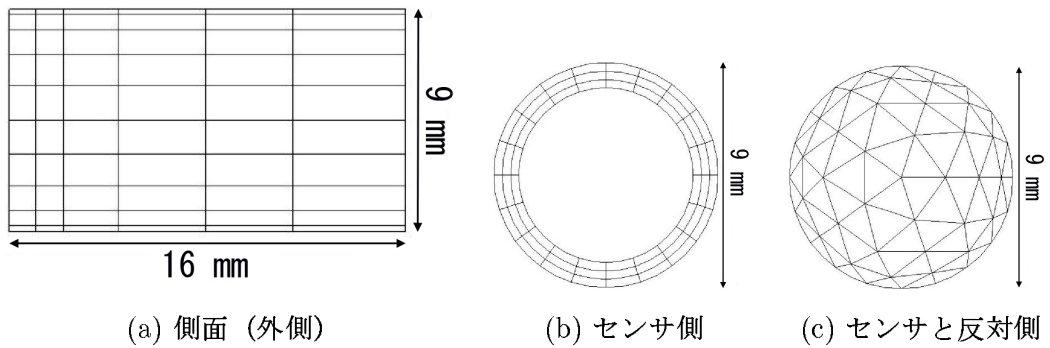


図 5-4: ガード電極の電界計算用メッシュパターン

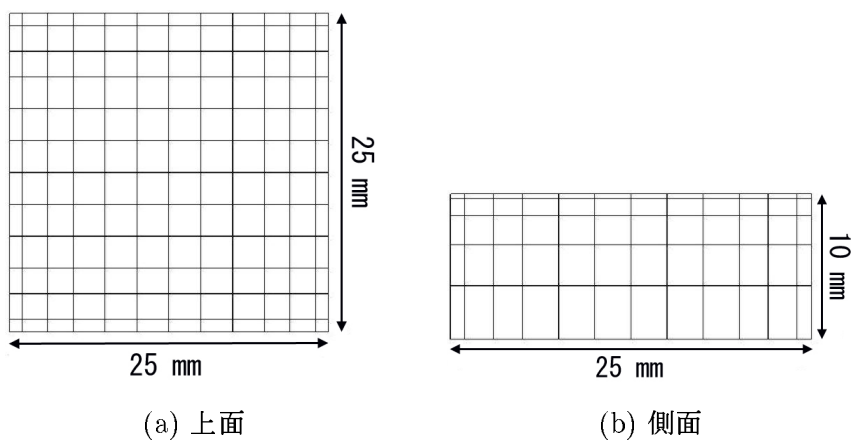


図 5-5: 絶縁物の電界計算用メッシュパターン

きと同数とした。

- (2) 図 5-6 に示す一様イオン発生装置を用いて絶縁物上面のみを一様に帯電させる。一様イオン発生装置はコロナ放電電極，グリッド電極，接地電極の 3 つの電極から成り，コロナ放電電極－グリッド電極間，グリッド電極－接地電極間にはともに  $100\text{ M}\Omega$  の抵抗を挿入している。コロナ放電電極の全体形状は一辺が  $200\text{ mm}$  の正方形形状で， $20\text{ mm}$  間隔の格子状とし各格子点に長さ  $16\text{ mm}$  の針を取り付けている。コロナ放電電極に高電圧  $V$  を印加することで，針先端部に不平等電界を作り出してコロナを発生させる。グリッド電極の全体形状は一辺が  $200\text{ mm}$  の正方形形状で， $2\text{ mm}$  間隔の金網が張られている。グリッド電極によりグリッド電極－接地電極間に平等電界を作り出し，接地電極上に配置した絶縁物上面をコロナによって一様に帯電させる。コロナ放電電極への印加電圧は  $V = -25\text{ kV}$  あるいは  $-20\text{ kV}$  とし，印加時間は  $3\text{ 秒}$  とした。また絶縁物を帯電させる前にアルコールを用い

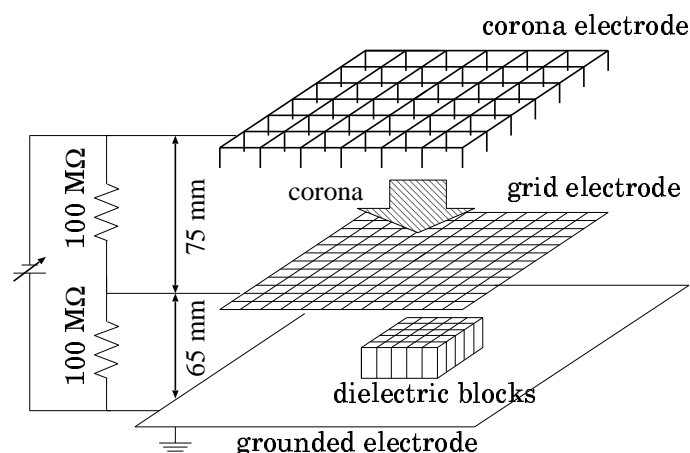


図 5-6: 一様イオン発生装置

て絶縁物表面の除電を行った。42 個の試料に対して除電完了後の残留電荷量を測定した結果、37 個（全体の 88 %）の試料では 10 pC 以下であり、最も大きい場合で約 22 pC であった。

- (3) 静電プローブで絶縁物上面を走査して多点位置での測定を行い、測定値  $b + \delta b$  から逆行列演算，最小二乗法あるいは逆計算によって帯電電荷分布  $x + \delta x$  の推定を行う。帯電電荷によってセンサに誘起される電荷量（プローブ出力）の測定には振動容量形電位計（株）川口電機製作所製 ユニバーサルエレクトロメーター MMA II-17）を用い，測定確度は 1 % 以内である。静電プローブの移動には測定点数を  $m = 25$  とした場合は XYZ ステージ（株）中央精機製 LT-211-1）を使用し，位置決め精度は 0.05 mm である。測定点数を  $m = 121$  とした場合は，プローブの移動には PC 制御のステッピングモータを使用し，位置決め精度は 0.02 mm である。
- (4) 静電プローブを用いて測定した後に，ファラデーケージを用いて各ブロック状絶縁物の帯電電荷量を個別に測定し，推定値  $x + \delta x$ （あるいは  $x_e + \delta x_e$ ）とファラデーケージによる測定値  $x_F$  との比較を行う。ファラデーケージには（株）川口電機製作所製 P-602 を使用し，ファラデーケージを先に述べたエレクトロメーターに取り付けて電荷量を測定する。電荷量の測定確度は 3 % 以内である。ただし，ファラデーケージを用いて電荷量を測定する際に，絶縁物を接地面から一度引き離す必要があり，このときに絶縁物下面－接地面間において剥離帯電を生じたり，絶縁物間において接触，摩擦帯電を生じるために  $x_F$  は実験時の帯電電荷量と完全には一致しない。



## 5.2 プローブ指示値の較正

静電プローブを用いて帯電電荷測定を行う場合、帯電電荷によってセンサに誘起される電荷量を測定する。このときの誘起電荷量（プローブ出力）は、センサ電位  $V_p$  と電位を検出するためにセンサと接地面との間に挿入されるコンデンサ  $C_p$ （使用した測定器では 1 nF）との積によって  $b = C_p V_p$  として測定される。しかし、エレクトロメーターによる検出値  $b = C_p V_p$  は実際のセンサ誘起電荷量を表しておらず、実際のセンサ誘起電荷量を  $b'$  で表すと  $b'$  と  $b$  との間に次の関係が成り立つとされている [46]。

$$b' = Fb \quad (5-1)$$

上式において  $F$  はプローブ係数と呼ばれ、測定した値  $b$  からセンサ誘起電荷量  $b'$  への換算係数である。プローブ係数  $F$  を求めるためには実測定とその測定を模擬した数値電界計算を併用する。つまり、導体板に電圧  $V_s$  を印加し、そのときの測定値  $b$  を求める。このとき  $V_s$  と  $b$  との間には比例関係が成り立つ。また、測定状況を模擬した数値電界計算を行い、導体板に印加した電位  $V_{cal}$ （cal は calculation の略）とセンサ誘起電荷量  $b_{cal}$  との間に成り立つ比例関係（比例定数）を求める。これらの測定結果および計算結果からプローブ係数  $F$  は次式で計算される。

$$F = \frac{b_{cal}}{b} = \frac{b_{cal}/V_{cal}}{b_s/V_s} \quad (5-2)$$

$b/V_s$  を求めるための測定を行った配置を図 5-7(a) に示す。静電プローブの形状は  $h = h_g$  とし、プローブの測定位置は  $h = 1 \sim 6$  mm まで 1 mm 間隔とした。各  $h$  に対して  $V_s = 0 \sim 1.2$  kV の間を 0.1 kV ずつ増加させ、それぞれの電位において  $b$  を測定した。数値電界計算に使用した計算配置を図 5-7(b) に示す。静電プローブの計算モデルには図 5-1(b) の形状を用いた。また、数値電界計算には軸対称三次元の SCM を使用した。付録 E において軸対称三次元の SCM について述べる。数値電界計算では、センサは完

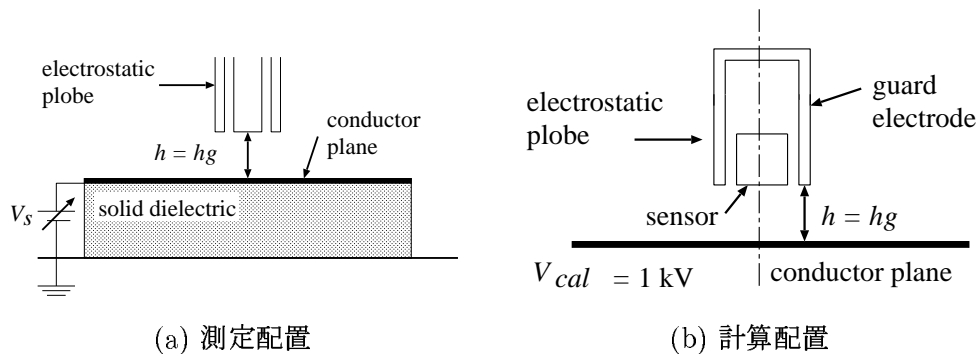


図 5-7: プローブ係数  $F$  算出用の測定、計算配置

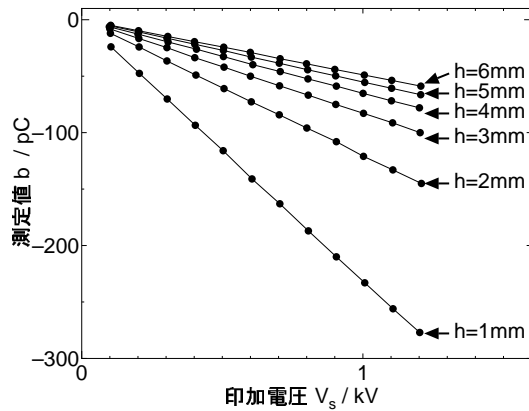


図 5-8: プローブ係数  $F$  算出用の測定結果

表 5-1: プローブ係数  $F$  (計算配置: 図 5-7(b))

$h / \text{mm}$	$b/V_s / \text{pC kV}^{-1}$	$b_{cal}/V_{cal} / \text{pC kV}^{-1}$	$F = \frac{b_{cal}/V_{cal}}{b/V_s}$
1	$-2.31 \times 10^2$	$-2.36 \times 10^2$	1.02
2	$-1.19 \times 10^2$	$-1.22 \times 10^2$	1.03
3	$-8.28 \times 10$	$-8.53 \times 10$	1.03
4	$-6.54 \times 10$	$-6.76 \times 10$	1.03
5	$-5.52 \times 10$	$-5.76 \times 10$	1.04
6	$-4.85 \times 10$	$-5.12 \times 10$	1.06

全接地状態としてセンサ電位を 0 kV とした。導体板の印加電圧は 1 kV とし、 $h = 1 \sim 6$  mm まで 1 mm 間隔にプローブを配置して計算を行った。計算に使用した未知数の個数は 1667 であった。

印加電圧  $V_s$  を変化させて測定した  $b$  の値を図 5-8 に示す。図 5-8 において、 $V_s$  と  $b$  との間には比例関係が成り立っており、その直線の傾き  $b/V_s$  と数値電界計算で求めた  $b_{cal}/V_{cal}$  の値および両者の値から算出したプローブ係数  $F$  の値を表 5-1 に示す。 $h = 1 \sim 6$  mm の場合の  $F$  の平均値は 1.04 であり  $\pm 0.02$  の変動を有するが、 $h$  に依らずほぼ一定値となる。しかしながら、ここで算出した  $F$  は、文献 [46] に記載されている  $F = 0.70$  とは 0.34 も相違する。本研究において使用した静電プローブの数値電界計算用モデルでは、センサとガード電極をそれぞれ別々にモデル化した。一方、文献 [46] ではセンサ下面-ガード電極下面間の等電位面がセンサ下面と平行であるという仮定の下にセンサとガード電極を一体化し、静電プローブを一つの円筒形状としてモデル化を行って

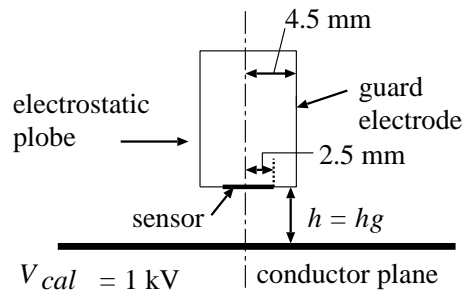


図 5-9: センサーガード電極を一体化した静電プローブモデル

表 5-2: プローブ係数  $F$  (計算配置 : 図 5-9)

$h / \text{mm}$	$b/V_s / \text{pC kV}^{-1}$	$b_{cal}/V_{cal} / \text{pC kV}^{-1}$	$F = \frac{b_{cal}/V_{cal}}{b/V_s}$
1	$-2.31 \times 10^2$	$-1.74 \times 10^2$	0.75
2	$-1.19 \times 10^2$	$-8.77 \times 10$	0.74
3	$-8.28 \times 10$	$-6.02 \times 10$	0.73
4	$-6.54 \times 10$	$-4.73 \times 10$	0.72
5	$-5.52 \times 10$	$-4.01 \times 10$	0.73
6	$-4.85 \times 10$	$-3.55 \times 10$	0.73

る。したがって、静電プローブのモデル化時の相違が  $F$  の値が異なった原因であると考えられる。そこで、図 5-9 に示すようにセンサとガード電極を一体化した静電プローブモデルを用いて数値電界計算を行った。静電プローブは半径が 4.5 mm の円筒形状とし、その長さを 16 mm とした。静電プローブ下面の半径 2.5 mm の円形部分をセンサ面とみなし、この円形部分の電荷量をセンサ誘起電荷量として計算した。このモデルを使用した場合の計算結果を表 5-2 に示す。この計算配置を使用して求めた  $F$  の  $h = 1 \sim 6$  mm での平均値は 0.74 となった。文献に記載されている値とは一致しなかったが、その差は 0.04 で近い値となり、プローブ係数に 0.34 の差を生じたのは静電プローブのモデル化誤差が原因であることが確認できた。つまり、センサ端部にはエッジ部分が存在するために端部で電界集中を生じるが、センサとガード電極を一体化したモデルでは端部の電界集中の数値模擬ができないために計算誤差を生じたのである。センサーガード電極一体化モデルを使用した場合においても 0.04 の差を生じたのは、測定状況や使用した数値電界計算コードの相違が原因であると考えられる。

これまでは測定した値  $b$  からセンサ誘起電荷量  $b'$  へ換算するためにプローブ係数  $F$

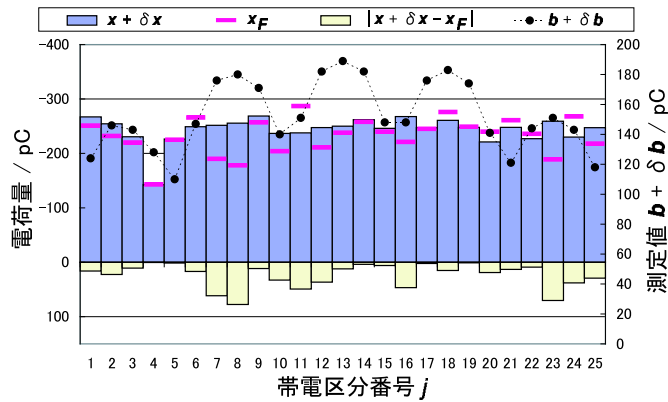
が必要であるとされてきたが、今回の配置を用いて算出したプローブ係数  $F$  の値は、数値電界計算精度を向上したことにより  $F \simeq 1$  となり、 $b$  は直接にセンサ誘起電荷量を表しており、プローブ係数  $F$  に基づく数値換算は不要であることがわかった。文献 [46] で使用した数値電界計算の高精度化が十分ではなかったために、計算値と測定値との間に大きな相違を生じ、プローブ係数による数値換算を考慮したのであろう。今回の配置において  $F$  が 1 とならなかったのは、測定時のプローブの位置決め誤差、測定値の読み取り誤差、静電プローブの数値モデリング誤差などが原因と考えられる。したがって、本研究ではプローブ係数  $F$  は使用せず、測定値  $b$  (実際には測定誤差を含めて  $b + \delta b$ ) を直接センサ誘起電荷量として取り扱う。また  $F$  は全てのプローブ測定値に対して一様に掛かる値であり、 $F$  の適用の有無は逆計算時の解の不安定性には影響しない。

## 5.3 測定結果

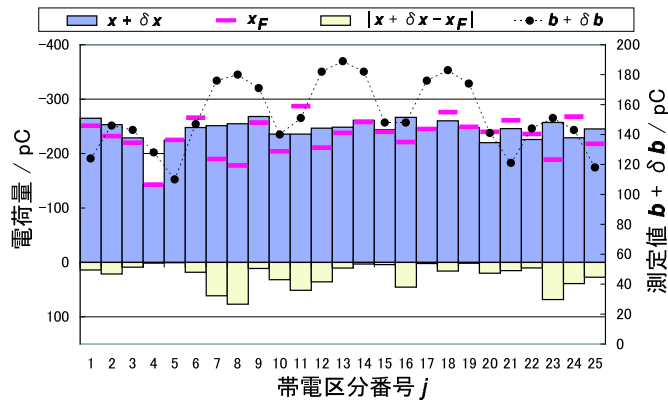
### 5.3.1 直接法と $\lambda$ 関数法による係数行列の相違が及ぼす影響

直接法および  $\lambda$  関数法それぞれの方法で計算した係数行列  $A_d$ ,  $A_\lambda$  は理論的には一致する。しかし、実際には必ず計算誤差を伴い、両者の相違は係数行列  $A$  の計算誤差  $\delta A$  を生じる要因の一つとなる。本節では  $A_d$  と  $A_\lambda$  の相違が推定帯電電荷分布へ及ぼす影響がどの程度であるかについて検討する。測定配置は  $h = h_g = 3$  mm (センサ, ガード位置),  $t = 10$  mm (試料高さ) とし、測定点数は  $m = 25$  とした。この配置に対して計算した  $A_d$  と  $A_\lambda$  の相違は、対角要素で 0.40 % ~ 0.53 % であり、全ての係数値では最大で 0.82 % ( $i = 1, j = 25$ ) であった。

一様イオン発生装置の印加電圧を  $V = -25$  kV として測定試料を帯電させ、測定値  $b + \delta b$  から帯電電荷分布  $x + \delta x$  を逆行列演算によって推定した。 $A_d$ ,  $A_\lambda$  を用いて推定した各ブロック試料の帯電電荷量をそれぞれ図 5-10(a), (b) に示す。図では静電プローブによる測定値  $b + \delta b$  を黒丸、ファラデーケージにより測定した帯電電荷量  $x_F$  を横棒、推定した帯電電荷量  $x + \delta x$  を濃い色の棒グラフ、推定した帯電電荷量とファラデーケージによる測定値の差の絶対値  $|x + \delta x - x_F|$  を薄い色の棒グラフで示している。 $A_d$ ,  $A_\lambda$  の条件数はそれぞれ  $1.95 \times 10$ ,  $1.93 \times 10$  であった。 $A_d$ ,  $A_\lambda$  による推定値の相違は 0.13 % ~ 0.83 % であり、対角要素の係数値誤差の約 1.6 倍の範囲におさまった。ここで、係数行列の真値  $A$  を  $A = A_d$ , 計算誤差を有する係数行列  $\bar{A}$  を  $A_\lambda$  と仮定した場合に、 $\delta A = A_\lambda - A_d$  が原因となる推定解の変動  $\frac{\|A_\lambda^{-1}(b+\delta b) - A_d^{-1}(b+\delta b)\|}{\|A_d^{-1}(b+\delta b)\|}$  の上限値  $E_{LS}^{ref'}$  は  $1.01 \times 10^{-1}$  であった。一方、実際の推定結果では  $\frac{\|A_\lambda^{-1}(b+\delta b) - A_d^{-1}(b+\delta b)\|}{\|A_d^{-1}(b+\delta b)\|} = 5.52 \times 10^{-3}$  であり、上限値に対して約 5 % の変動に過ぎなかった。 $\delta A = A_\lambda - A_d$  の条件数は



$$(a) \quad x + \delta x = A_d^{-1}(b + \delta b)$$



$$(b) \quad x + \delta x = A_\lambda^{-1}(b + \delta b)$$

図 5-10:  $A_d$  と  $A_\lambda$  の相違の影響 ( $m = 25$ ,  $h = h_g = 3$  mm,  $t = 10$  mm,  $V = -25$  kV)

$2.10 \times 10$  で,  $A_d$  や  $A_\lambda$  と同程度の優対角性を有し, 今回の  $\|\delta A\|$  と同じ値となる  $\delta A$  の他の誤差ケースに比べて推定結果に対する影響が小さかったためである。今回のケースのように  $A_d$  と  $A_\lambda$  の相違が係数値の大きさに依らず数 % である場合は, 両者の差による  $\delta A$  は  $A_d$  や  $A_\lambda$  と同程度の優対角行列となるため,  $A_d$  と  $A_\lambda$  の相違による推定解の変動が上限値程度になる可能性は低いと推測される。

推定値  $x + \delta x$  とファラデーケージの測定値  $x_F$  との差の最大値は 77 pC ( $j = 8$ ), 差の平均値は 24 pC となった。 $j = 4$  のように他の区分に比べて局所的に帯電電荷量が少ない場所も存在するが,  $j = 4$  の区分の  $x + \delta x$  と  $x_F$  の差は 1 pC 以下であった。このような区分毎における帯電電荷量のばらつきは一様イオン発生装置による帯電が実際には一様帯電でなかったことを表しているが, このような一様でない分布に対しても妥当な推定が可能であることを示している。文献 [46] で報告されているように (または, 4.1

節でも示したように), 一様帯電であっても静電プローブの測定値は一様とはならず, 静電プローブによる測定値は最小値である 110 pC に対して, 最大で 189 pC まで約 73 % 変化し, ブロック状絶縁物のような厚板試料の場合は測定値が直接帯電電荷量を表していないことがわかる。

次に  $A_d$  を使用したときの推定結果 (図 5-10(a)) での推定解の変動  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  の上限値  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$  を計算した。 $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$  の計算では  $\bar{A} = A_d$  とし,  $E_{LS}^{ref}$  では近似的に  $A \simeq A_d$  とした。また,  $\frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|}$  および  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$  の値には  $\delta A = A_d - A_\lambda$  として計算した  $\frac{\|A_d - A_\lambda\|}{\|A_d\|}$  の値を使用した。 $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}$  の近似値の算出には付録 F で述べる方法 ((F-1) 式を使用) を使用した。ここで述べた  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$  の計算方法は次節以降においても同様とした。 $\bar{A} = A = A_d$  としているために,  $E_{LS}^{ref}$  の計算式に含まれる  $C_1$ ,  $C_4$  の値はそれぞれ  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$  の両式の  $D_1$ ,  $D_4$  と同値となる。上記の方法から  $\frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} = 4.71 \times 10^{-3}$ ,  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|} = 3.28 \times 10^{-3}$  が算出され, これらの値を使用すると  $C_1 = 1.95 \times 10$ ,  $C_2 = 1.28 \times 10$ ,  $C_3 = 3.81 \times 10^2$ ,  $C_4 = 1.89 \times 10$  から  $E_{LS} = 1.69 \times 10^{-1}$ ,  $E_{LS}^{app} = 1.54 \times 10^{-1}$ ,  $E_{LS}^{ref} = 2.23 \times 10^{-1}$  となった。 $E_{LS}$  の値から, 推定解の変動は最悪ケースでは 17 % 程度になることがわかる。 $\mathbf{x}_F$  は帯電電荷量の真値とは一致しないが,  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  の参考値として  $\frac{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} - \mathbf{x}_F\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  を計算すると  $1.33 \times 10^{-1}$  であった。

なお, SCM を用いた場合は直接法のほうが高速に計算が可能であることから, 以下の節では直接法で計算した係数行列を  $\bar{A} = A_d$  として帯電電荷分布の推定を行う。ただし,  $A_d$  と  $A_\lambda$  の係数値誤差を算出するために  $A_\lambda$  の計算も行っている。

### 5.3.2 比誘電率の計測誤差による係数値誤差が及ぼす影響

数値電界計算誤差, 帯電電荷分布の数値モデル化誤差, 直接法と  $\lambda$  関数法の係数計算アルゴリズムの相違による数値誤差, 測定位置の位置決め誤差, 比誘電率の計測誤差が係数行列の計算誤差  $\delta A$  を生じる主な原因として考えられる。これらのうち前者の 4 つが原因となる  $\delta A$  と, 比誘電率の計測誤差が原因となる  $\delta A$  では, その性質が異なると推測される。つまり, 後者の比誘電率の計測誤差に起因する  $\delta A$  は  $\pm$  方向の変動を有するランダム誤差ではなく, 全体的にシフトするような誤差になる。ここでは, このようなランダムではない誤差をシフト系誤差と呼ぶことにする。前者の 4 つが原因となって生じる  $\delta A$  はこのようなシフト系誤差になるとは限らない。本節では, 比誘電率の計測誤差によって生じる  $\delta A$  が推定値に与える影響について調べるために, 比誘電率の計測値である 2.37 に  $\pm 5\%$  の誤差を与えて比誘電率を 2.2515, 2.4885 として係数行列を計算した。測定配置は  $h = h_g = 3$  mm,  $t = 10$  mm とし, 測定点数は  $m = 25$  とした。比誘電率を 2.2515, 2.4885 として計算した係数行列をそれぞれ  $\bar{A}_l = \bar{A} + \delta A_l$ ,  $\bar{A}_h = \bar{A} +$

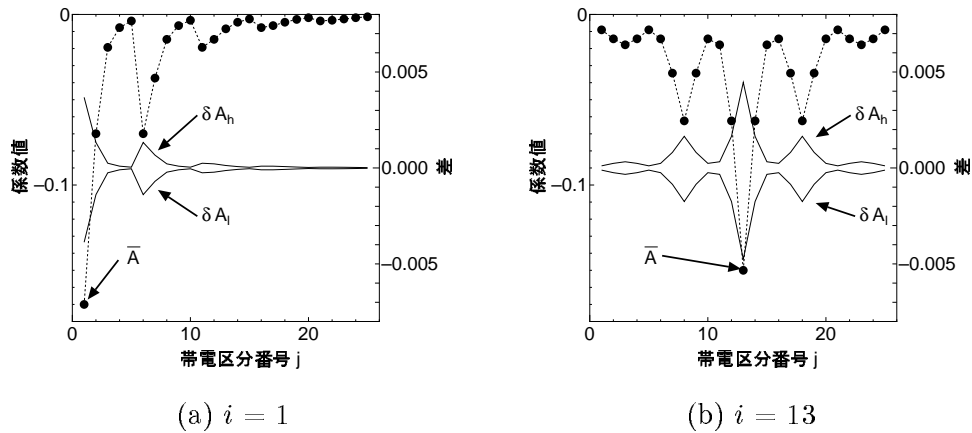
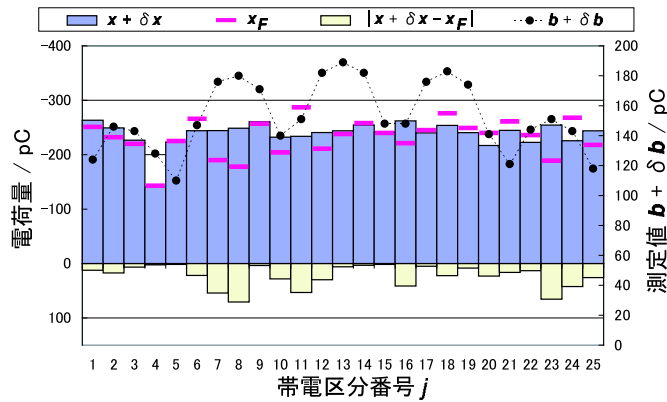


図 5-11: 比誘電率の計測誤差による係数值誤差  $\delta A_l$ ,  $\delta A_h$

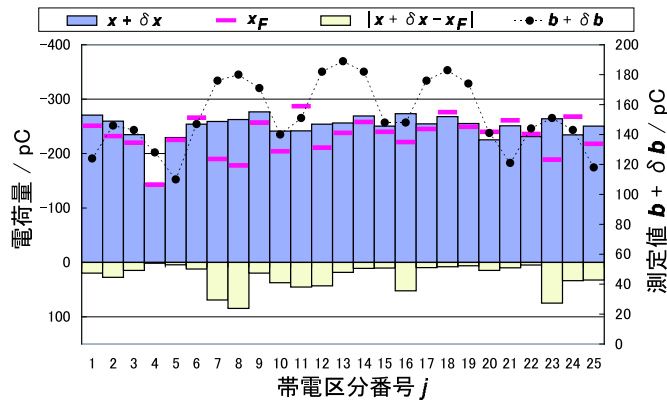
$\delta A_h$  として表す。 $l, h$  はそれぞれ low, high の略である。 $\bar{A}$  は比誘電率を 2.37 として直接法で計算した係数行列である。 $\bar{A}_l$  の直接法と  $\lambda$  関数法の相違は対角要素で 0.38% ~ 0.49% であり、相違の最大値は 0.79% ( $i = 1, j = 25$ ) であった。一方、 $\bar{A}_h$  の場合の両手法の相違は対角要素で 0.41% ~ 0.56%、相違の最大値は 0.86% ( $i = 21, j = 5$ ) であった。測定位置を  $i = 1, 13$  とした場合の区分  $j = 1 \sim 25$  の係数值  $\bar{A}$  および係数值の相違 (差)  $\delta A_l, \delta A_h$  を図 5-11 に示す。図より  $i = 1, 13$  ともに  $\delta A_l$  は - 方向、 $\delta A_h$  は + 方向の変動であることがわかる。

前節と同じ測定値  $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$  から  $\bar{A}_l, \bar{A}_h$  を用いて逆行列演算によって推定した帯電電荷分布をそれぞれ図 5-12(a), (b) に示す。 $\bar{A}_l$  は  $\bar{A}$  に比べて全体的に係数值の絶対値は大きくなっており、 $\bar{A}$  を用いた場合の推定値  $\bar{A}^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$  と  $\bar{A}_l$  を用いた場合の推定値  $\bar{A}_l^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$  を絶対値で比較すると、 $\bar{A}_l^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$  のほうが全体的に小さくなった。また  $\bar{A}_h$  の場合は逆に大きい電荷量が推定されている。 $\bar{A}_l$  の場合の  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_F$  の差の最大値は 71 pC ( $j = 8$ )、差の平均値は 23 pC であり、図 5-11(a) の結果に比べてそれぞれ 6 pC, 1 pC 小さい値となった。一方、 $\bar{A}_h$  の場合の  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_F$  の差の最大値は 85 pC ( $j = 8$ )、差の平均値は 27 pC であり、図 5-11(a) の結果に比べてそれぞれ 8 pC, 3 pC 大きい値となった。

ここで、比誘電率を 2.37 とした場合の係数行列  $A_d$  を真値  $A = A_d$  と仮定し、 $A_d^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$  (= 推定解の真値と仮定) を基準とした場合の  $\delta A_l$  あるいは  $\delta A_h$  による推定解の変動を  $E_{LS}^{ref'}$  を用いて評価する。比誘電率を 2.2515 とした場合は  $\frac{\|\delta A_l\|}{\|A_d\|} = 2.36 \times 10^{-2}$  から、 $E_{LS}^{ref'} = 8.53 \times 10^{-1}$  となり、比誘電率を 2.4885 とした場合は  $\frac{\|\delta A_h\|}{\|A_d\|} = 2.25 \times 10^{-2}$  から、 $E_{LS}^{ref'} = 7.80 \times 10^{-1}$  となった。それに対して実際の推定解では  $\frac{\|\bar{A}_l^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}) - A_d^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})\|}{\|A_d^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})\|} = \frac{\|\bar{A}_h^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}) - A_d^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})\|}{\|A_d^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})\|} = 2.21 \times 10^{-2}$  で、算出した上限値  $E_{LS}^{ref'}$  に対して約 3% の変動



(a)  $x + \delta x = \bar{A}_l^{-1}(b + \delta b)$  (比誘電率 : 2.2515)



(b)  $x + \delta x = \bar{A}_h^{-1}(b + \delta b)$  (比誘電率 : 2.4885)

図 5-12: 比誘電率の計測誤差の影響 ( $m = 25$ ,  $h = h_g = 3$  mm,  $t = 10$  mm,  $V = -25$  kV)

であった。係数誤差  $\|\delta A\|$  が同じ値である場合でも、比誘電率に起因するようなシフト系誤差は最悪のケースとはならず、比誘電率に  $\pm 5\%$  の計測誤差を与えた今回の配置では、算出した上限値  $E_{LS}^{ref'}$  に対して約  $3\%$  の推定解変動しか影響を及ぼさない結果となった。

### 5.3.3 測定位置の影響

静電プローブを用いて帯電電荷を測定する場合、静電プローブを絶縁物表面にできるだけ近接させるほうが望ましい。近接させた場合はセンサ直下に位置する帯電区分に対する係数値は大きくなり、それと同時に、センサ直下以外に位置する帯電区分からの影響を遮蔽するガード電極の効果が強くなるためにこれらの帯電区分に対する係数値は小さくなる。つまり、係数行列の優対角性を強化することができ、条件数が小さい良条件の



係数行列を設定することが可能となるため、逆計算の推定解の安定性が改善される。ところが、実際にはセンサー絶縁物表面間の放電の可能性や物理形状の制約から、静電プローブを常に近接して配置することには限界がある。また近接させた場合に条件数は改善されるが、センサー絶縁物表面間の距離が小さくなるために位置決め精度が低下し、係数行列の計算誤差  $\delta A$  を大きくする要因と成り得ることに注意が必要である。

本節では、測定位置が推定帯電電荷分布に及ぼす影響を調べるために、測定距離を  $h = 1 \text{ mm}, 3 \text{ mm}, 5 \text{ mm}, 10 \text{ mm}$  ( $h_g = h$ ) として測定を行い、測定値から帯電電荷分布の推定を行った。測定条件は  $t = 10 \text{ mm}$  とし、測定点数は  $m = 25$  とした。また試料帯電時の印加電圧は  $V = -20 \text{ kV}$  とした。これまでの  $V = -25 \text{ kV}$  よりも低い電圧に設定したのは、 $V = -25 \text{ kV}$  とした場合は  $h = 1 \text{ mm}$  の測定において放電を生じたためである。

係数行列  $A_d$  と  $A_\lambda$  の相違は、 $h = 1 \text{ mm}$  とした場合は対角要素で  $0.23\% \sim 1.61\%$  であり、相違の最大値は  $2.70\%$  ( $i = 1, j = 7$ ) であり、これまでの場合に比べて計算精度が低下した。 $h = 3 \text{ mm}, 5 \text{ mm}, 10 \text{ mm}$  とした場合の対角要素での相違はそれぞれ  $0.40\% \sim 0.53\%, 0.38\% \sim 0.61\%, 0.39\% \sim 0.73\%$  であり、相違の最大値はそれぞれのケースで  $0.82\%$  ( $i = 1, j = 25$ ),  $0.81\%$  ( $i = 1, j = 25$ ),  $0.81\%$  ( $i = 1, j = 21$ ) であった。

$h = 1 \text{ mm}, 3 \text{ mm}, 5 \text{ mm}, 10 \text{ mm}$  とした場合に、測定値から逆行列演算によって推定した帯電電荷分布をそれぞれ図 5-13 ~ 図 5-16 に示す。係数行列  $\bar{A}$  の条件数は  $h = 1 \text{ mm}, 3 \text{ mm}, 5 \text{ mm}, 10 \text{ mm}$  とした場合にそれぞれ  $5.39, 1.95 \times 10^3, 7.16 \times 10^3, 1.83 \times 10^3$  であった。 $h = 1 \text{ mm}$  の場合、 $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_F$  との差の最大値は  $30 \text{ pC}$  ( $j = 14$ )、差の平均値は  $14 \text{ pC}$  となった。 $h = 3 \text{ mm}$  の場合の差の最大値は  $38 \text{ pC}$  ( $j = 9$ )、平均値は  $16 \text{ pC}$  であり、 $\mathbf{x}_F$  は真値を表しているわけではないが、 $h = 1 \text{ mm}$  の結果に比べて  $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_F$  の相違が  $20\%$  程度大きくなっている。 $h = 5 \text{ mm}$  の場合の差の最大値、平均値はそれぞれ  $83 \text{ pC}$  ( $j = 1$ )、 $30 \text{ pC}$  であり、推定分布も  $h = 1 \text{ mm}, 3 \text{ mm}$  ときの推定解に比べて大きな振動を有している。 $h = 10 \text{ mm}$  の場合の差の最大値、平均値は  $705 \text{ pC}$  ( $j = 18$ )、 $246 \text{ pC}$  で、推定解は  $-889 \text{ pC} \sim 391 \text{ pC}$  の範囲で激しく振動している。このような解の振動は係数行列の条件数が  $h = 3 \text{ mm}$  の場合に比べて約 94 倍であることや、信号レベルの低下による S/N 比の悪化が原因であり、逆計算時の解の不安定性が顕著に現れている。

次に推定解の変動  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  の上限値  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$  を 5.3.1 節と同様の方法により計算した。計算に使用した  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ ,  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}$  および  $C_1 \sim C_4$ , 算出した  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$  を表 5-3 にまとめる。また表には  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  の参考値として、測定結果の  $\frac{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} - \mathbf{x}_F\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  も示す。 $h = 1, 3 \text{ mm}$  の場合は  $E_{LS}$  の値から、 $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  の変動はそれぞれの場合において 7

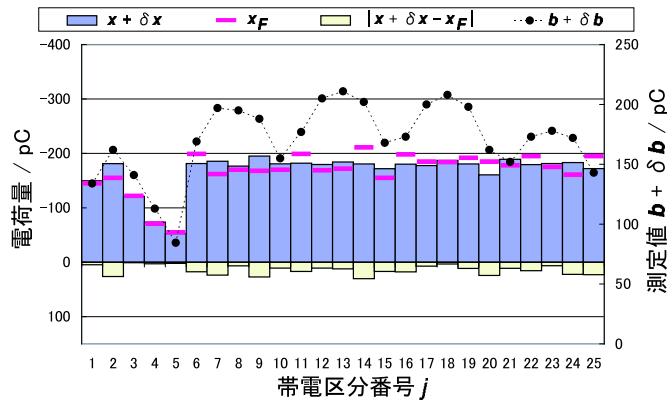


図 5-13: 測定位置の影響 ( $m = 25$ ,  $h = h_g = 1$  mm,  $t = 10$  mm,  $V = -20$  kV)

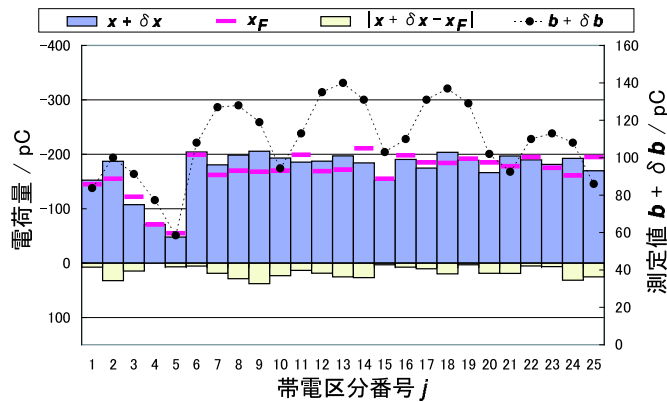


図 5-14: 測定位置の影響 ( $m = 25$ ,  $h = h_g = 3$  mm,  $t = 10$  mm,  $V = -20$  kV)

%, 20 % 以内となる。 $h = 5$  mm の場合は  $E_{LS} = 1.01$  となり 100 % 程度の変動を有する可能性があることがわかる。 $h = 10$  mm の  $E_{LS}$  は分母が負の値であるために不定となり,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$  はそれぞれ  $1.86 \times 10^3$ ,  $4.59 \times 10^3$  となった。 $h = 5$  mm, 10 mm の場合は上限値が過大となっており, 推定精度について何の保証もない状態であると言える。

$h = 1$  mm とした場合は推定精度が最も高いが, 放電の可能性があることと  $h = 5$  mm, 10 mm とした場合は推定精度が悪かったため, 以後の測定では  $h = 3$  mm とした。

### 5.3.4 逆計算手法の適用

前節の結果では, 測定距離を  $h = h_g = 5$  mm, 10 mm とした場合に, 係数行列の条件数が増大したことにより, 逆行列演算によって推定した帯電電荷分布に振動性が見られ

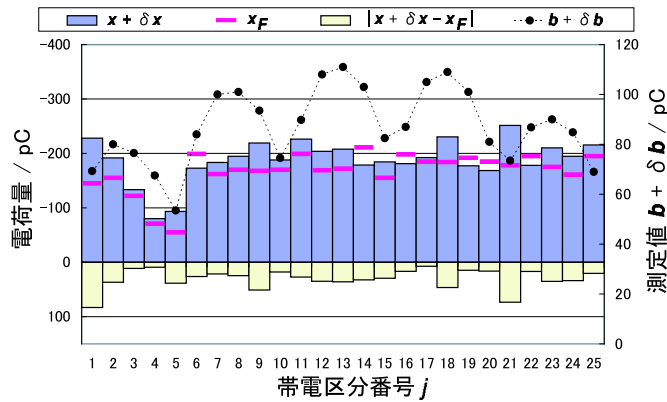


図 5-15: 測定位置の影響 ( $m = 25$ ,  $h = h_g = 5$  mm,  $t = 10$  mm,  $V = -20$  kV)

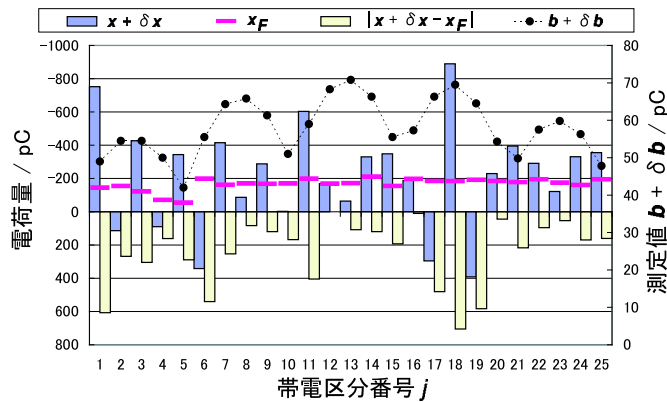


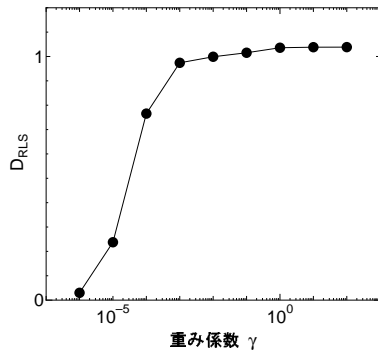
図 5-16: 測定位置の影響 ( $m = 25$ ,  $h = h_g = 10$  mm,  $t = 10$  mm,  $V = -20$  kV)

た。特に  $h = 10$  mm とした場合の推定解は  $-889$  pC  $\sim$   $391$  pC の範囲で大きく振動しており、推定値が全く意味を成さない結果となった。そこで、本節では  $h = h_g = 5$  mm,  $10$  mm とした場合の測定値から RLS によって帯電電荷分布の推定を行った。RLS に使用するフィルタ行列  $K$  は図 4-44 のラプラシアンフィルタを用いて設計した。

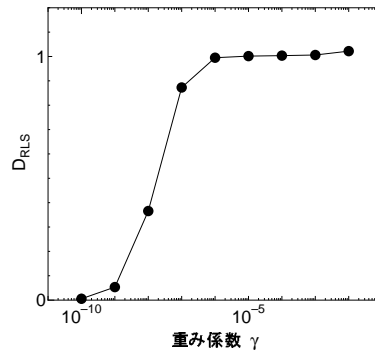
$h = 5$  mm,  $10$  mm の係数行列に対して、フィルタ行列  $K$  の特性評価を行った。 $h = 5$  mm,  $10$  mm の場合の  $D_{RLS}$  の計算結果をそれぞれ図 5-17(a), (b) に示す。 $h = 5$  mm の場合、 $D_{RLS}$  は  $\gamma = 1.0 \times 10^{-6}$  のときに  $3.00 \times 10^{-2}$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-4}$  の場合は  $7.66 \times 10^{-1}$  となる。 $h = 10$  mm の場合は  $\gamma = 1.0 \times 10^{-9}$  のときに  $5.35 \times 10^{-2}$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-7}$  の場合は  $8.73 \times 10^{-1}$  となる。また、 $h = 5$  mm,  $10$  mm の場合に  $x_{13} = 1$  として求めたモデル解像度行列の 13 番列ベクトルの結果を図 5-18(a), (b) に示す。モデル解像度行列の 13 番列ベクトルのピーク値を見ると、 $h = 5$  mm の場合は  $\gamma = 1.0 \times 10^{-4}$  で

表 5-3: 測定位置の影響における  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$

	$h = 1 \text{ mm}$	$h = 3 \text{ mm}$	$h = 5 \text{ mm}$	$h = 10 \text{ mm}$
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$9.38 \times 10^{-3}$	$4.71 \times 10^{-3}$	$4.93 \times 10^{-3}$	$5.37 \times 10^{-3}$
$\frac{\ \delta b\ }{\ b+\delta b\ }$	$2.93 \times 10^{-3}$	$4.42 \times 10^{-3}$	$5.58 \times 10^{-3}$	$8.74 \times 10^{-3}$
$C_1$	5.39	$1.95 \times 10$	$7.16 \times 10$	$1.83 \times 10^3$
$C_2$	3.14	$3.86 \times 10$	$4.29 \times 10^2$	$8.32 \times 10^5$
$C_3$	$2.91 \times 10$	$3.81 \times 10^2$	$5.12 \times 10^3$	$3.35 \times 10^6$
$C_4$	5.31	$1.99 \times 10$	$6.44 \times 10$	$9.98 \times 10^2$
$E_{LS}$	$6.97 \times 10^{-2}$	$1.98 \times 10^{-1}$	1.10	不定
$E_{LS}^{app}$	$6.62 \times 10^{-2}$	$1.80 \times 10^{-1}$	$7.12 \times 10^{-1}$	$1.86 \times 10$
$E_{LS}^{ref}$	$9.82 \times 10^{-2}$	$3.70 \times 10^{-1}$	2.95	$4.59 \times 10^3$
$\frac{\ x+\delta x-x_F\ }{\ x+\delta x\ }$	$9.62 \times 10^{-2}$	$1.09 \times 10^{-1}$	$1.85 \times 10^{-1}$	$8.38 \times 10^{-1}$



(a)  $h = h_g = 5 \text{ mm}$



(b)  $h = h_g = 10 \text{ mm}$

図 5-17:  $D_{RLS}$  の計算結果

$x_{e13} = 7.92 \times 10^{-1}$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-3}$  で  $x_{e13} = 4.80 \times 10^{-1}$  となる。 $h = 10 \text{ mm}$  の場合は  $\gamma = 1.0 \times 10^{-6}$  で  $x_{e13} = 6.39 \times 10^{-1}$ ,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-5}$  で  $x_{e13} = 4.07 \times 10^{-1}$  となる。 $h = 5 \text{ mm}$ ,  $10 \text{ mm}$  それぞれのケースでの  $L$  カurve の計算結果を図 5-19(a), (b) に示す。 $h = 5 \text{ mm}$ ,  $10 \text{ mm}$  の  $L$  カurve はともに明確なコーナーを示していないが、曲率最大点から  $h = 5 \text{ mm}$  のときは  $\gamma = 2.91 \times 10^{-3}$ ,  $h = 10 \text{ mm}$  のときは  $\gamma = 6.76 \times 10^{-4}$  となった。決定した  $\gamma$  に対するフィルタの特性は、 $h = 5 \text{ mm}$  の場合は  $D_{RLS} = 9.92 \times 10^{-1}$ ,  $x_{13} = 1$  としたモデル解像度行列の 13 番列ベクトルのピーク値は  $x_{e13} = 3.78 \times 10^{-1}$  となった。また、 $h = 10 \text{ mm}$  の場合は  $D_{RLS} = 1.01$ ,  $x_{e13} = 2.41 \times 10^{-1}$

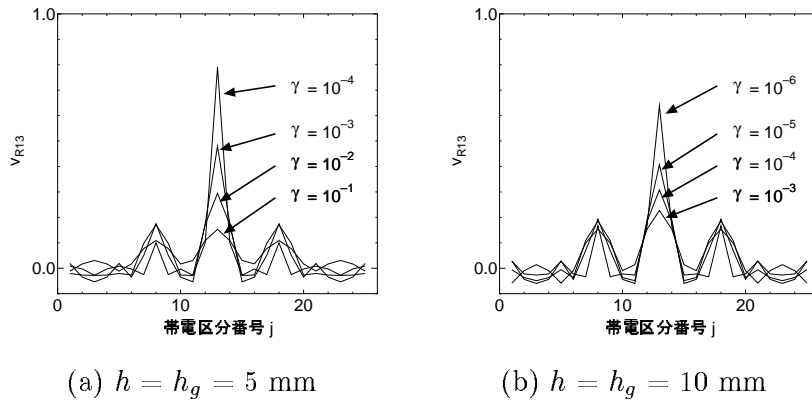


図 5-18: モデル解像度行列の 13 番列ベクトル

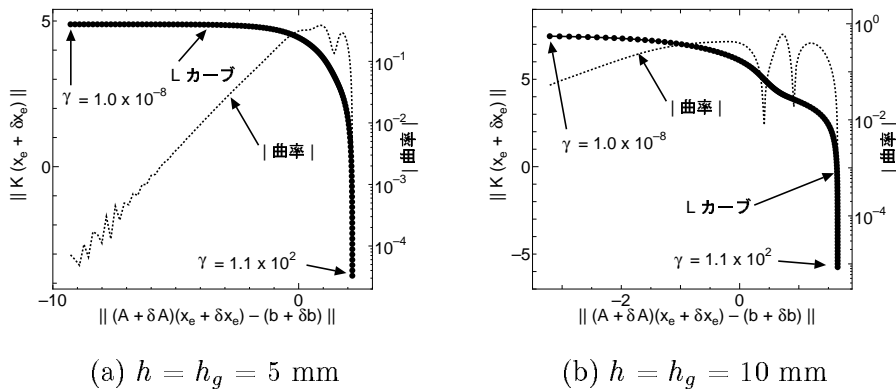
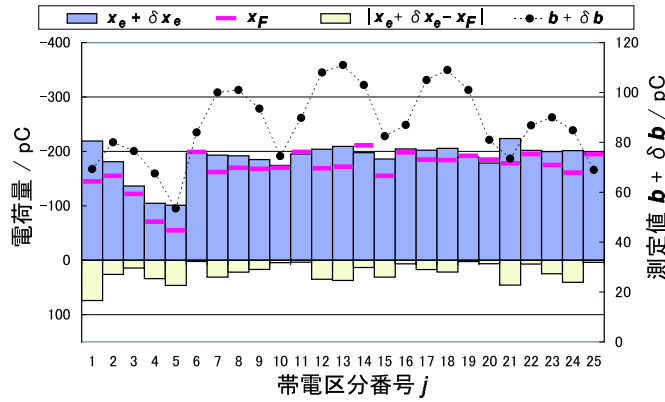


図 5-19: L カーブの計算結果

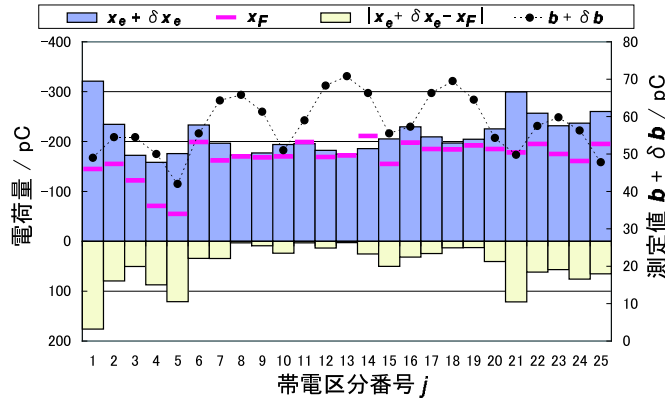
となった。

$h = 5 \text{ mm}$ ,  $10 \text{ mm}$  の場合に,  $L$  カーブ法で決定した  $\gamma$  を用いて RLS により推定した帯電電荷分布  $\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e$  をそれぞれ図 5-20(a), (b) に示す。 $h = 5 \text{ mm}$  の場合,  $\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e$  と  $\mathbf{x}_F$  との差の最大値は  $74 \text{ pC}$  ( $j = 1$ ), 差の平均値は  $23 \text{ pC}$  であり, 逆行列演算の結果に比べて最大値, 平均値ともに改善されており, 最大値, 平均値はそれぞれ  $9 \text{ pC}$ ,  $7 \text{ pC}$  小さい結果が得られた。 $h = 10 \text{ mm}$  の場合の差の最大値, 平均値は  $176 \text{ pC}$  ( $j = 1$ ),  $49 \text{ pC}$  であり, 逆行列演算の結果に比べて大幅に改善された。逆行列演算の結果では, 振動レベルが過大であるために帯電電荷分布を全く把握できなかったが, RLS ではラプラシアンフィルタの平滑化効果により推定解の振動が抑えられ, 今回の配置では電荷量のオーダーも  $\mathbf{x}_F$  に近い値が得られており全体的な分布の様子を捉えることが可能となった。

次に  $\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e$  を基準とした推定解の変動  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}$  の上限値  $E_{RLS}^{app}$ ,  $E_{RLS}^{ref}$  の計算を行った。ただし,  $E_{RLS}^{ref}$  の計算では  $A = \bar{A}$  ( $= A_d$ ) としており,  $E_{RLS}^{ref}$  の式に含



(a)  $h = h_g = 5 \text{ mm}$  とした場合



(b)  $h = h_g = 10 \text{ mm}$  とした場合

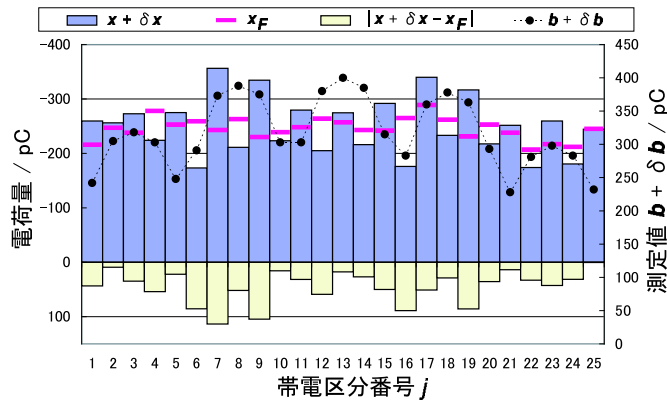
図 5-20: RLS による推定帯電電荷分布 ( $m = 25$ ,  $t = 10 \text{ mm}$ ,  $V = -25 \text{ kV}$ )

まれる  $E_1 \sim E_4$  は,  $E_{RLS}$  や  $E_{RLS}^{app}$  の式の  $F_1 \sim F_4$  と同じ値となる。  $h = 5 \text{ mm}$  のときは,  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 4.93 \times 10^{-3}$ ,  $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|} = 5.58 \times 10^{-3}$ ,  $F_1 = 7.15$ ,  $F_2 = 3.63$ ,  $F_3 = 7.24 \times 10$ ,  $F_4 = 6.84$ ,  $F_5 = 6.93 \times 10$  から  $E_{RLS} = 1.57 \times 10^{-1}$ ,  $E_{RLS}^{app} = 9.86 \times 10^{-2}$ ,  $E_{RLS}^{ref} = 9.31 \times 10^{-2}$  となった。  $E_{RLS}$  の値から,  $x_e + \delta x_e$  を基準とした推定解の変動は最悪ケースで 16% 程度であることがわかる。  $h = 10 \text{ mm}$  の場合は  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 5.37 \times 10^{-3}$ ,  $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|} = 8.74 \times 10^{-3}$ ,  $F_1 = 1.26 \times 10$ ,  $F_2 = 4.02 \times 10$ ,  $F_3 = 3.46 \times 10^2$ ,  $F_4 = 1.09 \times 10$ ,  $F_5 = 2.99 \times 10^2$  から  $E_{RLS}^{app} = 4.36 \times 10^{-1}$ ,  $E_{RLS}^{ref} = 3.88 \times 10^{-1}$  となった。  $E_{RLS}$  は分母が負値となり不定であったので, 近似値である  $E_{RLS}^{app}$  を用いて評価すると  $\frac{\|\delta x_e\|}{\|x_e + \delta x_e\|}$  は 44% 程度で抑えられることになる。

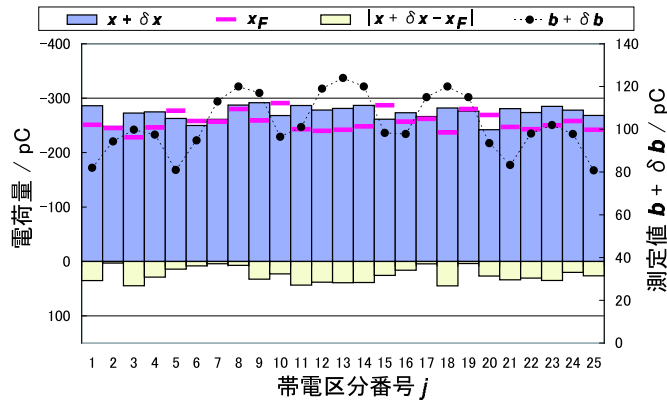
### 5.3.5 静電プローブ形状の影響

背後接地電極を有するシートやフィルム状の薄板試料の帯電電荷測定で用いる静電プローブはセンサとガード電極で構成される。この場合、ガード電極はセンサ直下以外の帯電電荷のセンサに対する影響を遮蔽し、センサー測定試料間の電界分布を平等電界に近づける役割を果たす。薄板試料の帯電電荷測定の測定原理は、センサー測定試料表面ー接地電極間の擬似平等電界に基づいており、ガード電極の存在が不可欠である。一方、厚板試料の帯電電荷測定の測定原理は、プローブの測定値と帯電電荷との間に成り立つ行列関係に基づいており、ガード電極は原理上は不必要である。ところが厚板試料の測定は逆計算を要するため、ガード電極を用いることにより周辺電荷のセンサに対する影響を小さくし、係数行列を良条件化することが可能となる。薄板試料の場合と異なり、センサ面とガード電極下面を同位置 ( $h = h_g$ ) とする必要はなく、厚板試料の場合のガード電極位置の選定は任意であり、ガード電極による係数行列の条件数の改善レベルは  $h$  と  $h_g$  の位置関係で決定されることになる。そこで、ガード電極位置の推定帯電電荷分布への影響を調べるために、ガード電極の位置を変えて帯電電荷測定を行った。センサー絶縁物間の距離は  $h = 3$  mm で固定し、ガード電極は 2 通りの位置に設定した。一つは、センサがガード電極に対して突き出し露出した状態 ( $h_g = 5$  mm) とし、もう一つは、センサがガード電極に対して埋没した状態 ( $h_g = 2$  mm) とした。測定条件は  $m = 25$ ,  $t = 10$  mm,  $V = -25$  kV とした。 $h_g = 5$  mm とした場合の  $A_d$  と  $A_\lambda$  の相違は対角要素で 0.11 % ~ 0.34 % であり、相違の最大値は 0.40 % ( $i = 1, j = 21$ ) であった。 $h_g = 2$  mm とした場合の相違は対角要素で 0.37 % ~ 0.43 %, 最大値は 1.16 % ( $i = 21, j = 17$ ) であった。

$h_g = 5$  mm, 2 mm とした場合に測定値から逆行列演算によって推定した帯電電荷分布をそれぞれ図 5-21(a), (b) に示す。使用した係数行列の条件数は  $h_g = 5$  mm の場合は  $6.89 \times 10$ ,  $h_g = 2$  mm の場合は 9.41 であった。 $h_g = 5$  mm の場合、 $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_F$  との差の最大値は 113 pC ( $j = 7$ ), 差の平均値は 45 pC となった。推定解は  $-356$  pC ~  $-173$  pC の範囲で振動しており、推定解の最大値と最小値の相違は 183 pC であった。帯電状況は異なるが、 $h_g = 3$  mm の結果 (図 5-10(a)) では局所的に電荷量が少ない  $j = 4$  を除くと推定解の範囲は  $-269$  pC ~  $-221$  pC で、最大値と最小値の差は 48 pC であった。この結果と比較すると、 $h_g = 5$  mm としたことにより推定精度が低下しているのがわかる。これは  $h_g = 3$  mm のときの条件数が 19.5 であったのに対して、 $h_g = 5$  mm の場合の条件数が 3.5 倍となったことが原因である。 $h_g = 2$  mm とした場合は、 $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_F$  との差の最大値、平均値はそれぞれ 45 pC ( $j = 18$ ), 25 pC で、条件数の改善による効果により  $h_g = 5$  mm の場合に比べて逆計算が安定した結果となった。ただ



(a)  $h = 3 \text{ mm}$ ,  $h_g = 5 \text{ mm}$  とした場合



(b)  $h = 3 \text{ mm}$ ,  $h_g = 2 \text{ mm}$  とした場合

図 5-21: 静電プローブ形状の影響 ( $m = 25$ ,  $t = 10 \text{ mm}$ ,  $V = -25 \text{ kV}$ )

し、センサをガード電極内部に埋没させるとセンサを埋没させない場合に比べて、当然プローブ出力は小さくなり S / N 比は悪化する。今回の測定結果では推定値は安定しており、プローブ出力の大きさは充分であったと判断できる。

次に  $h_g = 5 \text{ mm}$ ,  $2 \text{ mm}$  とした場合の  $\frac{\|\delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}\|}$  の上限値  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$  の計算を行った。 $h_g = 5 \text{ mm}$  の場合は  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 1.76 \times 10^{-3}$ ,  $\frac{\|\delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{b}\|} = 1.55 \times 10^{-3}$ ,  $C_1 = 6.89 \times 10$ ,  $C_2 = 3.27 \times 10^2$ ,  $C_3 = 4.75 \times 10^3$ ,  $C_4 = 6.34 \times 10$  から  $E_{LS} = 2.50 \times 10^{-1}$ ,  $E_{LS}^{app} = 2.20 \times 10^{-1}$ ,  $E_{LS}^{ref} = 8.09 \times 10^{-1}$  が得られ、測定結果では  $\frac{\|\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_F\|}{\|\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}\|} = 2.11 \times 10^{-1}$  であった。 $h_g = 2 \text{ mm}$  の場合は  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 4.30 \times 10^{-3}$ ,  $\frac{\|\delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{b}\|} = 4.99 \times 10^{-3}$ ,  $C_1 = 9.41$ ,  $C_2 = 2.14$ ,  $C_3 = 8.85 \times 10$ ,  $C_4 = 9.31$ ,  $E_{LS} = 9.05 \times 10^{-2}$ ,  $E_{LS}^{app} = 8.69 \times 10^{-2}$ ,  $E_{LS}^{ref} = 9.77 \times 10^{-2}$ ,  $\frac{\|\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_F\|}{\|\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}\|} = 1.05 \times 10^{-1}$  であった。二つの場合の  $E_{LS}$  を比較すると、最悪ケースにおける  $h_g = 2 \text{ mm}$  の解の変動は  $h_g = 5 \text{ mm}$  に比べて 36% となった。



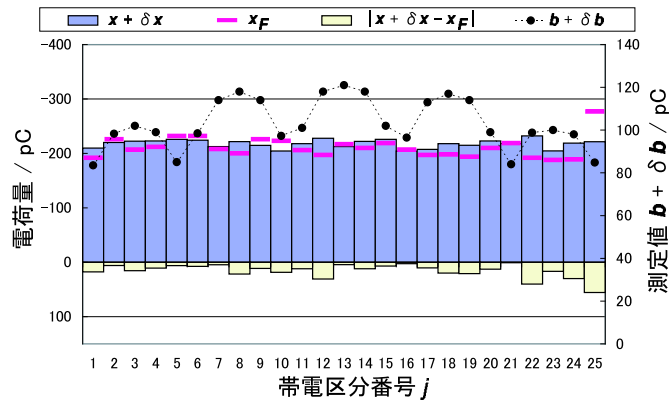
$h_g = 2 \text{ mm}$  とした場合の  $E_{LS}$  は、 $h = h_g = 3 \text{ mm}$  として測定した 5.3.1 節 (図 5-10(a))、5.3.3 節 (図 5-14) の結果のそれぞれの  $E_{LS}$  に対して約 54 %、約 46 % であり、ガード電極に対してセンサを埋没させたことによる信号レベルの低下を考慮しても  $h_g = 2 \text{ mm}$  としたほうが高い推定精度を達成しており、以後の節では  $h = 3 \text{ mm}$ 、 $h_g = 2 \text{ mm}$  として測定を行う。

### 5.3.6 測定試料高さの影響

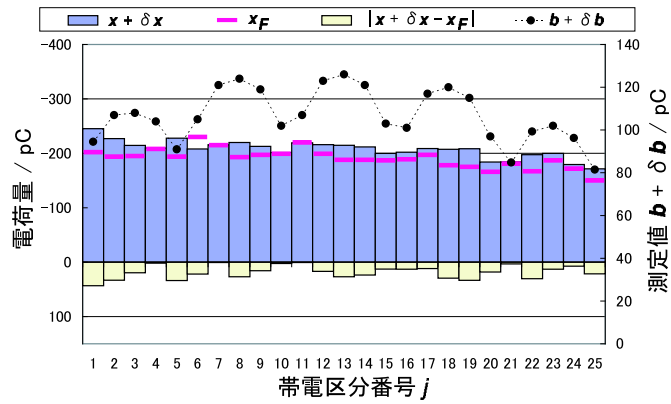
実際のスペーサ表面の帯電電荷測定ではスペーサの側面をプローブで走査するため、前節までに行ってきたブロック状絶縁物の帯電電荷測定とは、接地面からの距離や測定試料の厚さの点で測定状況が相違する。そのため、本節では試料高さの変化が推定帯電電荷分布に及ぼす影響について検討する。測定条件は  $m = 25$ 、 $h = 3 \text{ mm}$ 、 $h_g = 2 \text{ mm}$ 、 $V = -25 \text{ kV}$  とし、試料高さ  $t$  を  $20 \text{ mm}$ 、 $30 \text{ mm}$ 、 $40 \text{ mm}$  として測定を行った。 $t = 20 \text{ mm}$ 、 $30 \text{ mm}$ 、 $40 \text{ mm}$  とした場合の  $A_d$  と  $A_\lambda$  の対角要素の相違はそれぞれ 0.40 % ~ 0.69 %、0.40 % ~ 0.62 %、0.40 % ~ 0.69 % であり、それぞれの場合の相違の最大値は 1.08 ( $i = 1$ ,  $j = 7$ )、1.03 ( $i = 21$ ,  $j = 17$ )、1.03 ( $i = 1$ ,  $j = 7$ ) であった。

$t = 20 \text{ mm}$ 、 $30 \text{ mm}$ 、 $40 \text{ mm}$  とした場合の測定結果を図 5-22 に示す。帯電電荷分布は測定値から逆行列演算によって計算した。 $t = 20 \text{ mm}$ 、 $30 \text{ mm}$ 、 $40 \text{ mm}$  とした場合の係数行列の条件数はそれぞれ  $1.17 \times 10$ 、 $1.27 \times 10$ 、 $1.32 \times 10$  であり、 $t = 10 \text{ mm}$  から試料高さを  $10 \text{ mm}$  増すごとに条件数は 1.24 倍、1.09 倍、1.04 倍となり  $t = 40 \text{ mm}$  付近で条件数の飽和傾向が見られる。 $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_F$  との差の最大値はそれぞれの場合で  $56 \text{ pC}$  ( $j = 25$ )、 $43 \text{ pC}$  ( $j = 1$ )、 $39 \text{ pC}$  ( $j = 16$ ) となり、差の平均値は  $16 \text{ pC}$ 、 $18 \text{ pC}$ 、 $12 \text{ pC}$  で両者の値はよく一致している。また、 $t$  を大きくするにしたがって、測定値  $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$  も大きい値となっているが、これは試料上面と接地面とが離れるに従って周辺電荷のセンサに対する影響が大きくなっているからである。これは試料高さとともに係数行列の条件数が大きくなっており、係数行列の優対角性が低下していることからわかる。

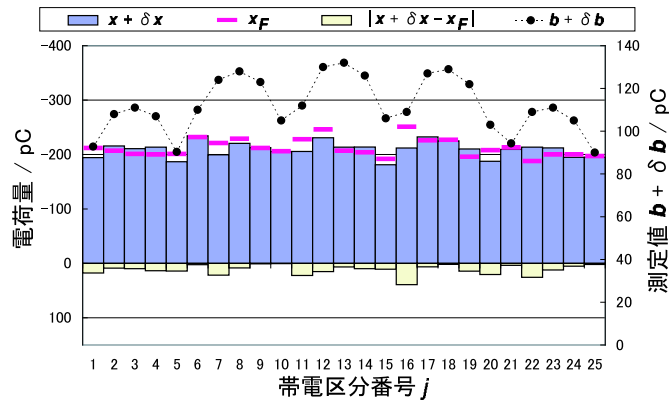
$t = 20 \text{ mm}$ 、 $30 \text{ mm}$ 、 $40 \text{ mm}$  とした場合に推定解の変動  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|}$  の上限値  $E_{LS}$ 、 $E_{LS}^{app}$ 、 $E_{LS}^{ref}$  を計算した結果を表 5-4 にまとめる。 $t = 20 \text{ mm}$ 、 $30 \text{ mm}$ 、 $40 \text{ mm}$  において  $E_{LS} = 1.31 \times 10^{-1}$ 、 $1.41 \times 10^{-1}$ 、 $1.48 \times 10^{-1}$  となり、 $t$  が  $20 \text{ mm}$  から  $30 \text{ mm}$  に変化すると  $E_{LS}$  は 7.6 % 増加し、 $t$  が  $30 \text{ mm}$  から  $40 \text{ mm}$  に変化すると  $E_{LS}$  は 5.0 % 増加する。 $t = 10 \text{ mm}$  とした場合の  $E_{LS}$  (図 5-21(b) の結果) と比較すると  $t = 20 \text{ mm}$  の  $E_{LS}$  は 44 % 増加する。 $t$  が  $10 \text{ mm}$  から  $20 \text{ mm}$  に変化した場合は 44 % の  $E_{LS}$  の増加があったが、 $t = 20 \text{ mm}$  においても上限値が  $1.31 \times 10^{-1}$  の推定精度を維持している。 $E_{LS}$  の算出値の変化や条件数の変化を考慮すると今回の配置では、 $t = 20 \text{ mm}$  以上の高さでは



(a)  $t = 20 \text{ mm}$  の場合



(b)  $t = 30 \text{ mm}$  の場合



(c)  $t = 40 \text{ mm}$  の場合

図 5-22: 試料高さの影響 ( $m = 25$ ,  $h = 3 \text{ mm}$ ,  $h_g = 2 \text{ mm}$ ,  $V = -25 \text{ kV}$ )

表 5-4: 試料高さの影響における  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$

	$t = 20 \text{ mm}$	$t = 30 \text{ mm}$	$t = 40 \text{ mm}$
$\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }$	$5.42 \times 10^{-3}$	$5.14 \times 10^{-3}$	$5.50 \times 10^{-3}$
$\frac{\ \delta b\ }{\ b + \delta b\ }$	$5.12 \times 10^{-3}$	$4.91 \times 10^{-3}$	$4.69 \times 10^{-3}$
$C_1$	$1.17 \times 10$	$1.27 \times 10$	$1.32 \times 10$
$C_2$	1.45	$1.52 \times 10$	$9.56 \times 10$
$C_3$	$1.38 \times 10^2$	$1.61 \times 10^2$	$1.73 \times 10^2$
$C_4$	$1.16 \times 10$	$1.36 \times 10$	$1.37 \times 10$
$E_{LS}$	$1.31 \times 10^{-1}$	$1.41 \times 10^{-1}$	$1.47 \times 10^{-1}$
$E_{LS}^{app}$	$1.23 \times 10^{-1}$	$1.32 \times 10^{-1}$	$1.37 \times 10^{-1}$
$E_{LS}^{ref}$	$1.35 \times 10^{-1}$	$2.14 \times 10^{-1}$	$1.95 \times 10^{-1}$
$\frac{\ \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} - \mathbf{x}_F\ }{\ \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\ }$	$9.20 \times 10^{-2}$	$1.05 \times 10^{-1}$	$7.04 \times 10^{-2}$

$E_{LS}$  の増加は 13 % 程度であり,  $t = 40 \text{ mm}$  付近で  $E_{LS}$  は飽和すると推測される。

### 5.3.7 優決定問題化の影響

前節までの帯電電荷測定では測定点数  $m$  と帯電区分数  $n$  を同数として, 測定値から逆行列演算 (あるいは RLS) によって帯電電荷分布の推定を行ってきた。しかし, 前章の帯電電荷測定の数値シミュレーションでも検討したように, 逆計算時の安定性という面からは  $m > n$  とし, 優決定問題とすることで逆計算時の解の安定化を図ることが望ましいので, 本節では  $m > n$  として帯電電荷測定を行った。測定点数は  $m = 121$  とし, 帯電区分数  $n = 25$  に対して約 4.8 倍とした。測定条件は  $h = 3 \text{ mm}$ ,  $h_g = 2 \text{ mm}$ ,  $t = 10 \text{ mm}$ ,  $V = -25 \text{ kV}$  とした。 $A_d$  と  $A_\lambda$  の相違の最大値は 1.27 % ( $i = 115$ ,  $j = 21$ ) であった。

$m = 121$  とした場合の静電プローブによる測定値  $\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$  を図 5-23 に示す。121 点での測定値は, 図 5-2(a) に示した  $m = 25$  とした測定位置での 25 点の測定値を含んでいる。 $m = 25$  とし, 逆行列演算によって推定した帯電電荷分布を図 5-24(a) に,  $m = 121$  として LS によって推定した帯電電荷分布を図 5-24(b) に示す。 $m = 121$  とした場合の係数行列の条件数は  $1.54 \times 10$  であった ( $m = 25$  の条件数は 9.41)。

$m = 25$ , 121 とした場合の  $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_F$  との差の最大値はともに 51 pC ( $j = 18$ ) で, 差の平均値はそれぞれ 17 pC, 18 pC であった。 $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$  の上限値  $E_{LS}$ ,  $E_{LS}^{app}$ ,  $E_{LS}^{ref}$

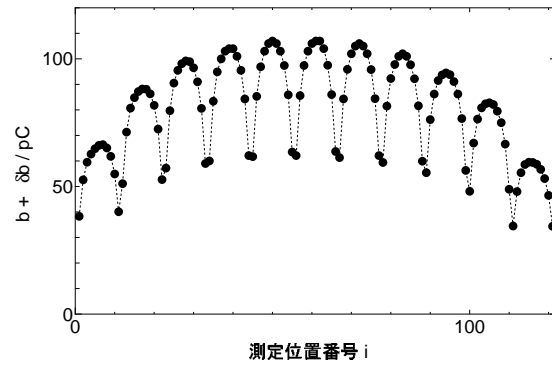
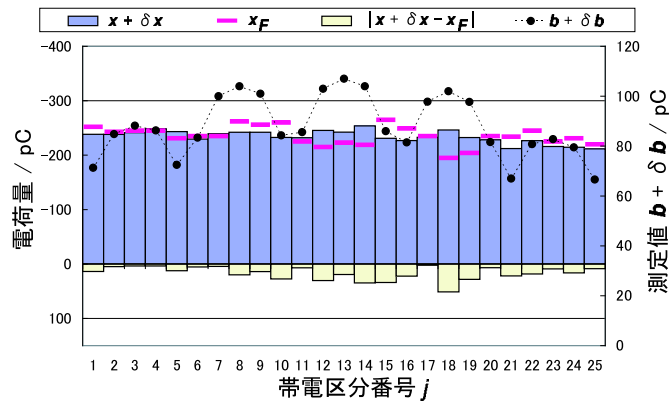
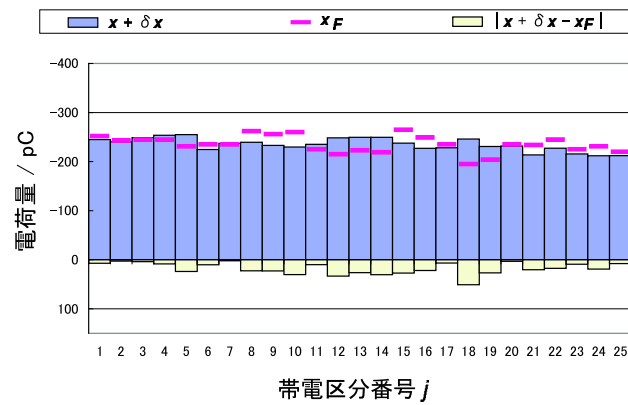


図 5-23:  $m = 121$  の測定値 ( $h = 3$  mm,  $h_g = 2$  mm,  $t = 10$  mm,  $V = -25$  kV)



(a)  $m = 25$  とした場合



(b)  $m = 121$  とした場合

図 5-24: 優決定問題化の影響 ( $h = 3$  mm,  $h_g = 2$  mm,  $t = 10$  mm,  $V = -25$  kV)

を計算すると、 $m = 25$  の場合は  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 4.30 \times 10^{-3}$ ,  $\frac{\|\delta b\|}{\|b+\delta b\|} = 5.79 \times 10^{-3}$ ,  $C_1 = 9.41$ ,  $C_2 = 5.64$ ,  $C_3 = 8.85 \times 10$ ,  $C_4 = 9.78 \times 10$  から  $E_{LS} = 1.01 \times 10^{-1}$ ,  $E_{LS}^{app} = 9.71 \times 10^{-2}$ ,  $E_{LS}^{ref} = 1.23 \times 10^{-1}$ , 測定結果では  $\frac{\|x+\delta x-x_F\|}{\|x+\delta x\|} = 8.83 \times 10^{-2}$  であった。 $m = 121$  の場合は  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 5.00 \times 10^{-3}$ ,  $\frac{\|\delta b\|}{\|b+\delta b\|} = 5.89 \times 10^{-3}$ ,  $C_1 = 1.54 \times 10$ ,  $C_2 = 1.46 \times 10$ ,  $C_3 = 2.38 \times 10^2$ ,  $C_4 = 1.60 \times 10$  から、 $E_{LS} = 1.84 \times 10^{-1}$ ,  $E_{LS}^{app} = 1.70 \times 10^{-1}$ ,  $E_{LS}^{ref} = 2.49 \times 10^{-1}$  となり、測定結果では  $\frac{\|x+\delta x-x_F\|}{\|x+\delta x\|} = 9.11 \times 10^{-2}$  であった。 $E_{LS}$  を比較すると  $m = 121$  の値は  $m = 25$  の値に比べて 1.8 倍となり、上限値で評価したときの推定精度は低下する結果となった。とはいえ、 $m = 25$ , 121 とした場合の推定値をそれぞれ  $x + \delta x_{25}$ ,  $x + \delta x_{121}$  として表すと、その相違はわずか  $\frac{\|\delta x_{121} - \delta x_{25}\|}{\|x + \delta x_{25}\|} = 2.04 \times 10^{-2}$  である。今回の調査では帯電電荷測定に優決定問題化を試みる手法の有効性は明確にはならなかったが、 $h = 10$  mm などの、もともと悪条件なケースには適した手法となる可能性はある。

## 5.4 まとめ

本章では、ブロック状固体絶縁物を対象として帯電電荷測定を行った。本章で得られた結果を次のようにまとめる。

- 数値電界計算精度を向上させることにより、今回の配置ではプローブ係数  $\simeq 1$  となり、プローブ係数による数値換算は不要であることがわかった。
- 直接法および  $\lambda$  関数法で計算した係数行列  $A_d$ ,  $A_\lambda$  を用いて推定した帯電電荷分布を比較すると、その相違は 1 % 以下であった。今回の配置では、 $\delta A = A_\lambda - A_d$  による推定解の変動の上限値は 10 % 程度に抑えられ、係数行列の計算精度が実用レベルに達していることを確認した。
- 比誘電率に  $\pm 5$  % の誤差を与えて計算した係数行列を用いて帯電電荷分布の推定を行った場合、推定解の変動は算出した上限値に対して 3 % 程度にしか過ぎず、 $\delta A$  が比誘電率の計測誤差に起因するようなシフト系の誤差である場合は、ランダム系の誤差と比較して推定解の変動が小さいことを示した。
- 測定距離  $h$  をパラメータとして帯電電荷測定を行った結果、 $h = 5$  mm, 10 mm の場合の推定解の変動の上限値は 1 を超えて過大となった。特に  $h = 10$  mm の場合に推定した帯電電荷分布は激しく振動し、完全に推定に失敗した結果となった。
- $h = 5$  mm, 10 mm とした場合に RLS を用いて解の推定を行った。 $h = 5$  mm の場合、推定解とファラデーケージによる測定値との差の平均値は 30 pC から 23 pC

に、 $h = 10$  mm の場合は 246 pC から 49 pC に改善された。 $x_e + \delta x_e$  を基準とした推定解の変動は算出した上限値から  $h = 5$  mm, 10 mm の場合にそれぞれ 16 %, 44 % 程度であり、RLS を適用したことにより安定した逆計算の実行が可能となった。

- ガード電極に対してセンサを埋没させた形状の静電プローブを適用することで係数行列の条件数の改善し、帯電電荷分布の推定を行った。センサとガード電極をフラットに配置した静電プローブを用いた場合の測定結果と比較して、今回の配置における推定解の変動の上限値は 54 % 以下であり、信号レベルの低下による S/N 比の悪化を考慮しても、センサをガード電極に対して埋没させた静電プローブ形状を用いたほうが良好な推定が可能であった。
- 試料高さを 10 mm から 20 mm, 30 mm, 40 mm として帯電電荷測定を行った。測定試料の高さを高くした場合、接地面の影響が小さくなり周辺電荷の影響が大きくなるため、係数行列の条件数が大きくなり推定精度は低下するが、高さを 40 mm とした場合においても算出した上限値から推定解の変動は 15 % 程度で保証できる結果が得られた。



## 第6章 モデルスペーサの帯電電荷測定

通常解法の SCM や BEM を用いて帯電電荷測定の係数行列計算を行った場合、帯電区分数  $n$  の係数行列の計算には  $O(n^4)$  以上の演算量と  $O(n^2)$  の記憶容量とを必要とし、4.2.1 節でも述べたように係数行列の計算に要する計算コストが非常に高い。係数値の計算精度を維持しながら、この計算コストをいかにして低減するかが帯電電荷測定法の課題の一つである。第4章では、その改善策の一つとして、多数のセンサを用いて同時測定を行うアレイ型プローブの適用を検討した。しかし、アレイ型プローブを適用した場合においても記憶容量の制限から帯電区分数は  $n = 100$  が限界であった。本節では、数値電界計算に高速解法である FMM-SCM（あるいは FMM-BEM）を適用することにより、係数行列の計算コストを改善した。FMM-SCM, FMM-BEM を適用した場合は、係数行列の計算に必要な演算量、記憶容量をそれぞれ  $O(n^2)$ ,  $O(n)$  にまで低減することが可能となる。

本節では、帯電区分毎に電荷密度は一定とするが区分形状が不均一である場合や、帯電区分毎に電荷密度を一次関数で表現する場合を取り扱っている。このようなケースでは、前章までに使用してきたラプラシアンフィルタをそのまま適用することができない。そこで、最初にそのようなケースにも適用可能であるラプラシアンフィルタの設計を行った結果について述べる。次にモデルスペーサを測定対象とし、FMM-SCM を適用して帯電区分数を  $n = 1794$  とした場合の帯電電荷測定の数値シミュレーション、実測結果について述べる。次に帯電電荷分布を区分毎に一定ではなく、一次関数を用いて表現することにより帯電電荷分布の数値モデル化誤差の低減を行った結果について述べる。最後に帯電区分数を  $n = 10140$  まで増加させた場合の帯電電荷測定の数値シミュレーションを行った結果について述べる。

### 6.1 ラプラシアンフィルタの設計

本節では、帯電電荷分布を三角形区分毎に一次関数で表現したときに適用可能なラプラシアンフィルタの設計について述べる。次に設計したラプラシアンフィルタを帯電電荷密度を三角形区分毎または四角形区分毎に一定とした場合に適用する方法について述べる。



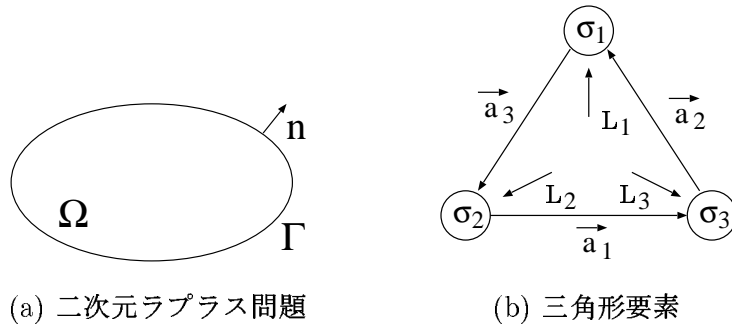


図 6-1: ラプラシアンフィルタの設計

図 6-1(a) に示すような二次元ラプラス問題を考える。ただし、境界  $\Gamma$  上では  $\frac{\partial \sigma}{\partial n} = 0$  とする。また、座標を表す  $x$  と記号を分けるために本節では電荷密度を  $\sigma$  で表す。このときラプラス方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0 \quad (\Omega \text{内}) \quad (6-1)$$

(6-1) 式の両辺に重み関数  $v$  をかけ、領域  $\Omega$  で積分すると次式が得られる。

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right\} v \, d\Omega = 0 \quad (6-2)$$

さらに (6-2) 式を弱形式化することにより

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \, d\Omega = 0 \quad (6-3)$$

が得られる。ここで、二次元三角形要素に対してガラーキン法を適用し、重み関数  $v$  に面積座標上で定義される一次補間関数を用いる。図 6-1(b) の三角形要素を平面三角形とし頂点の座標をそれぞれ  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  とすると、三角形内の座標は面積座標を用いて次式で表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (6-4)$$

(6-4) 式を変形して次式を得る。

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 & x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 & x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6-5)$$

$$\det = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2$$

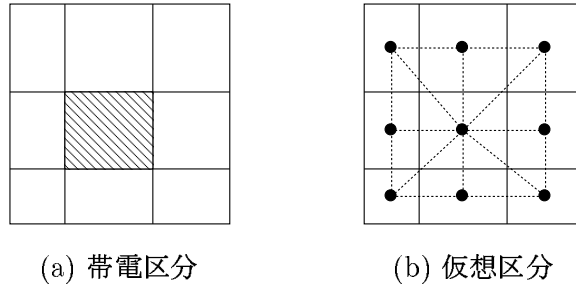


図 6-2: 四角形区分

(6-5) 式を  $x, y$  それぞれについて偏微分すると

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{\det}, \quad \frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{\det} \quad (6-6)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{y_3 - y_1}{\det}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{\det} \quad (6-7)$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{y_1 - y_2}{\det}, \quad \frac{\partial L_3}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{\det} \quad (6-8)$$

が得られる。また、 $\sigma = L_1\sigma_1 + L_2\sigma_2 + L_3\sigma_3$  を  $x, y$  で偏微分して次式を得る。ただし、図 6-1(b) に示すように  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  は 3 頂点の電荷密度を表し、図に示すように面積座標  $L_1, L_2, L_3$  を定める。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (6-9)$$

(6-6) 式 ~ (6-9) 式を (6-3) 式に代入することにより、ラプラシアンフィルタの重みを次式で表すことができる。三次元に適用可能とするためにベクトルで表す。

$$\frac{1}{4S} \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-10)$$

ただし、 $S$  は三角形の面積を表す。(6-10) 式に含まれる行列の 1 行目が  $\sigma_1$  を中心に考えたときの重み係数に相当し、2, 3 行目がそれぞれ  $\sigma_2, \sigma_3$  を中心としたときの重みを表す。各三角形に対して重みを計算し、重ね合わせるによりフィルタ行列  $K$  に変換することができる。

次に帯電区分毎に電荷密度を一定とした場合に、設計したラプラシアンフィルタを適用する方法について述べる。図 6-2(a) に示すように帯電区分を四角形で表現した場合を考える。斜線が引いてある区分がラプラシアンフィルタの中心となる区分である。このとき図 6-2(b) に示すように中心に位置する区分の中心座標 (図の黒丸) と周りの 8 区分

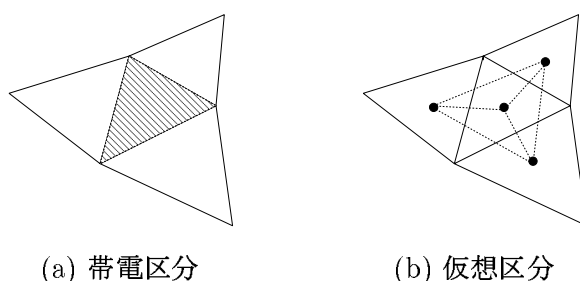


図 6-3: 三角形区分

の中心座標を結び点線で示すような 8 枚の三角形を考える。この 8 枚の三角形に対して (6-10) 式を適用し、黒丸で表している頂点に対する重みを計算する。このときの重みをそれぞれの四角形区分に対する重みとして用いることにより、帯電区分を四角形とした場合に対応するラプラシアンフィルタが得られる。区分が長方形であるときは中心座標は長方形の中心とすればよいが、他の形状の場合は適当な位置を設定しなければならないので、このような場合は次に示すような三角形区分を使用するほうがよい。

三角形区分に対しても同様の考え方をを用いる。図 6-3(a) に示すように中心となる三角形（斜線部分）と辺で接触する 3 枚の三角形を考える。三角形の重心（黒丸）を結び図 6-3(b) で点線で表している三角形を考える。あとは四角形区分の場合と同様に (6-10) 式を用いて重みを計算すればよい。

## 6.2 モデルスペーサの帯電電荷測定

### 6.2.1 測定配置

帯電電荷測定実験を行った測定配置を図 6-4 に示す。固体絶縁物（スペーサ）が高圧導体を支持する状態を簡易的に模擬するために、供試スペーサの上部および下部に接地電極を配置した。上部に配置した接地電極の厚さおよび直径はそれぞれ 20 mm, 120 mm とし、下部の電極には上部の電極を半分に切断し、厚さを半分の 10 mm としたものを使用した。供試スペーサ（テフロン製）は半径が 20 mm, 高さが 40 mm の円柱形状であり、比誘電率は 2.30 であった。この値は（株）日立製作所の比誘電率計測サービスの測定結果であり、測定状況、測定精度は前章で述べたとおりである。第 5 章の帯電電荷測定においてもテフロン製の測定試料を使用した。購入時期の違いから異なる比誘電率となった。また供試スペーサの上部と下部には電極を取り付けるためのネジが存在する。ネジのサイズは上部、下部ともに 9 mm  $\phi$  であり、長さは上部、下部それぞれ 8 mm, 4 mm とした。図 6-4(b) に静電プローブの形状を示す。センサは直径が 4 mm, 長さが 30

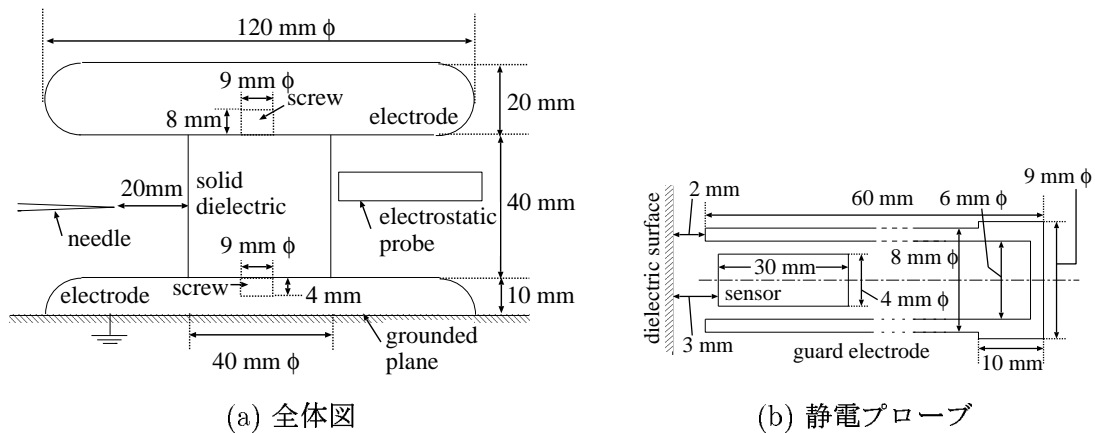


図 6-4: 測定配置

mm の円筒形状とした。ガード電極はセンサを取り囲むように存在し、長さを 60 mm とした。ガード電極の内径は 6 mm とし、外径はセンサ側 (図 6-4(b) の左側) から 50 mm までは 8 mm とし、残りの 10 mm の部分は 9 mm とした。図 6-4(b) は実験に用いた静電プローブを数値電界計算用にモデル化した形状を表している。センサと供試スペーサ表面との間の距離は 3 mm とし、ガード電極はセンサよりも供試スペーサ表面に 1 mm 近づけた位置に配置した。

供試スペーサ表面の帯電区分を以下のように設定した。まず表面を角度方向に 78 等分割し、さらに縦方向に 25 等分割した。ただし、縦一列の 25 区分領域の中で、上および下から 2 区分に関してはガード電極が存在するため、これらの区分領域と対向する位置にプローブを移動させることができない (到達不可能領域)。このような状況は係数行列の悪条件化をもたらす。そこで少しでも条件数を改善するために、これらの上下の各 2 区分をあわせて 1 区分として取り扱い、縦一列の区分数は 23 とし、帯電区分数を  $23 \times 78 = 1794$  に設定した。供試スペーサ表面に設定した帯電区分の一部の様子を 図 6-5(a) に示す。図 6-5(a) では帯電区分番号  $j$  も表示している。次にプローブの測定位置に関して述べる。区分領域の縦一列に沿って  $Z = 14.8 \text{ mm} \sim 45.2 \text{ mm}$  の区間を 0.8 mm で等分割して各点を測定位置とし、この位置にセンサの中心軸を一致させて測定を行った。つまり縦一列に関して 39 点測定し、周方向に 78 回繰り返す、測定点数は 3042 点とした。測定位置番号  $i$  は 図 6-5(b) に示すように設定した。

今回、係数行列の計算には  $\lambda$  関数法を使用し、係数の精度チェックを行うために補足的に直接法を用いた。数値電界計算には FMM-SCM を使用し、 $\lambda$  関数法での電界計算時に使用した未知数の個数は 30924 であった。センサ、ガード電極のメッシュパターンをそれぞれ 図 6-6, 図 6-7 に示す。上下電極、供試スペーサのメッシュパターンを 図 6-8 に示

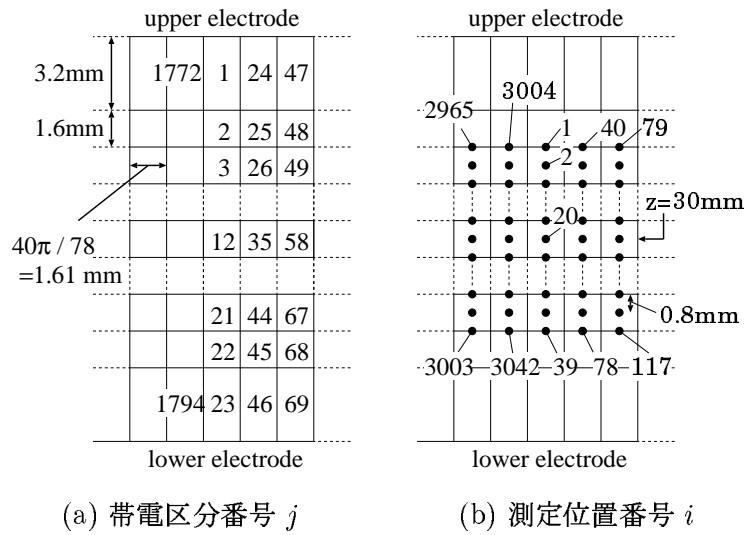


図 6-5: 帯電区分と測定位置の設定

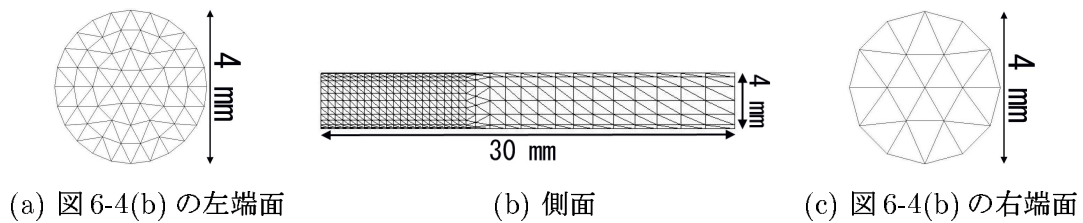


図 6-6: センサの電界計算用メッシュパターン

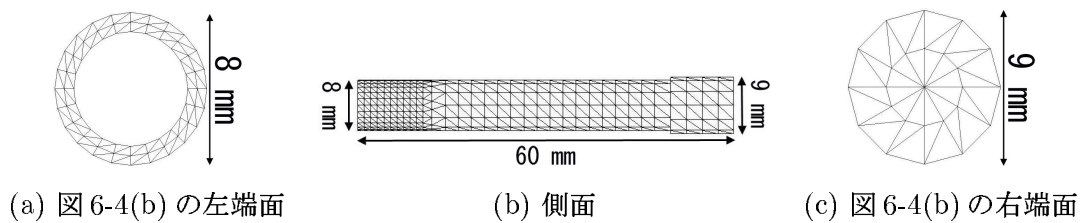


図 6-7: ガード電極の電界計算用メッシュパターン

す。供試スペーサの上部，下部に位置するネジは直径 9 mm（高さはそれぞれ 8 mm，4 mm）の円柱で模擬した。測定位置番号が  $i = 20$  ( $Z = 30$  mm) のときに，主要な要素である  $j = 1 \sim 23$ （縦一列に相当）までの帯電区分に対する係数に関して，直接法と  $\lambda$  関数法それぞれで計算した値を比較したところ，二つの方法の相違は 0.23 % 以下であり，直接法と  $\lambda$  関数法の係数行列相違の推定帯電電荷分布への影響を検討した 5.3.1 節のケースと比較して高い精度が達成されていることを確認した。

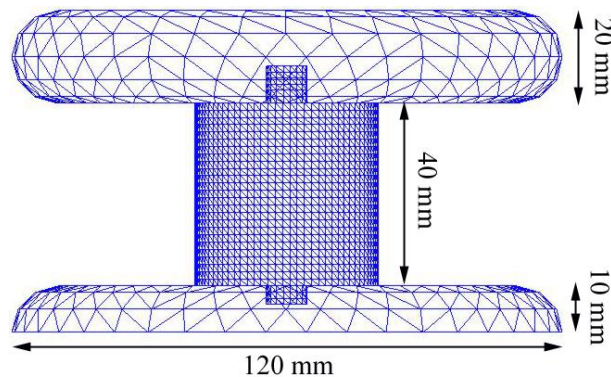


図 6-8: 上下電極，供試スペーサの電界計算用メッシュパターン

λ 関数法では帯電区分内の電位を積分する必要があるが，SCM を適用した場合は積分点位置ごとに表面電荷分布から電位を計算しなければならないため，表面電荷分布の求解に加えてλ関数法の係数値計算にも計算時間を要する。今回はセンサと帯電区分が近接している場合は，帯電区分毎に 13 点の三角形積分公式を用い，またセンサと帯電区分が離れた位置関係にある場合は，係数値が小さくなることに加え表面電位の変化も滑らかになるため積分点数を減らして 7 点の三角形積分公式を用いて電位の積分を行った。一方，BEM では絶縁物表面の電位（および電界）分布を未知関数とするため，解を求めた時点で絶縁物全表面の電位分布が表現されることになる。そのため，積分点位置の電位は節点の電位値を補間することで計算されるため，電位の積分を高速に実行できる。そこで，FMM-BEM を適用して λ 関数法の係数値計算を行った。メッシュパターンは FMM-SCM のときと同じとし，電界計算に使用した未知数の個数は 38521 であった。FMM-SCM に比べて未知数の個数が増加しているのは，絶縁物表面では電位と電界の両方が未知数となるためである。FMM-BEM での電位の積分には 25 点の三角形積分公式を使用した。FMM-SCM，FMM-BEM それぞれで計算した係数値の相違を

$$\frac{|\text{FMM-BEM による係数値} - \text{FMM-SCM による係数値}|}{|\text{FMM-SCM による 1 行の 1794 個の係数値の最大値}|} \times 100[\%] \quad (6-11)$$

で評価すると， $i = 1$  のときの相違は 0.09 % 以下であり， $i = 20$  のときの相違は 0.11 % 以下であった。この結果は，λ関数法と直接法の計算値の相違よりも小さく，FMM-SCM での電位の積分精度が十分であると判断できる。 $i = 20$  の場合に 1 行の係数値の計算に必要な計算時間を比較すると，FMM-SCM の場合は表面電荷分布の求解に 39 分 30 秒，電位の積分を行い 1 行の係数値を計算するのにさらに 22 分 54 秒を要した。一方で，FMM-BEM の場合は，電位・電界分布の求解に 77 分 26 秒を要し，電位の積分は 1 秒以下であった。使用した計算コードでは，数値電界計算を行って係数値を計算するまでに要する時間は FMM-SCM のほうが FMM-BEM に比べて，15 分程度少なくて済み，

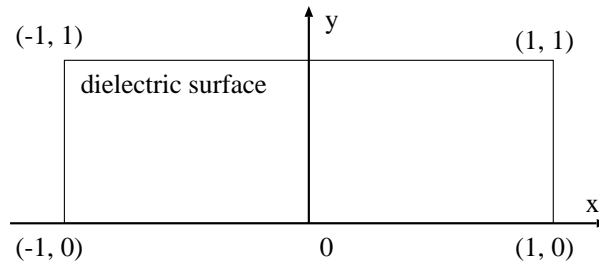


図 6-9: 供試スペーサ表面の規格化座標系

FMM-SCM と FMM-BEM での係数値の相違は 0.1 % 程度であることから、以降の計算では FMM-SCM を用いて係数行列計算を行った。本節においても、FMM-SCM で計算した係数行列を使用した。 $\lambda$  関数法で計算した係数行列を  $A_\lambda$  とし、本章の数値シミュレーションにおいては係数行列を  $A = A_\lambda$  (係数誤差  $\delta A = 0$ )、実測においては  $\bar{A} = A + \delta A = A_\lambda$  とした。

### 6.2.2 数値シミュレーション結果

本節では、推定精度の検討を目的とし、上記の測定配置を対象として帯電電荷測定の数値シミュレーションを行った結果について述べる。数値シミュレーションでは、簡単な関数に従って帯電電荷密度が変化するような単純な分布と、文字を表すような複雑な分布の 2 種類の分布を供試スペーサ表面に仮定した。前者、後者をそれぞれ仮定帯電電荷分布 1, 2 と呼ぶことにする。

まず仮定帯電電荷分布 1 について数値シミュレーションを行った結果について述べる。(6-12) 式に示す関数に従って電荷密度が変化する帯電電荷分布  $x$  を供試スペーサ表面に仮定した。供試スペーサ表面に図 6-9 に示すような規格化座標系をセットし、各帯電区分の中心座標を  $(a, b)$  とする。 $j$  番目の帯電区分の中心座標を用いて、次式で計算した値を  $j$  番目の帯電区分における電荷密度の仮定値  $x_j$  とした。

$$x_j = -3a^2b - a^2 + 2b^2 + b - 0.5 \quad [\text{pC}/\text{cm}^2] \quad (6-12)$$

このようにして得られた仮定帯電電荷分布  $x$  を図 6-10 に示す。図では供試円柱スペーサ側面の電荷密度分布を帯状に展開して表示している。

静電プローブによる測定模擬値は  $b = Ax$  としたが、実際の測定値は多少のノイズを伴う。このノイズを模擬するために平均 0.0 pC、偏差  $1.67 \times 10^{-3}$  pC のガウス分布から計算したランダムノイズ (3042 要素) を測定誤差  $\delta b$  とした。前章の帯電電荷測定において、測定ノイズの偏差は測定値の最大値の 1 % 以内であったので、ここでは偏差の

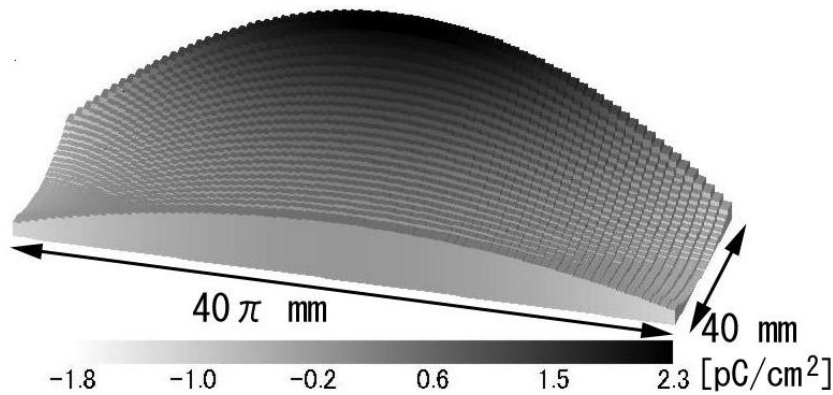


図 6-10: (6-12) 式で表される仮定帯電電荷分布 1  $x$

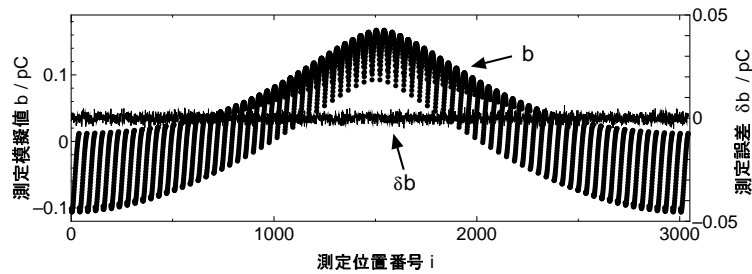


図 6-11: 図 6-10 の仮定帯電電荷分布 1 に対する測定模擬値, 測定誤差

大きさを測定模擬値  $b$  の最大値の 1% に設定した。図 6-11 に測定模擬値  $b$  と測定誤差  $\delta b$  を示す。LS によって推定した帯電電荷分布  $x + \delta x$  を図 6-12 に示す。LS で推定した帯電電荷分布は大きく発散し、仮定した帯電電荷分布とは 3 桁も異なる結果となった。ここでは係数誤差  $\delta A$  は考慮していないので  $\delta A = 0$  であり、 $E_{LS}^{ref'}$  を用いて推定誤差の上限を評価すると  $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 2.22 \times 10^{-2}$ 、 $A$  の条件数  $4.16 \times 10^6$  から  $E_{LS}^{ref'} = 9.24 \times 10^4$  となった。計算結果では  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 2.27 \times 10^3$  であり、推定誤差は上限値  $E_{LS}^{ref'}$  まで達することはなかったが、 $E_{LS}^{ref'}$  の値から  $A$  が悪条件であるために LS による推定は困難であることがわかる。

次に RLS により推定を行った。行列  $K$  には、帯電電荷分布が場所毎に連続的に分布しているという先験情報に基づき、場所毎に滑らかに変化するという仮定の下で、6.1 節で述べたラプラシアンフィルタに基づいて作成した行列を用いた。ただし、端部に位置する帯電区分に対しては図 4-44(c) のフィルタを適用して端部処理を行った。また行列  $K$  に対して各行のユークリッドノルムが 1 になるように規格化を行った。

次に行列  $K$  の特性をモデル解像度行列の列ベクトルで評価した。重み係数  $\gamma = 1.0 \times$



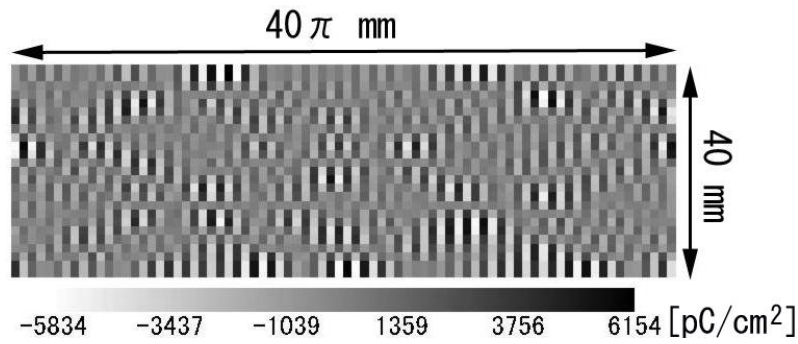


図 6-12: LS により推定した帯電電荷分布  $x + \delta x$  (仮定帯電電荷分布 1)

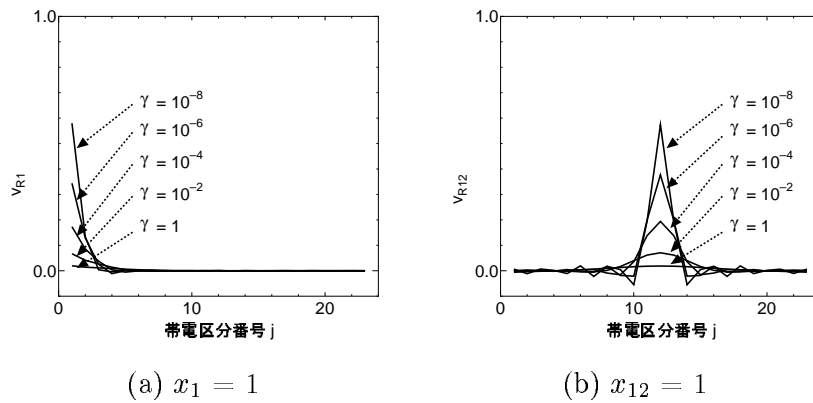


図 6-13: モデル解像度行列の列ベクトル

$10^{-8} \sim 1.0$  に対するモデル解像度行列の列ベクトルを図 6-13 に示す。図 6-13(a) は端部に位置する  $x_1 = 1$  として求めた 1 番列ベクトル, 図 6-13(b) は中央に位置する  $x_{12} = 1$  として求めた 12 番列ベクトルの結果を表す。ただし, 図 6-13 では帯電区分の 1 列分  $x_{e1} \sim x_{e23}$  に対する要素のみを表示している。 $\gamma$  を大きくしていくとラプラシアンフィルタの平滑化効果が強くなり,  $x_e$  はピーク値が小さくなるとともに広がりをもつ滑らかな分布になり, インパルス的な電荷に対する推定誤差が大きくなる。ピーク値の変化は  $x_1$  と  $x_{12}$  ともにほぼ同レベルに減衰していき,  $\gamma = 1.0 \times 10^{-2}$  のときのピーク値  $x_{e1}, x_{e12}$  はともに 0.07 程度になる。

$L$  カープの計算結果を図 6-14 に示す。 $L$  カープ法から  $\gamma = 5.02 \times 10^{-1}$  が決定され, この  $\gamma$  の値を使用して RLS により推定した帯電電荷分布  $x_e + \delta x_e$  を図 6-15 に示す。 $\gamma = 5.02 \times 10^{-1}$  において  $D_{RLS} = 1.11$  であり, モデル解像度行列の 1 番, 12 番列ベクトルのピーク値はそれぞれ  $x_{e1} = 2.37 \times 10^{-2}$ ,  $x_{e12} = 2.30 \times 10^{-2}$  となった。この  $\gamma$  において  $K$  は大きな平滑化作用を有している。しかし, この  $\gamma$  は  $L$  カープ法に従って

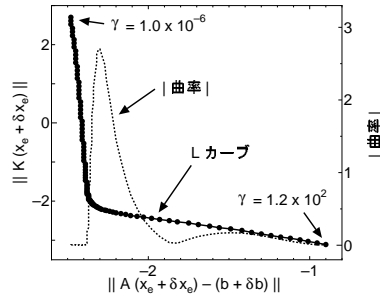


図 6-14:  $L$ カーブの計算結果 (仮定帯電電荷分布 1)

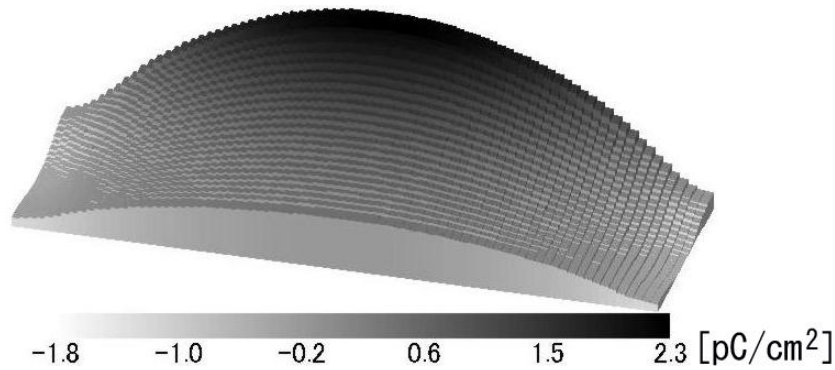


図 6-15: RLS により推定した帯電電荷分布  $x_e + \delta x_e$  (仮定帯電電荷分布 1)

決定した値であり,  $K$ ,  $\delta A$ ,  $b$ ,  $\delta b$  に対する  $L$ カーブ法に基づく最適値である。帯電区分毎の推定値  $x_{ej} + \delta x_{ej}$  ( $j = 1 \sim 1794$ ) それぞれの推定精度を

$$D_j = \frac{|x_{ej} + \delta x_{ej} - x_j|}{\text{Max}(x_j)} \quad (j = 1 \sim 1794) \quad (6-13)$$

で定義する  $D_j$  を用いて評価すると,  $D_j < 0.05$  であるのは 1753 個であり, 全体の 97.7% ( $= 1753 / 1794 \times 100$ ) であった。また,  $D_j$  の最大値は 0.103 であった。 $x$  を基準として推定精度をノルムで評価すると  $\frac{\|x_e + \delta x_e - x\|}{\|x\|} = 3.58 \times 10^{-2}$  であり 4% 程度の誤差であった。また  $E_{RLS}$  の計算を行うと,  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 0$ ,  $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|} = 2.22 \times 10^{-2}$  から,  $F_1 = 4.70$ ,  $F_2 = 5.21 \times 10^{-1}$ ,  $F_3 = 3.59 \times 10$ ,  $F_4 = 2.88$ ,  $F_5 = 2.20 \times 10$  であり,  $E_{RLS} = 6.40 \times 10^{-2}$  となった。 $\delta A = 0$  としているので,  $E_{RLS}^{app}$ ,  $E_{RLS}^{ref}$  は  $E_{RLS}$  と一致する。 $E_{RLS}$  の値から, 最悪ケースでは  $x_e + \delta x_e$  を中心として 6% 程度の誤差変動を伴うことになるが, 実際の推定結果では  $\frac{\|\delta x_e\|}{\|x_e + \delta x_e\|} = 4.86 \times 10^{-3}$  であり上限値  $E_{RLS}$  に対して 7% 程度でしかなかった。また, RLS を適用したことにより生じる  $x_e$  と  $x$  との相違  $\delta x_p$  は  $\frac{\|\delta x_p\|}{\|x\|} = 3.62 \times 10^{-2}$  であった。今回のケースでは  $x_e + \delta x_e$  と  $x$  の相違のほとんどが RLS を適用したことによる  $\delta x_p$  となり,  $x_e$  周りでは 1% 以下の変動でし

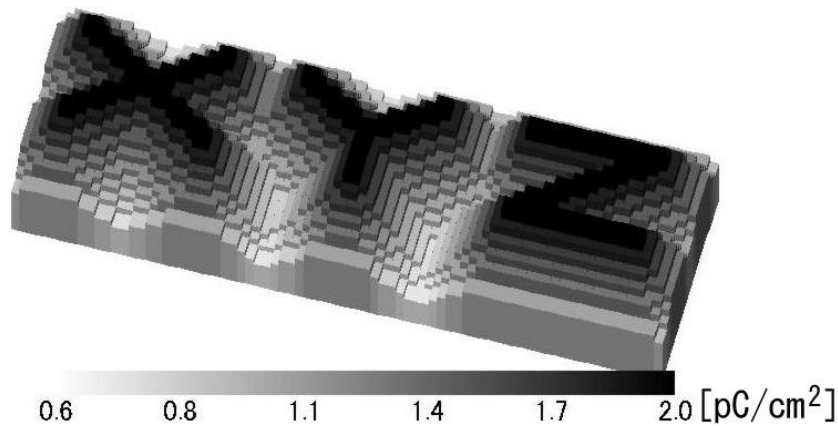


図 6-16: 仮定帯電電荷分布 2  $x$

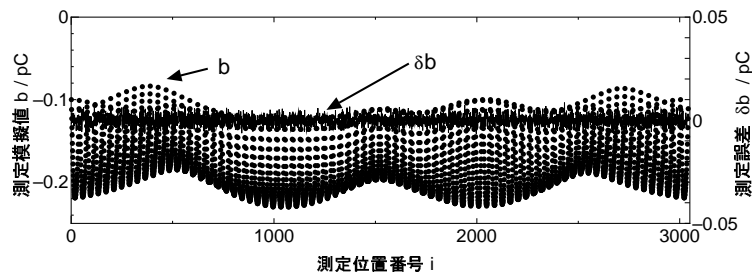


図 6-17: 図 6-16 の仮定帯電電荷分布 2 に対する測定模擬値, 測定誤差

かなかった。

次に仮定帯電電荷分布 2 について数値シミュレーションを行った結果について述べる。供試スペーサ表面の仮定帯電電荷分布  $x$  は, 図 6-16 に示すように円柱側面全体で「XYZ」の文字を表す電荷分布 (最大電荷密度  $2 \text{ pC/cm}^2$ ) とした。測定模擬値は  $b = Ax$  とし, 測定誤差  $\delta b$  を計算したガウス乱数の平均, 偏差はそれぞれ  $0 \text{ pC}$ ,  $2.30 \times 10^{-3} \text{ pC}$  とした。偏差の値は先と同様にして  $b$  の最大値の  $1\%$  に設定した。誤差を含まない測定模擬値  $b$  と測定誤差  $\delta b$  を図 6-17 に示す。LS で推定した解は  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 2.08 \times 10^3$  となり, 推定に完全に失敗した結果となったため, 推定した帯電電荷分布の図は省略する。次に RLS による推定を行った。行列  $K$  は先のシミュレーションと同じとした。図 6-18 に示す  $L$  カーブの計算結果から  $\gamma = 2.72 \times 10^{-2}$  が得られた。 $\gamma = 2.72 \times 10^{-2}$  のときに  $D_{RLS} = 1.14$ , モデル解像度行列の 1 番, 12 番列ベクトルのピーク値はそれぞれ  $x_{e1} = 5.24 \times 10^{-2}$ ,  $x_{e12} = 5.42 \times 10^{-2}$  であった。 $\gamma = 2.72 \times 10^{-2}$  として RLS により推定した帯電電荷分布を図 6-19 に示す。先の数値シミュレーションと同様に  $D_j$  を用いて推定精度を評価すると,  $D_j < 0.05$  であるのは 1417 個で, 全体の  $79.0\%$  ( $= 1417 / 1794$ )

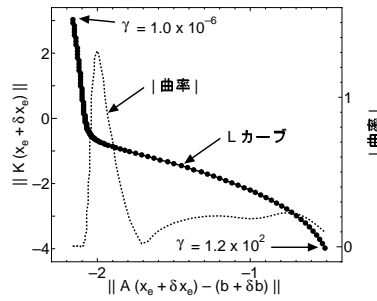


図 6-18: Lカーブの計算結果 (仮定帯電電荷分布 2)

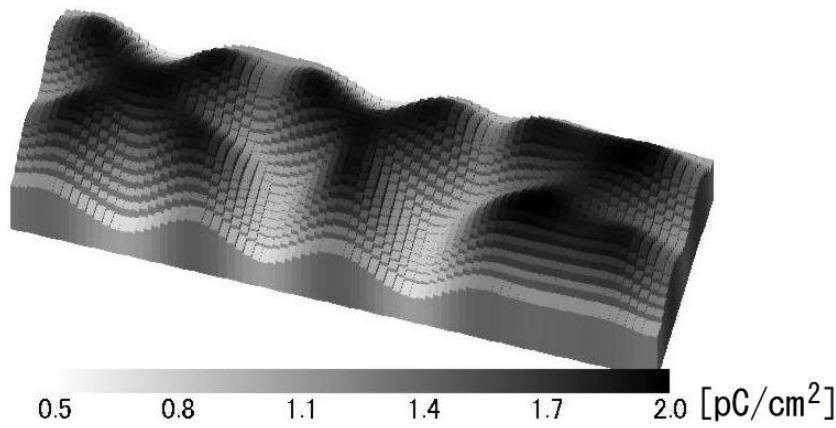


図 6-19: RLS により推定した帯電電荷分布  $x_e + \delta x_e$  (仮定帯電電荷分布 2)

$\times 100$ ) であった。また、1781 個 (全体の 99.3%) の区分において  $D_j < 0.1$  であり、 $D_j$  の最大値は 0.120 であった。推定精度をノルムで評価すると  $\frac{\|x_e + \delta x_e - x\|}{\|x\|} = 5.28 \times 10^{-2}$  で、 $x$  を基準とした推定誤差は 5% 程度であった。また  $E_{RLS}$  の計算を行うと、 $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 0$ 、 $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|} = 1.30 \times 10^{-2}$  から、 $F_1 = 8.72$ 、 $F_2 = 1.90$ 、 $F_3 = 1.46 \times 10^2$ 、 $F_4 = 8.34$ 、 $F_5 = 1.40 \times 10^2$  であり、 $E_{RLS} = 1.08 \times 10^{-1}$  となった。一方、実際の計算結果では  $\frac{\|\delta x_e\|}{\|x_e + \delta x_e\|} = 1.10 \times 10^{-2}$  で上限値  $E_{RLS}$  の 10% 程度の変動であった。また  $x_e$  と  $x$  の相違は  $\frac{\|\delta x_p\|}{\|x\|} = 5.10 \times 10^{-2}$  であり、今回の数値シミュレーションにおいても  $x_e + \delta x_e$  と  $x$  の相違のほとんどが RLS を適用したことによる  $\delta x_p$  であった。しかし、 $x_e + \delta x_e$  と  $x$  の相違は 5% 程度であることから RLS の適用が有効であることがわかる。

今回の配置では、単純に電荷分布が変化する仮定帯電電荷分布 1 で  $\frac{\|x_e + \delta x_e - x\|}{\|x\|} = 3.58 \times 10^{-2}$  となり、今回のように複雑に変化する分布においても  $\frac{\|x_e + \delta x_e - x\|}{\|x\|} = 5.28 \times 10^{-2}$  で、仮定した帯電電荷分布に対して 3~5% の誤差で帯電電荷分布を推定することができ、帯電区分数を 1794 まで増加させたときの帯電電荷測定においても RLS の適用によ

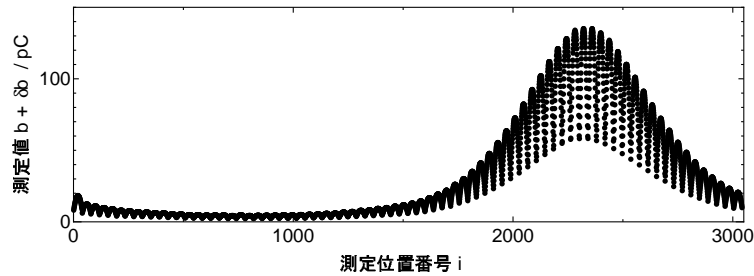


図 6-20: 測定値  $b + \delta b$

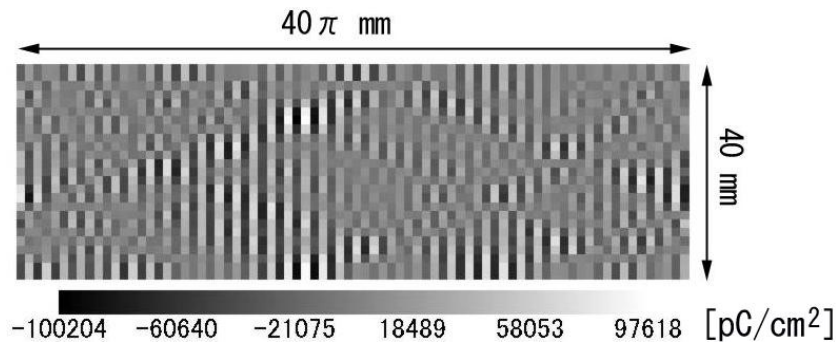


図 6-21: LS による推定帯電電荷分布

り安定した逆計算の実行が可能であることを示す結果が得られた。また仮定帯電電荷分布 2 のような複雑な分布に対しても、帯電区分数を増加させることにより電荷分布の変化を捉えることが可能となる。

### 6.2.3 実験結果

次に帯電区分数を 1794 としたときの帯電電荷測定実験を行った。供試スペーサ表面を帯電させるために針電極を使用し、接地面から 30 mm（下部電極表面からは高さ 20 mm）、供試スペーサ表面から 20 mm の位置を針先端位置とした。帯電時の針電極への印加電圧は -25 kV とし、電圧印加時間は 60 秒とした。帯電完了後は針電極を十分遠方に退避させた。静電プローブによる測定値を図 6-20 に示す。測定値から LS により推定した帯電電荷分布を図 6-21 に示す。図を見てわかるように解が発散しており明らかに推定に失敗している。これは  $\bar{A}$  の条件数が  $4.16 \times 10^6$  であり非常に悪条件であることが原因で、数値シミュレーションのときの結果と同様である。

次に RLS による推定を行った。図 6-22 に  $L$  カurve の計算結果を示す。 $L$  カurve 法より  $\gamma = 6.32 \times 10^{-3}$  となり、この  $\gamma$  に対して  $D_{RLS} = 1.15$  であった。モデル解像度行

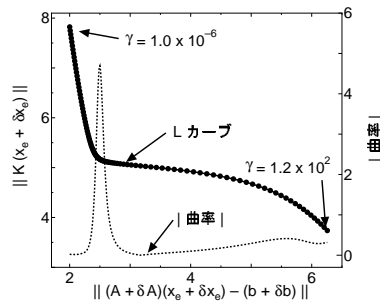


図 6-22: L カーブの計算結果

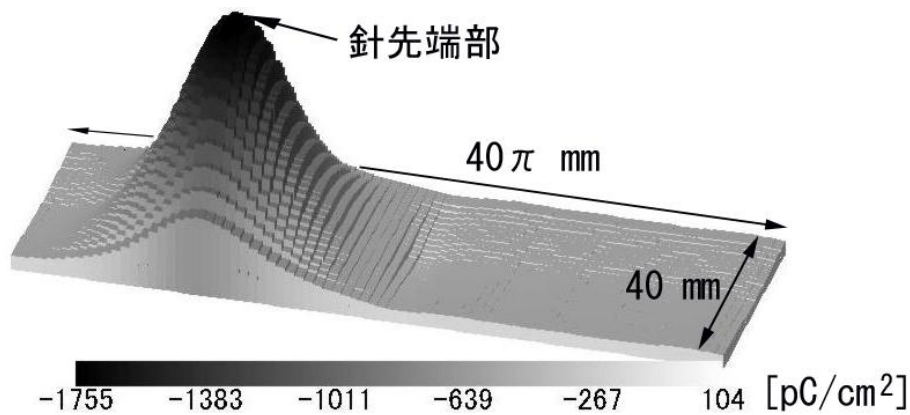


図 6-23: RLS による推定帯電電荷分布

列の列ベクトルのピーク値は、1 番列ベクトルでは  $x_{e1} = 7.45 \times 10^{-2}$ 、12 番列ベクトルでは  $x_{e12} = 7.95 \times 10^{-2}$  となった。

$\gamma = 6.32 \times 10^{-3}$  としたときの RLS による推定帯電電荷分布を図 6-23 に示す。推定結果は、針電極の先端付近の電荷密度が高く、先端から離れるほど電荷密度が低くなっており、定性的に妥当な電荷分布となった。 $E_{RLS}$  の  $F_1 \sim F_5$  の値は  $F_1 = 1.25 \times 10$ 、 $F_2 = 1.53$ 、 $F_3 = 4.35 \times 10^2$ 、 $F_4 = 9.39$ 、 $F_5 = 3.26 \times 10^2$  であった。 $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|}$  は、付録 F に記載する方法を用いて測定値の最大値 135 pC と (F-1) 式から  $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|} = 4.59 \times 10^{-3}$  とする。一方、直接法と  $\lambda$  関数法で計算した主要な係数値の相違が 0.23 % 以下であったことより、 $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 0.0023$  とする。これらの値を用いて  $E_{RLS}$  を計算すると分母が負となり不定であった。そこで、 $E_{RLS}^{app}$  を計算したところ  $8.38 \times 10^{-2}$  であった。一方、参考値である  $E_{RLS}^{ref}$  は  $7.77 \times 10^{-2}$  であった。つまり、近似値である  $E_{RLS}^{app}$  の値から、推定した帯電電荷分布は  $x_e + \delta x_e$  まわりで最悪の場合におよそ 8 % 程度の誤差変動を有することになる。

本節の実測結果では、推定した帯電電荷分布  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e$  の推定精度は最悪ケースでも 8 % 程度に抑えられた。前節の数値シミュレーションの結果と本節の実測結果から、帯電区分数を増加させた帯電電荷測定によりモデルスペーサ表面の電荷分布の推定が可能であることがわかった。

#### 6.2.4 比誘電率の計測誤差が推定分布へ及ぼす影響

数値電界計算法の性能、電界計算時のモデリング誤差、比誘電率  $\epsilon_r$  の誤差など多くの要因によって係数行列  $A$  は計算誤差  $\delta A$  を伴う。前者の 2 つに起因する  $\delta A$  は通常  $\pm$  方向の変動となるが、 $\epsilon_r$  の誤差による  $\delta A$  はランダム誤差ではなく、全体的にシフトするような変動になる。ここでは、このようなシフト系誤差の  $\delta A$  によって推定値がどの程度変化するかを評価する。前章においても比誘電率の計測誤差の推定分布への影響については検討したが、帯電区分数を増加させた点と RLS を適用する点で異なる。そこで計測した比誘電率  $\epsilon_r = 2.30$  に対して  $\pm 5\%$  の誤差を与えて、 $\epsilon_r = 2.185, 2.415$  として係数行列を計算した。ここで、 $\epsilon_r = 2.185, 2.415$  とした場合の係数行列をそれぞれ  $\bar{A} + \delta A_l, \bar{A} + \delta A_h$  として表す。係数行列の相違をスペクトルノルムで評価すると  $\frac{\|\delta A_l\|}{\|\bar{A}\|} = 1.37 \times 10^{-2}$ ,  $\frac{\|\delta A_h\|}{\|\bar{A}\|} = 1.33 \times 10^{-2}$  であった。

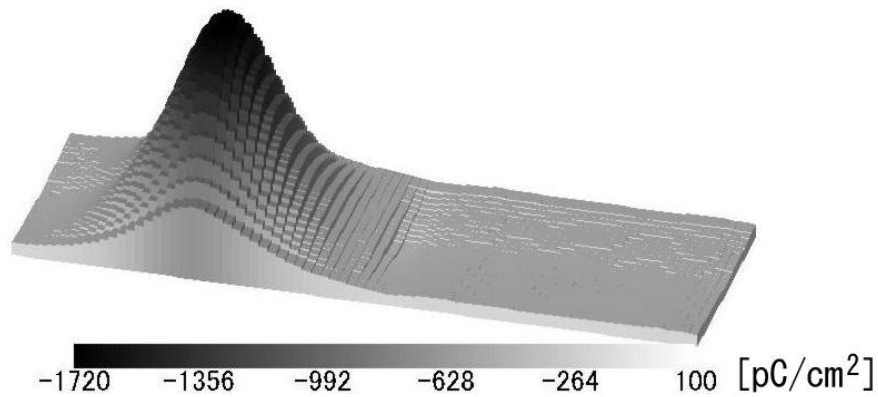
$\bar{A} + \delta A_l, \bar{A} + \delta A_h$  を用いて図 6-20 の測定値から RLS により推定した帯電電荷分布を図 6-24 に示す。 $L$  カーブ法を用いて求めた  $\gamma$  は  $\bar{A} + \delta A_l, \bar{A} + \delta A_h$  とともに  $\gamma = 6.32 \times 10^{-3}$  であり、 $\bar{A}$  のときと同じ値となった。ただし、 $L$  カーブを計算するときに  $\gamma = 6.32 \times 10^{-3}$  の前後において、 $5.27 \times 10^{-3}, 7.58 \times 10^{-3}$  を使用しており、この範囲で変化しなかつただけである。

$\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e$  に対する  $\delta A_l, \delta A_h$  による推定誤差  $\delta\mathbf{x}_{el}, \delta\mathbf{x}_{eh}$  の相違をユークリッドノルムで評価すると、 $\frac{\|\delta\mathbf{x}_{el}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e\|}, \frac{\|\delta\mathbf{x}_{eh}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e\|}$  はともに  $1.90 \times 10^{-2}$  であった。 $\delta\mathbf{x}$  の  $\delta A$  に対する誤差の拡大率  $E_{rate}$  を次式で定義する。

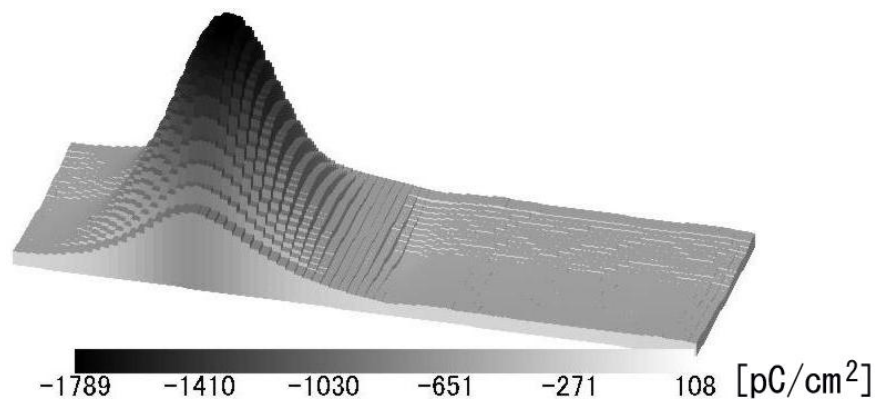
$$E_{rate} = \begin{cases} \frac{\|\delta\mathbf{x}_{el}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e\|} / \frac{\|\delta A_l\|}{\|\bar{A}\|} \\ \frac{\|\delta\mathbf{x}_{eh}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e\|} / \frac{\|\delta A_h\|}{\|\bar{A}\|} \end{cases} \quad (6-14)$$

$E_{rate}$  は、 $\bar{A} + \delta A_l$  のときに 1.39,  $\bar{A} + \delta A_h$  のときに 1.43 で、誤差の拡大率は 1.4 倍程度でしかなかった。

次に  $E_{RLS}, E_{RLS}^{app}$  により  $\frac{\|\delta\mathbf{x}_{el}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_{el}\|}$  の上限値を計算した。 $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_{el}$  はともに  $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$  からの線形写像であり、 $E_{RLS}, E_{RLS}^{app}$  の計算式の  $\|\delta\mathbf{b}\|$  を含む項はここでは考慮しない。このとき、 $E_{RLS}$  は分母が負で不定となった。 $E_{RLS}^{app}$  は  $3.60 \times 10^{-1}$  であり、 $\frac{\|\delta A_l\|}{\|\bar{A}\|}$  が  $1.37 \times 10^{-2}$  でも  $\delta A_l$  が最悪のケースの場合、 $\frac{\|\delta\mathbf{x}_{el}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_{el}\|}$



(a)  $\epsilon_r = 2.185$  として推定した帯電電荷分布



(b)  $\epsilon_r = 2.415$  として推定した帯電電荷分布

図 6-24:  $\epsilon_r$  の計測誤差の推定誤差への影響

は  $3.60 \times 10^{-1}$  の変動を持つことになる。一方、実際の結果では  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_{el}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_{el}\|} = 1.87 \times 10^{-2}$  であり上限値  $E_{RLS}^{app}$  に対して 5.2% の値であった。 $\delta A_h$  の場合も  $E_{RLS}$  は分母が負となり不定となった。 $E_{RLS}^{app}$  は  $3.58 \times 10^{-1}$  で、測定結果の  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_{eh}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_{eh}\|}$  は  $1.93 \times 10^{-2}$  で上限値  $E_{RLS}^{app}$  に対して 5.4% であった。

ランダム系誤差の場合は、 $E_{RLS}^{app}$  程度の変動が観察される可能性があるのに対し、今回のシフト系誤差による変動は  $E_{RLS}^{app}$  の 5% 程度となり、比誘電率の計測誤差による係数誤差は、ランダム系の誤差に比べて、推定精度を大きく低下させる要因とはならないことが、この例については確認された。



## 6.2.5 帯電電荷分布の一次表現化

これまでに述べてきたように帯電電荷測定では、電荷分布を数値離散化し、測定値から逆計算によって電荷分布を推定する。ここで、仮に係数行列の計算誤差  $\delta A$  や測定誤差  $\delta b$  が完全に零である場合を考える。このとき LS（もしくは逆行列演算）によって推定した電荷分布  $x$  は真の電荷分布を表しているかということそれは間違いである。なぜなら、電荷分布を数値的に取り扱うためにモデル化を行った時点で  $x$  は真の電荷分布ではなくなるからである。しかし、推定精度はこの  $x$  を基準にして測るものであり、 $x$  を真の分布に近づけるように電荷分布のモデル化を行うことは非常に重要である。そこで、ここでは数値計算モデル誤差の低減化を目的とし、電荷分布を区分毎に一次関数で表現する方法について検討を行った。また、本章では FMM-SCM を適用して帯電区分数を増加させているが、帯電区分数を増加させることも数値モデル化誤差を低減するための一つの方法である。

これまでは四角形状の帯電区分を用いて帯電電荷分布を表現してきたが、本節では帯電区分の設定時において汎用性の高い三角形形状の帯電区分を用いる。三角形帯電区分内の電荷分布を一次関数で表現した場合、各頂点の電荷密度が未知数となる。各頂点に対して面積座標  $L_1, L_2, L_3$  ( $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ ) を定めると区分内の電荷密度  $x$  は面積座標を用いて次式のように表される。

$$x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \quad (6-15)$$

また、係数行列の計算に  $\lambda$  関数法を使用した場合、 $x_i$  ( $i = 1 \sim 3$ ) に対応する係数値  $A_i$  は次式を数値積分することで求められる。

$$A_i = \int_S L_i \lambda dS \quad (i = 1 \sim 3) \quad (6-16)$$

ただし、 $\lambda$  は  $\lambda$  関数を、 $S$  は三角形区分（曲面三角形区分）の面積を表す。

測定配置、静電プローブ形状は前節までと同じとした。供試スペーサ表面に設定した未知数の位置（三角形区分の頂点位置）および測定位置を図 6-25 に示す。未知数は次のように設定した。供試スペーサ表面を角度方向に 78 分割、縦方向に 25 分割し、3900 個の三角形に表面を分割して、各三角形の頂点の電荷密度を未知数  $x$  とした（図 6-25(a) の黒丸）。各三角形の帯電電荷分布を一次関数で表現し、未知数の総数は  $78 \times 26 = 2028$  個とした。

測定位置については、 $Z = 14.8 \text{ mm} \sim 45.2 \text{ mm}$  の区間を  $0.8 \text{ mm}$  で等分割して得られた点（図 6-25(b) の黒丸）とセンサの中心軸が一致する位置を測定位置とした。つまり縦一列に関して 39 点測定し、周方向に 78 回繰り返す、測定点数は 3042 点とした。本節の測定点数および測定位置は 6.2 節のケース場合と同じである。係数行列の計算には  $\lambda$

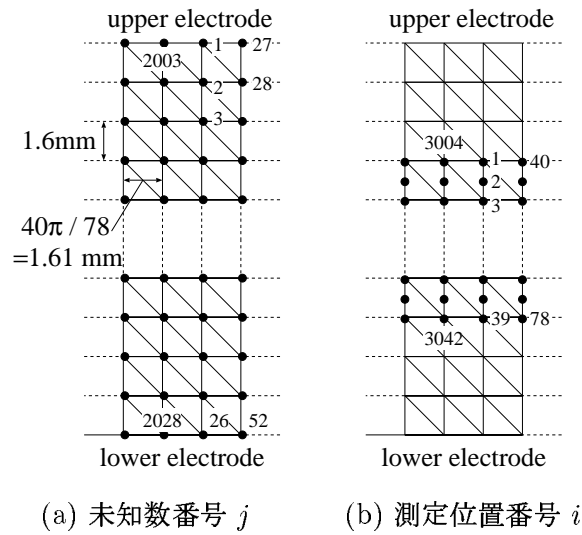


図 6-25: 未知数の位置と測定位置の設定

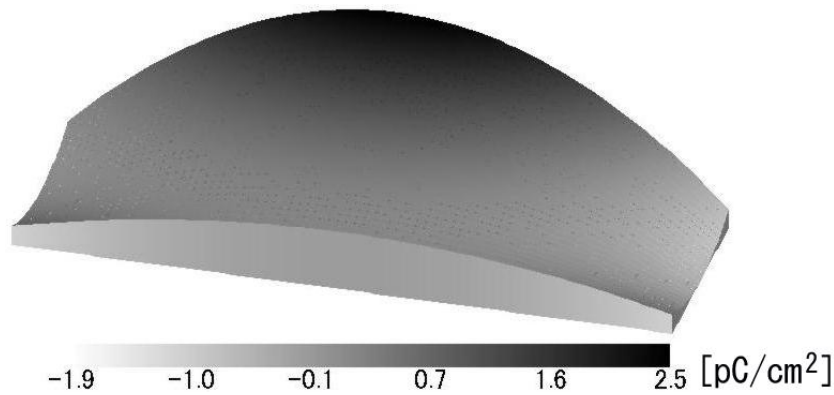


図 6-26: 仮定帯電電荷分布  $x$

関数法を使用した。数値電界計算には FMM-SCM を使用し、電界計算に用いたメッシュパターン、未知数の個数は 6.2.1 節と同じとした。測定位置番号が  $i = 20$  のときに、主要な係数値であるセンサと対向する縦一列の  $x_1$  から  $x_{26}$  までの係数値に関して  $\lambda$  関数法と直接法それぞれで計算した値を比較したところ、二つの方法の相違は 0.31 % 以下であり、5.3.1 節の場合と比較して高い計算精度が達成されていることを確認した。

図 6-26 に示す電荷分布を供試スペーサ表面に仮定して帯電電荷測定の数値シミュレーションを行った。図 6-26 の電荷分布は、各未知数の座標を  $(a, b)$  として (6-12) 式で計算した値をその未知数の電荷密度の仮定値として設定した分布である。測定模擬値は  $b = Ax$  として計算し、測定誤差  $\delta b$  はガウス乱数値とした。ガウス乱数の平均、偏差はそ

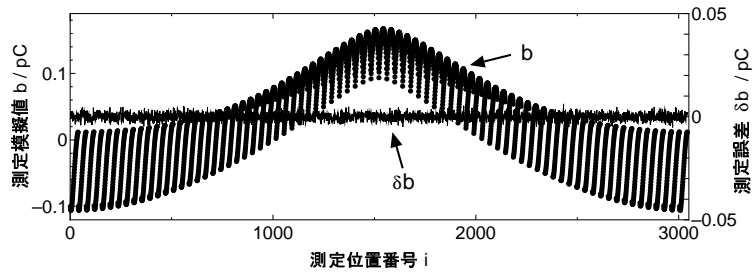


図 6-27: 図 6-26 の仮定帯電電荷分布に対する測定模擬値，測定誤差

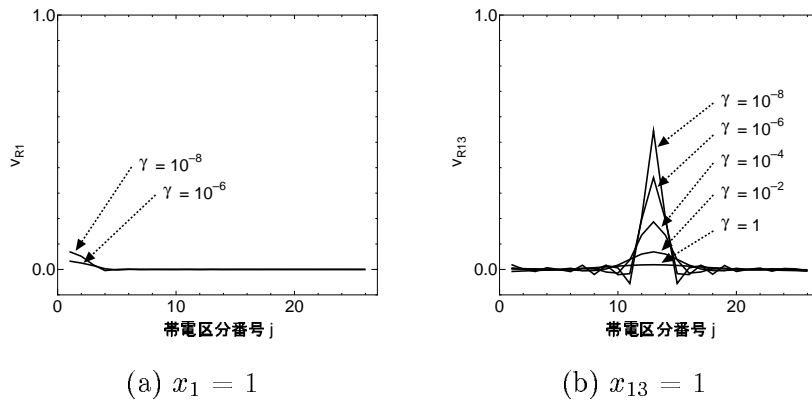


図 6-28: モデル解像度行列の列ベクトル

れぞれ 0 pC,  $1.67 \times 10^{-3}$  とし，偏差の値は  $b$  の最大値の 1% とした。図 6-27 に測定模擬値  $b$  と測定誤差  $\delta b$  を示す。LS による推定解は  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1.20 \times 10^4$  となり激しく振動する結果となったため，推定した電荷分布の図は省略する。このとき係数行列の条件数は  $3.34 \times 10^7$  であり，帯電区分毎に電荷密度を一定とした 6.2.1 節のときよりも条件数が大きくなったが，これは 6.2.1 節では，静電プローブの到達不可能領域となる端部の区分では 2 区分をまとめて 1 区分としたことにより，条件数が改善されていたためである。

次に RLS により推定を行った。行列  $K$  は 6.1 節で述べたラプラシアンフィルタを用いて設計を行い，端部に位置する未知電荷密度に対しては図 4-44(c) のフィルタ重みを使用して端部処理を行った。重みを設定したのち，行列  $K$  は各行のユークリッドノルムが 1 になるように規格化を行った。重み係数  $\gamma = 1.0 \times 10^{-8} \sim 1.0$  に対するモデル解像度行列の列ベクトルを図 6-28 に示す。図 6-28(a), (b) はそれぞれ端部に位置する  $x_1 = 1$  として求めた 1 番列ベクトル，中央に位置する  $x_{13} = 1$  として求めた 13 番列ベクトルの結果を表す。図 6-28 では縦一列分の  $x_{e1} \sim x_{e26}$  の要素のみを表示している。 $x_1 = 1$  は  $x_{13}$  に比べて平滑化の影響を大きく受けており， $\gamma = 1.0 \times 10^{-6}$  までの結果のみ示して

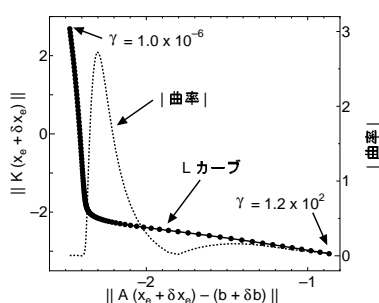


図 6-29: L-カーブの計算結果

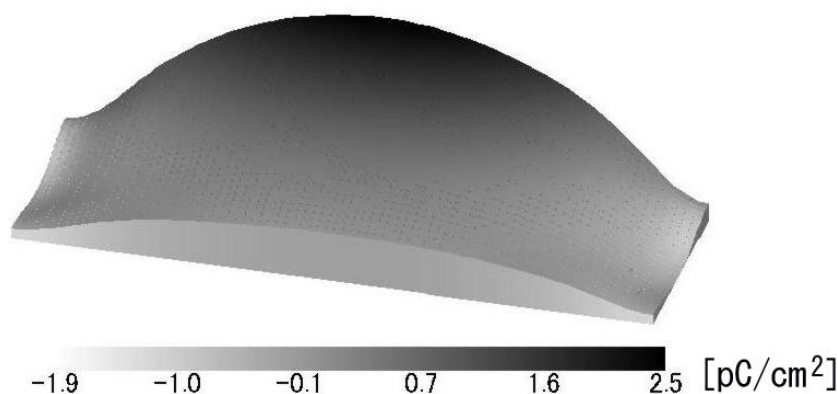


図 6-30: RLS により推定した帯電電荷分布  $x_e + \delta x_e$

いる。例えば、 $\gamma = 1.0 \times 10^{-8}$  の場合  $x_{13} = 1$  のときのピーク値は  $x_{e13} = 5.45 \times 10^{-1}$  であるのに対して、 $x_1 = 1$  のときのピーク値は  $x_{e1} = 6.99 \times 10^{-2}$  で  $x_{e13}$  の 13% 程度になる。これは、 $x_1$  近傍にプローブを移動できないために  $x_1$  に対する係数値が小さく、 $x_1$  にかかるフィルタの影響が  $x_{13}$  に対して相対的に大きくなっているからである。

図 6-29 に示す L-カーブ法の結果から  $\gamma = 4.19 \times 10^{-1}$  となり、RLS により推定した帯電電荷分布  $x_e + \delta x_e$  を図 6-30 に示す。 $\gamma = 4.19 \times 10^{-1}$  のときに  $D_{RLS} = 1.13$ 、モデル解像度行列の 1 番列ベクトル、13 番列ベクトルのピーク値はそれぞれ  $x_{e1} = 1.97 \times 10^{-3}$ 、 $x_{e13} = 2.40 \times 10^{-2}$  であった。6.2.2 節で定義した  $D_j$  を用いて推定精度を評価すると、 $D_j < 0.05$  であるのは 1925 個（全体の  $94.9\% = 1925 / 2028 \times 100$ ）であり、 $D_j$  の最大値は 0.16 であった。推定精度をノルムで評価すると  $\frac{\|x_e + \delta x_e - x\|}{\|x\|} = 4.60 \times 10^{-2}$  で、 $x$  を基準とした推定誤差は 5% 程度であった。また  $E_{RLS}$  の計算を行うと、 $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 0$ 、 $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|} = 1.30 \times 10^{-2}$  から、 $F_1 = 7.06$ 、 $F_2 = 1.28$ 、 $F_3 = 9.92 \times 10$ 、 $F_4 = 3.90$ 、 $F_5 = 5.48 \times 10$  であり、 $E_{RLS} = 8.66 \times 10^{-2}$  となった。一方、実際の計算結果では  $\frac{\|\delta x_e\|}{\|x_e + \delta x_e\|} = 5.69 \times 10^{-3}$  で上限値  $E_{RLS}$  に対して 6.6% であった。また  $x_e$  と  $x$

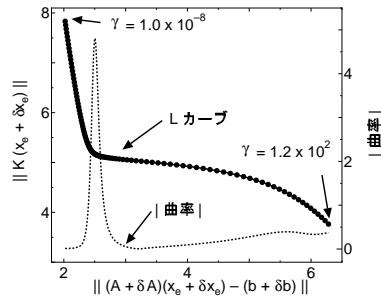


図 6-31:  $L$  カーブの計算結果

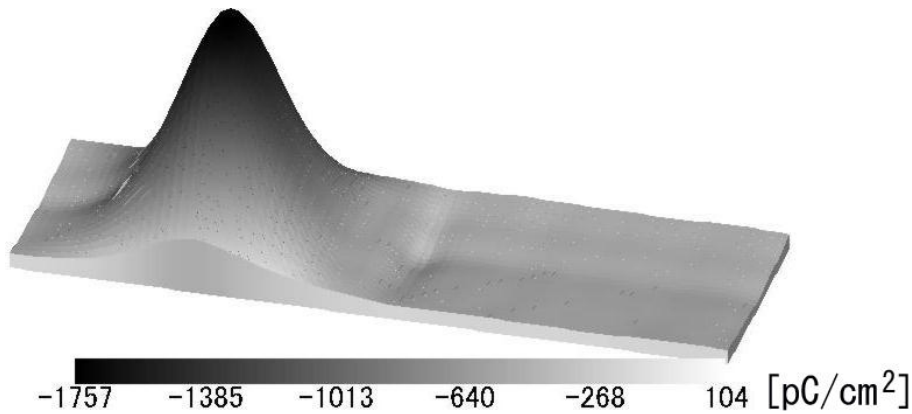


図 6-32: RLS により推定した帯電電荷分布  $x_e + \delta x_e$

との相違  $\delta x_p$  については  $\frac{\|\delta x_p\|}{\|x\|} = 4.65 \times 10^{-2}$  であった。

数値シミュレーションにおいて、帯電電荷分布を一次関数で表現する方法が帯電電荷測定に適用可能であることを示す結果が得られたので、次に実験結果に適用した結果について述べる。静電プローブによる測定値は 6.2.3 節の測定結果を使用した。LS による推定解は、明らかに振動した無意味な結果となったので、ここでは図は省略する。図 6-31 に  $L$  カーブの計算結果を示す。 $L$  カーブ法から  $\gamma = 6.32 \times 10^{-3}$  となり、 $\gamma = 6.32 \times 10^{-3}$  のときに  $D_{RLS} = 1.13$ 、モデル解像度行列の 1 番列ベクトル、13 番列ベクトルのピーク値はそれぞれ  $x_{e1} = 5.88 \times 10^{-3}$ 、 $x_{e13} = 7.76 \times 10^{-2}$  であった。図 6-32 に RLS により推定した帯電電荷分布を示す。次に  $E_{RLS}$  の計算を行った。直接法と  $\lambda$  関数法の係数値の相違より  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 0.0031$  とし、 $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|}$  に関しては 6.2.3 節と同様にして求めて  $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|} = 4.59 \times 10^{-3}$  とすると、 $E_{RLS}$  の  $F_1 \sim F_5$  の値は  $F_1 = 2.13 \times 10$ 、 $F_2 = 4.75$ 、 $F_3 = 1.35 \times 10^3$ 、 $F_4 = 1.59 \times 10$ 、 $F_5 = 1.01 \times 10^3$  であった。 $E_{RLS}$  は分母が負となり不定であり、 $E_{RLS}^{app}$  は  $1.96 \times 10^{-1}$  であった。一方、参考値である  $E_{RLS}^{ref}$  は  $1.67 \times 10^{-1}$  で

あった。 $E_{RLS}^{app}$  の値から推定した帯電電荷分布は  $x_e + \delta x_e$  まわりで最悪の場合およそ 20 % 程度の誤差変動を有する結果となった。

帯電区分毎に電荷密度を一定として推定した帯電電荷分布（図 6-23）と比較すると、最大値、最小値とも 1 % 以下の相違であり、電荷密度を区分毎に一定値で表現しても一次関数で表現してもあまり変化がなかった。これは  $A$  が悪条件であるために拘束項の効果を大きくする必要が生じ、ラプラスアンフィルタの平滑化作用が大きくなっていることが原因だと考えられる。

文献 [13, 14, 15] では、四角形区分毎に電荷密度を一定として推定した帯電電荷分布を一次補間して、視覚的に電荷分布を一次関数で表示している。これまでに区分毎に一次関数で表現した電荷密度に対応する係数行列を計算して帯電電荷測定を行ったという報告はされていないが、今回の数値シミュレーションおよび実測結果から、帯電電荷分布を一次関数で表現する方法が帯電電荷測定に適用可能であることが明らかになった。

### 6.3 測定点数 19188 点，帯電区分数 10140 個の帯電電荷測定の数値シミュレーション

図 6-4(a) の測定配置において、供試スペーサの高さを 104 mm（比誘電率，半径は同じ）とした配置を対象として、帯電電荷測定の数値シミュレーションを行った。本節での数値シミュレーションに使用した静電プローブ形状を図 6-33 に示す。センサの直径は 2 mm とし、長さは 30 mm とした。ガード電極の長さは 60 mm とし、その内径は 3 mm とした。ガード電極の外径は 50 mm の長さまでは 5 mm，その残りの 10 mm では 9 mm とした。センサと供試スペーサ表面との距離は 3 mm とし，ガード電極と供試スペーサ表面との距離は 2 mm とした。

供試スペーサ表面の帯電区分は以下のように設定した。表面を角度方向に 78 分割，縦方向に 65 分割して得られた四角形区分をさらに 2 個の三角形区分に分割して帯電区分数を 10140 とした。各三角形区分の電荷密度は一定として，10140 個の三角形電荷で供

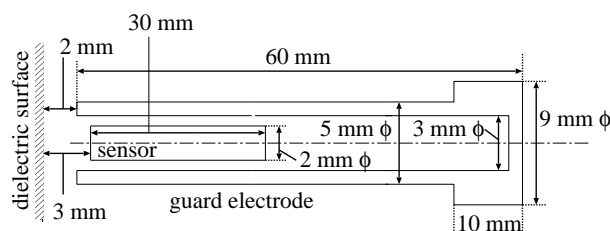


図 6-33: 静電プローブ形状

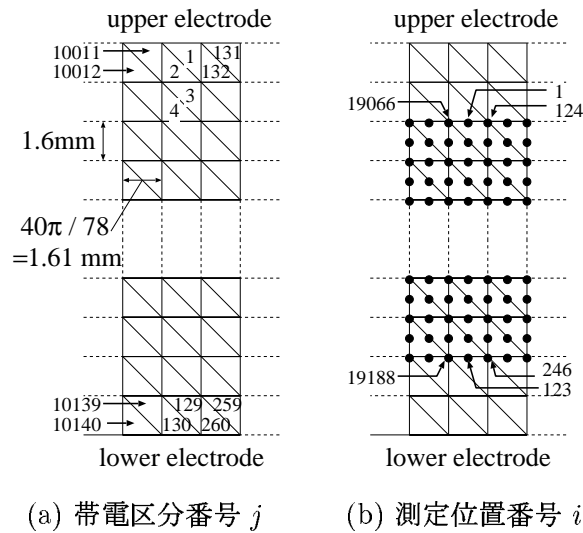


図 6-34: 帯電区分と測定位置の設定

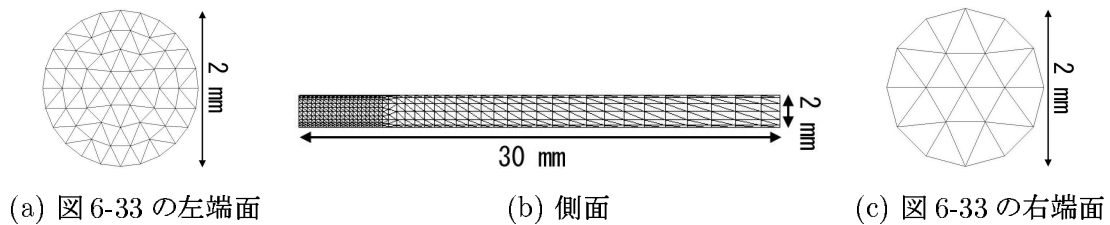


図 6-35: センサの電界計算用メッシュパターン

試スペーサ表面の帯電電荷分布を表現した。帯電区分の一部を図 6-34(a) に示す。次にプローブの測定位置に関して述べる。 $Z = 13.2 \text{ mm} \sim 110.8 \text{ mm}$  の区間を  $0.8 \text{ mm}$  で等分割して得られた点とセンサの中心軸とが一致する位置を測定位置とした。つまり縦一列に関して 123 点測定し、周方向に 156 回繰り返す、測定点数は 19188 点とした。図 6-34(b) に測定位置の一部を黒丸で示す。

この測定配置における係数行列の計算アルゴリズムには  $\lambda$  関数法を使用し、数値電界計算には FMM-SCM を使用した。数値電界計算に使用したセンサ、ガード電極、上下電極と供試スペーサのメッシュパターンをそれぞれ図 6-35 ~ 図 6-37 に示す。電界計算に使用した未知数の個数は 43933 個であった。センサの中心軸が供試スペーサ表面の中央  $Z = 62 \text{ mm}$  の位置にあるときに、主要な係数値である  $j = 54 \sim 65$  に対して直接法と  $\lambda$  関数法を比較したところ相違は 0.33 % 以下であった。

係数行列  $A$  は 19188 行 10140 列の密行列であり、RLS 適用時の方程式の係数行列  $A_p$  は 29328 行 10140 列の行列となる。このとき  $A$ 、 $A_p$  の配列確保に必要な記憶容量はそ

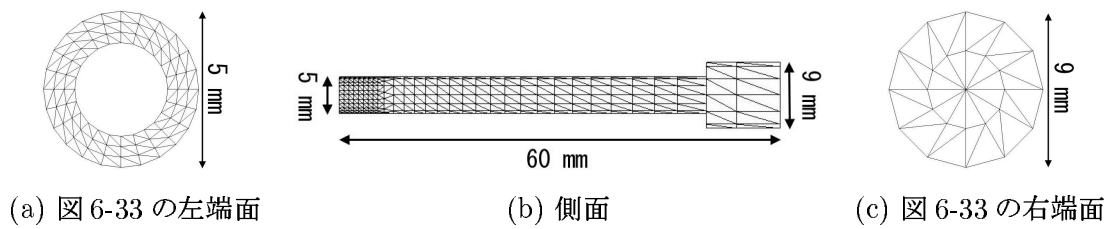


図 6-36: ガード電極の電界計算用メッシュパターン

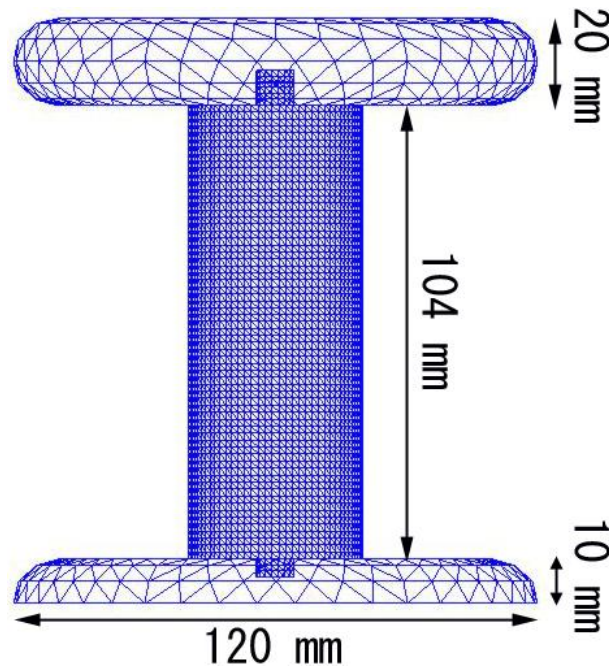


図 6-37: 上下電極，供試スペーサの電界計算用メッシュパターン

れぞれ約 1.6 GByte, 2.4 GByte であり，膨大なメモリ容量を必要とする。方程式の解法に直接解法を用いた場合は少なくともこれだけのメモリ容量が必要になる。しかし，測定対象形状の回転対称性のために  $1/78$  倍の 246 行 10140 列の部分行列で全ての  $A$  を表現することが可能である。つまり，測定対象形状の回転対称性と反復解法である LSQR を用いた場合は， $A$  に必要なメモリ容量を約 20 MByte にまで削減することができる。また  $A_p$  に含まれるフィルタ行列  $K$  (10140 行 10140 列) として，6.1 節で述べたラプラシアンフィルタに基づいて作成した行列を使用する場合， $K$  は疎行列になる。 $K$  に含まれる非零要素の総数は約  $10140 \times 4$  個であり，回転対称性を利用しない場合でも  $K$  に必要な記憶容量は約 0.3 MByte で済む。

本節の帯電電荷測定の数値シミュレーションにおいて仮定した帯電電荷分布  $x$  を図 6-38



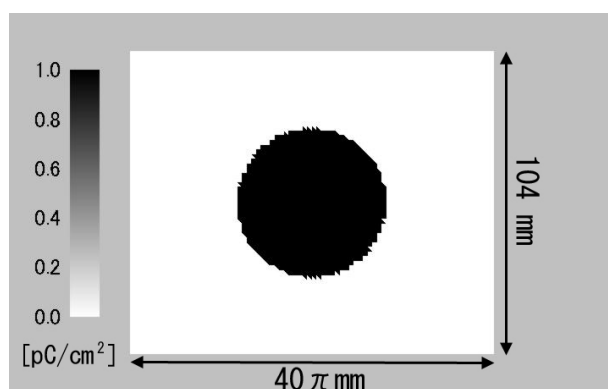


図 6-38: 仮定帯電電荷分布  $x$

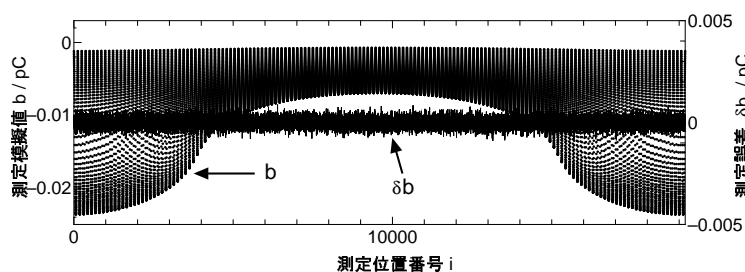


図 6-39: 図 6-38 の仮定帯電電荷分布に対する測定模擬値，測定誤差

に示す。図 6-38 は供試スペーサ表面の帯電電荷分布をシート状に展開して表示している。帯電電荷密度は中心の円形部分が  $1 \text{ pC/cm}^2$  であり，それ以外は  $0 \text{ pC/cm}^2$  とした。測定模擬値は  $b = Ax$  として求めた。測定誤差  $\delta b$  は平均  $0 \text{ pC}$ ，偏差  $2.46 \times 10^{-4} \text{ pC}$  のガウス乱数値とし，偏差の値は  $b$  の最大値の  $1\%$  に設定した。測定模擬値  $b$  および測定誤差  $\delta b$  を図 6-39 に示す。 $b + \delta b$  から RLS により帯電電荷分布の推定を行った。図 6-40 に  $L$  カープの計算結果を示す。 $L$  カープ法より  $\gamma = 3.79 \times 10^{-2}$  となり，この  $\gamma$  を使用して RLS により推定した帯電電荷分布を図 6-41 に示す。 $\gamma = 3.79 \times 10^{-2}$  とした RLS による解の推定には CPU : Pentium IV 2.53 GHz の PC で 13 分 51 秒の計算時間を要した。 $L$  カープの計算では，34 通りの  $\gamma$  に対して RLS の方程式を解いており， $L$  カープの計算にかかった時間は 6 時間 33 分 55 秒であった。LSQR は反復解法であるため 1 回当たりの計算時間は収束反復回数に依存する。また，LSQR の収束特性は行列の条件数に依存し，さらにこの条件数はパラメータ  $\gamma$  に依存する。そのため，使用する  $\gamma$  によって求解に必要な計算時間は変化し，最長時間のケースでは求解までに 37 分 22 秒の計算時間を要したが，最短時間のケースでは 4 分 7 秒で解を求めることができた。

このとき， $\delta b$  を零として RLS により推定した  $x_e$  と  $x$  との相違は  $\frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} = 2.60 \times$

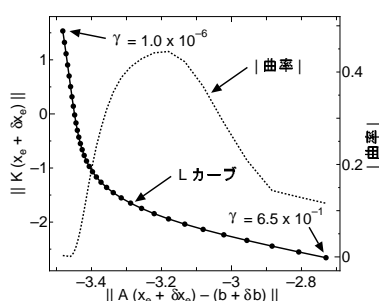


図 6-40:  $L$  カーブの計算結果

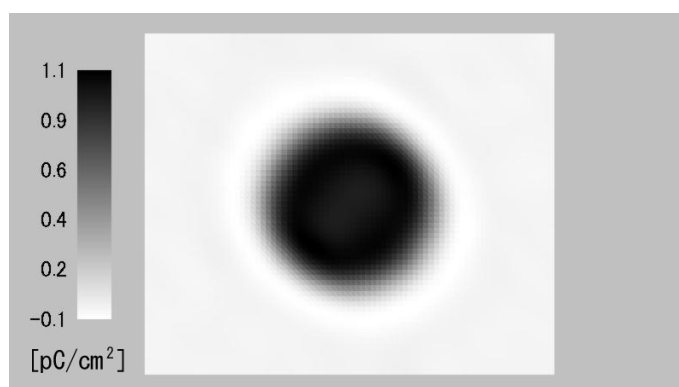


図 6-41: RLS により推定した帯電電荷分布  $x_e + \delta x_e$

$10^{-1}$  であった。これは平滑化作用をもつラプラシアンフィルタとステップ状に変化する電荷密度との不適合性によるものである。しかし、測定値の誤差  $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 2.46 \times 10^{-2}$  に対して、 $x_e$  を中心とした変動  $\delta x_e$  の割合は  $\frac{\|\delta x_e\|}{\|x_e\|} = 9.53 \times 10^{-3}$  であった。 $x_e$  を基準とした誤差の拡大率を  $\frac{\|\delta x_e\|}{\|x_e\|} / \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$  で定義すると誤差の拡大率は  $3.88 \times 10^{-1}$  であり、 $x_e$  を中心とした逆計算は安定した結果となった。

本節では、ステップ状に変化する帯電電荷を対象として、RLS による推定を行った。ラプラシアンフィルタに基づいて  $K$  を設計しているために  $x_e$  と  $x$  との間に  $\frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} = 2.60 \times 10^{-1}$  の相違を生じる結果となった。今後は、このようなステップ状に変化する帯電電荷に対しても適合するようなフィルタの設計が課題となる。また本節の結果から、測定対象形状の対称性と LSQR を利用することにより、Pentium IV 2.53 GHz の CPU, 1 GByte のメモリを搭載する PC でも 29328 行 10140 列の方程式の求解が可能であることが示された。

## 6.4 まとめ

本章では、高速解法である FMM-SCM（あるいは FMM-BEM）を適用することで係数行列の計算コストを改善し、帯電区分数を増加させて帯電電荷測定の数値シミュレーション、実測を行った。本章で得られた結果を次のようにまとめる。

- 帯電区分毎に電荷密度は一定とするが区分形状が不均一である場合や、帯電区分毎に電荷密度を一次関数で表現する場合に適用可能なラプラシアンフィルタの設計を行った。
- 高速多重極法を適用することで、帯電区分数  $n$  の係数行列の計算に必要な演算量、記憶容量をそれぞれ  $O(n^2)$ ,  $O(n)$  に改善し、係数行列の計算コストを低減させた。
- 供試スペーサ表面に 1794 個の帯電区分を設定して、帯電電荷測定の数値シミュレーション、実測を行った。この配置において、直接法と  $\lambda$  関数法で計算した係数値の相違は 0.23 % 以下、FMM-SCM と FMM-BEM で計算した係数値の相違は 0.11 % 以下であった。
- 帯電区分数を 1794 とした数値シミュレーションでは、RLS で解の推定を行った場合に仮定した帯電電荷分布に対して 3 ~ 5 % の誤差で電荷分布を推定することができた。
- 実測では、針電極の負コロナで供試スペーサ表面を帯電させ、測定値から RLS により電荷密度分布の推定を行った。推定した分布は、針電極の先端付近の電荷密度が高く、先端から離れるほど電荷密度が低くなっており、定性的に妥当な結果が得られた。また算出した上限値から、推定解は最悪の場合に  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e$  周りで 8 % 程度の誤差変動となることがわかった。
- 数値シミュレーション、実測結果から、帯電区分数を 1794 まで増加させた場合においても RLS の適用により安定した逆計算が可能であることを示した。
- 比誘電率の誤差を 5 % とした場合の  $\delta A$  による推定解の変動は算出した上限値に比べて 5 % 程度であり、今回の供試スペーサを対象とした測定配置においても、シフト系の誤差は推定解にあまり影響を与えないことを示した。
- 帯電電荷分布を区分毎に一次関数で表現した場合の帯電電荷測定の数値シミュレーション、実測を行った。数値シミュレーション、実測結果から、帯電電荷分布を一次関数で表現する方法が帯電電荷測定に適用可能であることを明らかにした。

- 測定点数を 19188 点, 帯電区分数を 10140 個とした場合の帯電電荷測定の数値シミュレーションを行った。
- 測定対象形状の回転対称性と方程式の解法に反復解法である LSQR を利用することで, RLS の方程式を表す係数行列 (29328 行 10140 列) の配列確保に必要なメモリ容量を約 2.4 GByte から約 20 MByte に低減した。Pentium IV 2.53 GHz の CPU, 1 GByte のメモリを搭載する PC を用いた場合に, 正則化された係数行列が良条件である場合に約 4 分 / 回の計算時間で求解することができた。



## 第7章 結論

高電圧絶縁機器で使用されるバルク状固体絶縁物表面の帯電電荷測定を対象として、多点測定に基づく帯電電荷測定法を、定量性、汎用性においてより高レベルの測定法として確立することを目的として本研究を行ってきた。本章では、本研究で得られた結果についてまとめる。

バルク状固体絶縁物の帯電電荷測定では、数値電界計算法を用いて静電プローブによる多点位置での測定値  $b$  と帯電電荷を数値モデル化して表現した  $x$  との関係を表す係数行列  $A$  を計算した上で、測定値から逆計算により帯電電荷分布を推定する。そのため、帯電電荷測定では数値電界計算法の適用が不可欠であり、精度、速度、容量、汎用性において高レベルの数値計算コードが要求される。第2, 3章では、本研究で使用した数値電界計算コードについて述べた。本研究ではさまざまな数値電界計算法のうち帯電電荷測定法に適した境界面のみでの分割を必要とする表面電荷法、境界要素法を使用した。高電圧分野における計算対象は曲面形状を有することが一般的で、形状表現誤差を低減化するために計算対象の形状表現に曲面パッチを適用するのが望ましい。曲面パッチを使用した場合、曲面パッチで表現された表面電荷要素が任意の点につくる電位・電界を計算するときには数値積分を行う必要があり、特に計算点が表面電荷要素上や近傍にある場合、特異積分や準特異積分の処理を要する。これらの近傍点における数値積分精度は、電界計算精度に大きく影響する。一方、平面パッチを用いた場合、平面パッチで表現された表面電荷要素の電位・電界を解析式で与えることが可能で、計算点が表面電荷要素上や近傍に位置する場合においても、特異積分や準特異積分の処理は不要であるため高精度な計算が可能となる。つまり、解析式による計算値と数値積分による計算値とを比較することにより数値積分の精度評価が可能となる。しかし、これまでに導出されている解析式は表面電荷要素の電荷密度表現関数を一次関数とした場合までであった。そこで、本研究において、電荷密度表現関数をさらに高次化し二次、三次関数とした三角形および四角形表面電荷要素の電位・電界の解析式を導出し、数値積分の精度評価を行った。さらに高速かつ大容量の計算を可能とする高速多重極法を適用することにより、精度、速度、容量の全ての面で高度化された表面電荷法、境界要素法の計算コードを実現した。

第4章では、係数行列の数値計算精度の向上、測定誤差  $\delta b$  や係数計算誤差  $\delta A$  による逆計算の解の推定誤差、逆計算において安定した解の推定を実現するための逆計算手法

の適用, 逆計算手法を適用した場合の推定精度に関する検討を行った。直接法と  $\lambda$  関数法により求められる係数行列は理論的には一致するが, 数値電界計算の計算誤差のために二つの方法を用いて計算した係数値には必ず相違を生じる。表面電荷分布を要素毎に一定として模擬する低精度の表面電荷法を使用した場合は, ガード電極を考慮しないで簡略化した測定配置においても直接法と  $\lambda$  関数法の係数値は 3 % 程度の相違であった。高次要素を使用して高精度化した表面電荷法を適用することにより, ガード電極を考慮した実用的な配置においても, 主要な係数値に対して 1 % 以内の相違で二つの方法で計算した係数値を一致させることに成功した。この結果より, 直接法と  $\lambda$  関数法の等価性を数値的に確認できたとともに, 二つの方法で求めた係数値を比較することにより高精度な係数値計算が可能となった。

次に,  $\delta b$  や  $\delta A$  として典型的な誤差を与えた場合の推定解の変動  $\delta x$  について検討した。今回の検討結果では,  $\delta b$  や  $\delta A$  の一箇所のみにおいて 5 % の誤差が混入した場合においても, 推定した帯電電荷分布では最大で 55 % 程度の誤差を生じる結果となった。帯電電荷測定においても  $\delta b$  や  $\delta A$  の逆計算時の推定解への誤差の拡大が問題となることを示した。さらに帯電電荷測定の数値シミュレーションを行い, 逆計算手法の適用について検討を行った。 $\delta A$ ,  $\delta b$  を考慮した配置では, 測定点数を 25 点, 帯電区分数を 25 個とした場合に逆行列演算で推定した帯電電荷分布の推定精度は  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 2.44 \times 10^{-1}$  であった。測定点数を 400 個として, 最小二乗法で推定した場合は推定精度は改善され  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 1.48 \times 10^{-1}$  となった。逆計算手法として, カットオフ法を適用した場合はさらに改善され  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 9.11 \times 10^{-2}$  となった。次に推定解の先験情報を利用することで解を拘束するような拘束項を方程式に付加して解の推定を行うペナルティ付き最小二乗法 (以下, RLS) の適用を行った。推定解のノルムを最小化するような拘束項を用いる単純正則化法を適用した場合は, 今回の配置では  $L$  カーブ法で決定した重み係数が小さく最小二乗法の推定精度と同等であった。次に帯電電荷分布が場所毎に滑らかに変化すると仮定し, 画像処理などで用いられるラプラシアンフィルタに基づいて設計した行列 (フィルタ行列) を拘束項に用いて分布の推定を行った。このときの推定精度が最も高く  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 6.48 \times 10^{-2}$  の精度が得られた。以上の検討結果から, 本研究では逆計算手法としてラプラシアンフィルタを用いた RLS を適用することとした。

ただし, RLS を適用した場合は,  $\delta A$  や  $\delta b$  が存在しない場合においても, RLS により得られる推定解は  $x$  に対して  $\delta x_p$  の相違を有する  $x_e$  となる。RLS は Tikhonov の正則化の一手法であり, Tikhonov の正則化法では空間的に定常性を仮定することにより, 一つの重み係数  $\gamma$  を用いて空間全体に対する拘束レベルを調整する。そのため, Tikhonov の正則化法の範疇においてはどのようにフィルタ行列を設計しても, 任意の  $x$  に対して  $\delta x_p$  を 0 にすることはできない。その対策として, 重み係数を多パラメータ化する方法

や非線形フィルタを適用する方法などの開発が必要ではあるが、非線形解法の適用は計算時間の面において実用的ではない。したがって、本研究では Tikhonov の正則化法の境界内での定量的な推定を目的とし、RLS を適用した場合の  $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e$  を基準とした  $\delta A$ ,  $\delta b$  による推定解の変動  $\frac{\|\delta\mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e\|}$  の上限値を与える式を導出した。導出した式を使用することにより、RLS を適用した場合の推定精度について定量的な検討が可能となった。また、逆行列演算や最小二乗法を適用した場合の  $\delta b$  や  $\delta A$  による推定解の変動  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  の上限値を与える式は既に導出されていたが、その計算式は本来知ることができない  $A$  を含んでおり、本研究において、 $A$  ではなく  $A + \delta A$  を用いて上限値  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|}$  を算出する式を導出した。第 4 章の最後では、通常解法の表面電荷法あるいは境界要素法を用いた場合に係数行列の計算コストを低減する方法として、アレイ型プローブの適用を検討した。アレイ型プローブは多数のセンサで構成されており多点同時測定を可能とするため、設けたセンサ数によって係数行列の計算に必要な電界計算回数を削減することが可能となる。アレイ型プローブを使用した場合の帯電電荷測定の数値シミュレーションでは、推定解の変動  $\frac{\|\delta\mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e\|}$  の上限の算出値は  $1.19 \times 10^{-1}$  となり、 $\mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}_e$  まわりで 12 % 程度の推定精度を保証する結果が得られた。この結果から、係数行列の計算コスト、推定精度の両面においてアレイ型プローブの帯電電荷測定への適用が有用であることが示された。

第 5 章では、ブロック状絶縁物を対象として帯電電荷測定を実施し、実験的な検証を行った。従来は、エレクトロメーターによる測定値からセンサの誘起電荷量へ換算するためにプローブ係数が必要であるとされていた。しかし、数値電界計算精度の向上により、今回の配置ではプローブ係数  $\approx 1$  となったため、エレクトロメーターの測定値は直接にセンサ誘起電荷量を表しており、プローブ係数による換算は不要であることがわかった。

直接法および  $\lambda$  関数法で計算した係数行列を用いて推定した帯電電荷分布を比較すると、その相違は 1 % 以下であり、係数行列の計算精度が実用レベルに達していることを確認した。比誘電率の計測誤差に起因する  $\delta A$  はランダムでないシフト系の誤差となった。今回の配置では、比誘電率の  $\pm 5\%$  の誤差に対して推定解の変動は算出した上限値に対して 3 % 程度であり、シフト系の誤差である  $\delta A$  がランダム系の誤差に比べてあまり問題とならないことを示した。

次にプローブと絶縁物表面との距離、ガード電極位置、測定試料の高さをパラメータとして実験を行った。条件数が小さく係数行列が良条件である場合、推定した帯電電荷分布とファラデーケージによる測定値の差の全帯電区分における平均値は、帯電電荷量が 200 ~ 300 pC に対して 25 pC 以下であり、逆行列演算により帯電電荷分布の推定が可能であることを示した。プローブと絶縁物表面の距離  $h$  が大きくなると逆計算が不安定になり、逆行列計算による推定は失敗に陥るが、RLS を適用することで全体的な分布の変化は捉えることが可能となった。特に  $h = 10$  mm の場合、ファラデーケージで測定



した帯電電荷量が 200 pC 程度であるのに対して、逆行列演算による推定解とファラデーケージとの差の平均値は 246 pC であったが、RLS の適用により差の平均値は 49 pC にまで改善された。また未知数よりも測定点数のほうが多い優決定問題についても測定を行った。測定点数を 25 点と 121 点としたときの測定結果では、その相違は 2% 程度であり、帯電電荷測定に優決定問題化を試みる手法の有効性は明確にはならなかった。これは 25 点としたときの係数行列の条件数が 9.4 で、もともと良条件であったためだと考えられ、もっと悪条件な係数行列のときには優決定問題化することによって推定精度が改善される可能性はある。

第 6 章では、高速多重極表面電荷法、高速多重極境界要素法を適用し、係数行列の計算コストの低減を行った。通常解法の電界計算法を使用した場合、帯電区分数  $n$  の係数行列計算には  $O(n^4)$  以上の演算量と  $O(n^2)$  の記憶容量を要する。しかし、高速多重極法を適用することで、必要な演算量、記憶容量をそれぞれ  $O(n^2)$ ,  $O(n)$  にまで改善することができ、係数値の計算精度を維持しつつ、帯電区分数を増加させることが可能となる。第 6 章の初めに、任意の帯電区分形状においても、また帯電区分内の電荷密度を一次関数で表現した場合においても適用可能なラプラシアンフィルタの設計を行った。次にスペーサを模擬した円柱状絶縁物（供試スペーサ）を対象として、帯電区分数を  $n = 1794$  とした場合の帯電電荷測定の数値シミュレーション、実測を行った。数値シミュレーションの結果では、単純な関数に従って電荷密度が変化する電荷分布と文字を表すような複雑に変化する電荷分布に対して、 $\frac{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} < 6.0 \times 10^{-2}$  の推定精度を達成しており、帯電区分数を増加させた場合においても RLS の適用により安定した逆計算の実行が可能であることを示した。実測においては、供試スペーサ表面から離れた位置に設置した針電極の負コロナにより供試スペーサ表面を帯電させ、測定値から RLS により電荷密度分布の推定を行った。このときの推定精度は  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \leq 8.38 \times 10^{-2}$  であり、今回の実験においては  $\delta \mathbf{b}$  や  $\delta A$  による推定誤差は最悪の場合でも  $\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e$  周りで 8% 程度となる結果を得た。次に、比誘電率の計測値に誤差を与えて計算した係数行列  $A + \delta A$  を用いて RLS による推定を行い、比誘電率誤差に起因する  $\delta A$  によって生じる推定誤差について検討した。比誘電率の誤差を 5% としたときの  $\delta A$  による推定値の変動  $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}$  は約 0.02 であった。今回の配置において、 $\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}$  は算出した上限値 0.36 に比べて 5% 程度であり、今回の供試スペーサを対象とした測定配置においても、シフト系の誤差は推定解にあまり影響を与えなかった。

次に帯電電荷分布の数値モデル化誤差を低減することを目的とし、帯電電荷分布を帯電区分毎に一定値ではなく、区分毎に一次関数で表現した場合の帯電電荷測定を行った。今回の配置では、解の推定に RLS を適用しておりラプラシアンフィルタの平滑化作用のために、推定した帯電電荷分布では、帯電区分を一定として推定した帯電電荷分布と比

較して 1 % 以下の相違しか見られなかった。しかし、数値シミュレーションおよび実測結果から、帯電電荷分布を一次関数で表現する方法が帯電電荷測定に適用可能であることを明らかにした。

最後に、測定点数を 19188 点、帯電区分数を 10140 個とした場合の帯電電荷測定の数値シミュレーションを行った。帯電電荷測定における係数行列  $A$  は密行列となるため、今回の検討配置での  $A$  をメモリ上に配列確保するためには約 1.6 GByte のメモリ容量を必要とする。しかし、測定対象形状の回転対称性と方程式の解法に反復解法を使用することで、今回の配置では必要なメモリ容量を約 20 MByte にまで削減することができた。ラプラシアンフィルタに基づいて RLS 適用時のフィルタ行列  $K$  の設計を行った場合、 $K$  は疎行列となるため、回転対称性を利用するまでもなくメモリ上に配列確保することができる。今回の配置では、RLS の方程式を表す係数行列 (29328 行 10140 列) が良条件である場合に約 4 分 / 回の計算時間で求解することができた。測定対象形状が回転対称性を有する場合は一万を超える帯電区分数に対しても、Pentium IV 2.53 GHz の CPU, 1 GByte のメモリを搭載する PC で帯電電荷分布を推定できることを示した。

本研究では、Tikhonov の正則化法の範疇において帯電電荷測定の定量性、汎用性を高めることを目的としてきた。今後は、 $\delta x_p (= x_e - x)$  の相違を改善することを目的とした重み係数の多パラメータ化やより最適なフィルタの設計、絶縁物内部の電荷の取り扱いなどが課題となる。また、本研究で得られた知見を活かして、実機のスペーサ表面の帯電電荷測定を実施することが帯電電荷測定の実用化に向けて必要な課題となる。



## 謝辞

本研究を進めるにあたり、研究全般にわたって日頃より懇切丁寧な御指導ならびに有益な御助言を賜りました財団法人電力中央研究所 宅間董研究顧問に心より深く感謝致します。京都大学大学院工学研究科電気工学専攻 島崎眞昭教授には、宅間董研究顧問が京都大学を退官されるにあたり、指導教官の任を快くお引き受け頂き、また日頃より暖かい御指導と御助言を賜りました。ここに心より深く感謝致します。京都大学大学院工学研究科電気工学専攻 大澤靖治教授ならびに引原隆士教授には、暖かい御指導と御助言を賜りました。ここに心より深く感謝致します。

京都大学大学院工学研究科電気工学専攻 濱田昌司講師には、本研究を進めるにあたり研究の方向性やプログラムのコーディングなど広い範囲にわたって、常に懇切丁寧な御指導と御協力を賜りました。また、本論文の執筆にあたり有益な御助言を賜りました。ここに心より深く感謝致します。京都大学大学院工学研究科電気工学専攻 垣本直人助教授ならびに山本修助手には、本研究を進めるにあたり有益な御助言と御協力を賜りました。ここに心より深く感謝致します。

Chulalongkorn 大学工学研究科電気工学専攻 Boonchai Techaumnat 講師には、計算法やプログラムのコーディングなどに関して有益な御助言と御協力を賜りました。ここに心より深く感謝致します。本研究で使用した静電プローブならびにエレクトロメーターを御貸し頂き、また本研究を進めるにあたり有益な御助言を賜りました財団法人電力中央研究所 狛江研究所 八島政史氏に心より深く感謝致します。京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士二回生 青木康二郎氏には、帯電電荷測定の実験を共に進めて頂きました。ここに心より深く感謝致します。

京都大学大学院工学研究科電気工学専攻 東田紀子秘書には、日頃より多岐にわたる御支援と御協力を賜りました。ここに心より深く感謝致します。

旧宅間研究室の諸氏ならびに電力発生伝送工学研究室内の諸氏には様々な点で御支援と御協力を頂きました。ここに心より深く感謝致します。

本研究は、電力技術産学共同研究連合ならびに独立行政法人日本学術振興会から研究費の援助を受けて行ってきました。ここに心より深く感謝致します。



## 付録 A $T_{M2M}$ , $T_{L2L}$ , $T_{M2L}$ の配列確保に必要なメモリ容量

多重極展開，局所展開に使用する擬似粒子数をそれぞれ  $K_M$ ,  $K_L$  とする。 $T_{M2M}$  は 8 個の子セルの擬似粒子から親セルの擬似粒子への変換を表し， $T_{M2M}$  のサイズは， $K_M$  行  $K_M$  列  $\times$  8 となる。プログラム実行時に実数変数 1 個当たり 8 Byte 使用することを考慮すると， $T_{M2M}$  をメモリ上に配列確保するのに  $64 K_M^2$  Byte のメモリ容量を要する。 $T_{L2L}$  は親セルの擬似粒子から 1 個の子セルの擬似粒子への変換を表すが，親セルに対する子セルの相対的な位置関係は 8 通り存在し，それぞれの子セルに対して  $T_{L2L}$  ( $K_L$  行  $K_L$  列  $\times$  8) を計算する必要がある。結局， $T_{L2L}$  に必要なメモリ容量は  $64 K_L^2$  Byte となる。 $T_{M2L}$  は遠方セルの擬似粒子から自セルの擬似粒子への変換を表し，M2L で必要な遠方セルの候補は自セルに対する相対的な位置関係から 1206 ( $= 11^3 - 5^3$ ) 通り存在し， $T_{M2L}$  ( $K_L$  行  $K_M$  列  $\times$  1206) に要するメモリ容量は  $9648 K_L K_M$  Byte となる。

本研究で使用した FMM-SCM では  $K_M = 84$ ,  $K_L = 108$  としており， $T_{M2M}$ ,  $T_{L2L}$ ,  $T_{M2L}$  に要するメモリ容量はそれぞれ約 0.45 MByte, 約 0.75 MByte, 約 87.5 MByte である。



# 付録B 高次表面電荷要素の電位・電界の解析式

次の4種類の表面電荷要素の電位・電界の解析式を示す。

- (a) 電荷密度表現関数を二次関数とした三角形表面電荷（二次三角形表面電荷）
- (b) 電荷密度表現関数を二次関数とした四角形表面電荷（二次四角形表面電荷）
- (c) 電荷密度表現関数を三次関数とした三角形表面電荷（三次三角形表面電荷）
- (d) 電荷密度表現関数を三次関数とした四角形表面電荷（三次四角形表面電荷）

また、解析式の妥当性を確認するために、表面電荷要素の電位・電界を解析式および数値積分により計算し、両者の計算値の比較を行った結果を示す。

## B.1 二次三角形表面電荷

### B.1.1 解析式

図B-1に示すように三角形電荷が、真空中  $XY$  平面上にあるとする。図において  $A, B, C$  は三角形の頂点、 $D, E, F$  は各辺の中間点を表す。三角形電荷上の表面電荷密度を次式に示すように座標の完全二次多項式で表す。

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 X^2 + \alpha_5 XY + \alpha_6 Y^2 \quad (\text{B-1})$$

このとき三角形電荷が点  $P(x, y, z)$  に生じる電位は次式で表される。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} dXdY \quad (\text{B-2})$$

電荷密度表現関数を (B-1) 式としたときの (B-2) 式の積分結果は代数式で表すことができる。点  $P$  における電位  $\phi$  および  $E_x, E_y, E_z$  のうち、 $\phi, E_x$  の式のみを示す。

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{1AB} - K_{1BA}) \\ & -\frac{\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{2AB} - K_{2BA}) \end{aligned}$$



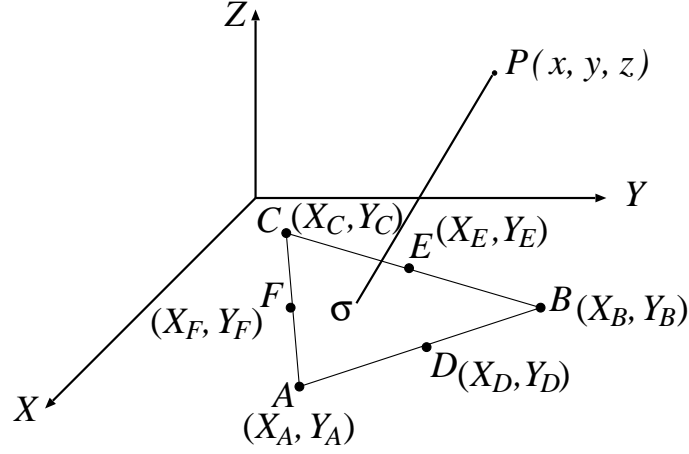


图 B-1: 二次三角形表面電荷

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{3AB} - K_{3BA}) \\
& - \frac{\alpha_4}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{4AB} - K_{4BA}) - \frac{\alpha_5}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{5AB} - K_{5BA}) \\
& - \frac{\alpha_6}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{6AB} - K_{6BA}) \tag{B-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x = & \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{1AB} - K_{1BA}) \\
& + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{1AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{1BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_4}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{2AB} - K_{2BA}) \\
& + \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{2AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{2BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_5}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{3AB} - K_{3BA}) \\
& + \frac{\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{3AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{3BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_4}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{4AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{4BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_5}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{5AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{5BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_6}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{6AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{6BA}}{\partial x} \right) \tag{B-4}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial K_{1AB}}{\partial x} = \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} Q_{AB} + P_{AB} \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} + z \frac{\partial R_{AB}}{\partial x} \quad (\text{B-5})$$

$$\frac{\partial P_{AB}}{\partial x} = \frac{M_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \quad (\text{B-6})$$

$$\frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} = -\frac{D_B + \sqrt{M_{AB}^2 + 1}(X_B - x)}{D_B \{(X_B - x) + M_{AB}(Y_B - y) + D_B \sqrt{M_{AB}^2 + 1}\}} \quad (\text{B-7})$$

$$\frac{\partial R_{AB}}{\partial x} = -\frac{\{M_{AB}(Y_B - y) + (X_B - x)\} M_{AB}}{\{(Y_B - y) - M_{AB}(X_B - x)\}^2 + (M_{AB}^2 + 1)z^2} \frac{z}{D_B} \quad (\text{B-8})$$

$$\frac{\partial K_{2AB}}{\partial x} = \frac{\partial E_{AB}}{\partial x} D_B + E_{AB} \frac{\partial D_B}{\partial x} - \frac{\partial G_{AB}}{\partial x} Q_{AB} - G_{AB} \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \quad (\text{B-9})$$

$$\frac{\partial E_{AB}}{\partial x} = \frac{M_{AB}}{M_{AB}^2 + 1} \quad (\text{B-10})$$

$$\frac{\partial D_B}{\partial x} = -\frac{X_B - x}{D_B} \quad (\text{B-11})$$

$$\frac{\partial G_{AB}}{\partial x} = \frac{2M_{AB}^2}{M_{AB}^2 + 1} P_{AB} \quad (\text{B-12})$$

$$\frac{\partial K_{3AB}}{\partial x} = -\frac{\partial F_{AB}}{\partial x} D_B - F_{AB} \frac{\partial D_B}{\partial x} + \frac{\partial H_{AB}}{\partial x} Q_{AB} + H_{AB} \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \quad (\text{B-13})$$

$$\frac{\partial F_{AB}}{\partial x} = \frac{1}{M_{AB}^2 + 1} \quad (\text{B-14})$$

$$\frac{\partial H_{AB}}{\partial x} = \frac{2M_{AB}}{M_{AB}^2 + 1} P_{AB} \quad (\text{B-15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{4AB}}{\partial x} = & \frac{M_{AB}(X_B - x)D_B}{2(M_{AB}^2 + 1)} + \frac{M_{AB}^2 D_B}{6(M_{AB}^2 + 1)} \left\{ J_{AB} \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} - \frac{5P_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \right\} \\ & + \frac{M_{AB}}{3(M_{AB}^2 + 1)} \left\{ \frac{M_{AB}}{2} J_{AB} P_{AB} - \frac{z^2}{2} - P_{AB}^2 \right\} \frac{\partial D_B}{\partial x} \\ & + \frac{2M_{AB}^2 - 1}{3(M_{AB}^2 + 1)} P_{AB}^2 Q_{AB} \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} + \frac{z^3}{3} \frac{\partial V_{AB}}{\partial x} \\ & + \frac{(2M_{AB}^2 - 1)P_{AB}^2 - 3z^2}{6(M_{AB}^2 + 1)} \left( \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} Q_{AB} + P_{AB} \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-16})$$

$$\frac{\partial V_{AB}}{\partial x} = -\frac{\partial R_{AB}}{\partial x} \quad (\text{B-17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{5AB}}{\partial x} = & -\frac{X_B - x}{M_{AB}^2 + 1} D_B - \frac{M_{AB}}{2(M_{AB}^2 + 1)} \left\{ -\frac{P_{AB} D_B}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} + J_{AB} \left( \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} D_B \right. \right. \\ & \left. \left. + P_{AB} \frac{\partial D_B}{\partial x} \right) \right\} - \frac{M_{AB}}{M_{AB}^2 + 1} \left\{ P_{AB}^2 Q_{AB} \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} + \frac{P_{AB}^2 + z^2}{2} \right. \\ & \left. \times \left( \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} + P_{AB} \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B-18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{6AB}}{\partial x} = & -\frac{M_{AB}(X_B - x)D_B}{2(M_{AB}^2 + 1)} + \frac{D_B}{6(M_{AB}^2 + 1)} \left\{ J_{AB} \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} + \frac{(4M_{AB}^2 - 1)P_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \right\} \\ & + \frac{1}{3(M_{AB}^2 + 1)} \left\{ \frac{J_{AB}P_{AB}}{2} + \frac{M_{AB}z^2}{2} + M_{AB}P_{AB}^2 \right\} \frac{\partial D_B}{\partial x} \\ & + \frac{2 - M_{AB}^2}{3(M_{AB}^2 + 1)} P_{AB}^2 Q_{AB} \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} - \frac{z^3}{3} \frac{\partial R_{AB}}{\partial x} \\ & + \frac{(2 - M_{AB}^2)P_{AB}^2 - 3M_{AB}^2 z^2}{6(M_{AB}^2 + 1)} \left( \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} Q_{AB} + P_{AB} \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-19})$$

ただし、 $\sum_{A \rightarrow B \rightarrow C}$  は  $A, B, C$  を順に変えて 3 回加算することを表す。ここでは省略したが、 $E_y$  および  $E_z$  も同様に代数式で表現することができる。

三角形の節点  $A \sim F$  の表面電荷密度を  $\sigma_A \sim \sigma_F$  とすると、(B-1) 式より  $\alpha_1 \sim \alpha_6$  は次式で表される。

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_A & Y_A & X_A^2 & X_A Y_A & Y_A^2 \\ 1 & X_B & Y_B & X_B^2 & X_B Y_B & Y_B^2 \\ 1 & X_C & Y_C & X_C^2 & X_C Y_C & Y_C^2 \\ 1 & X_D & Y_D & X_D^2 & X_D Y_D & Y_D^2 \\ 1 & X_E & Y_E & X_E^2 & X_E Y_E & Y_E^2 \\ 1 & X_F & Y_F & X_F^2 & X_F Y_F & Y_F^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \\ \sigma_D \\ \sigma_E \\ \sigma_F \end{pmatrix} \quad (\text{B-20})$$

(B-20) 式を用いることにより電位、電界を電荷密度  $\sigma_A \sim \sigma_F$  によって表すことができ、表面電荷法への適用が可能になる。

### B.1.2 解析式と数値積分の比較

三角形表面電荷の電荷密度表現関数を二次関数とし、解析式と数値積分それぞれにより電位・電界を計算し両者の比較を行った。計算配置を図 B-2、図 B-3 に示す。解析式は任意形状の三角形電荷に対応する式であるが、ここでは  $(X, Y) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$

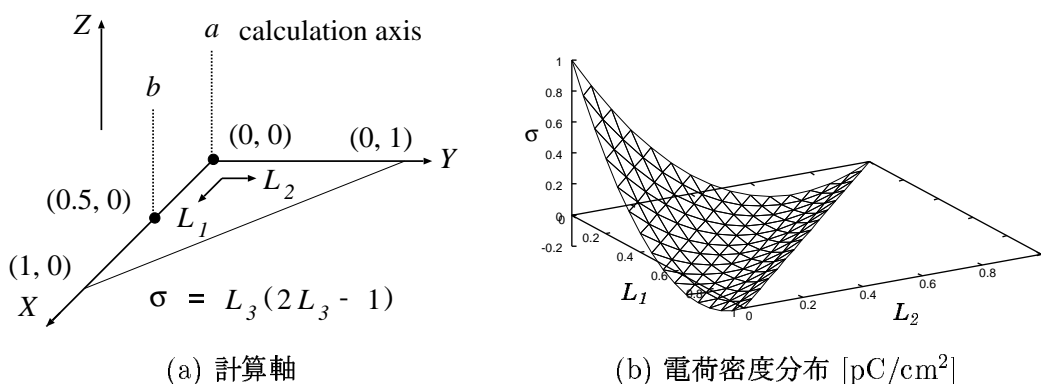


図 B-2: 計算配置 (電荷密度 :  $\sigma = L_3(2L_3 - 1)$ )

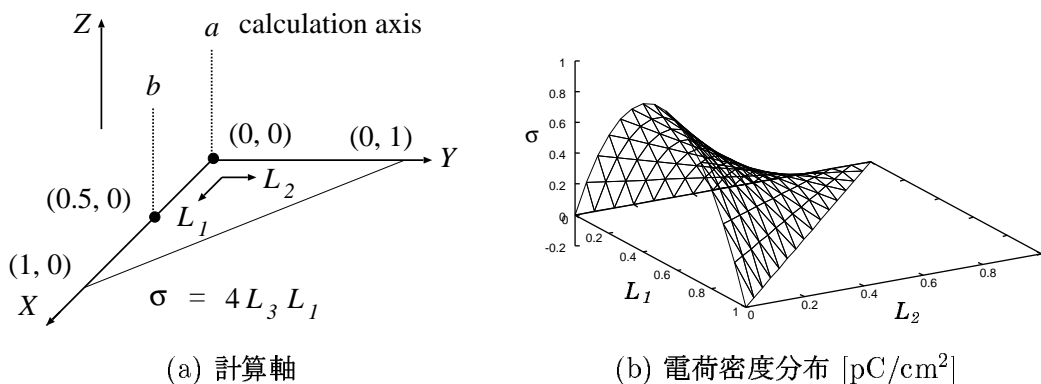


図 B-3: 計算配置 (電荷密度 :  $\sigma = 4L_3L_1$ )

を三頂点とする三角形電荷を対象とした。図 B-2(a), 図 B-3(a) において  $a, b$  はそれぞれ電位・電界の計算を行った計算軸を示す。計算軸  $a$  は原点を,  $b$  は  $(X, Y) = (0.5, 0)$  を通る直線である。本来はこの 2 軸のみだけでなく,  $XY$  平面に広がる無数の計算軸上の計算結果を表示すべきであるが, 実際に全ての表示を行うのは困難である。そこで, ここではこの 2 軸を代表とした。また三角形に対して面積座標  $L_1, L_2, L_3$  ( $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ ) を定める。 $L_1 = 1, L_2 = 1, L_3 = 1$  はそれぞれ三頂点  $(1, 0), (0, 1), (0, 0)$  に対応する。三角形表面電荷の電荷密度表現関数を二次関数とした場合, 形状関数は 6 種類存在するが, 三角形の頂点に電荷のピークをもつものと, 辺上の中点に電荷のピークをもつものの 2 種類に分類できる。ここではピーク値を  $1 \text{ pC/cm}^2$  とし, 次の二つの電荷密度分布関数を対象とした。

$$\sigma = L_3(2L_3 - 1) \tag{B-21}$$

$$\sigma = 4L_3L_1 \tag{B-22}$$

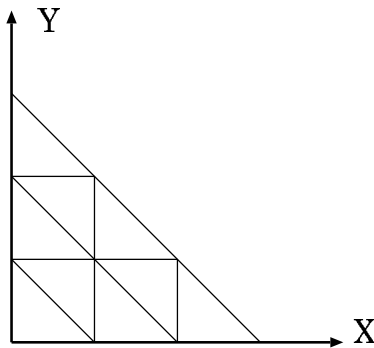


図 B-4: 三角形の分割状態

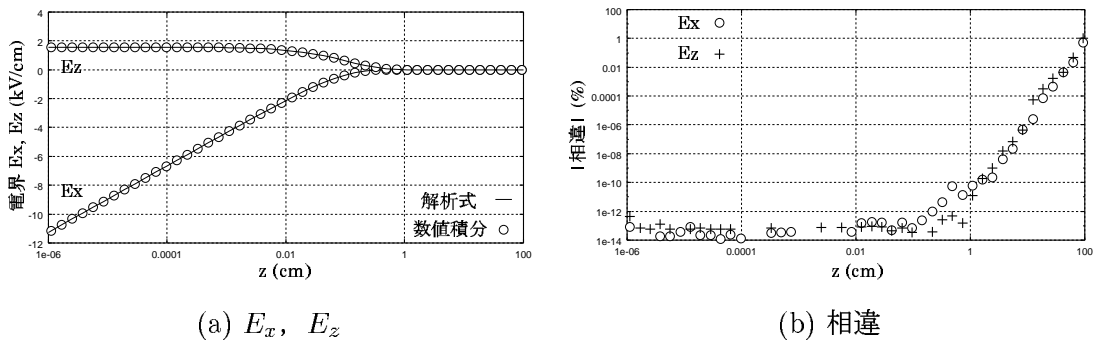
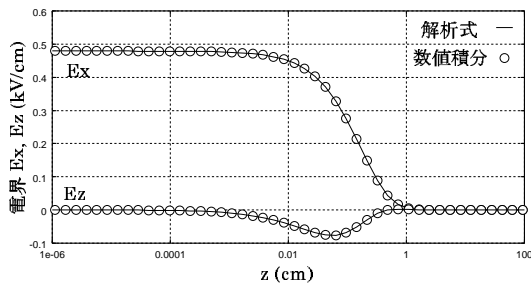


図 B-5: 図 B-2 の  $a$  軸上における電界  $E_x$ ,  $E_z$  および相違

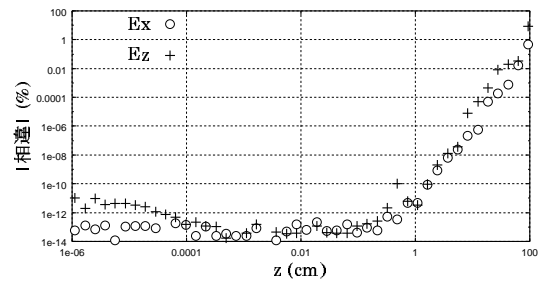
(B-21) 式は  $(0, 0)$  に電荷のピークをもつ分布 (図 B-2(b)) を, (B-22) 式は  $(0.5, 0)$  に電荷のピークを持つ分布 (図 B-3(b)) を表す。以上のように計算軸として 2 種類, 電荷密度分布関数として 2 種類の 4 通りに対して電位・電界の計算を行った。

数値積分による電位・電界の具体的な計算方法は以下のとおりである。計算点 ( $z$  座標:  $P_z$ ) が表面電荷要素の近傍にあるとき ( $P_z < 1.0$  cm) は, 文献 [41] に記載される極座標変換と Log-L1 変換を用いて, 動径方向および角度方向にそれぞれ 64 個の一次元分点数を使用するガウス・ルジャンドル数値積分公式を適用して計算した。計算点が表面電荷要素から離れた位置にあるとき ( $P_z \geq 1.0$  cm) は, 図 B-4 に示すように三角形を 9 枚の部分三角形に等分割し, 各部分三角形毎に文献 [42] に記載される 7 点三角形積分公式を適用して計算した。

解析式と数値積分による計算結果を図 B-5 ~ 図 B-8 に示す。相違を表すグラフにおいて計算点が抜けている位置は相違が零である。図を見てわかるように解析式と数値積分によって計算した値は, 計算点が表面電荷要素から離れた位置である場合を除いて極めて

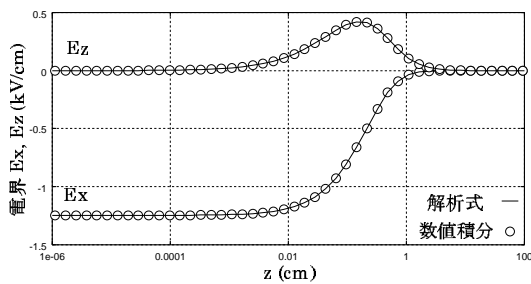


(a)  $E_x, E_z$

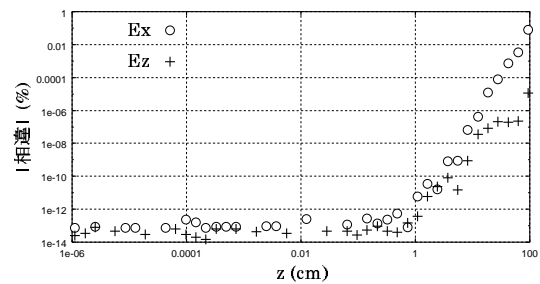


(b) 相違

図 B-6: 図 B-2 の  $b$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違

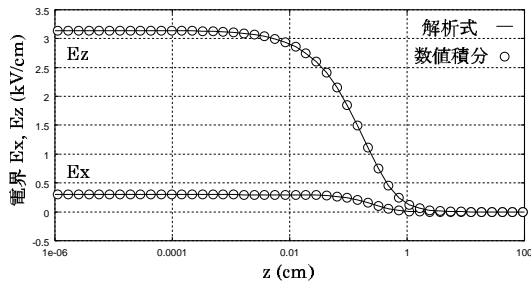


(a)  $E_x, E_z$

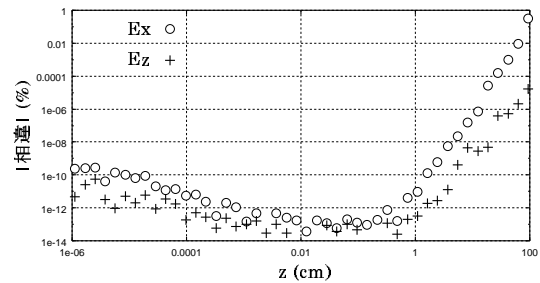


(b) 相違

図 B-7: 図 B-3 の  $a$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違



(a)  $E_x, E_z$



(b) 相違

図 B-8: 図 B-3 の  $b$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違

良く一致している。計算点が表面電荷要素から離れるにつれて相違が大きくなる原因は、解析式を用いて電位・電界の計算をするときに数値計算上の桁落ちが生じるためと思われる。ただし、解析式を実際に表面電荷法に適用した場合に計算点が表面電荷要素から離れている場合、計算結果に与える影響はほとんどない。また計算点が表面電荷要素のごく近傍にある場合に数値積分を用いて精度の高い計算結果を得るためには、先に述べ

たように極座標変換と Log-L1 変換を用いて非常に多い積分点数を必要とするが、解析式を用いる場合には準特異積分などの処理を必要とせず、高速で高精度な計算が可能である。解析式は計算点が表面電荷要素の近傍にあるときに非常に有効な計算手段となる。

ここでは  $E_x$ ,  $E_z$  のみを示しているが、通常、電位の計算精度は電界の計算精度と比較して同程度以上である。また  $\phi$ ,  $E_y$  の計算も行っており、 $E_x$ ,  $E_z$  の場合と同様に計算点が表面電荷要素から離れていない位置で両者の結果が一致することも確認した。

## B.2 二次四角形表面電荷

### B.2.1 解析式

図 B-9 に示すように四角形表面電荷が真空中、 $XY$  平面上にあるとする。図において  $A, B, C, D$  は四角形の頂点、 $E, F, G, H$  は各辺の中間点を表す。四角形表面電荷上の電荷密度を座標の完全二次多項式 + ( $X^2Y$  と  $XY^2$  の項) で表す。

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 X^2 + \alpha_5 XY + \alpha_6 Y^2 + \alpha_7 X^2 Y + \alpha_8 XY^2 \quad (\text{B-23})$$

このとき四角形表面電荷が点  $P$  につくる電位  $\phi$ , 電界  $E_x$  を表す式を以下に示す。

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2}{4\pi\epsilon_0} \\ & \times \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{1AB} - K_{1BA}) \\ & - \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 2\alpha_7 xy + \alpha_8 y^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{2AB} - K_{2BA}) \end{aligned}$$

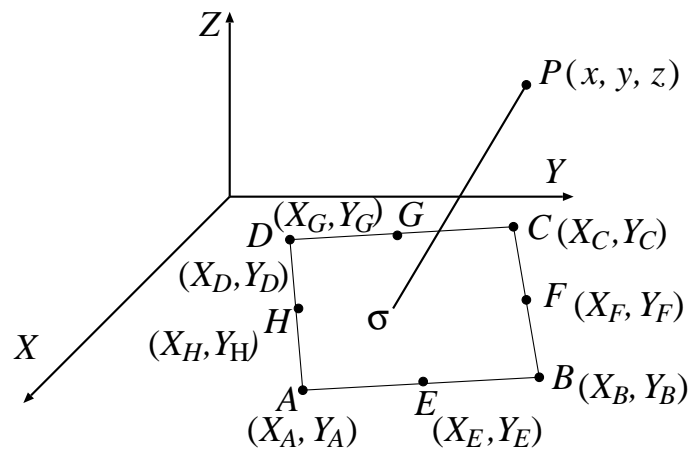


図 B-9: 二次四角形表面電荷

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{3AB} - K_{3BA}) \\
& - \frac{\alpha_4 + \alpha_7 y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{4AB} - K_{4BA}) \\
& - \frac{\alpha_5 + 2\alpha_7 x + 2\alpha_8 y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{5AB} - K_{5BA}) \\
& - \frac{\alpha_6 + \alpha_8 x}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{6AB} - K_{6BA}) - \frac{\alpha_7}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{7AB} - K_{7BA}) \\
& - \frac{\alpha_8}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{8AB} - K_{8BA}) \tag{B-24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x = & \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 2\alpha_7 xy + \alpha_8 y^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{1AB} - K_{1BA}) \\
& + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2}{4\pi\epsilon_0} \\
& \times \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{1AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{1BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_4 + \alpha_7 y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{2AB} - K_{2BA}) \\
& + \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 2\alpha_7 xy + \alpha_8 y^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{2AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{2BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_5 + 2\alpha_7 x + 2\alpha_8 y}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{3AB} - K_{3BA}) \\
& + \frac{\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{3AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{3BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_4 + \alpha_7 y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{4AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{4BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_7}{2\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{5AB} - K_{5BA}) \\
& + \frac{\alpha_5 + 2\alpha_7 x + 2\alpha_8 y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{5AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{5BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_8}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{6AB} - K_{6BA}) \\
& + \frac{\alpha_6 + \alpha_8 x}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{6AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{6BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_7}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{7AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{7BA}}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$



$$+ \frac{\alpha_8}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{8AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{8BA}}{\partial x} \right) \quad (\text{B-25})$$

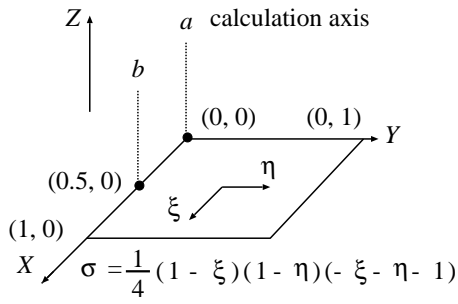
$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{7AB}}{\partial x} = & -\frac{D_B}{4(M_{AB}^2 + 1)} \left\{ \frac{D_B^2}{M_{AB}^2 + 1} + 3(X_B - x)I_{AB} \right\} \\ & - \frac{2M_{AB}D_B}{3(M_{AB}^2 + 1)\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \left\{ \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} D_B^2 - 3(X_B - x)P_{AB} \right\} \\ & + \frac{4M_{AB}^2 - 1}{4(M_{AB}^2 + 1)} I_{AB} P_{AB} D_B \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\ & + \frac{P_{AB} Q_{AB}}{2\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \frac{(4M_{AB}^2 - 1)P_{AB}^2 + (2M_{AB}^2 - 1)z^2}{M_{AB}^2 + 1} \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\ & - \frac{(4M_{AB}^2 - 1)P_{AB}^2 - z^2}{8(M_{AB}^2 + 1)} \left( \frac{D_B}{M_{AB}^2 + 1} - I_{AB} \frac{\partial D_B}{\partial x} - \frac{P_{AB}^2 + z^2}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \right. \\ & \left. \times \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-26})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{8AB}}{\partial x} = & \frac{M_{AB}^3 D_B}{4(M_{AB}^2 + 1)} \left\{ \frac{D_B^2}{M_{AB}^2 + 1} + 3(X_B - x)I_{AB} \right\} \\ & - \frac{2M_{AB}^2 D_B}{3(M_{AB}^2 + 1)\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \left\{ \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} D_B^2 - 3(X_B - x)P_{AB} \right\} \\ & - \frac{M_{AB}(4 - M_{AB}^2)}{4(M_{AB}^2 + 1)} I_{AB} P_{AB} D_B \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\ & - \frac{M_{AB} P_{AB} Q_{AB}}{2\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \frac{(4 - M_{AB}^2)P_{AB}^2 + (2 - M_{AB}^2)z^2}{M_{AB}^2 + 1} \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\ & + \frac{M_{AB}(4 - M_{AB}^2)P_{AB}^2 - M_{AB}^2 z^2}{8(M_{AB}^2 + 1)} \left( \frac{D_B}{M_{AB}^2 + 1} - I_{AB} \frac{\partial D_B}{\partial x} - \frac{P_{AB}^2 + z^2}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \right. \\ & \left. \times \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-27})$$

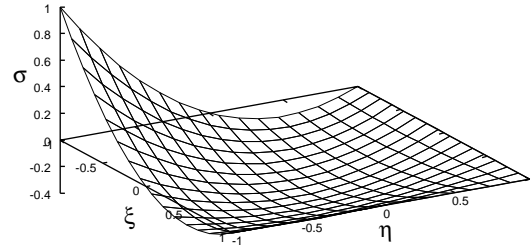
記号の表記はこれまでと同じである。また、(B-23)式より  $\alpha_1 \sim \alpha_8$  を節点  $A \sim H$  の表面電荷密度  $\sigma_A \sim \sigma_H$  で表すことができる。ここでは省略したが、 $E_y$  および  $E_z$  も同様に代数式で表現することができる。

## B.2.2 解析式と数値積分の比較

四角形表面電荷の電荷密度表現関数を二次関数とし、解析式と数値積分それぞれにより電位・電界を計算して両者の比較を行った。比較を行った計算配置を図 B-10、図 B-11

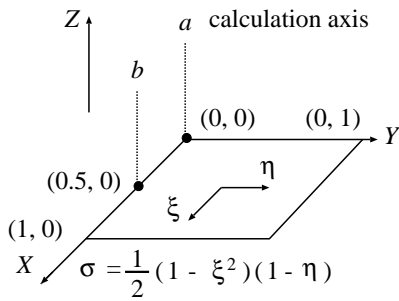


(a) 計算軸

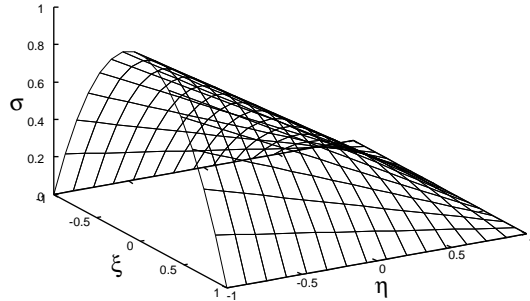


(b) 電荷密度分布 [pC/cm<sup>2</sup>]

図 B-10: 計算配置 (電荷密度 :  $\sigma = 1/4(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)$ )



(a) 計算軸



(b) 電荷密度分布 [pC/cm<sup>2</sup>]

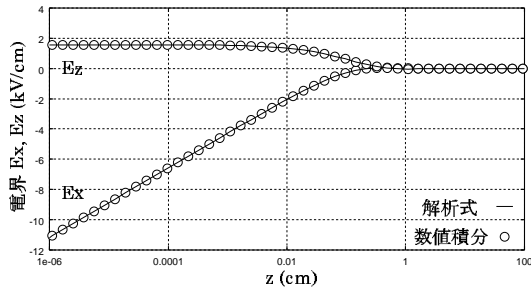
図 B-11: 計算配置 (電荷密度 :  $\sigma = 1/2(1 - \xi^2)(1 - \eta)$ )

に示す。ここでは、無数にある四角形状のうち  $(X, Y) = (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$  を頂点とする正方形の四角形電荷を選択したが、解析式は任意形状の四角形電荷に適用できる。図 B-10(a) および図 B-11(a) において  $a, b$  は計算軸を表す。また四角形に対して正規化座標  $\xi, \eta$  ( $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ ) を定義し、 $\xi = -1, \eta = -1$  が頂点  $(0, 0)$  に、 $\xi = 1, \eta = -1$  が頂点  $(1, 0)$  に対応する。電荷密度表現関数を二次関数とした場合、形状関数は 8 種類存在するが、四角形の頂点あるいは辺上の中間点にピークをもつ 2 種類に分類される。電荷のピーク値は二次三角形電荷のときと同じ  $1 \text{ pC/cm}^2$  とし、次の二つの電荷密度分布関数を対象とした。

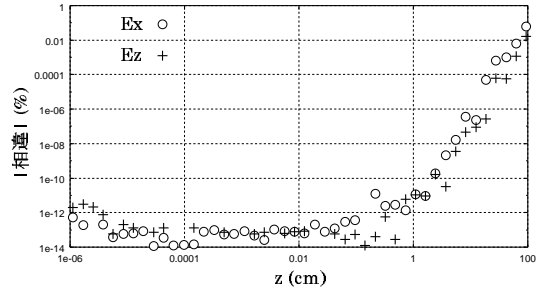
$$\sigma = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1) \quad (\text{B-28})$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (\text{B-29})$$

(B-28) 式は  $(0, 0)$  に電荷のピークをもつ分布 (図 B-10(b)) を、(B-29) 式は  $(0.5, 0)$  に電荷のピークをもつ分布 (図 B-11(b)) を表す。数値積分による電位・電界の計算方法は、計算点 ( $z$  座標 :  $P_z$ ) が表面電荷要素の近傍にあるとき ( $P_z < 1.0 \text{ cm}$ ) は二次三角形電

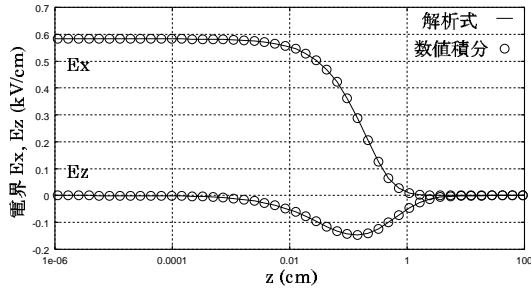


(a)  $E_x, E_z$

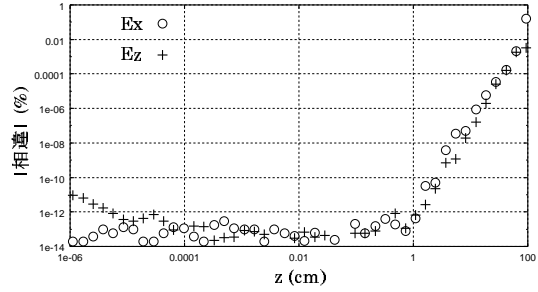


(b) 相違

図 B-12: 図 B-10 の  $a$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違

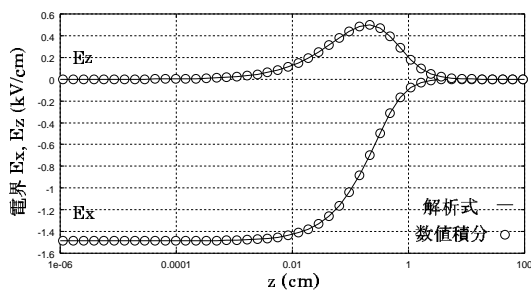


(a)  $E_x, E_z$

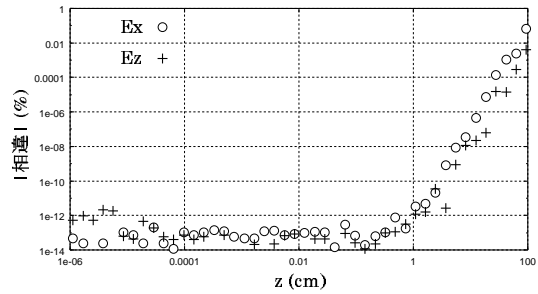


(b) 相違

図 B-13: 図 B-10 の  $b$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違



(a)  $E_x, E_z$



(b) 相違

図 B-14: 図 B-11 の  $a$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違

荷のときと同じであるが、計算点が表面電荷要素から離れた位置にあるとき ( $P_z \geq 1.0$  cm) は、 $\xi$  方向および  $\eta$  方向それぞれに 16 個の一次元分点数を使用するガウス・ルジャンドル数値積分公式を適用して計算した。

解析式と数値積分による計算結果を図 B-12 ~ 図 B-15 に示す。図 B-15 では、電荷密

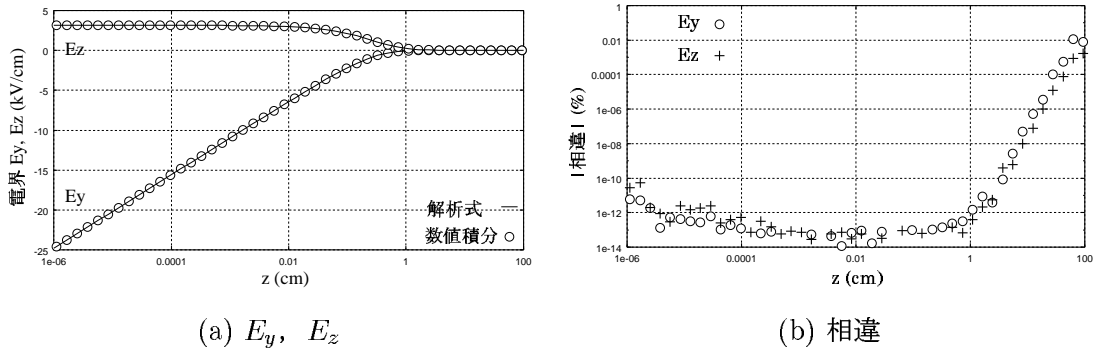


図 B-15: 図 B-11 の  $b$  軸上における電界  $E_y, E_z$  および相違

度分布の対称性のため電界  $E_x$  の値は零になるので、 $E_x$  ではなく  $E_y$  の計算結果を示した。解析式と数値積分によって計算した値は、計算点が表面電荷要素の近傍にあるときに非常によく一致している。計算点が表面電荷要素から離れると二つの値の相違は大きくなるが、電界の計算値が非常に小さい  $Z = 100$  cm においても相違が 1% 以内で一致している。また図には示さなかったが、 $\phi, E_y$  の計算値も一致した。

## B.3 三次三角形表面電荷

### B.3.1 解析式

図 B-16 に示すように三角形電荷が、真空中  $XY$  平面上にあるとする。図において  $A, B, C$  は三角形の頂点、 $D \sim I$  は各辺の三等分点、 $J$  は重心点を表す。三角形電荷上の表面電荷密度を座標の完全三次多項式で表す。

$$\begin{aligned} \sigma = & \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 X^2 + \alpha_5 XY + \alpha_6 Y^2 + \alpha_7 X^3 + \alpha_8 X^2 Y + \alpha_9 XY^2 \\ & + \alpha_{10} Y^3 \end{aligned} \quad (\text{B-30})$$

このとき三角形電荷が点  $P$  に生じる電位  $\phi$ 、電界  $E_x$  の式を示す。

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3}{4\pi\epsilon_0} \\ & \times \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{1AB} - K_{1BA}) \\ & - \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{2AB} - K_{2BA}) \\ & - \frac{\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{3AB} - K_{3BA}) \end{aligned}$$

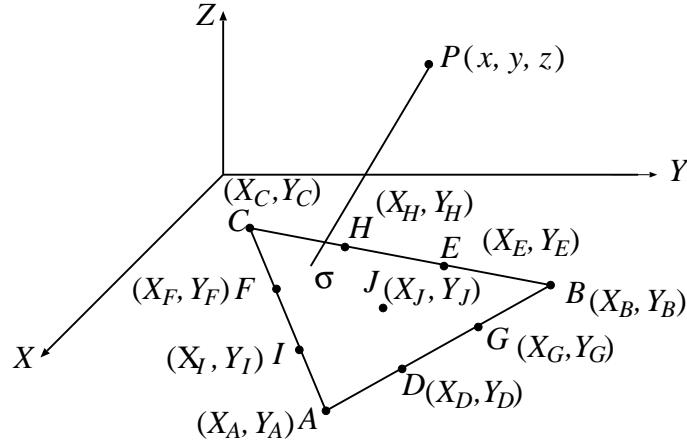


図 B-16: 三次三角形表面電荷

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha_4 + 3\alpha_7x + \alpha_8y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{4AB} - K_{4BA}) \\
& - \frac{\alpha_5 + 2\alpha_8x + 2\alpha_9y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{5AB} - K_{5BA}) \\
& - \frac{\alpha_6 + \alpha_9x + 3\alpha_{10}y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{6AB} - K_{6BA}) - \frac{\alpha_7}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{9AB} - K_{9BA}) \\
& - \frac{\alpha_8}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{7AB} - K_{7BA}) - \frac{\alpha_9}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{8AB} - K_{8BA}) \\
& - \frac{\alpha_{10}}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{10AB} - K_{10BA}) \tag{B-31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x = & \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4x + \alpha_5y + 3\alpha_7x^2 + 2\alpha_8xy + \alpha_9y^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{1AB} - K_{1BA}) \\
& + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 \\
& + \alpha_{10}y^3) \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{1AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{1BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_4 + 3\alpha_7 + \alpha_8y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{2AB} - K_{2BA}) \\
& + \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4x + \alpha_5y + 3\alpha_7x^2 + 2\alpha_8xy + \alpha_9y^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{2AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{2BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_5 + 2\alpha_8x + 2\alpha_9y}{8\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{3AB} - K_{3BA})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2}{8\pi\epsilon_0} \\
& \times \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{3AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{3BA}}{\partial x} \right) + \frac{3\alpha_7}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{4AB} - K_{4BA}) \\
& + \frac{\alpha_4 + 3\alpha_7 x + \alpha_8 y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{4AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{4BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_8}{2\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{5AB} - K_{5BA}) \\
& + \frac{\alpha_5 + 2\alpha_8 x + 2\alpha_9 y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{5AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{5BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_9}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{6AB} - K_{6BA}) \\
& + \frac{\alpha_6 + \alpha_9 x + 3\alpha_{10} y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{6AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{6BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_7}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{9AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{9BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_8}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{7AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{7BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_9}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{8AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{8BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_{10}}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{10AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{10BA}}{\partial x} \right) \tag{B-32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{9AB}}{\partial x} & = \frac{M_{AB}(6M_{AB}^2 + 1)D_B^3}{12(M_{AB}^2 + 1)^2} - \frac{M_{AB}(2M_{AB}^2 - 3)}{4(M_{AB}^2 + 1)} I_{AB} P_{AB} D_B \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\
& - \left\{ (2M_{AB}^2 - 1)(Y_B - y) + \frac{6M_{AB}^2 + 1}{M_{AB}^2 + 1} (M_{AB}x + N_{AB} - y) \right\} \frac{(X_B - x)D_B}{4(M_{AB}^2 + 1)} \\
& - \frac{M_{AB}P_{AB}Q_{AB}(2M_{AB}^2 - 3)P_{AB}^2 - 3z^2 \frac{\partial P_{AB}}{\partial x}}{2\sqrt{M_{AB}^2 + 1} M_{AB}^2 + 1} \\
& + \frac{M_{AB}(2M_{AB}^2 - 3)P_{AB}^2 - (2M_{AB}^2 + 3)z^2}{8 M_{AB}^2 + 1} \left\{ \frac{D_B}{M_{AB}^2 + 1} - I_{AB} \frac{\partial D_B}{\partial x} \right. \\
& \left. - \frac{P_{AB}^2 + z^2}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \right\} \tag{B-33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{10AB}}{\partial x} & = \frac{(7M_{AB}^2 + 2)D_B^3}{12(M_{AB}^2 + 1)^2} - \frac{3M_{AB}^2 - 2}{4(M_{AB}^2 + 1)} I_{AB} P_{AB} D_B \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\
& - \left\{ (M_{AB}^2 - 2)(X_B - x) + \frac{M_{AB}(M_{AB}^2 + 6)}{M_{AB}^2 + 1} (M_{AB}x + N_{AB} - y) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(X_B - x)D_B}{4(M_{AB}^2 + 1)} - \frac{P_{AB}Q_{AB}}{2\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \frac{(3M_{AB}^2 - 2)P_{AB}^2 + 3M_{AB}^2 z^2}{M_{AB}^2 + 1} \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\
& + \frac{(3M_{AB}^2 - 2)P_{AB}^2 + (3M_{AB}^2 + 2)z^2}{8(M_{AB}^2 + 1)} \left\{ \frac{D_B}{M_{AB}^2 + 1} - I_{AB} \frac{\partial D_B}{\partial x} \right. \\
& \left. - \frac{P_{AB}^2 + z^2}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \right\} \tag{B-34}
\end{aligned}$$

記号の表記はこれまでと同じである。また  $\alpha_1 \sim \alpha_{10}$  は節点  $A \sim J$  の表面電荷密度  $\sigma_A \sim \sigma_J$  で表すことができる。ここでは省略したが、 $E_y$  および  $E_z$  も同様に代数式で表現することができる。

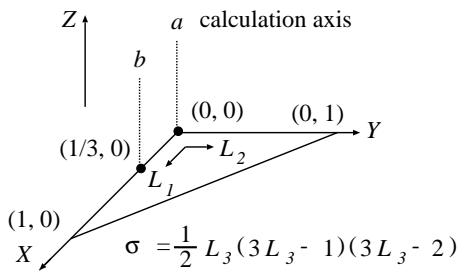
### B.3.2 解析式と数値積分の比較

三角形表面電荷の電荷密度表現関数を三次関数とし、解析式と数値積分それぞれにより電位・電界を計算し両者の比較を行った。計算配置を図 B-17、図 B-18、図 B-19 に示す。図の説明は二次三角形表面電荷のときと同じである。ただし、図 B-17 および図 B-18 の計算軸  $b$  は  $(X, Y) = (1/3, 0)$  を、図 B-19 の計算軸  $b$  は  $(X, Y) = (1/3, 1/3)$  を通る直線である。電荷密度表現関数を三次関数とした場合、形状関数は 10 種類存在するが、電荷のピークをもつ節点として頂点、辺上の三等分点および重心点の 3 種類を選択できる。電荷のピーク値は  $1 \text{ pC/cm}^2$  とし、次の三つの電荷密度分布関数を対象とした。

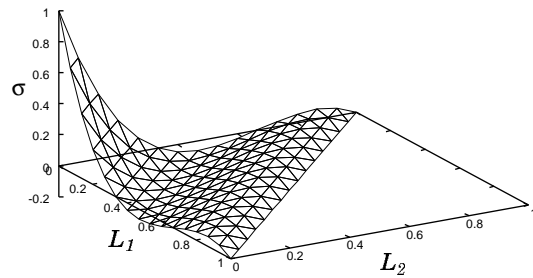
$$\sigma = \frac{1}{2} L_3 (3L_3 - 1)(3L_3 - 2) \tag{B-35}$$

$$\sigma = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_3 - 1) \tag{B-36}$$

$$\sigma = 27 L_1 L_2 L_3 \tag{B-37}$$



(a) 計算軸



(b) 電荷密度分布 [ $\text{pC/cm}^2$ ]

図 B-17: 計算配置 (電荷密度 :  $\sigma = 1/2 L_3 (3L_3 - 1)(3L_3 - 2)$ )

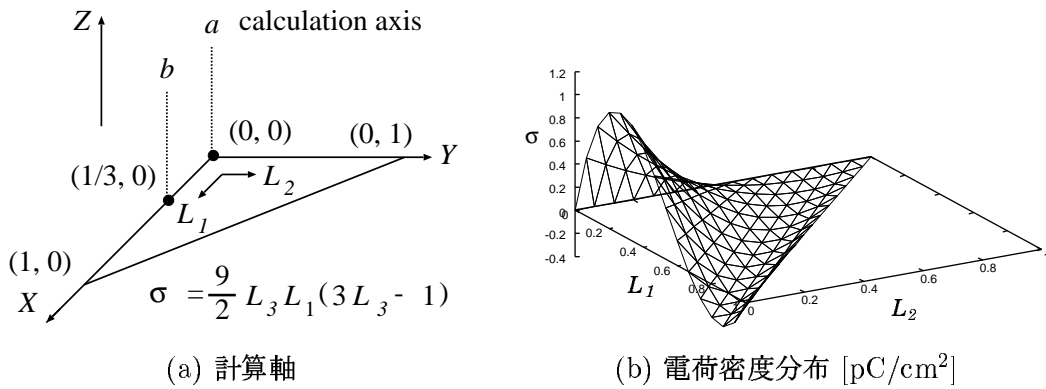


図 B-18: 計算配置 (電荷密度 :  $\sigma = 9/2L_3L_1(3L_3 - 1)$ )

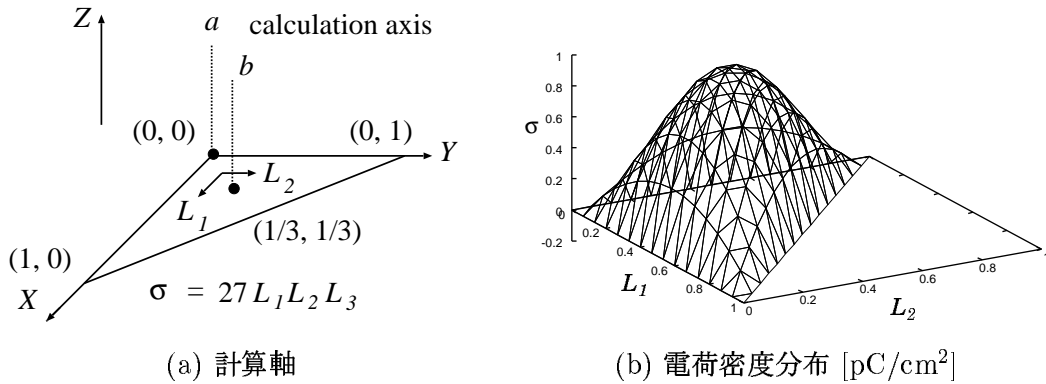


図 B-19: 計算配置 (電荷密度 :  $\sigma = 27L_1L_2L_3$ )

(B-35) 式は (0, 0) に, (B-36) 式は (1/3, 0) に, (B-37) 式は (1/3, 1/3) にそれぞれ電荷のピークをもつ分布であり, それぞれの電荷密度分布を図 B-17(b), 図 B-18(b), 図 B-19(b) に示す。数値積分の方法は二次三角形電荷の場合と同様である。

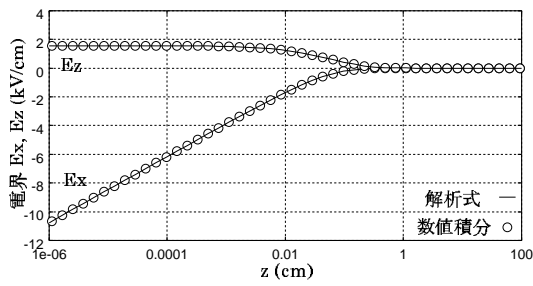
計算結果を図 B-20 ~ 図 B-25 に示す。解析式と数値積分によって計算した値は計算点が表面電荷要素から離れた位置である場合を除いて良く一致し, ここでは省略したが,  $\phi$ ,  $E_y$  の計算値も一致した。

## B.4 三次四角形表面電荷

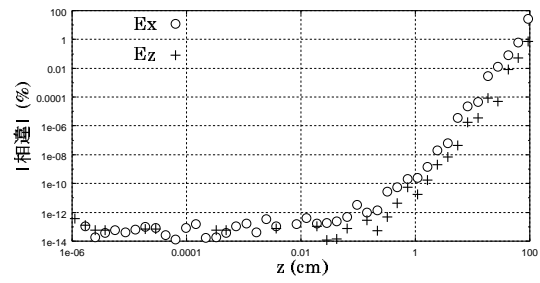
### B.4.1 解析式

図 B-26 に示すように四角形電荷が真空中,  $XY$  平面上にあるとする。図において  $A \sim D$  は四角形の頂点,  $E \sim L$  は各辺の三等分点を表す。四角形電荷上の表面電荷密度を座



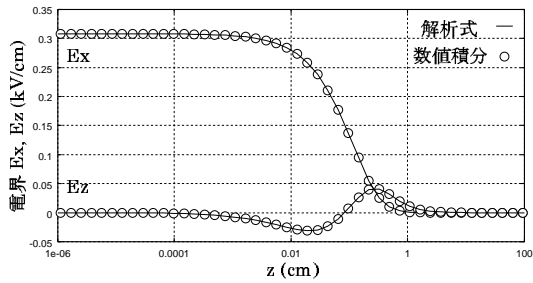


(a)  $E_x, E_z$

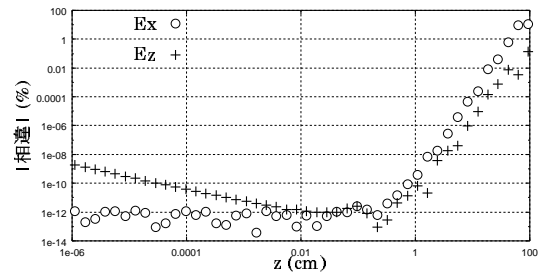


(b) 相違

図 B-20: 図 B-17 の  $a$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違

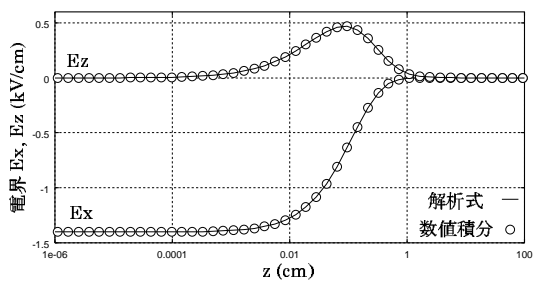


(a)  $E_x, E_z$

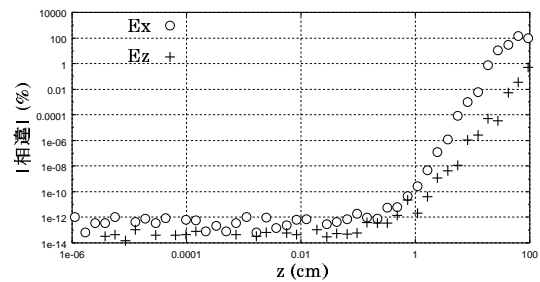


(b) 相違

図 B-21: 図 B-17 の  $b$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違



(a)  $E_x, E_z$

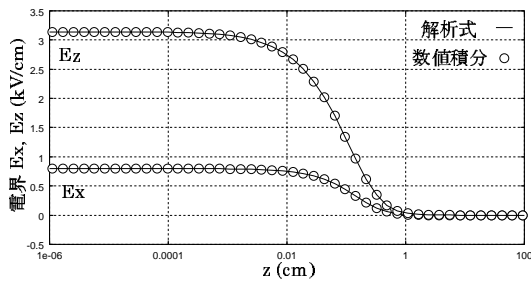


(b) 相違

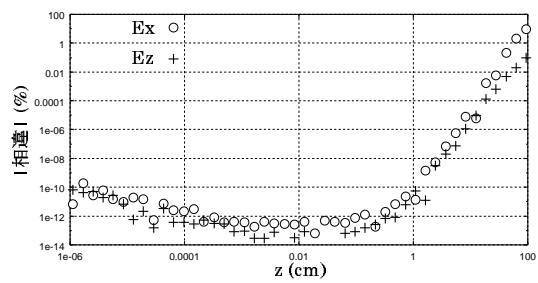
図 B-22: 図 B-18 の  $a$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違

標の完全三次多項式 +  $(X^3Y + XY^3$  の項) で表す。

$$\begin{aligned} \sigma = & \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 X^2 + \alpha_5 XY + \alpha_6 Y^2 + \alpha_7 X^3 + \alpha_8 X^2 Y + \alpha_9 XY^2 \\ & + \alpha_{10} Y^3 + \alpha_{11} X^3 Y + \alpha_{12} XY^3 \end{aligned} \quad (\text{B-38})$$

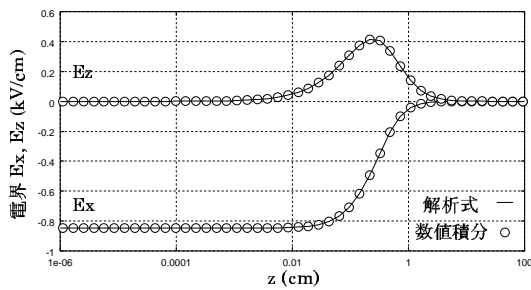


(a)  $E_x, E_z$

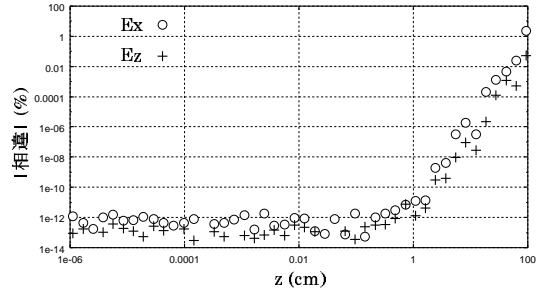


(b) 相違

図 B-23: 図 B-18 の  $b$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違

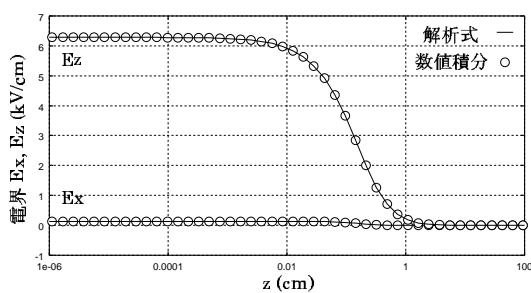


(a)  $E_x, E_z$

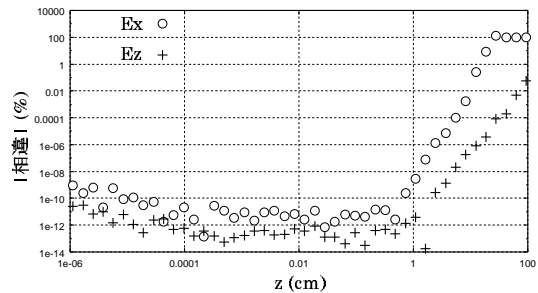


(b) 相違

図 B-24: 図 B-19 の  $a$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違



(a)  $E_x, E_z$



(b) 相違

図 B-25: 図 B-19 の  $b$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違

このとき四角形電荷が  $P$  点に生じる電位  $\phi$ , 電界  $E_x$  の式を示す。

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2)$$

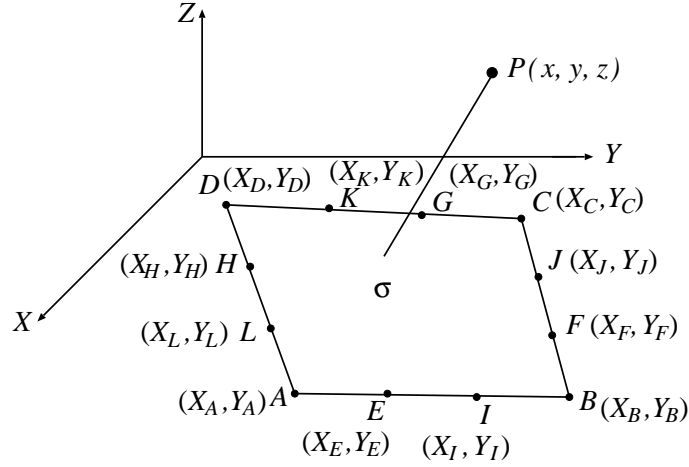


図 B-26: 三次四角形表面電荷

$$\begin{aligned}
& + \alpha_{10}y^3 + \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}xy^3) \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{1AB} - K_{1BA}) \\
& - \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4x + \alpha_5y + 3\alpha_7x^2 + 2\alpha_8xy + \alpha_9y^2 + 3\alpha_{11}x^2y + \alpha_{12}y^3}{8\pi\epsilon_0} \\
& \times \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{2AB} - K_{2BA}) \\
& - \frac{\alpha_3 + \alpha_5x + 2\alpha_6y + \alpha_8x^2 + 2\alpha_9xy + 3\alpha_{10}y^2 + \alpha_{11}x^3 + 3\alpha_{12}xy^2}{8\pi\epsilon_0} \\
& \times \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{3AB} - K_{3BA}) \\
& - \frac{\alpha_4 + 3\alpha_7x + \alpha_8y + 3\alpha_{11}xy}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{4AB} - K_{4BA}) \\
& - \frac{\alpha_5 + 2\alpha_8x + 2\alpha_9y + 3\alpha_{11}x^2 + 3\alpha_{12}y^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{5AB} - K_{5BA}) \\
& - \frac{\alpha_6 + \alpha_9x + 3\alpha_{10}y + 3\alpha_{12}xy}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{6AB} - K_{6BA}) \\
& - \frac{\alpha_7 + \alpha_{11}y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{9AB} - K_{9BA}) - \frac{\alpha_8 + 3\alpha_{11}x}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{7AB} - K_{7BA}) \\
& - \frac{\alpha_9 + 3\alpha_{12}y}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{8AB} - K_{8BA}) - \frac{\alpha_{10} + \alpha_{12}x}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{10AB} - K_{10BA}) \\
& - \frac{\alpha_{11}}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{11AB} - K_{11BA}) - \frac{\alpha_{12}}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{12AB} - K_{12BA}) \quad (B-39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x = & \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4x + \alpha_5y + 3\alpha_7x^2 + 2\alpha_8xy + \alpha_9y^2 + 3\alpha_{11}x^2y + \alpha_{12}y^3}{4\pi\varepsilon_0} \\
& \times \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{1AB} - K_{1BA}) \\
& + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (\alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 \\
& + \alpha_{10}y^3 + \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}xy^3) \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{1AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{1BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_4 + 3\alpha_7x + \alpha_8x + 3\alpha_{11}xy}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{2AB} - K_{2BA}) \\
& + \frac{\alpha_2 + 2\alpha_4x + \alpha_5y + 3\alpha_7x^2 + 2\alpha_8xy + \alpha_9y^2 + 3\alpha_{11}x^2y + \alpha_{12}y^3}{8\pi\varepsilon_0} \\
& \times \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{2AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{2BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_5 + 2\alpha_8x + 2\alpha_9x + 3\alpha_{11}x^2 + 3\alpha_{12}y^2}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{3AB} - K_{3BA}) \\
& + \frac{\alpha_3 + \alpha_5x + 2\alpha_6y + \alpha_8x^2 + 2\alpha_9xy + 3\alpha_{10}y^2 + \alpha_{11}x^3 + 3\alpha_{12}xy^2}{8\pi\varepsilon_0} \\
& \times \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{3AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{3BA}}{\partial x} \right) + \frac{3\alpha_7 + 3\alpha_{11}x}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{4AB} - K_{4BA}) \\
& + \frac{\alpha_4 + 3\alpha_7x + \alpha_8y + 3\alpha_{11}xy}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{4AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{4BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_8 + 3\alpha_{11}x}{2\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{5AB} - K_{5BA}) \\
& + \frac{\alpha_5 + 2\alpha_8x + 2\alpha_9y + 3\alpha_{11}x^2 + 3\alpha_{12}y^2}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{5AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{5BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_9 + 3\alpha_{12}y}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{6AB} - K_{6BA}) \\
& + \frac{\alpha_6 + \alpha_9x + 3\alpha_{10}y + 3\alpha_{12}xy}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{6AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{6BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_7 + \alpha_{11}y}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{9AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{9BA}}{\partial x} \right) + \frac{3\alpha_{11}}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{7AB} - K_{7BA}) \\
& + \frac{\alpha_8 + 3\alpha_{11}x}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{7AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{7BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_9 + 3\alpha_{12}y}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{8AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{8BA}}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_{12}}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} (K_{10AB} - K_{10BA}) \\
& + \frac{\alpha_{10} + \alpha_{12}x}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{10AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{10BA}}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_{11}}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{11AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{11BA}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\alpha_{12}}{4\pi\epsilon_0} \sum_{A \rightarrow B \rightarrow C} \left( \frac{\partial K_{12AB}}{\partial x} - \frac{\partial K_{12BA}}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{B-40}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{11AB}}{\partial x} = & - \frac{2M_{AB}^2 - 1}{5(M_{AB}^2 + 1)} (X_B - x)(Y_B - y)^2 D_B \\
& - \frac{12M_{AB}^2 - 24M_{AB}^2 - 1}{30(M_{AB}^2 + 1)^2} P_{AB} D_B^3 \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\
& + \frac{(8M_{AB}^2 + 1)D_B}{20(M_{AB}^2 + 1)^2} \left\{ M_{AB}(Y_B - y)D_B^2 - 3(M_{AB}x + N_{AB} - y) \right. \\
& \times (X_B - x)(Y_B - y) \left. \right\} \\
& + \frac{(12M_{AB}^4 - 24M_{AB}^2 - 1)P_{AB}^2 - 8M_{AB}^2(M_{AB}^2 + 2)z^2}{20(M_{AB}^2 + 1)^2} (X_B - x)D_B \\
& - \frac{M_{AB}(4M_{AB}^2 - 3)}{4(M_{AB}^2 + 1)\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} I_{AB} P_{AB}^2 D_B \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\
& - \frac{M_{AB}}{2(M_{AB}^2 + 1)} \frac{(4M_{AB}^2 - 3)P_{AB}^2 + (2M_{AB}^2 - 3)z^2}{M_{AB}^2 + 1} P_{AB}^2 Q_{AB} \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\
& + \frac{M_{AB}}{8\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \frac{(4M_{AB}^2 - 3)P_{AB}^2 - 3z^2}{M_{AB}^2 + 1} \left\{ \frac{P_{AB}D_B}{M_{AB}^2 + 1} - I_{AB} \right. \\
& \times \left( \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} D_B + P_{AB} \frac{\partial D_B}{\partial x} \right) - \frac{P_{AB}^2 + z^2}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \left( \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} Q_{AB} \right. \\
& \left. \left. + P_{AB} \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{B-41}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{12AB}}{\partial x} = & - \frac{2(M_{AB}^2 - 2)}{15(M_{AB}^2 + 1)} (X_B - x)D_B^3 - \frac{M_{AB}^2 - 2}{5(M_{AB}^2 + 1)} (X_B - x)^3 D_B \\
& - \frac{M_{AB}^2 + 24M_{AB}^2 - 12}{30(M_{AB}^2 + 1)^2} P_{AB} D_B^3 \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\
& + \frac{M_{AB}(M_{AB}^2 + 8)D_B}{20(M_{AB}^2 + 1)^2} \left\{ \{2M_{AB}(X_B - x) - (Y_B - y)\} D_B^2 \right. \\
& \left. - 3(M_{AB}x + N_{AB} - y)(X_B - x)^2 \right\} \\
& + \frac{(M_{AB}^4 + 24M_{AB}^2 - 12)P_{AB}^2 + 8(2M_{AB}^2 + 1)z^2}{20(M_{AB}^2 + 1)^2} (X_B - x)D_B \\
& + \frac{M_{AB}(3M_{AB}^2 - 4)}{4(M_{AB}^2 + 1)\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} I_{AB} P_{AB}^2 D_B \frac{\partial P_{AB}}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{M_{AB}}{2(M_{AB}^2 + 1)} \frac{(3M_{AB}^2 - 4)P_{AB}^2 + (3M_{AB}^2 - 2)z^2}{M_{AB}^2 + 1} P_{AB}^2 Q_{AB} \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} \\
& - \frac{M_{AB}}{8\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \frac{(3M_{AB}^2 - 4)P_{AB}^2 + 3M_{AB}^2 z^2}{M_{AB}^2 + 1} \left\{ \frac{P_{AB} D_B}{M_{AB}^2 + 1} - I_{AB} \right. \\
& \left. \times \left( \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} D_B + P_{AB} \frac{\partial D_B}{\partial x} \right) - \frac{P_{AB}^2 + z^2}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \left( \frac{\partial P_{AB}}{\partial x} Q_{AB} + P_{AB} \frac{\partial Q_{AB}}{\partial x} \right) \right\} \quad (\text{B-42})
\end{aligned}$$

記号の表記はこれまでと同じである。また  $\alpha_1 \sim \alpha_{12}$  を節点  $A \sim L$  の表面電荷密度  $\sigma_A \sim \sigma_L$  で表すことができる。ここでは省略したが、 $E_y$  および  $E_z$  も同様に代数式で表現することができる。

#### B.4.2 解析式と数値積分の比較

電荷密度表現関数を三次関数とし、解析式と数値積分それぞれにより電位・電界を計算し両者の比較を行った。比較を行った計算配置を図 B-27, 図 B-28 に示す。図の説明は二次四角形表面電荷のときと同じであるが、計算軸  $b$  は  $(X, Y) = (1/3, 0)$  を通る直線である。四角形表面電荷の電荷密度表現関数を三次関数とした場合、形状関数は 12 種類存在するが、頂点あるいは辺上の三等分点にピークをもつ 2 種類に分類される。電荷のピーク値はこれまでと同様  $1 \text{ pC/cm}^2$  とし、次の二つの電荷密度分布関数を対象とした。

$$\sigma = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 - \eta)\{-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)\} \quad (\text{B-43})$$

$$\sigma = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - 3\xi) \quad (\text{B-44})$$

(B-43) 式は  $(0, 0)$  に電荷のピークをもつ分布 (図 B-27(b)) を、一方、(B-44) 式は  $(1/3, 0)$  に電荷のピークをもつ分布 (図 B-28(b)) を表す。数値積分の計算方法は二次四角形表面電荷のときと同じとした。

解析式と数値積分による計算結果を図 B-29 ~ 図 B-32 に示す。解析式と数値積分によって計算した値は、計算点が表面電荷要素から遠方にある場合は相違は大きくなるが、計算点が表面電荷要素の近傍にあるときには非常によく一致しており、また  $\phi$ ,  $E_y$  の計算値も一致した。

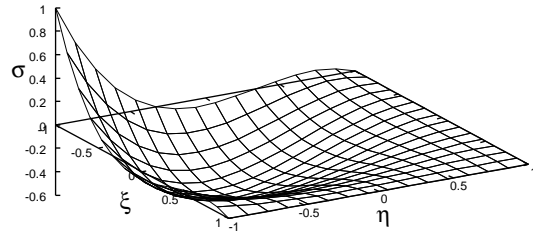
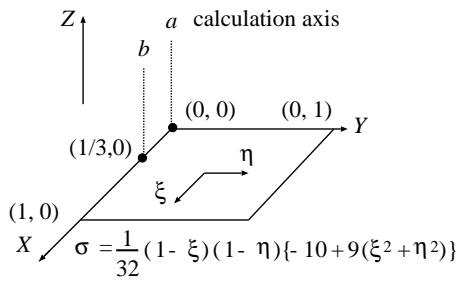


図 B-27: 計算配置 (電荷密度 :  $\sigma = 1/32(1 - \xi)(1 - \eta)\{-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)\}$ )

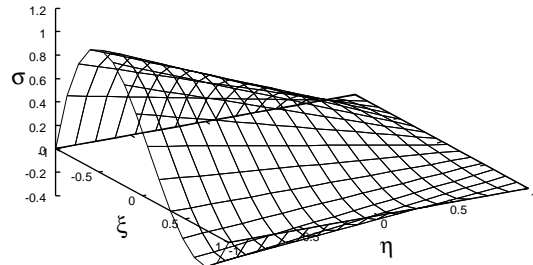
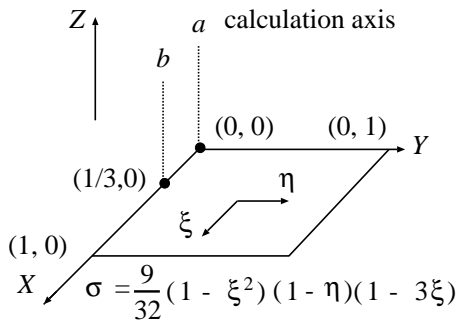


図 B-28: 計算配置 (電荷密度 :  $\sigma = 9/32(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - 3\xi)$ )

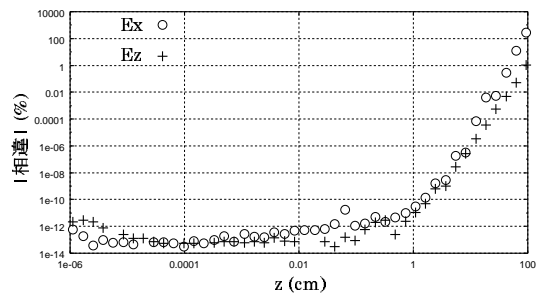
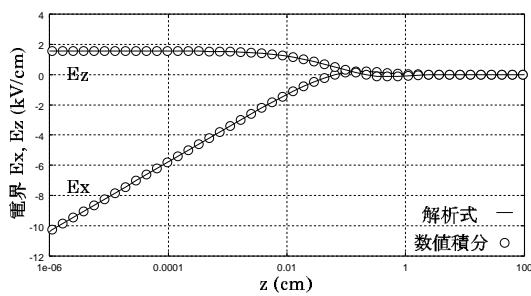
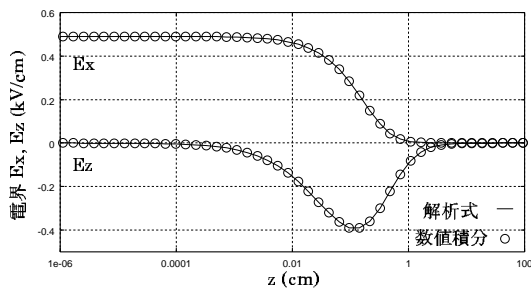
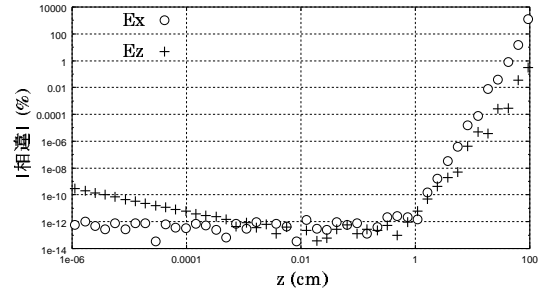


図 B-29: 図 B-27 の a 軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違

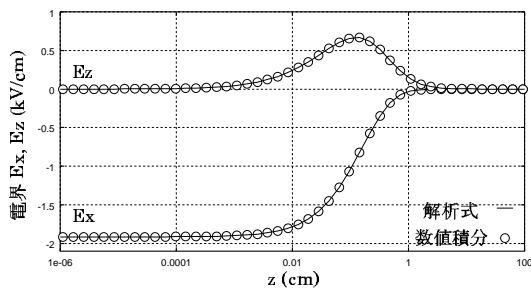


(a)  $E_x, E_z$

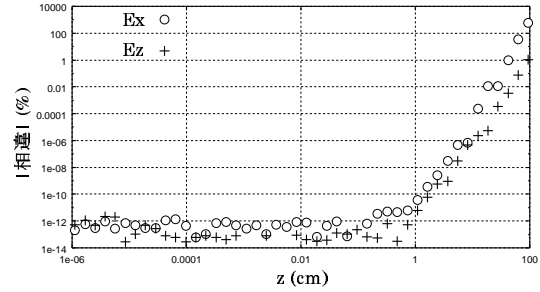


(b) 相違

図 B-30: 図 B-27 の  $b$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違

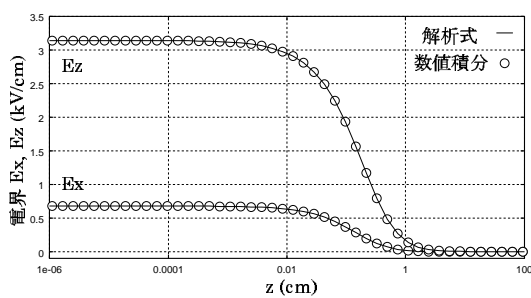


(a)  $E_x, E_z$

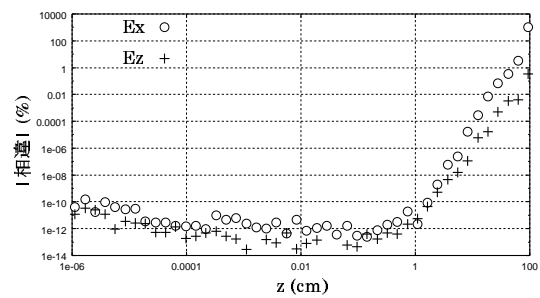


(b) 相違

図 B-31: 図 B-28 の  $a$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違



(a)  $E_x, E_z$



(b) 相違

図 B-32: 図 B-28 の  $b$  軸上における電界  $E_x, E_z$  および相違





## 付録C $E_{LS}^{ref}$ , $E_{LS}$ , $E_{LS}^{app}$ の導出

方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  を考える。ただし、 $A$  は  $m$  行  $n$  列 ( $m \geq n$ ) の行列とし、 $Rank(A) = n$  とする。このとき最小二乗解は次式で与えられる。

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \quad (C-1)$$

$A$ ,  $\mathbf{b}$  に伴う誤差  $\delta A$ ,  $\delta \mathbf{b}$  によって解  $\mathbf{x}$  に  $\delta \mathbf{x}$  の変動を生じたとすると、次式の関係式が得られる。

$$\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} = \{(A + \delta A)^T (A + \delta A)\}^{-1} (A + \delta A)^T (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) \quad (C-2)$$

ただし、 $Rank(A + \delta A) = n$  とする。

### C.1 $E_{LS}^{ref}$ の導出方法

(C-2) 式の両辺に  $(A + \delta A)^T (A + \delta A)$  を掛けることにより次式が得られる。

$$(A + \delta A)^T (A + \delta A) (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = (A + \delta A)^T (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) \quad (C-3)$$

$$(A^T A + A^T \delta A + \delta A^T A + \delta A^T \delta A) (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = (A + \delta A)^T (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) \quad (C-4)$$

(C-4) 式と  $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$  の関係から次式を得る。

$$\begin{aligned} A^T A \delta \mathbf{x} + \delta A^T A (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) + A^T \delta A (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) + \delta A^T \delta A (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) \\ = A^T \delta \mathbf{b} + \delta A^T (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (C-5)$$

(C-5) 式より,

$$\begin{aligned} A^T A \delta \mathbf{x} &= -\delta A^T A (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - A^T \delta A (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \delta A^T \delta A (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) \\ &\quad + A^T \delta \mathbf{b} + \delta A^T (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (C-6)$$

$$\begin{aligned} &= -A^T \delta A (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \delta A^T \delta A (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) + \delta A^T \{(\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - A(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})\} \\ &\quad + A^T \delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (C-7)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= -(A^T A)^{-1} A^T \delta A (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) + (A^T A)^{-1} \delta A^T \{(\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - A(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})\} \\ &\quad - (A^T A)^{-1} \delta A^T \delta A (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) + (A^T A)^{-1} A^T \delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (C-8)$$

が得られ, (C-8) 式の両辺をノルムで評価することにより次式の不等号関係が得られる。

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{x}\| \leq & \|(A^T A)^{-1} A^T\| \|\delta A\| \|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\| + \|(A^T A)^{-1}\| \|\delta A\| \|(\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - A(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})\| \\ & + \|(A^T A)^{-1}\| \|\delta A\|^2 \|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\| + \|(A^T A)^{-1} A^T\| \|\delta \mathbf{b}\| \end{aligned} \quad (\text{C-9})$$

(C-9) 式の両辺を  $\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|$  で割ることにより, 次式の  $E_{LS}^{ref}$  の計算式が導出される。

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} \leq E_{LS}^{ref} \quad (\text{C-10})$$

$$E_{LS}^{ref} = C_1 \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + C_2 \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + C_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|A\|^2} + C_4 \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}$$

$$C_1 = \|A\| \|A^+\|$$

$$C_2 = \|(A^T A)^{-1}\| \|A\| \frac{\|(\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - A(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$$

$$C_3 = \|(A^T A)^{-1}\| \|A\|^2$$

$$C_4 = \|A^+\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$$

ただし,  $(A^T A)^{-1} A^T = A^+$  とした。

## C.2 $E_{LS}$ , $E_{LS}^{app}$ の導出方法

(C-1) 式, (C-2) 式に  $A = \bar{A} - \delta A$ ,  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} - \delta \mathbf{b}$  を代入することにより, 次式が得られる。

$$(\bar{A} - \delta A)^T (\bar{A} - \delta A) (\bar{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}) = (\bar{A} - \delta A)^T (\bar{\mathbf{b}} - \delta \mathbf{b}) \quad (\text{C-11})$$

$$\bar{A}^T \bar{A} \bar{\mathbf{x}} = \bar{A}^T \bar{\mathbf{b}} \quad (\text{C-12})$$

(C-11) 式より,

$$(\bar{A}^T \bar{A} - \bar{A}^T \delta A - \delta A^T \bar{A} + \delta A^T \delta A) (\bar{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}) = (\bar{A}^T - \delta A^T) (\bar{\mathbf{b}} - \delta \mathbf{b}) \quad (\text{C-13})$$

が得られる。(C-13) 式に (C-12) 式の関係を用いると,

$$\begin{aligned} \bar{A}^T \bar{A} \delta \mathbf{x} &= -\bar{A}^T \delta A (\bar{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}) - \delta A^T \bar{A} (\bar{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}) + \delta A^T \delta A (\bar{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}) \\ &\quad + \bar{A}^T \delta \mathbf{b} + \delta A^T (\bar{\mathbf{b}} - \delta \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{C-14})$$

$$= \delta A^T \{(\bar{\mathbf{b}} - \delta \mathbf{b}) - (\bar{A} - \delta A) (\bar{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x})\} - \bar{A}^T \delta A (\bar{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}) + \bar{A}^T \delta \mathbf{b} \quad (\text{C-15})$$

$$= -\bar{A}^T \delta A (\bar{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}) + \bar{A}^T \delta \mathbf{b} \quad (\text{C-16})$$

が得られ, (C-16) 式より次式が得られる。

$$\delta \mathbf{x} = -(\bar{A}^T \bar{A})^{-1} \bar{A}^T \delta A \mathbf{x} + (\bar{A}^T \bar{A})^{-1} \bar{A}^T \delta \mathbf{b} \quad (\text{C-17})$$

上式の両辺をノルムで評価すると,

$$\|\delta \mathbf{x}\| \leq \|(\bar{A}^T \bar{A})^{-1} \bar{A}^T\| \|\delta A\| \|\mathbf{x}\| + \|(\bar{A}^T \bar{A})^{-1} \bar{A}^T\| \|\delta \mathbf{b}\| \quad (\text{C-18})$$

(C-18) 式の両辺を  $\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|$  で割ると次式が得られる。

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} \leq \|\bar{A}\| \|\bar{A}^+\| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + \|\bar{A}^+\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|} \quad (\text{C-19})$$

ただし,  $(\bar{A}^T \bar{A})^{-1} \bar{A}^T = \bar{A}^+$  とした。(C-19) 式に次式の不等号関係を適用すると, (C-21) 式が得られる。

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\| + \|\delta \mathbf{x}\| \quad (\text{C-20})$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} \leq \|\bar{A}\| \|\bar{A}^+\| \left(1 + \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}\right) \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + \|\bar{A}^+\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|} \quad (\text{C-21})$$

(C-21) 式を整理すると, 次式の  $E_{LS}$  の計算式が得られる。

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} \leq E_{LS} \quad (\text{C-22})$$

$$E_{LS} = \frac{D_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + D_2 \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}}{1 - D_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|}}$$

$$D_1 = \|\bar{A}\| \|\bar{A}^+\|$$

$$D_2 = \|\bar{A}^+\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}$$

また,  $\|\delta \mathbf{x}\| \ll \|\mathbf{x}\|$  の仮定の下に (C-20) 式の左辺を次のように近似する。

$$\|\mathbf{x}\| \simeq \|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\| \quad (\text{C-23})$$

(C-19) 式に (C-23) 式を用いると次式の  $E_{LS}^{app}$  の計算式が得られる。

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|} \leq E_{LS}^{app} \quad (\text{C-24})$$

$$E_{LS}^{app} = D_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + D_2 \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}$$



## 付録D $E_{RLS}^{ref}$ , $E_{RLS}$ , $E_{RLS}^{app}$ の導出

ペナルティ付き最小二乗法での方程式は次式で表される。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} = A_p \mathbf{x}_e, \quad A_p = \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\gamma}K \end{pmatrix} \quad (\text{D-1})$$

$A$  は  $m$  行  $n$  列 ( $m \geq n$ ) の行列,  $K$  は  $n$  行  $n$  列の行列とし,  $\text{Rank}(A_p) = n$  とする。  
推定解  $\mathbf{x}_e$  は, (D-1) 式を最小二乗法で解くことで求められ次式で表される。

$$\mathbf{x}_e = (A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T \mathbf{b} \quad (\text{D-2})$$

このとき,  $A$ ,  $\mathbf{b}$  に伴う誤差  $\delta A$ ,  $\delta \mathbf{b}$  によって解  $\mathbf{x}_e$  に  $\delta \mathbf{x}_e$  の変動を生じたとすると, 次式の関係式が得られる。

$$\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e = \{(A + \delta A)^T (A + \delta A) + \gamma K^T K\}^{-1} (A + \delta A)^T (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) \quad (\text{D-3})$$

ただし,  $\bar{A}_p = ((A + \delta A)^T, \sqrt{\gamma}K^T)^T$  とし,  $\text{Rank}(\bar{A}_p) = n$  とする。

### D.1 $E_{RLS}^{ref}$ の導出方法

(D-3) 式の両辺に  $\{(A + \delta A)^T (A + \delta A) + \gamma K^T K\}$  を掛けて次式を得る。

$$\{(A^T A + \gamma K^T K) + A^T \delta A + \delta A^T A + \delta A^T \delta A\} (\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) = (A^T + \delta A^T) (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) \quad (\text{D-4})$$

(D-4) 式に (D-2) 式の関係を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned} (A^T A + \gamma K^T K) \delta \mathbf{x}_e &= -A^T \delta A (\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) - \delta A^T A (\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) \\ &\quad - \delta A^T \delta A (\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) + A^T \delta \mathbf{b} + \delta A^T (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{D-5})$$

$$\begin{aligned} &= -A^T \delta A (\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) + \delta A^T \{(\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - A (\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e)\} \\ &\quad - \delta A^T \delta A (\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) + A^T \delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{D-6})$$

(D-6) 式より,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_e &= -(A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T \delta A (\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) \\ &\quad + (A^T A + \gamma K^T K)^{-1} \delta A^T \{(\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - A (\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e)\} \\ &\quad - (A^T A + \gamma K^T K)^{-1} \delta A^T \delta A (\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) + (A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T \delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{D-7})$$

が得られ、(D-7)式の両辺をノルムで評価することにより、次式の  $E_{RLS}^{ref}$  の計算式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} &\leq E_{RLS}^{ref} & (D-8) \\ E_{RLS}^{ref} &= E_1 \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + E_2 \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + E_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|A\|^2} + E_4 \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|} \\ E_1 &= \|(A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T\| \|A\| \\ \mathbf{r} &= (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - A(\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) \\ E_2 &= \|(A_p^T A_p)^{-1}\| \|A\| \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \\ E_3 &= \|(A_p^T A_p)^{-1}\| \|A\|^2 \\ E_4 &= \|(A^T A + \gamma K^T K)^{-1} A^T\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \end{aligned}$$

## D.2 $E_{RLS}$ , $E_{RLS}^{app}$ の導出方法

(D-2)式, (D-3)式に  $A = \bar{A} - \delta A$ ,  $\mathbf{x}_e = \bar{\mathbf{x}}_e - \delta \mathbf{x}_e$ ,  $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} - \delta \mathbf{b}$  を代入すると、次式が得られる。

$$\{(\bar{A} - \delta A)^T (\bar{A} - \delta A) + \gamma K^T K\} (\bar{\mathbf{x}}_e - \delta \mathbf{x}_e) = (\bar{A} - \delta A)^T (\bar{\mathbf{b}} - \delta \mathbf{b}) \quad (D-9)$$

$$(\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K) \bar{\mathbf{x}}_e = \bar{A}^T \bar{\mathbf{b}} \quad (D-10)$$

(D-9)式を展開して、(D-10)式を代入することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} (\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K) \delta \mathbf{x}_e &= -\delta A^T \bar{A} \bar{\mathbf{x}}_e - \bar{A}^T \delta A \bar{\mathbf{x}}_e + \bar{A}^T \delta A \delta \mathbf{x}_e + \delta A^T \delta A \bar{\mathbf{x}}_e \\ &\quad - \delta A^T \delta A \delta \mathbf{x}_e + \delta A^T \bar{\mathbf{b}} + \bar{A}^T \delta \mathbf{b} - \delta A^T \delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (D-11)$$

$$\begin{aligned} &= \delta A^T (\bar{\mathbf{b}} - \bar{A} \bar{\mathbf{x}}_e) - \bar{A}^T \delta A \bar{\mathbf{x}}_e + \bar{A}^T \delta A \delta \mathbf{x}_e + \delta A^T \delta A \bar{\mathbf{x}}_e \\ &\quad - \delta A^T \delta A \delta \mathbf{x}_e + \bar{A}^T \delta \mathbf{b} - \delta A^T \delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (D-12)$$

(D-12)式より、

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_e &= (\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \delta A^T (\bar{\mathbf{b}} - \bar{A} \bar{\mathbf{x}}_e) - (\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \bar{A}^T \delta A \bar{\mathbf{x}}_e \\ &\quad + (\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \bar{A}^T \delta A \delta \mathbf{x}_e + (\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \delta A^T \delta A \bar{\mathbf{x}}_e \\ &\quad - (\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \delta A^T \delta A \delta \mathbf{x}_e + (\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \bar{A}^T \delta \mathbf{b} \\ &\quad - (\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \delta A^T \delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (D-13)$$

が得られる。(D-13)式をノルムで評価することにより次式が得られる。

$$\|\delta \mathbf{x}_e\| \leq \|(\bar{A}_p^T \bar{A}_p)^{-1}\| \|\delta A\| \|\bar{\mathbf{b}} - \bar{A} \bar{\mathbf{x}}_e\| + \|(\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \bar{A}^T\| \|\delta A\| \|\bar{\mathbf{x}}_e\|$$

$$\begin{aligned}
& + \|(\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \bar{A}^T\| \|\delta A\| \|\delta \mathbf{x}_e\| + \|(\bar{A}_p^T \bar{A}_p)^{-1}\| \|\delta A\|^2 \|\bar{\mathbf{x}}_e\| \\
& + \|(\bar{A}_p^T \bar{A}_p)^{-1}\| \|\delta A\|^2 \|\delta \mathbf{x}_e\| + \|(\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \bar{A}^T\| \|\delta \mathbf{b}\| \\
& + \|(\bar{A}_p^T \bar{A}_p)^{-1}\| \|\delta A\| \|\delta \mathbf{b}\|
\end{aligned} \tag{D-14}$$

ただし,  $\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K = \bar{A}_p^T \bar{A}_p$  とした。(D-14) 式に (D-15) 式の不等号関係を適用して式を整理すると, (D-16) 式で表される  $E_{RLS}$  の計算式が導出される。

$$\|\bar{\mathbf{b}} - \bar{A} \mathbf{x}_e\| \leq \|\bar{\mathbf{b}} - \bar{A} \bar{\mathbf{x}}_e\| + \|\bar{A}\| \|\delta \mathbf{x}_e\| \tag{D-15}$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \leq E_{RLS} \tag{D-16}$$

$$\begin{aligned}
E_{RLS} &= \frac{F_0}{1 - F_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} - F_3 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} - F_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|\bar{A}\|^2}} \\
F_0 &= F_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + F_2 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} + F_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|\bar{A}\|^2} \\
&+ F_4 \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|} + F_5 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|} \\
F_1 &= \|(\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \bar{A}^T\| \|\bar{A}\| \\
\mathbf{r} &= (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) - \bar{A}(\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e) \\
F_2 &= \|(\bar{A}_p^T \bar{A}_p)^{-1}\| \|\bar{A}\| \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \\
F_3 &= \|(\bar{A}_p^T \bar{A}_p)^{-1}\| \|\bar{A}\|^2 \\
F_4 &= \|(\bar{A}^T \bar{A} + \gamma K^T K)^{-1} \bar{A}^T\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \\
F_5 &= \|(\bar{A}_p^T \bar{A}_p)^{-1}\| \|\bar{A}\| \frac{\|\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|}
\end{aligned}$$

また,  $\|\delta \mathbf{x}_e\| \ll \|\mathbf{x}_e\|$  の仮定の下に (D-15) 式の左辺を次のように近似すると (D-18) 式で表される  $E_{LS}^{app}$  の計算式が得られる。

$$\|\bar{\mathbf{b}} - \bar{A} \mathbf{x}_e\| \simeq \|\bar{\mathbf{b}} - \bar{A} \bar{\mathbf{x}}_e\| \tag{D-17}$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}_e\|}{\|\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}_e\|} \leq E_{RLS}^{app} \tag{D-18}$$

$$E_{RLS}^{app} = \frac{F_0}{1 - F_1 \frac{\|\delta A\|}{\|\bar{A}\|} - F_3 \frac{\|\delta A\|^2}{\|\bar{A}\|^2}}$$





## 付録E 軸対称三次元表面電荷法

本論文で使用した軸対称三次元表面電荷法の仕様は以下のとおりである。線要素の形状表現関数は三次 Bézier 曲線，線要素上の電荷密度表現関数は 5 自由度四次関数，境界条件式の表現方法は選点法とした。

数値電界計算精度を調査するために，真空中に存在する誘電体球（半径 1 cm）に  $z$  軸方向の一樣電界 1 kV/cm を印加した場合を対象として電界計算を行った。電界計算に使用した要素数，未知数の総数はそれぞれ 200, 801 とした。図 E-1 に電界計算を行った計算結果を示す。図 E-1(a) は  $z$  軸上の点において計算した電位と解析解に対する相対誤差を表し，図 E-1(b) は電界の計算値と電界の相対誤差を表す。電位誤差は  $z = 0 \sim 2$  cm の範囲において  $1.0 \times 10^{-5} \%$  以下であった。一方，電界誤差は境界表面である  $z = 1$  cm では  $3.06 \times 10^{-5} \%$  となるが，それ以外の点においては  $1.0 \times 10^{-5} \%$  以下の計算精度を達成している。

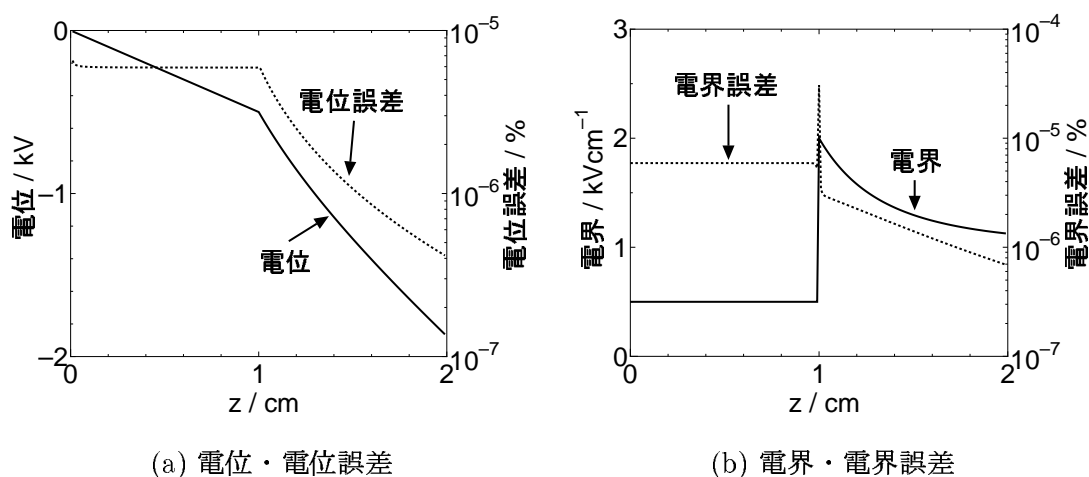


図 E-1: 一樣電界中の誘電体球の電界計算結果



## 付録F $\frac{\|\delta b\|}{\|b+\delta b\|}$ の近似値の算出方法

$E_{LS}$  や  $E_{RLS}$  の計算には  $\frac{\|\delta A\|}{\|A+\delta A\|}$  や  $\frac{\|\delta b\|}{\|b+\delta b\|}$  の値が必要となる。4.6 節で述べたように、 $\frac{\|\delta A\|}{\|A+\delta A\|}$  に関しては  $\delta A$  を  $A_d$  と  $A_\lambda$  の相違で近似し、 $\frac{\|\delta A\|}{\|A+\delta A\|} = \frac{\|A_\lambda - A_d\|}{\|A_d(\text{あるいは } A_\lambda)\|}$  として近似値を算出する。一方で、 $\frac{\|\delta b\|}{\|b+\delta b\|}$  に関しては、 $\delta b$  はガウス乱数で近似することにより、 $\frac{\|\delta b\|}{\|b+\delta b\|} = (\text{ガウス乱数の偏差}) / (\text{測定値の最大値})$  として近似値を計算することとしたが、 $\delta b$  をガウス乱数値で模擬する場合の偏差を適切に見積もる必要がある。ここでは、第 5 章で行ったブロック状絶縁物の帯電電荷測定の結果から、次のようにして偏差の推定を行った。

第 5 章において示した測定結果の中で、試料高さを変えて測定を行った 5.3.6 節の結果での  $x + \delta x$  と  $x_F$  の差のばらつきが他のケースと比較して小さかったため、 $t = 20$  mm, 30 mm, 40 mm とした場合の測定結果を偏差の算出に使用した。5.3.3 節で測定位置の影響を調べたときの  $h = 1$  mm や  $h = 3$  mm の結果においても  $x + \delta x$  と  $x_F$  の差は小さかったが、帯電電荷分布が一様でなく推定解の振動を観察しにくいいため、これらの結果は除外した。偏差の算出を次の手順で行った。

- (1) 推定帯電電荷分布  $x + \delta x$  とファラデーケージの測定値  $x_F$  との平均値を帯電電荷分布の真値と仮定する。本来の真値  $x$  と区別するために仮定した真値を  $x_{sml} = \frac{x + \delta x + x_F}{2}$  (添え字の sml は simulation の略) とする。また、この  $x_{sml}$  と推定解  $x + \delta x$  の差を  $\delta x_{msr}$  (添え字の msr : measurement の略) とし、 $\|\delta x_{msr}\|$  を計算する。
- (2) 直接法で計算した係数行列  $A_d$  と  $x_{sml}$  から測定値の模擬値  $b_{sml}$  を  $b_{sml} = A_d x_{sml}$  として計算する。
- (3) 測定誤差の模擬値  $\delta b_{sml}$  をガウス乱数を発生させて求める。ガウス乱数の平均は 0 pC, 偏差  $\sigma_{sml}$  は  $\sigma_{sml} = k \times (b_{sml} \text{ の最大値})$  とし、 $k = 1.0 \times 10^{-3}, 5.0 \times 10^{-3}, 1.0 \times 10^{-2}$  とした。
- (4) 3 通りの  $k$  に対して、 $b_{sml} + \delta b_{sml}$  と  $A_d$  から逆行列演算によって  $x_{sml} + \delta x_{sml}$  を求め、 $\|\delta x_{sml}\|$  を計算する。 $\|\delta x_{sml}\|$  と  $\|\delta x_{msr}\|$  を比較し、 $\delta b_{sml}$  による解

表 F-1:  $k$  に対する  $|\|\delta x_{sml}\| - \|\delta x_{msr}\||$

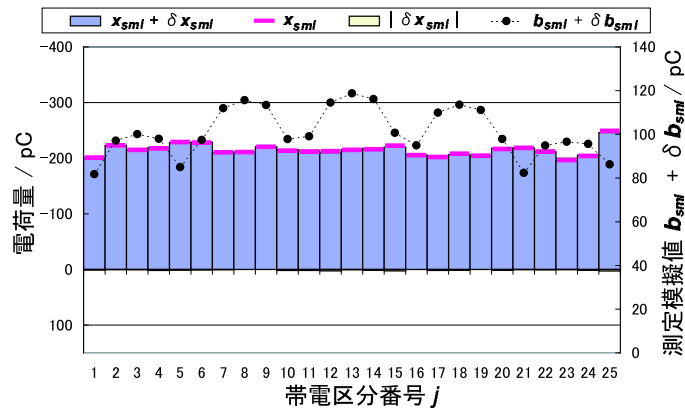
$k$	$ \ \delta x_{msr}\  - \ \delta x_{sml}\  $		
	$t = 20 \text{ mm}$	$t = 30 \text{ mm}$	$t = 40 \text{ mm}$
$1.0 \times 10^{-3}$	$4.35 \times 10$	$4.73 \times 10$	$2.92 \times 10$
$5.0 \times 10^{-3}$	$1.31 \times 10$	$1.65 \times 10$	4.66
$1.0 \times 10^{-2}$	$6.44 \times 10$	$6.17 \times 10$	$9.08 \times 10$

の変動  $\|\delta x_{sml}\|$  と測定結果との変動  $\|\delta x_{msr}\|$  が最も近いときの  $k$  を選択する。選択した  $k$  での  $\sigma_{sml}$  を  $\delta b$  をガウス乱数で模擬するときの偏差とする。

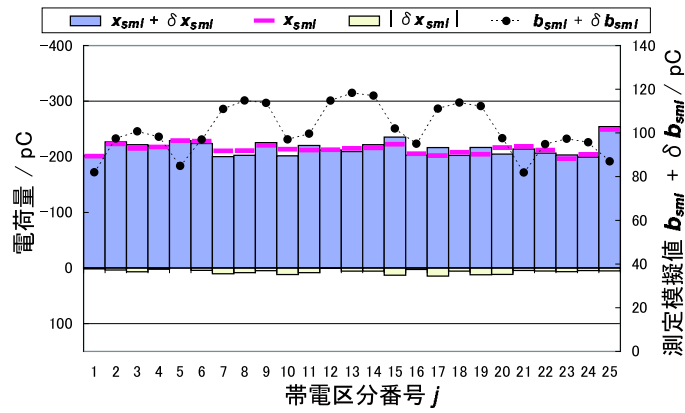
$t = 20 \text{ mm}$ ,  $30 \text{ mm}$ ,  $40 \text{ mm}$  に対して上記の計算を行った。それぞれの場合での各  $k$  に対する  $|\|\delta x_{sml}\| - \|\delta x_{msr}\||$  の計算結果を表 F-1 に示す。 $t = 20 \text{ mm}$ ,  $30 \text{ mm}$ ,  $40 \text{ mm}$  のいずれの場合においても,  $k = 5.0 \times 10^{-3}$  のときに  $|\|\delta x_{sml}\| - \|\delta x_{msr}\||$  は最小となった。 $t = 20 \text{ mm}$  の場合に  $k = 1.0 \times 10^{-3}$ ,  $5.0 \times 10^{-3}$ ,  $1.0 \times 10^{-2}$  としたときの数値シミュレーション結果を図 F-1(a) ~ (c) に示す。図では  $b_{sml} + \delta b_{sml}$  を黒丸,  $x_{sml}$  を横棒,  $x_{sml} + \delta x_{sml}$  を濃い色の棒グラフ,  $\delta x_{sml}$  の絶対値を薄い色の棒グラフで表示している。 $k = 1.0 \times 10^{-2}$  のときの  $x_{sml} + \delta x_{sml}$  の振動レベルは測定結果に比べて大きく, 乱数値の偏差が過大となっていることがわかる。 $k = 5.0 \times 10^{-3}$  のときの  $\sigma_{sml}$  は,  $t = 20 \text{ mm}$ ,  $30 \text{ mm}$ ,  $40 \text{ mm}$  の場合にそれぞれ  $5.94 \times 10^{-1}$ ,  $6.01 \times 10^{-1}$ ,  $6.62 \times 10^{-1}$  であり, これらの  $\sigma_{sml}$  の平均値  $6.19 \times 10^{-1}$  を  $\delta b$  をガウス乱数と仮定した場合の偏差として使用する。実際には,  $\delta x_{msr}$  は  $\delta A$ ,  $\delta b$  による推定値誤差や  $x_F$  の計測誤差を有しており,  $\delta b$  のみが原因となる変動ではない。したがって, ここで算出した値は実際の  $\delta b$  よりも大きいと予想され,  $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|}$  の算出に使用する値として妥当であると推測する。以上の結果から,  $E_{LS}$  あるいは  $E_{RLS}$  の計算において  $\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|}$  の近似値を次式によって算出することとする。

$$\frac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|} = \frac{6.19 \times 10^{-1}}{\text{測定値 } b + \delta b \text{ の最大値}} \quad (\text{F-1})$$

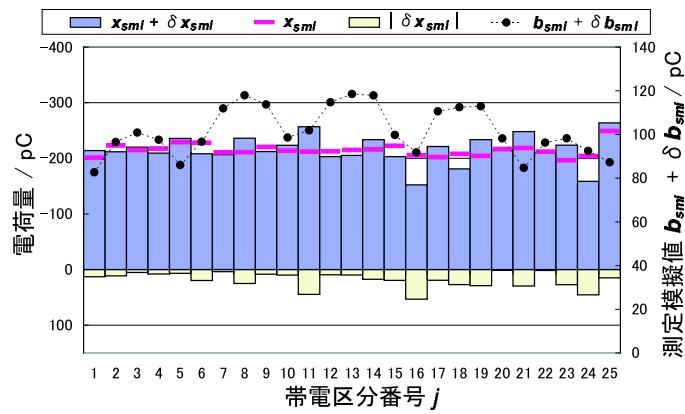
ここでは, 数値シミュレーションを用いて  $\delta b$  の偏差の値を算出したが, 測定によって  $\delta b$  を観察する方法も考えられる。このときの測定は次のようにして行う。静電プローブを電圧を印加した導体表面に近接させてセンサ誘起電荷量を測定する。さらに厚板試料表面を静電プローブで走査するときと同じ測定状況にするために, 導体表面を静電プローブで走査して誘起電荷量を測定する。この場合, 薄板試料の帯電電荷測定と同様に, 静電プローブを導体板に十分に近づけた場合は, 測定位置によらずセンサの誘起電荷量は一定値となるので, 測定値の変動から  $\delta b$  を見積もることができる [12, 15]。



(a)  $k = 1.0 \times 10^{-3}$  の場合



(b)  $k = 5.0 \times 10^{-3}$  の場合



(c)  $k = 1.0 \times 10^{-2}$  の場合

図 F-1:  $t = 20$  mm とした場合の  $x_{sml} + \delta x_{sml}$



## 参考文献

- [1] T. Takuma, M. Yashima and T. Kawamoto : "Principle of Surface Charge Measurement for Thick Insulating Specimens", IEEE Trans. Dielectrics EI, Vol. 5, No. 4, pp. 497–504, 1998
- [2] T. Maeno : "Three-dimensional PEA Charge Measurement System", IEEE Trans. Dielectrics EI, Vol. 8, No. 5, pp. 845–848, 2001
- [3] 北村 敏 : 「電気は目に見えないかー電気の視覚化原理の実証と応用の可能性ー」, 電気学会誌, Vol. 122, No. 5, pp. 307–310, 2002
- [4] M. Yashima, H. Fujinami and T. Takuma : "Measurement of Accumulated Charge on Dielectric Surfaces with an Electrostatic Probe", Gaseous Dielectrics V, pp. 242–247, 1987
- [5] 藤波 秀雄, 八島 政史, 宅間 董 : 「ガス絶縁スペーサの直流電界下での帯電機構」, 電中研報告 T86001, 1986
- [6] 藤波 秀雄, 八島 政史, 宅間 董, 河本 正 : 「ガス絶縁スペーサの帯電時絶縁特性」, 電中研報告 T86078, 1987
- [7] K. Nakanishi, A. Yoshioka, Y. Arahata and Y. Shibuya : "Surface Charging on Epoxy Spacer at DC Stress in Compressed SF<sub>6</sub> Gas", IEEE Trans. Power AS, Vol. 120, pp. 3919–3926, 1983
- [8] H. Ootera, K. Nakanishi, Y. Shibuya, Y. Arahata and T. Nitta : "Measurement of Charge Accumulation on Conical Spacer for 500 kV DC GIS", Gaseous Dielectrics IV, pp. 443–450, 1984
- [9] H. Ootera and K. Nakanishi : "Analytical Method for Evaluating Surface Charge Distribution on a Dielectric from Capacitive Probe Measurement-Application to a Cone-type Spacer in  $\pm$  500 kV DC-GIS", IEEE Trans. Power Delivery, Vol. 3, pp. 165–172, 1988



- [10] A. Pedersen : "On the Electrostatics of Probe Measurements of Surface Charge Densities", Gaseous Dielectrics V, pp. 235–240, 1987
- [11] T.O. Rerup, G.C. Crichton and I.W. McAllister : "Using the  $\lambda$ -function to Evaluate Probe Measurements of Charged Dielectric Surfaces", IEEE Trans. Dielectrics EI, Vol. 3, No. 6, pp. 770–777, 1996
- [12] 熊田 亜紀子, 岡部 成光 : 「直流電界下における円錐台モデルスペーサの帯電特性」, 電気学会放電・高電圧合研資, ED-03-89, HV-03-60, pp. 9–15, 2003
- [13] J. Kindersberger and A. Winter : "Surface charge density distributions on insulating plates under pressurized gases", 12th International Symposium on HV Engineering(ISH-2001), Vol. 2, pp. 343–346, 2001
- [14] A. Winter and J. Kindersberger : "Surface charge accumulation on insulating plates in SF<sub>6</sub> and the effect on DC and AC breakdown voltage of electrode arrangements", 2002 Annual Report - Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena, Cancun Mexico, 2002. IEEE Publication 02CH37372, pp. 757–761, 2002
- [15] D.C. Faircloth and N.L. Allen : "High Resolution Measurements of Surface Charge Densities on Insulator Surfaces", IEEE Trans. Dielectrics EI, Vol. 10, No. 2, pp. 285–290, 2003
- [16] V. Rokhlin : "Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory", J. Comput. Phys. Vol. 60, pp. 187–207, 1983
- [17] 濱田 昌司, 宅間 董 : 「擬似粒子高速多重極法の表面電荷法への適用」, 電気学会論文誌, Vol. 122-A, No. 2, pp. 178–185, 2002
- [18] 濱田 昌司, 宅間 董 : 「擬似粒子高速多重極法の境界要素法への適用」, 平成 14 年電気学会全国大会, 1-009, pp. 13–14, 2002
- [19] 河野 照哉, 宅間 董 : 「数値電界計算法」, コロナ社, 1980
- [20] 宅間 董 : 「電荷のまわりの電界計算法」, 静電気学会誌, Vol. 11, No. 5, pp. 381–388, 1987
- [21] 宅間 董 : 「電界計算の手ほどき」, 静電気学会誌, Vol. 16, No. 4, pp. 338–345, 1992
- [22] A.W. Appel : "An Efficient Program for Many-Body Simulation", SIAM J. Sci. Stat. Comput. Vol. 6, No. 1, pp. 85–103, 1985

- [23] O.C. Zienkiewicz : 「基礎工学におけるマトリックス有限要素法」, 培風館, 1975
- [24] 菊池 文雄 : 「有限要素法概説－理工学における基礎と応用－」, サイエンス社, 1980
- [25] G.E. Farin : 「NURBS－射影幾何学から実務まで－」, 共立出版, 2001
- [26] S. Hamada and T. Takuma : "Surface Charge Method Using a Triangular Bézier Patch with a Variable Interior Control Point", *Compumag* 2001, PA3-7, pp. I-82-I-83, 2001
- [27] 坪井 始, 高山 豊彦 : 「境界要素法のための曲面三角形要素作成法」, 電気学会静止器回転合研資, SA-97-15, RM-97-74, pp. 25-30, 1997
- [28] 濱田 昌司, 宅間 董 : 「Gregory パッチの表面電荷法への適用」, 平成 13 年電気学会全国大会, 1-017, pp. 20-21, 2001
- [29] H. Chiyokura and F. Kimura : "Design of Solids with Free-form Surfaces", *Computer Graphics*, Vol. 17, No. 3, p. 289-298, 1983
- [30] 濱田 昌司, 宅間 董 : 「一次要素三角形表面電荷法による複合誘電体系電界計算手法」, 電気学会論文誌, Vol. 120-A, No. 4, pp. 445-450, 2000
- [31] 濱田 昌司, 宅間 董 : 「電束本数連続条件に基づく誘電体系電界計算法」, 日本シミュレーション学会第 20 回計算電気・電子工学シンポジウム, pp. 13-16, 1999
- [32] A. Buchau, C.J. Huber, W. Rieger and W.M. Rucher : "Fast BEM Computations with the Adaptive Multilevel Fast Multipole Method", *IEEE Trans. MAG*, Vol. 36, No. 4, pp. 680-684, 2000
- [33] J. Makino : "Yet Another Fast Multipole Method without Multipoles – Pseudoparticle Multipole Method", *J. Comput. Phys.* Vol. 151, pp. 910-920, 1999
- [34] R.H. Hardin, N.J.A. Sloane : "McLaren's Improved Snub Cube and Other New Spherical Designs in Three Dimensions", *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 15, pp. 429-441, 1996
- [35] C.R. Anderson : "An Implementation of the Fast Multipole Method without Multipoles", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 13, No. 4, pp. 923-947, 1992
- [36] D.A. Dunavant : "High Degree Efficient Symmetrical Gaussian Quadrature Rules for the Triangle", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1129-1148, 1985

- [37] M.H. Gutknecht : "Variants of Bi-CGSTAB for Matrices with Complex Spectrum", SIAM J. Sci. Comput., Vol. 14, pp. 1020–1033, 1993
- [38] 長谷川 里美, 長谷川 秀彦, 藤野 清次 : 「反復法 Templates」, 朝倉書店, 1996
- [39] 濱田 昌司, 宅間 董 : 「高速多重極法のための密行列反復解法の効率的な前処理手法—係数行列の大域近似と反復前処理—」, 電気学会静止器回転機合研資, SA-02-15, pp. 19–26, 2002
- [40] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel : "Boundary Element Techniques — Theory and Applications in Engineering —", Springer-Verlag, Berlin, N.Y., 1984
- [41] K. Hayami, C.A. Brebbia : "A New Coordinate Transformation Method for Singular and Nearly Singular Integrals over General Curved Boundary Elements", Boundary Elements IX, Springer Verlag, pp. 375–399, 1987
- [42] G.R. Cowper : "Gaussian quadrature formulas for triangles", International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 7, pp. 405–408, 1973
- [43] 宅間 董, 河本 正 : 「三角形表面電荷法による三次元電界の計算」, 電中研報告 180029, 1980
- [44] 森口 繁一, 一松 信 : 「岩波 数学公式 I 微分積分・平面曲線」, 岩波書店, 1956
- [45] P. Connolly and O. Farish : "Surface Charge Measurement in Air and SF<sub>6</sub>", Gaseous Dielectrics IV, pp. 405–412, 1984
- [46] 八島 政史, 藤波 秀雄, 宅間 董 : 「静電プローブによる誘電体表面電荷量の測定法」, 電中研報告 185001, 1985
- [47] H. Specht : "Oberflächenladungen bei rotations-symmetrischen Isolierstoffkörpern", ETZ-A, Vol. 97, pp. 474–476, 1976
- [48] 仲西 幸一郎 : 「DC-GIS におけるスペーサ帯電」, 静電気学会誌, Vol. 19, No. 2, pp. 112–118, 1995
- [49] C.E. Sudhakar and K.D. Srivastava : "Electric Field Computation from Probe Measurements of Charge on Spacers Subjected to Impulse Voltage", 5th International Symposium on HV Engineering (ISH-1987), Braunschweig, Germany, paper 33.14, 1987

- [50] 宅間 董, 八島 政史, 河本 正 : 「絶縁物表面の帯電電荷測定原理」, 静電気学会誌, Vol. 22, No. 2, pp. 102–109, 1998
- [51] S. Hamada and T. Takuma : "Analysis of Measuring Methods of Accumulated Surface Charge (1)", 電気学会論文誌, Vol. 120–B, No. 1, pp. 69–74, 2000
- [52] W.R. Smythe : "Static and Dynamic Electricity", McGraw-Hill, New York, pp. 53–56, 1939
- [53] 宅間 董 : 「電界パノラマ—電界をよりよく理解するために—」, 電気学会, 2003
- [54] 藤原 修, 近藤 丈詞, 加藤 一夫, 阿座上 考 : 「静電気分布の可視化測定の一方法」, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J72–C–II, No. 2, pp. 166–173, 1989
- [55] C.L. Lawson and R.J. Hanson : "Solving Least Squares Problems", SIAM, 1974
- [56] 武者 利光, 岡本 良夫 : 「逆問題とその解き方」, オーム社, 1992
- [57] 久保 司郎 : 「逆問題」培風館, 1992
- [58] W. メンケ : 「離散インバース理論—逆問題とデータ解析—」, 古今書院, 1997
- [59] 松岡 俊文 : 「インバージョンにおける数値解法—最小二乗法を中心にして—」, 物理探査, Vol. 39, No. 6, pp. 340–356, 1986
- [60] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin : "Solutions of Ill-Posed Problems", John Wiley & Sons, 1977
- [61] P.C. Hansen : "Analysis of discrete ill-posed problems by means of the *L*-curve", SIAM Review, Vol. 34 No. 4, pp. 561–580, 1992
- [62] 谷口 慶治 : 「画像処理工学—基礎編—」, 共立出版, 1996
- [63] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery : 「ニューメリカルレシピ・イン・シー—C 言語による数値計算のレシピ—」, 技術評論社, 1993
- [64] C.C. Paige and M.A. Saunders : "An Algorithm for Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares", ACM Trans. on Mathematical Software, Vol. 8, No. 1, pp. 43–71, 1982
- [65] C.C. Paige and M.A. Saunders : "Sparse Linear Equations and Least Squares Problems", ACM Trans. on Mathematical Software, Vol. 8, No. 2, pp. 195–209, 1982

- [66] T. Takuma and S. Hamada : "Analysis of Measuring Methods for Accumulated Surface Charge", ELEKTRIE, Vol. 53, pp. 397–400, 1999

# 発表論文リスト

## 学術論文

1. 立松 明芳, 濱田 昌司, 宅間 董 : 「電荷密度を二次式とした三角形表面電荷による電位・電界の解析式」, 電気学会論文誌, Vol. 120-A, No. 8/9, pp. 853-854, 2000
2. 立松 明芳, 濱田 昌司, 宅間 董 : 「電荷密度を高次式とした三角形表面電荷の電位・電界の解析式」, 電気学会論文誌, Vol. 121-A, No. 4, pp. 378-384, 2001  
(英訳 Akiyoshi Tatematsu, Shoji Hamada and Tadasu Takuma : "Analytical Expressions of Potential and Electric Field Generated by a Triangular Surface Charge with a High-Order Charge Density Distribution", Electrical Engineering in Japan, Vol. 139, No. 3, pp. 9-17, 2002 (Translated from Denki Gakkai Ronbunshi, Vol. 121-A, No. 4, pp. 378-384, 2001))
3. Akiyoshi Tatematsu, Shoji Hamada, Tadasu Takuma and Hiroshi Morii : "A Study on the Accuracy of Surface Charge Measurement", IEEE Trans. Dielectrics and Electrical Insulation, Vol. 9, No. 3, pp. 406-415, 2002
4. 立松 明芳, 青木 康二郎, 濱田 昌司, 植村 卓司, 宅間 董 : 「静電プローブによる固体絶縁物の帯電電荷測定」, 電気学会論文誌, Vol. 123-A, No. 10, pp. 1051-1057, 2003

## 口頭発表論文

1. Akiyoshi Tatematsu, Shoji Hamada, Tadasu Takuma : "Calculation of the Coefficient Matrix between Surface Charge and Probe Response for Surface Charge Measurement", 10th Asian Conference on Electrical Discharge (ACED-2000), pp. 379-382, 2000
2. Akiyoshi Tatematsu, Shoji Hamada, Tadasu Takuma and Hiroshi Morii : "Analysis of Measurement Accuracy of an Accumulated Charge Distribution on High Voltage Supports", 12th International Symposium on High Voltage Engineering

- (ISH-2001), Vol. 2, pp. 405–408, 2001
3. Akiyoshi Tatematsu, Shoji Hamada and Tadasu Takuma : "Analysis of Accuracy in Measuring Accumulated Surface Charge", 2001 J-K Joint Symposium on Electrical Discharge and High Voltage Engineering, pp. 41–44, 2001
  4. Akiyoshi Tatematsu, Kojiro Aoki, Shoji Hamada and Tadasu Takuma : "Measurement of Accumulated Surface Charge with an Electrostatic Probe", 2002 Joint Conference of ACED & K-J Symposium on Electrical Discharge and High Voltage Engineering, Vol. 2, pp. 668–671, 2002
  5. Akiyoshi Tatematsu, Shoji Hamada and Tadasu Takuma : "High-resolution Measurement of Surface Charge for High Voltage Insulating Supports", 13th International Symposium on High Voltage Engineering (ISH-2003), p. 45, 2003
  6. 立松 明芳, 宅間 董, 濱田 昌司 : 「帯電電荷測定法の解析」, 放電研究, No. 162, pp. 55–58, 1999
  7. 宅間 董, 濱田 昌司, 北野 正雄, 立松 明芳 : 「帯電電荷測定法の解析 (2)」, 第 31 回電気電子絶縁材料システムシンポジウム予稿集, pp. 137–140, 1999
  8. 立松 明芳, 濱田 昌司, 宅間 董 : 「帯電電荷測定法の解析 (3) — 一次要素表面電荷法の適用」, 平成 12 年電気学会全国大会, No. 1-206, pp. 257–258, 2000
  9. 立松 明芳, 中村 知数, 濱田 昌司, 宅間 董 : 「帯電電荷測定法の解析 (4) — 実用配置での検討」, 平成 13 年電気学会全国大会, No. 1-66, pp. 81–82, 2001
  10. 立松 明芳, 濱田 昌司, 宅間 董 : 「電荷密度を三次式とした三角形表面電荷の電位・電界の解析式」, 平成 13 年電気学会全国大会, No. 1-18, pp. 22–23, 2001
  11. 立松 明芳, 濱田 昌司, 宅間 董 : 「固体絶縁物帯電電荷の測定法の解析」, 第 159 回電気材料技術懇談会 (計測技術), 2001
  12. 立松 明芳, 濱田 昌司, 宅間 董 : 「高次四角形表面電荷の電位・電界の解析式と表面電荷法への適用」, 電気学会静止器・回転機合同研究会, SA-01-1, RM-01-69, pp. 1–8, 2001
  13. 濱田 昌司, 立松 明芳, 宅間 董 : 「支持絶縁物の帯電測定」, 放電学会誌, Vol. 44, No. 1-2, pp. 8–14, 2001
  14. 立松 明芳, 濱田 昌司, 宅間 董 : 「帯電電荷測定法の解析 (5)」, 平成 14 年電気学会全国大会, No. 1-039, pp. 49–50, 2002
  15. 立松 明芳, 濱田 昌司 : 「帯電電荷測定法の解析 (6)」, 平成 14 年電気関係学会関西支部連合大会, G1-39, 2002
  16. 青木 康二郎, 立松 明芳, 濱田 昌司, 宅間 董 : 「静電プローブによる固体絶縁物の帯電電荷測定」, 平成 14 年電気学会基礎・材料・共通部門大会, pp. 326–331, 2002

17. 立松 明芳, 濱田 昌司 : 「帯電電荷測定法の解析 (7)」, 平成 15 年電気学会全国大会, No. 1-072, pp. 97-98, 2003
18. 立松 明芳, 青木 康二郎, 濱田 昌司 : 「帯電電荷測定法の解析 (8)」, 平成 15 年電気学会基礎・材料・共通部門大会, p. 180, 2003
19. 立松 明芳, 濱田 昌司, 宅間 董 : 「帯電電荷測定法の解析 (9)」, 電気学会放電・開閉保護・高電圧合同研究会, ED-03-183, SP-03-105, HV-03-98, pp. 163-175, 2003