氏名	柘植直樹（つげなおき）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	理博第2729号
学位授与の日付	平成16年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	圧縮性オイラー方程式の球対称解に関する研究

論文調査委員　（主査）教授 西田孝明　教授 井川 満　教授 三輪哲二

論文内容の要旨

高速気流においては流速の大きいところほど擾乱が速く伝播し，超音速では不連続な衝撃波が発生する。特に空中の一点で火薬等が爆発したときに球面衝撃波が発生し，球面が拡大しながら四方に伝播する。この現象を数学的に記述するのは圧縮性非粘性気体の方程式の球対称な場合である。その簡単な等エントロピーモデルの球対称運動は，動径方向の変数を $0 \leq x$ として密度 $\rho(x,t)$ 及び運動量 $m(x,t)$ について，極座標で書くと

$$\begin{cases} \partial\rho/\partial t + \partial m/\partial x = -\dfrac{2}{x}m, \\ \partial m/\partial t + \partial\left(\dfrac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right)/\partial x = -\dfrac{2}{x}\dfrac{m^2}{\rho}, \quad p(\rho) = \rho^\gamma/\gamma \end{cases} \tag{1}$$

となる。ここで $1 \leq \gamma \leq 5/3$ は比熱比である。これに初期値，境界値

$$(\rho, m)|_{t=0} = (\rho_0(x), m_0(x)), \quad m|_{x=0} = 0$$

を与えて初期値・境界値問題を考えている。

(1)のような非線形双曲型の方程式の特徴として，滑らかな初期値を与えたとしても一般には不連続解（衝撃波）が現れる。そのため一般的な解を得るため超関数の範囲まで解の概念を拡大し，弱解として解析されねばならない。さらにこの球対称問題の困難な点は，方程式が原点に特異点を持つことである。そのため $\gamma = 1$ の場合は時間大域解として牧野-溝端-鵜飼の結果があり，$1 < \gamma \leq 5/3$ の場合は時間局所解として牧野-竹野の結果があるが，いずれも原点は除かれている。原点を込めた結果には唯一 Chen, G. -Q. の時間大域解の結果があるが，初期値に

$$0 \leq \{\rho_0(x)\}^\theta/\theta \leq m_0(x)/\rho_0(x) \leq C \tag{2}$$

という制限がついている。ここで $\theta = \dfrac{\gamma - 1}{2}$，$\gamma > 1$ である。

本論文では $1 < \gamma \leq 5/3$ の場合に，初期値が有界可測関数である $\tilde{\rho}_0(x)$，$\tilde{m}_0(x)$ を用いて，次の形

$$\rho_0(x) = \tilde{\rho}_0(x) x^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad m_0(x) = \tilde{m}_0(x) x^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

をしている時に，時間局所的であるが不連続性を含む弱解を得ている。Chenの結果では(2)からわかる通り初期速度として負のものを与えることができなかったが，それを可能にしている。本論文の本質的なアイデアのひとつは，次の変数変換である。

$$\rho = \tilde{\rho} x^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad m = \tilde{m} x^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \quad \xi = \log x \tag{3}$$

この変数変換によりマッハ数は不変であり，方程式の微分項の保存形が保たれるとともに原点の特異性が消える。これらの

事は不連続解を構成する際に本質的に用いられている。本論文ではGodunov差分法を非斉次項にあわせて修正して近似解を構成するが，Riemann問題を解く時に定常解を用いる。その定常解を音速近傍とそこから離れた所とに分けた精密な評価を行って，近似解の一様有界評価を出して，収束証明にはcompensated compactness理論を応用している。

本論文最後に，原点は除くが $1<\gamma\leq 5/3$ の場合に時間大域解を得たというChen-Glimmの結果について，その結果の証明に欠陥があることを指摘している。

論文審査の結果の要旨

気体の運動など多くの物理法則は，保存則の形で書かれる非線形双曲型偏微分方程式系の問題に定式化されるが，非線形双曲型偏微分方程式の初期値問題では，一般に連続で滑らかな解は，時間大域的には存在しない。従って時間大域的な解析には，不連続解（衝撃波）を含む弱解の理論が必要になる。そのために連続とは限らない弱解の構成，弱解の一意性の問題などの困難が現れる。初期値問題で空間一次元の場合には，不連続解（衝撃波）を含む数学理論が近年整ってきたが，空間3次元の場合には，一般理論は無いに等しい。しかしながら例えば，空中の一点での爆発などにより球面衝撃波が生じうる。それに関連した研究は，第二次世界大戦の頃からなされ，相似性を持った特殊解を常微分方程式を解く事によって求めている。(Courant-Friendrichsの本“Supersonic Flow and Shock Waves”)

本論文では，非粘性気体運動（Euler方程式）の空間3次元の球対称性を持つ初期値問題の不連続性を含む解についての研究に取組んでいる。球対称な弱解を考えれば，空間変数を一次元に落せるため，最近解析的研究の対象と成ってきたが，球対称の仮定の下では，方程式に原点が特異性として現れる。そのために原点を除外した研究が，現在までの研究結果であった。即ち，既知の理論は，すべて原点を中心とするある球の外部の領域での球対称な弱解の構成であった。これに対する唯一の例外に当たるのが，Chen, G. -Q. の大域的弱解の存在定理であるが，その初期条件には強い制限がある。

こうした原点の特異性の研究の取り組み結果が，主論文である。その第一段階として，等温気体の方程式について，原点を含んだ形の球対称な特殊解を見出し，その近傍での初期値問題の弱解の構成に成功した点は，独創的である。

続いて，球対称なbarotropic気体の方程式の場合には巧妙な変数変換を発見して，方程式は非線形のままであるが，係数に独立変数依存性を消去できる，即ち，特異性も消去できる解のクラスを見出し，そのクラスの中での有界可測の関数空間での初期値問題の弱解の構成に成功した。Chenの初期値では，速度が一方的に外向きに早く流れ出ると云う制限がついていたが，本論文では，速度に負（内向き）の初期値も許すことができる。また，この変数の重み（weighto）は，上記の相似性を持つ特殊解の重みとも同じものである。構成には，Godunovの差分法を非斉次項があるために修正し，各格子間では，定常解を張り合わせて，近似解を作り，その一様有界評価を得ることにより，compensated compactnessの理論を適用している。定常解もそれが音速の近傍にあるかそうでないかにより性格・取り扱いが異なり，それぞれの精確な評価が必要であった。これは，原点を含んだ場合の初めての価値の高い研究結果である。

こうして，本論文は，博士（理学）の学位論文として価値あるものと認められる。論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。