氏　　　　名	小　林　健　太（こ　ばやし　けん　た）
学位(専攻分野)	博　　士（理　　学）
学 位 記 番 号	理　博　第2575号
学位授与の日付	平 成 15 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	A numerical verification method for the global uniqueness of a positive solution for Nekrasov's equation （Nekrasov 方程式の正値解の大域的な一意性に対する数値的検証法）
論文調査委員	（主　査） 教 授 岡 本　　久　　教 授 河 合 隆 裕　　教 授 森　　重 文

論　文　内　容　の　要　旨

Nekrasov が1921年に発見した非線形積分方程式は定常進行波の厳密解を記述することができることで著名である。この積分方程式の解の構造は，数学的にも数値的にも詳しく調べられてきたものであり，解の全体像は概ねわかっているといってよい。しかし，その厳密な証明となると難しい場合が多く，様々な未解決問題が横たわっている。その中に「正値解の一意性の問題」がある。

同方程式はパラメータ μ を含む方程式であり，未知関数は区間［0，π］で定義された実数値関数 u である。区間［0，π］で至る所正になる解を正値解と呼ぶ。これまでの研究によって $3<\mu<\infty$ のときに正値解が存在することが証明されている。しかし，正値解がひとつの μ についてただひとつしかないのかどうか，という疑問に厳密に答えることはできていなかった。40年ほどの間，未解決のままになっていたのである。様々な数値実験によって，ただ一つしかないであろうと予想はされてきた。しかし，その証明はこれまで部分的にすら得られていなかったのである。

小林健太君はこの困難な問題を精度保証計算と精緻な不等式の組み合わせによって部分的に解決した。精度保証計算は計算機内で行われる不動小数点計算の丸め誤差の上界を厳密に保証する形で提供できるので，最近は様々な応用がなされている。しかし，誤差がたまりすぎると，厳密な上界があるといってもそれが大きすぎるために実質上ものの役に立たない結果に陥ってしまうことも多い。数学的に正しさが保証されている不等式などをうまく併用しないと，精度保証単独では意味のある結果が出てこないのである。小林君は正値解の厳密な上界と下界をフーリエ級数をうまく処理することによって導き，これを使って，$5<\mu<30$ のときに解は一意である，という結果を厳密に証明することができた。また，$\mu \leqq 3$ のときは正値解は存在しないという定理も証明した。これも新しい結果であると思われる。

μ が3に近い場合には精度保証計算を使った証明は（収束が遅くなるために）現実的ではなくなる。そこで，彼はフーリエ級数に関する不等式のみを使って手計算のみによる証明を $\mu<3.009$ の場合に与えている。さらに，$3.009<\mu<3.0092$ の場合にも精度保証による証明を与えた。$3.0092<\mu<5$ の場合にも同じ証明が使えるであろうが，計算時間の関係で証明までには至っていない。しかし，残された場合でも同じアイデアが使えることは明らかであり，$\mu<100$ の程度であれば一意性の証明は可能であろうと楽観的に考えることができるだけの内容が論文の中に見える。

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

Nekrsov の方程式の解の構造を知ることは実用上の意義も大きくしかも数学的な興味も大きい。その研究の歴史を振り返ってみると，様々な予想がその後の研究によって覆されてきていることがわかる。一筋縄ではゆかない，言い換えれば挑戦のやりがいのある，問題の宝庫である。この方程式は抽象的には $u=F(\mu, u)$ という形に書くことができる。ここで u は未知関数で，ある関数空間 X に属する。また，μ はパラメータである。もし $F(\mu, \cdot)$ が縮小写像であることが証明できたら解の存在と一意性が証明できたことになる。しかし，そうなっているかどうかは微妙な問題で，決着がついているわ

けではない。解の存在証明は縮小写像を使って示すのではなく，位相幾何学的に証明される。従って，一意性の証明には別の戦略が必要であろうと予想できる。

このような考察に基づき，小林君は，次のようなスキームを立てた。第一に，解の適当な上界と下界を導き，それに反復法を適用して次々と上界と下界を改良してゆく：次に，これを数十回繰り返すことによって関数空間内の，ある狭い範囲の中にしか解はありえないことを証明する：最後にその狭い範囲の中では写像は縮小写像であることを示す。

この証明スキームのすべてのステップにおいて数値計算を用い，その精度を保証するために，必要なプログラムを独自に作成した。出来合いのプログラムでは時間がかかりすぎる等の無駄が多いためである。そうして最終的には $5<\mu<30$ において正値解がひとつしかないことを証明することに成功した。その証明を詳しく読むと，この一意性の問題がどうしてこれほどまでに難しかったのかがよくわかる。本論文では小林君のプログラマーとしての能力が遺憾なく発揮されている。また，解析的な上界と下界を出す際に見せたフーリエ級数の処理の仕方は彼の解析的な能力の高さを如実に示している。

また，本論文の結果もさることながら，そのアイデアの重要性も特筆されるべきものである。精度保証計算を数学的な定理の証明に用いること自体は新しいことではない。しかし，精度保証の応用の範囲は誤差の累積に依存するために，必ずしも目新しい結果を引き出すことに成功しているわけではない。しかるに，本論文で示しているように，反復法で解の範囲を狭めてしまえば，様々な解の一意性や存在が容易に証明できる可能性が高い。このアイデアは他の非線形問題にも応用できるであろう。

以上の理由により，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。