氏　　　名　田　中　順　子（たなか　じゅんこ）

学位(専攻分野)　博　士（理　学）

学位記番号　理　博　第 2383 号

学位授与の日付　平成 13 年 7 月 23 日

学位授与の要件　学位規則第 4 条第 1 項該当

研究科・専攻　理学研究科数学専攻

学位論文題目　Structure of tensor products of the defining representations of Lie algebra W_1 of Cartan type
（カルタン型リー環 W_1 の表現のテンソル積の構造

論文調査委員　（主査）教授 河野　明　助教授 野村隆昭　助教授 梅田　亨

論　文　内　容　の　要　旨

W_n を C^n 上の多項式係数の正則ベクトル場のなすリー環とする。これは，Cartan 型リー環と呼ばれる無限次元単純リー環の 4 系列のうち，general series と呼ばれる最も基本的な系列である。他の 3 系列は，W_n の部分環であるが，special series S_n, Hamiltonian series H_n, contact seires K_n 呼ばれるものである。これらは自然な Z-次数付けを持つ。この次数付けに関して次数が 0 の元全体 $W_n(0)$ は，C^n 上に働く $gl_n(C)$ と同型になる。他の 3 系列では，$sl_n(C)$，$sp_n(C)$，$so_n(C)$，である。Cartan 型リー環の既約表現は，1970年代に A. Rudakv, I. Kostrikin によって研究されたが，そこでは，上記の次数 0 の元全体のなす有限次元単純リー環の表現論が非常に有効に使われている。ただ例外的に，W_1 の場合には，$gl_1(C)\cong C$ は，ほとんど役には立たない。

1990年代になって，Cartan 型リー環の表現について新しい方向の研究が，西山享助教授（京大総人）により始められた。例えば，W_n は多項式環 $S(C^n)$ 上に微分作用素として自然に働くが，これを W_n の defining reprisentation と呼び，(ϕ, P) 書く（$P=S(C^n)$）。これは，1 次元の不変部分空間 C を持つが，商表現 P/C は既約である。(ϕ, P) の m 回テンソル積 $(\otimes^m\phi, \otimes^m P)$ は非常に興味ある自然な表現である。これを研究する方向としては，次の 2 つが挙げられる。

(1) $\otimes^m\phi$ の commutant algebra

$(\otimes^m\phi)(W_n)':=$

$\{T\,;\,\otimes^m P$ 上の線形作用素，$T\cdot(\otimes^m\phi)(X)=(\otimes^m\phi)(X)\cdot T(\forall X\in W_n)\}$

を決定すること（これは m 次対称群 G_m を含む)。そしてその表現を調べる。さらに，bicommutant algebra $(\otimes^m\phi)(W_n)''$ を決定すること。

(2) 表現 $\otimes^m\phi$ は半単純（既約表現の直和）ではないので，表現の構造を(1)の結果を用いて，新しい概念や用語を定義しながらうまく書き下すこと。

西山氏は，$m\leq n$ という条件の下で，これらの問題に解答を与えた。

申請者の主結果は，上で困難とされて残されていた場合 $m>n$ に挑戦して，$n=1$，$m=2>n$，の場合ではあるが，完全な結果を与えたことである。ここには，$m\leq n$ の場合にはない新たな現象が現れている。

より詳しく述べると，W_1 について，$m=2$ の場合に，表現 $\otimes^m\phi$ の構造を完全に決定した。まず定義を導入する。位数 -1 の元 $w_{-1}=\dfrac{\partial}{\partial_z}\in W_1$ に対して，$w_{-1}v=0$ となる W_1 の表現空間のウェイトベクトル $v\neq 0$ を最低ウェイトベクトルという。

(イ) 最低ウェイトをもつ既約表現を使いやすい形に記述した。

(ロ) テンソル積空間 $\otimes^2 P$ における最低ウェイトベクトルが与えられたとき，それから生成される不変部分空間の各ウェイトベクトル空間の構造を決めるための補題（Lemma 4.1）を与えた。この補題によってはじめて各ウェイトベクトル空間の次元が計算できて，空間 $\otimes^2 P$ の不変部分空間の重層的構造を解析できることになった。

(ハ) (ロ)の結果を用いて，隣り合うウェイトを持つウェイトベクトルの空間相互の関係を決定した。それにより，テンソル積空間 $\otimes^2 P$ の Jordan-Höder 組成列を与えることが出来た。また，その商組成列を，(イ)を用いて具体的に記述した。

申請者のこれらの結果は，より一般の場合の研究に進むに当たっての，具体的なモデルを与えている。

論文審査の結果の要旨

主論文で取り扱っている研究の方向は，非常に広くて大きい。まず，Z-graded で多項式増大度の単純リー環は，(1)有限次元単純リー環，(2)それらの loop algebras, (3) Witt algebras, (4) Cartan 型リー環の 4 種に限られる。これらのリー環の表現論はそれぞれに研究されているが，申請者は(4)の型のリー環の表現を研究した。既約表現の理論はそれなりに完成しているが，一般の表現は半単純（既約表現の直和）ではないので，既約表現の研究だけでは事態は明らかになったとは言い難い。そこで，申請者は，興味ある可約表現を選び，その構造を研究する方向に進んでいる。

より具体的には，「基本的な表現をとって，そのテンソル積表現の構造を研究する」という研究課題を立てている。主論文では，とくに，W_n の defining representation（ψ, P）をとり，その m 回テンソル積（$\otimes^m\psi$, $\otimes^m P$）の構造を研究している。問題として掲げると，次の 2 つにまとめられる。

問題 1．$\otimes^m\psi$ の commutant algebra $(\otimes^m\psi)(W_n)'$ を決定すること（これは m 次対称群 G_m を含む)。そしてその表現を調べる。さらに，bicommutant algebra $(\otimes^m\psi)(W_n)''$ を決定すること。

問題 2．表親 $\otimes^m\psi$ は半単純（既約表現の直和）ではないので，表現の構造を(1)の結果を用いて，新しい概念や用語を定義しながらうまく書き下すこと。

上の問題 1，問題 2 は，有限次元古典型リー環（とくに，$\mathrm{gl}_n(\mathrm{C})$）の表現論において，Shur-Weyl duality と呼ばれている結果訊無限次元リー環 W_n の場合に拡張しようというものである。

Weyl 達の古典的な場合においては，問題 1 については，commutant algebra は，ちょうど m 次対称群 G_m により生成され，かつ，bicommutant は表現作用素全体で生成される。これにより，generallinear algebrag $\mathrm{gl}_n(\mathrm{C})$（または同値なことであるが，一般線形群 $GL(n, \mathrm{C})$）の表現論と m 次対称群 G_m の表現論がうまく双対の関係になっていることが示された。

この場合の問題 2 については，Young diagram, Young tableau, Young 対称子，の理論が発明され，直積群 $GL(n, \mathrm{C})\times G_m$ の表現を考えることによって，これら 2 種の群の表現論が同じ用語で記述され得ることになった。

西山享氏は，$m\leq n$ という条件の下で，Cartan 型リー環 W_n について，問題 1，問題 2 の研究を行ったが，すでに，$n=m=2$ という場合において，有限次元単純リー環の表現論とは全く違った状況が現れている。

主論文における主要な結果をまとめると次のようである。

(イ) 最低ウェイトをもつ既約表現を使いやすい形に記述した。

(ロ) テンソル積空間 $\otimes^2 P$ における最低ウェイトベクトルが与えられたとき，それから生成される不変部分空間の各ウェイトベクトル空間の構造を決めるための補題を与えた。この補題によってはじめて各ウェイトベクトル空間の次元が計算できて，空間 $\otimes^2 P$ の不変部分空間の重層的構造を解析できることになった。

(ハ) (ロ)の結果を用いて，隣り合うウェイトを持つウェイトベクトルの空間相互の関係を決定した。それにより，テンソル積空間 $\otimes^2 P$ の Jordan-Hölder 組成列を与えることが出来た。また，その商組成列を，(イ)を用いて具体的に記述した。

主論文におけるこれらの研究成果，とくに(ロ)，(ハ)は，独創的なものであって，一見漠として捉えどころの無そうな状況を非常にうまく記述した。その際にやはり(ロ)の補題（主論文 Lemma 4.1）の発見がキイポイントであった。

さらに，この研究結果は，今後の発展が望まれる表現論の研究分野に，具体的で有用なモデルを提供した，という意味でも重要である。

また，申請者は，参考論文においては，超リー代数の表現論を研究したが，その方向の研究もさらなる発展が期待される。

以上の評価により申請者の研究結果は学位の称号に値すると認められる。