タイプ理論の起源と発展

池田真治、伊藤遼、久木田水生*

序

タイプ理論はバートランド・ラッセルによって考案された論理体系であり、現在では計算機科学、数学、言語学などの分野においても広く応用され、研究されている理論である。しかしその影響の幅広さ・大きさを考えると、哲学においてタイプ理論の研究が十分に行われているとは言い難い。そこで本サーベイは、タイプ理論の起源と発展の過程を概観することによって、その哲学的重要性を研究するための土台を提供することを目指したい。

第 1 節ではパラドクスの発見からタイプ理論が誕生するまでのラッセルの試みを概観する。第 2 節では分岐タイプ理論に対するゲーデルらの批判を取り上げ、そのことによってラッセルと批判者たちの哲学的立場の違いを明らかにする。第 3 節ではタイプ理論がラッセル以後どのように発展し、応用されているかを概観する。

1.　パラドクスの発見とタイプ理論

タイプ理論は、論理主義プログラムの実現への歩みのなかで、ラッセル・パラドクスをブロックする論理体系としてラッセルにより考案された。この節では、タイプ理論が生まれた背景と最初のタイプ理論である「置き換え理論」を説明する。

1.1　ラッセル・パラドクス

論理主義とは、フレーゲやラッセルらによって提唱された、数学は論理学に還元できるとする立場である。フレーゲは、素朴集合論と同等の強さを持つ論理体系「概念記法」を構築し、その体系から算術の基本的な定理が導出できることを示した。ところが、1901 年ラッセルは、命題関数 $x \notin x$ が定める集合を考えることで素朴集合論に矛盾が導かれることを発見する(1)。ラッセル・パラドクスである。

素朴集合論では、いかなる命題関数 $F(x)$ も集合 $\{x \mid F(x)\}$ を定め、そしてその集合 $\{x \mid F(x)\}$ について“$w \in \{x \mid F(x)\} \iff F(w)$”が成り立つとされる。いわゆる包括原理である。これにより、命題関数 $x \notin x$ を考えると、それが定める集合 $R = \{x \mid x \notin x\}$ について“$w \in R \iff w \notin w$”が成り立つことになる。この w として R 自身をとれば、ただちに、パラドクシカルな双条件“$R \in R \iff R \notin R$”が導かれる。そして、この双条件からは、命題論理のいくつかの規則を用いるだけで矛盾が導かれる。こうして導かれるラッセル・パラドクスは、フレーゲの概念記法を破綻させただけでなく、

ラッセルにとっても大きな課題となった。

こうしたパラドクスをブロックするために考えられたのが「タイプ理論（theory of types）」である。一般に、タイプとは、関数やその代入項（argument）となる対象に対して割り当てられる符号のことである。そして、関数が代入項にできるのはその関数のタイプと「適合」したタイプを持つ対象のみ、という制約が置かれる。タイプが「適合」する条件は、さまざまな仕方で定められる。

最も一般的なタイプの区分は、個体、個体についての性質、性質についての性質、性質についての性質、という階層に対応する形で与えられる。例えば、個体についての性質にあたるのはタイプ 1 の命題関数であり、それはタイプ 0 の対象のみを代入項とする。このように、タイプ n の命題関数と「適合」するタイプは $n-1$ のそれであるという制約を置き、さらに、すべての集合は何らかの命題関数から定められると考えるならば、$x \in y$ なる表現は、x が y を定める命題関数の代入項になることを意味する。そして、このとき、$x \notin x$ なる表現はこの制約を満たさない。つまり、こうしたタイプの制約のもとでは、$x \notin x$ なる命題関数がそもそも構成できなくなり、ラッセル・パラドクスはブロックされる。また、このように見ると、タイプの区分とは、現代のわれわれからすれば、ごく自然な区分であることが分かる。実際、ソクラテスという個体と、それが持つ「人間である」という性質とが同じ「レベル」で存在するとはふつう考えられない。タイプの区分は、こうした存在論的なレベルの相違に対応するものだと考えられる。

1.2　タイプ理論までのラッセルの歩み

ラッセル・パラドクスが発見されたのは、ラッセルが『数学の諸原理』(Russell, 1903) を準備しているときだった。そして、ラッセルは、その X 章と補遺 B において、いくらかの混乱を含むものの、早くもタイプ理論のアイディアを提示している。ところが、ラッセルは『諸原理』以降、タイプ理論ではなく、いくつかの異なるアイディアの検討へと向かう。なぜラッセルはタイプ理論から離れたのか。

現在広く支持されている有力な説は、タイプ理論は『諸原理』におけるラッセルの存在論的な前提と噛み合わなかったというものである。『諸原理』において、ラッセルは「考えられるものすべて」が存在者であり、それらはすべて個体であると考えていた（Russell (1903), p. 43）。このことから、ラッセルは存在者の身分は一様であるとする立場を保持していたのだと考えられる。そして、こうした立場は、たしかに、タイプ理論が描写する存在論的な階層とはなじまない。

こうした解釈の妥当性はさておき、いずれにせよ、ラッセルは『諸原理』以降のおよそ 2 年間に、ラッセル・パラドクスに対するさまざまなアプローチの検討へと向か

う[(2)]。しかし、ラッセルは満足のゆくアプローチを見つけることができず、やがてタイプ理論へと戻ることになる。そして、そのきっかけは『記述について』(Russell, 1905a) で示された、いわゆる「記述理論（theory of description）」にある。記述理論では「現在のフランス王」のような、いかなる存在者も指示しない表現は、それが現れる文全体を書き換えることで、消去される。ラッセルは、こうした仕方で消去可能な表現、言い換えれば、文脈の中でのみ有意味な表現を「不完全記号（incomplete symbol）」と呼んだ。

こうしたアイディアのもと、ラッセルは「無クラス理論（no-classes theory）」を展開する。それは、集合を表す記号を不完全記号として扱うことで、存在者としての集合へのコミットメントを回避するものである。この無クラス理論のアイディアは、タイプ理論によるラッセル・パラドクスのブロックを実現するには十分である。それが可能であるためには、すべての集合が命題関数から定義される必要があるが、無クラス理論では、集合を表す記号を含む言明はすべて、命題関数に関する言明へと書き換えられるからである。例えば『プリンキピア・マテマティカ』(Whitehead & Russell, 1927) では、集合を表す記号 “ $\hat{z}(\psi z)$ ” は次のように定義される[(3)]。

$$f\{\hat{z}(\psi z)\} \ = \mathrm{df}\ (\exists\phi)((x)(\phi!x \equiv \psi x)\ \&\ f(\phi))$$

この定義では、集合 $\hat{z}(\psi z)$ が現れる文 “ $f\{\hat{z}(\psi z)\}$ ” はいつでも、それを含まない文へと書き換えられることが保証される。

1.3　最初のタイプ理論としての置き換え理論

ラッセルが最終的に採用したのは、無クラス理論だった。しかし、ラッセルが無クラス理論として最初に構想した体系は『プリンキピア』のそれではない。それは「置き換え理論（substitutional theory）」と呼ばれる理論である。しかも、それは、無クラス理論のアイディアをより徹底的な仕方で実現するものだった。置き換え理論では、集合だけでなく、それを定める命題関数もまた不完全記号とされる。

置き換え理論の特徴を簡単に説明しよう (cf. Russell, 1906b; Landini, 1998; 戸田山, 2003)。置き換え理論を支えるアイディアは、命題に現れる対象を他の対象と置き換えるという操作により命題関数の役割を再現する、というものである。これにより、各々の命題関数は置き換えという操作の中で現れる不完全記号として扱われることになる。さらに、高階の命題関数は、複数個の対象の置き換えによって再現され、この置き換えられる対象の個数がそのまま、命題関数のタイプになる。こうして、置き換え理論はタイプ理論を実現する。しかも、こうして与えられるタイプの区分は、存在

論的な階層ではなく、単に言語表現の上での制約である。タイプの区分が与えられるところの命題関数は、不完全記号だからである。こうして、置き換え理論は、ラッセルにとってタイプ理論の問題点だったと思われる点、すなわち、タイプの区分と存在の一様性という前提との衝突を解消する。

ところが、ラッセルは 1907 年には置き換え理論を放棄してしまう。現在 p_0/a_0 パラドクスと呼ばれる、それに固有のパラドクスが見つかったためである (Landini, 1989)。これ以降、ラッセルは、置き換え理論に代えて、命題関数をプリミティブな概念とした論理体系によるアプローチを採る。そして、このことは、タイプの階層を単なる言語表現の上での制約として扱うことをあきらめ、存在論的な階層としてのタイプの階層を採用することを意味する(4)。また、このときからラッセルは、タイプの階層のみを持つ論理体系、すなわち「単純タイプ理論（simple type-theory）」に代えて、タイプとオーダーという二つの階層を命題関数に与える論理体系、「分岐タイプ理論（ramified type-theory）」による論理主義プログラムの実現へと向かうことになる。

2. タイプ理論に対する批判

分岐タイプ理論の起源を理解するには、まずポアンカレの論理主義批判と「非可述性」の問題を踏まえる必要がある。ラッセルは、この批判を受け、「悪循環原理」を導入した分岐タイプ理論を構築するが、その理論は多方面から批判された。ここでは、特にゲーデルの批判を紹介し、その背景にある両者の哲学的立場の違いを考察する。

2.1 ポアンカレの論理主義批判と非可述性の問題

1 章でみたラッセルの論理主義は、1905 年から翌年にかけて、ポアンカレによって批判された (Poincaré, 1905-6)。ポアンカレは、独自の直観主義に基づき、a) 論理主義は数学の厳密化には貢献するかもしれないが数学の進歩には貢献しない、b) 数学の進歩には数学的帰納法が不可欠であり、その豊かさの根底には論理学に還元されない潜在的無限の直観がある、と論理主義の構想そのものを批判する。

タイプ理論に直結するポアンカレの批判の要点は「非可述性（impredicativity）」にある。「非可述的定義」とは、定義されるべき項を含む全体に言及した定義である。例えば、「実数のある部分集合の最小上界」の定義は、ある対象を含む上界全体に言及してその対象を定義しているため、非可述的である。また “$a = b \overset{def}{\iff} \forall P(P(a) \Leftrightarrow P(b))$”（同一であるということは、すべての述語について同値であるということである）という同一性の定義も、「〜と同一である」(“$= b$”) が述語の全体に含まれるので、非可述的である。これらには循環が含まれているように見える。ところが、リシャールの

パラドックス (1905 年) のように、明らかな悪循環を導く例が実際に発見される。ポアンカレは、その原因が、可述的／非可述的定義の区別に関する理解の欠如にあることを発見した。そして彼は、ラッセルの諸理論が、非可述的定義に起因する悪循環の問題を真に解決していないと指摘した。

その悪循環を、ベリーのパラドクスを例に説明しよう (cf. Russell, 1908)。「20 文字以内で名付けできない最小の自然数」(∗) は、ある自然数を名付けている。その自然数を n とすると、n は定義により、20 文字以内で名付けできない自然数の集合に（その集合の最小元として）属しており、20 文字以内では名付けできない。しかし、n を名付けている (∗) は 20 文字である。つまり、n は 20 文字以内で名付けでき、かつ、名付けできない自然数である。このパラドクスは、関数とその代入項にかかわるタイプの制約によっては防げそうにない。一方で、(∗) はそれが定義しようとしている n を含む集合（20 文字以内で名付けできない自然数の集合）全体への量化を含む非可述的定義になっており、上の矛盾の導出では、この非可述性が本質的に利用されている。

これに応じてラッセルは、ポアンカレの論理主義批判は受け容れないが、自らの理論が悪循環の問題を解決していないとする指摘は正当と認め、論理主義を押し通し再びタイプ理論を見直すべく、方針転換を決定する (Russell, 1906a) 。

2.2 悪循環原理と分岐タイプ理論

こうしてラッセルは、分岐タイプ理論を開発し (Russell, 1908)、最終的には『プリンキピア』において、悪循環原理（VCP）を採用した分岐タイプ理論に基づく数学の基礎づけを展開する (Whitehead & Russell, 1927)。そこでは、VCP は、「もし、ある集まりが全体を持つとしたら、その全体の観点からのみ定義可能（definable）なある構成要素を持つであろう。このとき当の集まりはいかなる全体も持たない」、と規定される[(5)] 。ラッセルは、論理学の公理ではないこの原理を論理的に実装すべく、オーダーの理論を整備し、タイプ理論を意味論的パラドクスの生じないものとした。オーダーとは、命題関数に含まれる量化を反映して設けられる階層のことである。こうして作られた分岐タイプ理論では、オーダー n の命題関数への量化を含む命題関数のオーダーは、$n+1$ になるとされる。よって、あるオーダーの命題関数全体に対する量化を含む命題関数は、それらよりも高いオーダーを持つ。先のベリーのパラドクスでは、自然数 n のオーダーと名前 (∗) のオーダーが区別され、意味論的パラドクスは解消される (Whitehead & Russell (1927) 訳者「解説」および戸田山 (2007) を参照)。

すなわち、タイプの区分は命題関数が自由変項の代入項として何をとるかに関わり、それによって論理的パラドクスを救うものであった。それに対して、オーダーの区分

は命題関数がどのようなオーダーの対象に対する量化を含んでいるかに関わり、意味論的パラドクスを回避するためのものだった。悪循環を生じたのは、命題関数に含まれる量化の入れ子構造をきちんと捉えていないからである。したがって、量化のあり方でもって階層（＝オーダー）を設けてやれば、悪循環を未然に防げる。逆から見れば、素朴な要請である悪循環原理を形式的に実現したものがオーダーの理論である。

ところが、分岐タイプ理論を含む『プリンキピア』の体系は、その複雑さや非生産的側面に関して他の陣営から厳しく批判された。分岐タイプ理論の目的は、悪循環を含みうる非可述的定義の全面禁止によって確実な基礎を築くことだった。だがそのままでは、非可述的定義を含む実数論したがって解析を十分に展開できない。そこで、ラッセルらは、分岐タイプ理論を十全に展開するために、非可述的定義を部分的に可能にする「還元公理」を要請する。それは、任意の命題関数に対し、それと外延を等しくする可述的関数が存在するという公理である。しかし還元公理は、直観を欠いたアドホックな前提にすぎず、その必要もないと散々に批判された。還元公理の意義は、クラスに関してオーダーの区別を消去してくれること、言い換えれば、クラスに関しては外延性が成り立つことが保証されることである。こうして、クラスに関してはタイプの区別だけが問題となり、オーダーの区別を無視した非可述的定義が可能になる。しかし、これでは何のためにオーダーを導入したのか判然としない。ラッセルらは、還元公理が純粋にプラグマティックな正当化を持つとしているが、その導入を正当化する論証を欠いていた（Whitehead & Russell (1927), p. xiv; cf. Church (1956), §59.）。

2.3　ゲーデルによる分岐タイプ理論批判

ポアンカレの論理主義批判に反し、論理学に極めて生産的な結果がゲーデルによってもたらされた。しかしゲーデルは、1944 年の論文「ラッセルの数理論理学」において、「定義とは構成である」とする構成主義的（constructivistic）な態度、および、概念やクラスを消去する唯名論的な態度に基づくラッセルのタイプ理論が、「自分自身に当てはまらない」という概念に起因する内包的パラドクスを根本的に解決しているわけではないと批判する (Gödel, 1944)。そして彼は、数理論理学の理想をライプニッツの普遍的記号法に見て、概念実在論の観点から「概念の論理学」を提唱する。その批判の根底には、1) 数学において自然に現れる非可述性を救うこと、2) 物理学における事物の実在と感覚の関係のアナロジーに基づいた、論理・数学的な原始概念の実在およびわれわれがそれらに対して持つ直観の擁護がある。後者のアナロジーの議論は、初期ラッセルの数学的実在論を継承したものである。その考えは、Gödel (1964) では、数学的直観は感覚知覚と異なり間接的・関係的でもよいという仕方で捉え直され、遺

稿ノートでもライプニッツの『モナドロジー』にインスパイアされる形で独自に展開されている (Gödel, March 12, 1943 - January 27, 1944)。

ゲーデルによれば、オーダーの理論は悪循環原理（VCP）に基づく。したがって、その批判は、VCP の厳密な分析によってなされる(6)。VCP は、「いかなる全体も、その全体によってのみ定義しうるメンバーを含むことはできない」というものであった。そもそも VCP は、「定義によって導入される数学的対象は人間による構成と独立に存在するものではない」という構成主義的態度によって要請された。しかし VCP は、非可述的定義を認めず数学の大部分を破壊するため、要求としては強すぎる。全称量化を用いずに自然数を定義するには、ラムジーが提案したような無限連言による方法があるが、そこには無限の直観が入り込まざるを得ないとゲーデルは考えた。また、致命的なことに、オーダーの定義にはテクニカルな問題があって、自然数の帰納的定義に失敗しており、自然数が分岐タイプ理論から導出されるかすら明らかでない（Gödel (1944), p. 146）。そこでは、ラッセルは外延の同一性を担保に非可述的命題関数を容認しており、VCP を事実上放棄している。彼の数学的対象の存在に関する単一性の信念を支持するゲーデルにとって、一貫性を欠きまともに数学を展開できない以上、非可述性を避けるため概念に構成的階層を導くラッセルの立場は不合理に映ったのである。

こうした経緯でゲーデルが新しく構想するのが「概念の論理学」である (cf. Crocco, 2006)。それは、「概念」は自己言及性したがって非可述性を認めうる客観的対象であるとする、論理・数学的概念の実在論に基づくもので、概念ないしそれに対応する命題関数の構成主義に基づくラッセルの路線や、概念を不飽和の関数とみなすフレーゲの路線とは根本的に区別される。つまり、ゲーデルにとって原始概念は、タイプによって階層化されず、かつ、閉じている、個々独立した存在者である。ゲーデルは概念の論理学のアイディアをライプニッツの普遍的記号法に見出したが、ゲーデルの遺稿資料や証言は、彼がその生涯を通じてライプニッツに関心を有していたことを示している(7)。哲学遺稿ノートの一つ、Max Phil X によれば、彼は、「概念の導きの星（cynosura notionum）」すなわちあらゆる概念を導く原始概念があり、人間は、普遍的記号法というオルガノンによって、記号という質料を介して、概念の知覚（直観）を実在のあるアスペクトとして持つと考えた (Gödel, March 12, 1943 - January 27, 1944)。

このように、初期ラッセルとゲーデルには、数学的存在に関する実在論が共有されていたにも関わらず、論理学へのアプローチに深い対立があった。ラッセルは、ポアンカレの批判を受けて悪循環原理を採用し分岐タイプ理論を確立したが、ゲーデルに言わせれば、それは非可述的定義を避けるために構成主義と唯名論をとっていたからにすぎない。ゲーデルは、非可述性が問題となる言語的観点から離れ、言語から独立

して実在する集合と概念の観点から数学の豊かさを救おうとした。彼らの対立は、言語・存在・論理の関係という大きな哲学的問題の文脈に位置づけられよう。

ゲーデルによるラッセル批判には、ラッセル論文以前に研究していた、ある数学理論全体の無矛盾性に関する自己言及を含む不完全性定理（1931）、および、連続体問題（とりわけ構成可能集合の理論における「還元可能性の超限定理」）など、数学におけるテクニカルな背景も示唆されうる (cf. Kanamori (2009), p. 29; 田中 (2007))。遺稿研究をも踏まえた包括的な研究の提示が、今後の課題と言えよう。

3. タイプ理論の発展と応用

ラッセル以後、タイプ理論は数学の基礎理論としての地位は公理的集合論に譲るが、しかしタイプ理論自体の研究は続けられ、計算機科学や構成主義数学の分野で応用されるようになった。また一度は論理と切り離されて発展した単純タイプ理論が、意外な形で再び論理と結びついている。本節ではこのようなラッセル以後のタイプ理論の発展の過程を概観する。

3.1 タイプ理論と λ 計算

ラッセルの分岐タイプ理論においては、オーダーとタイプという二つの分類方法が混在している。ラムジーのラッセルに対する批判の焦点の一つは、オーダーの区別に当てられていた。ラムジーは当時発見されていたパラドクスを意味論的パラドクスと論理的パラドクスに分類し、そして数学において重要なのは後者のパラドクスのみであると考えた。かつ後者のパラドクスに対処するためにはタイプの区別だけがあれば十分なのだから、数学にとってオーダーの区別は不要であると主張した (cf. Copi, 1971)。

1930 年代、チャーチはラムジーのアイディアを体系化し、単純タイプ理論を構築した。この体系では述語は自由変数のタイプによってのみ区別され、束縛変数によっては区別されない。従って特に閉じた言明は全て同じタイプを持つ (Church, 1940) 。

タイプ理論の歴史において最も重要な出来事の一つは、λ 計算の体系と単純タイプ理論とが結びついて、型付き λ 計算（typed λ calculus）の理論が創始されたことである。λ 計算は関数の「計算規則」としての側面を抽象化した記号体系であり、λ 項と呼ばれる式を定義する構文規則と、λ 項を変形するための計算規則からなっている。また λ 計算は Lisp などの関数型プログラミング言語の理論的な基礎になっている。型付き λ 計算では命題や項にタイプが付与されて、構文規則にタイプによる制約が加えられる。チャーチは λ 計算の理論を論理的語彙によって拡張し、それによって数学の基礎を与える論理体系を作ることを目指していた。しかしこの体系からはパラドクスが

導かれることが 1935 年にクリーネとロッサーによって発見された。このことによってチャーチは基礎付けという目的を放棄することになる。しかしこの体系の関数的部分のみが λ 計算として切り離され、独自に発展していく (Barendregt, 1986)。

型なし λ 計算は無矛盾かつチューリング完全である（チューリングマシンと同等の計算力を持つ）。しかしこの体系においては λ 項の計算手続きが停止しない場合がある。一方、型付き λ 計算の標準的な体系では、いかなる λ 項の計算も有限のステップで停止し、かつ一意的な結果を持つということが保証される。しかしこのような λ 計算の体系はすべてチューリング不完全である。この意味でタイプによる制限は人間の言語と思考の、合理的だが不自由な側面と、不合理だが自由な側面のトレードオフを表しているということも言えるかもしれない。また両者の違いは、パラドクスを生み出すほど強力なフレーゲの論理学とパラドクスを生じさせないラッセルのタイプ理論との違いと類比的である。というのもフレーゲの体系は関数や述語などの高階の対象が外延という概念を通じて個体のオーダーに落とされる、実質的に「型なし」の論理だからである。単純型付き λ 計算と完全に型のない λ 計算の間には様々な異なる λ 計算の体系がある。型の制限を緩めることがどのような人間の思考や言語使用に対応するかというのは哲学的に興味深いテーマである。

3.2　タイプ理論と論理学

チャーチの試みの挫折以降は論理学と切り離された λ 計算が、後に予想外の仕方で再び論理学と関係づけられることになった。1950 年代以降、証明論の体系と型付きラムダ計算の間に密接な対応関係が見出されたのである。この対応関係はカリー＝ハワード同型（対応）と呼ばれている。カリー＝ハワード同型においては、タイプが命題と対応付けられ、λ 項が証明と対応付けられる。また λ 項の変換の手続きは証明の正規化の手続きに対応付けられる。λ 項は関数の抽象化であり、λ 項に付けられたタイプは関数の入出力の値が持つタイプの抽象化である。このこととカリー＝ハワード同型から、論理学の命題をある種のデータのタイプと同一視し、証明をあるタイプのデータから別のタイプのデータを得る手続きと同一視することが可能になった。これ以前から命題と証明の意味を手続き的に捉える解釈がブラウワーなどによって提案されていた（このような解釈はブラウワー＝ハイティング＝コルモゴルフ解釈（BHK 解釈）と呼ばれている）が、カリー＝ハワード対応は BHK 解釈に強い根拠を与えることになった。

証明論と λ 計算という異なる体系の間にこのような密接な対応が付けられるということは真に驚くべきことであるが、しかしその理由を説明する試みはこれまでのとこ

ろ十分には行われていない(8)。またタイプに対して多様な見方ができるということはそもそも「タイプとは何なのか」という哲学的な問を喚起する。タイプ理論に対して様々な異なる意味論（領域理論による意味論、圏論による意味論など）が与えられている(9) という事実も、一層この問題の哲学的重要性を増すだろう。しかしながらこの問題についてもこれまでのところほとんど研究がなされていない。

3.3　タイプ理論と構成的数学

最後にタイプ理論と構成的数学との関係について触れておこう。ラッセルの分岐タイプ理論は、数学的対象は最も基本的な個体のレベルから量化子を使うことで段階的に構成されていくという直観に基づいている。そのため構成主義者たちはラッセルの分岐タイプ理論に対して好意的だった。その一方で還元公理は、分岐タイプ理論の構成的性格を帳消しにしてしまうものとして批判された (Martin-Löf, 1984; Skolem, 1922)。

一部の構成主義者たちは分岐タイプ理論のアイディアに基づき、そこから可述的に解析を構築することを試みた。このような試みは 1910 年代のワイルの仕事にまで遡る (Weyl, 1918)。1960 年代にはフェファーマンとシュッテが独立にワイルのアイディアを発展させて可述的解析の基礎となる体系を作っていた (Feferman, 1964; Schütte, 1965)。その後、フェファーマンはこの体系に基づいて解析の再構成を試みている。彼のアイディアに特徴的なのは、集合や関数などの数学的対象は段階的に構成されていくという可述性、そしてまたある段階から次の段階の集合や関数を構成するための手続きも、その段階までに構成されたものに制限される、という自律性である。

可述的解析に限らず、古典数学を制限した様々な「非古典」数学がこれまでに提唱されてきた。しかしながら数学の哲学はこういった異なる体系が何を表しているのかに十分な注意を払っていない。古典数学で認められているある種の推論や構成を禁じることがどのような理由によるものか、そしてそのことが数学の認識論や意味論にどのような帰結をもたらすかという問題は、もっと関心がもたれても良い。例えば私たちが分岐タイプ理論の哲学的背景を研究して、オーダーの区分を導入する起源となった、非可述性の問題について、その哲学的側面をより深く検討することで、数学の哲学に寄与することができるかもしれない。

終わりに

本サーベイでは、タイプ理論がどのようにして誕生し、受け入れられ（あるいは批判され）、そして発展していったかを概観した。ここには哲学者にとって興味深い問題が数多く見出される。本サーベイはそれらの問題について考える一歩になるように

意図したものである。

註

*1 節を伊藤、2 節を池田、3 節を久木田が担当し、相互に検討を行った。また大西琢朗氏には全体にわたって草稿のチェックをして頂き、多くの助言を頂いた。
(1) ラッセルにおける「命題関数（propositional function）」とは、その値が命題であるような関数のことである。述語、ないし、それによって指示される性質にあたると思えばよい。
(2) Russell (1905b) では、ラッセル・パラドクスの可能な解決策として、1) 「ジグザグ理論（zig-zag theory）」、2) 「サイズの制限の理論（theory of limitation of size）」、そして 3) 「無クラス理論（no-classes theory）」が検討されている。1) は、包括原理を弱めることでパラドクスを回避しようとするもの。2) は、集合と認められるものの範囲を制限することで矛盾が生じないようにするもの。ラッセルが最終的に採用するのは以下本文で説明する 3) である。
(3) 簡単のため *20.02 の表記を若干改めた。命題関数 ϕ に付された“！”は、ϕ が可述的な命題関数であることを表す。可述性については次節を参照されたい。
(4) 一方、Landini (1998) は、命題関数を唯名論的に解釈することで、こうした見解を退ける。
(5) Whitehead & Russell (1927), p. 37. VCP には他のヴァージョンもある。次註を参照せよ。
(6) Gödel (1944), p. 135. ゲーデルによれば、VCP には I) 定義可能性 (definability)、II) 包含関係 (involving)、III) 前提-帰結関係 (presupposing) の三種がある。III は、すべての理論が満たすべきもっとも弱い要求である。また「全体を含んでいるものは全体の要素であってはならない」と要求する II は、外延的制限を加えた ZF 集合論で実現されている。問題は I である。
(7) Wang (1996) 参照。出版された哲学論文には反映されていないが、ゲーデルは、自ら証言するように、ラッセル論文およびカントール論文の執筆期と重なる 1943 年から 1946 年にかけて、ライプニッツを集中的に研究している。また、ゲーデルは過去に出版されたライプニッツの原典のほとんどに目を通しており、厖大なメモを残している (Gödel, c. 1943-46)。
(8) 例えば照井 (2005) はカリー＝ハワード同型が成り立つ理由についてのこれまでの説明は不十分であり、この問題はいまだに謎の多いものとして残されていると主張する。
(9) Cf. Amadio & Curien (2008), Crole (1993), Jacobs (1999).

文献

Amadio, R. M. & Curien, P.-L. (2008). *Domains and Lambda-Calculi*, *46* of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science: Cambridge University Press.
Barendregt, H. P. (1986). *The Lambda Calculus*, *103* of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam: Elsevier.
Church, A. (1940). ‘A formulation of the simple theory of types,’ *Journal of Symbolic Logic*, *5*, 56–68.
——— (1956). *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, a revised and enlarged edition.
Copi, I. (1971). *The Theory of Logical Types*, London: Routledge and Kegan Paul LTD.
Crocco, G. (2006). ‘Gödel on Concepts,’ *History and Philosophy of Logic*, *27*, 171-191.
Crole, R. L. (1993). *Categories for Types*, Cambridge: Cambridge University Press.
Feferman, S. (1964). ‘Systems of predicative analysis,’ *The Journal of Symbolic Logic*, *29*, 1–30.
Gödel, K. (1944). ‘Russell’s Mathematical Logic,’ in Schlipp, P. A. ed. *The philosophy of Bertrand Russell*, La Salle: Open Court, 123-153.
——— (1964). ‘What is Cantor’s Continuum Problem?’ in Feferman, S., Dawson, J., Kleene, S., Moore, G., Solovay, R., & van Heijenoort, J. eds. *Collected Works. Vol. II: Publications 1938-1974*, Oxford: Oxford University Press, 254-270.

——— (c. 1943-46). ‘Series 5: Bibliographic Notes and Memoranda,’ in *Kurt Gödel Papers on microfilm*, Leiden: IDC Publishers & Princeton: Firestone Library of Princeton University, Box 9 c Folder 24 - Box 10 a Folder 38: 050114-050134.

——— (March 12, 1943 - January 27, 1944). ‘Max Phil X,’ in *Kurt Gödel Papers on microfilm*, Series 3: Topical Notebooks, transcribed by Dawson, C. [1st ver.], Engelen, E. M. and Rollinger, R. [rev. ver.], Box 6 b Folder 70.

Jacobs, B. (1999). *Categorical Logic and Type Theory*, *141* of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam: Elsevier.

Kanamori, A. (2009). *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Berlin: Springer, 2nd edition.

Landini, G. (1989). ‘New Evidence Concerning Russell’s Substitutional Theory of Classes,’ *Russell*, *9*, 26-42.

——— (1998). *Russell’s Hidden Substitutional Theory*, Oxford: Oxford University Press.

Martin-Löf, P. (1984). *Intuitionistic Type Theory*, Napoli: Bibliopolis.

Poincaré, H. (1905-6). ‘Les mathématiques et la logique,’ *Revue de métaphysique et de morale*, XIII: 815-835; XIV: 17-34, 294-317.

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*, London: Routledge.

——— (1905a). ‘On Denoting,’ in Lackey, D. ed. *Essays in Analysis*, 103-19.

——— (1905b). ‘On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types,’ in Lackey, D. ed. *Essays in Analysis*, 165-189.

——— (1906a). ‘Les paradoxes de la logique,’ *Revue de métaphysique et de morale*, *XIV*, 627-650.

——— (1906b). ‘On The Substitutional Theory of Classes and Relations,’ in Lackey, D. ed. *Essays in Analysis*, 165-189.

——— (1908). ‘Mathematical logic as based on the theory of types,’ in van Heijenoort, J. ed. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967, 150-182.

Schütte, K. (1965). ‘Eine Grenze für die Beweisbarkeit der transfiniten Induktion in der verzweigten Typenlogik,’ *Archiv für Math. Logik und Grundlagenforschung*, 45–60.

Skolem, T. (1922). ‘Some remarks on axiomatized set theory,’ in van Heijenoort (1967), 290–301.

Wang, H. (1996). *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Weyl, H. (1918). *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig.

Whitehead, A. N. & Russell, B. (1927). *Principia Mathematica*, Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition. “Introduction” の邦訳に『プリンキピア・マテマティカ序論』(岡本賢吾、加地大介、戸田山和久訳)、哲学書房、1988 年がある。

田中一之(編) (2007). 『ゲーデルと 20 世紀の論理学』, 第 4 巻, 東京大学出版会.

照井一成 (2005). 「計算と論理」, 飯田隆(編)『論理の哲学』, 講談社, 127–155 頁.

戸田山和久 (2003). 「置き換え理論、そしてラッセルの数学の哲学についてまだわかっていないこと」,『科学哲学』, 第 36-2 号, 1-20 頁.

——— (2007). 「ラッセル」, 飯田隆(編)『哲学の歴史 - 論理・数学・言語』, 第 11 巻, 中央公論新社, 197-276 頁.

〔池田真治　プロヴァンス大学 CEPERC ポスドクフェロー・エピステモロジー〕

〔伊藤遼　京都大学大学院博士課程・哲学／日本学術振興会特別研究員〕

〔久木田水生　京都大学文学研究科研究員・哲学〕