

鋼構造骨組の最小重量設計問題における凸緩和法
に関する研究

2011年

宋 昶

目次

第1章 序論.....	1
1.1 研究の背景.....	1
1.2 既往の研究.....	3
1.3 研究の目的.....	3
1.4 論文の構成.....	4
参考文献.....	6
第2章 線形緩和を用いた構造特性係数の不連続性を考慮した鋼構造骨組の最適設計法....	7
2.1 はじめに.....	7
2.2 設計問題の定式化.....	9
2.2.1 設計変数と目的関数.....	9
2.2.2 保有水平耐力および必要保有水平耐力の算定.....	11
2.2.3 混合整数計画問題の定式化.....	14
2.2.4 線形緩和問題の定式化.....	15
2.2.5 分枝限定法のアルゴリズム.....	16
2.3 数値解析例.....	18
2.3.1 3層3スパン純ラーメンモデル解析例1.....	18
2.3.2 3層3スパン純ラーメンモデル解析例2.....	22
2.3.3 10層3スパンブレース付きモデル解析例.....	25
2.4 まとめ.....	28
参考文献.....	29
第3章 半正定値緩和を用いた構造特性係数の不連続性を考慮した鋼構造骨組の最適設計法.....	31
3.1 はじめに.....	31
3.2 設計問題の定式化.....	31
3.2.1 設計変数と目的関数.....	31
3.2.2 元問題の定式化.....	32
3.2.3 線形緩和問題の定式化.....	34
3.2.4 半正定値緩和問題の定式化.....	35
3.3 数値解析例.....	38
3.3.1 1層1スパン解析例.....	38
3.3.2 3層3スパン解析例.....	40
3.4 まとめ.....	42
参考文献.....	43
第4章 鋼構造骨組の最小重量設計問題における凸緩和.....	45

4.1 はじめに.....	45
4.1.1 問題の性質と研究の目的	45
4.1.2 研究の位置づけ.....	45
4.1.3 表記について	46
4.2 設計問題の定式化.....	47
4.2.1 単純モデル（剛棒連結モデル）	47
4.2.2 多項式計画問題としての鋼構造骨組の最小重量設計問題の定式化（元問題） ..	52
4.2.3 RLT を用いた線形緩和問題の定式化	54
4.2.4 上下制限約の領域縮小.....	57
4.2.5 超直方体分割法を用いた分枝限定法.....	58
4.3 数値解析例	61
4.3.1 3層3スパンモデル解析例	61
4.3.2 7層3スパンモデル解析例	64
4.4 まとめ.....	67
参考文献.....	68
第5章 結論.....	70
5.1 結論	70
5.2 将来の展望	71
発表論文一覧.....	73
謝辞	74

第1章 序論

1.1 研究の背景

建築の構造設計分野において、構造設計者は構造物をモデル化した上で適当な設計を仮定し、応答解析を行う。得られた応答値が設計条件を満足していなければ、設計を変更し再び応答解析を行う必要がある。論理的な手法を適切な部分に導入すれば、構造設計のサイクルにおける創造的な部分に設計者は専念できるようになると考えられる。このような設計の論理化において最適化の手法が有効であり、機械、航空機、自動車などの分野では最適設計として製品の開発プロセスの一部に取り入れられ、コスト低減や安全性向上などに結びついている^{1,2)}。

最適化の手法の扱い易い問題として、凸計画問題が知られている。凸計画問題とは目的関数が凸関数、実行可能領域が凸集合であるような最適化問題である³⁾。ここで、集合 S が凸集合であるとは、

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \Rightarrow \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} \in S \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

が成り立つことをいう。また、関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が凸であるとは f の epigraph が凸、すなわち

$$f(\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) f(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in [0, 1]$$

が成り立つことをいう。これらの関係を下図に示す。凸集合の内部任意二点を結ぶ線分が集合に含まれる。凸関数のグラフより上の部分が凸集合である。

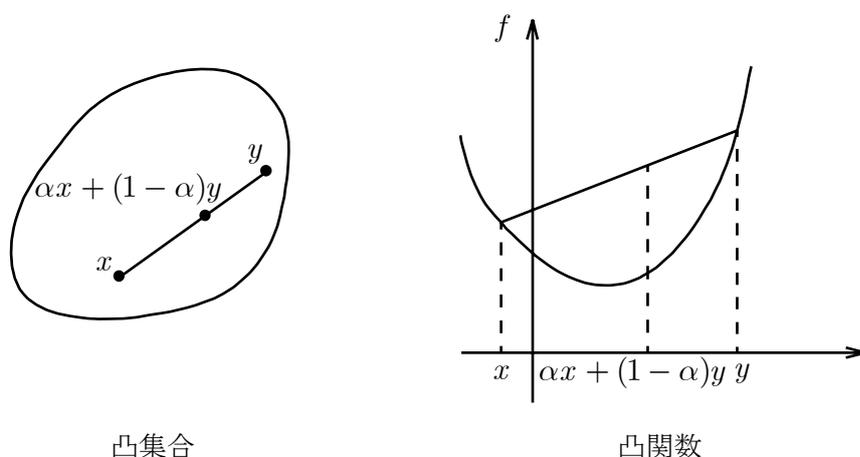


図1-1 凸集合と凸関数

凸計画問題では任意の局所的最適解は大域的最適解であるため、数理計画法の扱いが容

易である。一方、非凸計画問題では局所的最適解が大域的最適解である保証はなく、大域的最適解から大きく劣った局所的最適解が多数存在する可能性がある³⁾。

建築の構造設計分野における最適化問題の多くは非凸計画問題に属する。応力・変位に関する何らかの条件を満たし、最小重量となるような鋼構造骨組の部材断面を見出す設計問題もその一つである。例えば、建築基準法上の1次設計に対応する許容応力度制約と2次設計における層間変形角制約はいずれも非凸な制約条件である。このような理由より、鋼構造骨組の最小重量設計問題においても局所的な最適性条件を満たす設計解、即ち局所解が多数存在することが既往の研究でも調べられている⁴⁾。一例として、ある7層3スパンの鋼構造骨組の最小重量設計問題において、部材断面を設計変数として許容応力度および層間変形角に関する条件が満たされる三つの局所解の断面積分布を線の太さに比例させたものを図1-2に示す。図に示すように、これらの局所解の断面分布のパターンも大きく異なり、最適解における目的関数値も異なる。さらに、2次設計における保有水平耐力は連続微分不可能な関数、必要保有水平耐力は不連続関数である。よって、2次設計における必要保有水平耐力制約を考慮した鋼構造骨組の最小重量設計問題に通常の勾配法を適用した場合、局所解への大域的収束性すら保証されない。

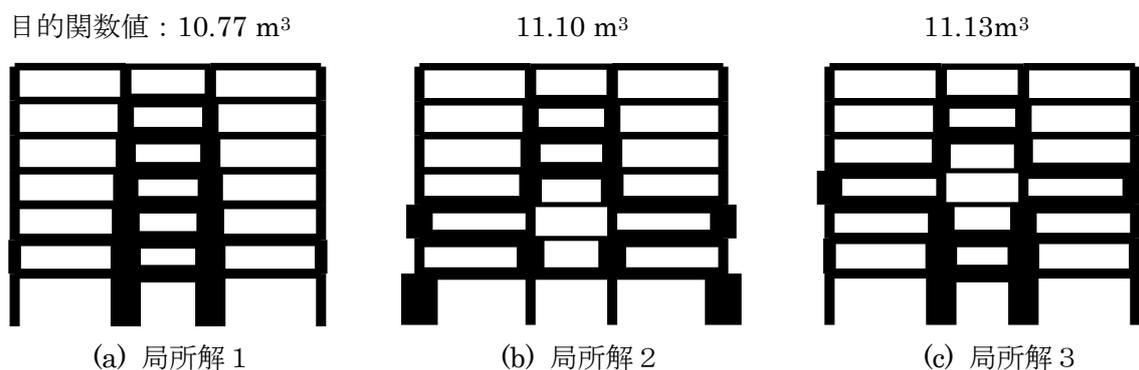


図1-2 局所解多数存在の例

上記の問題に対して大域的最適解を求めることは極めて困難である。このような困難が存在する一方で、大域的最適解自体への実用的な必要性は小さく、許容解が得られれば十分であるとも考えられる。ただし、複数の局所解の目的関数値がそれほど変わらなければどの局所解でも良いのであり、他の局所解よりも大きく劣った解であれば、それはできる限り排除すべきである。以上より、問題の非凸性による影響を減らし、より良い局所解を求めること、また局所解と厳密解との目的関数値の乖離度を測り、局所解の良さを評価することには理論的・実用的な意義があると考えられる。

1.2 既往の研究

鋼構造骨組の最小重量設計問題に関する研究はこれまで数多くなされている。部材断面を連続変数として扱った問題を考え、感度を差分近似により解くといったアプローチ¹⁰⁾がある。既往の鋼構造骨組の最小重量設計問題の研究において、このような方法から2次設計における必要保有水平耐力と鋼材量最小解との関係が調べられている¹⁰⁾。弾塑性状態の不連続的な変化、および建築基準法で離散的な値として定められた構造特性係数の影響により、2次設計における必要保有水平耐力制約は不連続な制約条件である。関数値やその感度係数に不連続性がある場合に通常の勾配法では局所解への収束性すら保証されない。以上の理由により、そこで得られた設計解がどの程度妥当性を持つか明らかではない。

またこれとは別に、部材断面を含めて鋼構造骨組の最小重量設計問題を離散最適化問題として扱うアプローチ⁶⁻⁹⁾がある。このような方法では感度情報に基づく局所最適性を扱う必要がないため、不連続関数を含む広いクラスの問題に適用可能である。この種の系統に属するものとして、耐力についての制約条件を考慮した大域的な離散最適解を、分枝限定法を用いて求める研究もなされている。ただし、このような離散最適化問題を効率的に解けるかは明らかではない。何らかの問題構造を利用しない限り、すべての設計変数を離散変数として現実的な規模の問題に対処することは難しく、既往の研究でもごく小規模な問題を扱うに止まっている。

1.3 研究の目的

以上より、本論文では鋼構造平面骨組の最小重量設計問題における非凸性に注目し、より良い設計解（局所解）を求める手法、また得られた局所解の良さを定量的に評価する方法の提案を目的とする。具体的には、以下の2点から述べる。

- (1) 鋼構造骨組の最小重量設計問題について、建築基準法上の2次設計における構造特性係数に関する非凸性・不連続性に注目し、設計基準に対する構造特性係数の選択を含めた最適設計問題を実用的な時間内に解ける手法を提案する。
- (2) 弾性解析に基づく許容応力度設計の範囲内での鋼構造骨組の最小重量設計問題を対象として、すべての非凸性に注目し、凸緩和問題の定式化を提案する。また、緩和解を用いて局所解の信頼性を定量的に評価する。

1.4 論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。

第1章は序論であり、本研究の背景、既往の研究、研究の目的と本論文の構成について述べる。

第2章では、鋼構造骨組の最小重量設計問題を対象とし、必要保有水平耐力制約における構造特性係数に関する非凸性に注目し、線形緩和問題の定式化を行い、線形緩和問題を用いた分枝限定法のアルゴリズムを示す。また、数値解析例を通じて、設計基準と耐震性能の関係を調べる。

第3章では、第2章の方法を発展させて、理論的に線形緩和より良い緩和法として知られる半正定値緩和の定式化を提案する。また、数値解析例を通じて、線形緩和と半正定値緩和の緩和効果と計算効率を調べる。

第4章では、弾性解析に基づく許容応力度設計の範囲内での鋼構造骨組の最小重量設計問題を対象として、すべての非凸性に注目し、元問題を多項式計画問題として定式化を行う上で凸緩和問題を導出する。また、領域分割に基づく分枝切除法により緩和問題の精度を向上する方法を提案する。得られた緩和解を用いて局所解の信頼性を定量的に評価する。

第5章は結論であり、本論文で得られた成果をまとめる。

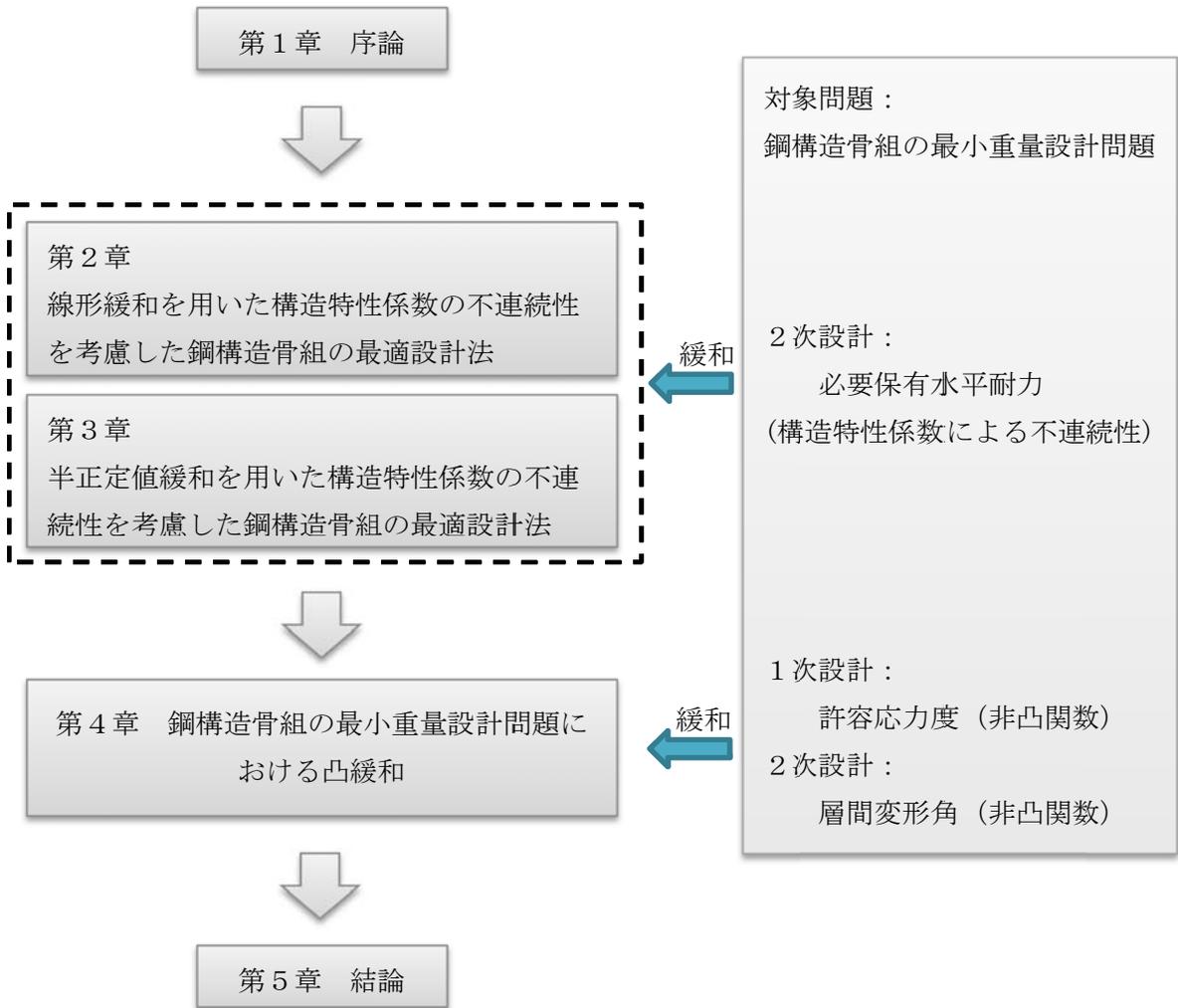


図1-3 本論文の構成

参考文献

- 1) J. S. Arora: Optimaization of Structural and Mechanical Systems, World Scientific, 2007
- 2) R. T. Haftka, Z. Gürdal: Elements of structural optimization, Springer, 1992
- 3) 久保幹雄, 田村明久, 松井知己: 応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店, 2002.5
- 4) M. Ohsaki: Local and global searches of approximate optimal designs of regular frames, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.67, No.1, pp.132-147, 2006
- 5) 松本慎也, 荒井宏, 春日康博, et al: 鉄骨骨組構造の最小重量設計における局所解の一例, 構造工学論文集, B, Vol.45, pp.249-258, 1999
- 6) 澤田樹一郎, 松尾彰: 弾性・塑性制約下における鋼構造建築骨組の離散最適化問題に対する列挙型アルゴリズムの改善解法, 日本建築学会構造系論文集, No.574, pp.93-98, 2003.12
- 7) 田村尚土, 大森博司: 多目的最適化法による鋼構造物の構造設計支援手法の提案(その2) 保有耐力設計に基づく最適設計法, 日本建築学会構造系論文集, Vol.74, No.643, pp.1671-1676, 2009.9
- 8) 松嶋圭吾, 高田豊文: 多目的遺伝的アルゴリズムを用いたトラス構造物の限界状態設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集B-1, pp.303-304, 2004.7
- 9) 大崎純: 局所探索法による鋼構造骨組の多目的最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.73, No.634, pp.2135-2141, 2008.12
- 10) 吉富信太, 上谷宏二, 辻聖晃: 弾塑性応答制約条件下の鋼構造立体骨組の最適設計解特性, 鋼構造年次論文報告集, Vol.11, pp.351-354, 2003

第2章 線形緩和を用いた構造特性係数の不連続性を考慮した鋼構造骨組の最適設計法

2.1 はじめに

本章では、鋼構造建築物の鋼材量最小化問題において、必要保有水平耐力の算定に用いられる離散な値として定まれた構造特性係数に関する非凸性に注目し、線形緩和問題を利用した最適設計法について述べる。

保有水平耐力は耐震性能を評価する上で欠かせない重要な性能であり、実務設計との関わりからも建築構造の最適設計において重要な設計条件である。保有水平耐力算定においては、設計パラメータの変化に対して弾塑性状態が不連続的に変化するため、その感度係数に不連続性が生じ、感度係数を連続微分の意味では定義できない点が生じるという問題がある。さらに建築基準法上での必要保有水平耐力の算定¹⁾においては、骨組の塑性変形能力の違いに応じて設計用地震力のレベルを低減しており、各部材種別やブレースの水平力分担率から定まる不連続な構造特性係数 D_s を定めなければならない。このように保有水平耐力に関する制約条件を含む最適設計問題は連続微分不可能かつ不連続な制約関数を含む問題である。よって、数学的には連続微分可能性を前提とした局所最適性条件により局所最適解を特徴づけることができない問題²⁾に分類される。

このような問題に対して、鋼構造建築物を対象として構造特性係数 D_s が設計者によって与えられたとの条件設定下で、1次設計では許容応力度および層間変形角に関する条件を満たし、2次設計では必要保有水平耐力以上の保有水平耐力を有する設計解を求めるための研究がこれまでも行われている。その一つとして部材断面を含めて離散最適化問題として取り扱うアプローチ³⁻⁶⁾がある。このような方法では感度情報に基づく局所最適性を扱う必要がないため、関数の不連続性は問題とならない。ただし、このような離散最適化問題を効率的に解くことが可能かは明らかではなく、何らかの問題構造を利用しない限りすべての設計変数を離散変数として現実的な規模の問題に対処することは一般には難しい。一方、部材断面を連続変数として扱った問題を考え、感度を差分近似により解くといったアプローチがあり、このような方法では最適解の性質の把握が近似的に可能であり、実用性の面からも妥当性を持つ。このような立場から吉富らは構造特性係数 D_s と鋼材量最小解の関係を調べている⁷⁾。しかし、これらの研究においても、構造特性係数 D_s の合理的な選択に関する提案は含まれていない。

このような問題に対して、主体架構断面の部材種別やブレースの水平力分担率から規定される構造特性係数 D_s を独立な離散変数とみなし、部材断面を連続変数とすれば、最適化問題を混合整数計画問題として定式化できる。これは離散最適化問題として扱うアプローチと連続最適化問題として扱うアプローチの中間に位置するアプローチと解釈できる。構造特性係数 D_s は構造物の各方向に対して一つあるいは層ごとに定められる。よって、建物規模が大きくなったとしても、その数の増加は部材断面数の増加に比べれば小さなもので

ありその組合せの数も限られるため、現実的な規模の問題にも十分対処可能であると考え
る。

このような立場から、本章では、鋼構造平面骨組の構造特性係数 D_s の不連続性に注目し、
(1) 分枝限定法を用いて設計基準に対する構造特性係数 D_s の選択を含めた最適設計問題を
実用的な時間内に解ける手法を提案し、(2) 分枝限定法の枠組から使われる上界と下界に
より局所解の信頼性を定量的に評価し、(3) 数値解析例を通じてその最適解の特性を検討
し、設計基準と耐震性能の関係を調べることを目的とする。(3)については特に、設計基準
に則った外力分布および崩壊形に対する保有水平耐力と必要コストとの関係について調べ
る。本章で扱う緩和問題は設計パラメータに対する感度係数を連続微分の意味では定義で
きない点を含んでいるため、Clarke劣微分²⁾の意味で局所最適解への収束が保証されてい
る非線形最適化法⁹⁾を併用する。ただし、非凸性を弱めてはいるもののこの緩和問題は依
然非凸計画問題であり、局所最適解により厳密な意味での下界を定めることはできない。
ここで、凸計画問題とは目的関数が凸関数、実行可能領域が凸集合であるような問題であ
る⁹⁾。凸計画問題では任意の局所的最適解は大域的最適解であることに対し、非凸計画問
題では一般に複数の大域的最適解でない局所的最適解が存在する⁹⁾。本章で提案した緩和
問題もこのような非凸計画問題であるので、求められた局所的最適解からは元問題の近似
的な下界が得られるにとどまる。このような近似が設計解に与える影響も数値解析例を通
じて検証する。

まず2.2節では対象とする設計問題の定式化を紹介し、構造特性係数 D_s を離散変数とし
た設計問題と対応する線形緩和問題を用いた分枝限定法のアルゴリズムを説明する。次に
2.3節では3層純ラーメンモデルの例題と10層ブレース付きモデルの解析例を用いて提案手
法の有効性を検証し、最適解についての考察を行う。以上より得られた結論を2.4節にまと
める。

2.2 設計問題の定式化

前節で述べたような立場から、構造特性係数Dsを離散変数、部材断面を連続変数とした設計問題を混合整数計画問題として定式化し、さらに整数制約条件に対して線形緩和を行い、線形緩和問題を与える。ここでこれら二つの設計問題の位置づけを以下に簡単に述べる。

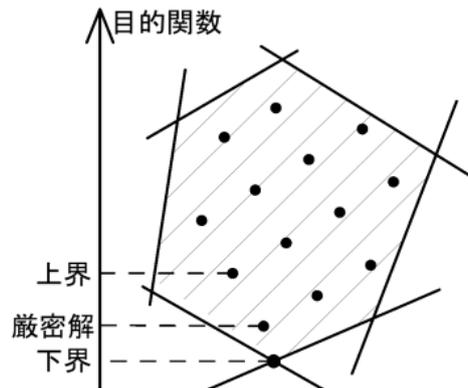


図2-1 整数計画問題の線形緩和

整数計画問題とは、設計変数に整数であるという制約条件が課された問題と考えられる。例えば、整数計画問題における許容解を図2-1に示される点とする。適当な方法により、この整数計画問題のある許容解を求める。この許容解の目的関数値が元問題の真の最適解の目的関数値以上となることは明らかなので、これを上界と考えることができる。次に、この整数制約条件を線形制約条件に緩和することを考える。例えば、図2-1において6本の線形制約が囲む領域が線形緩和領域を示すとする。この線形緩和問題の目的関数の最小値が元問題の真の最適解の目的関数値以下であることも明らかなのでこれを下界とできる。以上より元の整数計画問題の最適解の目的関数値は上界と下界の間に存在することがわかる。分枝限定法のアルゴリズムに従い、これらの上界と下界の精度を高めるように更新すれば、元問題の最適解を求めることができる。

2.2.1 設計変数と目的関数

柱断面には角形鋼管、梁断面にはH形鋼を用い、さらにブレース付きモデルではブレースとして座屈拘束ブレースを用いるとする。このとき、設計変数 \mathbf{x} を次式のように定義する。

$$\mathbf{x} = \{ \mathbf{x}^C, \mathbf{x}^G, \mathbf{x}^B, \alpha \} \quad (2.1)$$

ここで、

$$\mathbf{x}^C = \{ D_i^C, A_i^C : i = 1, \dots, n_C \} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{x}^G = \{H_i, B_i, A_i^F, A_i^W : i = 1, \dots, n_G\} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x}^B = \{N_i : i = 1, \dots, n_B\} \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j^{(i)} : i = 1, \dots, n_S, j \in \mathcal{I}^\alpha\} \quad (2.5)$$

とする。 D_i^C, A_i^C は第 i 柱部材断面に対応する角形鋼管の幅と断面積、 H_i, B_i, A_i^F, A_i^W は第 i 梁部材断面に対応する梁せい、幅、フランジ断面積、ウェブ断面積、 N_i は第 i ブレース部材断面の降伏軸力をそれぞれ表すとする。 $\alpha_j^{(i)}$ は第 i 層の種別が部材群種別 j に対応することを意味する種別変数と呼ぶべきものであり、次節で詳しい説明を与える。さらに n_C, n_G, n_B, n_S はそれぞれ柱断面、梁断面、ブレース断面と層の数を表す。なお、このように設計変数を設定することには、目的関数を線形式として表現できること、および部材外法に関する制約条件の扱いが容易となることの二つの利点がある。

式(2.2), (2.3), (2.4)で定義した設計変数の上下限界を表2-1で示すように設定する。

表2-1 設計変数の上下限界

	D_i^C	A_i^C	H_i	B_i	A_i^F	A_i^W	N_i
下限値	350	154.8	400	200	48	35.29	187
上限値	1000	1454	1000	400	320	177.6	1500

実際の設計との対応を考えて、目的関数をブレース付き鋼構造建築物のコスト関数として、次のように定義する。

$$f(\mathbf{x}) = c_F \rho \sum_{i,j} T_{ij}^C l_j^C A_i^C + c_F \rho \sum_{i,j} T_{ij}^G l_j^G A_i^G + c_B \sum_{i,j} T_{ij}^B N_i \quad (2.6)$$

ここで、 c_F はフレーム部材の単価、 ρ は鋼材密度、 c_B は座屈拘束ブレース部材の単位降伏軸力あたりの単価、 $T_{ij}^C, T_{ij}^G, T_{ij}^B$ はそれぞれ柱、梁およびブレースの第 i 部材断面に関する量から対応する第 j 部材に関する量に変換するための0-1からなる係数、 l_j は第 j 部材の部材長を表す。さらに、鋼材密度 $\rho = 7.8 \text{ ton} / \text{m}^3$ 、フレーム部材と座屈拘束ブレース部材それぞれの単価を $c_F = 25 / \text{ton}$ 、 $c_B = 0.02 / \text{kN}$ と与える。なお、純ラーメンモデルにおいては、式(2.6)の第3項が0となる。式(2.6)よりコスト関数は設計変数に対して線形式であることがわかる。

2.2.2 保有水平耐力および必要保有水平耐力の算定

構造特性係数の不連続性を考慮した鋼構造平面純ラーメンモデルとブレース付き骨組モデルの最小重量設計問題を対象とする。制約条件は一次設計における長期許容応力度、短期許容応力度と層間変形角制約、二次設計計算ルート3における必要保有水平耐力制約を考慮する。ただし、問題を単純化するために、保有水平耐力および必要保有水平耐力算定にあたり、以下の仮定をおく。

- (1) 形状係数 F_{es} を 1.0 とする。
- (2) 柱部材の種別は FA と FB のみとする。
- (3) 柱梁部材群の種別は D を非許容として、A、B および C の中から選ぶとする。
- (4) ブレース付きモデルでは座屈拘束ブレースを用い、Ds 値算定時のブレース種別を BA 材とする。
- (5) 層毎の部材群種別は層に属するすべての部材種別の最低位のを A、B および C の 3 種類の中から選ぶとする。
- (6) 二次設計における保有水平耐力は層間変形角 $1/75$ までの完全弾塑性荷重増分解析¹⁰⁾ から求める。

これらの仮定の下で、層数 n_s の構造物における地震力に対する第 i 層の必要保有水平耐力は次式によって与えられる。

$$Q_{un}^{(i)} = D_S^{(i)} F_{es}^{(i)} Q_{ud}^{(i)}, \quad Q_{ud}^{(i)} = Z R_t A_i C_0 \sum_{j=i}^{n_s} w_j \quad (2.7)$$

$$C_0 \geq 1.0, \quad i = 1, \dots, n_s$$

ただし、 $Q_{un}^{(i)}$ は第 i 層の必要保有水平耐力、 $D_S^{(i)}$ は第 i 層の構造特性係数、 $F_{es}^{(i)}$ は第 i 層の形状係数、 $Q_{ud}^{(i)}$ は地震力によって第 i 層に生ずる水平力、 Z は地震地域係数、 R_t は振動特性係数、 A_i は地震層せん断力係数の分布係数、 C_0 は標準せん断力係数、 w_j は j 層の重量、 n_s は層の数を表す。また、以降では増分解析に用いる外力分布を区別する場合に、式(2.7)を用いて次のように呼ぶ。

$$\text{Ai 分布に基づく外力分布:} \quad Q_{ud}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n_s \quad (2.8)$$

$$\text{Qun 分布に基づく外力分布:} \quad Q_{un}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n_s \quad (2.9)$$

各層の保有水平耐力は必要保有水平耐力以上でなければならない。この条件を保有水平耐力制約条件と呼び、ある設計に対する第 i 層の保有水平耐力を $Q_u^{(i)}$ として、次式で与える。

$$Q_u^{(i)} \geq Q_{un}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n_s \quad (2.10)$$

Ai 分布に基づく外力分布(2.8)を用いて保有水平耐力を求めると、各層の保有水平耐力の

分布はAi分布に基づく外力分布に比例したものとなり、必要保有水平耐力の計算において、各層ごとに $D_s^{(i)}$, $F_{es}^{(i)}$ を定めていることと整合がとれない。よって、このような計算方法の矛盾をなくすため、本研究では、 Q_{un} 分布に基づく外力分布(2.9)を比例載荷して保有水平耐力を計算する。このとき、建築物の構造関係技術基準¹⁾に従い、「Ai分布に基づく外力分布が作用するときの崩壊形が全体崩壊形となる建築物について、全層の保有水平耐力を算出する」とする。この条件を保証するため、Ai分布に基づく外力分布を用いて荷重増分解析を行い、最大層間変形角が1/10となるときに部材端モーメントに対して以下のような制約を課す。

塑性ヒンジを形成させない部材端：

$$M_i(\mathbf{x}) \leq 0.99M_i^P(\mathbf{x}), \quad i \in \mathcal{I}^E \quad (2.11)$$

塑性ヒンジを形成させる部材端：

$$M_i(\mathbf{x}) \geq 1.0M_i^P(\mathbf{x}), \quad i \in \mathcal{I}^P \quad (2.12)$$

ただし、 M_i, M_i^P はそれぞれ第*i*番部材端のモーメント、全塑性モーメント、 $\mathcal{I}^E, \mathcal{I}^P$ はそれぞれ塑性ヒンジを形成させない部材端およびヒンジを形成させる部材端の添字集合を表す。

実際の設計においては、崩壊形の制御のために柱梁耐力比を設計条件として設定することが一般的である。ただし、梁降伏先行型全体崩壊を確実に保証するためには、スパン数や層数の増加に伴い実設計上では困難なほど大きな柱梁耐力比が必要となることが指摘されている^{例えば¹¹⁾}。本研究では、建築物の構造関係技術基準¹⁾に則った崩壊形、保有水平耐力性能および必要コストの直接的な関係を調べるために、梁降伏先行型全体崩壊形を確実に形成させる直接的な設計条件として式(2.11), (2.12)を用いる。なお、式(2.11), (2.12)に加えて柱梁耐力比も設計条件として同時に考慮することは十分可能であり、そのような条件を考慮した最適設計解はAi分布以外の外力分布すなわち外力分布の不確定性に対しての頑強性が向上されるとともに必要なコストも増加することが予想される¹¹⁾。

ブレース付きモデルにおいては、座屈拘束ブレースを用い、そのブレース種別はBA材とする。この場合、構造特性係数Dsは柱および梁の部材群種別に応じて表2-2で示すような値をとる。

表2-2 Ds値

柱および梁の部材群種別		
A	B	C
0.25	0.3	0.35

仮定(5)に従い、第*i*層の部材群種別A,B,Cそれぞれに種別番号 $j = 1, 2, 3$ と対応させた種別変数 $\alpha_j^{(i)}$ を考え、これに0-1制約を課すことにより、第*i*層のDs値関数 $D_s^{(i)} = D_s^{(i)}(\mathbf{x})$ を次

式のように表す。

$$\begin{aligned}
 D_S^{(i)}(\mathbf{x}) &= 0.25\alpha_1^{(i)} + 0.3\alpha_2^{(i)} + 0.35\alpha_3^{(i)}, \\
 \alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} &= 1, \\
 \alpha_j^{(i)} &\in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, n_S, \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

なお、式(2.5)と対応させれば、式(2.13)では $\mathcal{I}^\alpha = \{1, 2, 3\}$ と与えることに相当する。さらに仮定(5)は、層ごとの柱と梁の幅厚比を部材群種別に該当する限界幅厚比以下とする制約条件を考えることに対応する。

表2-3 柱および梁の種別

幅厚比の上限値		FA	FB	FC
柱(角形)		$33\sqrt{235/F}$	$37\sqrt{235/F}$	$48\sqrt{235/F}$
梁 (H形)	フランジ	$9\sqrt{235/F}$	$11\sqrt{235/F}$	$15.5\sqrt{235/F}$
	ウェブ	$60\sqrt{235/F}$	$65\sqrt{235/F}$	$71\sqrt{235/F}$

柱と梁部材の幅厚比と種別との関係¹⁾を表2-3に示す。ただし、 F は平成12年建築省告示第2464号第1に規定する基準強度を表すものとし、単位は N/mm^2 である。例えば $F=235$ の場合、表2-3より第 i 層に対して角形鋼管柱とH形鋼梁の幅厚比制約条件を次式のように表せる。

$$\begin{aligned}
 R_k^C &\leq 33\alpha_1^{(i)} + 37\alpha_2^{(i)} + 48\alpha_3^{(i)}, \quad k \in \mathcal{S}_i^C \\
 R_k^F &\leq 9\alpha_1^{(i)} + 11\alpha_2^{(i)} + 15.5\alpha_3^{(i)}, \quad k \in \mathcal{S}_i^G \\
 R_k^W &\leq 60\alpha_1^{(i)} + 65\alpha_2^{(i)} + 71\alpha_3^{(i)}, \quad k \in \mathcal{S}_i^G \\
 \alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} &= 1
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

ただし、 \mathcal{S}_i^C および \mathcal{S}_i^G はそれぞれ第 i 層に属する柱断面番号の集合および梁断面番号の集合とする。例として、図2-2で示すフレームの第2層に式(2.14)の幅厚比制約条件を課す場合を説明する。この場合、図2-2右側に示される第2層に関する幅厚比変数に対して式(2.14)の制約条件は

$$\begin{aligned}
 R_k^C &\leq 33\alpha_1^{(2)} + 37\alpha_2^{(2)} + 48\alpha_3^{(2)}, \quad k = 1, 2 \\
 R_k^F &\leq 9\alpha_1^{(2)} + 11\alpha_2^{(2)} + 15.5\alpha_3^{(2)}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \\
 R_k^W &\leq 60\alpha_1^{(2)} + 65\alpha_2^{(2)} + 71\alpha_3^{(2)}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \\
 \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} &= 1
 \end{aligned}$$

と表される。

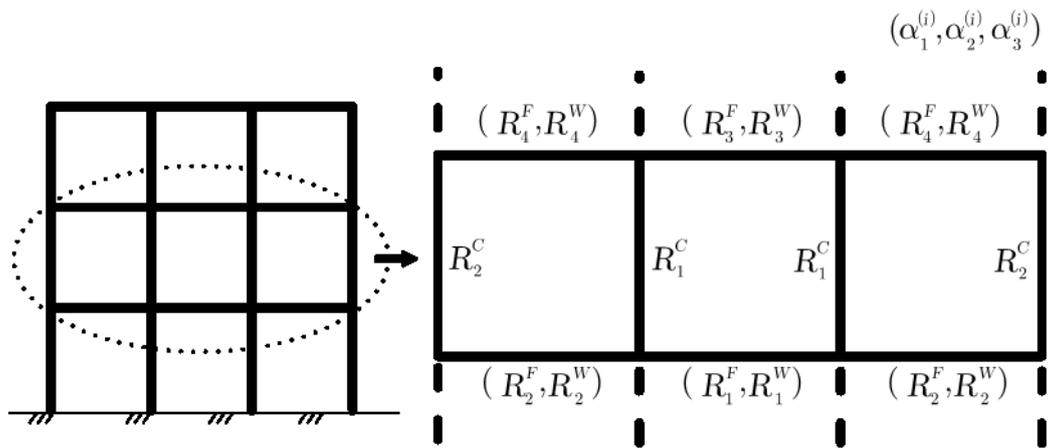


図2-2 層ごとの幅厚比制約

2.2.3 混合整数計画問題の定式化

元問題となる混合整数計画問題を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
 & \min f(\mathbf{x}) \\
 & \text{s.t. } g_k(\mathbf{x}) \leq 0, \quad k = 1, \dots, m \\
 & \quad \alpha_j^{(i)} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n_G, \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

ただし、設計変数 \mathbf{x} は式(2.1)で、目的関数 $f(\mathbf{x})$ は式(2.6)で定義されている。制約条件 $g_k(\mathbf{x})$ は次に示す制約条件を並べたものとする。

表 2-1 [上下限值制約]

式(2.14) [幅圧比制約]

<1次短期設計用荷重時>

$$\delta_i / h_i \leq 1/200, \quad i = 1, \dots, n_s \quad \text{[層間変形角制約]}$$

$$\left| \frac{M}{Z f_{bs}} \right| + \left| \frac{N}{A f_{cs}} \right| \leq 1 \quad \text{[許容応力度比制約]}$$

<1次長期設計用荷重時>

$$\left| \frac{M}{Z f_{bl}} \right| + \left| \frac{N}{A f_{cl}} \right| \leq 1 \quad \text{[許容応力度比制約]}$$

<2次計用荷重時：Qun 分布に基づく外力分布>

式(2.10) [保有水平耐力制約]

<2次計用荷重時：Ai 分布に基づく外力分布>

式(2.11), 式(2.12) [崩壊形に関する制約]

記号の説明：

δ_i : 各層の層間変形	h_i : 各層の階高
f_{bs} : 許容曲げ応力度 (短期)	f_{cs} : 許容圧縮応力度 (短期)
f_{bl} : 許容曲げ応力度 (長期)	f_{cl} : 許容圧縮応力度 (長期)
M : 部材端モーメント	N : 部材端圧縮力
Z : 部材の断面係数	A : 部材の断面積

問題(2.15)は0-1制約を含み、非線形0-1混合整数計画問題に属する問題である。混合整数計画問題を直接解くような方法を用いることも可能であるが、本研究では問題(2.15)の0-1制約を非凸2次制約条件

$$\alpha_j^{(i)} \left(\alpha_j^{(i)} - 1 \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n_s, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

に書き換えた問題

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ (P_0) \quad \text{s.t.} \quad & g_k(\mathbf{x}) \leq 0, \quad k = 1, \dots, m \\ & \alpha_j^{(i)} \left(\alpha_j^{(i)} - 1 \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n_s, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

を考える。保有水平耐力を含む制約条件(2.10)は第1章で述べたように設計パラメータに対する感度係数を連続微分の意味では定義できない点を含む。そのような場合にもClarke劣微分²⁾の意味で局所最適解への収束が保証されている非線形最適化法⁸⁾を適用すれば、問題 (P_0) の局所最適解を得ることは可能である。しかし、このような非線形最適化法を用いたとしても、非凸性の強い制約条件を含む問題 (P_0) に対しては強い初期値依存性が予想され、良い局所解が安定的に得られるかは明らかではない。なお、構造特性係数Ds値のある定数に固定した問題とは、問題 (P_0) において、0-1変数 α を0あるいは1に固定した問題に相当し、問題 (P_0) よりは性質が良い問題であると予想される。

2.2.4 線形緩和問題の定式化

前節で指摘したように、前節で述べた最適化問題は非凸性の大きい制約条件(2.16)を含む問題である。本節では、より大域的に性質の良い解を求めるために非凸性を減じた緩和問題を考える。一次設計の許容応力度、層間変形角、二次設計の保有水平耐力などの制約条件の非凸性は0-1制約条件の非凸性に比べて弱いものであると予想されるため、緩和を行わないものとする。次式に示すような0-1制約条件から線形不等式への緩和を考える。

$$\alpha_j^{(i)} \in \{0, 1\} \xrightarrow{\text{緩和}} 0 \leq \alpha_j^{(i)} \leq 1 \quad (2.17)$$

整数制約を不等式制約に置き換えることを線形緩和と呼ぶ。問題(2.15)における0-1制約

を線形緩和することにより得られる問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(\mathbf{x}) \\
 \text{s.t.} \quad & g_k(\mathbf{x}) \leq 0, \quad k = 1, \dots, m \\
 & 0 \leq \alpha_j^{(i)} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_S, \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

を線形緩和問題と呼ぶ。問題(2.18)を解いて得られる最適解の目的関数値は真の最適解の目的関数値の下界である。

1層1スパン純ラーメンモデルを例として、柱部材の断面積と幅厚比に対する必要保有水平耐力制約条件の許容領域を図2-3に示す。ここで、図2-3の横軸と縦軸はそれぞれ上下限界を0から1にスケールした断面積と幅厚比である。図2-3 (a)は上界の定式化の許容領域、図2-3 (b)はその線形緩和問題、下界の定式化の許容領域を表している。線形制約は凸制約であるため、非凸性の強い0-1制約に対し式(2.17)のような線形緩和を利用することにより、図2-3 (a)に示した階段状な非凸性の強い許容領域が図2-3 (b)に示した滑らかな許容領域になることがわかる。ただし、0-1制約以外の制約条件に緩和を行わないため、図2-3 (b)に示した許容領域が厳密な凸領域かは明らかではない。

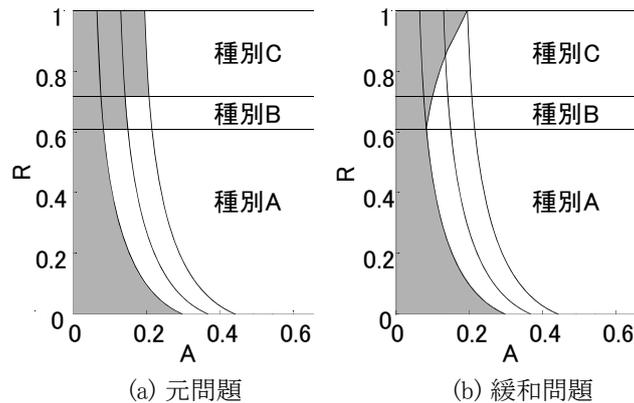


図2-3 許容領域の緩和

2.2.5 分枝限定法のアルゴリズム

本節では混合整数計画問題(P_0)に対して、分枝限定法に基づいて解くアルゴリズム¹²⁾の説明を行う。まず、線形緩和問題(2.18)のいくつかの種別変数 α に対して0または1を与えた問題を添字の組の集合 I_n^0, I_n^1 を用いて

$$\begin{aligned}
& \min f(\mathbf{x}) \\
(P_n) \quad & \text{s.t. } g_k(\mathbf{x}) \leq 0, \quad k = 1, \dots, m \\
& 0 \leq \alpha_j^{(i)} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_S, \quad j = 1, 2, 3 \\
& \alpha_j^{(i)} = 0, \quad (i, j) \in \mathcal{I}_n^0 \\
& \alpha_j^{(i)} = 1, \quad (i, j) \in \mathcal{I}_n^1
\end{aligned}$$

と表す。ここで、 \mathcal{I}_n^0 は問題 (P_n) において第 i 層の第 j 種別変数 $\alpha_j^{(i)}$ を0と指定する添字の組 (i, j) の集合、同様に \mathcal{I}_n^1 は (P_n) において $\alpha_j^{(i)}$ を1と指定する添字の組 (i, j) の集合、すなわち

$$\mathcal{I}_n^0 = \{(i, j) \mid \alpha_j^{(i)} = 0\}, \quad \mathcal{I}_n^1 = \{(i, j) \mid \alpha_j^{(i)} = 1\} \quad (2.19)$$

と定義する。ここで、 $\mathcal{I}_m^0 \cap \mathcal{I}_m^1 = \emptyset$ とする。

次に緩和解の情報から0-1制約を満たす暫定解を構成するための操作を定義する。ある緩和解 \mathbf{x} におけるすべての種別変数 α に対し、

$$\begin{cases}
(i, 1) \in \mathcal{I}^1, (i, 2) \in \mathcal{I}^0, (i, 3) \in \mathcal{I}^0 & \text{if } 0.9 \leq \alpha_1^{(i)} \leq 1.0 & \text{(種別A)} \\
(i, 1) \in \mathcal{I}^0, (i, 2) \in \mathcal{I}^0, (i, 3) \in \mathcal{I}^1 & \text{if } 0.9 \leq \alpha_3^{(i)} \leq 1.0 & \text{(種別C)} \\
(i, 1) \in \mathcal{I}^0, (i, 2) \in \mathcal{I}^1, (i, 3) \in \mathcal{I}^0 & \text{otherwise} & \text{(種別B)}
\end{cases} \quad (2.20)$$

を満たすような添字の集合 $\mathcal{I}^0, \mathcal{I}^1$ を考え、このような添字の集合を得る操作を $\mathcal{I}^0(\mathbf{x})$, $\mathcal{I}^1(\mathbf{x})$ と表す。なお、2.2節のような問題設定の場合には $\alpha_2^{(i)} = 0$ が線形緩和問題(2.18)の解となることを容易に示せるので、それ以外の種別変数である $\alpha_1^{(i)}$ および $\alpha_3^{(i)}$ の値に応じて暫定解を構成する式(2.20)の方法が有効である。

最後に緩和解 \mathbf{x} が元問題 (P_0) の許容解でない場合に、緩和解 \mathbf{x} の情報から子問題を作成する操作を定義する。緩和解 \mathbf{x} において種別変数 $\alpha = \{\alpha_j^{(i)}\}$ が0と1以外の値となる最小の i 、すなわち

$$\hat{i} = \min\{i \mid 0 < \alpha_j^{(i)} < 1, j = 1, 2, 3\} \quad (2.21)$$

となる \hat{i} に対して、3組の添字集合 $\{\mathcal{I}_A^0, \mathcal{I}_A^1\}, \{\mathcal{I}_B^0, \mathcal{I}_B^1\}, \{\mathcal{I}_C^0, \mathcal{I}_C^1\}$ を

$$\begin{aligned}
(P_A): \quad & \mathcal{I}_A^0 = \{(\hat{i}, 2), (\hat{i}, 3)\}, \quad \mathcal{I}_A^1 = \{(\hat{i}, 1)\} \\
(P_B): \quad & \mathcal{I}_B^0 = \{(\hat{i}, 1), (\hat{i}, 3)\}, \quad \mathcal{I}_B^1 = \{(\hat{i}, 2)\} \\
(P_C): \quad & \mathcal{I}_C^0 = \{(\hat{i}, 1), (\hat{i}, 2)\}, \quad \mathcal{I}_C^1 = \{(\hat{i}, 3)\}
\end{aligned} \quad (2.22)$$

と定め、これらの添字集合に対応する三つの子問題を (P_A, P_B, P_C) とする。式(2.21), (2.22)を用いて緩和解 \mathbf{x} に対応して得られる子問題を $P_A(\mathbf{x}), P_B(\mathbf{x}), P_C(\mathbf{x})$ と表す。以上を用いた設計アルゴリズムを以下に示す。なお、各ステップで、特に指示がない場合には、直後のステップへ進むこととする。

ステップ1 (下界の初期値) : 問題集合 $\mathcal{N} = \emptyset$ を定義する。 $\mathcal{I}_L^0 := \emptyset, \mathcal{I}_L^1 := \emptyset$ と与え、線形緩和問題(2.18)を問題 (P_L) と表す。問題 (P_L) を解き、得られた解を $\underline{\mathbf{x}}$ 、その目的関数値を下界値 \underline{z} とし、 $\underline{\mathbf{x}}' := \underline{\mathbf{x}}, \underline{z}' := \underline{z}$ と更新する。

ステップ2 (上界の初期値) : $\underline{\mathbf{x}}$ におけるすべての種別変数 $\underline{\alpha}$ が0または1どちらに近いかを分類することを考える。式(2.20)で定まる添字集合を $\mathcal{I}_U^0 := \mathcal{I}^0(\underline{\mathbf{x}})$ および $\mathcal{I}_U^1 := \mathcal{I}^1(\underline{\mathbf{x}})$ と与えて問題 (P_U) を考える。問題 (P_U) を解いて得られる最適解を暫定解 \mathbf{x} とし、その目的関数値を上界 z とする。

ステップ3 : $\underline{\mathbf{x}}'$ が元問題 (P_0) の実行可能解且つ $\underline{z}' < z$ の場合、 $\mathbf{x} := \underline{\mathbf{x}}', z := \underline{z}'$ と更新し、ステップ6へ進む。

ステップ4 : $\underline{z}' \geq z$ の場合、ステップ6へ進む。

ステップ5 : $\underline{\mathbf{x}}'$ に対し、式(2.21),(2.22)で定まる添字集合に対応する三つの子問題 $P_A = P_A(\underline{\mathbf{x}}'), P_B = P_B(\underline{\mathbf{x}}'), P_C = P_C(\underline{\mathbf{x}}')$ を作成し、 \mathcal{N} に加える。

ステップ6 : $\mathcal{N} = \emptyset$ であれば、暫定解 \mathbf{x} を最適解として出力し、終了する。そうでなければ、 \mathcal{N} の中から一つの子問題を選ぶ。ここで、 $\underline{\mathbf{x}}'$ における種別変数 $\underline{\alpha}_1^{(i)'}$ に対して式(2.20)を満たすような添字集合を持つ子問題が \mathcal{N} に含まれていればこれを選ぶ。このような子問題が \mathcal{N} に含まれていない場合、最も新しく生成された子問題を選ぶ。選ばれた子問題を (P') とし、 \mathcal{N} から (P') を取り除く。

ステップ7 : 問題 (P') を解き、許容解を持たないならばステップ6へ戻る。得られた解を $\underline{\mathbf{x}}'$ 、下界値を \underline{z}' とする。

ステップ8 : $\underline{z}' < z$ の場合、 $\underline{\mathbf{x}} := \underline{\mathbf{x}}', \underline{z} := \underline{z}'$ と更新して、ステップ2へ戻る。

ステップ9 : ステップ3へ戻る。

2.3 数値解析例

2.3.1 3層3スパン純ラーメンモデル解析例 1

図2-4に示す3層3スパン鋼構造純ラーメンモデルの例題を考える。すべての部材でSN400級鋼を用い、柱部材には角形鋼管、梁部材にはH形鋼を用いるとする。床荷重の幅を6.4メートルとし、床荷重として基準階7.75kN/m²、R階10.09kN/m²を与え、図2-4に示すように基準階、R階にそれぞれ一様分布荷重を49.6kN/m、64.576 kN/mと与えたものを鉛直荷重とする。さらにAi分布(C0=0.2)に従った水平荷重を図2-4に示すように与える。1次長期設計用荷重時には鉛直荷重のみ、1次短期設計用荷重時には鉛直荷重と水平荷重を作用させる。さらに部材断面の設計変数は、図2-4に示す断面番号に対応するように与える。

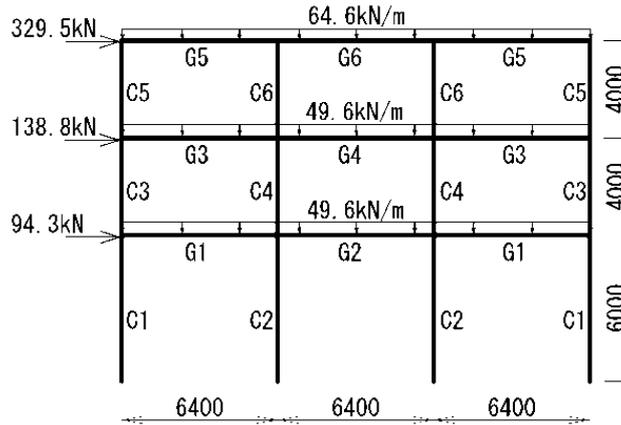


図2-4 3層3スパンモデル

線形緩和問題において、Clarke劣微分²⁾の意味での局所最適解への収束性を保証するために内点法¹³⁾と直接探索法¹⁴⁾のクロスオーバー¹⁵⁾を用いる。また、表2-1に示す設計変数の上下制限約が0から1となるように設計変数を正規化して解いた。実行環境は

CPU : Intel Core2 Duo 3GHz, OS: Windows XP,
 MATLAB R2010b, Microsoft Visual C++ 2008

であり、この解析例においては0.01秒程度で増分解析を1回行うことができた。この解析例に対し2.2.5節で示した分枝限定法のアルゴリズムを適用する。アルゴリズムと適用したフローチャートを図2-5に示し、図2-5中の数字は目的関数値を表す。以下に詳細の説明を行う。まず、ステップ1において、線形緩和問題(P_L)を解き、得られる最適解を \underline{x} とし、目的関数値 $\underline{z} = 327.9$ を下界値とする。ここで、 \underline{x} における種別変数 α は0となったものを除いて

$$\alpha_3^{(1)} = 1.00, \quad \alpha_3^{(2)} = 1.00, \quad \alpha_1^{(3)} = 0.25, \quad \alpha_3^{(3)} = 0.75$$

と得られた。ここで、 $\underline{x}' := \underline{x}, \underline{z}' := \underline{z}$ と更新する。ステップ2では種別変数 α に対して式(2.20)より、添字集合 $\mathcal{I}_U^0, \mathcal{I}_U^1$ を次式のように求め、対応する問題(P_U)を作成する。

$$(P_U): \quad \mathcal{I}_U^1 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}, \\ \mathcal{I}_U^0 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$$

問題(P_U)の最適解を暫定解 \underline{x} とする。次に、ステップ5において \underline{x}' に含まれる種別変数 $\alpha_j^{(i)'}$ では3層目に対応する $\alpha_1^{(3)'}, \alpha_3^{(3)'}$ のみ0と1以外の値を取っているので、式(2.22)に対応する添字集合を

$$(P_A): \quad \mathcal{I}_A^1 = (3, 1), \quad \mathcal{I}_A^0 = \{(3, 2), (3, 3)\} \\ (P_B): \quad \mathcal{I}_B^1 = (3, 2), \quad \mathcal{I}_B^0 = \{(3, 1), (3, 3)\} \\ (P_C): \quad \mathcal{I}_C^1 = (3, 3), \quad \mathcal{I}_C^0 = \{(3, 1), (3, 2)\}$$

と定め、これらの添字集合に対応する三つの子問題 $P_A := P_A(\underline{x}')$,

$P_B := P_B(\mathbf{x}'), P_C := P_C(\mathbf{x}')$ を問題集合 \mathcal{N} に加える。次にステップ6に進み、子問題 $P_B(\mathbf{x}')$ を選び、 \mathcal{N} から取り除く。ステップ7で子問題(P_B)を解き許容解が得られたので、この解を \mathbf{x}' 、対応する目的関数値を z' として更新し、ステップ3に戻る。同様に繰り返し子問題(P_A), (P_C)を解く。ここで(P_C)の最適解として(P_0)の実行可能解かつその暫定値 z より低い目的関数値が得られたとステップ3において判定されるため、暫定解 \mathbf{x} を更新する。問題の集合 \mathcal{N} が空集合になるので、この暫定解 \mathbf{x} を最適解として出力し、分枝限定操作を終了する。最適解を求めるためには線形緩和問題を5回解く必要があった。問題(P_L)を解くためには113秒を要した。問題(P_L)の子問題では問題(P_L)の解を初期値として利用可能であるので、それに適した¹⁵⁾有効制約法¹³⁾と直接探索法¹⁴⁾のクロスオーバーを用いた結果、子問題を一回解く時間を20秒程度に短縮できた。分枝限定操作に従い得られた元問題(P_0)の最適解について、断面積を線の太さに比例させて描いた架構図を図2-6(a)に示す。この設計解を各層種別最適解と呼び、その目的関数値は表2-4に示すように328.0となった。

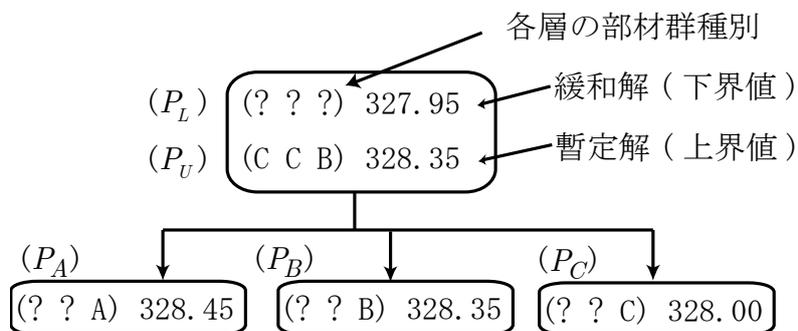
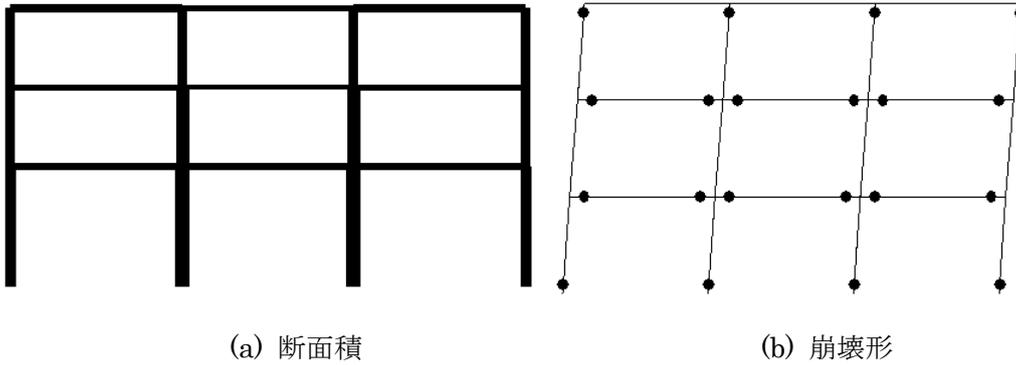


図2-5 3層3スパン解析例1の分枝限定フローチャート

表2-4 3層3スパン解析例1の目的関数値

各層種別最適解 (全体崩壊形)	328.0
全層種別A最適解 (部分崩壊形)	311.0
全層種別B最適解 (部分崩壊形)	304.7
全層種別C最適解 (部分崩壊形)	294.7

この最適解における部材断面の寸法は表2-5に示す通りであり、層の部材群種別は全層すべてCとなった。また制約条件の中では幅厚比制約、許容応力度制約、全体崩壊形に関する制約がactiveとなった。この最適解において、Ai分布に基づく外力分布による崩壊形を図2-6(b)に示す。図2-6(b)より崩壊形が全体崩壊形となっていることがわかる。



(a) 断面積 (b) 崩壊形
 図2-6 3層3スパン解析例1の最適化結果

表2-5 3層3スパン解析例1の最適解断面寸法

ID	柱断面				ID	梁断面							
1	□-	474.2	×	9.9	1	H-	655.1	×	259.0	×	8.9	×	11.4
2	□-	529.8	×	11.0	2	H-	649.8	×	285.9	×	8.9	×	9.6
3	□-	438.2	×	9.1	3	H-	520.0	×	302.0	×	7.1	×	9.7
4	□-	506.7	×	10.6	4	H-	519.8	×	296.9	×	7.1	×	9.6
5	□-	350.0	×	11.4	5	H-	795.8	×	274.6	×	11.0	×	8.9
6	□-	350.0	×	11.4	6	H-	635.3	×	266.1	×	8.7	×	9.0

比較のために、 A_i 分布に基づく外力分布で保有水平耐力を求める場合を考える。この場合、建築基準法上では崩壊形が全体崩壊形となる制約を必要とせず、また部材群種別は全層で共通となる。これを問題(P_0)に対応させて表せば、問題(P_0)に対して式(2.11), (2.12)の崩壊形に関する条件を除いて、次に示す条件を与える問題に相当する。

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^{(1)} &= \alpha_1^{(2)} = \dots = \alpha_1^{(n_s)} = \bar{\alpha}_1, \\
 \alpha_2^{(1)} &= \alpha_2^{(2)} = \dots = \alpha_2^{(n_s)} = \bar{\alpha}_2, \\
 \alpha_3^{(1)} &= \alpha_3^{(2)} = \dots = \alpha_3^{(n_s)} = \bar{\alpha}_3
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

この問題において、 $\bar{\alpha}_1 = 1$ と与えた場合の最適解を全層種別A最適解、 $\bar{\alpha}_2 = 1, \bar{\alpha}_3 = 1$ と与えた場合の最適解をそれぞれ全層種別B最適解、全層種別C最適解と呼ぶ。これらの最適解の目的関数値を表2-4に示す。表2-4よりこれらの最適解の目的関数値は崩壊形を考慮した各層種別最適解よりも小さな値となっていることがわかる。ただし、崩壊形はいずれも部分崩壊或いは局部崩壊になっている。どのような設計解が望ましいかについては、目的関数値の大小だけで一概に決まるものではなく、崩壊形を含めた設計者の総合的な判断が必要となる。本手法を用いれば各設計条件に対してどの程度のコスト増加が発生するかを提示でき、設計者に有用な情報を提示することが可能である。そのような意味から、本研究は数理的方法により合理的な判断を支援するための一つと位置づけられる。

2.3.2 3層3スパン純ラーメンモデル解析例2

前節で示した解析例1においては、最適解における必要保有水平耐力の制約条件式(2.10)がactiveとならなかった。ここで、必要保有水平耐力制約がactiveとなる問題の性質を調べるため、前節の解析例1において、式(2.7)の C_0 を1.5と与えた問題を考える。ただし、この設定は問題の性質を調べるためであり、建築基準法で求める以上の耐震性能を要求していることに注意が必要である。すべての設計変数の上下限界を0から1になるように正規化した上で設計変数の初期値を一様に0.3と与えた上で、図2-7に示すように分枝限定法のアルゴリズムで解いた。この途中では下界値よりも低い上界値が得られることがあった。これは下界値として近似的な値を用いているためであり、このような場合はこの上界に対応する設計解を初期値として与えて分枝限定を最初から解きなおした。以上より得られた最適解は1層目が種別C、2層目と3層目が種別Aとなり、目的関数値は331.1となった。

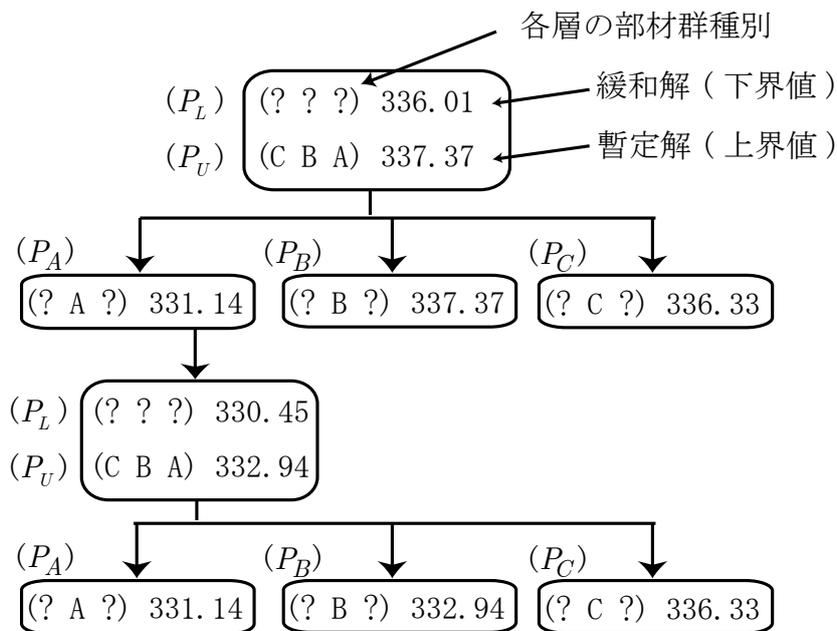
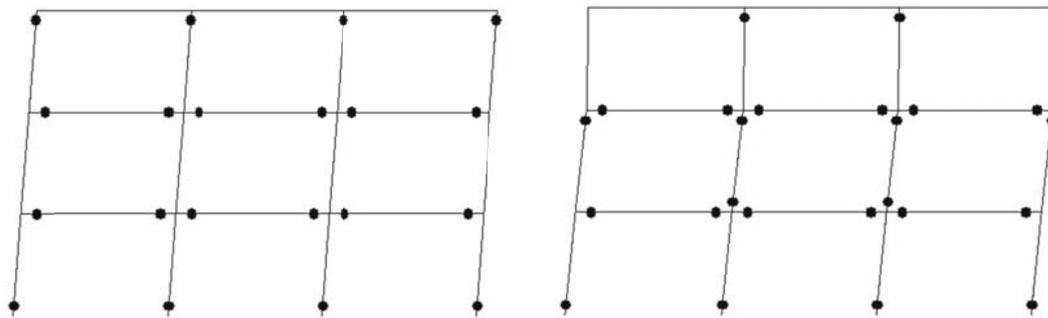


図2-7 3層3スパン解析例2の分枝限定フローチャート

この最適解における部材断面の寸法は表2-6に示す通りである。また制約条件の中では幅厚比制約、許容応力度制約、必要保有水平耐力制約、全体崩壊形に関する制約がactiveとなった。この最適解において、 A_i 分布に基づく外力分布による崩壊形を図2-8(a)に示す。図2-8(a)より、崩壊形が全体崩壊形となっていることが分かる。また、比較のため、全層種別Cの最適解における崩壊形を図2-8(b)に示す。図2-8(b)より、崩壊形が層崩壊となっていることが分かる。



(a) 各層種別最適解 (b) 全層種別C最適解

図2-8 3層3スパン解析例2の最適解における崩壊形

表2-6 3層モデルの最適解断面寸法

ID	柱断面				ID	梁断面							
1	□-	435.6	×	9.1	1	H-	655.1	×	259.0	×	8.9	×	11.4
2	□-	578.5	×	12.1	2	H-	649.8	×	285.9	×	8.9	×	9.6
3	□-	422.6	×	9.4	3	H-	520.0	×	302.0	×	7.1	×	9.7
4	□-	486.8	×	10.8	4	H-	519.8	×	296.9	×	7.1	×	9.6
5	□-	350.0	×	11.4	5	H-	795.8	×	274.6	×	11.0	×	8.9
6	□-	350.0	×	11.4	6	H-	635.3	×	266.1	×	8.7	×	9.0

次に線形緩和と分枝限定法の有効性を検証するために、すべての設計変数の上下限値を0から1になるように正規化した上で設計変数の初期値を一様に0.3,0.5,0.7の与えた計3組とランダムで生成した初期値3組から初期値依存性を調べる。ここで、許容な制約条件違反量は 10^{-6} 以下と与え、制約条件違反量がこの値以下となった場合に許容解と判定する。

これらの6組の初期値に対して元問題(P_0)を内点法¹³⁾で直接解いたところ、いずれも最適化が収束せず、許容解すら求まらなかった。次に、同じ6組の初期値に対して線形緩和問題(P_L)を内点法で解いたところ、3組では許容解に収束した。以上の結果を表2-7と表2-8にまとめる。さらに、直接探索法¹⁴⁾によるクロスオーバーとして、線形緩和問題(P_L)に対し、表2-7に示した内点法で得られた解を初期値に与えて直接探索法で解いたところ、6組中の5組で許容解に収束した。表2-7、表2-8、表2-9より内点法と直接探索法によるクロスオーバーが最も安定して解を求められていることがわかる。ただし、図2-7に示す分枝限定法では最終的に目的関数値331.1が得られており、これは表2-9に示したすべての目的関数値よりも小さい値である。最良の場合でもその誤差は約1.4%であった。この誤差は緩和問題(P_L)の非凸性に由来するものである。

表2-7 緩和問題(P_L)を内点法で解いた場合

初期値	0.3	0.5	0.7	Rand1	Rand2	Rand3
目的関数値	336.0	336.1	337.6	393.4	364.6	336.0
増分解析回数	9456	9350	9364	9536	8806	9296
制約違反量	7.4×10^{-9}	0.0	3.8×10^{-4}	2.7×10^{-8}	4.2×10^{-2}	1.0×10^{-4}

表2-8 元問題(P_0)を内点法で解いた場合

初期値	0.3	0.5	0.7	Rand1	Rand2	Rand3
目的関数値	386.48	558.15	1342.41	1106.32	658.53	368.10
増分解析回数	6674	9566	7356	9380	9970	5676
制約違反量	3.7×10^{-1}	2.0×10^0	1.8×10^2	8.3×10^{-2}	1.7×10^3	2.3×10^{-1}

表2-9 緩和問題(P_L)を直接探索法で解いた場合

(内点法からのクロスオーバー)

初期値	0.3	0.5	0.7	Rand1	Rand2	Rand3
目的関数値	335.99	336.06	337.64	393.38	364.55	336.04
増分解析回数	11454	11348	10500	11534	10990	11292
制約違反量	3.8×10^{-6}	0.0	4.8×10^{-10}	2.7×10^{-8}	4.2×10^{-2}	8.4×10^{-7}

以上をまとめると、この解析例においては次の考察がなされる。

- (1) 多点探索により初期値依存性を低減できることが一般的に知られている。ただし、この解析例の元問題に多点探索を直接適用しても、その効果は小さく、許容解すら得られていないことが表 2-8 に示されている。
- (2) 表 2-8 と表 2-9 の比較より緩和問題の局所解の目的関数値のばらつきは元問題のものよりも小さいことが分かる。すなわち初期値依存性が低減されていることが示されている。
- (3) 多点探索を用いて定めた下界の近似値は表 2-9 では 335.99 である。図 2-7 に示す分枝限定法の最終的な目的関数値 331.1 と比較すると、非凸性に起因する初期値依存性の影響は少なくとも約 1.4% 生じたと言える。

非凸性に起因する誤差が生じた場合にも図2-7に示すように下界値を更新して分枝限定操作をやり直すことによる対応は可能であり、単純に多点探索を繰り返すよりも良い設計解が発見できるものと予想される。以上より、線形緩和問題と分枝限定法を考える意義が例示されたと言える。

2.3.3 10層3スパンブレース付きモデル解析例

図2-9に示す10層3スパンブレース付き鋼構造平面骨組モデルを考える。SN490級鋼を用い、柱部材には角形鋼管、梁部材にはH形鋼、ブレース部材には座屈拘束ブレースを用いるとする。

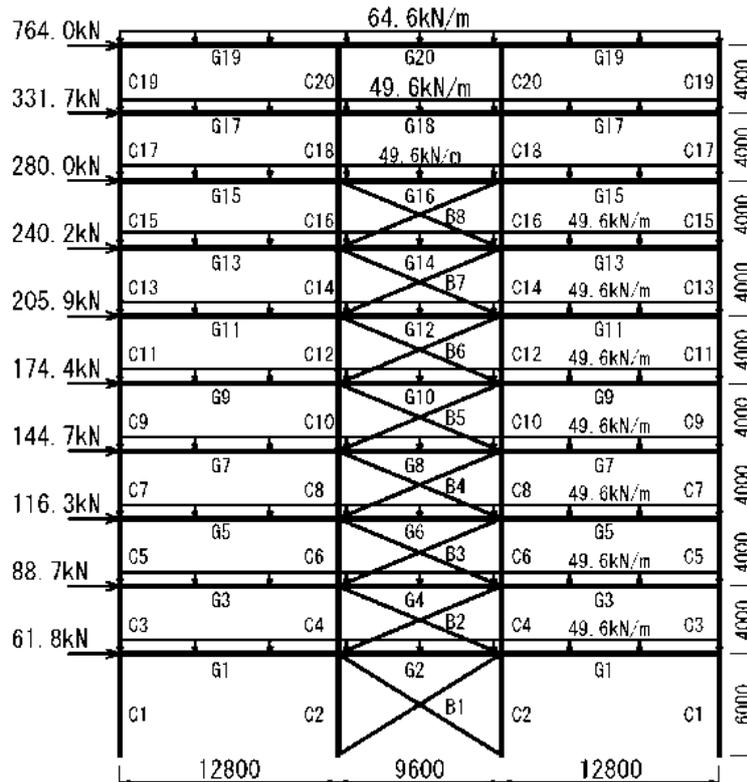


図2-9 10層3スパンブレース付きモデル

図2-9に示すような荷重条件を考え、1次長期設計用荷重時には鉛直荷重のみ、1次短期設計用荷重時には鉛直荷重と水平荷重を作用させる。さらに部材断面の設計変数は、図2-9に示す断面番号に対応するように与える。この解析例において、線形緩和問題(P_L)を解いて得られる最適解すなわち緩和解 \underline{x} は元問題(P_0)の非許容解であった。この緩和解において目的関数値は2767.4であった。この線形緩和解を利用し、式(2.20)によりすべての層の種別を固定した問題 P_U を解いて得られた暫定解の目的関数値は2819.1となった。暫定解と下界の目的関数値の差が2%以内に収まっていたため、ここでは暫定解を元問題の近似的な最適解として計算を打ち切った。3.1節同様にこの設計解を各層種別最適解とよび、断面積を線の太さに比例させて描いた架構図を図2-10(a)に示し、さらに各層の種別を表2-10に示す。この最適解においては幅厚比制約、許容応力度制約、必要保有水平耐力制約、全体崩壊形に関する制約条件がactiveとなっていた。また、 A_i 分布に基づく外力分布による崩

壊形は図2-11(a)で示すような全体崩壊形となっていた。

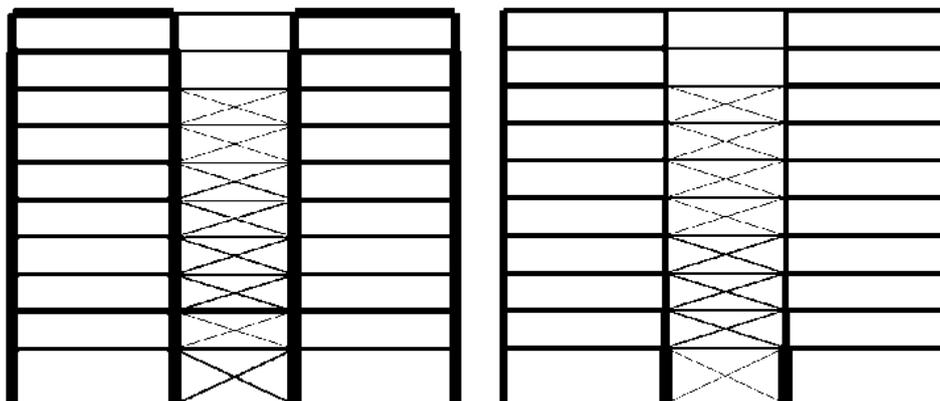
3.1節と同様に A_i 分布に基づく外力分布で保有水平耐力を求め、これらの設計解をそれぞれ全層種別A最適解、全層種別B最適解、全層種別C最適解と呼び、これらの最適解の目的関数値を表2-11に示す。全層種別A最適解、全層種別B最適解、全層種別C最適解では、崩壊形はいずれも部分崩壊或いは局部崩壊になっていた。例として、全層種別Cの場合の最適解において、断面積を描いた架構図を図2-10(b)に示し、 A_i 分布に基づく外力分布による崩壊形を図2-11(b)に示す。3.1節での考察と同様にいずれの設計解が望ましいかは設計者の判断による部分が大きいものと考えられる。

表2-10 10層モデル層ごとの種別

層	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
種別	C	A	B	B	B	C	C	C	C	A

表2-11 10層モデルの目的関数値

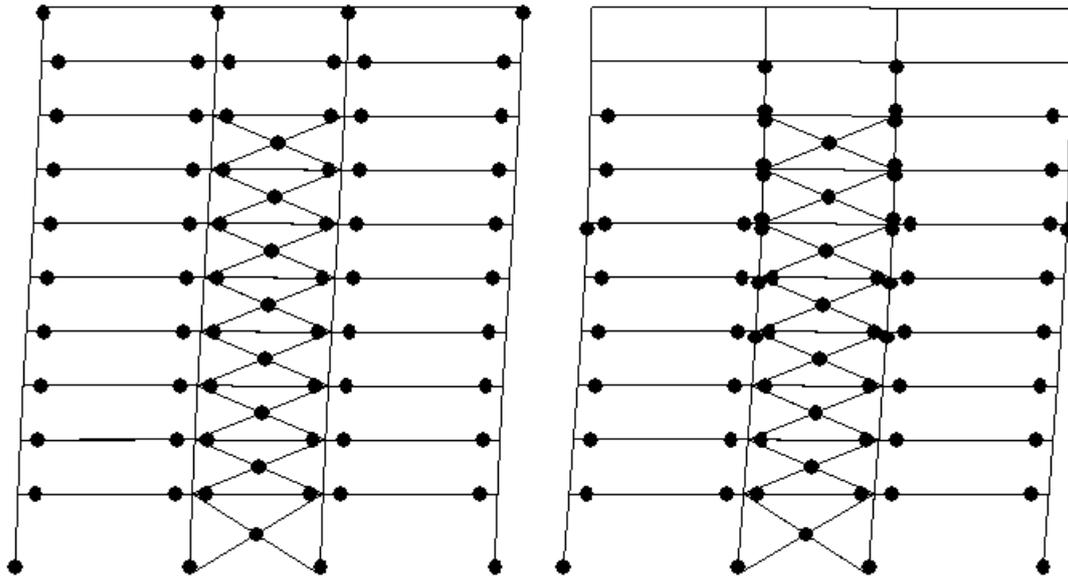
各層種別最適解（全体崩壊形）	2819.1
全層種別 A 最適解（部分崩壊形）	2245.9
全層種別 B 最適解（部分崩壊形）	2200.2
全層種別 C 最適解（部分崩壊形）	2191.3



(a) Q_{un} 分布の場合

(b) A_i 分布の場合

図2-10 10層モデル最適化結果（断面積）



(a) Q_{un} 分布の場合

(b) A_i 分布の場合

図2-11 10層モデルの最適解の崩壊形

2.4 まとめ

本章で得られた結論は以下の通りである。

- (1) 分枝限定法を用いて、構造特性係数 D_s の選択を含めた鋼構造骨組の最小重量設計問題を解く手法を提案した。本手法を用いれば、各部材種別と弾塑性応答との関連を考慮した上で実務設計に則した鋼構造建築物の最適設計解を実用的な時間内に得ることが可能であることを数値解析例により確認した。
- (2) 本手法では上界と下界を用いて、局所解の信頼性を定量的に評価できる。また、分枝限定操作においては元問題の設計条件を満たす暫定解が常に求められており、元問題の最適解を最後まで求めなくとも、暫定解を設計に利用することも可能である。
- (3) 構成した緩和問題も依然、非凸計画問題であるため、その局所解の目的関数値は元問題の下界の近似値にとどまる。多点探索によりその影響を低減させてはいるものの、3層3スパン純ラーメンモデル解析例2では緩和問題の局所解の目的関数値（下界の近似値）と最終的に得られた局所解の目的関数値（更新された下界の近似値）との間には約1.4%の差が観察された。ただし、混合整数計画問題を直接に多数解く方法と比べて、緩和問題を解く本方法では目的関数値の初期値依存性が低減されること、および安定して許容解が得られることを解析例において確認した。
- (4) 解析例において、 A_i 分布に基づく外力分布で梁降伏先行型全体崩壊形を保証し、かつ設計基準を満たす Q_{un} 分布に基づく外力分布で保有水平耐力を求める場合と、崩壊形の指定を与えずに A_i 分布に基づく外力分布で保有水平耐力を求める場合とを比べると、約1割から3割程度のコスト増加がみられた。後者では崩壊形が部分崩壊又は局部崩壊になることが多いため、前者のコスト増加は全体崩壊形を保証するために必要なコストとみなせる。本手法を用いればこのような情報を提示することが可能である。

参考文献

- 1) 建築物の構造関係技術基準解説書編集委員会: 2007年版建築物の構造関係技術基準解説書, 全国官報販売協同組合, 2007.8
- 2) F. H. Clarke: Optimization and nonsmooth analysis, Society for Industrial Mathematics, 1990
- 3) 澤田樹一郎, 松尾彰: 弾性・塑性制約下における鋼構造建築骨組の離散最適化問題に対する列挙型アルゴリズムの改善解法, 日本建築学会構造系論文集, No.574, pp.93-98, 2003.12
- 4) 田村尚土, 大森博司: 多目的最適化法による鋼構造物の構造設計支援手法の提案(その2) 保有耐力設計に基づく最適設計法, 日本建築学会構造系論文集, Vol.74, No.643, pp.1671-1676, 2009.9
- 5) 松嶋圭吾, 高田豊文: 多目的遺伝的アルゴリズムを用いたトラス構造物の限界状態設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集B-1, pp.303-304, 2004.7
- 6) 大崎純: 局所探索法による鋼構造骨組の多目的最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.73, No.634, pp.2135-2141, 2008.12
- 7) 吉富信太, 上谷宏二, 辻聖晃: 弾塑性応答制約条件下の鋼構造立体骨組の最適設計解特性, 鋼構造年次論文報告集, Vol.11, pp.351-354, 2003
- 8) C. Audet, J. E. Dennis: Mesh adaptive direct search algorithms for constrained optimization, Citeseer, 2004
- 9) 久保幹雄, 田村明久, 松井知己: 応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店, 2002.5
- 10) 青山博之, 上村智彦: マトリックス法による構造解析, 培風館, 1988
- 11) 趙衍剛, 小野徹郎, 石井清, 吉原和宏: 鉄骨骨組の全体崩壊機構に要求される柱・梁耐力比に関する一考察, 日本建築学会構造系論文集, No.558, pp.61-67, 2002.8
- 12) A. H. Land, A. G. Doig: An automatic method of solving discrete programming problems, Econometrica: Journal of the Econometric Society, pp.497-520, 1960
- 13) Richard A. Waltz, Todd D. Plantenga: KNITRO User's Manual Version 7.0, Ziena Optimization Inc., 2010.9
- 14) Global Optimization Toolbox User's Guide, 2010
- 15) 山下浩: 大規模最適化問題へのアプローチ: 有効制約法, 内点法, 外点法, システム/制御/情報: システム制御情報学会誌, Vol.50, No.9, pp.332-337, 2006

第3章 半正定値緩和を用いた構造特性係数の不連続性を考慮した鋼構造骨組の最適設計法

3.1 はじめに

本章では、第2章と同様に、鋼構造建築物の鋼材量最小化問題における構造特性係数の非凸性に注目し、凸緩和問題を利用した最適設計法について述べる。ただし、本章では、第2章で利用した線形緩和問題のほか、理論上緩和効果が線形緩和より良いとされる半正定値緩和問題を利用した方法を提案する。また、数値解析例を通じて、この二種類の緩和法の効果と効率を比較する。

3.2 設計問題の定式化

第2章と同様に、構造特性係数 D_s が0-1変数を用いて表し、部材断面を連続変数とした設計問題を混合整数計画問題として定式化する。さらに0-1制約に対して線形緩和と半正定値緩和を行い、線形緩和問題と半正定値緩和問題を与える。

ただし、問題を単純化するために、以下の仮定をおく。

- (7) 形状係数 Fes を 1.0 とする。
- (8) 柱部材の種別は FA と FB のみとする。
- (9) 柱梁部材群の種別は D を非許容として、A, B および C の中から選ぶとする。
- (10) 層毎の部材群種別は層に属するすべての部材種別の最低位のを A, B および C の 3 種類の中から選ぶとする。
- (11) 一次設計においては層間変形角と短期許容応力度のみを考慮する。
- (12) 二次設計における保有水平耐力は崩壊メカニズムを梁降伏に仮定する。

3.2.1 設計変数と目的関数

最適化問題の定式化において、目的関数と幅厚比制約を線形式で表現するために、設計変数ベクトル \mathbf{x} は次式のように部材断面積 A 、断面幅厚比 R 、0-1補助変数 α および変位ベクトル \mathbf{u} からなるとする。

$$\mathbf{x} = \left\{ \left\{ A_C^{k_C}, R_C^{k_C} \right\}, \left\{ A_f^{k_G}, R_f^{k_G}, A_w^{k_G}, R_w^{k_G} \right\}, \mathbf{u}, \left\{ \alpha_1^{(S)}, \alpha_2^{(S)}, \alpha_3^{(S)} \right\}; \right. \\ \left. k_C = 1, \dots, n_C, k_G = 1, \dots, n_G, S = 1, \dots, n_S \right\} \quad (3.1)$$

ここで、 n_C, n_G, n_B, n_S はそれぞれ柱断面数、梁断面数、ブレース断面数、層数を表し、上添え字の k_C, k_G, k_B はそれぞれ柱、梁、ブレースの断面番号、 S は層番号を表し、下添え字 C, f, w, B はそれぞれ柱、梁フランジ、梁ウェブおよびブレース部材に関する変数であることを示す。さらに、補助変数の下添え字 $1, 2, 3$ は該当層の部材群種別 A, B, C に対応するとする。

次式のように総鋼材量 $W(\mathbf{x})$ を表し、目的関数とする。ここで、 l は該当断面の部材長さ

の和を表す。

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{k_C} l_C^{k_C} A_C^{k_C} + \sum_{k_G} l_G^{k_G} (2A_f^{k_G} + A_w^{k_G})$$

$$k_C = 1, \dots, n_C, k_G = 1, \dots, n_G \quad (3.2)$$

3.2.2 元問題の定式化

構造特性係数Dsは柱および梁の部材群種別に応じて表3-2で示すような値をとる。0-1補助変数 α を導入すれば、第S層のDs値を次式のように表せる。

$$D_S^{(S)} = 0.25\alpha_1^{(S)} + 0.3\alpha_2^{(S)} + 0.35\alpha_3^{(S)}$$

$$\sum_i \alpha_i^{(S)} = 1, \quad \alpha_i^{(S)} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

なお、Ds値は層ごとに該当層の柱および梁の部材群種別から定まる。層ごとの柱梁部材群種別を層に属するすべての柱と梁の部材種別の最低位のものとするれば、層ごとの柱と梁の幅厚比を部材群種別に該当する限界幅厚比以下とする制約条件を考えれば良い。表3-1より、角型鋼管柱の場合には第S層の部材の幅厚比制約条件を次式のように表せる。

$$\alpha_1^{(S)}(R_C^{k_C^{(S)}} - 33) \leq 0,$$

$$\alpha_2^{(S)}(R_C^{k_C^{(S)}} - 37) \leq 0,$$

$$\alpha_3^{(S)}(R_C^{k_C^{(S)}} - 48) \leq 0, \quad k_C^{(S)} \in \mathcal{I}_C^{(S)}$$

$$\sum_i \alpha_i^{(S)} = 1, \quad \alpha_i^{(S)} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

ここで、 $\mathcal{I}_C^{(S)}$ を第S層に属するすべての柱断面の集合とする。第S層の梁の幅厚比制約も式(3.4)と同様に表せる。以降では第S層の幅厚比制約条件を表3-1に示す記号と対応させて以下のように表す。 $\mathcal{I}_G^{(S)}$ を第S層に属するすべて梁断面の集合とする。

$$\alpha_i^{(S)}(R_C^{k_C^{(S)}} - \bar{R}_{Ci}) \leq 0 \quad (\text{柱の幅厚比制約})$$

$$\alpha_i^{(S)}(R_f^{k_G^{(S)}} - \bar{R}_{fi}) \leq 0 \quad (\text{梁フランジ幅厚比制約})$$

$$\alpha_i^{(S)}(R_w^{k_G^{(S)}} - \bar{R}_{wi}) \leq 0 \quad (\text{梁ウェブ幅厚比制約}) \quad (3.5)$$

$$k_C^{(S)} \in \mathcal{I}_C^{(S)}, \quad k_G^{(S)} \in \mathcal{I}_G^{(S)}$$

$$\sum_i \alpha_i^{(S)} = 1, \quad \alpha_i^{(S)} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3,$$

表3-1 柱および梁の種別

柱及び梁の種別		FA	FB	FC
部材	部位	幅厚比	幅厚比	幅厚比
柱 (角形)		33(\bar{R}_{C1})	37(\bar{R}_{C2})	38(\bar{R}_{C3})
梁 (H形)	フランジ	9(\bar{R}_{f1})	11(\bar{R}_{f2})	15.5(\bar{R}_{f3})
	ウェブ	60(\bar{R}_{w1})	65(\bar{R}_{w2})	71(\bar{R}_{w3})

表3-2 Ds値

柱および梁の部材群種別		
A	B	C
0.25	0.3	0.35

以上より，構造特性係数 D_s を考慮した鋼材重量最小化問題の混合整数計画問題 $P0$ を次のように定義する。

[混合整数計画問題P0]

$$\begin{aligned}
 & \text{Min}_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x}) \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{p} && \text{(剛性方程式)} \\
 & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U && \text{(設計変数の上下限制約)} \\
 & \alpha_i^{(S)}(R_C^{k_C^{(S)}} - \bar{R}_{Ci}) \leq 0 && \text{(柱の幅厚比制約)} \\
 & \alpha_i^{(S)}(R_f^{k_f^{(S)}} - \bar{R}_{fi}) \leq 0 && \text{(梁フランジ幅厚比制約)} \\
 & \alpha_i^{(S)}(R_w^{k_w^{(S)}} - \bar{R}_{wi}) \leq 0 && \text{(梁ウェブ幅厚比制約)} \\
 & 0.25\alpha_1^{(S)} + 0.3\alpha_2^{(S)} + 0.35\alpha_3^{(S)} \leq D_s^{(S)} \\
 & D_s^{(S)} \cdot Q_{ud}^{(S)} \leq Q_u^{(S)} && \text{(必要保有水平耐力制約)} \\
 & g(\mathbf{x}) \leq 0 && \text{(層間変形、許容応力度制約)} \\
 & \sum_i \alpha_i^{(S)} = 1, \alpha_i^{(S)} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3 \\
 & k_C^{(S)} \in \mathcal{I}_C^{(S)}, k_f^{(S)} \in \mathcal{I}_f^{(S)}, S = 1, \dots, n_s
 \end{aligned}$$

ここで、 $Q_{ud}^{(S)}$ は地震力によって第S層に生ずる水平力、 $Q_u^{(S)}$ は第S層の保有水平耐力とする。構造特性係数Ds値をある定数に固定した問題は、問題 $P0$ において補助変数のいずれか一つを 1 に固定した場合に相当する。問題 $P0$ は非線形0-1混合整数計画問題に属し、そのままでは解くことは困難な問題である。そのため次節で問題 $P0$ の線形緩和問題を利用

して最適解を求める方法について考える。

3.2.3 線形緩和問題の定式化

問題 $P0$ は0-1変数を用いて定義されており、非凸性の大きい制約条件が存在する問題である。勾配情報に基づく数理計画法により問題 $P0$ を直接解いた場合には、強い非凸性により初期値依存性の強い局所解しか得られないことが予想される。より大域的な性質の良い解を求めるために、本節では非凸性を減じた緩和問題を考える。一次設計の許容応力度、層間変形角、二次設計の保有水平耐力などの非凸性は0-1制約条件に比べて弱いものであると予想されるため、緩和を行わないものとする。式(3.4)の線形緩和式は次のように表せる。

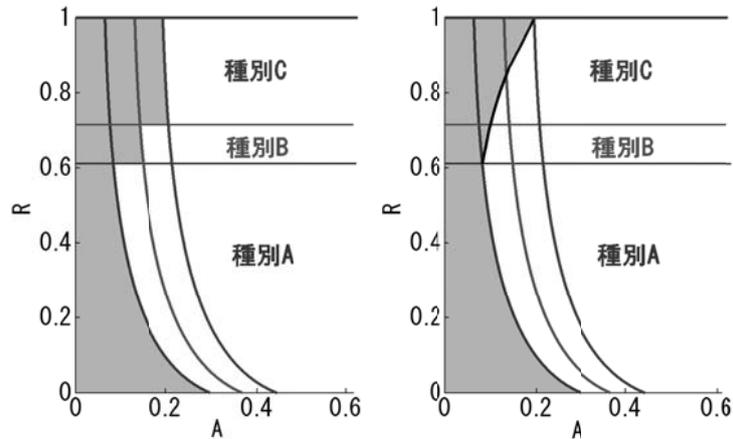
$$\begin{aligned} R_C^{k_C^{(S)}} &\leq 33\alpha_1^{(S)} + 37\alpha_2^{(S)} + 48\alpha_3^{(S)}, & k_C^{(S)} &\in \mathcal{I}_C^{(S)} \\ \sum_i \alpha_i^{(S)} &= 1, 0 \leq \alpha_i^{(S)} \leq 1, & i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

このような線形緩和式を用い、混合整数計画問題 $P0$ の線形緩和問題 $P1$ を次のように表す。

[線形緩和問題P1]

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{x}} \quad & W(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{p} && \text{(剛性方程式)} \\ & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U && \text{(設計変数の上下限制約)} \\ & R_C^{k_C^{(S)}} \leq \sum_i \bar{R}_{C_i} \alpha_i^{(S)} && \text{(柱の幅厚比制約)} \\ & R_f^{k_f^{(S)}} \leq \sum_i \bar{R}_{f_i} \alpha_i^{(S)} && \text{(梁フランジ幅厚比制約)} \\ & R_w^{k_w^{(S)}} \leq \sum_i \bar{R}_{w_i} \alpha_i^{(S)} && \text{(梁ウェブ幅厚比制約)} \\ & 0.25\alpha_1^{(S)} + 0.3\alpha_2^{(S)} + 0.35\alpha_3^{(S)} \leq D_s^{(S)} \\ & D_s^{(S)} \cdot Q_{ud}^{(S)} \leq Q_u^{(S)} && \text{(必要保有水平耐力制約)} \\ & g(\mathbf{x}) \leq 0 && \text{(層間変形、許容応力度制約)} \\ & \sum_i \alpha_i^{(S)} = 1, i = 1, 2, 3 \\ & k_C^{(S)} \in \mathcal{I}_C^{(S)}, k_G^{(S)} \in \mathcal{I}_G^{(S)}, S = 1, \dots, n_S \end{aligned}$$

1層1スパン純ラーメンモデルを例として、柱部材の断面積と幅厚比に対する必要保有水平耐力制約条件の許容領域を図3-1に示す。ここで、図3-1の横軸と縦軸はそれぞれ上下限値を0から1にスケールした断面積と幅厚比である。図3-1(a)は問題 $P0$ の許容領域、図3-1(b)は問題 $P1$ の許容領域を表している。図3-1(a)は階段状な非凸性の強い許容領域であり、図3-1(b)は凸な許容領域になっていることがわかる。



(a) 元問題 (b) 緩和問題

図3-1 許容領域の緩和

3.2.4 半正定値緩和問題の定式化

前節で述べた線形緩和問題の定式化と分枝限定法を用いて、構造特性係数の不連続性を考慮した鋼構造骨組の最小重量設計問題を解くことが可能である。しかし、より厳密解と近い緩和解が得られれば、分枝操作の回数も大幅に減らし、より短時間で最適解が求められる。凸緩和として、線形緩和以外に二次錐緩和¹⁾、半正定値緩和²⁻⁴⁾等の方法が知られている。これらの中では半正定値緩和が理論的には最も優れている。本節では、半正定値緩和問題の定式化を考える。

まず、非凸2次計画問題の標準形として、次の問題を考える。

$$\begin{aligned}
 \text{QP: } & \textit{find } \mathbf{x} \\
 & \textit{Min } \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^T \mathbf{x} + \pi_0 \\
 & \textit{s.t. } \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + \pi_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで、新しい変数 $\mathbf{X} \equiv \mathbf{x}\mathbf{x}^T$ を導入し、非凸2次計画問題QPにおける変数の2次項と置き換えれば、QPと等価な問題

$$\begin{aligned}
 \text{EQP: } & \textit{find } \{\mathbf{X}, \mathbf{x}\} \\
 & \textit{Min } \mathbf{Q}_0 \bullet \mathbf{X} + \mathbf{q}_0^T \mathbf{x} + \pi_0 \\
 & \textit{s.t. } \mathbf{Q}_i \bullet \mathbf{X} + \mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + \pi_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^T
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

が得られる。この操作は線形化と呼ぶ。ここで、 $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} \equiv \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})$ は行列の内積を表す。

問題EQPにおける等号制約 $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$ を取り除けば、EQPの線形緩和問題の定式化が次のように書ける。

$$\begin{aligned}
\text{LPR: } & \textit{find} \quad \{\mathbf{X}, \mathbf{x}\} \\
& \textit{Min} \quad \mathbf{Q}_0 \bullet \mathbf{X} + \mathbf{q}_0^T \mathbf{x} + \pi_0 \\
& \textit{s.t.} \quad \mathbf{Q}_i \bullet \mathbf{X} + \mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + \pi_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{3.9}$$

また、EQPにおける等号制約条件 $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$ を次のように半正定値制約条件に緩和すれば、問題EQPの半正定値緩和問題が得られる。

$$\mathbf{X} - \mathbf{x}\mathbf{x}^T = \mathbf{O} \quad \xrightarrow{\text{緩和}} \quad \mathbf{X} - \mathbf{x}\mathbf{x}^T \succeq \mathbf{O} \tag{3.10}$$

問題EQPの半正定値緩和問題は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
\text{SDPR: } & \textit{find} \quad \{\mathbf{X}, \mathbf{x}\} \\
& \textit{Min} \quad \mathbf{Q}_0 \bullet \mathbf{X} + \mathbf{q}_0^T \mathbf{x} + \pi_0 \\
& \textit{s.t.} \quad \mathbf{Q}_i \bullet \mathbf{X} + \mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + \pi_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& \quad \quad \mathbf{X} - \mathbf{x}\mathbf{x}^T \succeq \mathbf{O}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

また、

$$\mathbf{X} - \mathbf{x}\mathbf{x}^T \succeq \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{O} \tag{3.12}$$

が成立するため、半正定値緩和問題SDPRにおける変数を新しい変数

$$\mathbf{Y} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

に置き換え、

$$\mathbf{E}_{00} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} \pi_i & \mathbf{q}_i^T/2 \\ \mathbf{q}_i/2 & \mathbf{Q}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m \tag{3.14}$$

とおけば、SDPRと等価的に、半正定値緩和問題の定式化を

$$\begin{aligned}
\text{SDPR': } & \textit{find} \quad \mathbf{Y} \\
& \textit{Min} \quad \mathbf{P}_0 \bullet \mathbf{Y} \\
& \textit{s.t.} \quad \mathbf{E}_{00} \bullet \mathbf{Y} = 1 \\
& \quad \quad \mathbf{P}_i \bullet \mathbf{Y} \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& \quad \quad \mathbf{Y} \succeq \mathbf{O}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

と書ける。

SDPR'の実行可能解 \mathbf{Y} の固有値を

$$\lambda_1(\mathbf{Y}) \geq \lambda_2(\mathbf{Y}) \geq \dots \geq \lambda_{n+1}(\mathbf{Y}) \tag{3.16}$$

と表示すると、

$$\mathbf{X} - \mathbf{x}\mathbf{x}^T = \mathbf{O} \Leftrightarrow \text{rank}(\mathbf{Y}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{Y} \succeq \mathbf{O}, \lambda_2(\mathbf{Y}) \leq 0 \quad (3.17)$$

が成り立つため、非凸2次計画問題EQPに

$$\lambda_2(\mathbf{Y}) \leq 0 \quad (3.18)$$

という条件を加えたものと等価である。⁵⁾

非凸2次計画問題QP、半正定値緩和問題SDPRと線形緩和問題LPRの許容領域をそれぞれ $\mathcal{F}_{QP}, \mathcal{F}_{SDPR}, \mathcal{F}_{LPR}$ と定義すれば、

$$\mathcal{F}_{QP} \subseteq \mathcal{F}_{SDPR} \subseteq \mathcal{F}_{LPR} \quad (3.19)$$

が成り立つ。よって、半正定値緩和は線形緩和より強いことが明らかである。

鋼構造骨組の最小重量設計問題を非凸2次計画問題として定式化するには、元問題の定式化における0-1補助変数 α を次のように2次式として書ける。

$$\alpha \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 1) = 0 \quad (3.20)$$

0-1制約以外の非線形制約条件に対して、次式のように1次テイラー展開を用いて、線形式に近似する。

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}') + \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}(\mathbf{x}')(x_i - x'_i) \quad (3.21)$$

0-1制約以外の線形制約条件と非線形制約の1次テイラー展開式(3.21)を合わせて、 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ と記す。次のように2次妥当不等式が作られる。

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0} \\ (1 - \alpha) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

設計変数を

$$\mathbf{Y} \sim \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} & \mathbf{x}\mathbf{x}^T \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

と定義し、式(3.20)と式(3.22)を含めたすべての2次項と置き換え、得られた線形制約式を $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ と記すれば、半正定値緩和問題を次のように定義できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{P2}: \quad & \min W(\mathbf{Y}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{F}(\mathbf{Y}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{Y} \succeq \mathbf{O} \\ & \mathbf{O} \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{1}, \quad y_1 = 1 \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{Y} \succeq \mathbf{O}$ は行列 \mathbf{Y} が半正定値行列であることを意味する。

3.3 数値解析例

3.3.1 1層1スパン解析例

図3-2に示す1層1スパン鋼構造平面骨組モデルを考える。すべての部材でSN400級鋼を用い、柱は角型鋼管、梁はH形鋼を用いるとする。

鉛直荷重は梁に30kN/mの1様分布荷重を与えた上で、Ai分布から算出された地震荷重を図3-2に示すように与える。

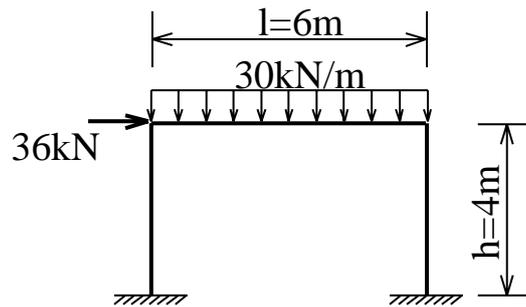


図3-2 1層1スパンモデル

この例題の元問題 P0 の定式化を次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 & \text{find } \mathbf{x} = \{A_c, R_c, A_f, R_f, A_w, R_w, u_1, \dots, u_6, \alpha_1, \alpha_2\} \\
 & \min W(\mathbf{x}) = 2A_c l + (2A_f + A_w)h && \text{(総体積を最小化)} \\
 & \text{s.t. } \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{P} && \text{(剛性方程式)} \\
 & R_c \leq 48 - 15\alpha_1 - 11\alpha_2 && \text{(柱の幅厚比制約)} \\
 & R_f \leq 15.5 - 6.5\alpha_1 - 4.5\alpha_2 && \text{(梁フランジの幅厚比制約)} \\
 & R_w \leq 71 - 11\alpha_1 - 6\alpha_2 && \text{(梁ウェブの幅厚比制約)} \\
 & u_1 / h \leq 1 / 500 && \text{(層間変形角制約)} \\
 & \lambda(\mathbf{x}) \geq 0 && \text{(保有水平耐力制約)} \\
 & \alpha_i (\alpha_i - 1) = 0, \quad i = 1, 2 && \text{(0-1制約)} \\
 & \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1 \\
 & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U && \text{(上下限制約)}
 \end{aligned}$$

ただし、必要保有水平耐力制約が支配的となるような問題の性質を調べるために、層間変形角を 1/200 以下、必要保有水平耐力を 1.8 倍にする。

元問題の定式化における 0-1 制約を取り除けば、線形緩和問題の定式化が得られる。

半正定値緩和問題を定式化するため、設計変数を \mathbf{x} , \mathbf{Y} とする。

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{x} = \{A_c, R_c, A_f, R_f, A_w, R_w, u_1, \dots, u_6, \alpha_1, \alpha_2\} \\
 & \mathbf{Y} \sim \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z} & \mathbf{z}\mathbf{z}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \{A_c, R_c, A_f, R_f, A_w, R_w, \alpha_1, \alpha_2\} \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} R_c \leq 48 - 15\alpha_1 - 11\alpha_2 \\ R_f \leq 15.5 - 6.5\alpha_1 - 4.5\alpha_2 \\ R_w \leq 71 - 11\alpha_1 - 6\alpha_2 \\ -\lambda(\mathbf{x}') - \sum_{i=1}^n \frac{d\lambda}{dx_i}(\mathbf{x}') (x_i - x'_i) \\ \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

と記せば、妥当2次不等式を次のように生成できる。

$$\begin{aligned} \alpha_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0} \\ (1 - \alpha_i) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0} \\ \alpha_i \cdot (1 - \alpha_i) &= 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

2次妥当不等式における2次項を変数 \mathbf{Y} と置き換えた線形制約条件を $\mathbf{G}(\mathbf{Y}) \leq \mathbf{0}$ とすれば、半正定値緩和問題P2の定式化は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \min \quad & W(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{p} \\ & \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \leq \mathbf{0} \\ & u_1 / h \leq 1 / 500 \\ & \mathbf{Y} \succeq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U \\ & \mathbf{Y}^L \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{Y}^U, \quad Y_{11} = 1 \end{aligned}$$

この例題の線形緩和問題の最適解と半正定値緩和問題を解く。実行環境は

CPU : Intel Core2 Duo 3GHz, OS: Windows XP, NUOPT V11

である。得られた最適解を表3-3に示す。

表3-3 1層1スパンモデルの最適解

最適化問題	目的関数値 (cm ³)	α_1	α_2	計算時間 (s)
厳密解	81379	0	1	
P1 (線形緩和)	81314	0.481	0.000	0.19
P2 (半正定値緩和)	81374	0.036	0.924	0.38

表3-3に示すように、この1層1スパン例題において、線形緩和問題より、半正定値緩和問題の精度が良いことが分かる。ただし、半正定値緩和問題を解く場合は線形緩和問題を解く場合より計算時間が長かった。

3.3.2 3層3スパン解析例

図3-3に示す3層3スパン鋼構造平面骨組モデルを考える。すべての部材でSN400級鋼を用い、梁はH型鋼、柱は角型鋼管を用いるとする。また、問題を簡単にするため、すべての梁寸法をグルーピングする。柱寸法は層ごとにグルーピングする。

鉛直荷重は全ての梁に30kN/mの均等分布荷重を与えた上で、Ai分布から算出された地震荷重を図3-3に示すように与える。

ただし、必要保有水平耐力制約が支配的となるような問題の性質を調べるために、層間変形角を1/200以下、必要保有水平耐力を5倍にする。

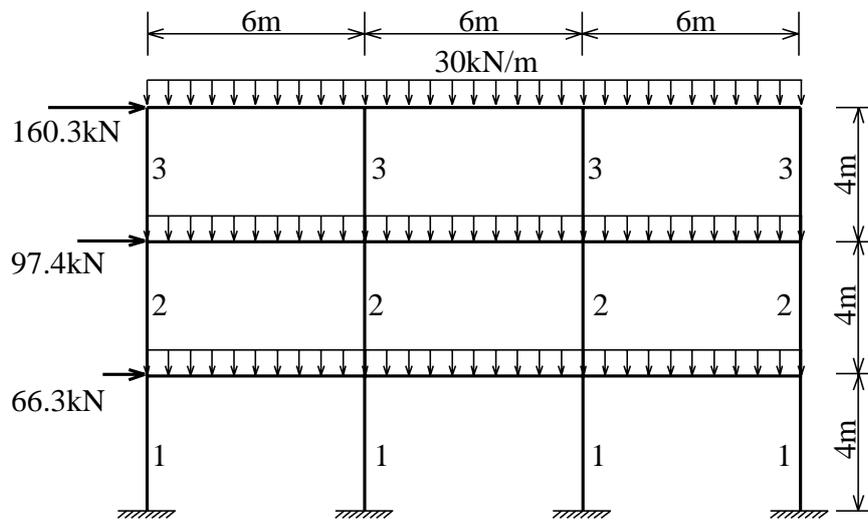


図3-3 3層3スパンモデル

この例題で、元問題 P0 を次のように定式化できる。

$$\begin{aligned}
 &\text{find } \mathbf{x} = \left\{ \left\{ A_c, R_c \right\}_{\times 3}, \left\{ A_f, R_f, A_w, R_w \right\}_{\times 1}, \left\{ u_1, \dots, u_{nDof} \right\}_{\times 1}, \left\{ \alpha_1, \alpha_2 \right\}_{\times 3} \right\} \\
 &\text{min } W(\mathbf{x}) && \text{(総重量を最小化)} \\
 &\text{s.t. } \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{P} && \text{(剛性方程式)} \\
 &R_c^i \leq 48 - 15\alpha_1^i - 11\alpha_2^i, \quad i = 1, 2, 3 && \text{(柱の幅厚比制約)} \\
 &R_f^i \leq 15.5 - 6.5\alpha_1^i - 4.5\alpha_2^i, \quad i = 1, 2, 3 && \text{(梁フランジの幅厚比制約)} \\
 &R_w^i \leq 71 - 11\alpha_1^i - 6\alpha_2^i, \quad i = 1, 2, 3 && \text{(梁ウェブの幅厚比制約)} \\
 &d^i(\mathbf{x}) \leq 1/200, \quad i = 1, 2, 3 && \text{(層間変形角制約)} \\
 &\lambda(\mathbf{x}) \geq 0 && \text{(保有水平耐力制約)} \\
 &\alpha_i^j (\alpha_i^j - 1) = 0, \quad i = 1, 2, j = 1, 2, 3 && \text{(0-1制約)} \\
 &\alpha_1^i + \alpha_2^i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3 \\
 &\mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U && \text{(上下限制約)}
 \end{aligned}$$

元問題の定式化における 0-1 制約を取り除けば、線形緩和問題の定式化が得られる。
半正定値緩和問題を定式化するため、設計変数を \mathbf{x} , \mathbf{Y} とする。

$$\mathbf{x} = \left\{ \left\{ A_c, R_c \right\}_{\times 3}, \left\{ A_f, R_f, A_w, R_w \right\}_{\times 1}, \left\{ u_1, \dots, u_{nDof} \right\}_{\times 1}, \left\{ \alpha_1, \alpha_2 \right\}_{\times 3} \right\}$$

$$\mathbf{Y} \sim \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z} & \mathbf{z}\mathbf{z}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \left\{ \left\{ A_c, R_c \right\}_{\times 3}, \left\{ A_f, R_f, A_w, R_w \right\}_{\times 1}, \left\{ \alpha_1, \alpha_2 \right\}_{\times 3} \right\}$$

1 層 1 スパンの例題と同様に、半正定値緩和問題 P2 の定式化を次のように書ける。

$$\begin{aligned} \min \quad & W(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{P} \\ & \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \leq \mathbf{0} \\ & d^i(\mathbf{x}) \leq 1/200, \quad i = 1, 2, 3 \\ & \mathbf{Y} \succeq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U \\ & \mathbf{Y}^L \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{Y}^U, \quad Y_{11} = 1 \end{aligned}$$

また、半正定値緩和問題における半正定値制約 $\mathbf{Y} \succeq \mathbf{0}$ を取り除いた問題を P3 とする。
この例題において、線形緩和問題 P1、半正定値緩和問題 P2 と半正定値緩和問題における半正定値制約を取り除いた問題 P3 をそれぞれ解く。得られた最適解を表 3-4 に示す。

表3-4 3層3スパンモデルの最適解

最適化問題	目的関数値 (m ³)	α_A^1	α_B^1	α_A^2	α_B^2	α_A^3	α_B^3	Time (s)
厳密解	1.5663	0	1	1	0	1	0	
P1	1.5589	0.733	0.000	0.733	0.000	1.000	0.000	0.92
P2	1.6522	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	3.44
P3	1.6521	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.63

表3-4に示すように、この3層3スパンモデルの例題において、線形緩和問題P1では緩和解が得られた。半正定値緩和問題P2と半正定値緩和問題における半正定値制約を取り除いた問題P3は元問題P0の緩和問題にもかかわらず、厳密解より目的関数値が高い解が得られた。これは問題の非凸性に由来することと考えられる。元問題の下界を求めるための緩和問題として利用することができない。

3.4 まとめ

本章で得られた結論は以下の通りである。

- (1) 構造特性係数 D_s の不連続性を考慮した構造骨組の最小重量設計法に使われる線形緩和と半正定値緩和を用いる分枝限定法の定式化を提案した。
- (2) 1層1スパンモデルの解析例において、半正定値緩和問題では線形緩和問題より精度が良い緩和解が得られた。この例題において、半正定値緩和の有効性が確認できた。
- (3) 3層3スパンモデルの解析例において、半正定値緩和問題の最適解の目的関数値は元問題の最適解よりも高く、緩和問題として利用することができない。

本章と第2章で提案した手法はいずれも構造特性係数のみの非凸性に対する凸緩和を利用した手法である。許容応力度制約、層間変形角制約なども非凸な制約条件のため、構成した緩和問題も依然非凸計画問題であり、その局所解の目的関数値は元問題の下界の近似値にとどまる。3層3スパン解析例において、半正定値緩和問題が安定的に緩和解を求めることができなかつた理由として、緩和問題の非凸性にあると考えられる。また、半正定値緩和問題の定式化に用いられるテイラー展開式により、元問題の許容領域が削られた可能性も考えられる。

よって、鋼構造骨組の最小重量設計問題において、すべての非凸性を取り除いて、完全な凸緩和問題の構築が必要である。第4章では、このような問題全体の凸緩和問題について述べる。

参考文献

- 1) S. Kim, M. Kojima: Second order cone programming relaxation of nonconvex quadratic optimization problems, *Optimization Methods and Software*, Vol.15, No.3-4, pp.201-224, 2001
- 2) T. Fujie, M. Kojima: Semidefinite relaxation for nonconvex programs, *Journal of Global Optimization*, Vol.10, pp.367-380, 1997
- 3) M. X. Goemans, D. P. Williamson: Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming, *Journal of the ACM (JACM)*, Vol.42, No.6, pp.1115-1145, 1995
- 4) Y. Nesterov: Semidefinite relaxation and nonconvex quadratic optimization, *Optimization Methods and Software*, Vol.9, No.1/3, pp.141-160, 1998
- 5) 久保幹雄, 田村明久, 松井知己: 応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店, 2002.5

第4章 鋼構造骨組の最小重量設計問題における凸緩和

4.1 はじめに

第2章と第3章では鋼構造骨組の最小重量設計問題における構造特性係数のみの非凸性に注目し、その非凸性に対する凸緩和を利用した手法を提案した。しかし、鋼構造骨組の最小重量設計問題において、非凸性を有する要素が構造特性係数以外にも沢山存在する。例として、許容応力度制約、層間変形角制約、増分解析より求める保有水平耐力などがある。本章では、鋼構造骨組の最小重量設計問題におけるすべての非凸性に対する凸緩和法を提案する。

4.1.1 問題の性質と研究の目的

凸計画問題では任意の局所的最適解は大域的最適解である。一方、非凸計画問題では局所的最適解が大域的最適解である保証はなく、大域的最適解から大きく劣った局所的最適解が多数存在する可能性がある¹⁾。鋼構造骨組の最小重量設計問題においても非凸制約条件が多数存在する。1次設計における許容応力度制約、層間変形制約、2次設計における必要保有水平耐力制約はすべて非凸制約条件に分類される。このような非凸制約条件の存在により、局所的な最適性条件を満たす設計解は多数存在し、それらの中から大域的最適解を選ぶことは極めて困難である。大域的最適解という意味では、部材断面を離散変数として定式化し列挙法を用いて求める方法が提案されている²⁾。ただし、離散最適化問題も同様に解くことが難しい問題である。このような困難が存在する一方で、大域的最適解自体への実用的な必要性は小さく、許容解が得られれば十分であるとも考えられる。ただし、複数の局所解の目的関数値がそれほど変わらなければどの局所解でも良いのであり、他の局所解よりも大きく劣った解であれば、それはできる限り排除すべきである。以上より、実用的な意味においても、局所解と厳密解との目的関数値の乖離度を測り局所解の良さを評価することには意義があると考えられる。

4.1.2 研究の位置づけ

局所解（上界）の良さを測るために、緩和問題の最適解（下界）を利用することが可能である。元問題の非凸性を何らかの方法で除去し、凸計画問題に緩和した問題を構成できれば、局所最適性により問題の下界を特徴づけることができる。このような大域的最適化アルゴリズムの研究は1960年代には始まっている。近年になり、高速かつ大容量の計算環境が提供されるようになったため、実用上の応用についてより多くの研究が行われるようになってきている²⁾。

目的関数および制約条件が変数の多項式で書かれた最適化問題は多項式計画問題と呼ばれる。多項式計画問題は非凸二次計画問題の一般化であるとともに、新しい変数を導入することにより多項式計画問題を非凸二次計画問題として再定式化することも可能である³⁾。

このような定式化に対する凸緩和として線形緩和⁴⁾、二次錐緩和⁵⁾、半正定値緩和⁶⁻⁸⁾等の方法が知られている。これらの中では半正定値緩和が理論的には最も優れている。一方で、大規模な問題を数値的に安定かつ高速に解くことができる線形計画ソルバーに基づく線形緩和の利点も指摘されている^{9, 10)}。実際に近年の線形計画ソルバーは設計変数および制約条件をそれぞれ1千万以上有する問題を数時間で解くことができる¹¹⁾。このような背景の下、線形緩和法の一つであるReformulation-Linearization Techniques (RLT) と分枝切除法とを組み合わせた方法^{4, 12)}の有効性が報告されている。

4.2節で示すように鋼構造骨組の最小重量設計問題も多項式計画問題として定式化できる。このような点から鋼構造骨組の最小重量設計問題を考察することは実用的にも理論的にも興味深いものと思われるが、十分な既往の研究はなされていないようである。本章では、弾性解析に基づく許容応力度設計についての設計条件を単純化して考慮した上で、鋼構造平面骨組の最小重量設計問題を多項式計画問題として定式化し、問題の性質を調べる。このような立場から以下について論じる。

- 1) 鋼構造平面骨組の最小重量設計問題について、多項式計画問題としての定式化を行った上で緩和問題を導出する。
- 2) 領域分割に基づく分枝切除法により緩和問題の精度を向上する方法を提案する。
- 3) 緩和解を用いて局所解の信頼性をどの程度定量的に評価することが可能かについて、数値解析例を通じて調べる。

4.2節では本研究で対象とする設計問題の定式化を紹介し、RLT及び分枝限定法を説明する。次に4.3節では3層3スパンモデルと7層3スパンモデルの解析例を用いて提案手法の有効性を検証し、上界と下界により局所解の信頼性について定量的な評価を行い、得られた結論を4.4節にまとめる。

4.1.3 表記について

非負整数全体の集合を \mathbb{N}_0 、実数を成分とする n 次元ベクトル全体の集合を \mathbb{R}^n と表す。二つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し、各成分を $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ と表せば $x_i \leq y_i; i = 1, \dots, n$ であるとき $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ と書く。零ベクトルは $\mathbf{0}$ と表す。 (\cdot) および (\cdot) によって、対応する変数の上下限值を表す。集合 S に対し、 $|S|$ は S の要素数（または濃度）を表す。最小化問題を対象として、単に「最適解」と言った場合には大域的な最小解を指し、そうでない局所的な最小解を指す場合には局所解と呼ぶ。ある問題の最適解に対応する目的関数値を最適値と呼び、解が存在しない問題に対する最適値は $+\infty$ とする。

4.2 設計問題の定式化

前節で述べたように鋼構造骨組の最小重量設計問題は局所解が多数存在する非凸計画問題である。まず4.2.1節で単純モデルを通じて問題の性質を把握することを試み、緩和問題の意義を説明した上で、4.2.2節で多項式計画問題としての一般的な定式化を与える。4.2.3節ではRLTおよび妥当不等式を用いた線形緩和問題について述べ、緩和問題に対する領域縮小および分枝限定法を4.2.4および4.2.5節にそれぞれ説明する。

4.2.1 単純モデル（剛棒連結モデル）

単純モデルとして、図4-1に示すような二本の鉛直柱が水平な剛棒 R に連結されている剛棒連結モデルを考える。二本の鉛直柱はそれぞれ断面積 A_1, A_2 および断面二次モーメント I_1, I_2 を有するとし、柱の長さを h 、ヤング係数を E とする。

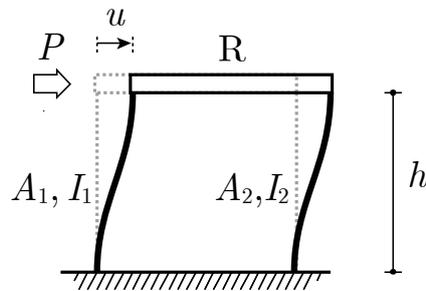


図4-1 剛棒連結モデル

外力 P に対して生じる変位を u とすると、系剛性方程式は

$$P = \left(12EI_1 / h^3 + 12EI_2 / h^3 \right) u \quad (4.1)$$

と表せる。さらにそれぞれの柱の断面積、断面二次モーメント関係はパラメータ α を用いて

$$I_1 = \alpha A_1^2, \quad I_2 = \alpha A_2^2 \quad (4.2)$$

と与える。各柱の断面積の上下限值制約 $\underline{A}_1 \leq A_1 \leq \bar{A}_1, \underline{A}_2 \leq A_2 \leq \bar{A}_2$ および変位制約 $0 \leq u \leq \bar{u}$ を与えた上で、鋼材量 $hA_1 + hA_2$ を最小化するような A_1, A_2, u を見出す問題

$$\begin{aligned} \min_{A_1, A_2, u} \quad & hA_1 + hA_2, \\ \text{s.t.} \quad & P = \left(\frac{12E}{h^3} I_1 + \frac{12E}{h^3} I_2 \right) u = \frac{12E\alpha}{h^3} (A_1^2 u + A_2^2 u), \\ & \underline{A}_1 \leq A_1 \leq \bar{A}_1, \quad \underline{A}_2 \leq A_2 \leq \bar{A}_2, \quad 0 \leq u \leq \bar{u}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

を考える。簡単のために $h = 1, 12E\alpha / h^3 = 1, P = 1, \bar{u} = 1$ と与え、 u について縮約すると問題(4.3)は

$$\begin{aligned}
\min_{A_1, A_2} \quad & A_1 + A_2, \\
\text{s.t.} \quad & A_1^2 + A_2^2 \geq 1, \\
& \underline{A}_1 \leq A_1 \leq \bar{A}_1, \quad \underline{A}_2 \leq A_2 \leq \bar{A}_2.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

と書き換えることができる。ここで、 $(0 <) \underline{A}_1 < \underline{A}_2 (< 1)$ および $(1 <) \bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \bar{A}$ とする。問題(4.4)は非凸二次計画問題であり、その非凸性は制約条件 $A_1^2 + A_2^2 \geq 1$ に由来するものである。問題(4.4)の許容領域および目的関数の等高線を白抜きの領域および灰色の線としてそれぞれ描いた図を図4-2に示す。問題(4.4)には二つの局所解

$$\text{局所解1 : } (A_1, A_2) = (\underline{A}_1, \sqrt{1 - \underline{A}_1^2})$$

$$\text{局所解2 : } (A_1, A_2) = (\sqrt{1 - \underline{A}_2^2}, \underline{A}_2)$$

が存在し、あわせて図4-2に黒点で示す。図4-2の目的関数の等高線からもわかるように局所解1が最適解である。しかし、局所的な勾配情報に基づく非線形最適化法を適用した場合に、局所解1,2のいずれが解として得られるかは初期値や実装方法に依存する。これが鋼構造骨組の最小重量設計問題において初期値依存性として知られる現象である。

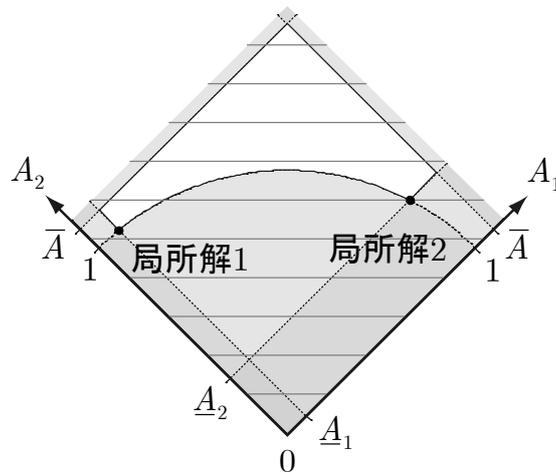


図4-2 剛棒連結モデルの許容領域と局所解

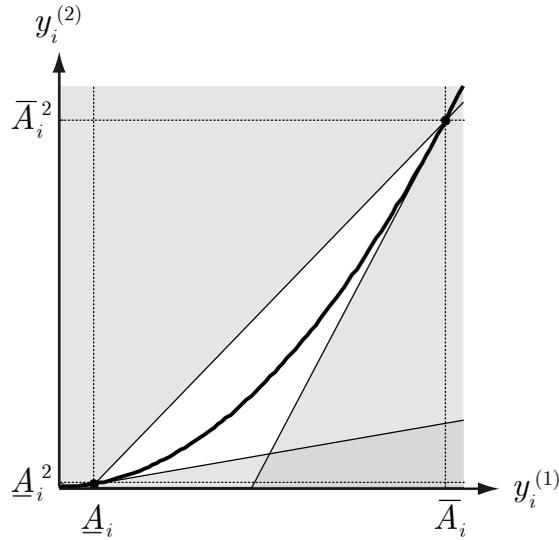


図4-3 二次式と妥当不等式

問題(4.4)において、独立変数 $y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(1)}, y_2^{(2)}$ を新たに導入して変数の置き換え

$$\begin{cases} y_1^{(1)} = A_1, & y_1^{(2)} = A_1^2, \\ y_2^{(1)} = A_2, & y_2^{(2)} = A_2^2, \end{cases} \quad (4.5)$$

を考える。問題(4.4)における線形不等式を掛け合わせて作られるような不等式は妥当不等式と呼ばれ、(4.5)のような関係を用いて条件式を書き換えることは線形化と呼ばれる。第 i 部材についての線形不等式 $A_i \leq A_i, A_i \leq \bar{A}_i$ から作られる妥当不等式およびその線形化を次に示す。

$$\begin{cases} (A_i - A_i)^2 \geq 0 \\ (A_i - A_i)(A_i - \bar{A}_i) \geq 0 \\ (A_i - \bar{A}_i)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i^{(2)} - 2A_i y_i^{(1)} + A_i^2 \geq 0 \\ -y_i^{(2)} + (A_i + \bar{A}_i)y_i^{(1)} - A_i \bar{A}_i \geq 0 \\ y_i^{(2)} - 2\bar{A}_i y_i^{(1)} + \bar{A}_i^2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

問題(4.4)において妥当不等式は明らかに冗長な制約条件であり、問題(4.4)の許容領域に何ら影響を与えない。(4.5)に対応する等式制約 $y_i^{(2)} = (y_i^{(1)})^2$ を黒線で、(4.6)の線形化された妥当不等式により作られる集合を白抜き領域で描いた図を図4-3に示す。(4.5)の本質は二次等式制約であり、これは非凸制約である。一方、線形化された妥当不等式により作られる集合は凸集合であり、 $A_i \leq A_i \leq \bar{A}_i$ において非凸制約(4.5)を含む。つまり、線形化された妥当不等式(4.6)は非凸制約(4.5)の凸緩和である。以上のような考えから問題(4.4)の凸緩和問題

$$\begin{aligned}
& \min_{y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}} && y_1^{(1)} + y_2^{(1)}, \\
& \text{s.t.} && y_1^{(2)} + y_2^{(2)} \geq 1, \\
& && \underline{A}_i \leq y_i^{(1)} \leq \bar{A}_i, \\
& && 2\underline{A}_i y_i^{(1)} - y_i^{(2)} \leq \underline{A}_i^2, \\
& && -(\underline{A}_i + \bar{A}_i)y_i^{(1)} + y_i^{(2)} \leq -\underline{A}_i \bar{A}_i, \\
& && 2\bar{A}_i y_i^{(1)} - y_i^{(2)} \leq \bar{A}_i^2, \quad (i = 1, 2).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

が導かれる。問題(4.7)は線形制約のみからなるので線形計画問題である。問題(4.7)に非線形制約条件(4.5)を加えれば元問題(4.4)と等価な問題となるので、問題(4.4)から非凸制約(4.5)を取り除いた問題(4.7)は問題(4.4)の緩和問題であることは明らかである。このような線形緩和を用いる方法がRLTである。問題(4.7)における許容領域および最適解（緩和解1）の例を白抜きの領域および白点としてそれぞれ図4-4に示す。図4-4からわかるように、緩和問題(4.7)の許容領域は元問題(4.4)すなわち図4-2の許容領域を含む凸領域である。

対象となる領域を分割すれば緩和解の精度を高めることができる。例えば、 $\underline{A}_1 \leq A_1^C \leq \bar{A}_1$ となるような A_1^C を用いて上下限制約を $\underline{A}_1 \leq A_1 \leq A_1^C$ および $A_1^C \leq A_1 \leq \bar{A}_1$ に分割し、対応する二つの緩和問題をそれぞれ解くことにより緩和解の精度を向上させることができる。領域分割された緩和問題の許容領域および最適解（緩和解2）の例を白抜きの領域および白点としてそれぞれ図4-5に示す。

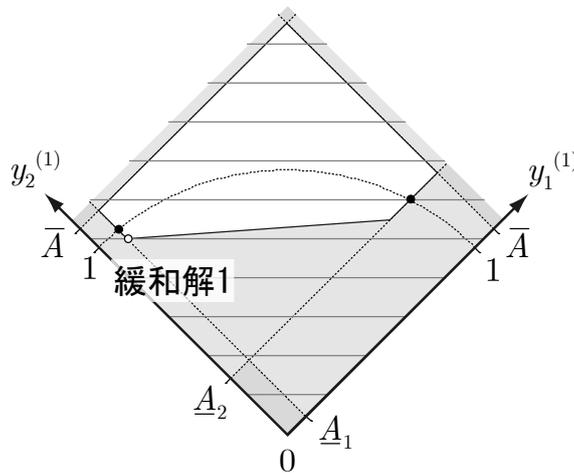


図4-4 緩和問題の許容領域と最適解

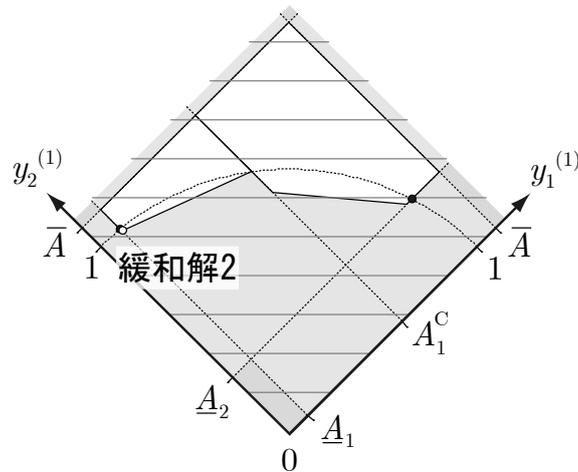


図4-5 領域分割された緩和問題の許容領域と最適解

例として $A_1 = 0.1, A_1^C = 0.6, \bar{A} = 1.1, A_2 = 0.3$ と与えた場合の、上記各ケースの目的関数値および大域的最適解（局所解1）からの目的関数値の乖離の割合を表4-1に示す。

表4-1 単純モデルにおける最適解の目的関数値

	局所解 1 (上界)	局所解 2 (上界)	緩和解 1 (下界)	緩和解 2 (下界)
目的関数値	1.095	1.254	1.043	1.084
乖離度	—	+14.51%	-4.76%	-0.99%

緩和問題の最適解を用いて、元問題の局所解の良さを測ることについて簡単に説明する。まず、元問題の任意の許容解は緩和問題でも許容解である。よって、元問題のどの許容解の目的関数値よりも緩和問題の最適値は小さい。例えば図4-2の許容領域と図4-4の緩和解1を比較すれば、この関係は容易に理解される。よって、緩和問題の最適値は元問題の最適値の下界である。次に、定義から元問題の任意の許容解の目的関数値は元問題の最適値よりも大きい。例えば、図4-2において最適解（局所解1）は他のどの許容解よりも小さな目的関数値をとっている。よって、元問題の任意の許容解の目的関数値は元問題の最適値の上界である。元問題の最適値はこのような上界と下界の間に存在する。ある局所解の目的関数値を上界とすれば、下界（緩和問題の最適値）との差を測ることにより、その局所解の良さを評価することができる。上界と下界が一致した場合には、その局所解は真の最適解である。表4-1において、緩和解2のように精度の高い目的関数値の下界が得られていれば、局所解1は大域的最適解からの乖離度は高々1%以下に過ぎないことがわかり、一方で局所解2については他に大域的最適解が存在する可能性が高いことがわかる。より一般的な定式化を次節以降に述べる。

4.2.2 多項式計画問題としての鋼構造骨組の最小重量設計問題の定式化（元問題）

まず、鋼構造平面骨組の最小重量設計問題の定式化を示す。 n_X, n_U をそれぞれ部材断面数、系全体の自由度数として、設計変数を $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_X}$ および $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_U}$ とする。これらの第 i 成分を x_i および u_i と書く。第 i 部材断面に関する設計変数 x_i と断面積 A_i 、形状係数 Z_i 、断面二次モーメント I_i との関係

$$A_i = A_i(x_i) = \alpha_i x_i^2, Z_i = Z_i(x_i) = \beta_i x_i^3, I_i = I_i(x_i) = \gamma_i x_i^4, \quad (4.8)$$

と与える。 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ はそれぞれ部材の形状によって定められる定数である。柱部材には角形鋼管、梁部材にはH形鋼を用い、 $i \in I^C$ は柱断面に関する部材断面番号、 $i \in I^G$ は梁断面に関する部材断面番号を表すとして、

$$\begin{cases} \alpha_i = 1, \beta_i = 0.8, \gamma_i = 1.2 & \text{for } i \in I^C, \\ \alpha_i = 1, \beta_i = 1.5, \gamma_i = 4.0 & \text{for } i \in I^G, \end{cases} \quad (4.9)$$

と与える。目的関数を鋼材量とし、

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_M} \sum_{i=1}^{n_X} L_j C_{ij} A_i \quad (4.10)$$

と定義する。ここで、 n_M は総部材数、 $C_{ij}; i = 1, \dots, n_X, j = 1, \dots, n_M$ は第 i 部材断面に関する量から対応する第 j 部材に関する量に変換するための0-1係数、 $L_j; j = 1, \dots, n_M$ は第 j 部材の部材長を表す。以降では表記を簡潔にするために誤解のない限り第 j 部材に関する断面積も同じ記号で A_j と表す。本来は、第 i 部材断面に関する量と第 j 部材に関する量は区別すべきであり、第 j 部材に関する断面積は正確には $\sum_{i=1}^{n_X} C_{ij} A_i$ と表すべきことに注意されたい。このような表記を用いれば、(4.10)は簡潔に

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_M} L_j A_j \quad (4.11)$$

と表せる。 I_j および Z_j についても同様の表記を行う。次に、問題の単純化のために以下の仮定を置く。

[仮定1] 剛床仮定を行う。

[仮定2] 柱の伸び変形を考慮しない。

そのため、各層の水平変位は等しく、また鉛直変位は考えない。このとき、第 j 部材の材端力-材端変位関係式を

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{Q}_j I_j \mathbf{u}_j \quad (4.12)$$

と表す。ここで、 $\mathbf{p}_j = (p_j^{(a)}, m_j^{(a)}, p_j^{(b)}, m_j^{(b)}) \in \mathbb{R}^4$ は第 j 部材の（基準座標系）材端力ベクトル、 $\mathbf{u}_j = (u_j^{(a)}, \theta_j^{(a)}, u_j^{(b)}, \theta_j^{(b)})^T \in \mathbb{R}^4$ は第 j 部材の（基準座標系）材端変位ベクトル、

$\mathbf{Q}_j \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ はヤング係数 E および部材長 L_j を用いて表される行列として

$$E \begin{pmatrix} 12 \sin^2 \varphi_j / L_j^3 & -6 \sin \varphi_j / L_j^2 & -12 \sin^2 \varphi_j / L_j^3 & -6 \sin \varphi_j / L_j^2 \\ & 4 / L_j & 6 \sin \varphi_j / L_j^2 & 2 / L_j \\ & & 12 \sin^2 \varphi_j / L_j^3 & 6 \sin \varphi_j / L_j^2 \\ \text{sym.} & & & 4 / L_j \end{pmatrix}$$

と与える。ここで、 φ_j は材軸が（基準座標系）水平方向軸に対してなす角であり、第 j 部材端 a, b の鉛直上向き方向の座標値 $\eta_j^{(a)}, \eta_j^{(b)}$ を用いて $\sin \varphi_j = (\eta_j^{(b)} - \eta_j^{(a)}) / L_j$ とする。

(4.12) を系全体で重ね合わせ、系剛性方程式

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (4.13)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ は系全体の剛性行列、 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_v}$ はある作用荷重に対する等価節点力ベクトルとする。層数を n_s とし、変位ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_v}$ を層間変形ベクトル $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{n_s}$ に変換する行列 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_v}$ 、および許容最大層間変形 $\bar{\boldsymbol{\delta}} \in \mathbb{R}^{n_s}$ を用いて、ある荷重作用時の層間変形制約を

$$\mathbf{R}\mathbf{u} \leq \bar{\boldsymbol{\delta}} \quad (4.14)$$

と表す。また、ある荷重作用時の第 j 部材に関する部材端曲げ許容応力度（短期）を満たすための条件式を

$$\begin{aligned} -1.5f_b Z_j &\leq m_j^{(a)} + q_j^{(a)} \leq 1.5f_b Z_j, \\ -1.5f_b Z_j &\leq m_j^{(b)} + q_j^{(b)} \leq 1.5f_b Z_j \quad ; \quad j = 1, \dots, n_M \end{aligned} \quad (4.15)$$

と与える。ここで、 $m_j^{(a)}, m_j^{(b)}$ は第 j 部材の材端力ベクトル $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^4$ の第2,4成分であり、 $q_j^{(a)}, q_j^{(b)}$ はある作用荷重に対する固定端モーメントとする。(4.15)をまとめて $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$ と表す。さらに目的関数値（鋼材量）が適当に与えられた上界以下という条件

$$f(\mathbf{x}) \leq \bar{f} \quad (4.16)$$

を与える。以上を用いて多項式計画問題としての鋼構造骨組の最小重量設計問題

$$(P_0) : \begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{P}, && \text{(剛性方程式)} \\ & \mathbf{R}\mathbf{u} \leq \bar{\boldsymbol{\delta}}, && \text{(層間変形角制約)} \\ & \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}, && \text{(許容応力度制約)} \\ & f(\mathbf{x}) \leq \bar{f}, && \text{(鋼材量制約)} \\ & \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}} \leq \mathbf{u} \leq \bar{\mathbf{u}}, && \text{(上下限制約)} \end{aligned}$$

を定義する。ここで、次の仮定をおく。

[仮定3] $\underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}$ は対応する成分について同符号かつ $\mathbf{0}$ ではない。すなわち、 $j = 1, 2, \dots, n_U$ に対して $0 < \underline{u}_j \leq \bar{u}_j$ あるいは $\underline{u}_j \leq \bar{u}_j < 0$ のいずれかが成り立つ。ここで、 $\underline{u}_j, \bar{u}_j$ は $\underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}$ の第 j 成分とする。

問題 P_0 の目的関数、およびすべての制約関数（制約条件の左辺）はそれぞれ設計変数 x_i お

よび u_j についての多項式関数

$$\sum_{i=1}^{n_X} \sum_{k=1}^4 a_{ik} (x_i)^k + \sum_{(i,j) \in K} \sum_{k=1}^4 b_{ijk} (x_i)^k u_j + \sum_{j=1}^{n_U} c_j u_j + d \quad (4.17)$$

と表せる。ここで、 $a_{ik}, b_{ijk}, c_j, d \in \mathbb{R}$ とする。よって、問題 P_0 は多項式計画問題である。

4.2.3 RLTを用いた線形緩和問題の定式化

多項式(4.17)の線形化のために、新たな設計変数

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i &= \left(y_i^{(1)} \quad y_i^{(2)} \quad y_i^{(3)} \quad y_i^{(4)} \right)^T \in \mathbb{R}^4 \quad ; i = 1, \dots, n_X, \\ \mathbf{z}_{i,j} &= \left(z_{i,j}^{(1)} \quad z_{i,j}^{(2)} \quad z_{i,j}^{(3)} \quad z_{i,j}^{(4)} \right)^T \in \mathbb{R}^4 \quad ; i = 1, \dots, n_X, \quad j = 1, \dots, n_U \end{aligned} \quad (4.18)$$

を導入する。これらの変数に対して非凸制約

$$\begin{aligned} y_i^{(1)} &= x_i, \quad y_i^{(2)} = (x_i)^2, \quad y_i^{(3)} = (x_i)^3, \quad y_i^{(4)} = (x_i)^4 \quad ; i = 1, \dots, n_X, \\ z_{i,j}^{(1)} &= x_i u_j, \quad z_{i,j}^{(2)} = (x_i)^2 u_j, \quad z_{i,j}^{(3)} = (x_i)^3 u_j, \quad z_{i,j}^{(4)} = (x_i)^4 u_j \quad ; (i,j) \in K \end{aligned} \quad (4.19)$$

を与える。ここで、 $\mathbf{z}_{i,j}$ について考慮する必要のある部材断面番号 i と自由度番号 j の組合せのすべてを $K \subset \{1, 2, \dots, n_X\} \times \{1, 2, \dots, n_U\}$ と表す。さらに、第 i 部材断面に関する自由度番号 j の集合を $K(i) \subset \{1, 2, \dots, n_U\}$ 、第 j 自由度に関する部材断面番号 i の集合を $K(j) \subset \{1, 2, \dots, n_X\}$ と表す。 $\mathbf{y}_i; i = 1, \dots, n_X$ および $\mathbf{z}_{i,j}; (i,j) \in K$ のそれぞれを列ベクトルとして並べたものを \mathbf{y} および \mathbf{z} と表し、変位ベクトル \mathbf{u} とあわせて線形化された問題の設計変数 $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{u}^T, \mathbf{z}^T)^T$ と定義する。 $\boldsymbol{\xi}$ の次元を n とし、 ξ_k と書いた場合には $\boldsymbol{\xi}$ の第 k 成分を表す。ここで、 ξ_k は $y_i^{(l)}, u_j, z_{i,j}^{(l)}$ のいずれかに対応するものである。以降では、非凸制約(4.19)を簡潔に

$$\boldsymbol{\xi} \in N \quad (4.20)$$

と表す。

4.2.3.1 元問題の線形化

(4.20)の下で $\boldsymbol{\xi}$ を用いた問題 P_0 を考える。展開した多項式の非線形項を対応する変数に置き換え線形関数化する操作を線形化と呼ぶ。このような操作により線形化された多項式を $[\cdot]_l$ と表す。多項式制約から作られる集合において、要素である各多項式を線形化することにより作られる集合も同じく $[\cdot]_l$ と表す。例えば、多項式 $x_i + (x_i)^2$ に対して $[x_i + (x_i)^2]_l = y_i^{(1)} + y_i^{(2)}$ 、集合 $F = \{x_i \mid 0 \leq x_i + (x_i)^2 \leq 1\}$ に対して $[F]_l = \{(y_i^{(1)}, y_i^{(2)}) \mid 0 \leq y_i^{(1)} + y_i^{(2)} \leq 1\}$ とする。このとき、問題 P_0 を

$$(P'_0) : \min_{\boldsymbol{\xi}} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \quad \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \quad \boldsymbol{\xi} \in N$$

と書き換えることができる。ここで、

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{P}, \mathbf{R}\mathbf{u} \leq \bar{\boldsymbol{\delta}}, \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}, f(\mathbf{x}) \leq \bar{f}\}$$

とする。また、上下限值 $\underline{\boldsymbol{\xi}} = (\underline{\mathbf{y}}^T, \underline{\mathbf{u}}^T, \underline{\mathbf{z}}^T)^T$, $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\mathbf{y}}^T, \bar{\mathbf{u}}^T, \bar{\mathbf{z}}^T)^T$ については余分な領域を取り去ることが望ましい。そのために $\underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}$ の各成分を次式から計算する。

$$\begin{aligned} \underline{y}_i^{(k)} &\leftarrow (\underline{x}_i)^k, \quad \bar{y}_i^{(k)} \leftarrow (\bar{x}_i)^k; \quad i = 1, \dots, n_X, k = 1, 2, 3, 4 \\ \underline{z}_{i,j}^{(k)} &\leftarrow \min \left\{ (\underline{x}_i)^k \underline{u}_j, (\bar{x}_i)^k \underline{u}_j \right\}; \quad (i, j) \in K, k = 1, 2, 3, 4 \\ \bar{z}_{i,j}^{(k)} &\leftarrow \max \left\{ (\underline{x}_i)^k \bar{u}_j, (\bar{x}_i)^k \bar{u}_j \right\}; \quad (i, j) \in K, k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (4.21)$$

ここで、 $0 < \underline{x}_i \leq \bar{x}_i$ および仮定3を考慮した。(4.21)について、 $\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}$ に対応して $\underline{\boldsymbol{\xi}}$ および $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ が決まるとみなして、 $\underline{\boldsymbol{\xi}} = \underline{\boldsymbol{\xi}}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})$ および $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \bar{\boldsymbol{\xi}}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})$ と表す。問題 P_0 と問題 P_0' は等価であり、これらの問題の最適値は一致する。問題 P_0' の目的関数は線形関数であり、 $\boldsymbol{\xi} \in N$ 以外の制約関数もすべて線形関数である。よって、 $\boldsymbol{\xi} \in N$ を問題 P_0' から取り除けば、問題 P_0' の線形緩和問題

$$(P_L') : \min_{\boldsymbol{\xi}} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}},$$

が得られる。一般に、問題 P_L' の許容領域は問題 P_0' の許容領域よりも大きく緩和される。より“強い”緩和問題を作るために、次節で述べる妥当不等式を導入する。ここで“強い”緩和問題とは元問題 P_0 の最適値に近い最適値を持つ緩和問題を指す。

4.2.3.2 妥当不等式を考慮した線形緩和問題

妥当不等式とは、元問題に対して冗長な制約条件であり、一方、緩和問題に対しては許容領域を制限することができる不等式制約である。RLTにおいて、線形化された妥当不等式は緩和の強さに大きな影響を与える重要な制約条件である。元問題におけるいくつかの制約条件を掛け合わせるにより妥当不等式は作られる。 $\boldsymbol{\xi}$ についての線形関数として表せる範囲内、すなわち多項式関数(4.17)で表せる範囲内で妥当不等式を考える。具体的には、元問題における上下限制約と層間変形制約について、妥当不等式を作成する。まず、元問題における設計変数の上下限制約 $\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i; i = 1, \dots, n_X$ についての妥当不等式から作られる集合

$$\begin{aligned} V^I &= V^I(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{u}\} \mid (-x_i + \underline{x}_i)^k (x_i - \bar{x}_i)^l (-1)^{5-k-l} \leq 0; \right. \\ &\quad \left. i = 1, \dots, n_X, k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0, 2 \leq k+l \leq 4 \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

を定義する。次に、変位の上下限制約 $\underline{u}_j \leq u_j \leq \bar{u}_j; j = 1, \dots, n_U$ を含めて作られる妥当不等式の集合

$$\begin{aligned}
V^H &= V^H(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) \\
&= \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{u}\} \mid \begin{aligned} &(-x_i + \underline{x}_i)^k (x_i - \bar{x}_i)^l (-u_j + \underline{u}_j) (-1)^{4-k-l} \leq 0, \\ &(-x_i + \underline{x}_i)^k (x_i - \bar{x}_i)^l (u_j - \bar{u}_j) (-1)^{4-k-l} \leq 0; \\ &(i, j) \in \mathbf{K}, k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k+l \leq 4 \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

を定義する。層間変形角制約 (4.14) における行列 \mathbf{R} の第 m 行 j 列成分 ($1 \leq m \leq n_s, 1 \leq j \leq n_U$) を R_{mj} 、 $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ の第 m 成分を $\bar{\delta}_m$ とし、層間変形角制約 (4.14) を

$$\sum_{j=1}^{n_U} R_{mj} u_j \leq \bar{\delta}_m; \quad m = 1, \dots, n_s \tag{4.24}$$

と表す。このとき、(4.14) を含めて作られる妥当不等式の集合

$$\begin{aligned}
V^{III} &= V^{III}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \\
&= \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{u}\} \mid \begin{aligned} &(-x_i + \underline{x}_i)^k (x_i - \bar{x}_i)^l \left(\sum_{j=1}^{n_U} (R_{mj} u_j) - \bar{\delta}_m \right) (-1)^{4-k-l} \leq 0; \\ &(i, j) \in \mathbf{K}, m = 1, \dots, n_s, k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k+l \leq 4 \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

を定義する。(4.22), (4.23), (4.25) の V^I, V^H, V^{III} に含まれる条件式は (4.17) の形で表される。よって、これらの妥当不等式は $\boldsymbol{\xi}$ による線形化が可能である。さらに V^I, V^H, V^{III} は問題 P_0' に対して冗長な制約条件であるので、新たな問題

$$(P_0'') : \min_{\boldsymbol{\xi}} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in [V]_l, \boldsymbol{\xi} \in N$$

と問題 P_0' は等価である。ここで、

$$V = V(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) = V^I(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \cap V^H(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) \cap V^{III}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \tag{4.26}$$

とする。しかし、問題 P_0'' から非凸制約 $\boldsymbol{\xi} \in N$ を取り除いて作られる線形緩和問題

$$(P_L'') : \min_{\boldsymbol{\xi}} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in [V]_l$$

と P_L' は等価ではなく、 P_L'' でなされた緩和は P_L' の緩和よりも強いものである。整理すると、各問題の許容領域に対応する集合

$$\begin{aligned}
(P_0') \quad F_0' &= \{ \boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in N \}, \\
(P_L') \quad F_L' &= \{ \boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}} \}, \\
(P_0'') \quad F_0'' &= \{ \boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in [V]_l, \boldsymbol{\xi} \in N \}, \\
(P_L'') \quad F_L'' &= \{ \boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in [\Omega]_l, \underline{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi} \in [V]_l \},
\end{aligned}$$

は包含関係 $F_0' = F_0'' \subset F_L'' \subset F_L'$ を満たす。問題 P_0 と問題 P_0' は等価であったので、妥当不等式によって問題 P_L' より“強い”線形緩和問題 P_L'' が得られることがわかる。

4.2.4 上下限制約の領域縮小

許容領域 F_L'' は $\underline{\xi}, \bar{\xi}$ に依存するので $F_L''(\underline{\xi}, \bar{\xi})$ と表す。線形緩和問題 P_L'' における緩和効果と設計変数の上下限值 $\underline{\xi}, \bar{\xi}$ の大きさとの間には密接な関係がある¹⁶⁾。より強い緩和問題を得るためには、元問題 P_0'' の許容領域 F_0'' を削ることなく、かつ $\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}$ により作られる空間ができるだけ小さくなるように $\underline{\xi}, \bar{\xi}$ を与える必要がある。すなわち、更新前の上下限值 $\underline{\xi}, \bar{\xi}$ および更新後の上下限值 $\underline{\xi}', \bar{\xi}'$ に対して、 $F_0'' \subset F_L''(\underline{\xi}', \bar{\xi}') \subset F_L''(\underline{\xi}, \bar{\xi})$ かつ $\underline{\xi} \leq \underline{\xi}' \leq \bar{\xi}' \leq \bar{\xi}$ を満たすように $\underline{\xi}', \bar{\xi}'$ を与える必要がある。そのために文献^{12, 13)}の考え方を基にして、成分ごとの逐次的な領域縮小を行う。

$\underline{\xi}, \bar{\xi}$ が与えられた下で ξ の第 m 成分に関する更新を考える。領域 F_L'' 内で ξ_m を最小化あるいは最大化する線形計画問題を解き、

$$\xi_m^{\text{MIN}} = \min\{\xi_m \mid \xi \in F_L''\}, \quad \xi_m^{\text{MAX}} = \max\{\xi_m \mid \xi \in F_L''\} \quad (4.27)$$

と表す。上下限值 $\underline{\xi}, \bar{\xi}$ の第 m 成分のみを $\xi_m^{\text{MIN}}, \xi_m^{\text{MAX}}$ に置き換えたもの（すなわち $\underline{\xi}_m \leftarrow \xi_m^{\text{MIN}}, \bar{\xi}_m \leftarrow \xi_m^{\text{MAX}}$ ）に対して

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}^R &= \left(\underline{x}_1^R, \dots, \underline{x}_{n_x}^R \right)^T, & \bar{\mathbf{x}}^R &= \left(\bar{x}_1^R, \dots, \bar{x}_{n_x}^R \right)^T, \\ \underline{\mathbf{u}}^R &= \left(\underline{u}_1^R, \dots, \underline{u}_{n_u}^R \right)^T, & \bar{\mathbf{u}}^R &= \left(\bar{u}_1^R, \dots, \bar{u}_{n_u}^R \right)^T, \end{aligned} \quad (4.28)$$

を計算する。ここで、

$$\begin{aligned} \underline{x}_i^R &= \max \left\{ (y_i^{(k)})^{\frac{1}{k}}, \min \left\{ (z_{i,j}^{(k)})^{\frac{1}{k}} / \bar{u}_j^R, (\bar{z}_{i,j}^{(k)})^{\frac{1}{k}} / \underline{u}_j^R \right\}; j \in K(i), k = 1, 2, 3, 4 \right\}, \\ \bar{x}_i^R &= \min \left\{ (\bar{y}_i^{(k)})^{\frac{1}{k}}, \max \left\{ (z_{i,j}^{(k)})^{\frac{1}{k}} / \bar{u}_j^R, (\bar{z}_{i,j}^{(k)})^{\frac{1}{k}} / \underline{u}_j^R \right\}; j \in K(i), k = 1, 2, 3, 4 \right\}, \\ \underline{u}_j^R &= \max \left\{ \underline{u}_j, \min \left\{ z_{i,j}^{(k)} / (\bar{x}_j^R)^k, \bar{z}_{i,j}^{(k)} / (\underline{x}_j^R)^k \right\}; i \in K(j), k = 1, 2, 3, 4 \right\}, \\ \bar{u}_j^R &= \min \left\{ \bar{u}_j, \max \left\{ \bar{z}_{i,j}^{(k)} / (\underline{x}_j^R)^k, z_{i,j}^{(k)} / (\bar{x}_j^R)^k \right\}; i \in K(j), k = 1, 2, 3, 4 \right\}, \end{aligned}$$

とする。 $\underline{\mathbf{x}}^R, \bar{\mathbf{x}}^R, \underline{\mathbf{u}}^R, \bar{\mathbf{u}}^R$ に対して(4.21)の操作を行い得られるものを

$$\underline{\xi}^R = \underline{\xi}(\underline{\mathbf{x}}^R, \bar{\mathbf{x}}^R, \underline{\mathbf{u}}^R, \bar{\mathbf{u}}^R), \quad \bar{\xi}^R = \bar{\xi}(\underline{\mathbf{x}}^R, \bar{\mathbf{x}}^R, \underline{\mathbf{u}}^R, \bar{\mathbf{u}}^R), \quad (4.29)$$

と表す。 $\underline{\xi}^R, \bar{\xi}^R$ は $F_0'' \subset F_L''(\underline{\xi}^R, \bar{\xi}^R) \subset F_L''(\underline{\xi}, \bar{\xi})$ および $\underline{\xi} \leq \underline{\xi}^R \leq \bar{\xi}^R \leq \bar{\xi}$ を満たす。以上の操作は第 m 成分の更新に対応するものであったので、 $\underline{\xi}^{R(m)}, \bar{\xi}^{R(m)}$ と表す。このような操作を繰り返すことで緩和解の精度を向上できる。本研究では、ランダムに順番を決めて m について更新するという単純な方法を採用する。以下にその方法を示す。

アルゴリズム 4.2.1 (領域縮小)

ステップ 1 (更新対象の決定) : ξ から適当に更新対象となる成分を選び、選ばれた成分に対応する番号の集合 $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ を与える。ここで、 n は ξ の次元である。

ステップ 2 (1 成分の範囲縮小) : ランダムに $m \in S$ を選び、(4.27) より $\xi_m^{\text{MIN}}, \xi_m^{\text{MAX}}$ を計算する。

ステップ 3 (領域縮小) : 上下限值 $\underline{\xi}, \bar{\xi}$ の第 m 成分のみを $\xi_m^{\text{MIN}}, \xi_m^{\text{MAX}}$ に置き換えたものに対して(4.28),(4.29)から $\underline{\xi}^{R(m)}, \bar{\xi}^{R(m)}$ を計算する。上下限値を $\underline{\xi} \leftarrow \underline{\xi}^{R(m)}, \bar{\xi} \leftarrow \bar{\xi}^{R(m)}$ と更新する。

ステップ 4 (繰り返し) : $S \leftarrow S \setminus \{m\}$ とし、 $S = \emptyset$ ならば終了し、そうでなければステップ 2 に戻る。

アルゴリズム 4.2.1 においては計 $2|S|$ の線形計画問題を解く必要があり、これを複数回繰り返すことも有効である。緩和問題 P_L'' を解く際に、前処理としてこのような上下限制約の領域縮小を行う。

4.2.5 超直方体分割法を用いた分枝限定法

より良い緩和解を得るため、前節で述べた領域縮小に併せて、超直方体分割による分枝限定法の適用を考える。超直方体分割とは、ある一つの設計変数に対し、許容領域を二分割して二つの子問題に分ける方法である。どの変数をどのように分割するかは方法の効率は大きく影響を受ける。本研究では、緩和問題を実際に解いて最も下界を大きくするように逐次選択を行うアプローチを採用する。本節では、緩和問題 P_L'' の許容領域 F_L'' の $\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}$ への依存関係を明示して

$$F_L''(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) = \{\xi \mid \xi \in [\Omega]_l, \underline{\xi}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) \leq \xi \leq \bar{\xi}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}), \xi \in [V(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})]_l\}$$

と表記する。親問題 $P_L^{(M)}$ ($M \in \mathbb{N}_0$) を分割前の緩和問題 P_L'' とする。問題 $P_L^{(M)}$ における上下限值 $\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}$ は問題番号 M に依存し、この依存関係を明示して $\underline{\mathbf{x}}^{(M)}, \bar{\mathbf{x}}^{(M)}, \underline{\mathbf{u}}^{(M)}, \bar{\mathbf{u}}^{(M)}$ と表せば、 $P_L^{(M)}$ は

$$(P_L^{(M)}) : \min_{\xi} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \xi \in F_L''(\underline{\mathbf{x}}^{(M)}, \bar{\mathbf{x}}^{(M)}, \underline{\mathbf{u}}^{(M)}, \bar{\mathbf{u}}^{(M)})$$

と表せる。また $M = 0$ に対応する $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}, \bar{\mathbf{x}}^{(0)}, \underline{\mathbf{u}}^{(0)}, \bar{\mathbf{u}}^{(0)}$ は元問題 P_0 における $\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}$ に一致させるとする。さらに以降では、表記を簡潔にするために $\underline{\mathbf{x}}^{(M)}, \bar{\mathbf{x}}^{(M)}, \underline{\mathbf{u}}^{(M)}, \bar{\mathbf{u}}^{(M)}$ も単に $\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}$ と表すが、これらは元問題 P_0 のものと一致するとは限らないことに注意されたい。このとき、領域 $\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}$ について、 $x_m = t$ で二つの領域 $\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}^{B(m,t)}$, $\underline{\mathbf{x}}^{B(m,t)} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}$ に分割することを考える。すなわち、 $\underline{\mathbf{x}}^B(m,t), \bar{\mathbf{x}}^B(m,t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ の第 i 成分 $x_i^B(m,t), \bar{x}_i^B(m,t); i = 1, \dots, n_x$ を

$$\underline{x}_i^B(m, t) = \begin{cases} \underline{x}_i & (i \neq m) \\ t & (i = m) \end{cases}, \quad \bar{x}_i^B(m, t) = \begin{cases} \bar{x}_i & (i \neq m) \\ t & (i = m) \end{cases}, \quad (4.30)$$

と与える。このような分割に対して、 $N > M$ として二つの子問題

$$\begin{aligned} (P_L^{(N)}) : \min_{\xi} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \xi \in F_L''(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}^B(m, t), \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}), \\ (P_L^{(N+1)}) : \min_{\xi} [f(\mathbf{x})]_l, \quad \text{s.t. } \xi \in F_L''(\underline{\mathbf{x}}^B(m, t), \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (4.31)$$

を定義する。(4.31)における成分番号 m および分割位置 t の決定方法を以下に説明する。

親問題 $P_L^{(M)}$ の最適解（緩和解）を $\hat{\xi} = (\hat{y}^T, \hat{u}^T, \hat{z}^T)^T$ とする。緩和解の精度を向上させるためには緩和解付近で分割することが望ましい。(4.19)で定義したように x_i に $y_i^{(1)}$ を対応させたので、分割後に最も下界を上昇させるような最適成分番号 \hat{m} を次式から求める。

$$\hat{m} = \arg \max_{i \in \{1, 2, \dots, n_x\}} \left\{ f_N^B(m, t), f_{N+1}^B(m, t) \mid m = i, t = \hat{y}_i^{(1)} \right\} \quad (4.32)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_N^B(m, t) &= \min_{\xi} \left\{ [f(\mathbf{x})]_l \mid \xi \in F_L''(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}^B(m, t), \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) \right\}, \\ f_{N+1}^B(m, t) &= \min_{\xi} \left\{ [f(\mathbf{x})]_l \mid \xi \in F_L''(\underline{\mathbf{x}}^B(m, t), \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) \right\}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

とする。なお、(4.32)を解くためには $2n_x$ 個の線形計画問題を解く必要がある。最適成分番号 \hat{m} を決定した後に、最適分割位置の計算を行う。非凸制約 $\xi \in N$ を満たせば

$$\begin{aligned} x_i &= y_i^{(1)} = (y_i^{(2)})^{1/2} = (y_i^{(3)})^{1/3} = (y_i^{(4)})^{1/4} \\ &= z_{i,j}^{(1)} / u_j = (z_{i,j}^{(2)} / u_j)^{1/2} = (z_{i,j}^{(3)} / u_j)^{1/3} = (z_{i,j}^{(4)} / u_j)^{1/4}; j \in K(i) \end{aligned}$$

が成立するが、緩和解 $\hat{\xi}$ においてこの関係が成立しているとは限らない。そこで、 $\hat{\mathbf{x}}$ への逆写像が存在する上限

$$\bar{y}_i^{(1)} = \max \left\{ (\hat{y}_i^{(k)})^{1/k}, (\hat{z}_{i,j}^{(k)} / \hat{u}_j)^{1/k}; k = 1, 2, 3, 4, j \in K(i) \right\} \quad (4.34)$$

を与えて、最適分割位置の計算を次式から行う。

$$\hat{t} = \arg \max_{\hat{y}_i^{(1)} \leq t \leq \bar{y}_i^{(1)}} \left\{ f_N^B(\hat{m}, t), f_{N+1}^B(\hat{m}, t) \right\} \quad (4.35)$$

(4.35)は1変数最適化問題であるが、(4.33)を評価するために線形緩和問題を繰り返し解く必要がある。次章の数値解析例では指定回数を10回以内と与えた黄金分割法¹⁴⁾を用いて最適分割位置 \hat{t} を求めた。このような分枝限定法のアルゴリズムを以下に示す。

アルゴリズム 4.2.2 (超直方体分割を用いた分枝限定法)

ステップ 0 (パラメータ設定) : 問題数の上限値 $\bar{N} > 0$ 、上界と下界の許容ギャップ ε を与える。

ステップ 1 (上界の計算) : 元問題 P_0 を非線形最適化ソルバーで解き、得られた局所解に対する目的関数値 f^* を上界値 $\bar{f} \leftarrow f^*$ とする。

ステップ 2 (下界の初期値) : 問題集合 $P = \emptyset$ を定義する。線形緩和問題 $P_L^{(0)}$ に対しアルゴリズム 4.2.1 を適用して領域縮小を行う。領域縮小された問題 $P_L^{(0)}$ を解き、その最適値 \hat{f} を下界値 $\underline{f} \leftarrow \hat{f}$ とする。さらに線形緩和問題 $P_L^{(0)}$ を問題集合 P に加える。

ステップ 3 (親問題選択) : P の中で、最適値が一番低い問題 $P_L^{(M)}$ ($M \in \mathbb{N}_0$) を選び、 P から取り除く。

ステップ 4 (成分番号選択) : 問題 $P_L^{(M)}$ ($M \in \mathbb{N}_0$) の最適解 (緩和解) に対して(4.34),(4.32) の操作を行い、分枝対象とする成分番号 \hat{m} を選択する。

ステップ 5 (分割位置選択) : ステップ 4 で選択された \hat{m} について(4.35)の操作を行い、分割位置 \hat{t} を選択する。

ステップ 6 (分枝操作) : ステップ 4,5 で選択された成分番号 \hat{m} および分割位置 \hat{t} に対して、問題 $P_L^{(M)}$ の許容領域を $x_{\hat{m}} = \hat{t}$ で二分割する。(4.31)に示されるような二つの子問題 $P_L^{(M)}, P_L^{(N+1)}$ が得られる。それぞれにアルゴリズム 4.2.1 を繰り返し適用して領域縮小を行ってから $P_L^{(N)}, P_L^{(N+1)}$ を解き、 $N \leftarrow N + 2$ とする。許容解が得られた子問題を P に加え、許容な子問題において最も低い最適値を \hat{f} とする。 $\hat{f} > \underline{f}$ の場合、 $\underline{f} \leftarrow \hat{f}$ と更新する。

ステップ 7 (終了判定) : N が設定した値 \bar{N} を超えた場合、あるいは緩和ギャップ $\bar{f} - \underline{f} \leq \varepsilon$ の場合、 \underline{f} を下界値として出力して終了する。そうでなければステップ 3 に戻る。

アルゴリズム 4.2.2 においては多数の緩和問題を解く必要がある。ただし、これらの緩和問題は線形計画問題であるので、数値的に安定かつ高速な線形計画ソルバーを利用可能である。

4.3 数値解析例

4.3.1 3層3スパンモデル解析例

図4-6に示す3層3スパン鋼構造純ラーメン骨組モデルの例題を考える。すべての部材でSN490級鋼を用い、柱部材には角形鋼管、梁部材にはH形鋼を用いる。床荷重の幅を6.4メートルとし、床荷重として基準階7.75kN/m²、R階10.09kN/m²を与え、図4-6に示すように基準階、R階にそれぞれ一様分布荷重を49.6kN/m, 64.6 kN/mと与える。さらにAi分布(C₀=0.2)に従った水平荷重を図4-6に示すように与える。本章では仮定1,2,3の下で1次短期設計のみを考え、1次短期設計用荷重時には鉛直荷重と水平荷重を同時に作用させ、許容最大層間変形角として全層1/200以下、短期許容応力度として325N/mm²を与える。

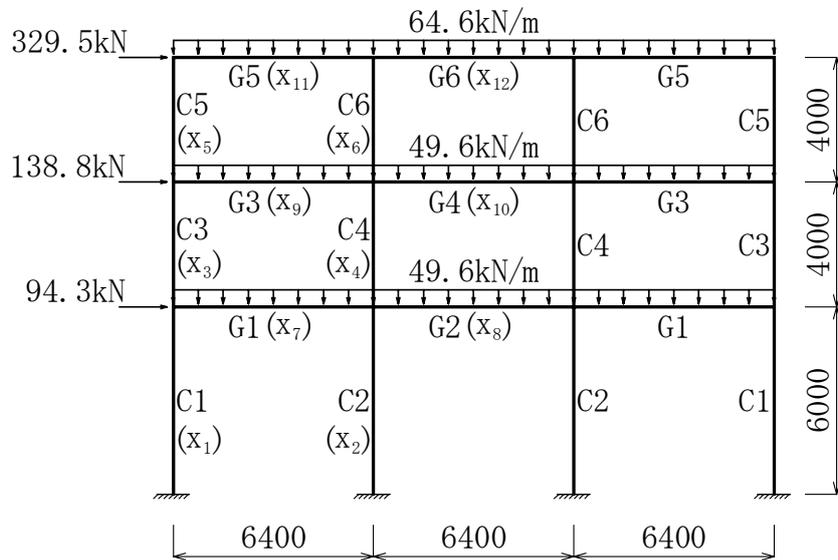


図4-6 3層3スパンモデル

部材断面の設計変数は図4-6に示す断面番号に対応するように与え、さらに対応する設計変数の上下限値を次のように与える。

$$\begin{cases} 10 \leq x_i \leq 40; & i = 1, 2, \dots, 6, & \text{(柱部材断面)} \\ 10 \leq x_i \leq 20; & i = 7, 8, \dots, 12 & \text{(梁部材断面)} \end{cases} \quad (4.36)$$

上界として適当な許容解を求めるために、非線形最適化法である有効制約法¹⁵⁾により元問題 P_0 を解く。設計変数の初期値としては(4.36)における上限値を与えた。以上より求められた上界(局所解の目的関数値)は $\bar{f} = 1.602\text{m}^3$ であった。この設計解の断面積分布を線の太さに比例させて描いたものを図4-7に示す。

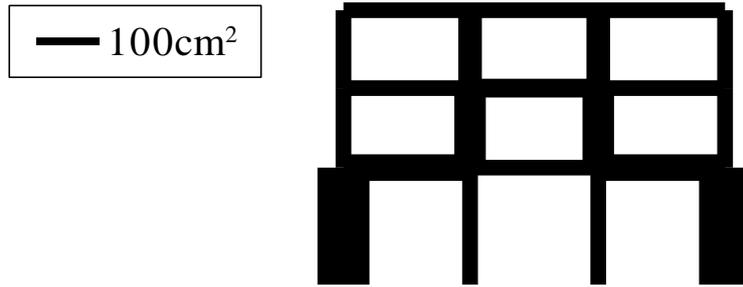


図4-7 上界に対応する局所解の断面積分布

次に変位の上下限值を設定するために、変位の各成分について

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_i &:= \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \{u_i \mid \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{P}, \mathbf{R}\mathbf{u} \leq \bar{\boldsymbol{\delta}}, \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}, \\
 &\quad \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}, f(\mathbf{x}) \leq 1.05\bar{f}\}, \\
 \bar{u}_i &:= \max_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \{u_i \mid \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{P}, \mathbf{R}\mathbf{u} \leq \bar{\boldsymbol{\delta}}, \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}, \\
 &\quad \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}, f(\mathbf{x}) \leq 1.05\bar{f}\},
 \end{aligned}$$

を求める。ここでも有効制約法を用い、上界に対応する設計解を初期値として与える。以上に対し、問題数の上限値 $\bar{N} = 300$ 、許容ギャップ $\varepsilon = 0$ を与え、アルゴリズム4.2.2を適用する。実行環境は

CPU : Intel Core i7 2600K 3.4GHz, OS: Windows 7,
 MATLAB R2011a¹⁴⁾, CPLEX 12.2¹⁶⁾

である。この解析例において、一回の分枝すなわちアルゴリズム4.2.2におけるステップ3からステップ6を一度行うには平均76秒を要した。なお、一回の分枝では多数の線形計画問題を解いた結果として二つの子問題の最適値が得られる。上下界の目的関数の乖離度を $(\bar{f} - \underline{f}) / \bar{f}$ と定義し、子問題を解く回数と乖離度との関係を表4-2および図4-8に示す。表4-2に示すように、300の子問題を解き終わった段階での乖離度は2.59%であった。これは図4-8に示した設計解から目的関数値を2.59%以上は減らすことができないことを意味する。

表4-2 子問題数と乖離度の関係 (3層3スパンモデル)

子問題数	下界値 \underline{f} (m ³)	上界値 \bar{f} (m ³)	乖離度 $(\bar{f} - \underline{f}) / \bar{f}$
0	1.372	1.602	14.34%
50	1.514	1.602	5.43%
100	1.538	1.602	3.97%
200	1.554	1.602	2.97%
300	1.560	1.602	2.59%

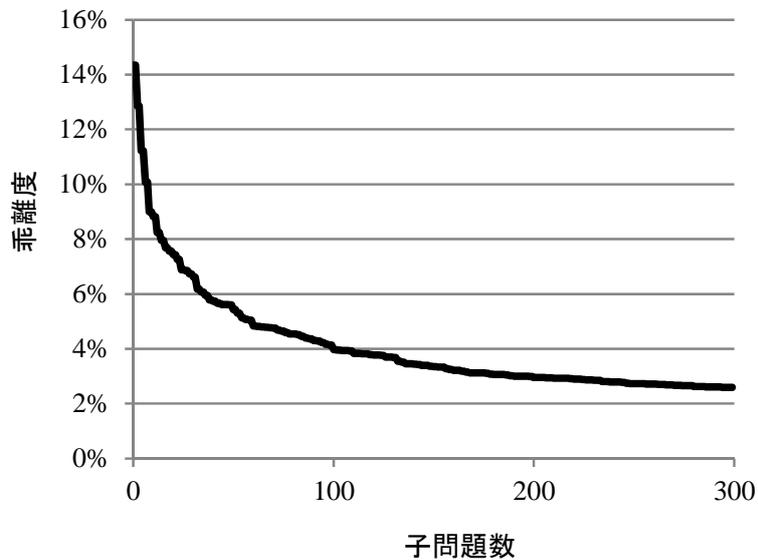


図4-8 子問題数と乖離度の関係 (3層3スパンモデル)

2.59%以下であればさらに小さい目的関数値を持つ設計解が存在する可能性はある。このことを確認するために、300の子問題を解き終わった段階でのアルゴリズム4.2.2における問題集合 P に含まれる分割領域、すなわち現在の局所解よりも良い設計解が存在する可能性が残る領域の全てについて、非凸制約(4.20)を考慮して有効制約法を用いて解き直した。これは、多点探索による非線形最適化を行って上界値を更新したとも解釈できる。以上により新たに発見された設計解のうち代表的なものについて、図4-7と同じ縮尺で線の太さに比例させた断面積分布を

図4-9に示す。また、これらの設計解の目的関数値、最初に設定した上界、および300の子問題を解き終わった段階での下界を併せて表4-3に示す。

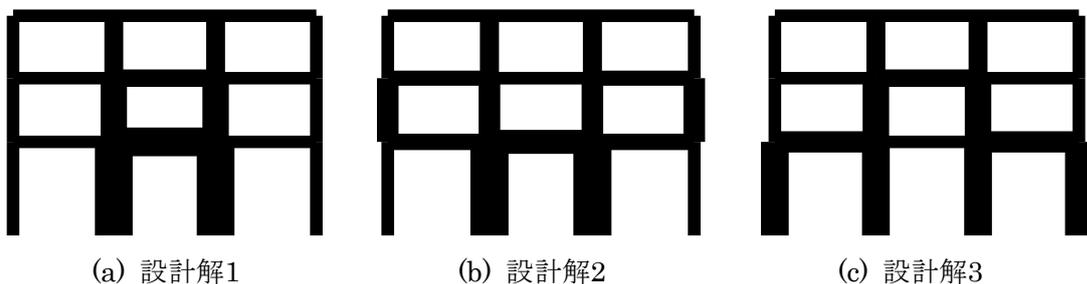


図4-9 新たに発見された設計解の断面積分布

表4-3 新たに発見された局所解の目的関数値

	上界	下界	設計解 1	設計解 2	設計解 3
目的関数値(m ³)	1.602	1.560	1.569	1.606	1.633

最初に設定した上界よりもさらに小さな目的関数値を持つ設計解が存在することが表4-3より確認され、そのような最良の設計解である設計解1の目的関数値と下界との乖離度は0.58%であった。さらに小さな目的関数値を持つ設計解が存在する可能性はあるものの、そのような設計解と設計解1との目的関数値の差は0.58%以内に必ず収まることが保証される。必要であれば分枝操作をさらに続けることによりその精度をより高めることも可能である。

図4-7に示した局所解は下層の柱が上層の柱よりも小さい、所謂チェッカーボード状の断面積分布である。一方、最良の設計解である

図4-9における設計解1は中央の柱部材が大きい、言わば中央コアを配置した断面積分布に近い。チェッカーボード状の断面積分布が非線形最適化法により最適解として得られることが多いが、信頼性の不確かな局所解のみから問題の定性的な傾向を把握する結論付けることは難しい。よって、本研究で示すような方法の有用性が例示されたと言える。

4.3.2 7層3スパンモデル解析例

図4-10に示すような7層3スパン鋼構造純ラーメン骨組モデルの例題を考える。柱部材には角形鋼管、梁部材にはH形鋼を用い、設計変数の上下限値を次のように与える。

$$\begin{cases} 15 \leq x_i \leq 40; & i = 1, 2, \dots, 14, & \text{(柱部材断面)} \\ 10 \leq x_i \leq 20; & i = 15, 16, \dots, 12 & \text{(梁部材断面)} \end{cases} \quad (4.37)$$

床荷重の幅を6.4メートルとし、図4-10に示すような鉛直荷重および水平荷重を与える。その他については前節で述べた3層3スパンモデル解析例と同様に設定する。

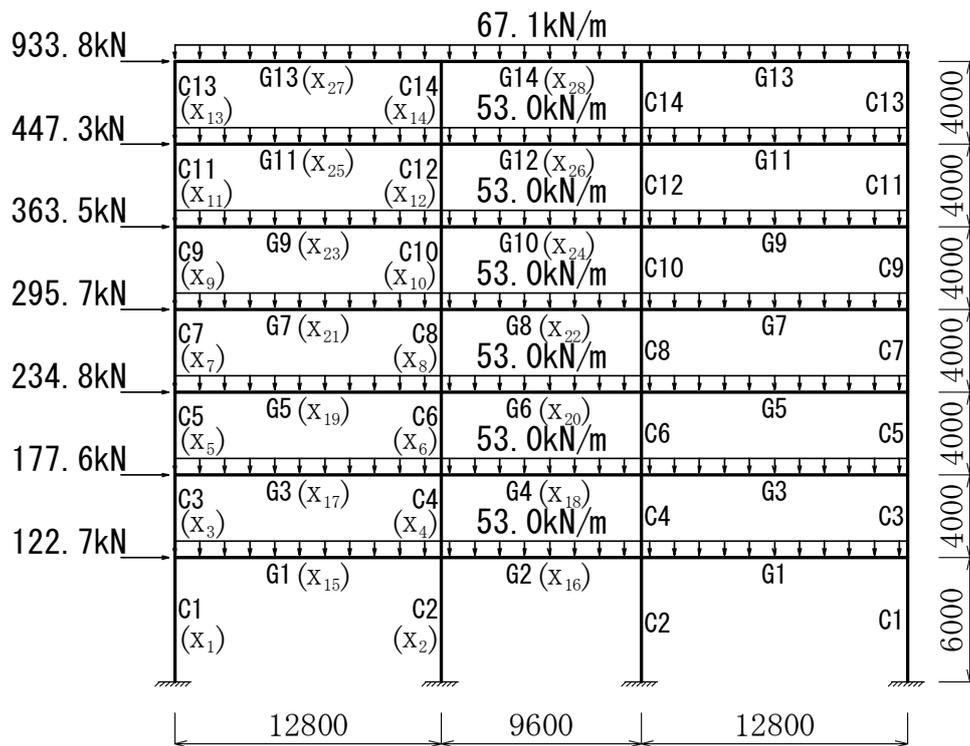


図4-10 7層3スパンモデル

有効制約法により得られた目的関数値の上界は $\bar{f} = 10.774\text{m}^3$ であり、一回の分枝を行うには平均1,049秒を要した。子問題を解く回数と目的関数値の上下界の乖離度との関係を図4-11に示す。

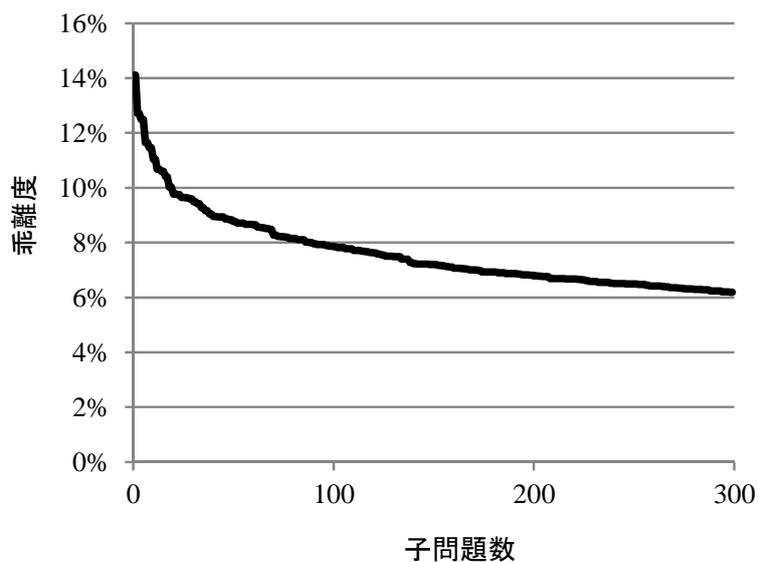


図4-11 子問題数と乖離度の関係 (7層3スパンモデル)

300の子問題を解き終わった段階での下界と上界との乖離度は6.19%であり、モデルの規模が大きくなるにつれて緩和界の精度が低下していると推察される。上界に対応する局所解の断面積分布を線の太さに比例させたものを図4-12(a)に、前節と同様に有効制約法を用いて新たに探索した設計解を図4-7(b),(c)に示す。また、これらの設計解の目的関数値を表4-4に示す。

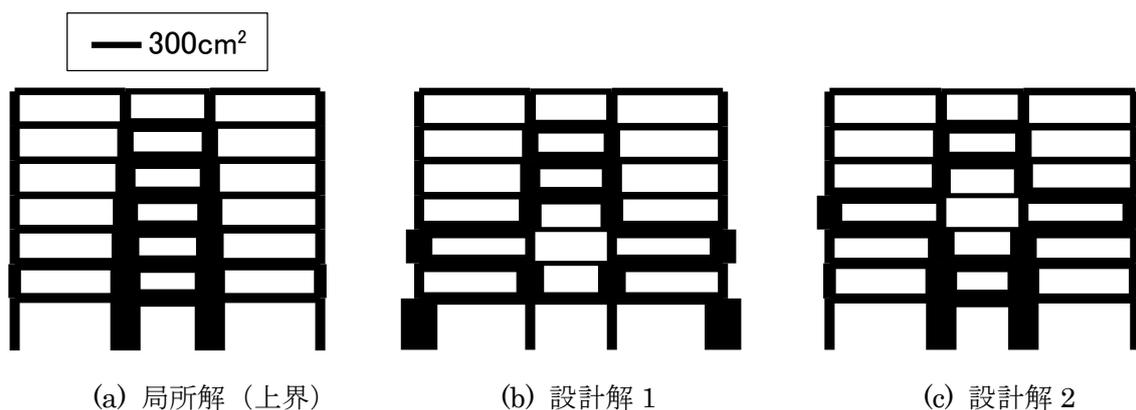


図4-12 各設計解の断面積分布

表4-4 新たに発見された局所解の目的関数値

	上界	下界	設計解 1	設計解 2
目的関数値(m ³)	10.774	10.106	11.104	11.125

表4-4に示されるように、この解析例においては最初に設定した上界よりも良い目的関数値を持つ設計解は発見できなかった。また、この解析例においてもチェッカーボード状の設計解はコスト増加につながっている。どのような設計解が有利かはモデル化や設計条件により変わり、一概には言えないことが予想される。問題の定性的な考察に本手法は有用と考えられる。

4.4 まとめ

本章で得られた結論は以下の通りである。

- (1) 鋼構造平面骨組の最小重量設計問題について多項式計画問題の定式化、およびRLTに基づく線形緩和問題の定式化を示した。このような定式化により、鋼構造平面骨組における局所解に対して、どの程度妥当な解であるかを評価することができる。
- (2) 領域分割に基づく分枝限定法により、緩和問題の精度を向上する方法を示した。分枝限定法では多数の緩和問題を解く必要がある。ただし、これらの緩和問題は線形計画問題であるので、大規模な問題を数値的に安定かつ高速に解くことができる線形計画ソルバーを利用可能である。
- (3) 緩和解（下界）と局所解（上界）を用いて、局所解の信頼性をどの程度評価することが可能かについて、数値解析例を通じて調べた。3層3スパンモデル解析例では、大域的最適解との目的関数値の差が0.58%以内に保証された設計解を得られた。一方、7層3スパンモデル解析例では上界と下界との乖離度が6.19%であり、規模が大きくなるに従い精度は低下した。
- (4) 3層3スパンモデル、7層3スパンモデルどちらの解析例においても、チェッカーボード状の設計解はコスト増加につながっていた。どのような設計解が有利かは、モデル化や設計条件により変わることが予想される。そのような問題の定性的な考察に本手法は有用と考えられる。

参考文献

- 1) 久保幹雄, 田村明久, 松井知己: 応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店, 2002.5
- 2) 澤田樹一郎, 松尾彰: 弾性・塑性制約下における鋼構造建築骨組の離散最適化問題に対する列挙型アルゴリズムの改善解法, 日本建築学会構造系論文集, No.574, pp.93-98, 2003.12
- 3) NZ Shor: Dual quadratic estimates in polynomial and boolean programming, *Annals of Operations Research*, Vol.25, No.1, pp.163-168, 1990
- 4) H. D. Sherali, C. H. Tuncbilek: A global optimization algorithm for polynomial programming problems using a reformulation-linearization technique, *Journal of Global Optimization*, Vol.2, No.1, pp.101-112, 1992
- 5) S. Kim, M. Kojima: Second order cone programming relaxation of nonconvex quadratic optimization problems, *Optimization Methods and Software*, Vol.15, No.3-4, pp.201-224, 2001
- 6) T. Fujie, M. Kojima: Semidefinite relaxation for nonconvex programs, *Journal of Global Optimization*, Vol.10, pp.367-380, 1997
- 7) M. X. Goemans, D. P. Williamson: Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming, *Journal of the ACM (JACM)*, Vol.42, No.6, pp.1115-1145, 1995
- 8) Y. Nesterov: Semidefinite relaxation and nonconvex quadratic optimization, *Optimization Methods and Software*, Vol.9, No.1/3, pp.141-160, 1998
- 9) J. B. Lasserre: Semidefinite programming vs. LP relaxations for polynomial programming, *Mathematics of Operations Research*, pp.347-360, 2002
- 10) K. M. Anstreicher: Semidefinite programming versus the reformulation-linearization technique for nonconvex quadratically constrained quadratic programming, *Journal of Global Optimization*, Vol.43, No.2, pp.471-484, 2009
- 11) Hans Mittelmann: Benchmarks for Optimization Software, <http://plato.asu.edu/bench.html>, 2011.08.01
- 12) C. Audet, P. Hansen, B. Jaumard, G. Savard: A branch and cut algorithm for nonconvex quadratically constrained quadratic programming, *Mathematical Programming*, Vol.87, No.1, pp.131-152, 2000
- 13) H. D. Sherali, C. H. Tuncbilek: New reformulation linearization/convexification relaxations for univariate and multivariate polynomial programming problems, *Operations Research Letters*, Vol.21, No.1, pp.1-9, 1997
- 14) MATLAB Mathematics R2011a, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2011
- 15) Optimization Toolbox 6.0 User's Guide, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2011

16) IBM ILOG CPLEX V12.2: User's Manual for CPLEX, International Business Machines Corporation, 2010

第5章 結論

5.1 結論

本研究では、鋼構造平面骨組の鋼材量最小化問題におけるさまざまな非凸性に注目し、より良い設計解（局所解）を求める手法、また得られた局所解の良さを定量的に評価する方法を提案した。

まず、鋼構造建築物の鋼材量最小化問題において、必要保有水平耐力の算定に用いられる構造特性係数に関する非凸性に注目し、構造特性係数に対する線形緩和を利用した最適化手法を第2章で、半正定値緩和を利用した最適化手法を第3章で示した。設計基準に対する構造特性係数の選択を含めた最適設計問題を実用的な時間内に解ける手法を提案した。

第2章では、提案手法を利用し、設計基準と耐震性能の関係を調べた。数値解析例において、 A_i 分布に基づく外力分布で全体崩壊形を保証し、かつ設計基準を満たす Q_{un} 分布に基づく外力分布で保有水平耐力を求める場合と、崩壊形の指定を与えずに A_i 分布に基づく外力分布で保有水平耐力を求める場合と比べると、約1割から3割程度のコスト増加が見られた。

第2章の解析例2において、線形緩和問題の初期値依存性が見られた。第3章では、1層1スパンの解析例において、半正定値緩和を利用した提案手法で線形緩和より良い緩和解が得られたが、3層3スパンの解析例において、半正定値緩和の目的関数値が厳密解より高くなった。これらの理由として、問題の非凸性にあると考えられる。提案した線形緩和問題と半正定値緩和問題のいずれも構造特性係数のみに対する凸緩和であり、問題全体が依然非凸計画問題である。混合整数計画問題を直接に多数解く方法と比べて、提案した緩和問題を解く方法では目的関数値の初期値依存性が低減されることを解析例において確認した。しかし、より安定的に良い最適解を得るために、問題全体の凸緩和問題の構築が必要である。

第4章では、鋼構造建築物の鋼材量最小化問題におけるすべての非凸性に対する凸緩和問題の定式化を示した。領域分割に基づく分枝限定法により、緩和問題の精度を向上する方法も示した。緩和（下界）と局所解（上界）を用いて、局所解の信頼性をどの程度評価することが可能かについて、数値解析例を通じて調べた。3層3スパンモデル解析例では、大域的最適解との目的関数値の差が0.58%以内に保証された設計解を得られた。一方、7層3スパンモデル解析例では上界と下界との乖離度が6.19%であり、規模が大きくなるに従い精度は低下した。

5.2 将来の展望

計算環境のさらなる高速化かつ大容量化が今後も予想される。そのような進歩の著しい計算環境に適した最適化手法についての研究は発展途上にあり、そこでは過去に実用的ではないとされた考え方が見直されるといったことも起こっている。高い性能を持つ計算機の利用がますます一般的となれば、ある程度の規模を持つ非凸計画問題についても、実用的な時間内に実用上十分な精度を持つ緩和解が求められるようになる可能性が高い。建築構造分野の既往の最適設計についての研究では、どの程度信頼できるか不確かな局所解に基づいての考察が中心であった。現実的な規模の設計問題について局所解の精度を数理的に厳密な下界から評価できる方法、さらにそのような方法に則った知見の蓄積は十分ではない。本研究はそのような問題を解決することを試みたものであり、限定的ではあるもののいくつかの新たな知見を得ることができた。本研究で提案したような方法が改善されていけば、鋼材量最小解の性質を理論的に明確化することが可能になる。これは建築構造物の構造設計における本質的な性質の抽出と言え、そこから得られる成果は実務設計的な観点からも妥当な意義を持つものと予想される。

発表論文一覧

査読付論文

- 1) 宋昶, 山川誠, 吉富信太, 上谷宏二: D_s 値の不連続性を考慮したブレース付き骨組の最小重量設計法, 日本鋼構造協会鋼構造年次論文報告集, Vol. 16, pp.407-412, 2008.11
- 2) 宋昶, 山川誠, 上谷宏二: 必要保有水平耐力における構造特性係数の不連続性を考慮した鋼構造骨組の最適設計法, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 76, No.667, pp.1665-1673, 2011.9
- 3) 宋昶, 山川誠, 上谷宏二: 鋼構造骨組の最小重量設計問題における凸緩和, 日本建築学会構造系論文集, 査読中

国際会議論文

- 1) Chang Song, Makoto Yamakawa, Koji Uetani: An Optimization Method for Building Frames considering the Discontinuity of the Structural Property Coefficient D_s , 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009.6
- 2) Makoto Yamakawa, Chang Song, Koji Uetani: Application of multi level models in Gaussian process to seismic design of building model, 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009.6

口頭発表

- 1) 宋昶, 山川誠, 吉富信太, 上谷宏二: 構造特性係数の不連続性を考慮した建築構造物の最適化法, 日本建築学会近畿支部研究報告集構造系, No.48, pp.161-164, 2008.05
- 2) 宋昶, 山川誠, 吉富信太, 上谷宏二: 構造特性係数の不連続性を考慮した建築構造物の最適化法, 日本建築学会学術講演梗概集, B-1, 2008.07

謝辞

2005年の秋に留学生として来日し、6年間にわたり、終始一貫して丁寧なご指導ご鞭撻を賜りました京都大学工学研究科建築学専攻・上谷宏二教授に心より深く感謝の意を表します。ご多忙の中、定期的に研究の進捗状況をお聞きになり、研究の考え方や、進む方向などのご指導をいただきました。

京都大学工学研究科建築学専攻・山川誠助教には、修士課程から直接ご指導していただきました。研究の進め方などいろいろ有益な助言をいただきました。研究内容だけではなく、発表論文の日本語も丁寧に修正していただきました。また、生活と就職のこともいろいろアドバイスをいただきました。ここに深く感謝の意を表します。

京都大学工学研究科建築学専攻・荒木慶一准教授には、研究に関するアドバイスなどをいただきました。また、いろいろのご相談に乗っていただきました。ここに深く感謝いたします。

京都大学工学研究科建築学専攻・加藤直樹教授と竹脇出教授には、ご多忙の中、本論文を審査していただきました。また、多くの貴重な助言をいただきました。ここに深く感謝の意を表します。