学 位 審 査 報 告 書

（ふりがな） 氏　　名	きむら　よしゆき 木村　嘉之
学位（専攻分野）	博　士　（理　学）
学 位 記 番 号	理　博　第　　　号
学位授与の日付	平成　年　月　日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科・専攻	理学研究科　数学・数理解析専攻

（学位論文題目）

Quantum unipotent subgroup and Dual canonical basis
（量子冪単部分群と双対標準基底）

論文調査委員	（主査）　中　島　　啓　教　授 向　井　　茂　教　授 荒　川　知　幸　准教授

理　学　研　究　科

（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（ 理学 ）	氏名	木村 嘉之
論文題目	Quantum unipotent subgroup and Dual canonical basis （量子冪単部分群と双対標準基底）		

（論文内容の要旨）

量子展開環の上三角部分環U_q^-は、Lusztigと柏原によって独立に導入されたcanonical basisとよばれる、基底を持ち、これはさまざまなよい性質をもつ。FominとZelevinskyは、この研究に動機付けされて、クラスター代数の理論を構築・展開し、canonical basisの双対基底であるdual canonical basisの一部が、比較的簡単な帰納的定義によって与えられるクラスター単項式とよばれる元で表されることを予想し、多くの例でこの予想の検証を行った。ただし、これは量子パラメータqを1としたときの理論であり、もともとのcanonical basisを記述するためには、量子パラメータを変数として扱う量子クラスター代数の理論が展開される必要があり、これは、のちにBerenstein-Zelevinskyによって行われた。

また、Lusztigは、彼自身の構成の量子パラメータqを1としたバージョンである、preprojective algebraの表現の箙多様体の上の構成可能関数を用いたcanonical basisへのアプローチを展開した。特に、canonical basisとよく似たよい性質を持つが、canonical basis自身とは異なる、semicanonical basisを導入した。Geiss-Leclerc-Schröerは、このLusztigによる研究と、クラスター代数の理論に動機付けられて、preprojective algebraの表現の圏の構造を研究し、応用として、冪単群の構造環（量子展開環の量子パラメータqを1とした通常の展開環の双対代数となる）がクラスター代数の構造を持ち、semicanoical basisがクラスター単項式を含んでいることを証明した。より正確には、ワイル群の元を取るごとに冪単群の部分群の構造環について、証明した。

木村嘉之は、これらの研究に示唆されて、Geiss-Leclerc-Schröerの理論を、量子パラメータqを変数として取り扱い、量子クラスター代数と、Lusztig柏原のcanonical baseの間に、同様の関係を証明することを目標として、その基礎付けとなる研究を次のように行った。まず、LusztigやDeConcini-Kac-Procesiによって上と同様にワイル群の元ごとに、U_q^-の双対代数が部分環を持つことが知られていた。これが題目にある量子冪単部分群であり、木村の博士論文の最初の主定理は、これがdual canonical basisとcompatibleであること、すなわち量子冪単部分群とdual canonical basisの共通部分が、量子冪単部分群の基底になるというものである。これは、量子冪単部分群、組み紐作用素、dual canonical basisの間の関係を、PBW基底とよばれる基底を仲立ちとして用いて研究することによって証明された。

次に、dual canonical basisの特別な元として、quantum flag minor とよばれている元がワイル群の元の長さの分だけあることが知られていたが、それらがqの冪を除いて互いに交換していること、そしてその単項式がすべて量子冪単部分群とdual canonical basisの共通部分に入っていることを証明した。これは、量子クラスター代数のinitial seedになっていると考えられるもので、他のクラスター単項式は、initial seedにある単項式から、帰納的に構成されると予想されている。この事実の証明には、柏原によって展開された canonical basisとDemazure加群の関係の理論が用いられた。

また、quantum flag minorの中でもさらに特別な元たちがあり、量子冪単部分群内のdual canonical basisの元は、これらの元の単項式と、別のdual canonical basisの元の積に、qの冪を除いて因数分解されることを証明した。これは、これらの元が、量子冪単部分群のq-中心になっていることを示すもので、量子クラスター代数の構造の中で、係数に対応するものと期待されている。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

Canonical basis の Lusztig による箙多様体上の偏屈層を用いた定義、柏原によるテンソル積を用いた帰納的な定義は、ともに複雑なものであり、具体的な形を記述するためには別の手法が必要である。Lusztig-柏原の研究以後、そのような方向で多くの研究がなされ、現在も活発に進行中である。この中で Fomin-Zelevinsky のクラスター代数の研究は、特筆すべき成果である。その最初の動機付けである canonical basis の理解という目標に向かって進んでいるのはむろんのこと、それ以外にも、非可換代数の表現論や、代数幾何学における Donaldson-Thomas 不変量の壁越え公式との関連、可積分系との関連などが発見され、広い分野の研究者から着目されるテーマになっている。

中でも、上の Geiss-Leclerc-Schröer の研究のほかに、Buan-伊山-Reiten-Scott による、2-Calabi-Yau 圏の上に定義されるクラスター圏の理論などがあり、これらはクラスター代数と非可換代数の表現論を結びつけるもので、クラスター代数の帰納的構造を研究するために、極めて有効に用いられてきた。しかし、現在のところ、量子クラスター代数にこの理論を応用することや、上に述べた dual canonical basis と量子クラスター代数の場合のクラスター単項式の間に関係を結ぶ問題を解決することは、ほとんど成果がない状況であった。

このような中で、木村嘉之の研究は、極めて先駆的なものであり、量子クラスター代数に関して最初に得られた基本的な結果の一つと考えることができる。また、その証明には、組み紐作用素、PBW 基底、Demazure 加群といった、dual canonical basis の研究において、大きな役割を果たしてきた道具を巧みに扱うものであり、これらが量子クラスター代数の研究においても基本的な道具であることを初めて示した研究であるといえる。実際、Geiss-Leclerc-Schröer は、木村の研究を受けて、量子冪単部分群が量子クラスター代数の構造を持つことを証明し、残された問題はクラスター単項式が dual canonical basis の元であることを示すこと、となった。また、この結果により今までクラスター代数において活発に代数の表現論との関連に基づいた研究と木村の結果がつながることとなり、更なる発展が期待されるものとなっている。

以上の理由により、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認めた。また、平成 23 年 12 月 2 日論文内容とそれに関連した事項について口頭試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公開可能日：　　　　　年　　　月　　　日以降