サーベイ論文

# 無差別の原理と Bertrand のパラドックス

高尾 克也*

# The principle of indifference and Bertrand's paradoxes

Katsuya TAKAO

## §1　背景

確率の哲学的解釈には大きく分けて論理説，主観説，頻度説，傾向性説の 4 つが挙げられる．後者 2 つは確率を客観的な物質世界の性質として捉え，前者 2 つはこれを（少なくとも部分的には）否定し，確率を人間の認識の側の問題として捉えるという違いから，Hacking（1971）の用語法に従えば，前者は認識論的解釈，後者は物質的解釈と呼ばれる．そして今日では，認識論的解釈は主観説によって代表されると言えるだろう．論理説は主に，Keynes，Jeffreys，Carnap らにより展開されてきたが，この試みは失敗に終わったと目されることもしばしばである．それでは，論理説の限界と目される事態とは何であったのか．ひとつには，無差別の原理から生じるとされるパラドックスが指摘される．無差別の原理を適用した際に生じるパラドックスとは，そこでの結果として導かれる確率が，一意的に決定されないことを意味する．しかし，論理説を確率の哲学的解釈の候補として認めるためには，Gillies（2000）の言うように，無差別の原理を論理的原理として扱った上で，アドホックでない形で，適用対象における最小単位としての選択肢が，一意的に決定可能であることが必要とされる．従って論理説には，（1）無差別の原理を適用可能な現象と適用不可能な現象とを一意的に峻別する[1]，そして，（2）適用可能な場合には適用事象（最小単位）を一意的に決定する，ということが必要とされる．言い換えると，無差別の原理が適用可能な現象にお

* 京都大学大学院文学研究科修士課程 katsta07@me.com

[1] ここで，無差別の原理を適用不可能な現象を設けることを，論理説は容認し得るのかという疑問が生じるかも知れない．しかし，適用不可能な現象が存在することは，それ自体としては論理説の立場を脅かすものではない．例えば Keynes（2010）は，後に 3.3 で詳しく見るように，極限値を扱う問題を，確率の理論が扱える範囲から（基本的には）排除する．当然ながら，このタイプの論理説が，他の確率の理論と比較して魅力的であるかという問題は別であるが，扱える問題の範囲が狭いということによって，論理説が成立しないことにはならない．

いて，唯一可能な最小単位としての選択肢を設定し，そこから矛盾のない結論を導き出せる必要がある．これが不可能であるというのが，パラドックス支持者の見解である．本稿では，このパラドックスについて，これまでに提示されている解決・解消の試みをまとめていく．

無差別の原理に関して最も有名なパラドックスは，Bertrand（1889）によって提示されたものである．このパラドックスの提示以降，類題の提示や，問題の一般化の試みがなされてきたため，Bertrand のパラドックスと言った際に，それが何を指すのかは必ずしも明確ではないだろう．例えば，Bertrand 自身の提示した弦問題，von Mises（1957）の提示したワインと水の問題，そして，これらの問題の一般化として位置づけられる変数 $x$ とその関数 $f(x)$ との関係についての問題[2]がある．また，無差別の原理から生じるパラドックスという意味では，壺と玉の問題も挙げられる．これについては，Keynes（2010）と Carnap（2011）でも，解決策を巡って意見が対立している．しかし，この問題は，弦問題とは明らかに性質が異なっている．これに対して，ワインと水の問題と $x$ と $f(x)$ の問題は，弦問題と同様の問題として扱われることが多く，これら 3 つの問題の相違は必ずしも明確には意識されていない．しかし，これらの問題は，パラドックスの生じる原因の分析や，その解決・解消の可能性という意味において，弦問題とは性質の異なる問題として区別するべきである．このことを示すのを最終的な目的として，本稿ではパラドックスの分析における論点を整理していく．その際，何が問題とされ，如何なる解決・解消が試みられてきたかについて，3 つの問題（弦問題，ワインと水の問題，$x$ と $f(x)$ の問題）をそれぞれに見ていく．

以下に，本稿全体の構成を示す．まず §2 では，Laplace との比較において，特に Keynes のタイプの無差別の原理は，無条件的な知識の欠如ではなく，一定の知識を前提して無差別の原理の適用を行うことを確認しておく．続いて，具体的なパラドックスの検討として，§3 で弦問題，§4 で $x$ と $f(x)$ の問題，§5 でワインと水の問題を取り挙げる．本稿で中心的に扱うのは弦問題であるため，§3 の構成はここで少し詳しく触れておく．3.1 では，議論の前提として，弦問題の一般的形式を確認する．3.2 では，弦問題の一般化された形式としてしばしば扱われる $x$ と $f(x)$ の問題であるが，この捉え方には疑問が残ることに言及する．それでは，弦問題の生じる原因が $x$ と $f(x)$ との関係によるのではないとしたら，弦問題に特有の性質とは何であろうか．これについて，3.3 では，無差別の原理を可算無限集合に適用する際の問題として，弦問題の 3

[2] 以降，本稿ではこの問題を，$x$ と $f(x)$ の問題と呼ぶ．

つの解法が設定している最小単位とはそれぞれ何かという視点から検討する．これによって，3 つの解法は如何なる意味において異なる解法であるのか，ある程度の見当が付くはずである．そして，3.4 及び 3.5 では，弦問題に異なる複数の解法が存在することは，それだけで矛盾と言えるのか，また，異なる問題に異なる解法を用いていると捉えることも可能ではないのか，ということが検討される．以上が §3 の大まかな流れである．続いて，§4 では，$x$ と $f(x)$ の問題におけるランダム性の維持の問題を紹介し，§5 では，ワインと水の問題に対する 1 つの解決策を紹介する．

## §2 論理説における無差別の原理

パラドックスの分析に入る前に，無差別の原理と一括りに呼ばれるものにも，複数のタイプが存在することを確認しておく必要がある．Bertrand のパラドックスが議論される際に引用されるのは，ほとんどの場合において Keynes による定式化であるが，そこでは Laplace との差異が無視されるか，少なくとも軽視されることが多い．例えば，無差別の原理の一般的な形式としては，「2 つ以上の選択肢において，特定の選択肢を支持する理由が無い限り，これらの選択肢には等確率を割り当てる」という具合に，確かに Laplace のタイプの原理にも，Keynes のタイプの原理にも共通して当てはまる説明がなされる[3]．しかし，Laplace と Keynes では大雑把に言って，前者は証拠の欠如を等確率の根拠とするのに対して，後者はむしろ証拠をもとに等確率の選択肢を設定するという重要な違いがある．本節では，この点を確認しておく．

Laplace（1997）の不十分理由の原理（principle of insufficient reason）と呼ばれる考え方では，無差別の根拠を知識の欠如におくことが強調される．

> 偶然に関する理論は，同じ種類に属するすべての事象を，まず一定数の同等に可能な場合，すなわちそれらが存在するかどうかについてわれわれが決めかねる程度が同じである場合に帰着させ，次にその確率を求めている当の事象に好都合な場合がいくつあるか，その数を決定することからなる．この数が可能な場合すべての数に対して持つ比率が問題の確率の大きさである——つまり，それは分子が好都合な場合の数，分母が可能な場合の総数であるような分数にほかならない（Laplace 1997, 13 頁）．

これに対して Keynes（2010）の無差別の原理（principle of indifference）では，無差

[3] e.g. Shackel（2007），Howson and Urbach（1993），etc.

別の根拠を手持ちの知識におくことが強調される.

> 無差別原理を用いて等確率を確立しようとしている選択肢を $\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_r)$ とし,その証拠を $h$ としよう.そのとき,当原理を適用するためには,これらの選択肢が証拠に照らして形式の分割不可能な選択肢であることが必要条件である.次の仕方で,分割可能な選択肢 $\phi(x)$ を定義できる.
>
> 選択肢 $\phi(a_r)$ は,次のような条件が満足されるならば分割可能である.
>
> (i) $[\phi(a_r) \equiv \phi(a_{r'}) + \phi(a_{r''})]/h = 1$,
>
> (ii) $\phi(a_{r'}) \cdot \phi(a_{r''})/h = 0$,
>
> (iii) $\phi(a_{r'})/h \neq 0$ かつ $\phi(a_{r''})/h \neq 0$(Keynes 2010, 69 頁).[4]

このように,最小単位としての選択肢を定めるために,Laplace の場合よりも厳密な条件が設定されている.この条件を満たすと,(i) 同一形式によって記述され,(ii) 互いに排反である,(iii) 可能な選択肢へと分割されてしまうため,その選択肢は適切でないということになる.つまり,以上の条件を満たさないことが,分割不可能な選択肢であることの必要条件となる.この条件を明記することで,Laplace の場合と何が異なるのかを確認するには,例えば,本の表紙の色についての問題が有用である.ここに 1 冊の本があるとき,その表紙の色が赤である確率はいくらか,という問題である.ここで Laplace のタイプの原理を用いるならば,「この本の表紙は赤である」を $\phi(R)$ とおくと[5],$P(\phi(R)) = P(\phi(\neg R)) = 1/2$ となる.しかし同時に,「この本の表紙は黒である」を $\phi(B)$,「この本の表紙は白である」を $\phi(W)$ とおくと,$P(\phi(R)) = P(\phi(B)) = P(\phi(W)) = 1/3$ という可能性も排除されない.ここで Keynes のタイプの原理を用いると,$\phi(\neg R)$ は (i) 同一の形式「この本の表紙は $a_r$ である」($\phi(a_r)$)で記述され,(ii) 互いに排反である (iii) 可能な選択肢($\phi(R), \phi(B), \phi(W)$)へと分割されてしまうため,この選択肢は不適切とされる.従って,無差別の原理によって,$\phi(R)$ と $\phi(\neg R)$ に等確率を割り振る可能性は排除される.加えて強調すべき点は,条件文中の $h$ で示されるように,これらの条件を証拠に基づいて満たす(分割可能)ことがない場合(分割不可能)に限って無差別の原理を適用できるのである.言い換えるなら,

[4] ここで (i) における Keynes の記号法に触れておく.この表記は,[] 括弧内の等式が左辺の分子となり,またこの等式が,= で表される等式全体と混同されないように,左辺の分子となる等式には ≡ を用いて表現したものと思われる.

[5] ここでは Keynes の記号法に則り,任意の選択肢を $\phi(x)$ と表記している.特に $\phi(x)$ は,「この本の表紙の色は $x$ である」の意味である.

無条件的な知識の欠如を根拠とするのではなく，その選択肢が不当である証拠の不在を確認する必要があるという意味で，分割可能性についての知識の不在という根拠が積極的に必要とされるのである．Laplace においては「われわれが決めかねる程度が同じである場合」へと分割されはするが，Keynes の場合とでは，厳密さの違いを除いても，それ以上分割不可能であることを確認する段階が求められる点で，異なっていると言える．

## §3　弦問題

ここからは弦問題について，パラドックスの生じる原因の分析とその解決の試みを，論点毎に紹介していこうと思う．概略を述べておくと，3.2 では，（ある変数からその関数への）変換の際に，密度の一様性が維持されるか否かという視点による分析は，弦問題には当てはまらないことを示し，3.3 では，弦問題において確率を計算する以上は避けられない，可算無限集合に無差別の原理を適用する際の困難について確認し，3.4 及び 3.5 では，弦問題には唯一の解答が必然的に求められるのか，それとも複数の解法の存在が許容されるのかという論点を紹介する．

### 3.1　弦問題の一般的形式

まずは，Bertrand の弦問題を確認しておく．ここでは，一般に理解される形式での弦問題を確認するために，Clark（2007）による簡潔な説明を用いる．

> 円にランダムに引かれた弦が，内接正三角形の 1 辺よりも長いチャンスはいくらか．
>
> 1. 三角形の頂点から円周に引かれた弦は，その頂角の内側に位置するときに［その内接正三角形の 1 辺よりも］長い．これは弦の 3 分の 1 に当たるため，その確率は 3 分の 1 である．
> 2. 三角形の 1 辺に平行な弦は，その中点が三角形の内側に位置するように，半径の内側半分と直交するときに［その内接正三角形の 1 辺よりも］長い．従って，その確率は 2 分の 1 である．
> 3. また弦は，その中点が三角形の内接円の内側に位置するときに［その内接正三角形の 1 辺よりも］長い．内側の円は外側の円に対して，半径は 2 分の 1 で面積は 4 分の 1 である．従って，その確率は 4 分の 1 である（Clark 2007, p. 22）．

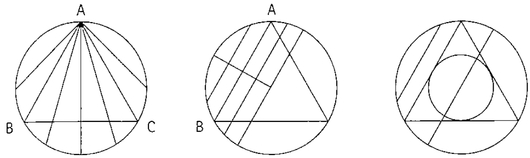


図 1　Clark（2007, p. 23）による．

このように，「ランダムに弦を引く」という同一の現象を記述しているように思われる 3 つの解法が，同等に可能であり，かつ異なる解答を導くという事態が，パラドックスと呼ばれる．以上の 3 つの解法を，本稿では順に解法 1，解法 2，解法 3 と呼ぶこととする．

## 3.2　密度の一様性の維持

ここでは，弦問題の生じる原因として一般に考えられているものを，Howson and Urbach（1993）から確認し，そこでなされる弦問題の一般化は，少なくとも自明とは言い難いことを，van Fraassen（2011）の議論を参考に示そうと思う．Howson and Urbach（1993）は，Bertrand のパラドックスを幾何学的確率の問題の一例であると捉え，そこにおける一般的な問題は，変数 $T$ とその関数 $T^2$ との関係の問題であるとしている．$T$ は区間 $[a, b]$（但し $0 < a < b$）の値を取ること以外には情報がない場合，ここで $T$ の取る値に無差別の原理を適用することで，$[a, b]$ の密度（density）は一様（uniform）であると仮定される．しかし，ここで $T^2$ について考えると，$[a^2, b^2]$ の範囲は決定されるが，$[a, b]$ の密度が一様であるならば，$[a^2, b^2]$ の密度は一様でないことになる．しかし，$T^2$ の取る値に無差別の原理を適用するならば，$[a^2, b^2]$ の密度は一様となり，これらは矛盾する．これがパラドックスの原因である（Howson and Urbach 1993, pp. 59–60）．

Howson and Urbach（1993）の主張は，確かに無差別の原理の抱える問題点の指摘としては適切である．しかし，この一般化が，弦問題の生じる原因を的確に捉えているかとなると疑問が残る．同様の一般化は Gillies（2000）などにも見られるが[6]，van Fraassen（2011）は，Bertrand のパラドックス自体は存続する[7]と主張する一方で，こ

[6] 但し，弦問題と $x$ と $f(x)$ の問題を，同様の問題として捉える議論は Bertrand（1889, chap. 1 sec. 4）に既に確認されるため，これらの一般化は Bertrand の議論に忠実であるとも言えるだろう．

[7] van Fraassen（2011）は $x$ と $f(x)$ の問題（立方体工場と呼ばれる），弦問題，ワインと水の問題，そ

表 1

| | 可能な場合 | 好ましい場合 |
|---|---|---|
| 1 辺の長さ | $\leq 2$ | $\leq 1$ |
| (1 面の)面積 | $\leq 4$ | $\leq 1$ |
| 体積 | $\leq 8$ | $\leq 1$ |

の一般化された問題と同様の問題には解法を提案している．Howson and Urbach や Gillies における一般化された問題に対応し，本稿においては $x$ と $f(x)$ の問題と呼ぶものに対応する問題を，van Fraassen は立方体工場の問題として定式化している．

> 精密な道具工場が，辺の長さが $\leq 2$ cm の鉄のサイコロを生産する．あるサイコロがこの工場で作られたとすると，このサイコロの 1 辺の長さが $\leq 1$ cm である確率はいくらか（van Fraassen 2011, p. 303）．

ここで無差別の原理を用いて，辺の長さ $l$ が一様な確率分布を持つと仮定すると，求める確率は 1/2 となる．しかし，表 1 にある異なる表現は，論理的に等しい形式を持ち，これを認めると相反する値が導かれる．計算するとそれぞれ 1/2，1/4，1/8 が導かれ，互いに一致しない．

ここで，van Fraassen（2011）は，問題の生じる論理的構造を明らかにするため，$x$ の他の関数の場合と比較する．そこで挙げられるのは，$f(x) = x + k$ および $f(x) = kx$ の例であり，このとき上記のような矛盾は生じない[8]．これを説明するために，van Fraassen は $m(a, b) = b - a$ という測度を導入する．ここでは，数直線を用いて考えるのが理解を助けるだろう．まず $x$ と $f(x)$ の問題とは，より詳細に表現するならば，$x$ の値域が $[a, b]$ であるときの，$x$ が $[a, c]$（但し $a \leq c \leq b$）の範囲に含まれる確率が，$f(x)$ の値域が $[f(a), f(b)]$ であるときの，$f(x)$ が $[f(a), f(c)]$ の範囲に含まれる確率と，異なる値を示すことである．これを数直線のイメージで考えると，$f(x) = x + k$ および $f(x) = kx$ の場合には，もとの $[a, b]$ に対して，前者は $k$ だけ平行移動した $[a + k, b + k]$ であり，後者は可能な範囲が $k$ 倍された $[ka, kb]$ であると言える．これらの場合には，可能な範囲全体（$[a, b]$ もしくは $[f(a), f(b)]$）の長さと，その一部（$[c, b]$ もしく

してその他も含む様々な問題を検討しているが，そのなかで $x$ と $f(x)$ の問題が最も一般的な問題であるという捉え方はしていない．

[8] van Fraassen（2011）の用いる記号法に若干の修正を加えている．

は $[f(c), f(b)]$）の長さの比を取ると，その値は等しくなる．言い換えると，$b-c/b-a$ と $f(b)-f(c)/f(b)-f(a)$ が等しいのである．この事態を，van Fraassen は，対称性（symmetry）が維持されていると言う．これに対して立方体工場は $f(x)=x^k$ の事例であり，このときには先の矛盾が生じるため，対称性は維持されないように思われる[9]．しかしこの場合にも，先の数直線の考え方からは一旦離れて，自然対数を用いることで矛盾しない解答を与えることができる[10]．

辺の長さが 1 から 3 までを取るとき，［辺の長さが］$\leq 2$ の確率はいくらか．
面積が 1 から 9 までを取るとき，［面積が］$\leq 4$ の確率はいくらか．
辺の長さが 1 から 3 までを取るとき，［辺の長さが］$\leq 2$ の確率は，
$M(1,2)/M(1,3) = \log 2/\log 3 = 0.631$
面積が 1 から 9 までを取るとき，［面積が］$\leq 4$ の確率は，
$M(1,4)/M(1,9) = 2\log 2/2\log 3 = 0.631$（van Fraassen 2011, p. 309）

ここで van Fraassen（2011）は，先の測度 $m(a,b)=b-a$ に代えて，測度 $M(a,b)=\log b-\log a$ を用いている．これによって，対称性の維持が可能となっているのである．但しこの解法は，van Fraassen 自身も指摘するように，立方体工場の場合には成り立つが，明らかに弦問題においては成り立たない．弦問題における 3 つの解法に自然対数を用いたところで，当然ながら等しい値は導かれない．

自然対数を用いた解法の評価については，未だ議論の余地がある．例えば，$x$ に基づく解法と $x^2$ に基づく解法に加えて，新たに自然対数に基づく解法が，第 3 の解法として提示されたに過ぎないと捉えることも可能であろう．むしろその方が自然な捉え方であるとも言える．また，この解法はアドホックな解決策であることも，指摘しておくべきだろう．これまでの議論からも明らかなように，変数 $x$ とその関数 $f(x)$ との関係において，密度の一様性が維持されるか否かは，関数の内容に依存する．そして，$f(x)$ に指数が含まれると一様性が維持されない．そこで自然対数を用いた解法は，その名の通り対数を取ることで，一様性を維持するのである．

---

[9] van Fraassen（2011）の用いる記号法に若干の修正を加えている．

[10] van Fraassen（2011）は，計算の便宜のためか，先の事例とは数値を変更している．問題の分析には影響ないため，そのまま引用する．

### 3.3 極限値・可算無限集合の扱い

弦問題への反応としては，Shackel（2007）も言うように，今日ではあまり支持を集めてはいないが，以下の立場も歴史的には存在する．（1）無差別の原理の適用対象として有限集合は許容し，可算無限集合は拒否する，（2）頻度説の立場を取る，の 2 つである．前者は，確率論の扱える範囲を厳しく制限し，後者は，むしろ Bertrand のパラドックスを支持する立場である（Shackel 2007, pp. 155–156）．そして，後者を代表するのが von Mises と Reichenbach であり，前者を代表するのが，ここで扱う Keynes である．

Keynes（2010）は，幾何学的確率のパラドックスにおいて，極限を最小単位の選択肢として扱うことを拒否している．これによって弦問題を，確率論の扱う対象から除外するのである．その理由として，極限を扱う場合には，何の極限かということが重要であり，異なる極限と極限の間においては確率を単純に比較することはできないことが挙げられる．ここで Keynes は，無差別の原理が幾何学的確率を扱うための条件を提示している．それは，長さ $l$ の区間が左から右へと $m$ 個並んでいるというような，直線 $l \times m$ で可能な場合の全体が表される場合である．$l$ はいくら小さくても量を持ってさえいれば良い．このとき「任意の点が左から $x$ 番目の区間 (長さ) に位置する」を $\phi(x)$ とするならば，選択肢 $\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(m)$ に無差別の原理を適用することができる．

> このような仕方で幾何学的確率[11]の問題を扱うならば，異なる基本面積を混同することによって生じる矛盾した結論を出さないですむ．たとえば第 7 節で論じたものに，円に任意の弦を引く問題があった．その問題では，弦は 1 次元の直線としてではなく，面積の極限として考えられ，その面積の形はいろいろある解の違いによって相異なるものである．第 1 の解では，それは三角形の極限であり，その底辺の長さはゼロに近づく．第 2 の解では，それは四辺形の極限であり，その 4 辺のうちの 2 辺[12]が平行でかつ離れていて，その距離がゼロに近づく．第 3 の解では，その面積は不定の形の中心部分の極限位置によって定義される．これらの異なる仮説からいろいろな違った結果が導かれるのは避

[11] 邦訳版では「幾何的確率」とされているが，本稿における他所との整合性を鑑みて，「幾何学的確率」に訂正した．原語は “geometrical probability” である．

[12] 邦訳版では「1 辺」となっているが，原著では “[. . . ] two of the sides of which [. . . ]” であるため「2 辺」に訂正した．

> けられない．もし厳密に 1 次元の弦を扱っているのであれば，要求される形式で選択肢を言明できないので，無差別原理はいかなる結果ももたらさない．そしてもしその弦が基本面積であるならば，弦がその極限となるような面積の形を知らねばならない．無差別原理を明白に適用できるような形式で選択肢を注意深く言明するかぎり，異なる問題を混同することが避けられるであろうし，また明確に妥当な幾何学的確率の諸々の結論に到達することができるであろう（Keynes 2010，72 頁）[13]．

ここでの Keynes の主張は明確とは言い難いが，好意的に読み取るならば，次のような趣旨の主張である．解法 1 は，内接正三角形の頂点を 1 つ固定し，その対辺（底辺）の長さを 0 に収束させる．こうしてできた直線（Keynes が「三角形の極限」と呼ぶもの）を，頂点を固定したまま 180 度の範囲で回転させて得る弦を考えている．解法 2 は，円の直径とそれに平行な接線を 1 つずつ定め，この 2 直線の距離を 0 に収束させて直線（Keynes が「四辺形の極限」と呼ぶもの）を作る．こうしてできた直線と，元の直径に直交する半径との交点を，円の中心から（元の接線と円との）接点の範囲で動かして得る弦を考えている．解法 3 は，単なる点（Keynes が「不定の形の中心部分」と呼ぶもの）を円の内側に自由に取り，この点を中心として得る弦を考えている．このように Keynes は，幾何学的確率において極限を扱うことを拒否する．この立場が論理的に可能であることは認められるにせよ，Shackel（2007）や Gillies（2000）なども指摘するように，極限値を扱うことの全面的な拒否は，確率の理論の適用範囲を著しく狭めることになってしまう．これは容易には認められず，また極限値を扱ってはならない根拠も，Keynes（2010）からは十分に明らかであるとも言えないだろう．

ここで，Keynes（2010）は極限値を扱うことを完全に拒否してはいないと答えることも可能である．幾何学的確率において拒否しているのは，正確には，もともと何の極限であったのかを考慮せずに点や線を最小の選択肢として扱うことである．これを認識した上で，一定の量を持つ最小単位を設定すれば，幾何学的確率を扱うことも可能である．しかし，これを踏まえると，弦問題は 3 つの解法それぞれに最小単位を任意に設定すれば，何らかの形で問題の解決が可能となるはずではないだろうか．しかし Keynes は，扱われているのが異なる 3 つの極限であることを根拠に，弦問題は異なる確率を比較するために生じる混乱であるとして退ける．このように問題もあるもの

[13] ここでの第 1 の解，第 2 の解，第 3 の解は，それぞれ本稿における解法 1，解法 2，解法 3 に対応している．

の，Bertrand の弦問題に限れば，3 つの解法はそれぞれに異なる極限値を扱っているという洞察は注目に値する．次に，これと類似の視点として捉えられる分析を見ていく．

Shackel（2007）は，パラドックスの支持者ではあるが，Bertrand の 3 つの解法のうちで，解法 3 は拒否されると主張する．Shackel の分析は，無差別の原理を，可算無限集合へと適用する際に用いられる測度に注目している．その結果，以下の 2 つの問題が明らかとなる．1 つ目の問題は，弦の集合を $C$ と置くと，解法 3 は $C$ を基準に，解法 1 と 2 は $C$ の部分集合を基準に測定していること．2 つ目の問題は，解法 1 と 2 では $C$ の測度を $\mathbb{R}$ の測度と同一視し，解法 3 では $\mathbb{R}^2$ の測度と同一視していることである（Shackel 2007, pp. 156–157）．この分析だけでは，どちらの視点が正しいかは未だ明確ではないが，Shackel は最終的に解法 3 の方を拒否する．その根拠は簡単に言えば，次のようなものである．解法 1 と解法 2 では，点（解法 1 では円周上の点，解法 2 では円の半径上の点）が決定すると，それに対応する弦が一意的に決定する．解法 3 でも，ほとんどの場合においては，弦の中点が決定すると，それに対応する弦は一意的に決定する．しかし，中点が原点を取る（つまり弦が円の直径と一致する）場合には，明らかにその中点に対応する弦（直径）は一意的に決定されない．従って解法 3 においては，弦とその中点の間に一対一対応が成立しないのである．こうなると，原点とその他の任意の点とは，弦を決定する中点として同等に扱うのは不都合である（Shackel 2007, pp. 162–163）[14]．

### 3.4　解決策の分類

パラドックス支持者の間では，弦問題を解決するには，可能な解法が 1 つに決定されるか，もしくは複数の解法が存在するならば，全ての解法から同一の値が導かれる必要がある，という前提が基本的に共有されている．しかし，この前提を共有しない問題の捉え方も十分に可能である．その代表例としては，次に紹介する Marinoff（1994）の議論がある．この紹介に入る前に，ここでは Shackel（2007）から，数学的問題とその解決策の可能な組合せを見ておく．

Shackel（2007）によれば，「問題」という言葉は多義的であり，問題それ自体を指示する場合と，それを表す言語的表現として用いられる場合とがあるために，議論を進め

[14] 解法 3 を拒否する議論では，Shackel（2007）は実際にはこの様な直観的な説明ではなく，測度論を用いたテクニカルな議論を展開しているが，ここではその内容に踏み込むことはしない．この議論によって Shackel は，解法 3 の拒否とともに，解法 1 と 2 が妥当であることを主張している．但し最終的には，解法 1 と 2 の矛盾は解決されないため，パラドックスは維持されるとしている．

るうえで不都合である．なぜなら，問題それ自体と，その問題の問われ方とを，区別することが困難となってしまうためである．そこで，確定的問題（determinate problem）と不確定的問題（indeterminate problem）の区別を導入する．確定的問題は問題の提示のされ方に従って同一性（identity）が固定されている．つまり，言語表現としての問題が定まれば，それに対応する指示対象としての問題も定まる．従って，何がその問題の解法と見なされるか，そして何が解法と見なされないかは定まっている．これに対して不確定的問題は同一性が固定されておらず，さらに確定的問題へと解消可能（resolvable）なものと，解消不可能（irresolvable）なものに区別される[15]．これを踏まえて Shackel（2007）は，問題が不良設定（ill-posed）であるとは何を意味するのか，第一義（primary sense）と第二義（secondary sense）とに区別して定義する．前者は確定的問題の設定（posing）における誤りを意味しており，この場合には単一の解答が求められるにも関わらず，設定における誤りのために単一の解答を欠いている．後者は不確定的問題の設定における誤りを意味しており，その問題が不良設定でない確定的問題に解消可能であるか，確定的問題には全く解消不可能であるかが区別され得るが，どちらの場合も不確定的問題を設定してしまっているという意味で，第二義においてのみ不良設定である．そして Bertrand のパラドックスは，第一義において不良設定であるときに限って，無差別の原理を転覆させる．これに対して第二義において不良設定であるときは，不確定的問題が確定的問題に解消不可能な場合は，無差別の原理には何も求められず，解消可能な場合には，無差別の原理で解決されるからである．

以上を踏まえると, Bertrand のパラドックスを解決する可能性としては, Well-posing strategy と Distinction strategy の 2 通りが存在する．今回は紹介できないが，前者は Jaynes（1973）の採った方法である．この場合は Shackel（2007）によれば，問題が不良設定ではないことを示す必要がある．つまり，唯一の解法と，そこから一意的に導かれる値を示さなければならない．後者は Marinoff（1994）の採った方法である．この場合は Shackel によれば，問題が第二義においてのみ不良設定であることを示す必要がある．特に後者の場合には，Bertrand のパラドックスが如何なる確定的問題へも解消不可能であるということは明らかに信じ難いため，第一義において不良設定では

[15] Shackel（2007）はここで，次のような直観的に理解しやすい説明も行っている．「Fred」という名前で支持される対象として，（1）1 人の人物，（2）複数の人物，（3）そのような人物はいない，という 3 通りの可能性を考える．するとそれぞれ，（1）確定的，（2）不確定的だが解消可能（「パン屋の Fred」などと表現し直すことで指示対象を確定できる），（3）不確定的かつ解消不可能（「Fred」と呼ばれる人物はいないため指示対象を確定できない），となる．

ない確定的問題へと完全に解消されることを示す必要がある．但し，先にも触れたようにShackelはパラドックスを支持しており，どちらの戦略も失敗に終わると主張している（Shackel 2007, pp. 152–155）．

## 3.5 Distinction strategy

Marinoff（1994）は，弦問題では円の中心を原点とした座標系が，2つの領域（$x^2+y^2>1$ と $x^2+y^2<1$）とその境界（$x^2+y^2=1$）の計3つに区別できると言う．これに対応して，弦を引くランダムな手続き（procedure）を，$(Q_1)$ 円周上，$(Q_2)$ 円の外側，$(Q_3)$ 円の内側，に適用するという3つの場合分けがなされる．$Q_1$（解法1に対応）は，円周上の1点を決定し，もう1点を円周上にランダムに取るという手続き[16]，$Q_2$（解法2に対応）は，円の直径を決定し，これと直交する弦の中点をランダムに取るという手続き[17]，$Q_3$（解法3に対応）は，円の内側に，弦の中点をランダムに取るという手続きである[18]．Marinoffは，これら3つを異なる問いとして扱うべきであり，これによってパラドックスは消滅すると主張している（Marinoff 1994, pp. 21–22）．

しかし，Shackel（2007）はこれに反論している．Marinoff（1994）のDistinction strategyでは，Shackelによれば，パラドックスはそのままでは不確定的問題であるが，複数の異なる確定的問題へと解消可能であると主張していることになる．これに対してShackelは，Marinoffは弦問題を総称的な単一の問題（generic singular question）であると捉えているが，そもそも弦問題は一般的な問題（general question）として提示されており，この提示のされ方を拒否する根拠も特にないと主張する．ここでは独特の用語法が用いられているが，結局のところ意味されるのは，弦問題が総称的な単一の問題であれば，この問題に直接答えることが求められるが，一般的な問題であれば，一般的な解答を与える必要がある，ということである．つまりここでの争点は，弦問

[16] Marinoff（1994）は，当初この手続を $Q_1$ と呼ぶが，最終的にはこの手続を $Q, B_1$（Bertrandの解法1の意味）とし，他の手続きを $Q_1$ と呼ぶことになる．

[17] Marinoff（1994）は，当初この手続を $Q_2$ と呼ぶが，最終的にはこの手続を $Q, B_2$（Bertrandの解法2の意味）とし，他の手続きを $Q_2$ と呼ぶことになる．

[18] Marinoff（1994）は最終的に，$Q_1$ から $Q_5$ までを提示している．$Q_3$ とBertrandの解法3は正確に対応するが，$Q_1$ と $B_1$，$Q_2$ と $B_2$ のセットは，それぞれ正確には対応していない．これらは，Marinoffが1次元的と表現するBertrandの解法を元に，その2次元的解法のバージョンとして導かれるものであるが，ここではその相違は重要でないと考える．Marinoffにとっては，Bertrandの弦問題への解法は2次元的である必要があったため，この様な解法の書き換えが必要であったのである．ちなみに，$Q_2$ の手続きが「円の外側」と表現される理由も，この相違によるものである．$Q_4$ 及び $Q_5$ については，以上のどれとも異なる解法であるが，ここでは詳しくは触れない．

題は唯一の解答（unique answer）の欠如した確定的問題であるか，もしくは不明確さのために複数の異なる確定的問題を混同しているのかという点，言い換えると，弦問題とは，解法の欠如した問題であるのか，解法と問題の 3 つずつのセットであるのかという点である．Shackel の結論は，弦問題はそもそも，特定のランダムな方法によって弦を引いた際の確率ではなく，「一般に」弦の長さが内接正三角形の一辺の長さよりも長くなる確率を問うので，複数の解法（several solutions）は認められないと主張している（Shackel 2007, pp. 163–168）．

## §4　$x$ と $f(x)$ の問題

$x$ と $f(x)$ の問題には，3.2 で弦問題との関係において既に紹介した，Howson and Urbach（1993）の $T$ と $T^2$ の問題や，van Fraassen（2011）の立方体工場がある．そこでの議論からも明らかなように，$x$ と $f(x)$ の問題は，必ずしも弦問題と関係する問題ではないか，少なくとも弦問題の一般化として捉えるには疑問が残った．つまり，弦問題における 3 つの解法は，$x$ と $f(x)$ との関係のように，一方が他方の関数であるという関係は成立していない．$x$ と $f(x)$ の問題においては，$x$ から $f(x)$ への変換において何が起きるかが論点となる．弦問題については，何が本質的な問題であるのかは未だ十分に明確とは言えないとしても，解法 1，解法 2，解法 3 における相互の変換関係が問題となっているわけではない，ということは明らかである[19]．

とはいえ，$x$ と $f(x)$ の問題も，無差別の原理から生じるパラドックスであることには変わりなく，$x$ と $f(x)$ の間で確率分布の一様性が維持されない場合が存在するという事実には，無差別の原理を維持するために何らかの説明が必要であることも確かである．この問題に対して，弦問題で言うところの Distinction strategy に当たるものとして捉えられるのが，次に紹介する Bangu（2010）の議論である．つまり，異なる値を導く異なる解法は，それぞれに異なる問題を正しく解いていると捉える戦略である．

Bangu（2010）は，Howson and Urbach（1993）や Gillies（2000）と同様に，Bertrand のパラドックスとは $x$ と $f(x)$ の問題であるという認識から出発している．まず Bangu

[19] ここで弦問題にのみ特有の問題は，「ランダムに弦を引く」方法が複数記述され得るということではない．この問題は確かに重要ではあるが，$x$ と $f(x)$ の問題においても，立方体工場のように具体的な状況を想定すれば，「ランダムな大きさのサイコロを作る」方法は複数記述され得るため，弦問題にのみ特有とは言えない．この複数の記述が，弦問題の場合には変換関係になく（少なくともその関係が代数的には記述されない），サイコロの場合には変換関係にあることが，むしろ弦問題に特有の事態であると言える．

は，問題を以下のように定式化する．

変数 $x$ が区間 $[a, b]$ に一様に分布している（uniformly distributed）とき，$a \leq c \leq b$ 及び $x' = f(x)$ と置き，

> $Q_1$ : $P(x \in [c, b], x$ が $[a, b]$ においてランダムのとき$) = p_1$ の値はいくらか
> $Q_2$ : $P(x' \in [c', b'], x'$ が $[a', b']$ においてランダムのとき$) = p_2$ の値はいくらか．
> （Bangu 2010, p. 31）

を求めると，$Q_1$ と $Q_2$ の示す値が一致しない場合がある．これがパラドックス支持者からは，無差別の原理から生じる問題として指摘される．

ここで $Q_1$ 及び $Q_2$ によって示される確率とは，それぞれ「$x$ が $[a, b]$ からランダムに選ばれるとき，$x \in [c, b]$ であるような数 $x$ の選択」と，「$x'$ が $[a', b']$ からランダムに選ばれるとき，$x' \in [c', b']$ であるような数 $x'$ の選択」と記述される．Bangu（2010）は，この 2 つの事象の記述（the description of the events）が同一と見なされる背景には，以下の前提が存在すると分析している．

R：　あるスケーリング関数の独立変数が，ある区間においてランダムであるならば，測定値（the scaled value）は（その測定区間（the scaled interval）において）同様にランダムである．より形式的にいうなら，もし $x$ が $[a, b]$ においてランダムであるならば，$x'$ は $[a', b']$ においてランダムである（Bangu 2010, p. 33）．

しかし，R はそれ自体として自明ではなく，R を破棄して無差別の原理を維持するという道も十分に残される，というのが Bangu の結論である．この結論には，Rowbottom and Shackel（2010）が反論している．まずは，以下のように問題を分析する．

(1)　［…］区間 $[c, b] \subseteq [a, b]$ からランダムに選択する確率は，区間 $[f(c), f(b)] \subseteq [f(a), f(b)]$ からランダムに選択する場合と同一のはずである．
(2)　無差別の原理の適用が，一様な確率分布を $[a, b]$ と $[f(a), f(b)]$ にもたらすならば，$x \in [c, b]$ の確率は，$x' \in [f(c), f(b)]$ の確率に必然的に等しいわけではない．
(3)　反駁；従って無差別の原理は退けられる（Rowbottom and Shackel 2010, p. 690）．

ここでの記述に従えば，Bangu（2010）は（1）を非自明な前提 R に依拠するとして退ける．これに対して Rowbottom and Shackel（2010）は，$f(x)$ は因果的な従属変数（causally dependent variable）ではあっても，その確率分布が一様であるとする理由はないため，実際に破棄されるのは（2）であると言う．ここでの対立点は，前提 R を

認めるか否かである．言い換えると，$x$ がランダムであるとき，$x$ の決定に依存する $f(x)$ は依然としてランダムであると言えるか否か，という対立である．これについては，Bangu の思考実験に対して，Rowbottom and Shackel が批判を加えている箇所を参照するのが有用である．要約すると以下の通りである．

ある機械が，$[a, b]$ からランダムに $x$ の値を選択するが，それを我々には知らせないと仮定する．このとき，ランダム性は予測的意味で理解される．それでは，$f(x)$ は $[a', b']$ において同様の意味でランダムであろうか（Bangu 2010, p. 33）．

ランダム性を予測不可能性として解釈する点では，両者の主張は一致している（Bangu 2010, p. 33; Rowbottom and Shackel 2010, p. 691）．しかし，この予測不可能性については次のような対立が見られる．Bangu は，$x$ と $f(x)$ の間の決定的な違いとして「どの値が記録されたかを見つければ（find），それを測定できる」（Bangu 2010, p. 33）と言うのに対して，Rowbottom and Shackel はこれを，「$x$ を知っている（know）」（Rowbottom and Shackel 2010, p. 691）ということと同じ意味であると言う．論理説は我々の知識に相対的に確率を付与するのであり，その際にある種の知識の欠如した状態から確率を導き出すのが無差別の原理であるとすれば，ここでの対立は，Rowbottom and Shackel に説得力があるように思われる．なぜなら，現時点では知られていない $x$ を後に知る可能性があるという事実があったとしても，これによって $x$ の取り得る範囲に影響はなく，$x$ や $f(x)$ の取る値の確率に変化は生じないためである．

## §5　ワインと水の問題

ここでは，von Mises が弦問題のシンプルな例として提示した，ワインと水の問題について触れておく．von Mises は，これを幾何学的確率の問題と呼び，最も古い例としては Buffon の針問題に遡り，同様の問題は特に連続変数において生じると言う（von Mises 1957, pp. 77–78）．また，van Fraassen は，自然対数を用いた解法によっても対称性を維持されない事例として，ワインと水の問題を位置づけている（van Fraassen 2011, p. 312）．他にも，Gillies は弦問題とワインと水の問題を代表的事例として，これらの一般化が $x$ と $f(x)$ の問題であると位置づける（Gillies 2000, pp. 37–41）．このように，しばしば Bertrand のパラドックスの類題として挙げられるワインと水の問題であるが，実際には性格の異なる問題であるため，弦問題の解決・解消の可能性とは独立に論じられるべき問題である．このことを，Mikkelson（2004）によるワインと水の問題の解消の試みから見ていく．まず，ワインと水の問題とは，次の問題である．

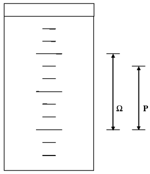


図 2　Mikkelson（2004, p. 141）による.

ワインと水を，お互いに一方が他方の 3 倍を越えないように混ぜるとする．このとき，ワインが水の 2 倍を越えない確率はいくらか．この問いは，$1/3 \leq \text{wine/water} \leq 3$ かつ $1/3 \leq \text{water/wine} \leq 3$ という制約のもとで，$P(\text{wine/water} \leq 2)$ の値を求める問題であると言い換えられる．これを求めると，

$$
\begin{aligned}
P(\text{wine/water} \leq 2) &= \frac{2 - 1/3}{3 - 1/3} \\
&= 5/8
\end{aligned}
$$

となる．ここで，「ワインが水の 2 倍以下」とは「水がワインの 1/2 倍以上」と同義であるため，$P(\text{wine/water} \leq 2)$ は $P(\text{water/wine} \geq 1/2)$ と言い換えることも可能である．しかし，これを求めると，

$$
\begin{aligned}
P(\text{water/wine} \geq 1/2) &= \frac{3 - 1/2}{3 - 1/3} \\
&= 15/16
\end{aligned}
$$

となり，これらの値は一致しない．

この問いを Mikkelson（2004）は，次のように捉え直す．下図のような目盛りの付いたシリンダーを想定し，ここにワインと水を混ぜずに入れるとする．例えば，下からはワインを入れ，上からは水を入れるといった具合である．すると，目盛りの両端 1/4 を除いた範囲（図 2 の Ω）が $1/3 \leq \text{wine/water} \leq 3$（$1/3 \leq \text{water/wine} \leq 3$）に当たり，この範囲と目盛りの下から 2/3 以下の範囲との重なる範囲（図 2 の P）が $\text{wine/water} \leq 2$（$\text{water/wine} \geq 1/2$）に当たる．従って，求める確率は，$P/\Omega = 5/6$ となる（Mikkelson 2004, p. 140）.

この解法を用いれば，$\text{wine/water} \leq 2$ と $\text{water/wine} \geq 1/2$ という同等に可能な 2 つの表現から，等しい確率が導きだされる．加えて，立方体工場や $x$ と $f(x)$ の問題における自然対数を用いた解法とは異なり，ここでの解法は元の 2 つの解法に対して，より適切であると主張できそうである．元の解法においては，wine/water の場合と

water/wine の場合とで暗に別々の数直線を想定していた．つまり，左端に 0 を，右端に 3 を取る数直線に，wine/water の値を示す場合と，water/wine の値を示す場合との，2 本の数直線の想定である．これに対して，Mikkelson（2004）の解法は，数直線の左端に wine（water）を，右端に water（wine）を取ることにより，例えば，wine/water=2 の点と water/wine=1/2 の点は同じ位置に打たれることになる．これによって，区間 Ω にランダムに値を取るときの，その値が区間 P に含まれる確率を問う問題として捉えられる．この解法を用いる際に加えられる前提は，ワインと水の総量が一定であることのみである．つまり，数直線を 1 本にすることで，例えば全体の量を 4 とすると wine（water）の量が 1 のときには必然的に water（wine）の量が 3 である，という事実を同時に記述しているだけのことである．そして，ここで記述される wine 及び water の量から，wine/water や water/wine が一意的に求められる．これはワインと水の問題には，もともと明確に記述されてはいないにせよ，十分に受け入れられる前提であると言えるだろう[20]．この前提を適切に記述するのが，Mikkelson の解法なのである．

最後に，弦問題との相違について確認しておく．弦問題においても，ワインと水の問題においても，同一の現象（弦問題では「ランダムに弦を引く」，ワインと水の問題では「ワインが水の 2 倍を越えない」）に対して可能な記述が複数（弦問題では 3 つの解法，ワインと水の問題では wine/water≤ 2 と water/wine≥ 1/2）存在し，それぞれの記述に従う解法は，互いに一致しない値を導いた．しかし，ワインと水の問題においては，(1)（$x$ と $f(x)$ の問題と同様に）複数の記述間で相互に変換可能であり，(2)（$x$ と $f(x)$ の問題とは異なって）元の複数の記述を同時に記述できる，より適切な方法が存在した．これが，弦問題との決定的な相違である．

## §6　結語

今回扱った Bertrand のパラドックスと呼ばれる問題は，弦問題，$x$ と $f(x)$ の問題，そしてワインと水の問題の 3 つであった．これらの問題の解決・解消の可能性については，それぞれ独立に考えられる必要があるというのが，本稿を通して示そうとした主たる提案である．これまでの議論から，（少なくとも Bertrand のパラドックスの支持者からは）同一と思われる現象に対して，解法が複数存在することを認めるか否か

[20] von Mises（1957, p. 77）や Gillies（2000, p. 38）においては明確には言及されないが，van Fraassen（2011, pp. 304–305）においては総量を 10cc として，可能な範囲を wine≥1cc かつ water≥1cc としている．この書き加えについて，特に説明を加えていないことからも，総量が一定という前提は自明と言っても良さそうである．

が，重要な論点として挙げられそうである．

まず，弦問題においては，唯一の解法を要求するならば，Shackel（2007）による解法 3 の排除を認めたとしても，残る 2 つの解法から，もう 1 つ解法を排除する必要がある．しかし，複数の解法を容認するならば，Marinoff（1994）の戦略が有効であるため，3 つの解法から異なる値が導かれることは問題とならない．

次に，$x$ と $f(x)$ の問題においては，唯一の解法を要求するならば，自然対数による解法が認められ得る．しかし，複数の解法を容認するならば，$x$ に無差別の原理を適用することと，$f(x)$ に無差別の原理を適用することは，そもそも異なる記述に立脚した異なる解法となり，自然対数による解法を用いることは，対応する記述が不在となってしまうために不自然である．特に立方体工場のように具体的な物質的現象を想定した思考実験は，抽象的な 2 変数の問題以上に，不可解な解法となってしまう．

そして，ワインと水の問題では，唯一の解法を要求するならば，Mikkelson（2004）の解法が歓迎されるだろう．複数の解法を容認するならば，wine/water≤ 2 と water/wine≥ 1/2 の 2 つの記述にそれぞれ異なる解法が与えられ，Mikkelson の解法は第 3 の解法として受け入れられるだろう．

それでは，唯一の解法を要求するか，それとも複数の解法を容認するかという選択においては，3 つの問題に対して共通の解答を与える必要があるのだろうか．この必要がないということが，3 つの問題を区別するという提案の意味するところである．つまり，ある問題は，その捉え方が不適切であるために解法が定まっていないだけであり，問題を正しく把握することで一意的に値が導かれるが，他の問題は，異なる複数の問題を混同したために矛盾する値が導かれるように見えたのであり，実際にはそれぞれの問題に対する適切な解法を与えていたのである，という考え方も可能だということである．

まず，ワインと水の問題について Mikkelson（2004）の解法を受け入れることは，自然対数による解法を認めないことや，弦問題に対して唯一可能な解答を与えられないことと，整合的であり得る．つまり，ワインと水の問題における「wine/water≤ 2」と「water/wine≥ 1/2」は，同一現象の異なる記述であると認めても，弦問題においては，次の立場を取ることは可能である．円に「弦をランダムに引く」という表現は 3 つの解法全てに当てはまるが，「円周から点をランダムに選択する」と「直径（半径）から点をランダムに選択する」と「円の内側から点をランダムに選択する」とでは，それぞれ異なる現象を記述しているとする立場である．同様に，立方体工場において，「辺の長さが $\leq 2$ である」と「面積が $\leq 4$ である」は確かに同一の現象を記述しているが，

「辺の長さが 1 から 3 の間で一様分布する」と「面積が 1 から 9 の間で一様分布する」は異なる現象の記述であると答えることは可能である．以上の立場は，おそらく無差別の原理を保持するのに好都合な立場であろう．

ここで本稿の冒頭部を思い返すと，論理説に求められることは，（1）適用可能な現象と不可能な現象とを一意的に峻別する，（2）適用可能な場合には適用事象（最小単位）を一意的に決定する，ことであった．先に述べた無差別の原理の保持に好都合な立場を取るならば，1 つ目の要求に対しては，適用不可能な現象とは，本来は区別されるべき現象を同一視した結果であると答えられる．そして，2 つ目の要求については，可能な適用事象（最小単位）の決定法に対応して，それぞれ異なる現象を記述していると捉えることで，必然的にこの要求を満たす．これが正しければ，無差別の原理に対する要求とは，「どの現象を同一と捉え，どの記述を同一と捉えるか」の基準を提示することの要求として捉え直せるだろう．

## 参考文献

Bangu, Sorin. 2010. On Bertrand’s paradox. *Analysis* 70 (1): 30–35.

Bartha, Paul and Johns, Richard. 2000. Probability and symmetry. *Philosophy of Science* 68 (3): 109–122.

Bertrand, Joseph L. 1889 *Calcul des Probabilités.* Paris: Gauthier-Villars.

Carnap, Rudolf. 2011. Statistical and inductive probability. In *Philosophy of probability: Contemporary readings.* ed. Eagle, A. 2011. pp.317–326. Abingdon and New York: Routledge. [Originally published by the Galois Institute of Mathematics and Art. 1955. Brooklyn.]

Clark, Michael. 2007. *Paradoxes from A to Z.* 2nd ed. London: Routledge.

Gillies, Donald. 2000. *Philosophical theories of probability.* London: Routledge.

Hacking, Ian. 1971. Equipossibility theories of probability. *British Journal for the Philosophy of Science* 22 (4): 339–355.

Howson, Colin and Urbach, Peter. 1993. *Scientific reasoning: The Bayesian approach.* 2nd ed. Chicago: Open Court.

Jaynes, Edwin T. 1973. The well-posed problem. *Foundations of Physics* 3 (4): 477–492.

Keynes, John M. 2010 年. 『確率論』佐藤隆三訳．東洋経済新報社．［原書：*A Treatise* *on probability,* 1921. Reprinted in *The collected writings of John Maynard Keynes.* Volume VIII. New York: Cambridge University Press for the Royal Economic Society, 1973.］

Laplace, Pierre-Simon. 1997 年.『確率の哲学的試論』内井惣七訳. 岩波書店. ［原書：*Essai philosophique sur les probabilités.* 1814.］

Marinoff, Louis. 1994. A resolution of Bertrand's paradox. *Philosophy of Science* 61 (1): 1–24.

Mikkelson, Jeffrey M. 2004. Dissolving the wine/water paradox. *British Journal for the Philosophy of Science* 55 (1): 137–145.

Rowbottom, Darrell P. and Shackel, Nicholas. 2010. Bangu's random thoughts on Bertrand's paradox. *Analysis* 70 (4): 689–692.

Shackel, Nicholas. 2007. Bertrand's paradox and the principle of indifference. *Philosophy of Science* 74 (2): 150–175.

van Fraassen, Bas C. 2011. Indifference: The symmetries of probability. In *Philosophy of probability: Contemporary readings.* ed. Eagle, A. 2011. pp.296–316. Abingdon and New York: Routledge. [Originally published as Chapter 12 of Bas C. van Fraassen, *Laws and symmetry* (Oxford: Oxford University Press, 1989).]

von Mises, Richard. 1957. *Probability, statistics and truth.* 2nd rev. English ed. London: George Allen and Unwin Ltd. [Based on 1951 definitive German edition]