モーメント条件が多い場合の推定と検定

奥　井　　亮

Ⅰ　序論

データを用いて経済モデルを推定し，またデータとモデルに基づいて統計的推論を行うという作業は，経済理論の適切性を判断し，また経済モデルから経済政策に役立つような数量的な情報を得るために，重要である。そうした経済分析のための統計処理を，経済モデルから導出されるモーメント条件を元にして行う手法は，経済研究において非常に重要となっており，そのための統計手法に関して多くの研究がなされている。

こうした方法を用いて実際に経済モデルの推定検定を行う際に，数多くのモーメント条件が利用可能であるということがある。教科書などで説明される通常の１次の漸近理論によると，出来るだけ多くのモーメント条件を用いたほうが，推定量の分散は小さくなり，また検定の検出力が高まるとされている。しかし実際には，統計量は，モーメント条件の数や選び方によって，かなり違った振る舞いをし，またシミュレーションなどでも，非常に多くのモーメント条件を使った場合には，信頼に値する統計分析が難しくなるということが知られている。こうした問題を，理論的に解明し，また，理論的な正当性を持つ対処法を考えるということは，計量経済学の重要な研究課題である。しかし，先に見たとおり，通常の理論ではこの問題を取り扱うことは困難であり，少し特殊な理論を援用する必要がある。

モーメント条件が多い場合に起こる問題とその対処法については，モデルが線形同時方程式体系の一部で分散均一の場合には，何十年にもわたり，多くの研究がなされてきている。たとえば，Morimune［1983］などを主な研究として挙げることが出来る。80年代半ばまでの研究結果については，森棟［1985］によくまとめられている。森棟［1985］以降の研究で重要なものとしては，Bekker［1994］，Donald and Newey［2001］，Chao and Swanson［2005］，Kuersteiner and Okui［2009］などを挙げることが出来る。

しかしながら，モーメント条件を用いて統計推測を行うモデル一般に当てはまる研究はまだそれほどなく，未だ解明されていない研究課題も多い。この部分の研究がそれほど進んでいない理由としては，理論分析を行う際に必要となる計算が非常に煩雑になることが一つである。また，ある程度の制約をモデルに課さないと漸近理論の適応が難しくなるため，一般的な場合の分析が難しくなるということも挙げられる。

本稿では，モーメント条件が多い場合の推定と検定に関する，これまでの成果をまとめて紹介する。特に，一般的なモーメント条件を用いて統計分析を行うモデルの場合についての研究を紹介する。先に説明したように，この分野は，最近になってようやく実証研究において有用な結果が得られるようになったばかりで，未解決の研究課題も多い。それでも，この段階で，これまでの結果をまとめておくことは，これからの課題を明確にする上でも有用であると思われる。なお注意点として，本稿では基本的に，線形同時方程式体系の一部で分散均一なモデルの場合は考えず，そのモデルで得られた結果は，

詳しく説明しない。興味のある読者は先に挙げた文献を参照されるとよい。

本稿で紹介する研究結果を簡単にまとめると次のようになる。まず，多くの場合において，Generalized Method of Moment（GMM）推定量（Hansen［1982］）は，モーメント条件が多くなると，バイアスが大きくなることがわかっている。その一方で，Generalized Empirical Likelihood（GEL）推定量（Smith［1997］による。また Newey and Smith［2004］も参照されたい。）においては，モーメント条件の数に依存するバイアスは大きくないことが知られている。GEL 推定量は，このようにバイアスの面でモーメント条件が多い場合に利点となるのであるが，その漸近分散は，通常の漸近理論で与えられるものよりも，大きくなる。したがって，検定や信頼区間の構築に必要となる漸近分散推定量も，修正が必要になるということである。また，Donald, Imbens and Newey［2009］や Okui［2009］などにおいて，ある特定のモデルにしか使えないものの，推定量の性質がよくなるようにモーメント条件を選ぶ方法も開発されている。

本稿の構成は以下のとおりである。次節では，この論文で考えるモデルの説明をし，またここで議論する推定量を紹介する。第Ⅲ節では，モーメント条件が多い場合に起こる，統計上の問題について，これまでの結果を紹介する。第Ⅳ節では，そうした問題への対処法として，これまでどのような手法が考えられてきたのかを紹介する。第Ⅴ節は，これまでの成果を踏まえた上で，これから重要となるであろう課題について，筆者の意見を述べる。最後に第 VI 節で結論を述べる。

Ⅱ　モデルと統計量

まずはじめに，本稿で論文で考える統計モデルを定義しよう。$\{z_i\}_{i=1,\ldots,N}$ をデータとする。本稿では，特に断りがない場合は，データは無作為抽出された標本で観測値は互いに独立で同一な分布に従っているとする（i. i. d. 標本という）。β を経済モデルを規定する母数，β_0 を真の母数の値，$g(z_i, \beta)$ を z_i と β のベクトル値を取る関数，g 関数の次元を m とする。経済モデルから導出される結果に，この g 関数の β_0 での平均は 0 であるというモーメント条件，

$$E(g(z_i, \beta_0))=0$$

があるとする。このモーメント条件を使って，母数 β の推定や検定を考える。たとえば，$E(g(z_i, \beta))$ というモーメントをデータを使って推定し，その推定されたモーメントが 0 に近くなるように β を選んで，推定量とするのである。本稿の議論で重要なのは，関数 g の次元 m であり，m はモーメント条件の数である。本稿では，m が大きい場合の問題と対処法を議論する。

多くの経済モデルが，モーメント条件を利用して推定されている。重要な例としては，線形モデルの操作変数による推定が挙げられる。その場合，z_i のうちで，z_{1i} を被回帰変数，z_{2i} を説明変数，z_{3i} を m 個の操作変数からなるベクトルとすると，$g(z_i, \beta)=z_{3i}(z_{1i}-z'_{2i}\beta)$ となる。他の重要な例としては，条件付モーメント制約のモデルを挙げることが出来る。条件付モーメント制約とは，$E(h(z_i, \beta_0)|x_i)=0$ のように，条件付期待値の形でのモーメント条件のことである。この場合，任意の x_i の関数は，$h(z_i, \beta_0)$ と直交するので，x_i が連続な確率変数なら，無限に多くのモーメント条件を作ることが出来る。たとえば，$k(x_i)$ を m 次元の x_i の関数とすると，$g(z_i, \beta)=k(x_i)h(z_i, \beta)$ として，モデルを推定することが考えられる。

母数 β の主な推定量を，定義しておこう。経済の実証研究で最もよく使われてきた推定量は，Hansen［1982］によって開発された，Generalized Method of Moment（GMM）推定

量である。GMM 推定量を定義するために，以下の表記を導入する。まず，$\hat{g}(\beta)=\sum_{i=1}^{N}g(z_i,\beta)/N$ とし，$\mathcal{B}$ を母数空間とする。GMM 推定量の基本的なアイデアは，$\hat{g}(\beta)$ が出来るだけ 0 に近くなるように β を選び，それを β の推定量とするものである。ここで，m がパラメーターの数より大きいときには，$\hat{g}(\beta)$ を 0 になるように β を選ぶことは一般的には出来ないので，その 2 次形式を考える。具体的には，$\hat{W}$ を $m\times m$ の対称な重み付け行列として，GMM 推定量は

$$\hat{\beta}_{GMM}=\arg\min_{\beta\in\mathcal{B}}\hat{g}(\beta)'\hat{W}\hat{g}(\beta)$$

と定義される。適当な条件の下で，N を無限に取る漸近理論を考えると，$\hat{\beta}_{GMM}$ は一致性を持ち，また，その漸近分布は

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{GMM}-\beta_0)\to_d N(0,[G'WG]^{-1}G'WSWG[G'WG]^{-1})$$

となる。ここで，$G=E(\partial g(z_i,\beta)/\partial\beta'/_{\beta=\beta_0})$ であり，W は $\hat{W}\to_p W$ となるような，$m\times m$ の対称行列である。また，$S=E(g(z_i,\beta_0)g(z_i,\beta_0)')$ としている。漸近分散は $\hat{W}$ の選び方に依存するのであるが，最も漸近分散を小さくするような $\hat{W}$ は，その極限である W が $W^{-1}=S$ を満たすときであるとわかる。つまり，あらかじめ適当な一致性を持つ推定量 $\tilde{\beta}$ を用意して計算した，

$$\hat{W}_{opt}=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g(z_i,\tilde{\beta})g(z_i,\tilde{\beta})'\right)^{-1}$$

を重み付け行列として使うと，GMM 推定量の漸近分布は

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{GMM}-\beta_0)\to_d N(0,(G'S^{-1}G)^{-1})$$

となり，1 次の漸近理論のもとで，GMM 推定量は効率的な推定量となる。

GMM 推定量は，モーメント条件で規定されるモデルの推定に，実際の実証研究で最もよく使われてきた推定量である。しかし，近年になって，他の推定方法も開発され，注目を集めている。主なものとして，Hansen, Heaton and Yaron［1996］による Continuous Updating Estimator（CU 推定量），Qin and Lawless［1994］による Empirical Likelihood Estimator（EL 推定量），Kitamura and Stutzer［1997］ならびに Imbens, Spady and Johnson［1998］による Exponential Tilting Estimator（ET 推定量）などがある。Smith［1997］は EL 推定量や ET 推定量が同じような最適化問題の解としてかけることを示し，その一般的な形で与えられる推定量を Generalized Empirical Likelihood（GEL）推定量と定義した。また Newey and Smith［2004］が CU 推定量も，GEL 推定量の一例であると証明した。GEL 推定量は

$$\hat{\beta}_{GEL}=\arg\min_{\beta\in\mathcal{B}}\sup_{\lambda\in\hat{\Lambda}n(\beta)}\sum_{i=1}^{N}\rho(\lambda'g(x_i,\beta)).$$

として定義される。ここで，$\rho(\cdot)$ は凹な関数であり，$\rho(\cdot)$ が 2 次関数なら，$\hat{\beta}_{GEL}$ は CU 推定量となり，$\rho(v)=\ln(1-v)$ なら EL 推定量，また $\rho(v)=-e^v$ なら ET 推定量となる。$\hat{\Lambda}_n(\beta)$ は 0 を含む凸な集合である。GMM 推定量のときと同じような条件の下で，GEL 推定量は一致性を持ち，また，その漸近分布は効率的な GMM 推定量と同じとなる。つまり，

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{GEL}-\beta_0)\to_d N(0,(G'S^{-1}G)^{-1}).$$

となる。

母数の β の値に関する検定や，信頼区間の構築を，漸近分布を利用して行うことが出来る。そのためには，漸近分散の推定量が必要になるが，これは，$\hat{\beta}$ を GMM 推定量あるいは，GEL 推定量として，

$$\hat{G}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g(z_i,\hat{\beta})}{\partial\beta'},\quad \hat{S}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g(z_i,\hat{\beta})g(z_i,\hat{\beta})'$$

とし，GMM 推定量の漸近分散は，

$$(\hat{G}'\hat{W}\hat{G})^{-1}\hat{G}'\hat{W}\hat{S}\hat{W}\hat{G}(\hat{G}'\hat{W}\hat{G})^{-1}$$

という推定量で推定できる。また，効率的な GMM 推定量や，GEL 推定量の漸近分散は，

$$(\hat{G}'\hat{S}^{-1}\hat{G})^{-1}$$

として推定できる。これらの漸近分散推定量が通常の漸近理論の下で一致性を持つことは，比較的容易に示すことが出来る。

以上が，この論文で考えるモデルと推定量で

あり，また，統計解析を行う際に使われる漸近理論の結果である。

Ⅲ モーメント条件が多い場合に起こる問題

モーメント条件が多い場合にどのような問題が起こるか。先の節では，通常の1次の漸近理論の下での推定量の振る舞いを説明した。通常の漸近理論によって，与えられた漸近分散の形を調べると，モーメント条件が多いと，漸近分散が小さくなり，モーメント条件を出来るだけ多く使ったほうがよいという結論が出る。ここでは，そうした漸近理論による近似が，モーメント条件が非常に多い場合でもうまくいくのか，また，もしうまくいかないのなら，どのような問題が起こっているのかを考えていく。

最初に，モーメント条件の数がどの程度多いと，問題を起こしうるかを調べた研究を見ていく。Koenker and Machado［1999］は線形モデルのGMMによる推定を考え，理論的に，通常の漸近理論が適用可能となるための条件を調べた。そこで示された条件は $m^3/N \to 0$ というものである。この論文では，モーメント条件がそれほど多くないなら，通常の漸近理論を使うことが出来ることを示した一方で，もし，モーメント条件が論文の条件よりも多い場合に何が起こるかについては，示されていない。Han and Phillips［2006］はもっと一般的なモデルで，モーメント条件が多いときの，推定量の振る舞いを調べた。そこでは，モーメント条件が多いときに，GMM推定量が一致性を持たず，真の母数の値とは違った値に推定量が収束する場合があるということを示している。また，GMM推定量の漸近分布を，モーメント条件の数が無限に増加する漸近理論を使って導出しており，GMM推定量が，漸近正規性を持たない場合があることを理論的に示している。モーメント条件が多いことで起こる問題を，1次の漸近理論の下で示したことは，重要な理論的貢献である。またCU推定量も論文内で議論されている点も重要である。他にも，一般的なモデルを考えているわけではないが，GEL推定量のモーメント条件が多い場合の振る舞いについては，Donald, Imbens and Newey［2003］が，条件付モーメント制約モデルの下で，これらの推定量が，一致性を持ち漸近正規性を持つための条件を考えている。

これらの研究では，モーメント条件がそれほど多くなければ，通常の漸近理論の結果が適用でき，特別な問題が起こらないことを示している。しかし，それだけでは不十分であり，やはり，モーメント条件が多いと起こる問題を，具体的に見ていく必要がある。

モーメント条件が多い場合に起こる問題として，重要なのはバイアスの問題であろう。この問題を理解するために，最も重要な文献として，Newey and Smith［2004］を以下に紹介しよう。これは，厳密にはモーメント条件が多い場合を考えた論文ではない。しかし，彼らは，高次漸近展開を行うことによって，GMM推定量や，GEL推定量のバイアスの式を導出し，モーメント条件の数が推定量に対してどのような影響を与えるのかについての理解を深めることに，大きく貢献した。その結果によると，効率的なGMM推定量のバイアスは，次の4つの項に分けることが出来る。

1．モーメント条件を最適に組み合わせた推定量にも起こるバイアス。このバイアスは，GMM推定量にもGEL推定量にも起こる。
2．モーメント条件を規定する関数と，その1次微分との相関から起こるバイアス。この相関は，線形回帰モデルで，回帰変数と誤差項に相関がある場合に相当するものである。
3．最適な重み付け行列の推定に伴うバイア

ス。

4．重み付け行列の推定の際に使う推定量が，効率的でない場合に起こるバイアス。

これらのバイアスのうち，モーメント条件の数と特に関係が深いのは，２番目のバイアスである。まず，このバイアスが起こる理由を考えてみる。GMM 推定の際に行う最小化問題の１次の条件は，

$$\hat{G}\hat{W}\hat{g}(\hat{\beta}_{GMM})=0.$$

であり，GMM 推定量は，その方程式の解となる。ここで，$\hat{G}$ と $\hat{g}(\beta)$ は一般には相関している。したがって，真の β_0 のもとで，上の式の左辺の期待値を取ったとしても，それは，0 にはならない。このことが，バイアスを作り出す原因となるのである。また，このバイアスは，モーメント条件の数に依存している。この部分のバイアスが，モーメント条件が多い場合の GMM 推定量の振る舞いを規定してる。この論文には，GEL 推定量のバイアスも導出されている。それによると，GEL 推定量には，１番目と３番目のバイアスしか含まれないということがわかった。つまり，GEL 推定量には，モーメント条件が多い場合に問題となる，２番目のバイアスが，含まれないということである。さらには，EL 推定量は，３番目のバイアスもなく，１番目のバイアスしか存在しないということも，示されている。これらのことから，モーメント条件が多い場合には，EL 推定量が，少なくともバイアスの観点からは，魅力的な推定量であるということが，導かれる。

Newey and Smith［2004］の研究は，独立同一分布の場合に絞ったものであるが，この研究を，定常時系列の場合に拡張したのが，Anatolyev［2005］の研究である。Anatolyev［2005］は，定常な時系列データの場合の，GMM 推定量や，GEL 推定量のバイアスを計算した。ここで注意するべきなのは，時系列の場合，観測値間に相関がある可能性があるため，GMM 推定量の最適な重み付け行列は，その相関を考慮して，モーメント条件の長期共分散を考えないといけないし，また，GEL 推定量には，ある種の「smoothing」をかけないといけないということである。Anatolyev［2005］のバイアスに関する発見は，大体において，Newey and Smith［2004］のものと同じである。つまり，時系列の場合でも，GEL 推定量，特に EL 推定量がバイアスが少なく，よいと考えられる。時系列データの場合に独特の発見としては，もし，データが独立同一分布ではないが，$g(z_i, \beta)$ に系列相関がないときでも，smoothing をかけた GEL 推定量は，バイアスが出ないが，smoothing をかけない GEL 推定量には，上で言う，２番目のバイアスが出るということである。この点は，重要で，時系列データで，多くのモーメント条件を使って推定する場合には，たとえ，系列相関をなくすような変換が可能であっても，GEL 推定を行う際には，smoothing をかけるべきであるということである。

これらの論文は，推定量のバイアスについて有用な情報をもたらしているものの，モーメント条件が多い場合を理論的に取り扱っている論文というわけではない。モーメント条件が多い場合のバイアスについて考える場合には，モーメント条件の数を無限に持っていくような漸近理論のもとでバイアスの形がどのようになるかを見るのが，より自然であろう。残念ながら，そのような漸近理論を一般的なモデルで適用するのは非常に難しく，そのような研究はまだでていない。条件付モーメント制約のモデルの場合には，Donald, Imbens and Newey［2009］が GMM 推定量と GEL 推定量の平均二乗誤差の式を導出している。そのバイアスの部分を見ると，GMM 推定量の場合は，先に見た２番目のバイアスが重要であり，GEL 推定量には，そのオーダーでのバイアスは存在しないということがわかる。Okui［2009］は，動学パネルモデル

のGMM推定を考え，バイアスがどのようにモーメント条件の数に依存するかを考えた。その結果によると，やはり，先に見た2番目のバイアスが重要なのであるが，バイアスのオーダーは，モーメント条件の総数ではなく，パネルの各時点でのモーメント条件の数に依存するということを示した。これらの結果からわかるとおり，バイアスの形や大きさも，モデルに依存する部分があり，更なる研究が求められる。

それでは，モーメント条件が多い場合には，分散はどうなるのであろう。通常の漸近理論によると，モーメント条件を使えば使うほど，推定量の分散は小さくなるという結果が出ている。しかし，この結果は必ずしも実際の推定量の振る舞いを反映しているとはいえない可能性がある。たとえば，条件付モーメント制約のモデルという限られた場合であるが，Donald, Imben and Newey［2009］の平均二乗誤差の分散の部分を見ると，モーメント条件の数が増えると，大きくなる分散の項があることがわかる。Newey and Windmeijer［2009］はGEL推定量の漸近分散を，モーメント条件が多く，またそれらが弱い場合について，計算した。ここで，モーメント条件が弱いとは，$g(z_i, \beta)$のβに関する微分が0に近い範囲が大きく，そのモーメント条件が，βの値に関して，あまり情報を提供しないということである。そのような状況のときには，GEL推定量は，一致性を持ち，漸近正規性を有する。しかし，その漸近分散は，通常の漸近理論で与えられるものよりも，大きくなるのである。したがって，漸近分散の推定量には，少し変更を加える必要があり，先の節で紹介したような漸近分散推定量では，一致性を持たず，小さすぎるということである。この点については次の節でまた議論する。

Newey and Windmeijer［2009］には，いろいろな検定統計量が，モーメント条件が多い場合に，どのような振る舞いをするかについての議論もある。特に，注目すべき結果は，モーメント条件が弱い状況に対処するために開発された，一般的な，Anderson-Rubin検定（Guggenberger and Smith［2005］による）や，Kleibergen［2005］とGuggenberger and Smith［2005］によるラグランジェ乗数検定などは，モーメント条件が多い場合にも，通常の漸近理論の結果を使用して検定が出来るということである。

一方Caner［2007］は，モーメント条件が多く，またそれらが弱く，そして，モーメント条件のうち，いくつかのものは，直交条件（つまり平均が0ではない）を満たさないという状況を考えた。ここで，Caner［2007］は直交条件を満たさないモーメント条件の数は，固定されている一方で，モーメント条件の総数は無限にいくという状況を考えている。この論文での結果は，GEL推定量は一致性を持つが，漸近分布にバイアスが出る可能性があることと，一般的なAnderson-Rubin検定は通常の漸近理論の結果がそのまま使えるものの，他の検定統計量は，その棄却域に修正を加える必要があるということである。

Ⅳ　対処法

先の節で見たように，モーメント条件が多い場合には，いろいろな問題が起こる。したがって，モーメント条件が多い場合には，なんらかの対処をしなくてはいけない。前節で紹介した研究によると，このような場合，GMM推定量は，特にバイアスなどの問題を起こす一方で，GEL推定量，特にEL推定量は，それほど問題は深刻ではないのではないかということであった。つまり，一つの対処法は，GMM推定量でなく，EL推定量を使うというものである。しかしながら，EL推定量でも，モーメント条件が多い場合には問題は存在するので，これは完全な解決法とはいえない。

おそらく，最も自然な対処法は，モーメント条件のうちの一部を使うことであろう。そのためには，モーメント条件を選択する統計手法が必要になる。一般的な状況で使用可能な，モーメント条件を選択する方法は，それほど多くない。代表的なものとして，Hall and Peixe［2003］がある。しかし，彼らの方法は，モーメント条件の中で，まったく母数推定に役に立たないものを排除するものであり，モーメント条件が多いものの，それぞれがたとえ弱くても，母数にある程度の情報をもたらす場合には，うまくいかない。実際，Okui［2008］は線形モデルの操作変数推定で，操作変数が多い場合において，いろいろな手法をシミュレーションで試しているのであるが，Hall and Peixe［2003］の方法の結果は芳しいものではなかった。また，モーメント条件の選択法として有名なものに，Andrews［1999］や Andrews and Lu［2001］による，情報量基準による方法がある。しかし，これらの方法は，モーメント条件のうち，正しいもの（真の母数のもとで $E(g(z_i, \beta_0))=0$ となるもの）と，正しくないもの $E(g(z_i, \beta))\neq 0$ となる β がないもの）を分ける方法であり，本稿で考えているような，正しいモーメント条件が数多くある場合には，適した方法ではない。まとめると，現在，一般的に使えるモーメント選択法は，その目的が，本稿で考えているモーメント条件が多い問題に対処するという目的と合致せず，他の方法が求められるということである。

先の節で見た，モーメント条件が多いことで引き起こさせる問題を回避するためのモーメント条件選択法は，一般的なモデルの場合には今のところ存在しないが，ある種のモデルについてはモーメント条件の選択法が開発されている。まず，線形モデルの場合は，Donald and Newey［2001］の論文で，モーメント条件選択法が，紹介されている。条件付モーメント条件モデルの場合には，Donald, Imbens and Newey［2008］が先ほどの Donald and Newey［2001］の手法を拡張することにより，モーメント条件選択法を開発した。Okui［2009］は動学パネルの GMM 推定の場合にそれを拡張した。これらの手法は，推定量の平均二乗誤差を，モーメント条件を観測個数とともに多くしていく漸近理論を使って近似し，その平均二乗誤差を推定して，モーメント条件を選ぶための，基準として使うというものである。問題点としては，これらのモーメント条件選択法は，モデルにかなり依存するということである。一般的に使うことの出来るモーメント条件の選択法で，モーメント条件の数が無限に増加するような漸近理論のもとで開発されたものは，まだない。

モーメント条件を選ぶという方法の他に，全てのモーメント条件を使うものの，全てを同じように使うのではなく，一部のモーメント条件は「少し」だけ使うということにして，モーメント条件が多いときに起こる問題を避けようとする手法もある。このアイデアに従った推定法としては，条件付モーメント制約のモデルの場合に使える Shrinkage GMM 推定量という推定量が，Okui［2010］により開発されている。もっと一般的な方法としては，Kuersteiner and Okui［2009］によって考えられた，Model Averaging の方法があるが，この手法は，今のところ，分散均一の線形同時方程式モデルの推定の場合しか，考えられていない。

たとえ，GEL 推定量は一致性を持ち，漸近正規性を持つにしても，その漸近分散は通常のものよりも大きいということを前の節で見た。Newey and Windmeijer［2009］は，モーメント条件が多く，またそれらが弱い場合でも，一致性を持つような漸近分散推定量を提唱した。その漸近分散推定量を定義するために次の表記を導入しよう。まず，$\hat{\beta}$ を GEL 推定量とする。また，

$$\hat{Q}(\beta)=\sup_{\lambda\in\hat{\Lambda}_n(\beta)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\rho(\lambda' g(z_i,\beta))$$

$$\hat{\lambda}(\beta)=\arg\max_{\lambda\in\hat{\Lambda}_n(\beta)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\rho(\lambda' g(z_i,\beta))$$

と定義する。次の $\hat{D}$ は，$\hat{G}$ の代わりに使う統計量である。これを

$$\hat{D}(\beta)=\sum_{i=1}^{N}\hat{\pi}_i(\beta)\frac{\partial g(z_i,\beta)}{\partial\beta},$$

$$\hat{\pi}_i(\beta)=\frac{\rho_1(\hat{\lambda}(\beta)' g(z_i,\beta))}{\sum_{j=1}^{N}\rho_1(\hat{\lambda}(\beta)' g(z_j,\beta))}$$

として定義する。そして最後に，

$$\hat{H}=\frac{\partial^2\hat{Q}(\hat{\beta})}{\partial\beta\partial\beta'}$$

を定義する。この統計量は，通常の漸近理論のもとでは，漸近分散推定量として使うことが出来る。Newey and Windmeijer［2009］による漸近分散推定量は，

$$\hat{V}=\hat{H}^{-1}\hat{D}(\hat{\beta}')\hat{S}^{-1}\hat{D}(\beta)\hat{H}^{-1}$$

である。シミュレーションなどでも，この漸近分散推定量に基づく検定統計量や信頼区間は，よい振る舞いをすることが観察されている。

他にも，一般的な，Anderson-Rubin 検定（Guggenberger and Smith［2005］）や，Kleibergen［2005］と Guggenberger and Smith［2005］によるラグランジェ乗数検定などといった，モーメント条件が多い場合でも，特に修正なく使用可能な検定法もあり，それらの検定を使うというのも，一つの解決策であろう。これらの検定統計量を紹介しておく。まず，帰無仮説は，$H_0:\beta_0=\beta^*$ である。一般的な Anderson-Rubin 検定統計量は，

$$AR(\beta^*)=2n\hat{Q}(\beta^*)$$

で，帰無仮説のもとでの漸近分布は，$\chi^2(m)$ である。つまり，m が大きいと，漸近分布が右側に大きく広がっていくが，そのときでも，$\chi^2(m)$ 近似を使った検定は正しいサイズを持つ。だた，この検定は，m が大きいときには，あまり検出力を持たない。また，ラグランジェ乗数検定統計量は

$$LM(\beta^*)=n\frac{\partial\hat{Q}(\beta^*)'}{\partial\beta}(\hat{D}(\beta^*)'\hat{\Omega}(\beta^*)^{-1}\hat{D}(\beta^*))^{-1}\frac{\partial\hat{Q}(\beta^*)'}{\partial\beta}$$

である。ここで，$\hat{\Omega}(\beta)=\sum_{i=1}^{N}g(z_i,\beta)g(z_i,\beta)'/N$，帰無仮説のもとでの漸近分布は $\chi^2(p)$ であり，p はパラメーターの数である。この検定も，モーメント条件が多くとも，漸近的には有意水準が正しい。先の一般的 Anderson-Rubin 検定と比べると，ラグランジェ乗数検定統計量のほうが，検出力が高いことが知られている。

V　今後の研究課題

これまでの節で見てきたように，一般的な枠組みの上で，モーメント条件が多い場合に起こる問題を考えた研究は，それなりに発表されてきた。しかし，この問題に関しては，未だに解決を見ない部分も多くあり，今後も盛んに研究が行われることが期待される。この節では，そうした，今後研究されるべき課題の中でも特に重要であると思われる問題を，いくつか紹介していく。

まず，モーメント条件が多い場合に起こるのは，GMM 推定量にバイアスが出ることや，GEL 推定量の分散が大きくなる問題である。これらは，線形同時方程式の場合でも観察された問題が，一般的な GMM や GEL の推定でも起こるということが確認されたに過ぎないということも出来る。しかし，一般的なモーメント条件による推定では，重み付け行列の推定が引き起こす新たな問題がある。この問題は，二段階最小二乗法による，分散均一な線形同時方程式の推定に関しては考えなくてもよい。しかし，ある種のモデルにおいては，重み付け行列の推定誤差が重大な問題を引き起こすことが，シミュレーション実験などを通して知られている。たとえば，Altonji and Segal［1996］は，共分散構造の推定においては，推定する必要のある最適な重み付け行列を使うよりも，推定の必

要がない恒等行列を使ったほうが，よりよい推定量を得ることができることを，シミュレーションで観察した。しかしながら，重み付け行列の推定誤差が，モーメント条件が多い場合にどのようにして問題を引き起こすかは，理論的にはまだ解明されているとはいいがたく，今後の研究が期待される点ではある。

これまでの研究では，一般的なモーメント条件による推定を考えているにしても，条件付モーメント条件のモデルの推定に関するものなどが主であったし，モーメント条件の形などにそれなりの制約があった。経済モデルの推定によく使われている方法で，これまで研究されてきた枠組みに入らないものとして，Simulated Method of Moments，あるいは Indirect Inference による推定が挙げられる。これは，主に複雑な経済モデルの推定の際に使われる方法で，経済モデルをシミュレーションにかけて擬似データを生成し，そのデータの特性と実際に観察されるデータの特性とが出来るだけ似通うように，パラメーターを選ぶという推定法である。この推定法では，多くのモーメント条件を考えることが出来るのだが，もし，非常に多くのモーメント条件を使った場合にどのようなことが起こるのか，またどの程度の数のモーメント条件を使うべきかについては，ほとんど研究はない。この方法も，基本的には，GMM や GEL の枠組みで書くことは出来るのであるが，通常の統計誤差に加えて，シミュレーションの誤差も考慮する必要があることや，条件付モーメント条件のモデルなどと違って，追加的なモーメント条件が分散に与える影響を調べるのが難しいなど，他の問題も出てきており，別途の研究が必要となる。

モーメント条件が多い場合には，どのように推定量の効率性というものを考えればよいか，という問題もある。既存の効率推定の理論は，モーメント条件の数が有限であるという状況を考えている。分散均一の線形同時方程式モデルの場合には，Hahn［2002］や Anderson, Kunitomo and Matsushita［2007］といった文献が，モーメント条件の数，つまり操作変数の数，が無限にいく場合の，漸近効率性を考えている。しかし，一般的なモーメント条件による推定の場合には，漸近効率性の問題は未だ検討されていない問題である。また，モーメント条件が多い場合には，モーメント条件の選択なども，漸近効率性の議論に影響を与える問題である。効率性の問題に関しては，その重要性に比して，研究がほとんど進んでおらず，今後の進展を期待したい。

最後に，モーメント条件が多い場合の対処法については，あるクラスのモデルに関しては，先の節で見たように，いくつかの方法が提唱されているものの，一般的に使える方法となると，まだ開発はされていない。Hall and Peixe［2003］は，一般的に使える方法であるが，Okui［2008］のシミュレーションで見たように，モーメント条件が多く，またそれぞれのモーメント条件が弱い場合には，うまくいかないことがわかっている。モーメント条件をいかに選ぶかといった問題は，実証研究を行う際に重要となる問題であり，今後の研究の進展が期待される。

他にも，時系列データの場合への拡張，モデル特定化が誤っているときの推定量の振る舞い（たとえば，Schennach［2007］によると，EL 推定量は，モーメント条件が正しくない場合には，収束しない。一方でモーメント条件が多いと Caner［2007］が指摘したように，その一部は誤っている可能性も高い。）や，Sieve 推定の場合の問題，ベイズ統計の枠組みでのモーメント条件による推定の問題など，いくつか重要と思われる問題はある。

Ⅵ　結論

本稿では，モーメント条件が多い場合の推定

と検定についての，最近の文献を概観し，また今後の研究課題としていくつかの重要であると思われるものを提示した。モーメント条件を用いた統計分析は，経済学において重要な分析ツールであり，今後もこのような研究が盛んに行われることが期待される。

これまでの研究結果を簡単にまとめてみると，次のようになる。まず，GMM 推定量は，モーメント条件が多いと，バイアスが大きくなる可能性がある。バイアスの面では，GEL 推定量，特に EL 推定量は，優れた性質を持っている。一方，GEL 推定量の漸近分散は，モーメント条件が多い場合には，通常の漸近理論で出てくるものよりも，大きくなる。モーメント条件が多い場合に，どのような対処をすればよいかであるが，条件付モーメント制約のモデルの場合には，モーメント条件を選ぶ手法などが，開発されている。また，モーメント条件が多くても，一致性を持つように，GEL 推定量の漸近分散を推定する方法も開発されている。その一方で，一般的に使用可能なモーメント選択法など，未だ解決を見ない研究課題も多く，今後の更なる研究も期待される。

振り返ってみると，モーメント条件が多い場合に起こる問題というのは，線形で分散均一な同時方程式の推定で操作変数の数が多い場合の結果を，他のモデルに拡張したものであることが多い。Morimune［1983］はそうした線形同時方程式モデルに関する文献の中でも，特に重要な位置を占めており，その影響の大きさを窺うことが出来る。今後も，モーメント条件が多い問題の研究は数多く行われるであろうから，Morimune［1983］に代表される一連の研究の価値はますます高まっていくものと思われる。

謝辞

金谷太郎君，西山慶彦教授ならびに森棟公夫教授には，原稿に目を通していただき，貴重な意見をいただいた。文責は全て，著者に属する。

参考文献

Altonji, J. G. and, L. M. Segal［1996］“Small-sample bias in GMM estimation of covariance structure,” *Journal of Business & Economic Statistics* 14(3), pp. 353–366.

Anatolyev, S.［2005］“GMM, GEL, serial correlation, and asymptotic bias,” *Econometrica* 73(3), pp. 983–1002.

Anderson, T. W., N. Kunitomo and Y. Matsushita［2007］“On the asymptotic optimality of the LIML estimator with possibly many instruments,” mimeo.

Andrews, D. W. K.［1999］“Consistent moment selection procedures for generalized method of moments estimation,” *Econometrica* 67(3), pp. 543–564.

Andrews, D. W. K. and B. Lu［2001］Consistent model and moment selection procedures for GMM estimation with application to dynamic panel data models, *Journal of Econometrics* 101, pp. 123–164.

Bekker, P. A.［1994］“Alternative approximations to the distributions of instrumental variable estimators,” *Econometrica* 62(3), pp. 657–681.

Caner, M.［2007］“Near exogeneity and weak identification in generalized empirical likelihood estimators: Many moment asymptotics,” mimeo.

Chao, J. C. and N. R. Swanson［2005］“Consistent estimation with a large number of weak instruments,” *Econometrica* 73(5), pp. 1673–1692.

Donald, S. G. and W. K. Newey［2001］“Choosing the number of instruments,” *Econometrica* 69(5), pp. 1161–1191.

Donald, S. G., G. W. Imbens and W. K. Newey［2003］“Empirical likelihood estimation and consistent tests with conditional moment restrictions,” *Journal of Econometrics* 117, pp. 55–93.

Donald, S. G., G. W. Imbens and W. K. Newey［2009］“Choosing the number of moments in conditional moment restriction models,” *Journal of Econometrics*. 152, pp. 28–36.

Guggenberger, P. and R. J. Smith［2005］“Generalized empirical likelihood estimators and tests under partial, weak, and strong identification,” *Eco-*

nometric Theory 21, pp. 667–709.

Hahn, J. [2002] "Optimal inference with many instruments," *Econometric Theory* 18, pp. 140–168.

Hall, A. R. and F. P. M. Peixe [2003] "A consistent method for the selection of relevant instruments," *Econometric Reviews* 22(3), pp. 269–287.

Han, C. and P. C. B. Phillips [2006] "GMM with many moment conditions," *Econometrica* 74(1), pp. 147–192.

Hansen, L. P. [1982] "Large sample properties of generalized method of moments estimators," *Econometrica* 50(4), pp. 1029–1053.

Hansen, L. P., J. Heaton and A. Yaron [1996] "Finite-sample properties of some alternative GMM estimators," *Journal of Business and Economic Statistics* 14(3), pp. 262–280.

Imbens, G. W., R. H. Spady and P. Johnson [1998] "Information theoretic approaches to inference in moment condition models," *Econometrica* 66(2), pp. 333–357.

Kitamura, Y. and M. Stutzer [1997] "An information-theoretic alternative to generalized method of moments estimation," *Econometrica* 65(4), pp. 861–874.

Kleibergen, F. [2005] "Testing parameters in GMM without assuming that they are identified," *Econometrica* 73(4), pp. 1103–1123.

Koenker, R. and J. A. F. Machado [1999] "GMM inference when the number of moment conditions is large," *Journal of Econometrics* 93, pp. 327–344.

Kuersteiner, G. and R. Okui [2009] "Constructing optimal instruments by first stage prediction averaging," *Econometrica*, forthcoming.

Morimune, K. [1983] "Approximate distribution of the k-class estimators when the degree of overidentifiability is large compared with the sample size," *Econometrica* 51(3), pp. 821–841.

Newey, W. K. and R. Smith [2004] "Higher order properties of GMM and generalized empirical likelihood estimators," *Econometrica* 72(1), pp. 219–255.

Newey, W. K. and F. Windmeijer [2009] "Generalized method of moments with many weak moment conditions," *Econometrica* 77(3), pp. 687–719.

Okui, R. [2005] "Shrinkage GMM estimation in conditional moment restriction models," *Journal of the Japan Statistical Society*, forthecoming.

Okui, R. [2008] "Instrumental variable estimation in the presence of many moment conditions," *Journal of Econometrics*. forthecoming.

Okui, R. [2009] "The optimal choice of moments in dynamic panel data models," *Journal of Econometrics* 151, pp. 1–16.

Qin, J. and J. Lawless [1994] "Empirical likelihood and general estimating equations," *The Annals of Statistics* 22(1), pp. 300–325.

Schennach, S. M. [2007] "Point estimation with exponentially tilted empirical likelihood," *The Annals of Statistics* 35(2), pp. 634–672.

Smith, R. J. [1997] "Alternative semi-parametric likelihood approaches to generalized method of moments estimation," *Economic Journal* 107, pp. 503–519.

森棟公夫[1985]『経済モデルの推定と検定』共立出版, 東京.