

球形シェルの線形・非線形振動特性に関する基礎的研究

諸 岡 繁 洋

目次

1. 序	1
1.1 研究の背景及び目的	1
1.2 本論文中に用いられる記号およびシェルの Geometry	6
2. 近似固有モード作成法	9
2.1 はじめに	9
2.2 支配式と厳正解	9
2.3 近似解の作成	11
2.3.1 仮のモードの設定	11
2.3.2 境界条件	13
2.3.3 直交条件	15
2.3.4 近似固有モード	16
2.4 数値計算例および考察	18
2.5 まとめ	19
Appendix 直交条件について	20
固有値表	22
固有モード図	26
3. 水平地震動を受ける球形シェルの線形振動応答	50
3.1 はじめに	50
3.2 逆対称線形応答方程式	50
3.3 入力データについて	52
3.4 逆対称変形時の各応力	54
3.5 数値解析結果及び考察	55
3.6 まとめ	56
4. 対称・逆対称モード共存時の球殻非線形運動方程式の閉形表現	60
4.1 はじめに	60
4.2 法線方向非線形運動方程式および適合条件式	60
4.2.1 運動方程式	60
4.2.2 歪-変位成分関係式	61
4.2.3 応力-歪関係式	62
4.2.4 面外せん断力 Q_ϕ , Q_θ	62
4.2.5 面内せん断力 N_ϕ , N_θ , $N_{\theta\phi}$	62
4.2.6 支配方程式	63

4.3	たわみモードの仮定	64	7.7.1	加振型モード非線形定常振動状態	143
4.4	非線形連立2階常微分方程式	67	7.7.2	伝播型モード非線形定常振動状態	144
4.4.1	線形項積分	68	7.8	まとめ	144
4.4.2	非線形項積分	71	8.	逆対称変形モード間のモード連成作用効果	145
4.4.3	Legendre 陪多項式重積の積分	88	8.1	はじめに	145
4.4.4	時間関数に関する最終支配方程式	91	8.2	単一モードのみを考慮した共振曲線の不安定領域の導出	146
4.5	歪み	95	8.2.1	単一モードのみを考慮した共振曲線	146
4.6	応力表現	99	8.2.2	共振曲線の不安定領域が生じ始める入力加速度の振幅	148
4.6.1	応力の線形項分	99	8.2.3	減衰率による不安定領域の変化	150
4.6.2	応力の外力項分と非線形項分	100	8.2.4	入力加速度の振幅と不安定領域の上下限值	151
4.6.3	層せん断力 Q_i	102	8.3	球形シェル構造の逆対称幾何学的非線形定常振動における モード連成作用効果	154
4.7	まとめ	104	8.3.1	逆対称モードを考慮した球形シェルの非線形連立支配方程式	154
5.	地震外力を受ける球殻の非線形振動応答	105	8.3.2	単一のモードのみを考慮した非線形定常振動状態の 不安定領域が生じ始める入力加速度の振幅	154
5.1	はじめに	105	8.3.3	複数のモードを考慮した非線形定常振動状態の 不安定領域が生じ始める入力加速度	157
5.2	入力データについて	105	8.4	まとめ	159
5.3	応答解析結果および考察	106	9.	結論	161
5.4	まとめ	108		参考文献	165
	Appendix Nigam-Jennings 法に於ける非線形項の取り扱いについて	109		発表論文リスト	167
6.	逆対称変形モードの動座屈現象	120			
6.1	はじめに	120			
6.2	逆対称非線形応答最終支配方程式	120			
6.3	数値計算手法および計算パラメータ	121			
6.4	数値計算結果及び考察	122			
6.5	まとめ	127			
7.	定常振動外力下での逆対称変形モードの非線形応答	128			
7.1	はじめに	128			
7.2	たわみモードの仮定	129			
7.3	定常振動解の導出	129			
7.3.1	逆対称非線形応答最終支配方程式	129			
7.3.2	定常振動解の導出	130			
7.4	安定行列式の導出	132			
7.5	加振型モードのみの定常振動について	136			
7.6	伝播型モード定常振動の安定性	139			
7.7	数値計算例および考察	143			

1. 序

1.1 研究の背景及び目的

任意の曲率をもつ薄板の曲面構造体を殻（シェル、Shell）とよぶ。シェルの板厚内重心面を中立面と呼び、その形状によりシェル構造を分類することができる。筒状形、任意の平面曲線を平面曲線と同一平面内にある 1 つの直線まわりに回転することによって得られる回転形、任意の平面曲線のある曲線に沿って得られる推動形、直線群よりなる線織面、その他微分幾何学的に表される自由な曲面形等を考えることができるが、このように形で分類すると複数の分類に属する形状が出てくるので、IASS により提唱されたガウス曲率による分類を用いる方法が一般に用いられている。ガウス曲率は、中立面上の任意の点に於ける曲率半径を R_1 、 R_2 としたとき、 $K=1/(R_1 R_2)$ と定義され、このガウス曲率の符号によって、曲面の曲りが次の 3 種類に分類される。

- $K > 0$: 楕円面 球形シェルなど
- $K = 0$: 平坦面 筒状形、線織形など
- $K < 0$: 双曲面 H.P.シェル (Hypabolic Paraboloid Shell) など

本論文で取り扱う球形シェルはガウス曲率が正であり、かつ、2 つの曲率半径 R_1 、 R_2 が全ての任意点で一定となる完全球殻（真球）を平面で切り欠いたものである。また、シェルの厚さは一定としており境界部は 1 ヶ所の真円となっている。境界部を形成している真円の直径をスパン、境界部を含む平面からもっとも離れた中立面上の点を頂点、また境界部を含む平面から頂点までの距離をライズと呼ぶ。この様な形状は、球殻の半径(a)、球殻の厚さ(h)、経線に沿う方向の頂点からの境界部までの開角(ϕ_0)により表すことができる。

本論で扱う球形シェルを含む一般大スパン構造の設計において、外乱としての地震や風の影響を無視することは出来ない。実強度設計においては外乱を静的外力として取り扱うことも可能であるが、これらの外乱は周波数特性を有しているため、静的外力としての評価には、その固有振動数が近接した値を持つことが知られているこの種の構造物の振動特性をも考慮せねばならずその評価は難しい。また強度のみならず、機能性の面からも外乱に対する応答挙動を知ることが必要な場合もある。

本論文の目的は、これら外乱に対する球形シェルの幾何学的非線形動的応答性状をパラメトリックに調査することにある。ところで、ここで用いられるシェル理論は、連続体の理論に実際の形状および荷重が作用したときの応答挙動について以下の仮定を設けて導かれる。

- 1) シェルの厚さは半径に比べて充分小さいとする
- 2) 中立面の法線方向の伸縮などの歪みは他の変形・応力に比べて充分小さく無視できる
- 3) 変形前に中立面に垂直な線素は変形後も中立面に垂直で直線を保つ
- 4) シェル表面は滑らかで、荷重が作用している間も滑らかさを維持する、つまり、座標系、

傾斜、変位、回転などが全て連続性を保ち、折れ曲がりを生じない。(数学的な表現ではこの状態を C0 および C1 クラスの連続性という。)

上記の仮定 1)~3)は Kirchhoff-Love の仮定と呼ばれ、古典的なシェル理論を述べた著書には必ず仮定されるものである。また仮定 4)は解析解による定式化においては当然成立しなければならない自明なことであり、仮定として取り上げられることはなかったが、有限要素法によりシェル理論を取り扱う場合にこれらを緩和する理論が用いられるため、ここでは敢えて仮定の 1 つとして取り上げている。これは、解析的な手法では、シェル表面は滑らかで、荷重が作用している間も滑らかさを維持する、つまり、座標系、傾斜、変位、回転などが全て連続性を保ち、折れ曲がりを生じていないことを保証した定式化が成される一方、有限要素法でこれら数学的な表現でいうところの C0 および C1 クラスの連続性を保つためには、節点の座標と要素の傾きを幾何学的に正確に入力するために曲線座標系で入力する必要がある、このようなタイプの自由度は取り扱いがむずかしく、今では殆ど使われなくなり、シェルが C0 および C1 クラスの連続性を保たなくてもよいという Mindlin 理論による定式化がなされ仮定の 4) を明確に記述する必要が生じていることを意味している。また、その後、1980 年代初頭には離散化 Kirchhoff 理論と呼ばれる中立面での法線保持、厚さ方向の伸縮はないという Love の仮定の 2)を緩和した(要素全体で一様に満足するのではなく、離散点においてのみ満たす)理論により、C1 クラスの連続性を要求しない薄肉のシェルに適用できる要素が開発されたが、C0 および C1 クラスの連続性を保つ連続体であるシェルの挙動をどの程度まで把握できるのかは明確にされていない。有限要素法による解析で正確な意味でのパラメトリックな解析(助変数的な解析)が行えないといわれる所以はここにある。解析解を用いた定式化では、応答性状を把握する構造特性として半径-板厚比、材料パラメータを陽にすることができ、かつ、個別のモードの応答特性をより明確に把握することができる。上記の理由により、本論文では解析解を用いた動的応答解析を行う。球形シェルの動的応答解析の既往研究には有限要素法を用いた個別の形状に対するものは数多く存在するが、解析解によるものは國枝らによる上下方向動的応答解析[21,22,26,28,30,31,32,34,35]、およびかなり近似の強い単一の逆対称変形モードを扱ったもの[18,19]のみであり、複数の逆対称変形モードを同時に扱ったものが見られないことも理由の 1 つである。数多く行われてきた有限要素法等の数値解析解との比較検討のためにも解析解を用いた動的応答解析は必要であると考えられる。

ところで、スパンに比してライズが低いシェルの場合、偏平シェル理論あるいは Donnel 型の理論[例えば 33 参照]と呼ばれる平板を僅かに曲げた形状を対象にする理論等を用いて動的応答性状は明らかにされてきた。この偏平シェル理論は、通常の直交座標系のもとで定式化が行えると考えられるシェルを対象としているため、その定式化は比較的容易に行われる。しかしながら、本論文で扱う球形シェルはライズの高いものであり、通常直交座標系を用いることはできない。本論文では、経線に沿う方向の頂点からの開角(ϕ)、球殻の中心からの距離(r)、緯線に沿う方向の角度(θ)を 3 つの軸とする球座標を用いる。

本論で扱うシェルの振動については、19 世紀の後半より研究は行われており、それは主に固有振

動数のみを得ようとするものであった。Lamb[1]は Extensional 状態の振動、Rayleigh[2]は Extensional および Inextensional 状態の固有振動数を求めているが、これらは基本仮定そのものが後の論文で示されるように実際状態とはかなり違っており、正しい固有振動数を与えているとは言い難いものであった。20 世紀半ば、Reissner[3,4]が偏平な場合について、応力関数表示により固有振動数を求めようとした。彼は接線方向慣性項および回転慣性項を無視し、且つ軸対称振動時のみを取り扱っている。その後、P.M.Naghdi[6]によって一般偏平シェルの動的状態における応力関数表示が示され、一般シェルの軸対称振動はこれを拡張適用して解かれている。また坪井は、Reissner と同じ手法で逆対称振動の場合についての解を示している。これら Reissner および P.M.Naghdi による方法は解の不足を伴うものであり、一般的な境界条件において使用することができない。変位を基本として全ての解を含み、表現、取り扱いの簡便な未知量を導入した振動時の厳正式は國枝ら[10,11]により示された。そこでは、解に対する特性方程式によって固有振動数と振動性状との関係が詳細に検討されている。その1年前には、P.M.Naghdi、A.Kalnis[7]も國枝らとは異なる別の手法により、似た表示により解を示しているが、その誘導過程が不明確であって、國枝らのはその誘導過程が明確である。その後、H.Kraus[15]はこの解を用い任意の外乱を受ける過渡振動状態の解を積分形式により表示している。ところで、國枝らにより示されたこれらの一般厳正解[10,11]は、座標変数について複素数次及び非整数次の Legendre 陪関数で表されている。解析的取り扱いでは、連続体の応答解析はモード重畳法により行われるが、これら厳正解を応答解析に用い Galerkin 法を適用すると、座標変数による領域積分が一般には閉形関数で表され得ないので数値計算が極めて困難になる。1970 年代に入るとコンピューターの発達により有限要素法等の数値解析法がこの種の構造物の解析に用いられるようになり、解析的な手法を扱った論文は数少なくなつてゆく。解析的な手法により球形シェルの非線形振動特性を調べようとするものも幾つか存在するが、先に述べた困難を克服するため、近似的な固有モードを設定することによりその応答性状を述べている[18,19]。しかしながら、これらは 1 次の固有モードのみを取り扱うものであり、高次のモードの影響を考慮できないものとなっている。その後、十分な精度と実用性を持った複数の固有モードを同時に作成する手法が國枝により展開され[21, 22,29]、球形シェルの上下方向非線形振動特性が詳細に調べられている[30,31,32,34,35]。この國枝により示された近似固有モード作成法[29]は軸対称変形モードのみであり、本論では、この手法を逆対称および非対称変形モードに拡張し、その有効性を確認した後、球形シェルの逆対称非線形振動特性を詳細に調査する。なお、この間、シェル理論を含む著書が幾つか出版されるが[20,25,27]、その中に見られる解析的な手法による振動を扱った解は、ステップ、インパルス等[20]で表される強制外力のものや、動的外力を準静的外力として取り扱ったもの[27]しか見られず、球形シェルの非線形振動解析を行っているものは存在しない。

本論文では、初めに、國枝により示された球形シェルの軸対称近似固有モード作成法を拡張し、応答解析に十分な精度と実用性をもって適用可能な逆対称及び非対称自由振動時の近似解を求める。この近似解は、固有振動数、固有モードが厳正解のそれらと十分な精度で一致しており、応答解析における Galerkin 法適用時の座標変数による領域積分は全て閉形関数で与えることができる。本論

文の後半では、得られた近似固有モード式を用いて、主に水平方向外力を受ける球形シェルの幾何学的非線形振動性状について述べる。

本論文の概要は以下の通りである。

2 章では國枝らにより示された球形シェルの一般厳正解および軸対称近似固有モード作成法を参照しつつ、応答解析に十分な精度と実用性を持って使用可能な球形シェルの自由振動時近似固有モード作成法を展開する。近似固有モードは周方向に余弦級数展開を行い、経線に沿う方向に Legendre 多項式の和として示されるが、周方向余弦展開次数が 0 のものを軸対称近似固有モード、1 のものを逆対称近似固有モード、2 以上のものを非対称近似固有モードと呼ぶ。この周方向余弦展開次数が 1 以上の値を持つときに表れる剛体変位相当項が本来計算結果として得られる固有振動数の関数で表されるので、逆対称および非対称時の近似固有モードを得る際には工夫が必要となる。

3 章では 2 章で得られた近似固有モードの内、逆対称近似固有モードのみを用い、水平地震動を受ける球形シェルの線形応答解析を行う。幾何学的パラメータ、材料学的パラメータの値によって大きな応答加速度が表れることを示す。

4 章では 5 章以降で用いる軸対称及び逆対称変形モードを同時に考慮した幾何学的非線形応答方程式および各合応力の詳細な定式化を示す。得られた幾何学的非線形応答方程式を用いるとモードの連成作用を詳細に調べることができ、5 章では動的座屈荷重以下でのモードの連成作用効果および初期不整の影響の解明を行い、6~8 章では動的安定問題について検討する。動的安定問題は動的外力による動的座屈を扱う問題と周期外力の下での共振現象を扱う問題に大別されるが、これらの章では得られた幾何学的非線形応答方程式の係数のうち逆対称変形に関するもののみを用い、6 章では水平地震動のみを受ける当該構造物の動的座屈問題、7 章では周期外力下でのある 1 つのモードに於ける水平回転方向 Traveling 応答モードの考察、また 8 章では複数のモードを同時に考慮したときの定常振動解の安定性問題について検討する。具体的な内容を以下に示す。

5 章では、有限要素法解析に基づき水平地震動入力により上下方向応答が誘起されるといわれている現象の解明を行うため、4 章で得られた幾何学的非線形応答方程式を用い、モードの連成作用により発生すると考えられる水平方向加振による上下方向応答モードの誘起、および上下方向加振による水平方向応答モードの誘起という対称性の異なるモード間のモードの誘起現象の解明、および初期不整の影響の解明を行うことを目的とした数値解析を行う。得られた結果として、モードの連成作用効果による水平方向加振時に於ける上下方向応答モードの誘起はごくわずかであり、有限要素法による結果で上下方向応答と呼んでいるものは、逆対称変形モードの上下方向変位成分であること、また初期不整の影響は殆ど認められないことを示す。

6 章では逆対称変形モードの動的座屈問題を扱う。神戸海洋気象台による阪神・淡路大震災地震動記録 (Kobe-JMA) 及び El Centro 水平地震動記録を用いた応答計算を行い地震動の動的安定臨界入力加速度を求める。動座屈現象は応力度あるいは変位で表されるものと考えられるが、応答加速度が急激に増大するときには、応答応力、応答変位も急激に増大する。臨界入力加速度を得るための指標は応力、変位、速度および加速度の何れをとっても同じことになると考えられることから、本

章では線形応答解析時の最大応答加速度が幾何学的・材料学的パラメータによって大きく異なる値をとるという 3 章の結果を受け、最大応答加速度を指標とした「非線形加速度応答比」を「非線形応答解析時最大応答加速度を線形応答解析時最大応答加速度で割った値」と定義し、その値の変化を調べることで目的を達する。球形シェル構造物の形態によっては非線形応答解析が不可欠であり、線形応答解析では予期しきれない応答が表れることを示す。

7 章では周期外力下における 1 つの逆対称モードの幾何学的非線形定常振動状態について説明することを目的としている。応答変形が加振方向に対応する「加振型モード」の他にそれに直交する方向にも生じる「随伴型モード」が存在すると仮定し、定常振動解および安定行列式の導出を行い、水平振動による当該構造物の安定性を論じる。非線形定常振動状態を考えると、加振型モードの安定な定常振動状態より低い振幅で随伴型モードの安定した定常振動状態が存在するので、定常応答振動解析には、伝播型モードの採用の必要性があることを示す。

8 章では周期外力下における複数の逆対称モードを同時に考慮した幾何学的非線形定常振動状態について説明することを目的としている。数値解析の結果、入力加速度の振幅がある値を超えると、複数のモードを考慮した場合の各モードの応答振幅は、各々のモードのみを考慮した応答振幅に比べて小さくなるのがわかる。これは、あるモードが非線形効果により、その共振曲線が hardening の性状を見せ始め、そこに含まれる不安定領域の影響により近接固有値を持つ高次側の固有モードの応答に影響を与え、モードの連成作用効果による減衰効果類似の現象が生じていると考えられる。本論文ではこの現象を「構造減衰」と呼ぶこととし、モード間の連成作用効果による構造減衰が、個別のモードが不安定領域を生じ始める周期外力の振幅値により評価できることを示し、これらの値をパラメトリックに整理する。

本論文では、主に逆対称変形のみを考慮した幾何学的非線形振動性状についてまとめているが、2 章で示した近似固有モード式を適切に用い 4 章で示した手法で幾何学的非線形応答方程式を作成することで、今まで解析が困難であった球形シェルの幾何学的非線形非対称振動性状をパラメトリックに明らかにすることができ、より多くの知見を得ることができると考えられる。

1.2 本論文中に用いられる記号およびシェルの Geometry

(1) 記号

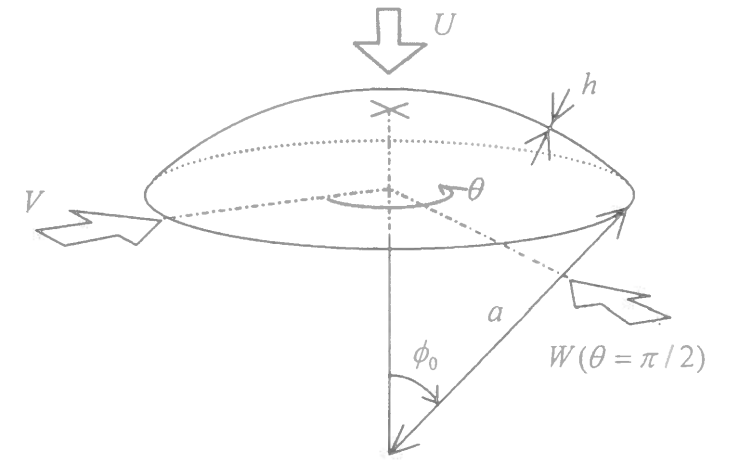
ϕ	経線に沿う方向の頂点からの開角
θ	円周方向角
t	時間
a	半径
h	板厚
E	ヤング係数
ν	ポワソン比
g	重力加速度
Ω	一般化固有振動数
ϕ_0	球形シェルの半開角
m	シェル中立面単位面積当たり重量
U, V, W	上下方向および水平方向外力
n	円周方向余弦級数展開次数

(モードの対称性を示す。 $n=0$ のとき軸対称、 $n=1$ のとき逆対称)

P_j, P_j^n	Legendre 多項式および Legendre 陪多項式
M_0, M_1	使用する軸対称および逆対称モードの数
N_0, N_1	M_0, M_1 により定まる、使用する Legendre (陪) 多項式の数
$G_{j\mu}, G_{j\mu}^1$	近似固有モードを形成する Legendre 多項式の係数
$W_i^n(\phi)$	n 次の対称性をもつ近似固有モードの i 番目
$\tilde{W}_i^n(\phi)$	n 次の対称性をもつ近似固有モードを求めるための仮のモード
J_i^n, K_i^n	$\tilde{W}_i^n(\phi)$ を求める際に使用する Legendre (陪) 多項式の上下限值
$T_l(t), T_l^c(t), T_l^s(t)$	l 次の軸対称および逆対称モードの時間関数

$$A = \frac{ma^2}{Ehg} \quad \text{材料学的パラメータ}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad \lambda_j = \frac{(1-\nu)\{2-j(j+1)\}-\kappa}{1-\nu-j(j+1)}, \quad \kappa = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{h^2}$$



(2) 微分演算子

$$B'' = \frac{dB'}{d\phi}, \quad B' = \frac{dB}{d\theta}, \quad \dot{B} = \frac{dB}{dt}$$

$$H_0(B) = B'''' + \cot \phi \cdot B'' + \frac{1}{\sin^2 \phi} B''$$

$$H_1(B) = H_0(B) + (1-\nu)B, \quad H_2(B) = H_0(B) + 2B$$

$$\underline{H}_0(w_0) = B'''' + \cot \phi \cdot B''$$

$$\underline{H}_1(B) = \underline{H}_0(B) + (1-\nu)B, \quad \underline{H}_2(B) = \underline{H}_0(B) + 2B$$

$$\overline{H}_0(w_0) = B'''' + \cot \phi \cdot B'' - \frac{1}{\sin^2 \phi} B$$

$$\overline{H}_1(B) = \overline{H}_0(B) + (1-\nu)B, \quad \overline{H}_2(B) = \overline{H}_0(B) + 2B$$

(3) Legendre 陪多項式漸化式 (ただし、 $P_j^n \equiv P_j^n(\cos \phi)$)

$$P_j^{n''} + \cot \phi P_j^{n'} + \{j(j+1) - n^2 \csc^2 \phi\} P_j^n = 0$$

$$(j-n+1)P_{j+1}^n - (2j+1)\cos \phi P_j^n + (j+n)P_{j-1}^n = 0$$

$$P_{j+1}^n - P_{j-1}^n - (2j+1)\sin \phi P_j^{n-1} = 0$$

$$P_{j+1}^n - \cos \phi P_j^n + (j-n+1)\sin \phi P_j^{n-1} = 0$$

$$\cos \phi P_j^n - P_{j+1}^n + (j+n)\sin \phi P_j^{n-1} = 0$$

$$(j-n)\cos \phi P_j^n - (j+n)P_{j-1}^n + \sin \phi P_j^{n+1} = 0$$

$$(j-n+1)P_{j+1}^n - (j+n+1)\cos \phi P_j^n + \sin \phi P_j^{n+1} = 0$$

$$P_j^{n+2} - 2(n+1)\cot \phi P_j^{n+1} + (j-n)(j+n+1)P_j^n = 0$$

$$-\sin \phi P_j^{n''} = (j+1)\cos \phi P_j^n - (j-n+1)P_{j+1}^n$$

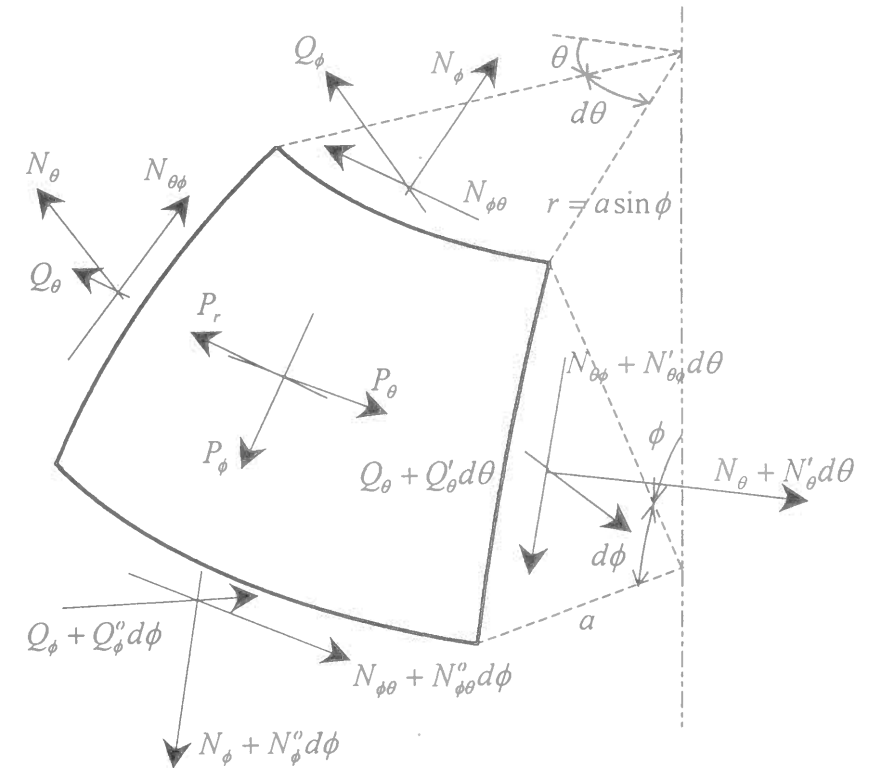
$$-\sin \phi P_j^{n''} = (j+n)P_{j-1}^n - j\cos \phi P_j^n$$

$$-\sin \phi P_j^{n''} = \sin \phi P_j^{n+1} - n\cos \phi P_j^n$$

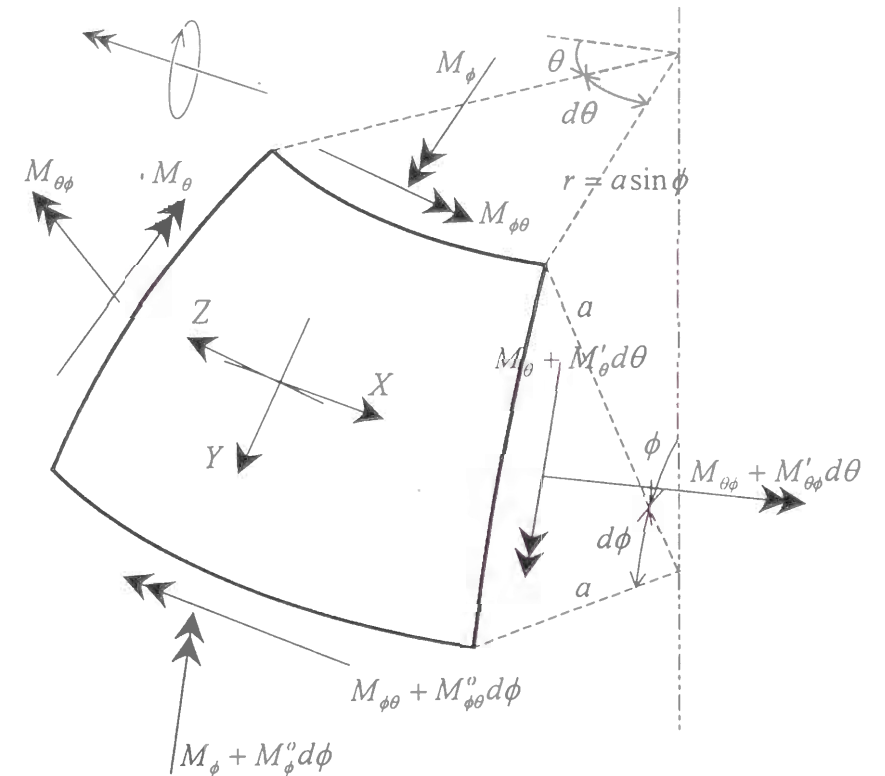
$$-\sin \phi P_j^{n''} = n\cos \phi P_j^n - (j+n)(j-n+1)\sin \phi P_j^{n-1}$$

(4) 応力の向き

軸応力



モーメント



2. 近似固有モード作成法

2.1 はじめに

國枝らにより示された球形シェルの一般厳正解[10,11]は複素数次および非整数次の Legendre 陪関数で表現されているため、これらの解を応答解析に用い、通常用いられる Galerkin 法を適用すると座標変数による領域積分が一般には閉形関数では表され得ないので、数値計算が極めて困難になる。國枝は、その困難さを回避するため、十分な精度と実用性を持って応答解析に適用可能な軸対称自由振動時の近似解の作成方法を提案した[21,29]。この近似解を用いると応答解析における上記積分は全て閉形関数で与えられ、応答解析が簡便に実行できることを示し[23]、幾何学的非線形振動状態を含む球形シェルの軸対称振動時の応答性状を詳細に調査している[26,28,30,31,32,34,35]。本章では、この國枝により示された軸対称近似固有モード作成方法を逆対称、非対称の場合に一般に拡張する。逆対称自由振動時の厳正解には、軸対称自由振動時には含まれない接線方向変位成分 u, v の回転による剛体変位相当項が存在する。この剛体変位相当項は本来計算結果として求められる固有振動数の関数であるが、本論では、初めに適当な値を固有振動数として与え、計算結果として出てきた固有振動数を再び与えて計算する方法をとった。数回操作を繰り返すことでこの固有振動数の値は十分な収斂が認められた。

ところで、一般厳正解に基づく固有振動数、モードの計算結果[13,23]によると、接線方向変位成分 u, v による慣性項をも含めた normal 振動とこれらを見捨てた flexural 振動とでは通常実設計に用いられる球形シェルの幾何学的寸法、材料学的常数の範囲において極めて軽微な差異しか見られない。他方 flexural 振動の仮定を導入すると応答解析は極めて簡略化される。従ってここでは flexural 振動の仮定を導入する。また、ここで取り扱う球形シェルは頂点が閉じており、境界が一ヶ所だけのドーム型とする。

なお、得られた近似固有モード式のうち、周方向余弦展開次数が 0 のものを軸対称近似固有モード、1 のものを逆対称近似固有モード、2 以上のものを非対称近似固有モードと呼ぶ。

2.2 支配式と厳正解

本論では、國枝らによる球形シェルの一般厳正解[10]のうち振動解に関するものを厳正解と呼ぶこととし、逆対称および非対称自由振動時の厳正解には、軸対称自由振動時には含まれない接線方向変位成分 u, v の回転による剛体変位相当項が存在することを明記するため、本節に國枝らによる厳正解を再録する。

flexural 振動の仮定に基づく自由振動時の法線方向運動方程式および適合条件式は J.L.Sanders[9]の一般非線形シェル理論を球形シェルに適用し D'Alembert の原理を用いることにより以下のように表

される。(詳細な定式化は 4.2 節参照)。

$$H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi) + \frac{ma^4}{gD} \ddot{w} = 0 \quad (2.1)$$

$$H_2 H_1(\psi) - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2 H_2(w) + Eha H_2(w) = 0 \quad (2.2)$$

ここに、 w は法線方向変位成分であり、 ψ は応力関数、 a は球形シェルの半径、 h は板厚、 m は球形シェル中立面単位面積当たり重量、 g は重力加速度、 ν はポアソン比、また係数 D は $Eh^3/12(1-\nu^2)$ であり、 H_1 および H_2 は以下の θ 方向および ϕ 方向の微分を行う微分演算子を示す。

$$H_0(B) = B''' + \cot \phi \cdot B'' + \frac{1}{\sin^2 \phi} B'$$

$$H_1(B) = H_0(B) + (1-\nu)B, \quad H_2(B) = H_0(B) + 2B$$

ここに、上付の \circ 、prime および dot は以下の意味を持つ。

$$B^\circ = \frac{dB}{d\phi}, \quad B' = \frac{dB}{d\theta}, \quad \dot{B} = \frac{dB}{dt}$$

なお、 θ は円周方向角、 ϕ は経線に沿う方向の頂点からの開角、 t は時間を示す。(1.2 節(1)記号の項参照)

ここに、応力関数 ψ は断面力、シェル面接線方向変位成分 u, v と次の関係にある。

$$N_\theta = \frac{1}{a^2} \left\{ \psi''' + \psi - \frac{D}{a} H_2(w) \right\}$$

$$N_\phi = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\psi''}{\sin^2 \phi} + \psi'' \cot \phi + \psi - \frac{D}{a} H_2(w) \right\}$$

$$u = -\frac{(1+\nu)}{Eha} \psi'' + \frac{1}{\sin \phi} f'$$

$$v = -\frac{(1+\nu)}{Eha} \frac{\psi'}{\sin \phi} - f''$$

f は応力関数であり、法線方向運動方程式(2.1)および適合条件式(2.2)に含まれる応力関数 ψ だけでは表現しきれなかった逆対称および非対称状態の一部の解を含んでいる。

一般厳正解では、法線方向運動方程式(2.1)および適合条件式(2.2)を満たす頂点の閉じた境界が一ヶ所のドームの変位 w は、Legendre 陪関数 P_μ^n の和を用いて、以下のように表される。

$$w = \sum_{i=1}^3 A_i P_{\mu_i}^n(\phi) \cos n\theta \cos \omega t \quad (2.3)$$

ここに、 n はシェルの周方向級数展開次数であり、対称 ($n=0$)、逆対称 (1)、非対称 (2 以上) と分類される。 μ_i はポアソン比、半径-板厚比、本来計算結果として求められる固有振動数、等を係数として持つ 3 次方程式の解より得られる値であり、一般に複素数および非整数となっている。また、Legendre 関数の引数として与えられる μ_i が計算結果として得られる固有振動数の関数であることが

ら、未知量である A_i は固有振動数を与え境界条件を満たすように決定されなくてはならないものとなっている。

(2.3)式により、応力関数 ψ, f は次式で表される。

$$\psi = \sum_{i=1}^3 \eta_i A_i P_{\mu_i}^n \cos n\theta \cos \omega t \quad (2.4)$$

$$f = \frac{1+\nu}{Eha} GP_{\mu_4}^n \sin n\theta \cos \omega t$$

これらを用いると接線方向変位成分 u, v は次式で表される。

$$u = \left[-\frac{1+\nu}{Eha} \sum_{i=1}^3 A_i P_{\mu_i, \phi}^n + GP_{\mu_4}^n \frac{n}{\sin \phi} \right] \cos n\theta \cos \omega t \quad (2.5)$$

$$v = \left[\frac{1+\nu}{Eha} \frac{n}{\sin \phi} \sum_{i=1}^3 A_i P_{\mu_i}^n + GP_{\mu_4, \phi}^n \right] \sin n\theta \cos \omega t \quad (2.6)$$

(2.5)、(2.6)式を見ると判るように、 n が 1 以上の値を持つとき（逆対称、非対称時）には、 n が 0 の時（対称時）では表れない未知常数 G を含む項が表れることが判る。これは序論で述べた、 u, v の回転による剛体変位相当項であり、逆対称および非対称時の近似固有モードを求める際に工夫が必要となる。

2.3 近似解の作成

前節で示したように球形シェル自由振動時の一般厳正解(2.3)、(2.5)および(2.6)式は Legendre 陪関数で表されており、その引数は複素数および非整数となっているが、近似固有モードはこの Legendre 陪関数を比較的取り扱いが簡便な直交関数である Legendre 陪多項式により展開することにより得るものとする。また、本来、厳正解を直交関数で展開するには直交関数の無限級数和としなければならないが、ここでは有限級数和としており、求めようとする固有モードの高次の数個のモードにのみその影響が表れていることを次節の数値計算例で示す。

2.3.1 仮のモードの設定

球形ドームの半開角を ϕ_0 とする。國枝による軸対称近似固有モード作成方法[29]を拡張し、(2.1)及び(2.2)式の解 w を Legendre 陪多項式を用いて次のように表すものとする。（國枝による軸対称近似固有モード式は(2.7)式の Legendre 陪多項式の階数 n が 0 である Legendre 多項式を用いている）

$$w = \sum_{i=1}^N B_i \tilde{W}_i^n(\phi) \cos n\theta \cos \omega t, \quad \tilde{W}_i^n(\phi) = \sum_{j=J_i^n}^{K_i^n} F_{ji}^n P_j^n(\cos \phi) \quad (2.7)$$

N : モードの数、 P_j^n : Legendre 陪多項式

ここに \tilde{W}_i^n は仮モードであり、一般厳正解表示が(2.3)式のように Legendre 陪関数の和で表される

ところを、直交関数である Legendre 陪多項式の $J_i^n \sim K_i^n$ の範囲の和によって 1 つのモードを表し、そのモードの重ね合わせによって解 w を表現している。この仮モードに含まれる J_i^n, K_i^n の選定がここでの近似解の精度を決定する。階数 n が 0 の時には、Legendre 多項式を表すものとする。（つまり、 $P_j^0 = P_j$ ）。

ところで n 時の Legendre 陪多項式は n が奇数、偶数によって

奇数時

$$P_m^n(\cos \phi) = D_m \sin m\phi + \text{Func.}(\sin k\phi; k=0 \cdots (m-1))$$

偶数時

$$P_m^n(\cos \phi) = D_m \cos m\phi + \text{Func.}(\cos k\phi; k=0 \cdots (m-1))$$

のように級数表現される。即ち P_m^n の曲線を描くと、 $0 < \phi \leq 90^\circ$ の領域でこの曲線には $m/2$ 個の節点が存在する。ここでこの節点が 0 から 90° の間に均等に分布していると仮定する（但し十分に大きな m についてである）。従って、 $0 < \phi \leq \phi_0$ の領域に i 個の節点がある状態を考えると上記の m の替わりに $i \cdot 90^\circ / \phi_0$ を用いればよい。(2.7)式の \tilde{W}_i^n が第 i 次のモードに仮に対応するとすると、

$$K_i^n = \text{int} \left[\frac{180i}{\phi_0} \right] + n + 1 \quad (n \neq 0) \quad (2.8)$$

$$K_i^0 = \text{int} \left[\frac{180i}{\phi_0} \right] \quad (n = 0)$$

であれば、 \tilde{W}_i^n は i 次モードを表現し得る Legendre 陪多項式 $P_{K_i^n}^n$ を含むことになる。ここに、記号 int は [] 内の 1 より小さい値を切り落とす操作(Integer)を示している。実際、 $n=1$ のときの Legendre 陪多項式の節点分布を調べると、この(2.8)式は i 個の節点を適切に取り出していることが分かる。だが、 ϕ_0 が 90° を超え且つその近辺では Legendre 陪多項式の節点分布に偏りが生じていることから、(2.8)式に微小な値 (0.3 程度) を加え、切り落とし操作を多少制御するとより望ましい結果が得られる。

一方、(2.7)式の係数 F_{ji}^n を求めるための条件式の数には後に述べるように、 i 番目の仮のモードがそれまでに求めた $(i-1)$ 個の仮のモードに直交する条件が $(i-1)$ 個と、境界条件が非対称モード ($n \geq 1$) では、4 個（未知積分定数 G を含む）の $(i+3)$ 個であるから

$$J_i^n = K_i^n - (i+3)$$

軸対称時 ($n=0$) には、境界条件は 3 個であり、条件数は $(i+2)$ 個であるから

$$J_i^0 = K_i^0 - (i+2)$$

であればよい。しかしながら、この条件では i 番目の仮のモードを求めるための Legendre 陪多項式の範囲 ($J_i^n \sim K_i^n$) と、その 1 つ前の $(i-1)$ 番目の仮のモードを求めるための Legendre 陪多項式の範囲 ($J_{i-1}^n \sim K_{i-1}^n$) との間に使用されないあるいはどちらのモードにも含まれてしまう Legendre 陪多項式

が存在する可能性がある。(つまり、 $K_{i-1}^n+1 < j < J_i^n$ あるいは $J_i^n \leq j \leq K_{i-1}^n$ となる j 番目の Legendre 陪多項式 P_j^n が存在する可能性がある)。これらの範囲の Legendre 陪多項式の有無による解の変化を詳細に調べた結果、どちらの仮のモードにも含まれる Legendre 陪多項式は存在してもよく、またどちらの仮のモードにも含まれない Legendre 陪多項式の存在は解の精度に大きな影響を与えることがわかったので、仮のモードを決定する J_i^n は以下のようにすればよいことがわかる。

逆対称・非対称時では

$$J_i^n = \min.[K_i^n - (i+3), K_{i-1}^n + 1]$$

軸対称時には、

$$J_i^0 = \min.[K_i^0 - (i+2), K_{i-1}^0 + 1]$$

2.3.2 境界条件

頂点の閉じた球形シェルは逆対称および非対称モードの境界条件は、 $\phi = \phi_0$ において固定境界のとき $w = u = v = w^0 = 0$ 、単純支持のとき $w = u = v = M_\phi = 0$ となる。(軸対称モードの境界条件にはそれぞれの条件には $v = 0$ が含まれない)。これらの式を仮定した近似固有モードにより表現するため、応力関数 ψ を以下のように仮定する。

$$\psi = \sum_{i=1}^N B_i^n \Psi_i^n(\phi) \cos n\theta \cos \omega_i t, \quad \Psi_i^n(\phi) = \frac{D}{a} \sum_{j=J_i^n}^{K_i^n} F_{ji}^n \lambda_j^n P_j^n(\cos \phi)$$

上式と仮のモード式(2.7)の w を適合条件式(2.2)に代入すると、

$$\sum_{i=1}^N B_i^n \sum_{j=J_i^n}^{K_i^n} F_{ji}^n [H_2 H_1(\lambda_j^n P_j^n \cos n\theta) - (1-\nu)H_2 H_2(P_j^n \cos n\theta) + \frac{Eha^2}{D} H_2(P_j^n \cos n\theta)] \cos \omega_i t = 0$$

ここに、

$$H_0(P_j^n \cos n\theta) = \left(P_j^{n''''} + \cot \phi \cdot P_j^{n'''} - \frac{n^2}{\sin^2 \phi} P_j^n \right) \cos n\theta = -j(j+1)P_j^n \cos n\theta$$

$$H_1(P_j^n \cos n\theta) = H_0(P_j^n \cos n\theta) + (1-\nu)P_j^n \cos n\theta$$

$$H_2(P_j^n \cos n\theta) = H_0(P_j^n \cos n\theta) + 2P_j^n \cos n\theta$$

であり、また

$$\kappa \equiv \frac{Eha^2}{D} = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{h^2}$$

の記号を導入すると、上式[]内は任意の F_{ji} について成り立つので

$$\lambda_j^n \{2-j(j+1)\} \{(1-\nu)-j(j+1)\} P_j^n - (1-\nu) \{2-j(j+1)\}^2 P_j^n + \kappa \{2-j(j+1)\} P_j^n = 0$$

であるから

$$\lambda_j^n = \frac{(1-\nu)\{2-j(j+1)\} - \kappa}{1-\nu-j(j+1)}$$

が求められる。ここで、この λ_j^n は円周方向展開次数 n に独立したものとなることがわかるので、上式を λ_j と置き直すことにより、応力関数 ψ を仮のモード式に含まれる係数を用いて以下のように書き表すことができる。

$$\psi = \sum_{i=1}^N B_i^n \Psi_i^n(\phi) \cos n\theta \cos \omega_i t, \quad \Psi_i^n(\phi) = \frac{D}{a} \sum_{j=J_i^n}^{K_i^n} F_{ji}^n \lambda_j P_j^n(\cos \phi)$$

$$\lambda_j = \frac{(1-\nu)\{2-j(j+1)\} - \kappa}{1-\nu-j(j+1)}, \quad \kappa = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{h^2}$$

この式を式(2.4)の応力関数 ψ の代わりに用いると式(2.5)および式(2.6)の変位 u および v は以下のように表すことができる。

$$u = -\frac{1+\nu}{Eha} \sum_{i=1}^N B_i^n \Psi_i^{n'}(\phi) \cos n\theta \cos \omega_i t + \frac{1+\nu}{Eha} GP_{\mu_4}^n \frac{n}{\sin \phi} \cos n\theta \cos \omega_i t \quad (2.5')$$

$$v = \frac{1+\nu}{Eha} \frac{n}{\sin \phi} \sum_{i=1}^N B_i^n \Psi_i^n(\phi) \sin n\theta \cos \omega_i t - \frac{1+\nu}{Eha} GP_{\mu_4, \phi}^n \sin n\theta \cos \omega_i t \quad (2.6')$$

応力関数 f をそのまま用いた結果、これらの式には G を含む項が存在することになる。これらは u, v の回転による剛体変位に相当する項であり、境界条件を満たすため、これらの項を無視してはいけない。

ところで、Legendre 陪関数 $P_{\mu_4}^n$ の引数 μ_4 は國枝らにより以下のように与えられている。

$$\mu_4 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \{2 + 2(1+\nu)\Omega^2\}}$$

ここに、 ν はポアソン比、 Ω は本来計算結果として求められる固有振動数であり、固有モードを求める際に工夫が必要となる。

以上より、非対称固有モード ($n \geq 1$) の固定境界 ($w = u = v = w^0 = 0$) の条件は式(2.5')、(2.6')より、第 i 次のモードに対して次式となる。

$$\tilde{W}_i^n = 0 \quad (w=0)$$

$$-\Psi_{i, \phi}^n + G^n \frac{n}{\sin \phi} P_{\mu_4}^n = 0 \quad (u=0)$$

$$\frac{n}{\sin \phi} \Psi_i^n - G^n P_{\mu_4, \phi}^n = 0 \quad (v=0)$$

$$\tilde{W}_{i, \phi}^n = 0 \quad (w^0=0)$$

上式の Legendre 陪多項式を用いた表現は以下のようになる。

$$\sum_{j=J_1^n}^{K_1^n} F_{j_1}^n P_j^n(\cos \phi_0) = 0 \quad (2.9)$$

$$-\frac{D}{a} \sum_{j=J_1^n}^{K_1^n} F_{j_1}^n \lambda_j \left\{ j \cot \phi_0 P_j^n(\cos \phi_0) - \frac{(j+n)}{\sin \phi_0} P_{j-1}^n(\cos \phi_0) \right\} + G^n \frac{n}{\sin \phi_0} P_{\mu_1}^n(\cos \phi_0) = 0$$

$$\frac{n}{\sin \phi_0} \frac{D}{a} \sum_{j=J_1^n}^{K_1^n} F_{j_1}^n \lambda_j P_j^n(\cos \phi_0) - G^n P_{\mu_1}^n(\cos \phi_0) = 0$$

$$\sum_{j=J_1^n}^{K_1^n} F_{j_1}^n \left\{ j \cot \phi_0 P_j^n(\cos \phi_0) - \frac{(j+n)}{\sin \phi_0} P_{j-1}^n(\cos \phi_0) \right\} = 0$$

ここに G^n は未知常数であり、(2.5)、(2.6)式の G を $G^n \equiv (alh)G$ と置き換えている。また、単純支持の場合には ($w = u = v = M_\phi = 0$) であり、 $M_\phi = 0$ の条件は

$$M_\phi = \frac{D}{a^2} \sum_{j=1}^{K_1^n} F_{j_1}^n \left\{ 1 - \frac{\lambda_j(1+\nu)}{\kappa} \right\} \left[-(1-\nu) \cot \phi P_j^{n\phi} + \left\{ (1-\nu) \frac{n^2}{\sin^2 \phi} - j(j+1) \right\} P_j^n \right] \cos n\theta$$

より、 $\phi = \phi_0$ において以下のようになる。

$$\sum_{j=1}^{K_1^n} F_{j_1}^n \left\{ 1 - \frac{\lambda_j(1+\nu)}{\kappa} \right\} \left[-(1-\nu) \cot \phi P_j^{n\phi} + \left\{ (1-\nu) \frac{n^2}{\sin^2 \phi} - j(j+1) \right\} P_j^n \right] = 0$$

2.3.3 直交条件

支配式(2.1)及び適合条件式(2.2)より、 i 次の仮モードに対する次の直交条件式が求められる。(本章の Appendix 参照)

$$\int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_\rho^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_\rho^n)] \tilde{W}_\rho^n \sin \phi \, d\phi \quad (2.10)$$

$$= \int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_i^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_i^n)] \tilde{W}_\rho^n \sin \phi \, d\phi$$

この式は、 i 次の仮のモードをそれまでに求めた $(i-1)$ 個の仮のモードに直交するようにする条件である。積分を行ってこの式を書き換えると、次の閉形関数表示で与えられる。

$$\sum_{q=J_1^n}^{K_1^n} F_{q_1}^n \sum_{j=J_1^n}^{K_1^n} F_{j_1}^n \{ \{2 - q(q+1)\}^2 - \lambda_q \{2 - q(q+1)\} \}$$

$$- \{2 - j(j+1)\}^2 + \lambda_j \{2 - j(j+1)\} \} S^n(q, j) = 0 \quad (2.11)$$

ここに、関数 $S^n(q, j)$ は Legendre 陪多項式の 2 重積の積分であり、以下のように定義される。

$$S^n(r, s) = \int_0^{\phi_0} P_s^n(\cos \phi) P_r^n(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi$$

この式は Legendre 陪多項式の積の式で表すことができ以下のように求められる。(定式の詳細は 4.4.3(1)を参照)

$$S^n(r, s) = \int_0^{\phi_0} P_s^n(\cos \phi) P_r^n(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi \quad (2.12)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{r(r+1) - s(s+1)} [(s-r) \cos \phi P_s^n P_r^n - (s+n) P_{s-1}^n P_r^n + (r+n) P_s^n P_{r-1}^n]_{\phi=\phi_0}, & (r \neq s) \\ -[P_r^n P_r^{n-1} \sin \phi]_{\phi=\phi_0} + (r+n)(r-n+1) S^{n-1}(r, r), & (r = s) \end{cases}$$

また、Legendre 陪多項式の階数が 0 のときの(2.12)式の積分は國枝により以下のように与えられている。

$$S(r, s) = S^0(r, s) = \int_0^{\phi_0} P_s(\cos \phi) P_r(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{r(r+1) - s(s+1)} [(s-r) \cos \phi P_s P_r - s P_{s-1} P_r + r P_s P_{r-1}]_{\phi=\phi_0}, & (r \neq s) \\ \frac{1}{2r+1} [1 - P_r P_r \cos \phi]_{\phi=\phi_0} - 2 \sum_{p=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (2r+1-4p) S^0(r, r-2p), & (r = s) \end{cases}$$

2.3.4 近似固有モード

最終的な近似固有モードは次の 2 つの過程を経て決定する。まず仮モード \tilde{W}_j^n を境界条件(2.9)と互いの仮モードが直交する条件(2.11)を満たすように定める。これらの条件を満たすこの仮モードは固有モードとしての条件を満たしており、応答解析に適用することも可能であるが、 i 番目の仮モードが J_1^n から K_1^n という限定された範囲の Legendre 陪多項式の和で表されているためその精度はよくない。そこで、次にこの仮モードを自由振動支配式(2.1)に代入し、Galerkin 法を適用して一般化座標 B_i^n を定め、最終的な近似固有モード $W_i^n(\phi)$ を求める方法をとる。

第一段階 (仮モード \tilde{W}_j^n の決定)

逆対称以上 ($n \geq 1$) のモードを求める際には、境界条件の中に未知常数 G^n が含まれることから以下のように第 1 番目の仮モードとそれ以降の仮モードの設定に分けて考える。ここで注意すべき点は境界条件に含まれる $P_{\mu_1}^n$ が、本来計算結果として求められる Ω の関数であることである。 i 次の仮モードに関する固有振動数を Ω_i 、対応する Legendre 陪関数 $P_{\mu_i}^n$ の引数を改めて μ_{4i} とおくと

$$\mu_{4i} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \{2 + 2(1+\nu)\Omega_i^2\}}$$

となっている。

本論では、初めに厳正解を参照して

$$\Omega_i = 0.7 + 0.2 \times \frac{i}{N} \quad (N \text{ は求めようとしている固有モードの個数})$$

なる値を初期値として与え、計算結果として求められる固有振動数の値 Ω_i を再び与えて計算を行う

方法をとった。この過程を数回繰り返すことでこの固有振動数の値は十分な収斂が認められた。

(a) 第 1 番目のモードについて $F_{j_1}^n|_{j=J_1^n}=1$ とおき(2.9)式の 4 個の境界条件を用いて $F_{j_1}^n(j \neq J_1^n)$ と未知常数 G^n を求める。

(b) 第 i 番目のモードに付いて(a)で求めた G^n を用いて($i-1$)個の直交条件と 4 個の境界条件を満たすように $F_{j_i}^n$ を求める。

(a)、(b)の方法で逆対称以上の $F_{j_i}^n$ を i について順次定めることが出来る。

軸対称時 ($n=0$) のモードを求める際には、未定常数 G^n は含まれないため、以下のように $F_{j_i}^0$ を求めている。

(a) 第 1 番目のモードについて $F_{j_1}^0|_{j=J_1^0}=1$ とおき(2.9)式の 3 個の境界条件を用いて $F_{j_1}^0(j \neq J_1^0)$ を求める。

(b) 第 i 番目のモードに付いて($i-1$)個の直交条件と 3 個の境界条件を満たすように $F_{j_i}^0$ を求める。

但し、 $F_{j_i}^n$ を定める連立方程式の係数行列は一般に正則にはならない。 K_i^n を(2.8)式のように決定しているからである。矩形行列を係数行列とする連立方程式の解法はいくつか与えられているが、この第 1 段階では 1 組の解さえ得られておればよいので、最も容易な”最小二乗最小ノルム”法をここでは採用した。

第 2 段階 (固有モード W_i^n の決定)

第 1 段階で定まった $F_{j_i}^n$ を用いて仮モード(2.7)式を法線方向運動方程式(2.1)、適合条件式(2.2)式に代入し、Galerkin 法を適用すると(2.7)式の B_i^n に関する次の式が得られる。

$$-\Omega^2[m_{ij}^n]\{B_j^n\} + [k_{ij}^n]\{B_j^n\} = 0 \quad (2.13)$$

$$m_{ij}^n = m_{ji}^n = \sum_{r=J_1^n}^{K_i^n} \sum_{s=J_1^n}^{K_j^n} F_{ri}^n F_{sj}^n S^n(r,s), \quad \Omega^2 = \frac{ma^2}{Ehg} \omega^2$$

$$k_{ij}^n = k_{ji}^n = \frac{1}{\kappa} \sum_{r=J_1^n}^{K_i^n} \sum_{s=J_1^n}^{K_j^n} F_{ri}^n F_{sj}^n \{2-r(r+1)\} \{2-r(r+1)-\lambda_r\} S^n(r,s)$$

(2.13)式の k_{ij}^n が対称になるのは仮モードに対する直交条件式(2.10)式を採用しているからである。(2.13)式より固有振動数 Ω と一般化座標ベクトル $\{B_j^n\}$ が通常の手法で計算できるので $\{B_j^n\}$ を(2.7)式に代入すると最終的に次のように固有モードが計算される。

$$w = \sum_{i=1}^N W_i^n(\phi) \cos n\theta T_i^n(t), \quad W_i^n(\phi) = \{B_s^n\}_i^T \{\tilde{W}_s^n\} = \sum_{j=1}^{K_i^n} G_{ji}^n P_j^n(\cos\phi)$$

$$G_{ji}^n = \sum_{s=1}^N \{B_s^n\}_i^T F_{js}^n \quad (2.14)$$

ここに $W_i^n(\phi)$ が得られた第 i 次の近似固有モードであり、球形シェルの全領域に渡った表現では、 $W_i^n(\phi) \cos n\theta$ となる。

2.4 数値計算例および考察

半開角として 15 度から 135 度の間を 15 度刻みにした 9 種類、半径-板厚比(a/h)を 100、400、500、1000 の 4 種類、境界条件として固定および単純支持の 2 種類、またモードの周方向展開次数 n として 1 (逆対称)、および 2、3 (非対称) の 3 種類の組み合わせについて、この近似解による計算結果の固有振動数を表 1 に、また固有モードの形状を図 1 および図 2 に示す。表 1 の縦軸は半開角(h.o.a: half open angle)、横軸はモードの次数となっている。

表 1 の固有振動数は式(2.13)に表される正規化された振動数 Ω であり、材料パラメータ $A(=ma^2/Ehg)$ の平方根で割ることにより、実際の形状に於ける固有振動数を得ることができるので、設計時の基準参考資料として用いることができる。なお、周方向展開次数 n は Legendre 陪多項式の階数であるから、表中では rank として示している。

また図 1 および図 2 中の数値は半開角を示している。ところで、近似固有モードは $W_i^n(\phi) \cos n\theta$ の形で与えられ球形シェルの全面に渡って定義されているものではあるが、表示の簡便さおよび厳正解との比較の容易さから周方向に $\theta = 0$ となる平面で切った断面図として表している。(このときこの断面図では周方向展開次数が奇数の場合には逆対称形、偶数の場合には線対称形となる。)

また数値計算上、周方向展開次数 n が奇数時には、半開角が 90° のとき、使用している Legendre 陪多項式が $\phi=90^\circ$ で必ず 0 となることから境界部での重ね合わせを充分に行うことが出来ないため、 89.8° を代わりに用いて解を求めている。この値は 90° 前後で厳正解に収束することは確認している。周方向展開次数 n が 1 (逆対称モード) の近似解による固有モードと厳正解[13,23]のそれを比較するとその差は極めて小さいことが分かる。周方向展開次数 n が 2 以上のものの厳正解固有振動数は計算されておらず、比較対象が存在しないが、近似固有モードの形状を見る限りにおいて、かなり正確な固有モードが得られていると確信できる。

また、モード図からも分かるように求めようとしている最高次のモード (N 番目のモード) あるいはその近辺のモードに乱れが見られる。これは、本来 Legendre 陪多項式の無限級数和で表されるべきモードを K_N までの有限和としたための truncation error によるためである。従って、応答解析に用いようとするモードの個数に数個加えたモードまで求めて、後の数個は捨てる必要がある。

近似解による固有振動数の値を見ると半開角が大きくなるほど、また半径-板厚比が大きくなるほど固有振動数は小さくなることがわかる。固有振動数は 1 次のモードを除いてかなり近接した値を持ち、半開角が大きくなるほどその性質は顕著になる。これらの表は周方向展開次数 n により分

けて示しているが、実在の球形シェルを考える場合には当然のことながら周方向展開次数が異なるモードが共存しているので、球形シェルはかなり近接した固有振動数を持つ構造物であり、その振動性状を把握するためには幾何学的非線形振動応答解析の遂行が必要であるといえる。

2.5 まとめ

本章では、國枝により示された軸対称近似固有モード作成方法を逆対称、非対称の場合に拡張した近似固有モード作成方法を展開した。非対称自由振動時の厳正解には、軸対称自由振動時には含まれない接線方向変位成分 u, v の回転による剛体変位相当項が存在し、その項は本来計算結果として求められる固有振動数の関数であるが、本論では、初めに適当な値を固有振動数として与え、計算結果として出てきた固有振動数を再び与えて計算する方法により解を得ることができることを示した。固有振動数、固有モードが厳正解のそれらと十分な精度で一致し、得られた近似固有モードの妥当性を確認した。半開角が 90 度であることを基準とした Legendre 陪多項式の節点分布の近似による係数 K_i^n の計算式は、多少の補正を必要とするものの、充分実用に耐えることがわかる。

以下の章では、本章で得られた近似固有モード式のうち、軸対称および逆対称固有モードを用いて球形シェルの幾何学的非線形運動方程式を定式化し、球形シェルの幾何学的非線形応答性状を調べる。

Appendix : 直交条件について

支配式

$$H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi) + \frac{ma^4}{gD} \ddot{w} = 0 \quad (1)$$

$$H_2 H_1(\psi) - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2 H_2(w) + Eha H_2(w) = 0 \quad (2)$$

たわみ w の仮定

$$w = \sum_{i=1}^N B_i^n \tilde{W}_i^n(\phi) \cos n\theta \cos \omega_i t \quad (3)$$

$$\tilde{W}_i^n(\phi) = \sum_{j=J_i^n}^{K_i^n} F_{ji}^n P_j^n(\cos \phi) \quad (4)$$

一般的な直交条件について

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (a)$$

のときの固有値、固有ベクトルを求めると

$$[k]\{u^r\} = \omega_r^2 [m]\{u^r\} \quad (b)$$

$$[k]\{u^s\} = \omega_s^2 [m]\{u^s\} \quad (c)$$

となる。(b)、(c)の両辺にそれぞれ左から $\{u^r\}^T$ 、 $\{u^s\}^T$ を掛けて差をとると、 $[m]$ が対称であることから、右辺は

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{u^s\}^T [m] \{u^r\} = 0 \quad (d)$$

であるから、(左辺) = 0 より、領域全般に渡って積分した次式が求められる。

$$\int_D \{u^s\}^T [k] \{u^r\} dD = \int_D \{u^r\}^T [k] \{u^s\} dD \quad (e)$$

(1)式に於ける直交条件について

(1)式を以下のように考える。

$$M(\ddot{w}) + K(w, \psi) = 0 \quad (5)$$

このとき、

$$M(\ddot{w}) = \frac{ma^4}{gD} \ddot{w} \quad (6)$$

$$K(w, \psi) = H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi) \quad (7)$$

である。また、 Ψ_p^n を以下の 2 つの式を満たすようにする。 (\tilde{W}_p^n) を求めてから(2)に代入し、 Ψ_p^n を求める。ここに、 $(\tilde{W}_p^n)_{,ii}$ は 0 になる)

表 1.1 近似解による固有振動数 (半径-板厚比 100)

$$H_2 H_2(\tilde{W}_\rho^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_\rho^n) + \frac{ma^4}{gD} (\tilde{W}_\rho^n)_{,ii} = 0 \quad (1')$$

$$H_2 H_1(\Psi_\rho^n) - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2 H_2(\tilde{W}_\rho^n) + Eha H_2(\tilde{W}_\rho^n) = 0 \quad (2')$$

ここで、(e)の形式をとるが、球形シェル微小要素を考えると、

$$dD = (r \sin \phi d\phi) \cdot r d\phi = r^2 \sin \phi d\phi d\theta$$

$$\theta = 0 \sim 2\pi, \quad \phi = 0 \sim \phi_0$$

となるから、

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_\rho^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_\rho^n)] \tilde{W}_i^n r^2 \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_i^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_i^n)] \tilde{W}_i^n r^2 \sin \phi d\phi d\theta \end{aligned} \quad (8)$$

θ で積分後、 $2\pi r^2$ で割ると、直交条件式が以下のように求められる。(ただし、 $p=1 \sim (n-1)$)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_\rho^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_\rho^n)] \tilde{W}_i^n \sin \phi d\phi \\ &= \int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_i^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_i^n)] \tilde{W}_i^n \sin \phi d\phi \end{aligned} \quad (9)$$

fixed end, a/h=100, rank=1															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.3864	2.8703	5.4167	8.9435											
30	1.0411	1.2116	1.6614	2.4137	3.4382	4.7118	6.2171	7.9739							
45	0.9903	1.0403	1.1579	1.3947	1.7672	2.2706	2.8936	3.6309	4.4758	5.4265	6.4805	7.6349			
60	0.9330	0.9961	1.0434	1.1338	1.2887	1.5185	1.8242	2.2025	2.6511	3.1647	3.7387	4.3751	5.0679	5.8068	6.6259
75	0.8370	0.9755	1.0073	1.0496	1.1216	1.2340	1.3938	1.6027	1.8608	2.1660	2.5154	2.9067	3.3392	3.8174	4.3245
90	0.7050	0.9571	0.9911	1.0168	1.0553	1.1157	1.2041	1.3245	1.4786	1.6670	1.8884	2.1439	2.4363	2.7505	3.2130
105	0.4924	0.9359	0.9794	1.0002	1.0239	1.0588	1.1101	1.1816	1.2762	1.3954	1.5403	1.7090	1.9030	2.1287	2.3850
120	0.3961	0.9162	0.9695	0.9902	1.0076	1.0302	1.0623	1.1076	1.1681	1.2470	1.3419	1.4583	1.5970	1.7491	1.9250
135	0.2676	0.8964	0.9596	0.9823	0.9974	1.0137	1.0354	1.0651	1.1053	1.1575	1.2209	1.3177	1.4131	1.5080	1.7543
simply support, a/h=100, rank=1															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.2106	2.3645	4.6439	7.8663											
30	1.0368	1.1436	1.5121	2.1902	3.1460	4.3538	5.7941	7.4690							
45	0.9901	1.0270	1.1173	1.3205	1.6582	2.1292	2.7237	3.4329	4.2562	5.1835	6.2030	7.3499			
60	0.9282	0.9902	1.0300	1.1063	1.2428	1.4525	1.7385	2.0984	2.5279	3.0231	3.5813	4.1995	4.8828	5.6380	6.4149
75	0.8258	0.9708	1.0016	1.0382	1.1012	1.2024	1.3493	1.5448	1.7890	2.0799	2.4155	2.7937	3.2130	3.6716	4.1719
90	0.6921	0.9524	0.9876	1.0112	1.0453	1.0992	1.1798	1.2914	1.4367	1.6162	1.8292	2.0759	2.3514	2.6637	2.9948
105	0.6131	0.9344	0.9770	0.9971	1.0186	1.0500	1.0964	1.1622	1.2502	1.3625	1.4998	1.6619	1.8486	2.0773	2.2995
120	0.3466	0.9098	0.9663	0.9875	1.0041	1.0248	1.0541	1.0956	1.1520	1.2260	1.3240	1.4255	1.5583	1.7149	1.8782
135	0.2217	0.8891	0.9547	0.9784	0.9933	1.0085	1.0280	1.0551	1.0929	1.1417	1.2056	1.2826	1.3766	1.4834	1.6101
fixed end, a/h=100, rank=2															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.8420	3.8666	6.9093												
30	1.0651	1.3653	1.9687	2.8591	4.0054	5.3876	7.0264								
45	0.9979	1.0759	1.2488	1.5523	1.9907	2.5549	3.2366	4.0293	4.9300	5.9315	7.0367				
60	0.9718	1.0146	1.0794	1.1995	1.3907	1.6612	2.0045	2.4182	2.9005	3.4469	4.0532	4.7182	5.4561	6.2409	7.0972
75	0.9456	0.9923	1.0256	1.0809	1.1717	1.3067	1.4900	1.7220	2.0071	2.3277	2.6940	3.1031	3.5542	4.0396	4.5738
90	0.9173	0.9787	1.0036	1.0343	1.0829	1.1566	1.2605	1.3987	1.5694	1.7744	2.0164	2.2853	2.6001	2.9462	3.3171
105	0.8956	0.9672	0.9913	1.0119	1.0406	1.0833	1.1445	1.2275	1.3344	1.4667	1.6241	1.8065	2.0139	2.2545	2.5205
120	0.8836	0.9576	0.9830	0.9998	1.0193	1.0464	1.0849	1.1381	1.2073	1.2958	1.4036	1.5419	1.6732	1.8638	2.0914
135	0.8741	0.9490	0.9759	0.9915	1.0063	1.0249	1.0503	1.0852	1.1315	1.1906	1.2642	1.3531	1.4587	1.5750	1.7228
simply support, a/h=100, rank=2															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.5281	3.2546	6.0153												
30	1.0325	1.2619	1.7865	2.6065	3.6899	5.0158	6.5722								
45	0.9896	1.0508	1.1940	1.4626	1.8673	2.4008	3.0533	3.8173	4.6877	5.6614	6.7370				
60	0.9658	1.0060	1.0598	1.1632	1.3347	1.5821	1.9052	2.3002	2.7648	3.2937	3.8892	4.5261	5.2569	6.0040	6.8168
75	0.9390	0.9877	1.0174	1.0653	1.1460	1.2691	1.4403	1.6607	1.9301	2.2450	2.6030	3.0042	3.4458	3.9180	4.4764
90	0.9094	0.9749	0.9992	1.0265	1.0696	1.1362	1.2319	1.3601	1.5224	1.7187	1.9481	2.2093	2.5010	2.8224	3.1778
105	0.9064	0.9668	0.9892	1.0081	1.0339	1.0730	1.1300	1.2109	1.3166	1.4483	1.6078	1.8053	1.9975	2.2608	2.5525
120	0.8468	0.9490	0.9791	0.9961	1.0141	1.0388	1.0743	1.1245	1.1924	1.2786	1.3873	1.5269	1.6609	1.8577	2.0796
135	0.8706	0.9430	0.9701	0.9864	1.0007	1.0180	1.0414	1.0742	1.1196	1.1780	1.2544	1.3476	1.4479	1.5660	1.7409
fixed end, a/h=100, rank=3															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	2.4703	5.0067	8.7740												
30	1.1470	1.5835	2.3291	3.3479	4.6140	6.1382	7.9208								
45	1.0246	1.1377	1.3692	1.7379	2.2391	2.8621	3.5988	4.4427	5.3993	6.4696	7.8169				
60	0.9962	1.0410	1.1282	1.2800	1.5073	1.8112	2.1885	2.6336	3.1447	3.7180	4.3582	5.0484	5.8016	6.6059	7.4768
75	0.9811	1.0094	1.0505	1.1213	1.2328	1.3914	1.5992	1.8562	2.1603	2.5102	2.9004	3.3311	3.8083	4.3005	4.9243
90	0.9686	0.9944	1.0192	1.0575	1.1175	1.2055	1.3254	1.4792	1.6679	1.8886	2.1429	2.4274	2.7455	3.0877	3.4750
105	0.9526	0.9828	1.0022	1.0260	1.0613	1.1129	1.1848	1.2797	1.3994	1.5442	1.7139	1.9088	2.1252	2.3778	2.6324
120	0.9465	0.9760	0.9932	1.0103	1.0332	1.0658	1.1115	1.1723	1.2508	1.3478	1.4642	1.6008	1.7618	1.9343	2.1475
135	0.9427	0.9709	0.9870	1.0009	1.0172	1.0393	1.0699	1.1110	1.1651	1.2423	1.3207	1.4063	1.5183	1.6845	1.8039
simply support, a/h=100, rank=3															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	2.0372	4.2967	7.5917												
30	1.0933	1.4478	2.1168	3.0691	4.2793	5.7346	7.4036								
45	1.0140	1.1019	1.2996	1.6332	2.1017	2.6948	3.4112	4.2423	5.1492	6.1744	7.2981				
60	0.9931	1.0291	1.1020	1.2358	1.4433	1.7279	2.0868	2.5157	3.0109	3.5688	4.1865	4.8677	5.6004	6.3939	7.2545
75	0.9795	1.0045	1.0392	1.1009	1.2011	1.3470	1.5418	1.7853	2.0759	2.4114	2.7896	3.2083	3.6690	4.1681	4.7323
90	0.9673	0.9917	1.0136	1.0472	1.1008	1.1810	1.2924	1.4375	1.6167	1.8298	2.0752	2.3526	2.6583	3.0086	3.3591
105	0.9562	0.9826	1.0000	1.0211	1.0526	1.0994	1.1657	1.2546	1.3679	1.5064	1.6699	1.8574	2.0702	2.3235	2.6134
120	0.9418	0.9726	0.9902	1.0064	1.0272	1.0569	1.0987	1.1552	1.2288	1.3203	1.4319	1.5649	1.7105	1.8962	2.1140
135	0.9423	0.9702	0.9861	0.9995	1.0149	1.0356	1.0639	1.1021	1.1522	1.2175	1.2973	1.3959	1.5024	1.7002	1.9061

表 1.2 近似解による固有振動数 (半径-板厚比 400)

fixed end, a/h=400, rank=1															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0575	1.2213	1.6700	2.4353											
30	1.0025	1.0306	1.0674	1.1468	1.2986	1.5286	1.8361	2.2131							
45	0.9838	0.9997	1.0116	1.0301	1.0647	1.1228	1.2094	1.3288	1.4819	1.6687	1.8897	2.1489			
60	0.9284	0.9833	0.9955	1.0045	1.0175	1.0378	1.0687	1.1128	1.1725	1.2502	1.3472	1.4637	1.5991	1.7604	1.9303
75	0.8221	0.9681	0.9883	0.9964	1.0035	1.0128	1.0263	1.0456	1.0722	1.1072	1.1520	1.2078	1.2762	1.3579	1.4500
90	0.6986	0.9515	0.9814	0.9914	0.9973	1.0032	1.0105	1.0205	1.0341	1.0522	1.0755	1.1049	1.1416	1.1849	1.2439
105	0.4768	0.9306	0.9733	0.9866	0.9931	0.9979	1.0028	1.0088	1.0166	1.0269	1.0402	1.0573	1.0782	1.1038	1.1359
120	0.3881	0.9122	0.9651	0.9818	0.9896	0.9944	0.9985	1.0027	1.0079	1.0144	1.0226	1.0331	1.0460	1.0628	1.0848
135	0.2596	0.8926	0.9557	0.9762	0.9857	0.9912	0.9952	0.9984	1.0020	1.0068	1.0124	1.0188	1.0258	1.0377	1.0508
simply support, a/h=400, rank=1															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0560	1.1553	1.5172	2.1941											
30	1.0003	1.0285	1.0624	1.1179	1.2494	1.4574	1.7433	2.1158							
45	0.9832	0.9994	1.0112	1.0249	1.0535	1.1048	1.1836	1.2939	1.4377	1.6165	1.8317	2.0838			
60	0.9266	0.9819	0.9942	1.0026	1.0140	1.0321	1.0598	1.1001	1.1554	1.2277	1.3183	1.4278	1.5572	1.7050	1.8960
75	0.8167	0.9660	0.9871	0.9954	1.0021	1.0106	1.0228	1.0405	1.0650	1.0978	1.1401	1.1931	1.2596	1.3343	1.4622
90	0.9381	0.9779	0.9899	0.9960	1.0019	1.0083	1.0176	1.0299	1.0472	1.0681	1.0951	1.1277	1.1561	1.2101	1.2738
105	0.6076	0.9319	0.9727	0.9859	0.9925	0.9973	1.0020	1.0076	1.0151	1.0253	1.0377	1.0603	1.0825	1.1087	1.1454
120	0.3528	0.9083	0.9634	0.9809	0.9889	0.9938	0.9979	1.0022	1.0071	1.0136	1.0217	1.0325	1.0461	1.0640	1.0837
135	0.2095	0.8835	0.9466	0.9692	0.9815	0.9886	0.9932	0.9971	1.0009	1.0049	1.0099	1.0163	1.0245	1.0346	1.0468
fixed end, a/h=400, rank=2															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0701	1.3675	1.9753												
30	0.9979	1.0243	1.0850	1.2029	1.3929	1.6592	2.0028								
45	0.9834	0.9990	1.0141	1.0411	1.0874	1.1590	1.2612	1.3968	1.5678	1.7701	2.0121				
60	0.9642	0.9900	0.9995	1.0099	1.0260	1.0511	1.0880	1.1394	1.2073	1.2932	1.3980	1.5285	1.6679	1.8270	2.0099
75	0.9387	0.9815	0.9929	0.9998	1.0078	1.0190	1.0352	1.0581	1.0888	1.1291	1.1800	1.2422	1.3164	1.4047	1.5056
90	0.9104	0.9720	0.9875	0.9946	1.0002	1.0066	1.0152	1.0270	1.0430	1.0635	1.0900	1.1224	1.1822	1.2284	1.2725
105	0.8904	0.9622	0.9820	0.9905	0.9957	1.0004	1.0057	1.0125	1.0214	1.0330	1.0481	1.0675	1.0929	1.1192	1.1554
120	0.8807	0.9539	0.9768	0.9868	0.9924	0.9966	1.0006	1.0052	1.0109	1.0180	1.0272	1.0383	1.0539	1.0712	1.0993
135	0.8729	0.9467	0.9718	0.9832	0.9895	0.9937	0.9973	1.0009	1.0049	1.0098	1.0162	1.0233	1.0323	1.0478	1.0731
simply support, a/h=400, rank=2															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0378	1.2640	1.7894												
30	0.9954	1.0159	1.0651	1.1664	1.3368	1.5839	1.9066								
45	0.9817	0.9971	1.0100	1.0330	1.0736	1.1383	1.2323	1.3590	1.5201	1.7171	1.9457				
60	0.9619	0.9886	0.9980	1.0074	1.0216	1.0441	1.0777	1.1251	1.1887	1.2700	1.3702	1.4895	1.6275	1.7848	1.9812
75	0.9354	0.9799	0.9918	0.9986	1.0059	1.0161	1.0309	1.0517	1.0802	1.1176	1.1652	1.2239	1.3021	1.3820	1.4991
90	0.9108	0.9707	0.9866	0.9938	0.9992	1.0052	1.0131	1.0239	1.0385	1.0578	1.0825	1.1145	1.1525	1.2000	1.2543
105	0.9059	0.9645	0.9822	0.9902	0.9953	0.9998	1.0049	1.0115	1.0205	1.0314	1.0462	1.0647	1.0889	1.1180	1.1516
120	0.8407	0.9456	0.9741	0.9855	0.9915	0.9959	0.9999	1.0043	1.0100	1.0172	1.0265	1.0391	1.0537	1.0767	1.0950
135	0.8675	0.9272	0.9562	0.9755	0.9853	0.9910	0.9951	0.9988	1.0025	1.0068	1.0135	1.0221	1.0318	1.0446	1.0612
fixed end, a/h=400, rank=3															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.1477	1.5822	2.3980												
30	1.0073	1.0452	1.1295	1.2797	1.5064	1.8149	2.2897								
45	0.9947	1.0065	1.0256	1.0605	1.1179	1.2036	1.3215	1.4733	1.6595	1.8902	2.2322				
60	0.9864	0.9968	1.0053	1.0178	1.0377	1.0680	1.1115	1.1706	1.2471	1.3422	1.4574	1.5905	1.7437	1.9162	2.1039
75	0.9767	0.9907	0.9976	1.0044	1.0136	1.0270	1.0468	1.0728	1.1078	1.1529	1.2080	1.2774	1.3575	1.4522	1.5535
90	0.9660	0.9849	0.9928	0.9982	1.0039	1.0112	1.0212	1.0347	1.0528	1.0764	1.1062	1.1439	1.1860	1.2511	1.3061
105	0.9490	0.9764	0.9875	0.9936	0.9982	1.0031	1.0092	1.0170	1.0272	1.0405	1.0572	1.0781	1.1035	1.1342	1.1758
120	0.9446	0.9718	0.9839	0.9905	0.9950	0.9989	1.0032	1.0084	1.0149	1.0232	1.0336	1.0468	1.0628	1.0823	1.1041
135	0.9418	0.9681	0.9808	0.9878	0.9925	0.9961	0.9995	1.0033	1.0078	1.0133	1.0203	1.0283	1.0393	1.0532	1.0768
simply support, a/h=400, rank=3															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0933	1.4463	2.1385												
30	1.0043	1.0331	1.1031	1.2351	1.4417	1.7259	2.0863								
45	0.9946	1.0046	1.0201	1.0500	1.1011	1.1792	1.2887	1.4320	1.6104	1.8327	2.0855				
60	0.9863	0.9965	1.0039	1.0145	1.0320	1.0593	1.0991	1.1540	1.2260	1.3162	1.4256	1.5558	1.7068	1.8770	2.0698
75	0.9766	0.9905	0.9970	1.0031	1.0113	1.0233	1.0408	1.0651	1.0977	1.1399	1.1929	1.2575	1.3341	1.4233	1.5381
90	0.9844	0.9917	0.9974	1.0027	1.0093	1.0185	1.0310	1.0474	1.0696	1.0974	1.1312	1.1735	1.2223	1.2805	1.3467
105	0.9552	0.9785	0.9880	0.9935	0.9979	1.0025	1.0083	1.0158	1.0256	1.0385	1.0546	1.0745	1.0970	1.1253	1.1759
120	0.9405	0.9694	0.9826	0.9896	0.9942	0.9982	1.0023	1.0074	1.0138	1.0221	1.0330	1.0467	1.0634	1.0857	1.1107
135	0.9418	0.9683	0.9811	0.9882	0.9928	0.9964	1.0001	1.0038	1.0083	1.0135	1.0204	1.0293	1.0404	1.0552	1.0853

表 1.3 近似解による固有振動数 (半径-板厚比 500)

fixed end, a/h=500, rank=1															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0463	1.1550	1.4694	2.0545											
30	0.9998	1.0217	1.0521	1.1000	1.2004	1.3607	1.5820	1.8826							
45	0.9835	0.9981	1.0076	1.0202	1.0423	1.0803	1.1385	1.2202	1.3285	1.4646	1.6281	1.8180			
60	0.9281	0.9829	0.9943	1.0013	1.0101	1.0236	1.0439	1.0732	1.1135	1.1662	1.2320	1.3185	1.4184	1.5511	1.6746
75	0.8258	0.9678	0.9878	0.9952	1.0006	1.0071	1.0161	1.0288	1.0464	1.0700	1.1003	1.1382	1.1848	1.2398	1.3040
90	0.6995	0.9512	0.9811	0.9908	0.9960	1.0004	1.0055	1.0122	1.0212	1.0332	1.0486	1.0685	1.0933	1.1217	1.1731
105	0.4765	0.9303	0.9730	0.9862	0.9924	0.9965	1.0002	1.0044	1.0098	1.0164	1.0252	1.0364	1.0505	1.0678	1.0888
120	0.3856	0.9116	0.9647	0.9814	0.9890	0.9935	0.9969	1.0001	1.0037	1.0080	1.0135	1.0203	1.0290	1.0400	1.0533
135	0.2558	0.8908	0.9534	0.9737	0.9835	0.9892	0.9933	0.9963	0.9992	1.0026	1.0062	1.0107	1.0163	1.0233	1.0325
simply support, a/h=500, rank=1															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0459	1.1158	1.3568	1.8564											
30	0.9980	1.0186	1.0521	1.0835	1.1671	1.3118	1.5181	1.7869							
45	0.9828	0.9978	1.0076	1.0181	1.0352	1.0684	1.1210	1.1963	1.2972	1.4253	1.5807	1.7664			
60	0.9265	0.9816	0.9933	1.0000	1.0079	1.0199	1.0381	1.0647	1.1016	1.1506	1.2131	1.2901	1.3822	1.4897	1.6125
75	0.8165	0.9658	0.9867	0.9943	0.9996	1.0056	1.0138	1.0254	1.0415	1.0631	1.0913	1.1270	1.1735	1.2238	1.3332
90	0.9392	0.9780	0.9896	0.9951	0.9995	1.0042	1.0105	1.0188	1.0298	1.					

表 1.4 近似解による固有振動数 (半径-板厚比 1000)

fixed end, a/h=1000, rank=1															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0194	1.0665	1.1468	1.3387											
30	0.9960	1.0051	1.0216	1.0425	1.0662	1.1100	1.1802	1.2904							
45	0.9826	0.9956	1.0005	1.0061	1.0132	1.0223	1.0370	1.0596	1.0916	1.1337	1.1888	1.2571			
60	0.9281	0.9821	0.9927	0.9971	1.0004	1.0044	1.0100	1.0180	1.0290	1.0436	1.0629	1.0874	1.1175	1.1537	1.1975
75	0.8192	0.9665	0.9867	0.9933	0.9967	0.9994	1.0022	1.0058	1.0105	1.0168	1.0249	1.0352	1.0485	1.0646	1.0853
90	0.6846	0.9499	0.9803	0.9897	0.9941	0.9967	0.9989	1.0012	1.0038	1.0071	1.0113	1.0165	1.0235	1.0319	1.0412
105	0.4713	0.9294	0.9724	0.9854	0.9912	0.9944	0.9966	0.9985	1.0004	1.0025	1.0050	1.0080	1.0119	1.0168	1.0218
120	0.3882	0.9116	0.9645	0.9810	0.9884	0.9923	0.9948	0.9967	0.9983	0.9999	1.0017	1.0037	1.0062	1.0092	1.0130
135	0.2563	0.8249	0.9060	0.9598	0.9782	0.9865	0.9910	0.9938	0.9958	0.9979	0.9985	1.0010	1.0022	1.0047	1.0079
simply support, a/h=1000, rank=1															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0152	1.0664	1.1181	1.2739											
30	0.9949	1.0032	1.0159	1.0387	1.0640	1.0911	1.1530	1.2756							
45	0.9821	0.9952	1.0001	1.0056	1.0129	1.0203	1.0323	1.0527	1.0820	1.1214	1.1724	1.2355			
60	0.9222	0.9807	0.9920	0.9965	0.9997	1.0034	1.0085	1.0156	1.0256	1.0391	1.0568	1.0796	1.1076	1.1420	1.1832
75	0.8157	0.9652	0.9860	0.9929	0.9963	0.9989	1.0017	1.0050	1.0094	1.0152	1.0228	1.0325	1.0448	1.0600	1.0790
90	0.7491	0.9487	0.9795	0.9892	0.9937	0.9964	0.9986	1.0007	1.0032	1.0063	1.0102	1.0151	1.0213	1.0341	1.0411
105	0.6060	0.9312	0.9720	0.9850	0.9909	0.9942	0.9964	0.9982	1.0000	1.0020	1.0043	1.0085	1.0118	1.0197	1.0225
120	0.3553	0.9078	0.9629	0.9802	0.9878	0.9919	0.9945	0.9964	0.9980	0.9995	1.0013	1.0036	1.0055	1.0079	1.0112
135	0.2168	0.8844	0.9449	0.9666	0.9797	0.9870	0.9911	0.9938	0.9958	0.9973	0.9988	1.0009	1.0018	1.0055	1.0079
fixed end, a/h=1000, rank=2															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0103	1.0669	1.2095												
30	0.9939	1.0017	1.0129	1.0344	1.0720	1.1314	1.2191								
45	0.9819	0.9946	0.9995	1.0049	1.0133	1.0264	1.0457	1.0732	1.1109	1.1591	1.2198				
60	0.9628	0.9881	0.9949	0.9986	1.0021	1.0068	1.0134	1.0227	1.0353	1.0520	1.0736	1.1006	1.1335	1.1740	1.2294
75	0.9367	0.9801	0.9908	0.9952	0.9981	1.0008	1.0039	1.0080	1.0135	1.0207	1.0300	1.0419	1.0567	1.0741	1.0979
90	0.9110	0.9716	0.9865	0.9925	0.9957	0.9980	1.0003	1.0028	1.0057	1.0098	1.0147	1.0212	1.0294	1.0416	1.0655
105	0.8902	0.9616	0.9812	0.9891	0.9932	0.9957	0.9977	0.9995	1.0014	1.0037	1.0065	1.0099	1.0143	1.0204	1.0284
120	0.8808	0.9537	0.9763	0.9859	0.9909	0.9938	0.9959	0.9976	0.9992	1.0008	1.0027	1.0049	1.0075	1.0108	1.0150
135	0.8726	0.9459	0.9707	0.9819	0.9879	0.9916	0.9940	0.9959	0.9974	0.9988	1.0001	1.0016	1.0035	1.0057	1.0079
simply support, a/h=1000, rank=2															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0049	1.0463	1.1628												
30	0.9933	1.0004	1.0095	1.0277	1.0606	1.1139	1.1924								
45	0.9811	0.9939	0.9988	1.0036	1.0109	1.0225	1.0400	1.0651	1.0994	1.1448	1.2026				
60	0.9613	0.9873	0.9944	0.9980	1.0014	1.0056	1.0117	1.0201	1.0317	1.0472	1.0673	1.0927	1.1241	1.1776	1.2067
75	0.9344	0.9791	0.9902	0.9948	0.9977	1.0003	1.0032	1.0072	1.0121	1.0189	1.0274	1.0384	1.0521	1.0689	1.0904
90	0.9620	0.9838	0.9913	0.9949	0.9973	0.9995	1.0018	1.0045	1.0080	1.0125	1.0176	1.0247	1.0325	1.0425	1.0497
105	0.9058	0.9642	0.9816	0.9891	0.9930	0.9955	0.9975	0.9993	1.0011	1.0033	1.0060	1.0093	1.0134	1.0185	1.0244
120	0.8400	0.9451	0.9736	0.9847	0.9902	0.9934	0.9956	0.9973	0.9988	1.0004	1.0023	1.0044	1.0069	1.0105	1.0143
135	0.8644	0.9122	0.9524	0.9740	0.9841	0.9894	0.9927	0.9949	0.9966	0.9981	0.9995	1.0011	1.0032	1.0060	1.0095
fixed end, a/h=1000, rank=3															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0246	1.1137	1.3251												
30	0.9988	1.0066	1.0215	1.0496	1.0966	1.1678	1.2819								
45	0.9929	0.9985	1.0030	1.0093	1.0196	1.0352	1.0580	1.0903	1.1320	1.1868	1.2605				
60	0.9858	0.9943	0.9980	1.0011	1.0049	1.0103	1.0180	1.0287	1.0431	1.0618	1.0857	1.1153	1.1511	1.1938	1.2716
75	0.9765	0.9897	0.9946	0.9974	0.9999	1.0027	1.0063	1.0110	1.0172	1.0255	1.0357	1.0486	1.0677	1.0868	1.1177
90	0.9658	0.9843	0.9913	0.9950	0.9972	0.9993	1.0015	1.0041	1.0074	1.0115	1.0168	1.0233	1.0314	1.0425	1.0530
105	0.9484	0.9756	0.9864	0.9916	0.9947	0.9968	0.9986	1.0005	1.0026	1.0050	1.0080	1.0118	1.0165	1.0220	1.0289
120	0.9441	0.9711	0.9830	0.9891	0.9927	0.9951	0.9969	0.9984	1.0000	1.0019	1.0036	1.0061	1.0091	1.0132	1.0168
135	0.9417	0.9680	0.9804	0.9871	0.9911	0.9938	0.9956	0.9972	0.9986	1.0000	1.0015	1.0031	1.0051	1.0075	1.0117
simply support, a/h=1000, rank=3															
h.o.a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1.0153	1.0837	1.2547												
30	0.9987	1.0050	1.0170	1.0410	1.0827	1.1473	1.2401								
45	0.9929	0.9985	1.0026	1.0078	1.0165	1.0304	1.0513	1.0805	1.1199	1.1705	1.2337				
60	0.9858	0.9943	0.9979	1.0008	1.0042	1.0089	1.0159	1.0257	1.0390	1.0566	1.0795	1.1073	1.1493	1.1881	1.2459
75	0.9765	0.9896	0.9945	0.9973	0.9996	1.0021	1.0054	1.0097	1.0155	1.0230	1.0327	1.0449	1.0599	1.0810	1.1052
90	0.9840	0.9903	0.9945	0.9969	0.9985	1.0010	1.0033	1.0061	1.0086	1.0114	1.0206	1.0283	1.0373	1.0460	1.0609
105	0.9551	0.9782	0.9873	0.9919	0.9947	0.9967	0.9985	1.0002	1.0022	1.0046	1.0074	1.0110	1.0159	1.0208	1.0265
120	0.9395	0.9685	0.9818	0.9884	0.9922	0.9947	0.9965	0.9981	0.9996	1.0013	1.0032	1.0055	1.0086	1.0124	1.0165
135	0.9417	0.9681	0.9806	0.9873	0.9913	0.9939	0.9958	0.9973	0.9988	1.0003	1.0020	1.0041	1.0066	1.0093	1.0209

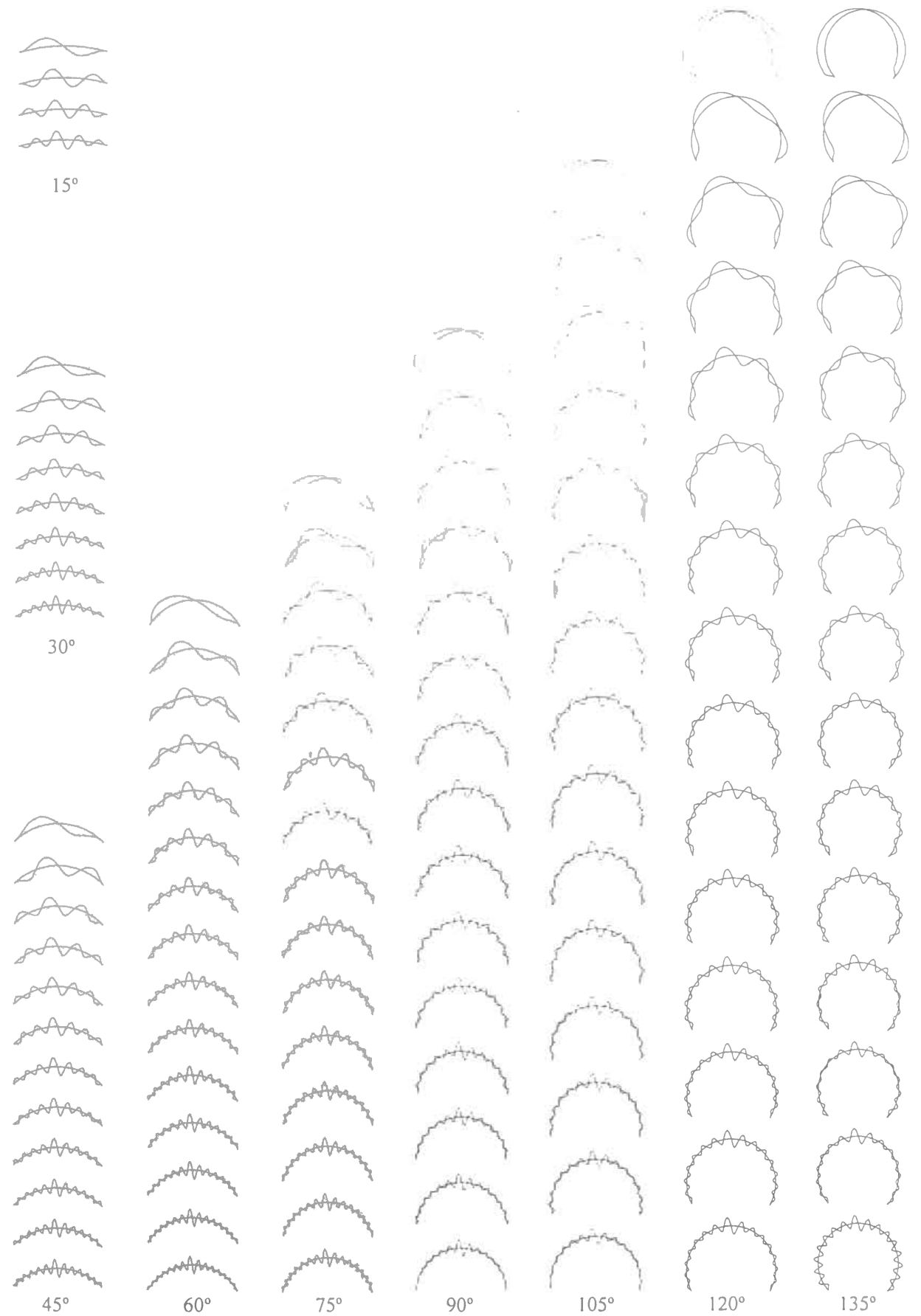


図 1.1.1 逆対称近似固有モード図 (fixed end, a/h=100)

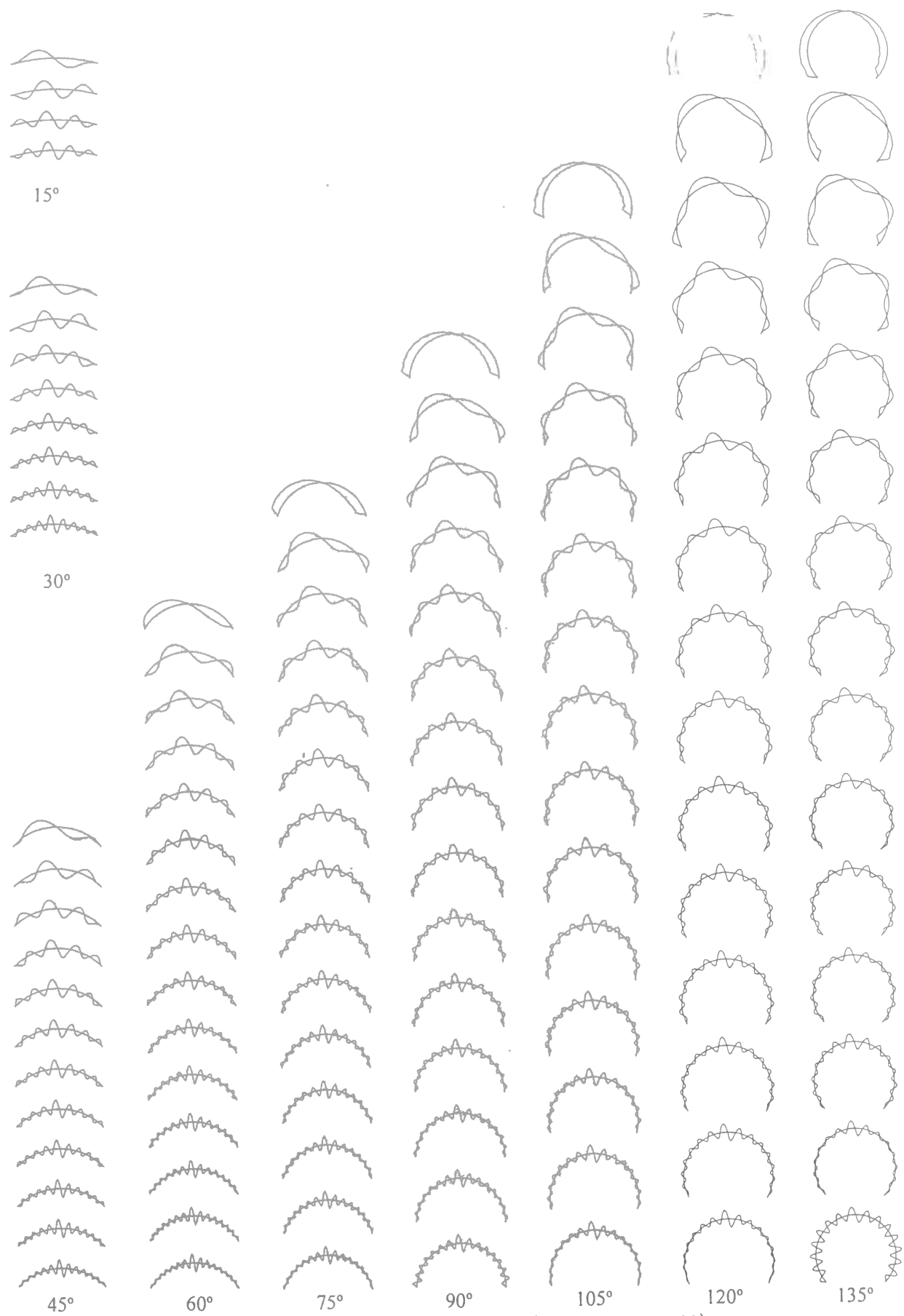


图 1.1.2 逆对称近似固有モード図 (fixed end, $a/h=400$)

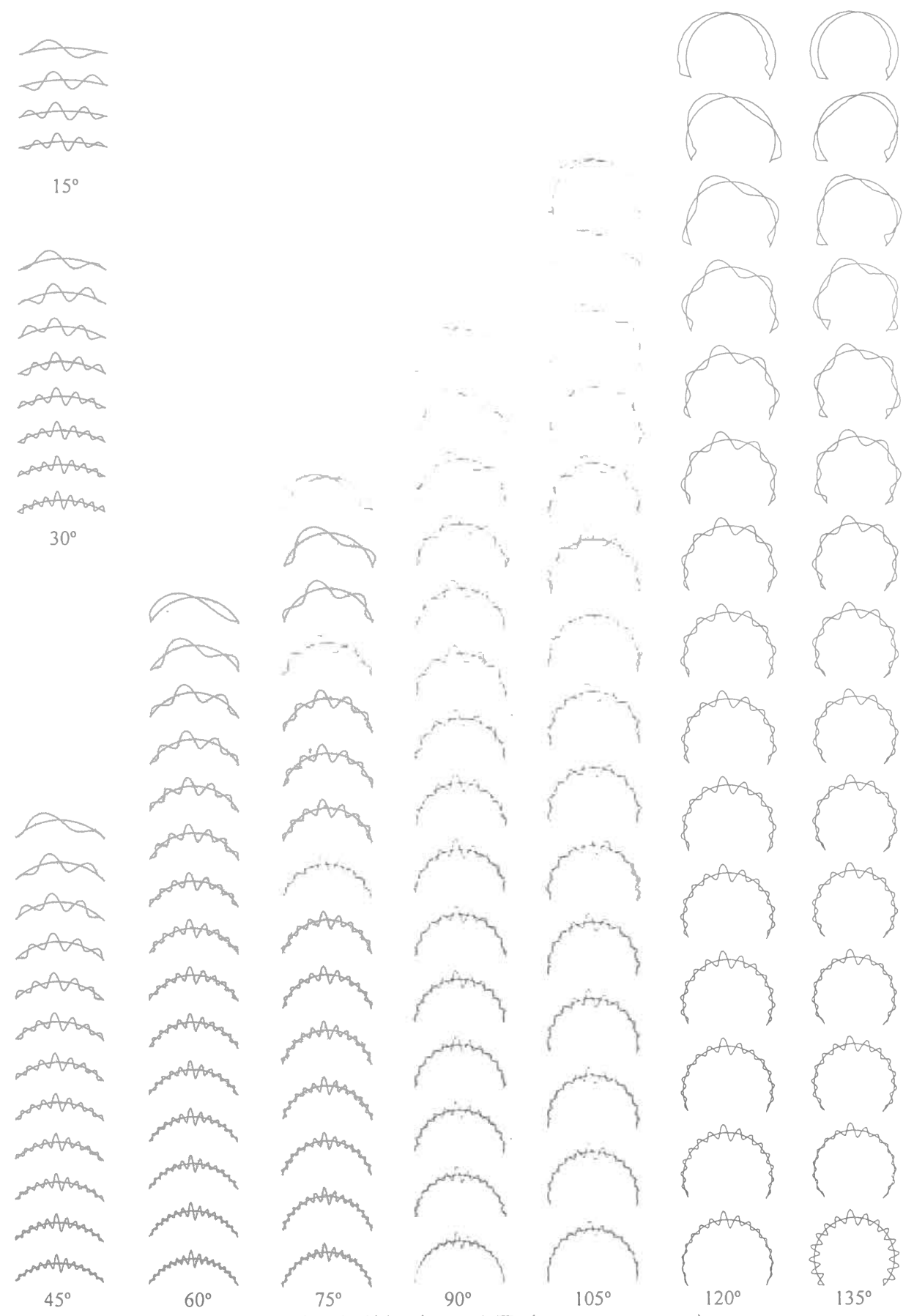


图 1.1.3 逆对称近似固有モード図 (fixed end, $a/h=500$)

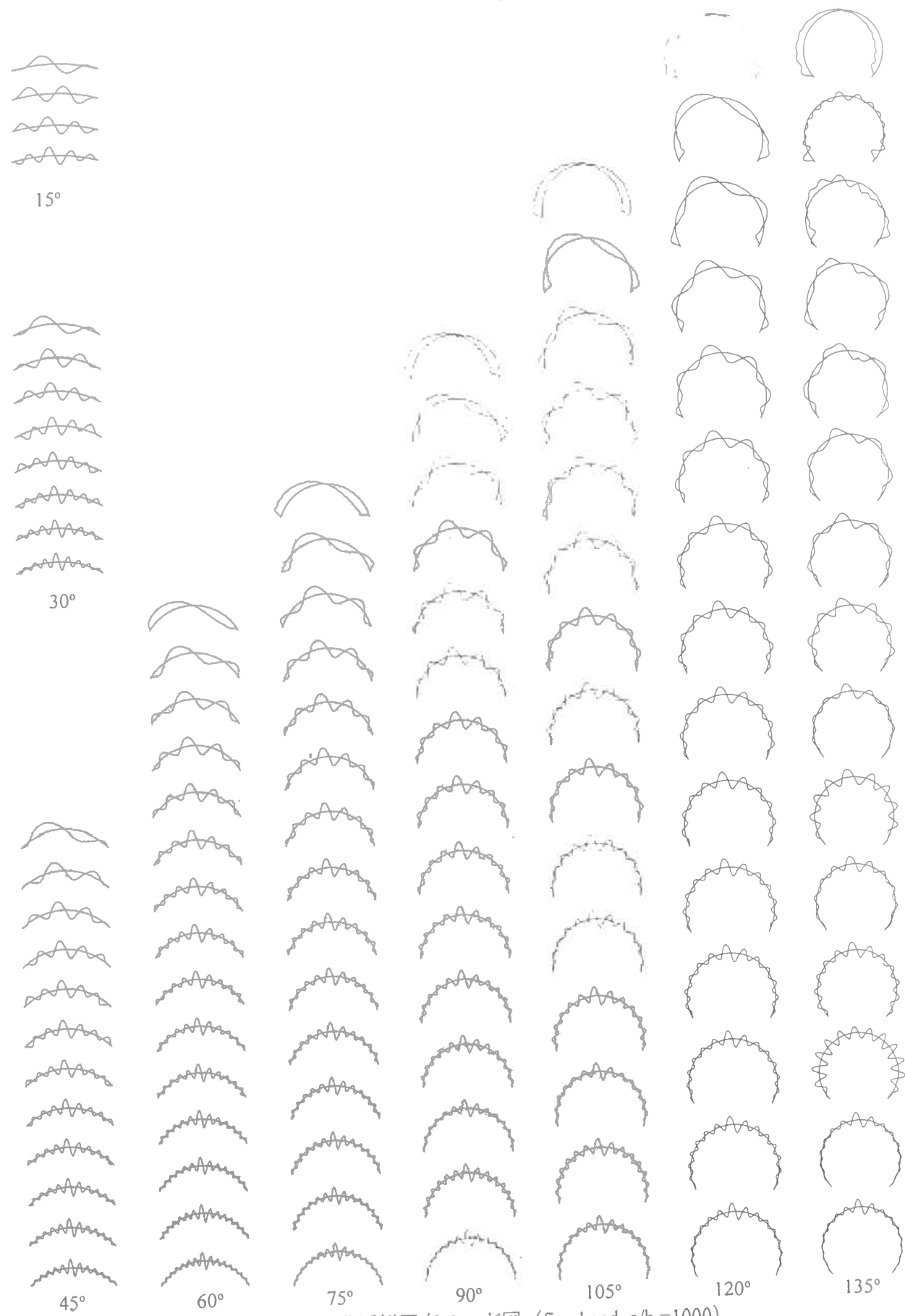


図 1.1.4 逆対称近似固有モード図 (fixed end, $a/h=1000$)

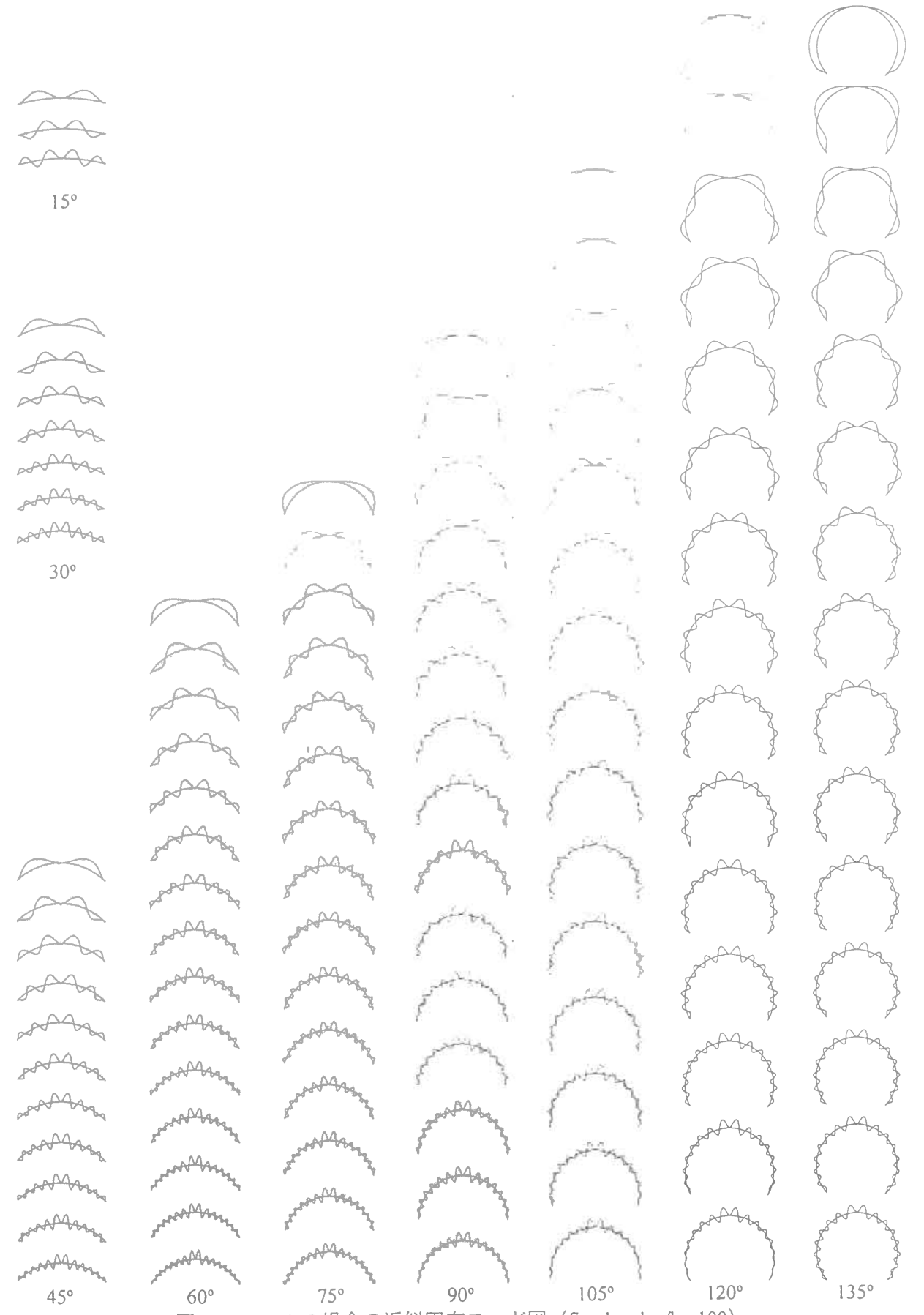


図 1.2.1 $n=2$ の場合の近似固有モード図 (fixed end, $a/h=100$)

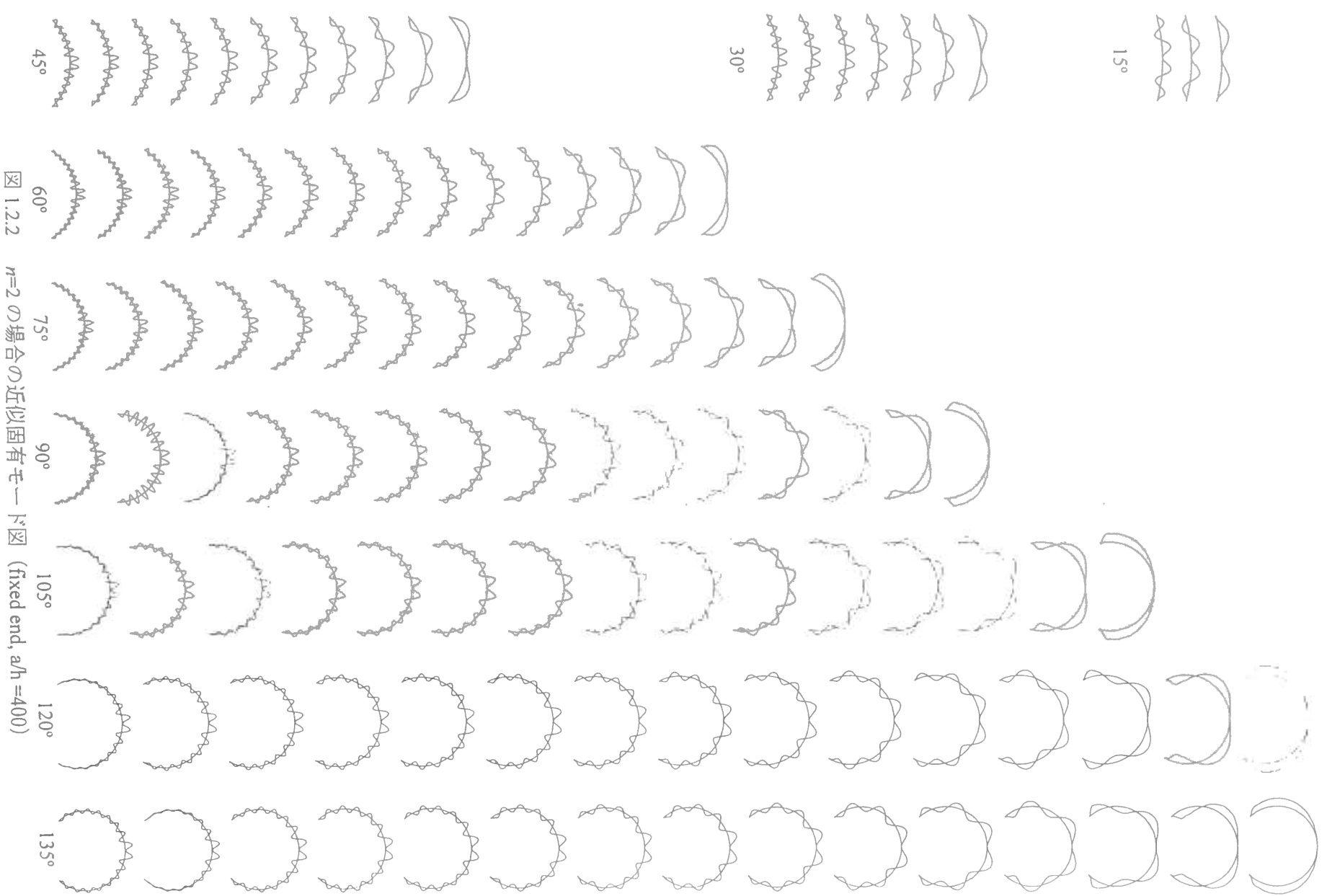


図 1.2.2 $n=2$ の場合の近似固有モード図 (fixed end, $a/h=400$)

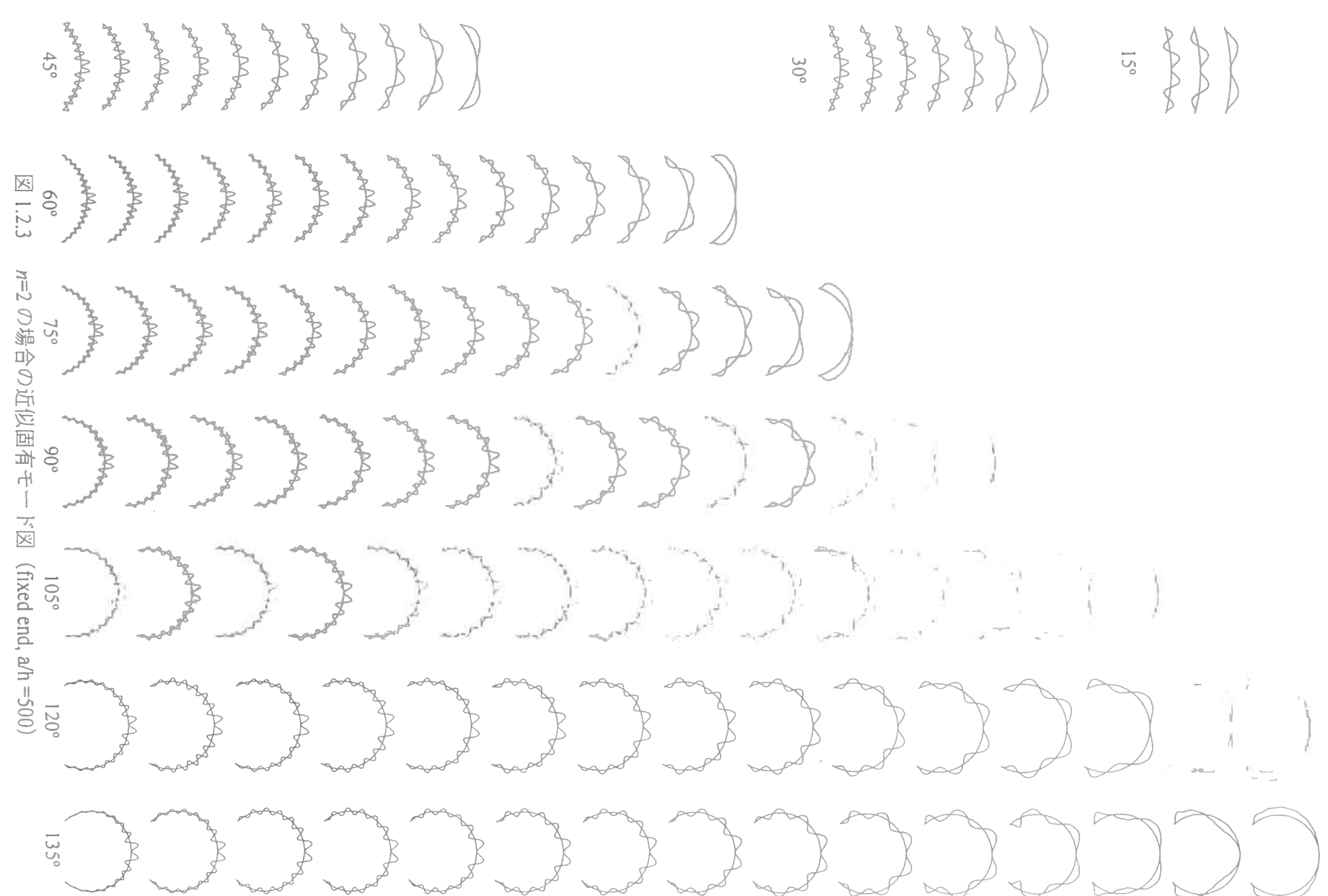


図 1.2.3 $n=2$ の場合の近似固有モード図 (fixed end, $a/h=500$)

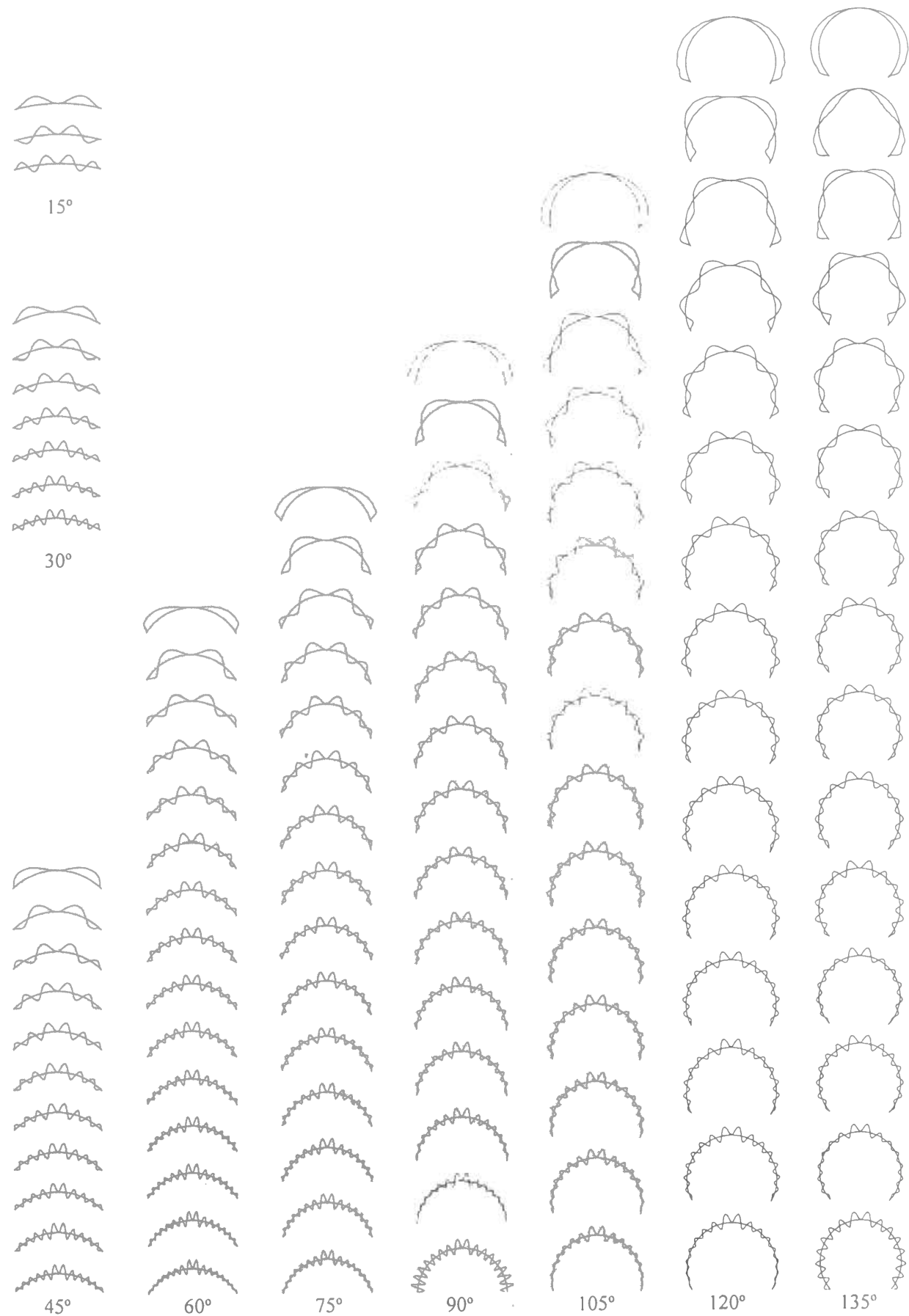


図 1.2.4 $n=2$ の場合の近似固有モード図 (fixed end, $a/h=1000$)

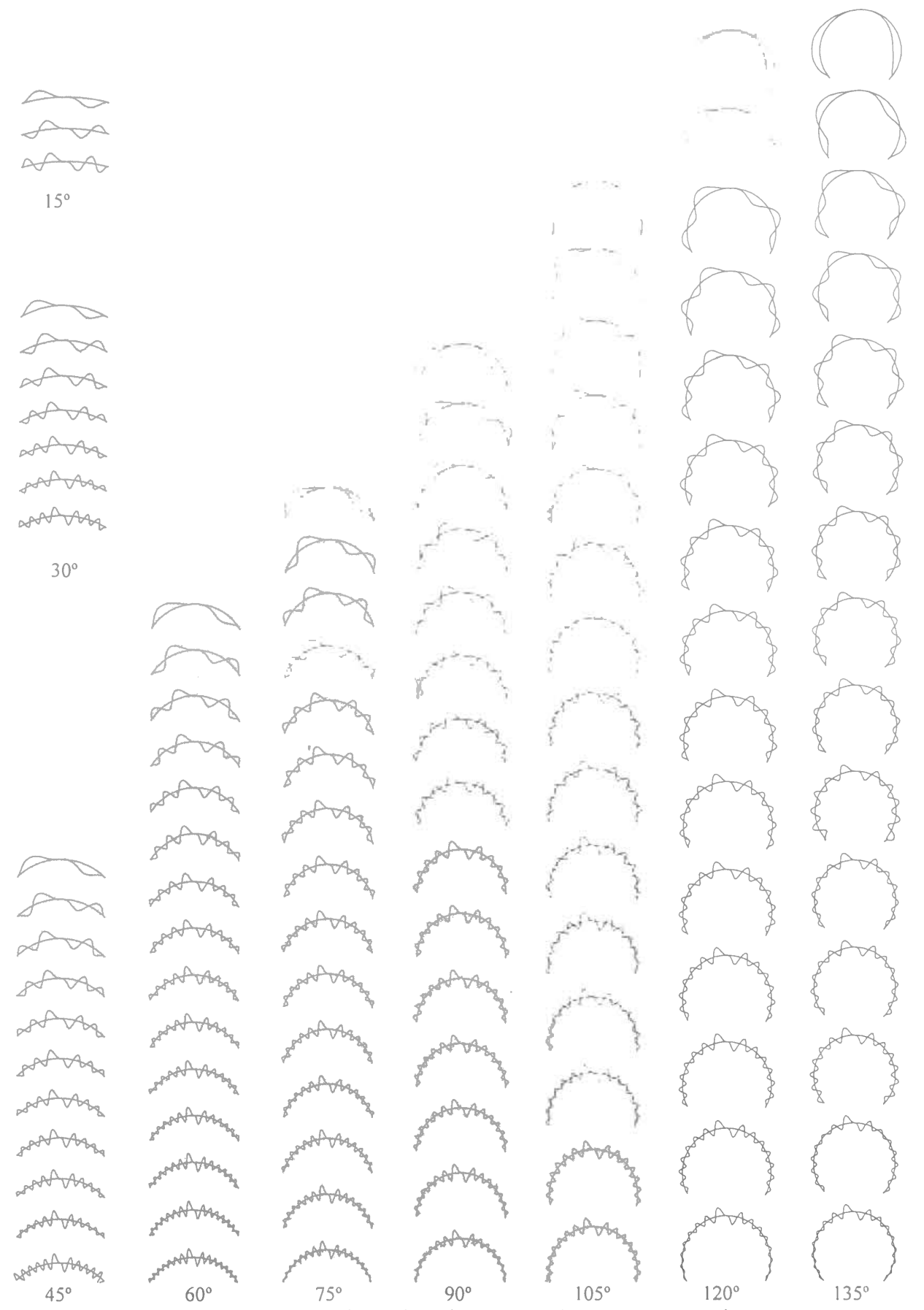


図 1.3.1 $n=3$ の場合の近似固有モード図 (fixed end, $a/h=100$)

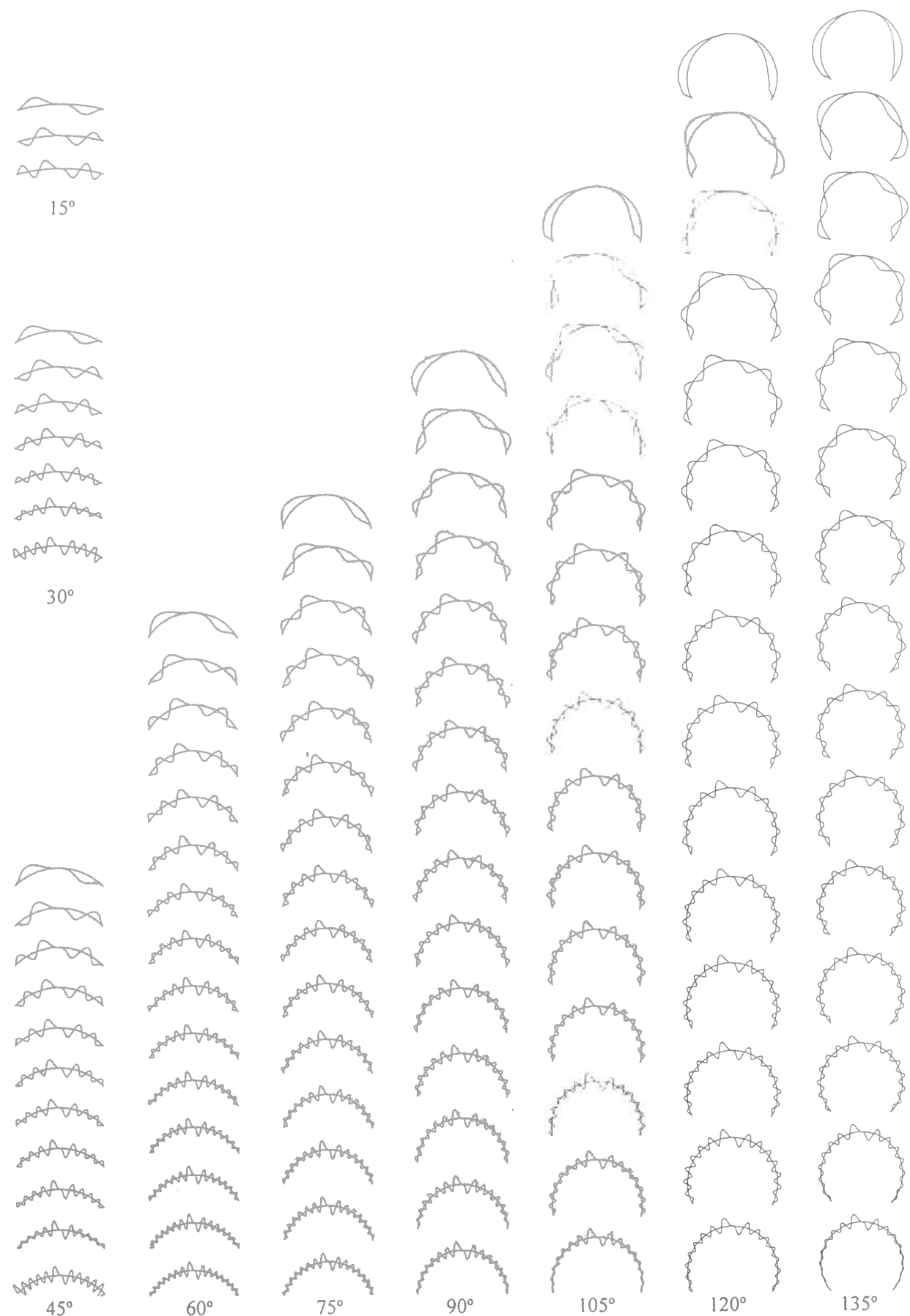


図 1.3.2 $n=3$ の場合の近似固有モード図 (fixed end, $a/h=400$)

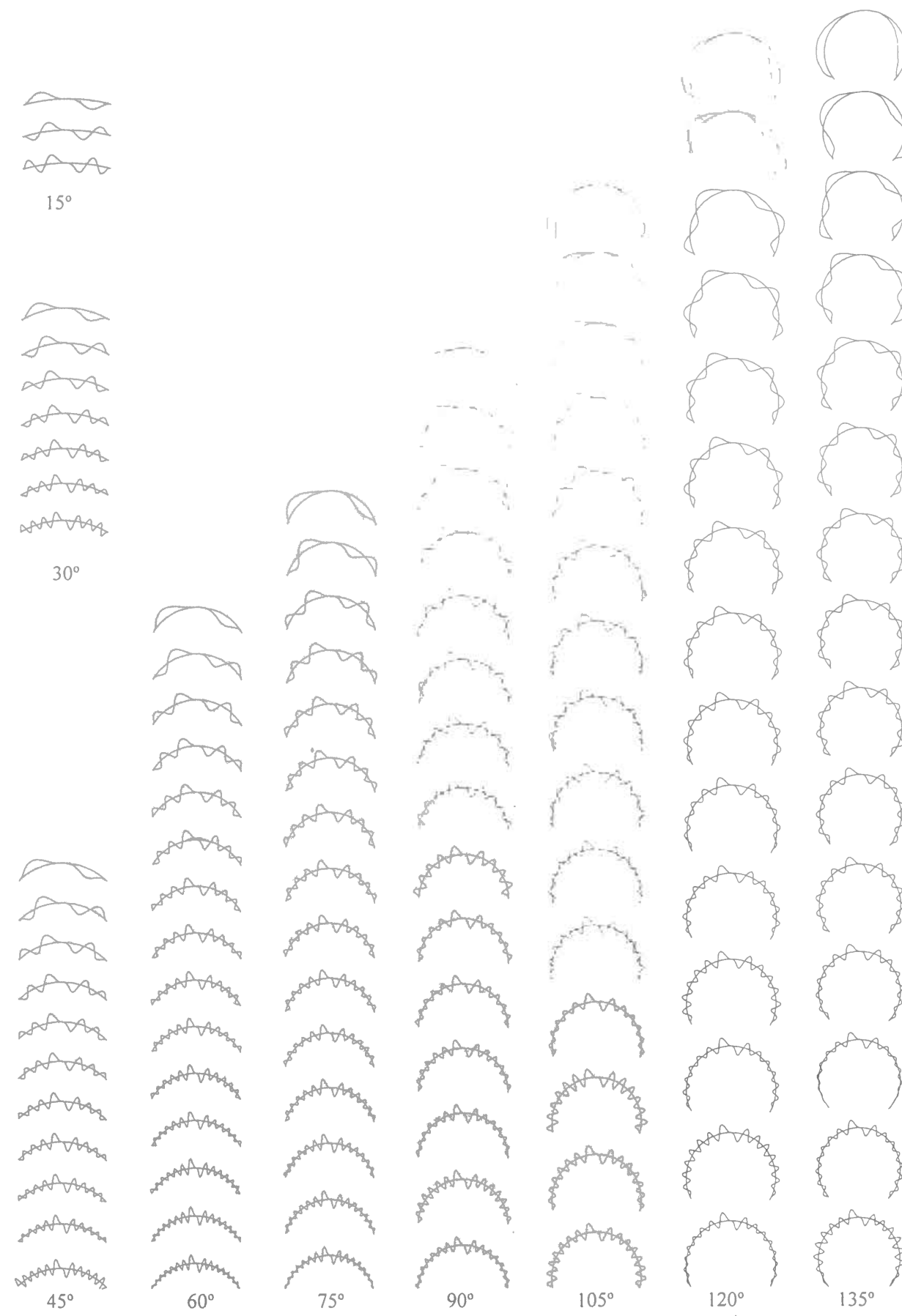


図 1.3.3 $n=3$ の場合の近似固有モード図 (fixed end, $a/h=500$)

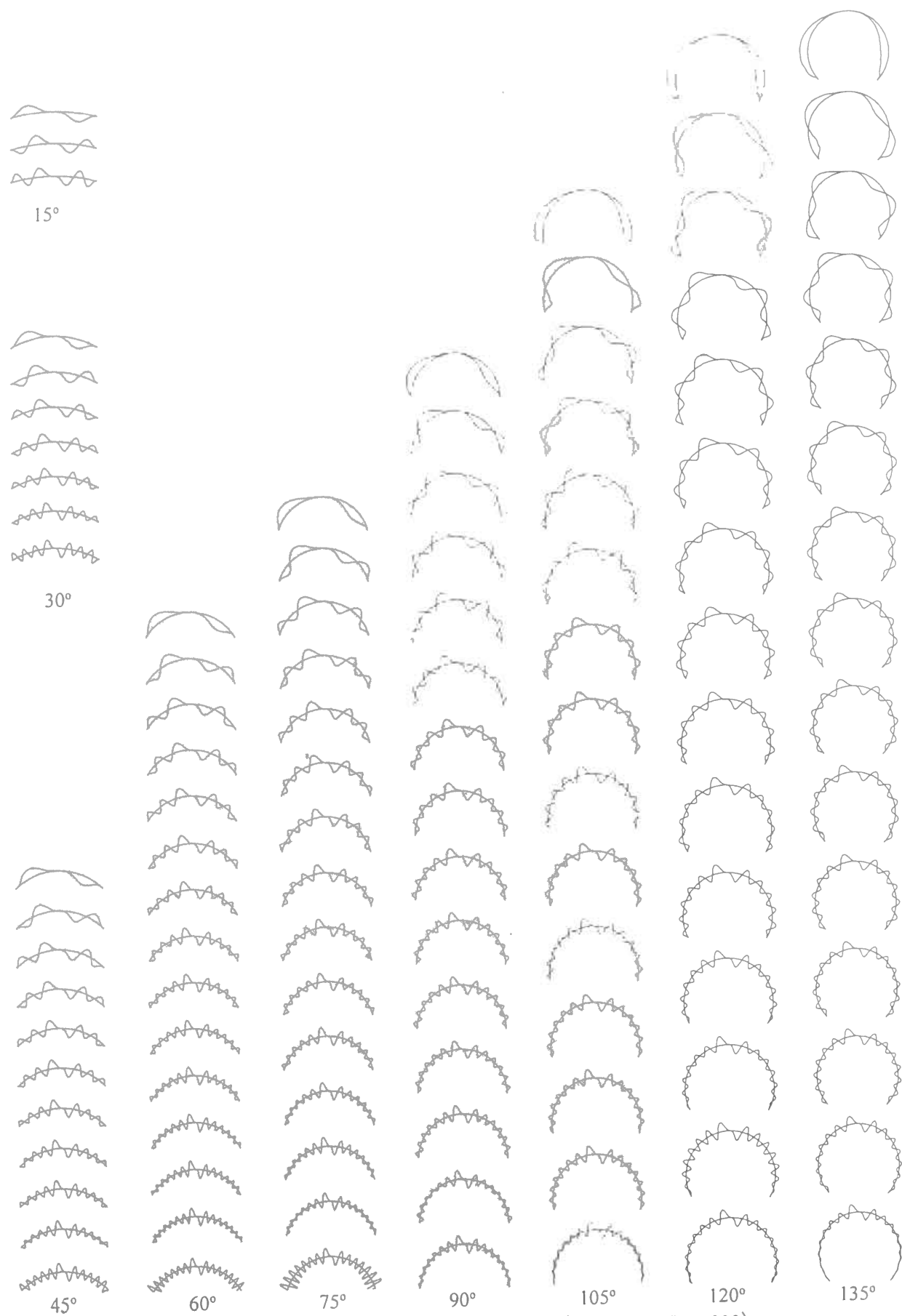


図 1.3.4 $n=3$ の場合の近似固有モード図 (fixed end, $a/h=1000$)

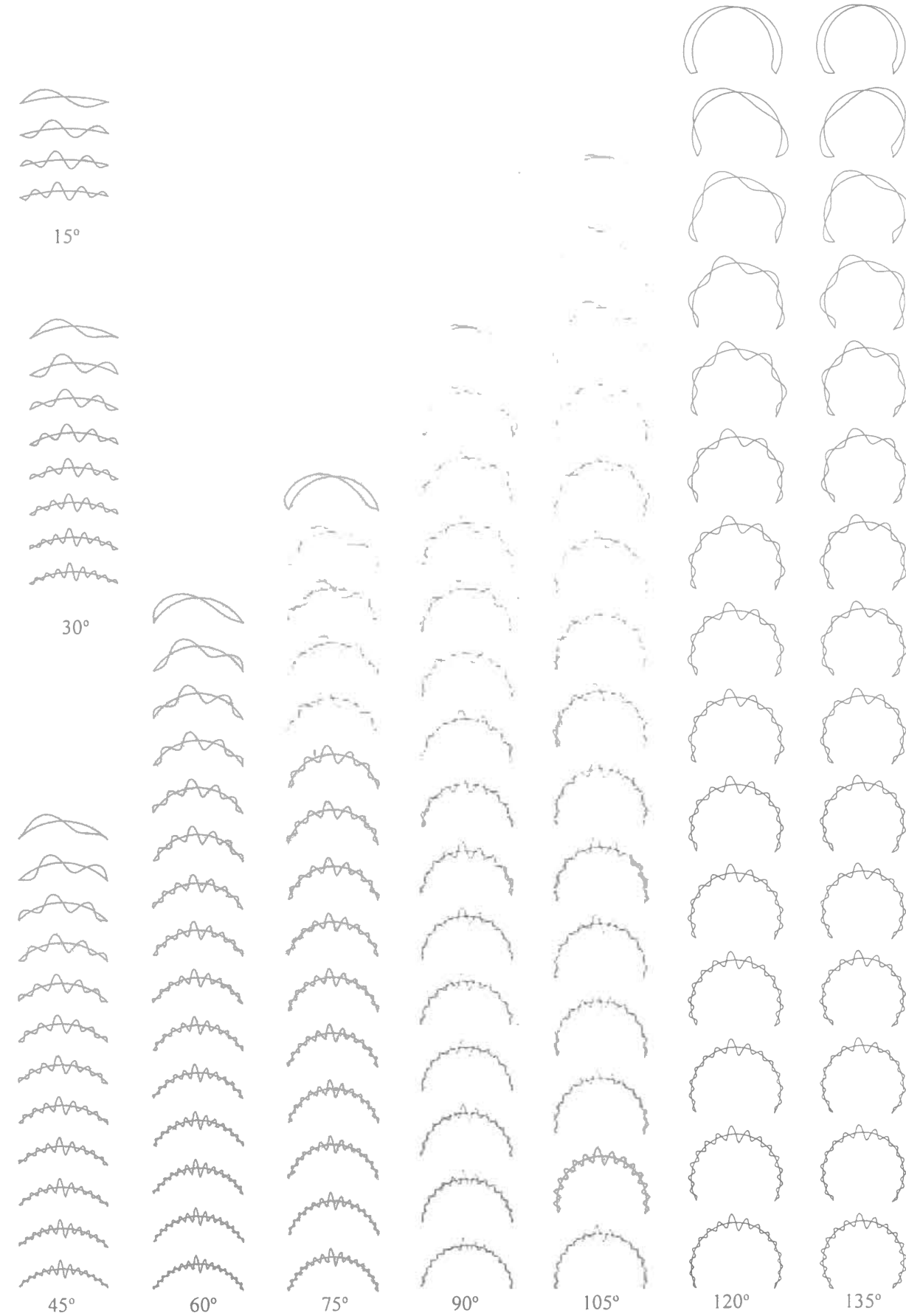


図 2.1.1 逆対称近似固有モード図 (simply support, $a/h=100$)

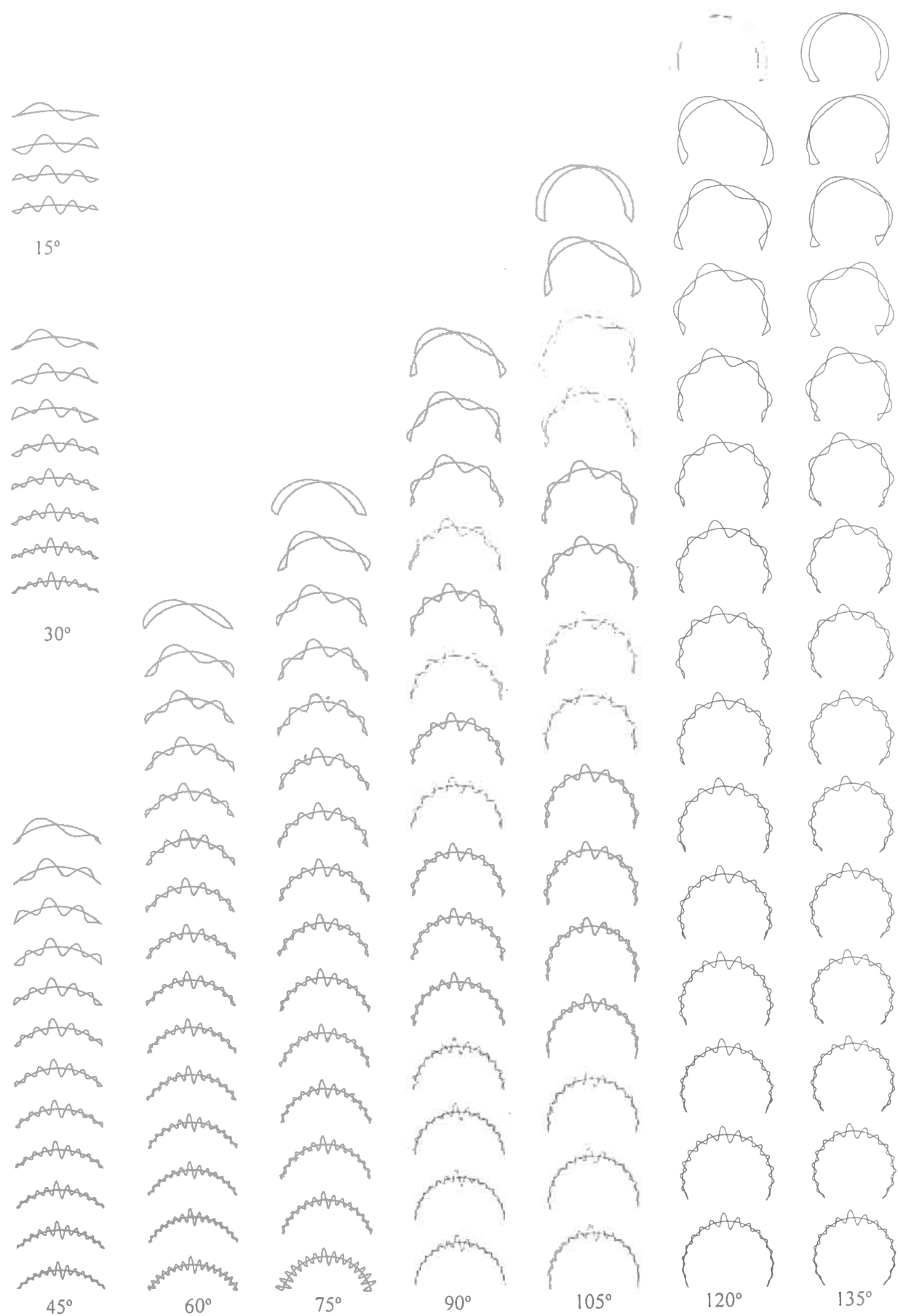


図 2.1.2 逆対称近似固有モード図 (simply support, $a/h=400$)

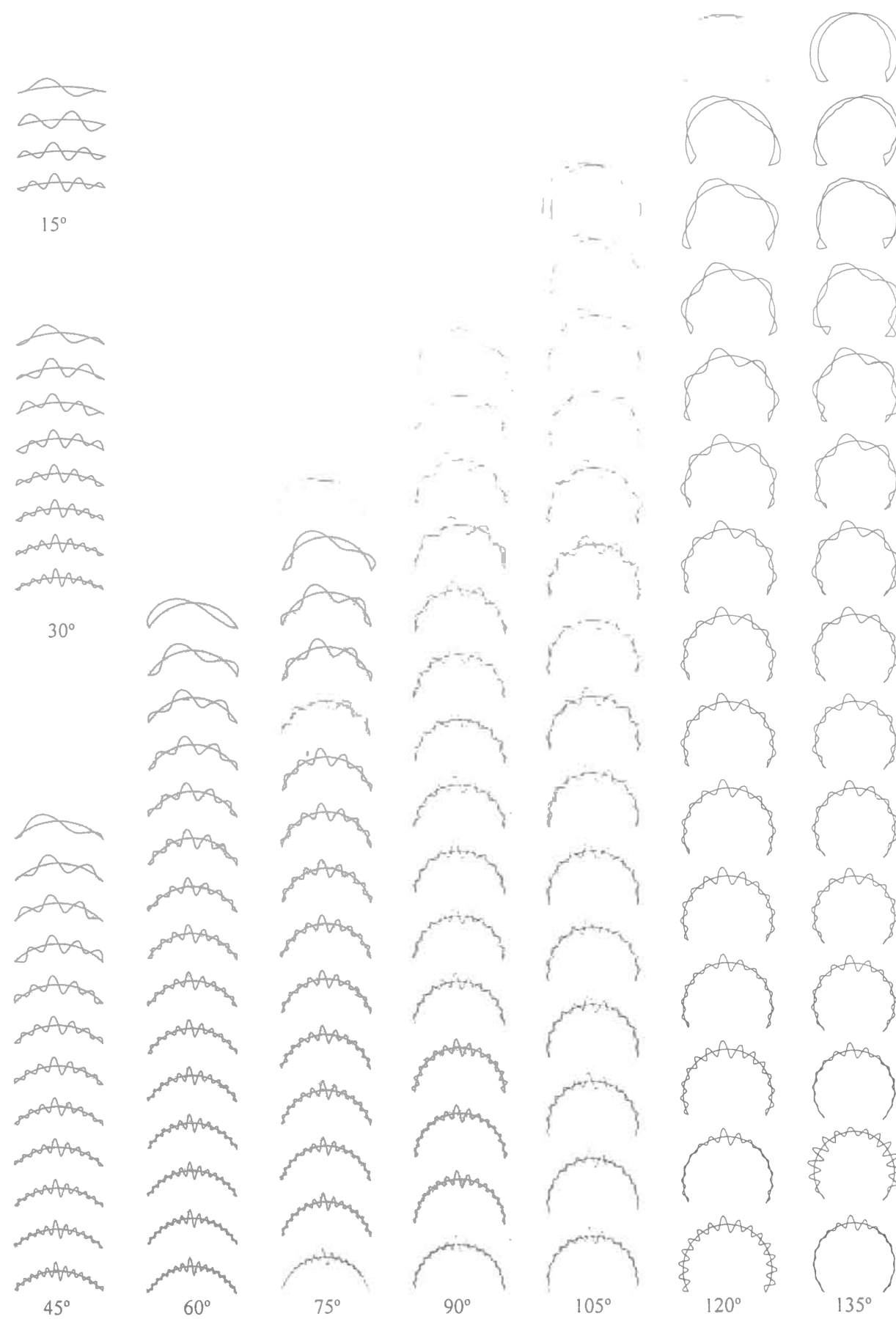


図 2.1.3 逆対称近似固有モード図 (simply support, $a/h=500$)

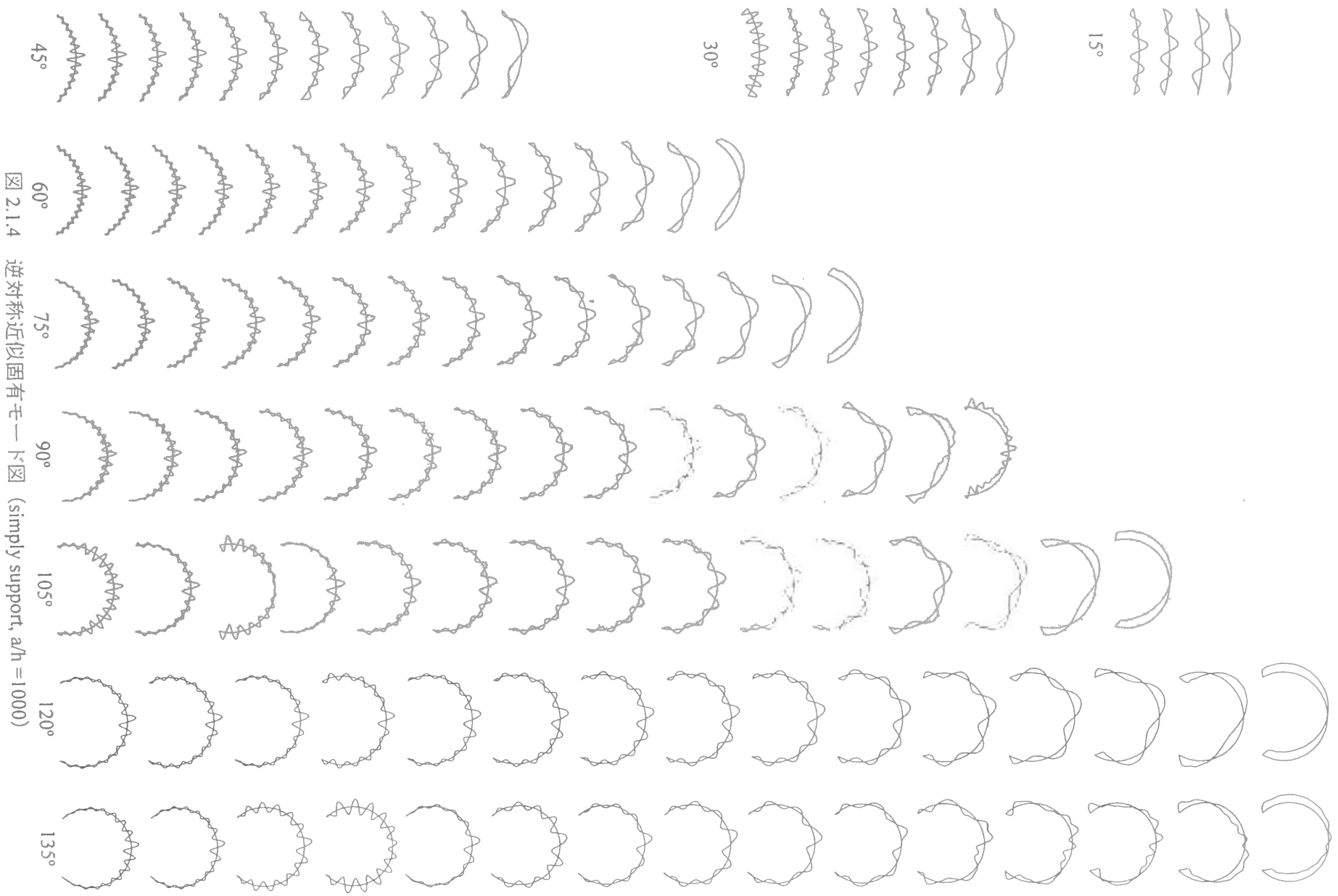


図 2.1.4 逆対称近似固有モード図 (simply support, $a/h = 1000$)

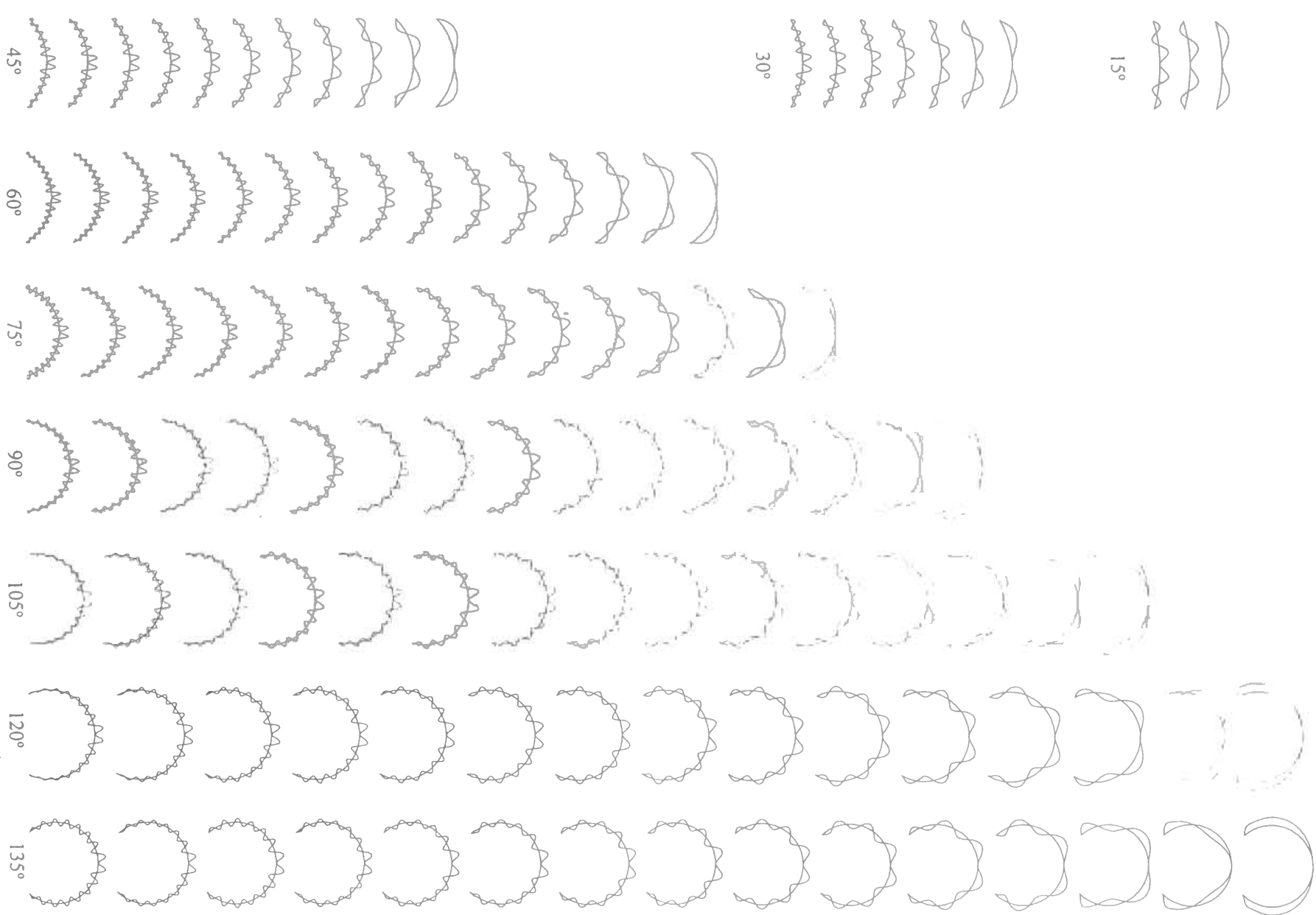


図 2.2.1 $n=2$ の場合の近似固有モード図 (simply support, $a/h = 100$)



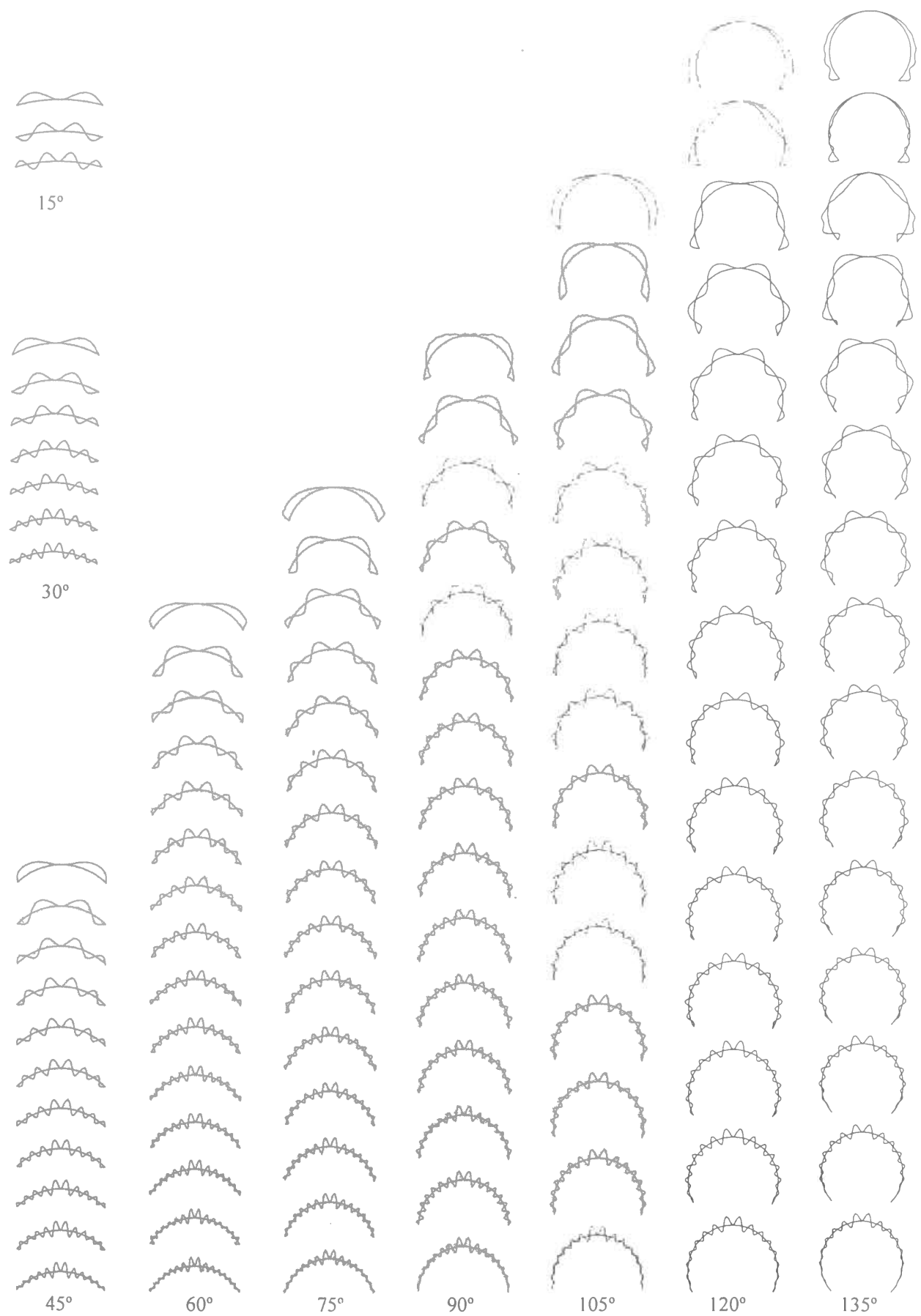


図 2.2.4 $n=2$ の場合の近似固有モード図 (simply support, $a/h = 1000$)

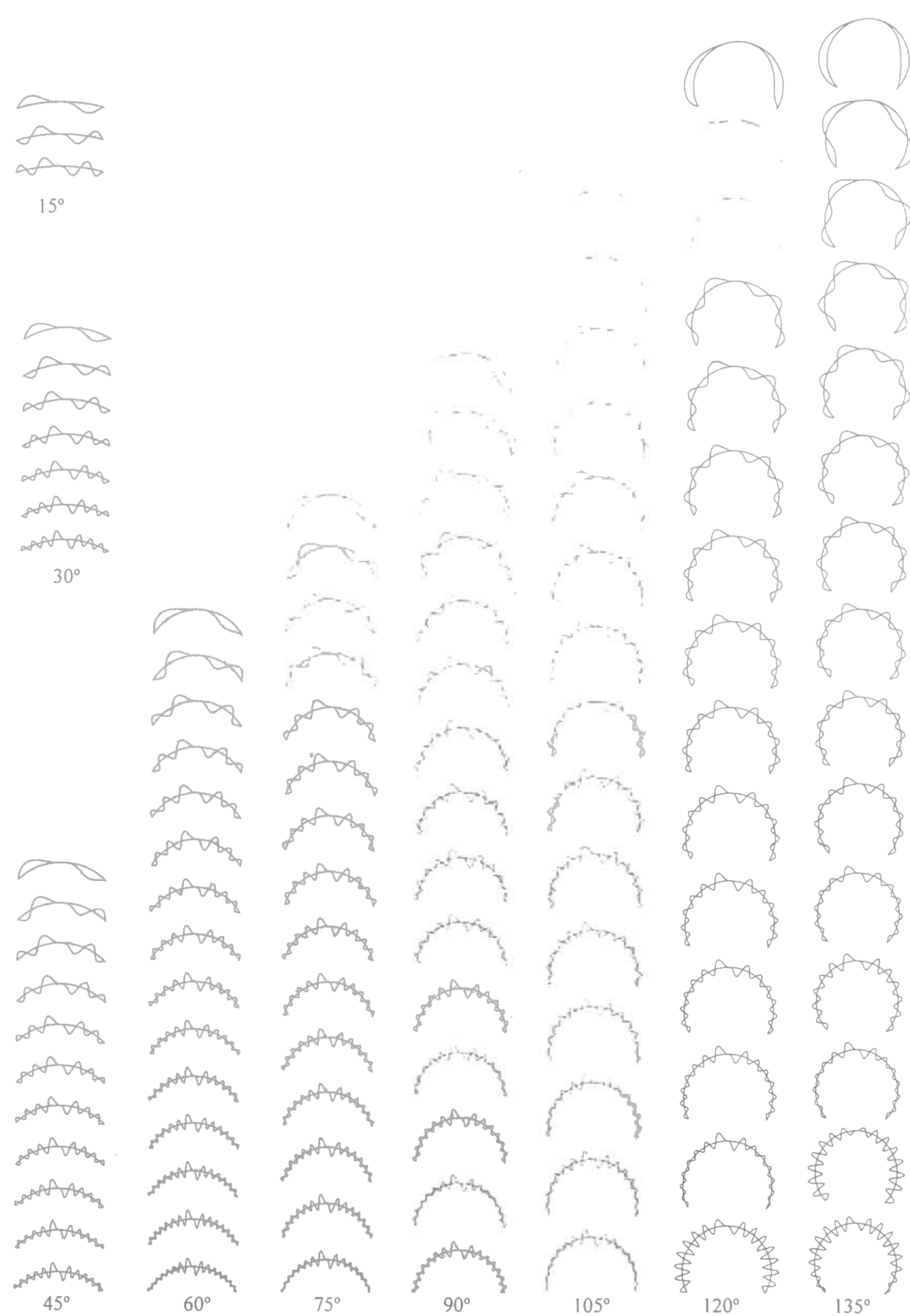


図 2.3.1 $n=3$ の場合の近似固有モード図 (simply support, $a/h = 100$)

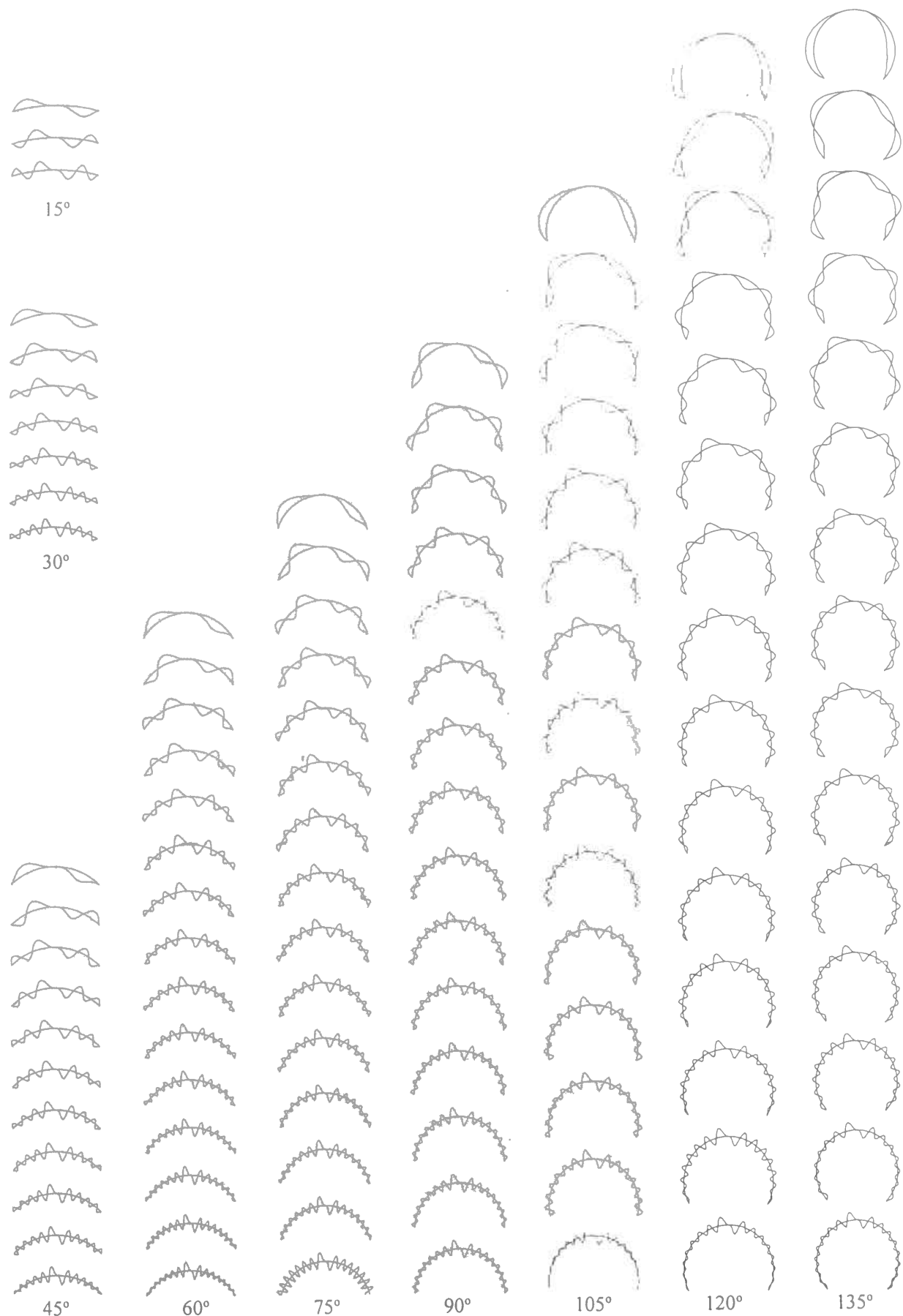


図 2.3.2 $n=3$ の場合の近似固有モード図 (simply support, $a/h=400$)

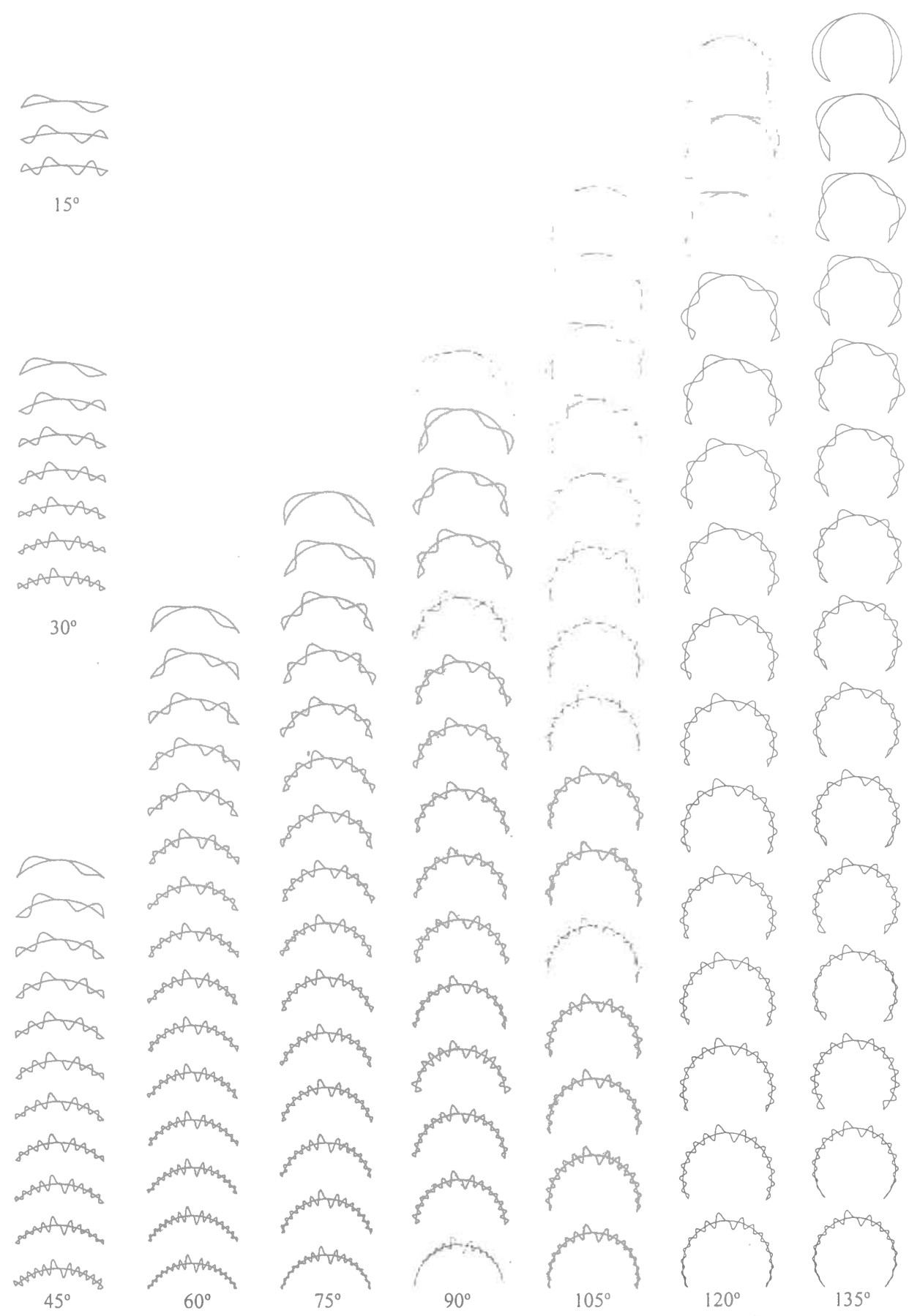


図 2.3.3 $n=3$ の場合の近似固有モード図 (simply support, $a/h=500$)

3. 水平地震動を受ける球形シェルの線形振動応答

3.1 はじめに

球形シェル構造物等を含む大スパン構造物はライズに比してスパンが大きなものも多く、そのため上下方向地震外力等の上下方向外乱が設計に大きな影響を与えると考えられており、國枝は球形シェルの軸対称近似固有モード[21,29]を用いて上下地震動を受ける当該構造物の線形応答解析[22]を行っている。ここでは、El Centro'40の上下地震動記録を用い、応答加速度がある条件のもとで減衰率5%時に約6000ガルに達することを報告している。本章では、球形シェル構造物に水平方向地震力がかかったときの応答性状の概要を知るため、モード重畳法による線形応答解析を遂行する。2章で示した近似固有モードを用いると、Galerkin法を適用するとき時間関数に関する最終支配方程式の係数は全て閉形関数で表現でき、また、 $A \equiv ma^2/Ehg$ (ここに、 m はシェル中立面単位面積当たり重量、 a は半径、 h は板厚、 g は重力加速度、 E はヤング係数を示す)で定義される1つの材料学的なパラメータを用いて振動応答性状を示すことができることがわかる。この材料学的なパラメータ A と近似固有モードを求める際に使用した半開角(ϕ_0)および半径-板厚比等(a/h)の幾何学的なパラメータの値によっては、シェル表面のある点では入力地震波の数十倍の応答加速度が生じることがわかる。

3.2 逆対称線形応答最終支配方程式

水平方向($\theta=0$ 方向)に動的外力 \ddot{V} を受ける半開角が ϕ_0 である球形ドームの逆対称振動時の運動方程式に少しの操作を行い、flexural振動の仮定を導入すると、自由振動時の法線方向運動方程式(2.1)式の右辺は次の外力項で置き換わった式となる。

$$\frac{3ma^4}{gD} \ddot{V} \sin \phi \cos \theta$$

ここに、 m はシェル中立面単位面積当たり重量、 a は半径、 g は重力加速度を示す。なお、 θ は円周方向角、 ϕ は経線に沿う方向の頂点からの開角を示す。(1.2節(1)記号の項参照)よって支配式は以下のように表すことができる。

$$H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi) + \frac{ma^4}{gD} \ddot{w} = 3 \frac{ma^4}{gD} \ddot{V} \sin \phi \cos \theta \quad (3.1)$$

$$H_2 H_1(\psi) - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2 H_2(w) + Eha H_2(w) = 0 \quad (3.2)$$

ここに、 w は法線方向変位成分、 ψ は応力関数、 ν はポアソン比、係数 D は $Eh^3/12(1-\nu^2)$ であり、 H_1 および H_2 は2章で示した θ 方向および ϕ 方向の微分を行う微分演算子を示している。

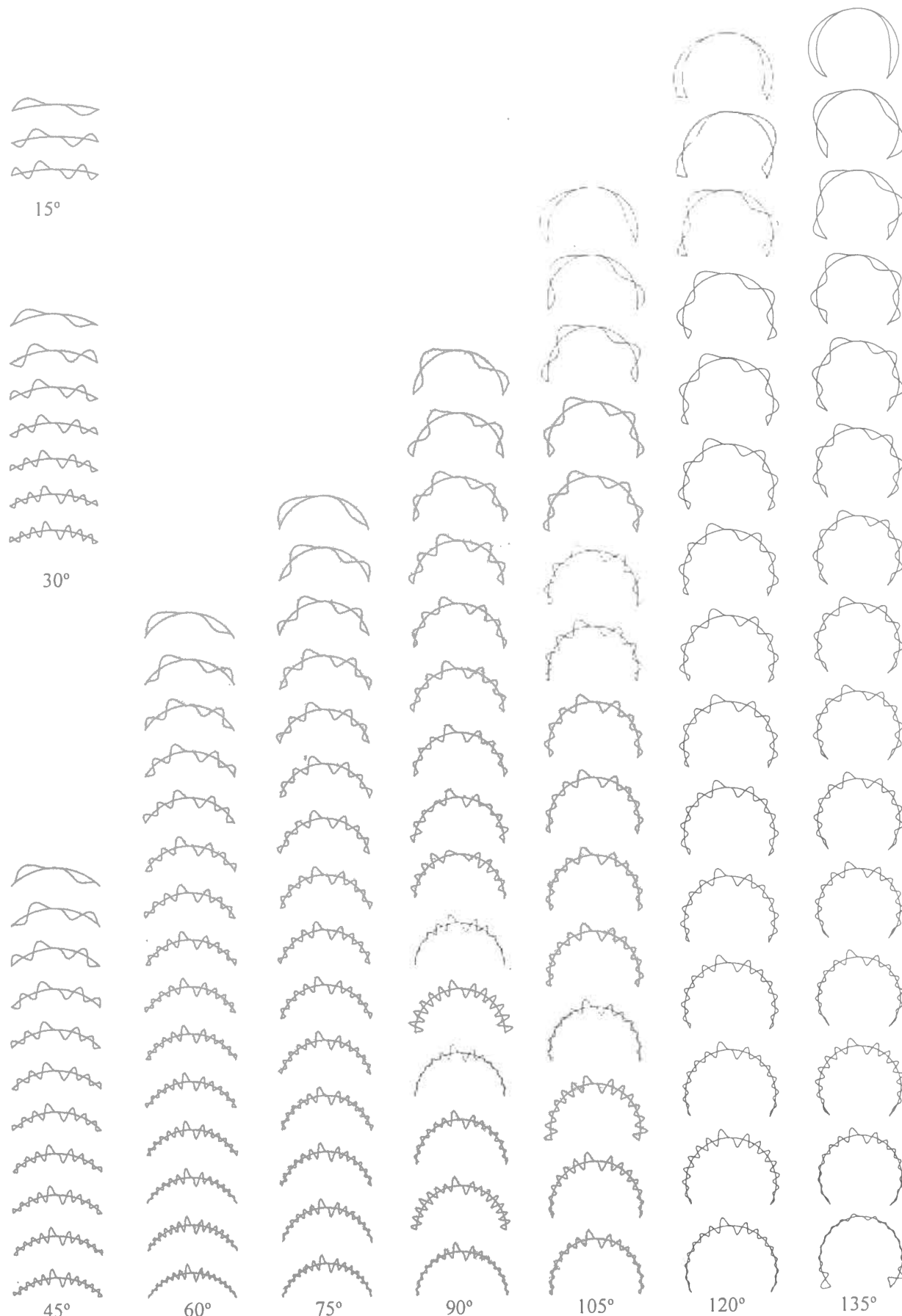


図 2.3.4 $n=3$ の場合の近似固有モード図 (simply support, $a/h=1000$)

なお、水平加速度 \ddot{V} は、逆対称変形時の断面力と次の関係にある。

$$N_\theta = N_\theta^1 \cos \theta = \cos \theta \left[\frac{1}{a^2} \left\{ \psi'''' + \psi - \frac{D}{a} H_2(w) \right\} + \frac{ma}{g} \ddot{V} \sin \phi \right]$$

$$N_\phi = N_\phi^1 \cos \theta = \cos \theta \left[\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\psi''}{\sin^2 \phi} + \psi'' \cot \phi + \psi - \frac{D}{a} H_2(w) \right\} + \frac{ma}{g} \ddot{V} \sin \phi \right]$$

$$N_{\theta\phi} = N_{\theta\phi}^1 \sin \theta = \sin \theta \left[-\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\psi''}{\sin \phi} - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \psi' \right\} \right]$$

ここに、上付の 1 は逆対称時の固有モードの周方向余弦展開次数が 1 であることを示している。

運動方程式(3.1)の解 w を、近似固有モード式(2.14)のうち逆対称近似固有モード式 ($W_i^1(\phi)$) を用いて以下のように仮定する。

$$w = w_c \cos \theta \quad (3.3)$$

$$w_c = \sum_{i=1}^{M_1} W_i^1(\phi) T_i^c(t), \quad W_i^1 = \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 P_j^1(\cos \phi)$$

ここに、 t は時間、 M_1 は使用する逆対称近似固有モードの数、 P_j^1 、 N_1 は Legendre 陪多項式及びそれを使用する数を示し、係数 G_{ji}^1 は 2 章の近似固有モード作成法により半開角、半径-板厚比、ポアソン比および境界条件を満たすよう定数として得られたものとなっている。モード重畳法による応答解析を遂行するため、(3.3)式をこの支配式に代入し、Galerkin 法を適用すると、時間関数 $T_i^c(t)$ について一自由度系に等価な次の微分方程式が得られる。($i=1 \sim N$)

$${}_i\ddot{T}_i^c + {}_i\beta_1 T_i^c = {}_i\beta_2 \ddot{V} \quad (3.4)$$

ここに

$${}_i\beta_0 = \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_1} G_{ji}^1 G_{ki}^1 S^1(j, k)$$

として

$${}_i\beta_1 = \frac{1}{\kappa A {}_i\beta_0} \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_1} G_{ji}^1 G_{ki}^1 \{2 - j(j+1)\} \{2 - j(j+1) - \lambda_j\} S^1(j, k)$$

$${}_i\beta_2 = \frac{3}{{}_i\beta_0} \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_1} G_{ki}^1 S^1(k, 1)$$

$$A = \frac{ma^2}{Ehg}, \quad \kappa = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{h^2}$$

であり時間関数 T_i^c 、および水平入力加速度 \ddot{V} は板厚で正規化している。(つまり、 $T_i^c \equiv T_i^c/h$ 、

$\ddot{V} \equiv \ddot{V}/h$)。詳細な定式化は 4 章を参照されたい。($S''(j, k)$ は(2.12)式と同じ)

逆対称モードによる応答解析は(3.4)式を解く問題に帰せられる。(3.4)式より明らかなように、応

答解析を実行するためには、近似固有モードを求めるために必要とされるパラメータ以外には、材料学的な特性を示すパラメータ A のみを与えればよいことがわかる。つまり、幾何学的なパラメータである半開角(ϕ_0)、半径-板厚比(alh)、境界条件が一意に決定された条件では、応答解析にはシェル中立面単位面積当たり重量(m)、ヤング係数(E)といった情報は必要でなく、これらの材料学的なパラメータを 1 つにまとめたパラメータ $A(=ma^2/Ehg)$ を与えるのみで応答解析を遂行でき、その応答性状も材料パラメータ A のみを用いて表現することができることを示している。同様に材料パラメータ A には半径(a)や板厚(h)も含まれているが、これらを与えることなく応答解析を遂行することはできない。ここでは実地震波による応答解析を行うことを目的としており、その地震波に含まれる実次元の長さの単位を必要とするので、応答解析時には半径 (あるいは板厚) を与えなくてはならない。よって、ここでは半径を 30m として計算を行う。

3.3 入力データについて

数値計算例として El Centro 及び神戸地震波記録 (Kobe-JMA) の水平振動 NS 成分の加速度ピーク値を 100gal に正規化したものを外力として用いたときの応答を計算する。これらの記録は 0.02 秒間隔のデジタル量で与えられているので(3.4)式の未知関数 $T_i^c(t)$ は解析的に求め得ない。ここでは Nigam Jennings 法により直接数値的に計算する。しかしながら、通常用いられる程度の球形ドームの低次の固有振動数は、これら地震動の卓越振動数より低くはないので、この 0.02 秒程度の間隔で採取されたデジタル量をそのまま用いたのでは解の精度と収斂性が保証されないと考えられる。従って、本計算ではデータ間を数十分割し線形補完したデータに基づいて数値計算を行うこととした。線形補完するための分割数について幾つかの数値解析により検討した結果、10 分割で精度、収斂性共に望ましい結果が得られることが確かめられたので、本計算はデータ間を 10 分割した結果を示す。

その他の入力パラメータは表 1 のようになっている。

表 1. 入力データ

入力地震波	El Centro-NS, Kobe-JMA-NS
ポアソン比	0.3
減衰率	0.02
半開角	30, 45, 60, 75, 90度
半径-板厚比 (a/h)	100, 400, 1000
使用する固有モード	1st ~ 6th
境界条件	固定支持、単純支持
半径	3,000cm
材料パラメータ A	0.000075 ~ 0.001500

パラメータ A の値は実構造物を想定して数値範囲を設定し、半開角として 5 種類、半径-板厚比として 3 種類、境界条件として 2 種類のそれぞれの組み合わせについて材料学的パラメータ A を変化させて計算を行う。

計算に使用している固有モードの一般化固有振動数 Ω を表2に示す。これらの値に材料パラメータ A の平方根の逆数を掛けたものが実際に考慮したシェル固有振動数となる。ここでは表1に示すように材料パラメータとして0.000075から0.0015までを採用しており、表2に掛ける材料パラメータ A の平方根の逆数の値は、およそ26.46から115.5となる。例えば、材料学的パラメータ A が0.0001であるとすると、(この値は半径が30mの場合、材料学的パラメータ A に陽に含まれる半径-板厚比に関係なくヤング係数、単位体積重量としてコンクリート材料のそれらを用いていることを想定していることになる)、その逆数の平方根は約31.6となるので、一般化固有振動数の値が0.1の差を持つ固有モードは実構造物では僅か3Hz程度の固有円振動数の差しか持たない固有モードとなっており、かなり近接した固有円振動数を持つ構造物であることがわかる。

表2 逆対称固有振動数 Ω 、($\omega = \Omega/\sqrt{A}$)

Modified Natural frequency Ω of Dome; Fixed End, a/h=100						
h.o.a.	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
30	1.0411	1.2116	1.6614	2.4137	3.4382	4.7118
45	0.9903	1.0403	1.1579	1.3947	1.7672	2.2706
60	0.9330	0.9961	1.0434	1.1338	1.2887	1.5185
75	0.8370	0.9755	1.0073	1.0496	1.1216	1.2340
90	0.7050	0.9571	0.9911	1.0168	1.0553	1.1157

Modified Natural frequency Ω of Dome; Simply Supported, a/h=100						
h.o.a.	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
30	1.0368	1.1436	1.5121	2.1902	3.1460	4.3538
45	0.9901	1.0270	1.1173	1.3205	1.6582	2.1292
60	0.9282	0.9902	1.0300	1.1063	1.2428	1.4525
75	0.8258	0.9708	1.0016	1.0382	1.1012	1.2024
90	0.6921	0.9524	0.9876	1.0112	1.0453	1.0992

Modified Natural frequency Ω of Dome; Fixed End, a/h=400						
h.o.a.	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
30	1.0025	1.0306	1.0674	1.1468	1.2986	1.5286
45	0.9838	0.9997	1.0116	1.0301	1.0647	1.1228
60	0.9284	0.9833	0.9955	1.0045	1.0175	1.0378
75	0.8221	0.9681	0.9883	0.9964	1.0035	1.0128
90	0.6986	0.9515	0.9814	0.9914	0.9973	1.0032

Modified Natural frequency Ω of Dome; Simply Supported, a/h=400						
h.o.a.	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
30	1.0003	1.0285	1.0624	1.1179	1.2494	1.4574
45	0.9832	0.9994	1.0112	1.0249	1.0535	1.1048
60	0.9266	0.9819	0.9942	1.0026	1.0140	1.0321
75	0.8167	0.9660	0.9871	0.9954	1.0021	1.0106
90	0.9381	0.9779	0.9899	0.9960	1.0019	1.0083

Modified Natural frequency Ω of Dome; Fixed End, a/h=1000						
h.o.a.	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
30	0.9960	1.0051	1.0216	1.0425	1.0662	1.1100
45	0.9826	0.9956	1.0005	1.0061	1.0132	1.0223
60	0.9281	0.9821	0.9927	0.9971	1.0004	1.0044
75	0.8192	0.9665	0.9867	0.9933	0.9967	0.9994
90	0.6846	0.9499	0.9803	0.9897	0.9941	0.9967

Modified Natural frequency Ω of Dome; Simply Supported, a/h=1000

h.o.a.	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
30	0.9949	1.0032	1.0159	1.0387	1.0640	1.0911
45	0.9821	0.9952	1.0001	1.0056	1.0129	1.0203
60	0.9222	0.9807	0.9920	0.9965	0.9997	1.0034
75	0.8157	0.9652	0.9860	0.9929	0.9963	0.9989
90	0.7491	0.9487	0.9795	0.9892	0.9937	0.9964

3.4 逆対称変形時の各応力

逆対称変形時の各応力は(3.3)式のように変数分離したとき Legendre 陪多項式により以下のように表される。(詳細な定式化は4.5および4.6節参照)

$$N_{\theta} = \frac{Eh}{\alpha\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \left[-\lambda_j \cot \phi P_j^{1'o} + P_j^1 \left\{ \lambda_j \left(\frac{1}{\sin^2 \phi} + 1 - j(j+1) \right) - 2 + j(j+1) \right\} \right] T_i^c \cos \theta + \frac{ma}{g} \ddot{V} \sin \phi \cos \theta$$

$$N_{\theta} = \frac{Eh}{\alpha\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \left[\lambda_j \cot \phi P_j^{1'o} + P_j^1 \left\{ \lambda_j \left(\frac{1}{\sin^2 \phi} + 1 \right) - 2 + j(j+1) \right\} \right] T_i^c \cos \theta + \frac{ma}{g} \ddot{V} \sin \phi \cos \theta$$

$$N_{\theta\phi} = \frac{Eh}{\alpha\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \lambda_j \left[\frac{1}{\sin \phi} P_j^{1'o} - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} P_j^1 \right] T_i^c \sin \theta$$

$$M_{\theta} = \frac{Eh}{\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \left\{ 1 - \frac{\lambda_j(1+\nu)}{\kappa} \right\} \left[(1-\nu) \cot \phi P_j^{1'o} + \left\{ -\frac{(1-\nu)}{\sin^2 \phi} - \nu j(j+1) \right\} P_j^1 \right] T_i^c \cos \theta$$

$$M_{\phi} = \frac{Eh}{\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \left\{ 1 - \frac{\lambda_j(1+\nu)}{\kappa} \right\} \left[-(1-\nu) \cot \phi P_j^{1'o} + \left\{ \frac{(1-\nu)}{\sin^2 \phi} - j(j+1) \right\} P_j^1 \right] T_i^c \cos \theta$$

$$M_{\theta\phi} = -\frac{Eh}{\kappa} (1-\nu) \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \left\{ 1 - \frac{\lambda_j(1+\nu)}{\kappa} \right\} \left[\frac{1}{\sin \phi} P_j^{1'o} - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} P_j^1 \right] T_i^c \sin \theta$$

$$Q_{\phi} = -\frac{Eh}{\alpha\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \{2 - j(j+1)\} P_j^{1'o} T_i^c \cos \theta$$

$$Q_{\theta} = \frac{Eh}{\alpha\kappa} \frac{1}{\sin \phi} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \{2 - j(j+1)\} P_j^1 T_i^c \sin \theta$$

3.5 数値解析結果及び考察

表 1 に示す半開角 5 種類、半径-板厚比 3 種類、境界条件 2 種類の組み合わせについて材料学的パラメータ A を変化させた応答解析を遂行した。球面上の位置、時刻に関係なく、応答加速度の絶対値が最大となる値のみを取り出し材料パラメータ A との関係を示したのが図 1 である。図 1.1 は入力地震波を El Centro NS 成分としたもの、図 1.2 は Kobe JMA NS 成分としたものである。横軸に材料学的パラメータ A 、縦軸に応答加速度の絶対値の最大値をとり、凡例として半開角を採用している。図 1.1 および図 1.2 はそれぞれ上下 3 段組、左右 2 段組となっているが、上段が半径-板厚比が 100 のもの、中段が 400、下段が 1000 のものであり、左側に固定境界、右側に単純支持の応答解析結果をそれぞれ示している。これら想定した入力地震波の区別なく、最大応答加速度だけを見る場合、単純支持よりも固定境界の球形シェルの方が地震応答が大きく現れることがわかる。また想定した材料学的パラメータの範囲では、その値が大きくなるほど、地震応答加速度が大きく現れることがわかる。

続いて、半開角、半径-板厚比、材料学的パラメータ等が同じで境界条件のみが異なる球形シェルの応力分布状態の比較を行った。応力分布状態例を、横軸に頂点を 0 とした半開角、縦軸に各応力をヤング係数で正規化し図 2 に示す。半開角が 75 度、材料学的パラメータが 0.0001、半径-板厚比が 400 である球形シェルを対象に、Kobe JMA NS 波を水平方向地震外力として与え、左側に固定境界の応力分布状態、右側に単純境界の応力分布状態を示す。境界条件の違いによる球形シェルの振動応答を比較するには、発生した時刻およびシェル面上の位置に関係なくそれぞれの応力の最大応答値を取り出し調査する方法、あるいは応答変位の絶対値の最大値が発生する時刻での応力分布状態を調査する方法などが考えられるが、ここでは応力分布状態を比較するだけの目的で最大応答加速度が発生した時刻の各応力の分布状態を経線に沿う方向に示している。各応力の応答値および応答分布状態を比較することが目的であるので、境界条件の違いにより発生する最大応答加速度の差がなるべく小さくなる幾何寸法および材料常数を選択した。対象としている形状のシェルに Kobe JMA NS 波を水平地震外力として与えたとき、固定境界では時刻 3.42sec のとき最大応答加速度 14.64gal、単純境界では時刻 2.62sec のとき最大応答加速度 10.69gal が発生しており、固定境界のものが単純境界のものに比べておよそ 1.4 倍の最大応答加速度が発生している。

ところで、各応力は前節に示すように周方向の分布状態を示す $\cos\theta$ あるいは $\sin\theta$ が掛かった式となっている。応力分布状態はこれらの周方向成分を掛けて表示されるべきではあるが、表示を簡便にするため $\cos\theta$ が掛かる応力に関しては $\theta=0$ 、 $\sin\theta$ が掛かる応力に関しては $\theta=\pi/2$ の経線に沿う方向 ϕ について表示している。図 2 の境界条件による各応力の応答値が正負逆に見えるのは、これら θ の方向について示したためであり、最大応答値が θ に関して逆対称となっているにすぎない。本計算例において固定境界のシェルが単純境界のものに比べておよそ 1.4 倍の最大応答加速度が発生していることは述べたが、この 1.4 倍という数値も図 2 の各応力の分布状態の最大値を見る限りにおいてはあまり意味を持つとはいえない。面内軸力 N および面外せん断力 Q は単純境界の方がその

応答値が固定境界のそれより大きな値となっている。

球形シェルを実際に設計するには、発生する応力の分布状態を知ることが必要である。前節に示すように各応力は時間関数 T_i とそれに掛かる係数の積の和で表されるが、固有振動数が互いに近接しているため、何れか 1 つの時間関数のみが卓越した値を持つことはなく、またその正負も予測できないので、仮定した地震波において個別の形状の応答解析を遂行せずに応力分布状態を把握することは出来ないといえる。

なお、本計算例では最大応答加速度が発生したときの応力分布状態を示したが、仮に最大応答変位が発生したときの応力分布状態を考察の対象としても上記と同様に単純な比較検討では設計資料となり得る結論は得られない。

3.6 まとめ

逆対称線形強制振動応答解析が近似固有モードを用いることにより容易に行えることを示した。領域積分が閉形関数で表され定式化が極めて簡便になり、幾何学的パラメータ、材料学的パラメータの値によって大きな応答加速度が表れることがわかる。

また、振動時における各応力分布状態を示し、最大応答加速度や最大応答変位のみを考慮するだけでは、実設計に必要な各応力を推定することは出来ないことを示した。固有振動数が互いに近接した当該構造物においては、何れか 1 つのモードの時間関数のみが卓越した値を持つことはなく、またその正負も予測できないので、個別の形状を仮定した地震波において応答解析を遂行せずに応力分布状態を把握することは出来ないことがわかる。

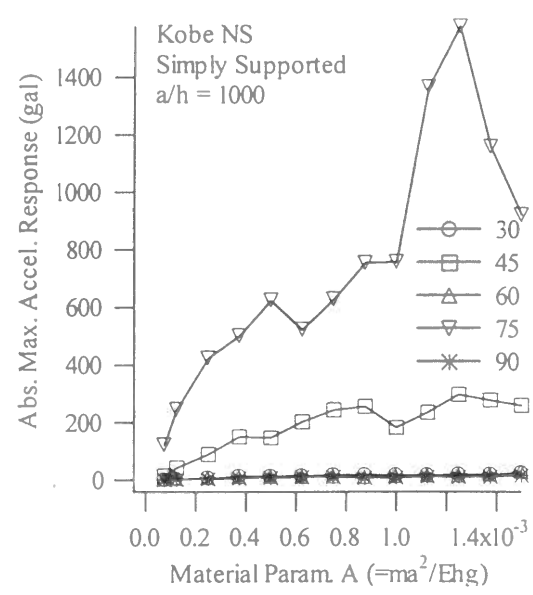
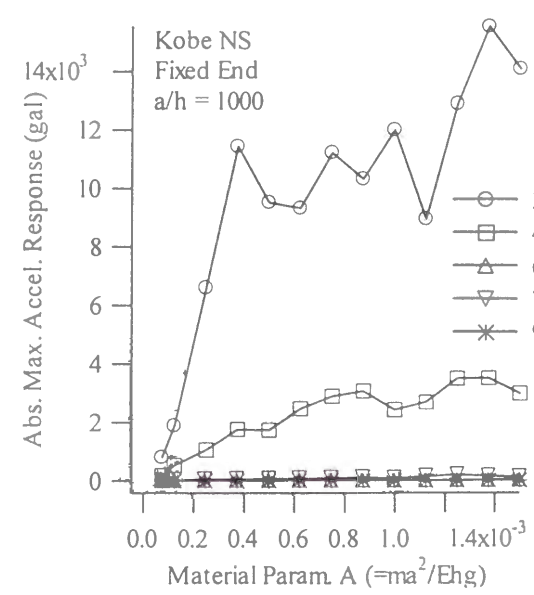
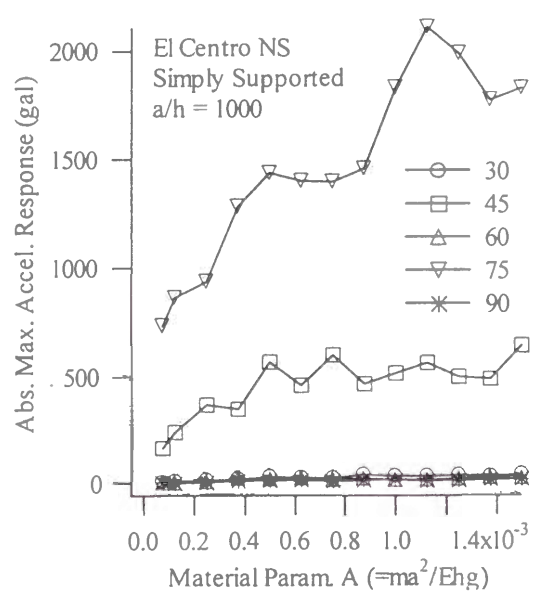
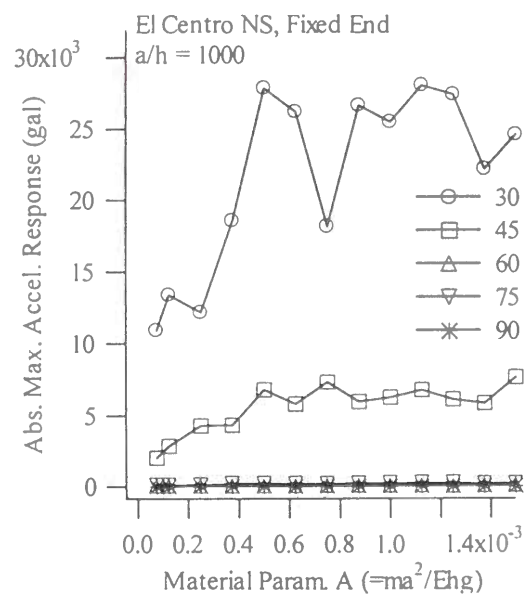
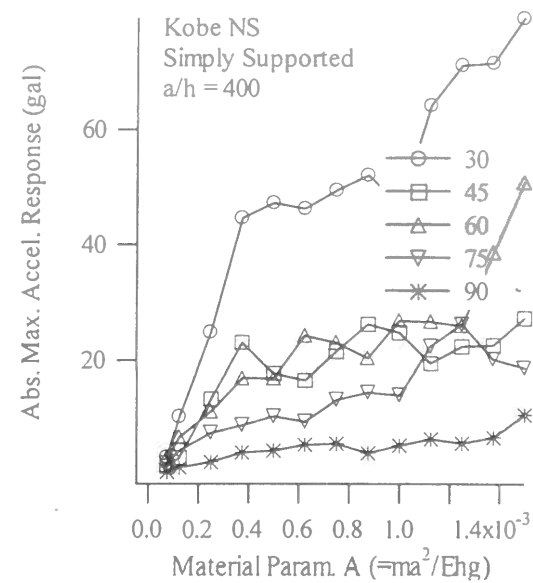
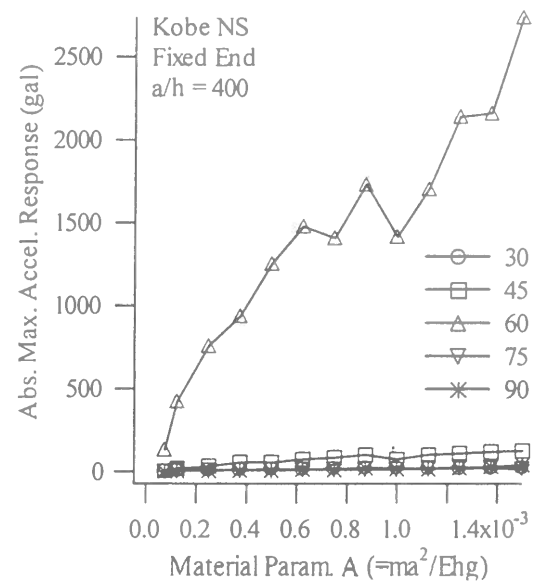
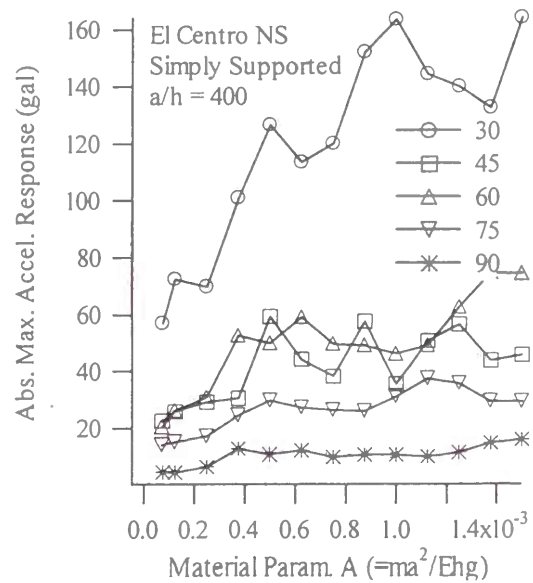
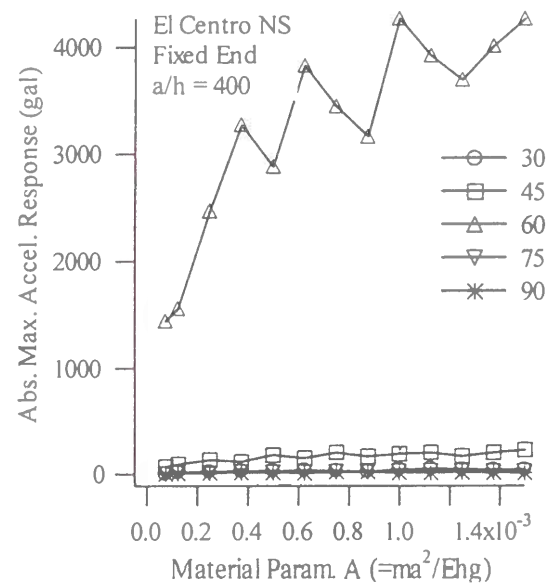
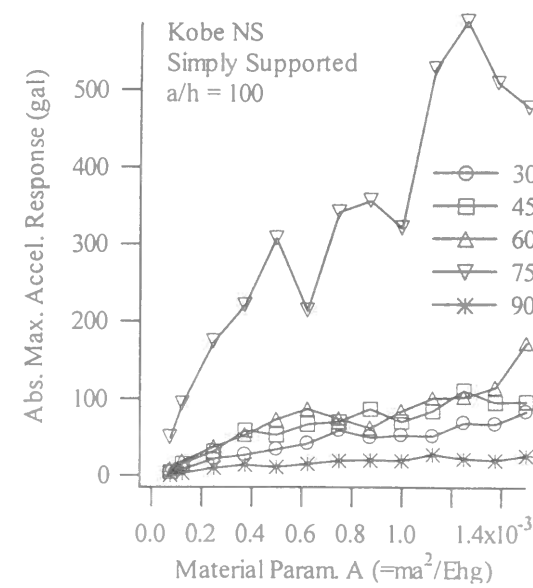
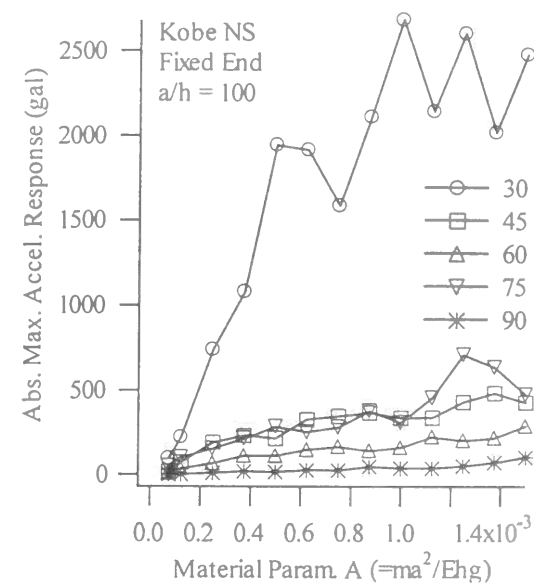
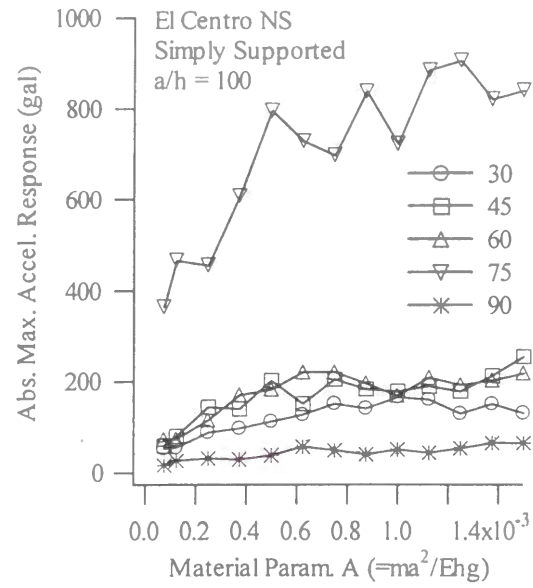
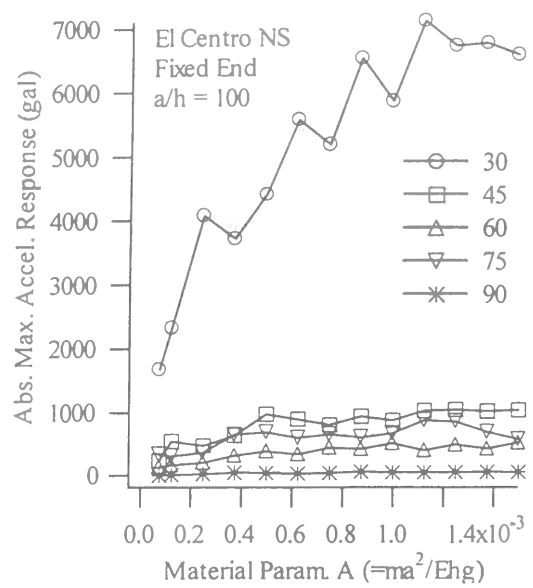


图 1.1 最大応答加速度 (El Centro NS 成分)

图 1.2 最大応答加速度 (Kobe JMA NS 成分)

4. 対称・逆対称モード共存時の球殻非線形運動方程式の閉形表現

4.1 はじめに

前章では線形理論に基づく地震応答解析を遂行したが、薄肉ドームでは内在するであろう幾何学的非線形性の影響を解明することは、外乱応答特性を明確にする上で極めて重要なことである。本章では上下地震動および水平地震動を受ける当該構造物の幾何学的非線形方程式を導く。既往研究には有限要素法などの数値解析手法を用いたものは数多く存在するが、解析解を用いたものは上下地震動のみを受ける球形シェル構造の動的不安定挙動を調べたもの[30,31,32,34,35]およびかなり近似性の高い逆対称変形モードを用いたもの[18,19]のみであり、上下地震動および水平地震動を同時に受ける当該構造物の幾何学的非線形挙動把握のための定式化を行ったものは初めてである。

本章では、2章において示した球形シェル近似固有モードのうち、軸対称および逆対称近似固有モードを同時に考慮した幾何学的非線形運動方程式を導く。つまり、ここで得られる非線形運動方程式は周方向余弦展開次数が2以上の非対称モードは含まれていない。この非線形運動方程式の各係数を必要に応じて使用することにより、次章以降で行う水平地震動のみを受ける当該構造物の非連成動的座屈問題、応答変形が緯線方向に伝播型となる Traveling モードの考察、定常振動解の安定性問題等に活用できる。

4.2 法線方向非線形運動方程式および適合条件式

本節では法線方向非線形運動方程式および適合条件式の誘導を行う。なお、本論で取り扱う球形シェルは頂点が閉じており、境界が一ヶ所だけのドーム型である。また、 u, v の慣性項 \ddot{u}, \ddot{v} を無視した、flexural 振動を仮定する。

4.2.1 運動方程式

J.L.Sanders の一般非線形シェル理論[9]を球形シェルに適用し、D'Alembert の原理を用いると、幾何学的非線形運動方程式は、上下、水平方向2方向に動的外力を受ける場合、以下のように表される。

$$(N_\phi \sin \phi)^\circ + N'_{\theta\phi} - N_\theta \cos \phi - Q_\phi \sin \phi - \frac{ma}{g} \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - U \sin \phi + V \cos \phi \cos \theta + W \cos \phi \sin \theta) = 0 \quad (4.1.a)$$

$$(N_{\theta\phi} \sin \phi)^\circ + N'_\theta + N_{\theta\phi} \cos \phi - Q_\theta \sin \phi - \frac{ma}{g} \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v - V \sin \theta + W \cos \theta) = 0 \quad (4.1.b)$$

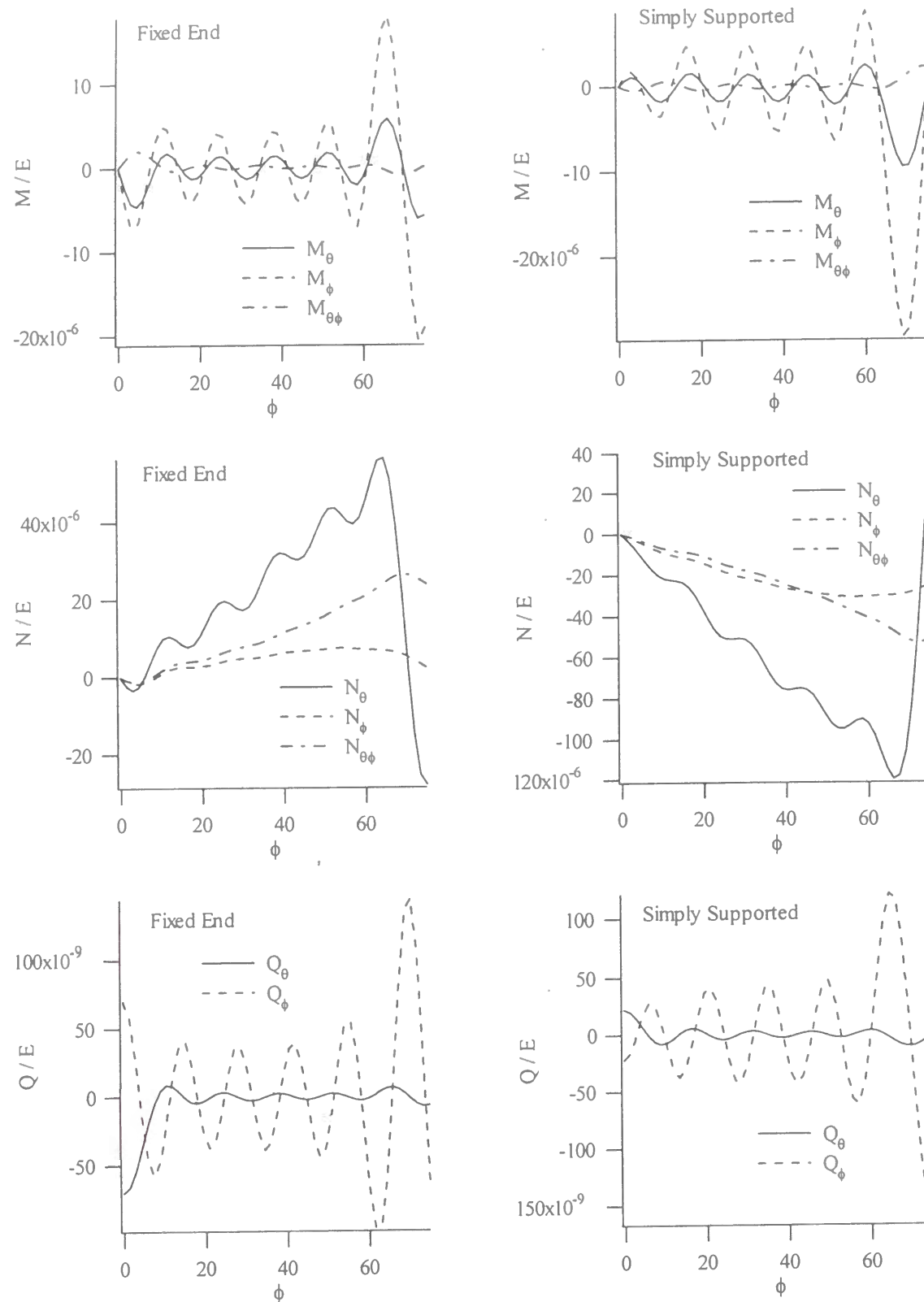


図2 最大応答加速度が発生したときの応力分布状態例

$$(Q_\phi \sin \phi)'' + Q_\theta' + \sin \phi (N_\phi + N_\theta) + (N_\phi \sin \phi \Phi_1 + N_{\theta\phi} \sin \phi \Phi_2)'' + (\Phi_1 N_{\theta\phi} + \Phi_2 N_\theta)' - \frac{ma}{g} \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w - U \cos \phi - V \sin \phi \cos \theta - W \sin \phi \sin \theta) = 0 \quad (4.1.c)$$

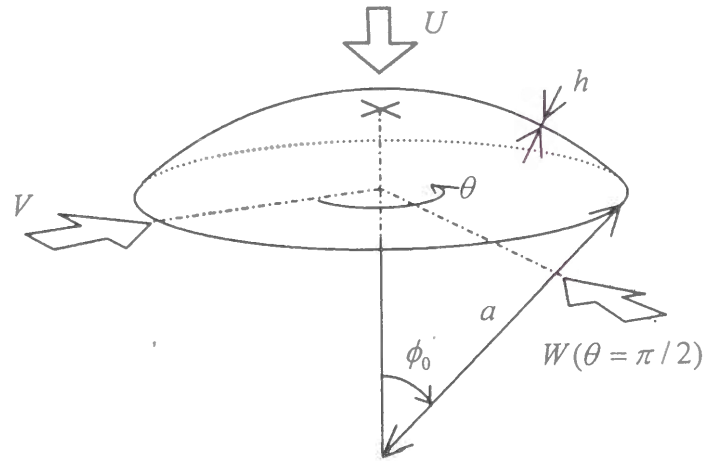
$$(M_\phi \sin \phi)'' + M_{\theta\phi}' - M_\theta \cos \phi + a Q_\phi \sin \phi = 0 \quad (4.1.d)$$

$$M_\theta' + (M_{\theta\phi} \sin \phi)'' + M_{\theta\phi} \cos \phi + a Q_\theta \sin \phi = 0 \quad (4.1.e)$$

ここに、

$$\Phi_1 = \frac{1}{a} (u + w'') \approx \frac{1}{a} w'', \quad \Phi_2 = \frac{1}{a} (v + \frac{w'}{\sin \phi}) \approx \frac{w'}{a \sin \phi} \quad (4.1.f)$$

であり、 U, V, W はそれぞれ上下方向、 $\theta=0$ 軸上の水平方向、 $\theta=90$ 軸上の水平方向強制変位である。



4.2.2 歪-変位成分関係式

$$e_\phi = \frac{1}{a} \{u'' - w + \frac{1}{2a} (w'')^2\} \equiv_L e_\phi + N e_\phi \quad (4.2.a)$$

$$e_\theta = \frac{1}{a} \{u \cot \phi + \frac{v'}{\sin \phi} - w + \frac{1}{2a} (\frac{w'}{\sin \phi})^2\} \equiv_L e_\theta + N e_\theta \quad (4.2.b)$$

$$e_{\theta\phi} = \frac{1}{a} \left\{ \frac{u'}{\sin \phi} + v'' - v \cot \phi + \frac{w'' w'}{a \sin \phi} \right\} \equiv_L e_{\theta\phi} + N e_{\theta\phi} \quad (4.2.c)$$

$$\kappa_\phi = \frac{1}{a^2} (w'''' + w) + \frac{1}{a} e_\phi \equiv_L \kappa_\phi + N \kappa_\phi \quad (4.2.d)$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{w'''}{\sin^2 \phi} + w'' \cot \phi + w \right) + \frac{1}{a} e_\theta \equiv_L \kappa_\theta + N \kappa_\theta \quad (4.2.e)$$

$$\kappa_{\theta\phi} = \frac{2}{a^2 \sin \phi} (-w' \cot \phi + w'' - \frac{1}{2} w'' w') + \frac{1}{a} e_{\theta\phi} \equiv_L \kappa_{\theta\phi} + N \kappa_{\theta\phi} \quad (4.2.f)$$

4.2.3 応力-歪関係式

$$M_\phi = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_\phi + \nu \kappa_\theta) \quad (4.3.a)$$

$$M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_\theta + \nu \kappa_\phi) \quad (4.3.b)$$

$$M_{\theta\phi} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \kappa_{\theta\phi} \quad (4.3.c)$$

$$N_\phi = \frac{Eh}{1-\nu^2} (e_\phi + \nu e_\theta) \quad (4.3.d)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu e_\phi + e_\theta) \quad (4.3.e)$$

$$N_{\theta\phi} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} e_{\theta\phi} \quad (4.3.f)$$

4.2.4 面外せん断力 Q_ϕ, Q_θ

モーメント-曲率関係式(4.3.a - 4.3.c)及び曲率-変位関係式(4.2.d - 4.2.f)を ϕ 軸まわり回転釣合式(4.1.d)に代入し、垂直応力-歪関係式(4.3.d - 4.3.f)及び ϕ, θ 方向釣合式(4.1.a, 4.1.b)を用いると、

$$Q_\phi = - \left(1 + \frac{D}{a^2 K} \right)^{-1} \frac{D}{a^3} H_2''(w) \approx - \frac{D}{a^3} H_2''(w) \quad (4.4)$$

が得られ、同様に θ 軸まわり回転釣合式(4.1.e)を用いると

$$Q_\theta = - \left(1 + \frac{D}{a^2 K} \right)^{-1} \frac{D}{a^3 \sin \phi} H_2'(w) \approx - \frac{D}{a^3 \sin \phi} H_2'(w) \quad (4.5)$$

が得られる。ここに、

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

である。

4.2.5 面内せん断力 $N_\phi, N_\theta, N_{\theta\phi}$

本論では flexural 振動を仮定しており、 u, v の慣性項 \ddot{u}, \ddot{v} を無視した、(4.1.a)、(4.1.b)式を満たすように、応力関数 ψ を導入し、 $N_\phi, N_\theta, N_{\theta\phi}$ を以下のようにおく。

$$N_\phi \equiv_L N_\phi + N N_\phi \quad (4.6)$$

$$N_\theta \equiv_L N_\theta + N N_\theta \quad (4.7)$$

$$N_{\theta\phi} \equiv_L N_{\theta\phi} + N N_{\theta\phi} \quad (4.8)$$

ここに右辺に於ける左下付きの L は線形項、 N は非線形項を表し、以下のように求めることが出

来る。

(1)線形項分

$${}_L N_\phi = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\psi''}{\sin^2 \phi} + \psi'' \cot \phi + \psi - \frac{D}{a} H_2(w) \right\} + \frac{ma}{g} \{ \ddot{U} \cos \phi + \ddot{V} \sin \phi \cos \theta + \ddot{W} \sin \phi \sin \theta \} \quad (4.6.L)$$

$${}_L N_\theta = \frac{1}{a^2} \left\{ \psi'' + \psi - \frac{D}{a} H_2(w) \right\} + \frac{ma}{g} \{ \ddot{U} \cos \phi + \ddot{V} \sin \phi \cos \theta + \ddot{W} \sin \phi \sin \theta \} \quad (4.7.L)$$

$${}_L N_{\theta\phi} = -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\psi''}{\sin \phi} + \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \psi' \right\} \quad (4.8.L)$$

(2)非線形項分

$${}_N N_\phi = \frac{Eh}{1-\nu^2} ({}_N e_\phi + \nu {}_N e_\theta) = \frac{1}{2a^2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ (w'')^2 + \nu \left(\frac{w'}{\sin \phi} \right)^2 \right\} \quad (4.6.N)$$

$${}_N N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} ({}_N e_\theta + \nu {}_N e_\phi) = \frac{1}{2a^2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \nu (w'')^2 + \left(\frac{w'}{\sin \phi} \right)^2 \right\} \quad (4.7.N)$$

$${}_N N_{\theta\phi} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} {}_N e_{\theta\phi} = \frac{Eh}{2a^2(1+\nu)} \frac{w'' w'}{\sin \phi} \quad (4.8.N)$$

4.2.6 支配方程式

(1)法線方向運動方程式

法線方向釣合式(4.1.c)に、(4.4)~(4.8)式を代入すると、以下の法線方向運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi) + \frac{ma^4}{gD} \ddot{w} \right] - \frac{a^3}{D} \frac{1}{\sin \phi} (\sin \phi \Phi_{1L} \bar{N}_\phi + \sin \phi \Phi_{2L} \bar{N}_{\theta\phi})'' \\ & - \frac{a^3}{D} \frac{1}{\sin \phi} (\Phi_{1L} \bar{N}_{\theta\phi} + \Phi_{2L} \bar{N}_\theta)' - \frac{a^3}{D} \frac{1}{\sin \phi} \{ \sin \phi ({}_N N_\phi + {}_N N_\theta) \} \\ & - \frac{a^3}{D} \frac{1}{\sin \phi} (\sin \phi \Phi_{1N} N_\phi + \sin \phi \Phi_{2N} N_{\theta\phi})'' - \frac{a^3}{D} \frac{1}{\sin \phi} (\Phi_{1N} N_{\theta\phi} + \Phi_{2N} N_\theta)' \\ & = 3 \frac{ma^4}{gD} \{ \ddot{U} \cos \phi + \ddot{V} \sin \phi \cos \theta + \ddot{W} \sin \phi \sin \theta \} + \frac{ma^3}{gD} \ddot{U} \{ \cos \phi H_0(w) - w'' \sin \phi \} \\ & + \frac{ma^3}{gD} \ddot{V} \{ \sin \phi H_0(w) + w'' \cos \phi - w' \frac{\tan \theta}{\sin \phi} \}. \end{aligned}$$

$$+ \frac{ma^3}{gD} \ddot{W} \left\{ \sin \phi H_0(w) + w'' \cos \phi + w' \frac{\cot \theta}{\sin \phi} \right\} \quad (4.9)$$

(2)適合条件式

歪-変位成分関係式(4.2)より以下の適合条件式を得る。

$$\begin{aligned} & H_2 H_1(\psi) - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2 H_2(w) + Eha H_2(w) \\ & + Eh \left\{ w'' H_0(w) - (w'')^2 - (w'')^2 - \left(\frac{w'}{\sin^2 \phi} \right)^2 - w'' \left(\frac{w'}{\sin^2 \phi} \right)' \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.3 たわみモードの仮定

球形ドームの半開角を ϕ_0 とする。(4.9)および(4.10)の解 w を、2章で示した球形シェル軸対称及び逆対称近似固有モード式($W_i \equiv W_i^0$ 、 W_i^1)を用いて以下のように仮定する。

$$w = w_0 + w_s \sin \theta + w_c \cos \theta \quad (4.11)$$

$$w_0 = \sum_{i=1}^{M_0} W_i(\phi) T_i(t), \quad W_i(\phi) = \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} P_j(\cos \phi)$$

$$w_s = \sum_{i=1}^{M_1} W_i^1(\phi) T_i^s(t), \quad w_c = \sum_{i=1}^{M_1} W_i^1(\phi) T_i^c(t), \quad W_i^1 = \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 P_j^1(\cos \phi)$$

ここに、 M_0 、 M_1 は使用する軸対称及び逆対称モードの数、 P_j 、 P_j^1 、 N_0 、 N_1 はLegendre(陪)多項式及びそれらを使用する数を示す。 G_{ji}^0 、 G_{ji}^1 は2章の近似固有モード作成法により計算される定数であり、球形シェルの半開角、半径-板厚比および境界条件等を満たすように求められた定数である。 $T_i(t)$ 、 $T_i^s(t)$ 、 $T_i^c(t)$ は時間関数を示し、上付の文字がないものが軸対称変形モードに関するもの、 c あるいは s となっているものが逆対称変形モードに関するものであり、逆対称変形モードを $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の積の和で表すことにより、緯線方向に伝播型の応答変形を考慮した応答解析が可能なものとなっている。

また、適合条件式(4.10)の線形項のみを用いて、上式(4.11)より応力関数 ψ は以下のように計算される。適合条件式(4.10)は、非線形項を含む歪-変位成分関係式(4.2)より計算されたものであるが、応力関数 ψ は面内せん断力 N_ϕ 、 N_θ 、 $N_{\theta\phi}$ の成分の内、線形項を満たすように導入したものであるので、応力関数を求める際には線形項のみで計算を行わなくてはならない。線形項のみを用いることから、応力関数 ψ は軸対称および逆対称モードそれぞれについて以下のように求めることができる。

(1)軸対称近似固有モードに対する応力関数

適合条件式の線形項

$$H_2 H_1(\psi) - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2 H_2(w) + Eha H_2(w) = 0$$

に、軸対称たわみモード式

$$w_0 = \sum_{i=1}^{M_0} W_i(\phi) T_i(t), \quad W_i(\phi) = \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} P_j(\cos \phi)$$

と、それに対応する応力関数式を以下のように仮定し

$$\psi_0 = \frac{D}{a} \sum_{i=1}^{M_0} \Psi_i(\phi) T_i(t), \quad \Psi_i(\phi) = \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} \lambda_j P_j(\cos \phi)$$

代入すると、

$$\sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} [H_2 H_1(\lambda_j P_j) - (1-\nu) H_2 H_2(P_j) + Eha \frac{a}{D} H_2(P_j)] T_i = 0$$

となる。ここで、微分演算子 H_0 等と Legendre 多項式の関係

$$H_0(P_j) = P_j'' + \cot \phi \cdot P_j' + \frac{1}{\sin^2 \phi} P_j'' = -j(j+1)P_j$$

$$H_1(P_j) = H_0(P_j) + (1-\nu)P_j$$

$$H_2(P_j) = H_0(P_j) + 2P_j$$

$$\frac{Eha^2}{D} = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{h^2} = \kappa$$

を考慮すると、上式[]内は任意の G_{ji} について成り立つので

$$\lambda_j \{2-j(j+1)\} \{(1-\nu)-j(j+1)\} P_j - (1-\nu) \{2-j(j+1)\}^2 P_j + \kappa \{2-j(j+1)\} P_j = 0$$

より

$$\lambda_j = \frac{(1-\nu)\{2-j(j+1)\} - \kappa}{1-\nu-j(j+1)}$$

が求められるので、軸対称近似固有モードに対する応力関数は以下のように求められる。

$$\psi_0 = \frac{D}{a} \sum_{i=1}^{M_0} \Psi_i(\phi) T_i(t), \quad \Psi_i(\phi) = \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} \lambda_j P_j(\cos \phi)$$

ここに、

$$\lambda_j = \frac{(1-\nu)\{2-j(j+1)\} - \kappa}{1-\nu-j(j+1)}$$

(2)非対称近似固有モードに対する応力関数

逆対称変形モードを含む非対称変形モードを

$$w_n = \sum_{i=1}^{M_n} W_i^n(\phi) T_i(t) \cos n\theta, \quad W_i^n(\phi) = \sum_{j=1}^{N_n} G_{ji}^n P_j^n(\cos \phi)$$

と仮定するとき、それに対応する応力関数式を以下のように仮定する。

$$\psi_n = \frac{D}{a} \sum_{i=1}^{M_n} \Psi_i^n(\phi) T_i(t) \cos n\theta, \quad \Psi_i^n(\phi) = \sum_{j=1}^{N_n} G_{ji}^n \lambda_j^n P_j^n(\cos \phi)$$

軸対称時と同様に適合条件式の線形項に代入すると

$$\sum_{i=1}^{M_n} \sum_{j=1}^{N_n} G_{ji}^n [H_2 H_1(\lambda_j^n P_j^n \cos n\theta) - (1-\nu) H_2 H_2(P_j^n \cos n\theta) + Eha \frac{a}{D} H_2(P_j^n \cos n\theta)] T_i = 0$$

ここに、

$$H_0(P_j^n \cos n\theta) = \left(P_j^n'' + \cot \phi \cdot P_j^n' - \frac{n^2}{\sin^2 \phi} P_j^n \right) \cos n\theta = -j(j+1)P_j^n \cos n\theta$$

$$H_1(P_j^n \cos n\theta) = H_0(P_j^n \cos n\theta) + (1-\nu)P_j^n \cos n\theta$$

$$H_2(P_j^n \cos n\theta) = H_0(P_j^n \cos n\theta) + 2P_j^n \cos n\theta$$

であり、これらを考慮すると軸対称時と同様にして

$$\lambda_j^n = \frac{(1-\nu)\{2-j(j+1)\} - \kappa}{1-\nu-j(j+1)}$$

が得られる。明らかにこの式は周方向展開次数 n に独立しているので

$$\lambda_j^n = \lambda_j$$

より、非対称近似固有モードに対する応力関数は以下のように表すことができる。

$$\psi_n = \frac{D}{a} \sum_{i=1}^{M_n} \Psi_i^n(\phi) T_i(t) \cos n\theta, \quad \Psi_i^n(\phi) = \sum_{j=1}^{N_n} G_{ji}^n \lambda_j P_j^n(\cos \phi)$$

ここに、

$$\lambda_j = \frac{(1-\nu)\{2-j(j+1)\} - \kappa}{1-\nu-j(j+1)}$$

以上をまとめると、式(4.11)に対応する応力関数 ψ は以下のように表すことができる。

$$\psi = \frac{D}{a} \{ \psi_0 + \psi_s \sin \theta + \psi_c \cos \theta \} \quad (4.12)$$

$$\psi_0 = \sum_{i=1}^{M_0} \Psi_i(\phi) T_i(t), \quad \Psi_i(\phi) = \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} \lambda_j P_j(\cos \phi)$$

$$\psi_s = \sum_{i=1}^{M_1} \Psi_i^1(\phi) T_i^s(t), \quad \psi_c = \sum_{i=1}^{M_1} \Psi_i^1(\phi) T_i^c(t), \quad \Psi_i^1 = \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \lambda_j P_j^1(\cos \phi)$$

ここに、

$$\lambda_j = \frac{(1-\nu)\{2-j(j+1)\} - \kappa}{1-\nu-j(j+1)}$$

4.4 非線形連立2階常微分方程式

本節では、モード重畳法による幾何学的非線形応答方程式の定式化を行う。モード重畳法は、法線方向運動方程式(4.9)に、(4.1.f)、(4.6)、(4.7)式を考慮しながら、仮定したたわみモード式(4.11)及び応力関数式(4.12)を代入し、続いて、得られた運動方程式の両辺に、3種の近似固有モード式

- (a) : $W_k \sin \phi$ 軸対称固有モード
- (b) : $W_k^1 \sin \phi \cos \theta$ 逆対称固有モード (cos θ 系列)
- (c) : $W_k^1 \sin \phi \sin \theta$ 逆対称固有モード (sin θ 系列)

を乗じ、 θ を(0, 2 π)の範囲で、 ϕ を(0, ϕ_0)の範囲で積分する Galerkin 法により行われる。これらの操作を行うと、 l 番目のモードに関する時間関数 T_l, T_l^c, T_l^s のみを含んだ非線形連立2階常微分方程式が最終的に得られる。以下の定式化中で用いている数式番号に含まれる(a)、(b)、(c)は、上述の3種類の近似固有モードを掛けた Galerkin 法を適用する操作を行っていることを示している。

これら、(a)~(c)の近似固有モードは θ 方向には(a) 1、(b) cos θ 、(c) sin θ の、 ϕ 方向には(a) $W_k \sin \phi$ 、(b) $W_k^1 \sin \phi$ 、(c) $W_k^1 \sin \phi$ の成分を持ち、また仮定したたわみモード式(4.11)等も変数 θ および ϕ について独立した式となっているので、Galerkin 法による領域積分は、初めに θ に関する近似固有モードに含まれるこれらの成分を掛けた後 θ に関して(0, 2 π)の範囲で積分を行い、その後 ϕ に関する近似固有モードに含まれるこれらの成分を掛けた後 ϕ に関して(0, ϕ_0)の範囲で積分を行う。

ここで、定式化を明確に表現するため、法線方向運動方程式(4.9)中の各項に以下の式番号(4.13)~(4.23)を付ける。(4.13)、(4.14)、(4.20)式が線形項であり、その他の項は非線形項となっている。

○左辺

$$[H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi)] \quad (4.13)$$

$$\frac{ma^4}{gD} \ddot{w} \quad (4.14)$$

$$-\frac{a^3}{D \sin \phi} (\sin \phi \Phi_{1L} \bar{N}_\phi + \sin \phi \Phi_{2L} \bar{N}_{\theta\phi})'' \quad (4.15)$$

$$-\frac{a^3}{D \sin \phi} (\Phi_{1L} \bar{N}_{\theta\phi} + \Phi_{2L} \bar{N}_\theta)' \quad (4.16)$$

$$-\frac{a^3}{D \sin \phi} \{\sin \phi ({}_N N_\phi + {}_N N_\theta)\} \quad (4.17)$$

$$-\frac{a^3}{D \sin \phi} (\sin \phi \Phi_{1N} N_\phi + \sin \phi \Phi_{2N} N_{\theta\phi})'' \quad (4.18)$$

$$-\frac{a^3}{D \sin \phi} (\Phi_{1N} N_{\theta\phi} + \Phi_{2N} N_\theta)' \quad (4.19)$$

○右辺

$$3 \frac{ma^4}{gD} \{\ddot{U} \cos \phi + \ddot{V} \sin \phi \cos \theta + \ddot{W} \sin \phi \sin \theta\} \quad (4.20)$$

$$\frac{ma^3}{gD} \ddot{U} \{\cos \phi H_0(w) - w'' \sin \phi\} \quad (4.21)$$

$$\frac{ma^3}{gD} \ddot{V} \{\sin \phi H_0(w) + w'' \cos \phi - w' \frac{\tan \theta}{\sin \phi}\} \quad (4.22)$$

$$\frac{ma^3}{gD} \ddot{W} \{\sin \phi H_0(w) + w'' \cos \phi + w' \frac{\cot \theta}{\sin \phi}\} \quad (4.23)$$

また、微分演算子

$$H_2(w) = \underline{H}_2(w_0) + \bar{H}_2(w_s) \sin \theta + \bar{H}_2(w_c) \cos \theta$$

を採用する。

なお、各上式の性質から、(4.13)、(4.14)式を線形項1、2、(4.15)~(4.19)式を非線形項1~5、(4.20)を線形外力項、(4.21)~(4.23)式を非線形外力項1~3と呼ぶこととする。

4.4.1 線形項積分

初めに線形項 ((4.13)、(4.14)、(4.20)式) に Galerkin 法を適用する。

(a)1、(b)cos θ 、(c)sin θ を掛けたあと 0~2 π まで θ について積分し π で割った結果を示し、その後、(a) $W_k \sin \phi$ 、(b) $W_k^1 \sin \phi$ 、(c) $W_k^1 \sin \phi$ を掛け 0~ ϕ_0 まで ϕ について積分する。なお、 ϕ 方向の積分の際に幾つかの Legendre 陪多項式の2重積の積分を定義するが、それらはまとめて後ほど示す。

○線形項1 ((4.13)式)

$$H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi) \quad (4.13)$$

(4.13.a) :

θ 方向積分

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi)] d\theta = 2 [H_2 H_2(w_0) - \frac{a}{D} H_2(\psi_0)]$$

上式に $W_l \sin \phi$ を掛け、 ϕ に関して 0~ ϕ_0 の範囲で積分する。

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(w_0) - \frac{a}{D} H_2(\psi_0)] W_l \sin \phi d\phi \\ &= 2 \int_0^{\phi_0} \left[\sum_{s=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{js} \{2 - j(j+1)\}^2 P_j T_s - \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{js} \lambda_j \{2 - j(j+1)\} P_j T_s \right] \times \sum_{i=1}^{N_0} G_{il} P_i \sin \phi d\phi \\ &= 2 \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} G_{js} G_{il} \{2 - j(j+1)\} \{2 - j(j+1) - \lambda_j\} \int_0^{\phi_0} P_j P_i \sin \phi d\phi \cdot T_s \end{aligned}$$

モードの直交性より、

$$= 2 \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} G_{ji} G_{ii} \{2 - j(j+1)\} \{2 - j(j+1) - \lambda_j\} S(j, i) T_i \equiv A_i^2 T_i$$

ここに、以下の式を定義する。

$$S(j, i) = \int_0^{\phi_0} P_j P_i \sin \phi d\phi$$

(上式の積分は國枝により Legendre 多項式の級数で与えられており [21, 22, 29], 4.4.4 節に採録している。)

(4.13.b) :

θ 方向積分

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi)] \cos \theta d\theta = \bar{H}_2 \bar{H}_2(w_c) - \frac{a}{D} \bar{H}_2(\psi_c)$$

上式に $W_i' \sin \phi$ を掛け、 ϕ に関して $0 \sim \phi_0$ の範囲で積分する。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\phi_0} [\bar{H}_2 \bar{H}_2(w_c) - \frac{a}{D} \bar{H}_2(\psi_c)] W_i' \sin \phi d\phi \\ &= \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{ji}^1 G_{ii}^1 \{2 - j(j+1)\} \{2 - j(j+1) - \lambda_j\} S^1(j, i) T_i^c \equiv B_i^2 T_i^c \end{aligned}$$

ここに、以下の式を定義する。

$$S^1(j, i) = \int_0^{\phi_0} P_j^1 P_i^1 \sin \phi d\phi$$

(4.4.3 項で Legendre 陪多項式の級数として表されることを示す)

(4.13.c) :

θ 方向積分

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi)] \sin \theta d\theta = \bar{H}_2 \bar{H}_2(w_s) - \frac{a}{D} \bar{H}_2(\psi_s)$$

(b) のときと同様にして、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\phi_0} [\bar{H}_2 \bar{H}_2(w_s) - \frac{a}{D} \bar{H}_2(\psi_s)] W_i' \sin \phi d\phi \\ &= \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{ji}^1 G_{ii}^1 \{2 - j(j+1)\} \{2 - j(j+1) - \lambda_j\} S^1(j, i) T_i^s \equiv B_i^2 T_i^s \end{aligned}$$

○線形項 2 ((4.14)式)

$$\frac{ma^4}{gD} \ddot{w} \quad (4.14)$$

(4.14.a) :

θ 方向積分

$$\frac{1}{\pi} \frac{ma^4}{gD} \int_0^{2\pi} \ddot{w} d\theta = 2 \frac{ma^4}{gD} \ddot{w}_0 = 2\kappa A \ddot{w}_0$$

ϕ 方向積分

$$2\kappa A \int_0^{\phi_0} \ddot{w}_0 W_i \sin \phi d\phi = 2\kappa A \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} G_{ji} G_{ii} S(j, i) \ddot{T}_i \equiv A_i^1 \ddot{T}_i$$

(4.14.b)

θ 方向積分

$$\frac{1}{\pi} \frac{ma^4}{gD} \int_0^{2\pi} \ddot{w} \cos \theta d\theta = \frac{ma^4}{gD} \ddot{w}_c = \kappa A \ddot{w}_c$$

ϕ 方向積分

$$\kappa A \int_0^{\phi_0} \ddot{w}_c W_i^1 \sin \phi d\phi = \kappa A \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{ji}^1 G_{ii}^1 S^1(j, i) \ddot{T}_i^c \equiv B_i^1 \ddot{T}_i^c$$

(4.14.c)

θ 方向積分

$$\frac{1}{\pi} \frac{ma^4}{gD} \int_0^{2\pi} \ddot{w} \sin \theta d\theta = \frac{ma^4}{gD} \ddot{w}_s = \kappa A \ddot{w}_s$$

ϕ 方向積分

$$\kappa A \int_0^{\phi_0} \ddot{w}_s W_i^1 \sin \phi d\phi = \kappa A \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{ji}^1 G_{ii}^1 S^1(j, i) \ddot{T}_i^s \equiv B_i^1 \ddot{T}_i^s$$

○線形外力項 ((4.20)式)

$$3 \frac{ma^4}{gD} \{ \ddot{U} \cos \phi + \ddot{V} \sin \phi \cos \theta + \ddot{W} \sin \phi \sin \theta \} \quad (4.20)$$

(4.20.a) :

θ 方向積分

$$3 \frac{ma^4}{gD} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{ \ddot{U} \cos \phi + \ddot{V} \sin \phi \cos \theta + \ddot{W} \sin \phi \sin \theta \} d\theta = 3 \frac{ma^4}{gD} \cdot 2\ddot{U} \cos \phi = 6\kappa A \ddot{U} \cos \phi$$

ϕ 方向積分

$$\begin{aligned} 6\kappa A \ddot{U} \int_0^{\phi_0} \cos \phi W_i \sin \phi d\phi &= 6\kappa A \ddot{U} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} \int_0^{\phi_0} P_j \cos \phi \cdot \sin \phi d\phi \\ &= 6\kappa A \ddot{U} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} S(1, j) = A_i^1 \ddot{U} \quad (\because \cos \phi = P_1) \end{aligned}$$

(4.20.b) :

θ 方向積分

$$\begin{aligned} & 3 \frac{ma^4}{gD} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{\ddot{U} \cos \phi + \ddot{V} \sin \phi \cos \theta + \ddot{W} \sin \phi \sin \theta\} \cos \theta d\theta \\ & = 3 \frac{ma^4}{gD} \cdot \ddot{V} \sin \phi = 3\kappa A \ddot{V} \sin \phi \end{aligned}$$

ϕ 方向積分

$$\begin{aligned} & 3\kappa A \ddot{V} \sum_{j=1}^{N_1} G_{j1}^1 \int_0^{\pi} P_j^1 \sin \phi \cdot \sin \phi d\phi = 3\kappa A \ddot{V} \sum_{j=1}^{N_1} G_{j1}^1 S^1(1, j) \quad (\because \sin \phi = P_1^1) \\ & \equiv B_j^1 \ddot{V} \end{aligned}$$

(4.20.c)

θ 方向積分

$$\begin{aligned} & 3 \frac{ma^4}{gD} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{\ddot{U} \cos \phi + \ddot{V} \sin \phi \cos \theta + \ddot{W} \sin \phi \sin \theta\} \sin \theta d\theta \\ & = 3 \frac{ma^4}{gD} \cdot \ddot{W} \sin \phi = 3\kappa A \ddot{W} \sin \phi \end{aligned}$$

ϕ 方向積分：(b)のときと同様にして

$$= B_j^1 \ddot{W}$$

4.4.2 非線形項積分

非線形項となる部分の項の定式化を示す。非線形項は Legendre (陪) 多項式の多重積分を含むため、初めに、これらの積分を行うときに使用する係数 a_l 、 b_l の定義を行い、 $D_{jk,n}^{aa}$ 、 $D_{jk,n}^{ah}$ 、 $D_{jk,n}^{ba}$ 、 $D_{jk,n}^{bh}$ 、 E_{ijk} の記号を導入する。その後、 θ に関して $0 \sim 2\pi$ の区間で積分した式を示し、続いて、 ϕ 方向積分を実行する。なお、前項と同様に ϕ 方向の積分の際に幾つかの Legendre 陪多項式の 2 重積および 3 重積の積分を定義するが、それらは Legendre 陪多項式の級数で表され、それらはまとめて後ほど示す。

(1) 係数 a_l 、 b_l および $D_{jk,n}^{aa}$ 、 $D_{jk,n}^{ah}$ 、 $D_{jk,n}^{ba}$ 、 $D_{jk,n}^{bh}$ 、 E_{ijk} の定義

Legendre (陪) 多項式の 3 重積分、4 重積分を行うため、これらの記号の定義を行う。

○係数 a_l について

$$\bar{P}_j(\cos \phi) \equiv \frac{1}{\sin \phi} P_j^1(\cos \phi)$$

を定義すると、この \bar{P}_j は以下のように Legendre 多項式の和で表すことができる。

$$\bar{P}_j(\cos \phi) = \sum_{l=0}^j a_l^j P_l$$

ここに、 a_l は以下の係数となる。

$$a_l^j = \begin{cases} 2l+1 & l < j \text{ and } |j-l| = \text{odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

○係数 b_l について

先に定義した \bar{P}_j を用いて、以下の式を満たす係数 b_l を定義することができる。

$$P_j^{l0} = (j+1)^2 P_j - \bar{P}_{j+1} = \sum_{m=1}^j b_m^j P_m$$

ここで、

$$\bar{P}_j(\cos \phi) = \sum_{l=0}^j a_l^j P_l$$

を用いると、係数 b_l は以下ようになる。

$$b_l^j = \begin{cases} (j+1)^2 - a_j^{j+1} & (l=j) \\ -a_l^{j+1} & (l \neq j) \end{cases}$$

○ $D_{jk,n}^{aa}$ 、 $D_{jk,n}^{ah}$ 、 $D_{jk,n}^{ba}$ 、 $D_{jk,n}^{bh}$ 、 E_{ijk}

下記の式を満たす $D_{jk,n}^{aa}$ 、 $D_{jk,n}^{ah}$ 、 $D_{jk,n}^{ba}$ 、 $D_{jk,n}^{bh}$ を導入する。

$$\sum_{n=1}^{j+k-2} D_{jk,n}^{aa} P_n = \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{m=1}^{k-1} a_l^j a_m^k P_l P_m$$

$$\sum_{n=1}^{j+k-1} D_{jk,n}^{ah} P_n = \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{m=1}^k a_l^j b_m^k P_l P_m$$

$$\sum_{n=1}^{j+k-1} D_{jk,n}^{ba} P_n = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^{k-1} b_l^j a_m^k P_l P_m$$

$$\sum_{n=1}^{j+k} D_{jk,n}^{bh} P_n = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k b_l^j b_m^k P_l P_m$$

これらの式の両辺に P_0 を掛けて $-1 \sim +1$ まで積分すると左辺で非ゼロとなるのは $n=0$ のときのみであり、このとき左辺は $2l(2n+1)$ をとるので

$$D_{jk,n}^{aa} = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k a_l^j a_m^k F^0(l, m, n) \times (2n+1)/2$$

$$D_{jk,n}^{ah} = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k a_l^j b_m^k F^0(l, m, n) \times (2n+1)/2$$

$$D_{jk,n}^{ba} = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k b_l^j a_m^k F^0(l, m, n) \times (2n+1)/2$$

$$D_{jk,n}^{bh} = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k b_l^j b_m^k F^0(l, m, n) \times (2n+1)/2$$

となる。ここに、関数 F は Gaunt により示された Legendre 陪多項式の 3 重積の積分を Legendre 陪多

項式の級数で表したものであり、その内容は 4.4.4 項に示す。

また、以下の式を満たす E_{ijk} を導入する。

$$P_i^1 P_j^1 = \sum_{l=0}^{i+j} E_{ijl} P_l^1$$

両辺に P_0 を掛けて $-1 \sim +1$ まで積分すると、右辺で非ゼロとなるのは $l=0$ のときのみで、このとき右辺は $2/(2l+1)$ をとるので、

$$E_{ijk} = F^1(i, j, k) \times (2k+1)/2$$

となる。

(2) θ 方向積分

式(4.1.f)および式(4.6)~(4.8)にたわみモード式(4.11)および(4.12)を代入し、 θ に関して整理すると以下のように表すことができる。

$$\Phi_1 = \frac{1}{a} (\Phi_1^{00} + \Phi_1^{01} \sin \theta + \Phi_1^{10} \cos \theta)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{a} (\Phi_2^{01} \sin \theta + \Phi_2^{10} \cos \theta)$$

$${}_L N_\phi = \frac{D}{a^3} ({}_L N_\phi^{00} + {}_L N_\phi^{01} \sin \theta + {}_L N_\phi^{10} \cos \theta)$$

$${}_L N_\theta = \frac{D}{a^3} ({}_L N_\theta^{00} + {}_L N_\theta^{01} \sin \theta + {}_L N_\theta^{10} \cos \theta)$$

$${}_L N_{\theta\phi} = \frac{D}{a^3} ({}_L N_{\theta\phi}^{01} \sin \theta + {}_L N_{\theta\phi}^{10} \cos \theta)$$

$${}_N N_\phi = \frac{1}{2a^2} \frac{Eh}{1-\nu^2} ({}_N N_\phi^{00} + {}_N N_\phi^{01} \sin \theta + {}_N N_\phi^{10} \cos \theta + {}_N N_\phi^{02} \sin^2 \theta + {}_N N_\phi^{11} \cos \theta \sin \theta + {}_N N_\phi^{20} \cos^2 \theta)$$

$${}_N N_\theta = \frac{1}{2a^2} \frac{Eh}{1-\nu^2} ({}_N N_\theta^{00} + {}_N N_\theta^{01} \sin \theta + {}_N N_\theta^{10} \cos \theta + {}_N N_\theta^{02} \sin^2 \theta + {}_N N_\theta^{11} \cos \theta \sin \theta + {}_N N_\theta^{20} \cos^2 \theta)$$

$${}_N N_{\theta\phi} = \frac{1}{2a^2} \frac{Eh}{1-\nu^2} ({}_N N_{\theta\phi}^{01} \sin \theta + {}_N N_{\theta\phi}^{10} \cos \theta + {}_N N_{\theta\phi}^{02} \sin^2 \theta + {}_N N_{\theta\phi}^{11} \cos \theta \sin \theta + {}_N N_{\theta\phi}^{20} \cos^2 \theta)$$

ここに、

$$\Phi_1^{00} = w_0^o, \quad \Phi_1^{01} = w_s^o, \quad \Phi_1^{10} = w_c^o, \quad \Phi_2^{01} = -\frac{w_c^o}{\sin \phi}, \quad \Phi_2^{10} = \frac{w_s^o}{\sin \phi}$$

$${}_L N_\phi^{00} = \cot \phi \cdot \psi_0^o + \psi_0 - \bar{H}_2(w_0)$$

$${}_L N_\phi^{01} = -\frac{1}{\sin^2 \phi} \psi_s^o + \cot \phi \cdot \psi_s^o + \psi_s - \bar{H}_2(w_s)$$

$${}_L N_\phi^{10} = -\frac{1}{\sin^2 \phi} \psi_c^o + \cot \phi \cdot \psi_c^o + \psi_c - \bar{H}_2(w_c)$$

$${}_L N_\theta^{00} = \psi_0^{oo} + \psi_0 - \bar{H}_2(w_0), \quad {}_L N_\theta^{01} = \psi_s^{oo} + \psi_s - \bar{H}_2(w_s)$$

$${}_L N_\theta^{10} = \psi_c^{oo} + \psi_c - \bar{H}_2(w_c)$$

$${}_L N_{\theta\phi}^{01} = \frac{1}{\sin \phi} \psi_c^o - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \psi_c, \quad {}_L N_{\theta\phi}^{10} = -\frac{1}{\sin \phi} \psi_s^o + \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \psi_s$$

$${}_N N_\phi^{00} = (w_0^o)^2, \quad {}_N N_\phi^{01} = 2w_0^o w_s^o, \quad {}_N N_\phi^{10} = 2w_0^o w_c^o$$

$${}_N N_\phi^{02} = (w_s^o)^2 + \frac{\nu}{\sin^2 \phi} (w_c^o)^2, \quad {}_N N_\phi^{11} = 2w_s^o w_c^o - 2\frac{\nu}{\sin^2 \phi} w_s w_c$$

$${}_N N_\phi^{20} = (w_c^o)^2 + \frac{\nu}{\sin^2 \phi} (w_s^o)^2$$

$${}_N N_\theta^{00} = \nu(w_0^o)^2, \quad {}_N N_\theta^{01} = 2\nu w_0^o w_s^o, \quad {}_N N_\theta^{10} = 2\nu w_0^o w_c^o$$

$${}_N N_\theta^{02} = \nu(w_s^o)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_c^o)^2, \quad {}_N N_\theta^{11} = 2\nu w_s^o w_c^o - 2\frac{1}{\sin^2 \phi} w_s w_c$$

$${}_N N_\theta^{20} = \nu(w_c^o)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_s^o)^2$$

$${}_N N_{\theta\phi}^{01} = -(1-\nu) \frac{1}{\sin \phi} w_0^o w_c^o, \quad {}_N N_{\theta\phi}^{10} = (1-\nu) \frac{1}{\sin \phi} w_0^o w_s^o, \quad {}_N N_{\theta\phi}^{02} = -(1-\nu) \frac{1}{\sin \phi} w_s^o w_c^o$$

$${}_N N_{\theta\phi}^{11} = (1-\nu) \frac{1}{\sin \phi} (w_s^o w_s^o - w_c^o w_c^o), \quad {}_N N_{\theta\phi}^{20} = (1-\nu) \frac{1}{\sin \phi} w_c^o w_s^o$$

であり、上付の2桁の数字は十の位がその式に掛かる $\cos \theta$ の個数、一の位がその式に掛かる $\sin \theta$ の個数を示している。(つまり、上付の数字が 21 であると $\cos^2 \theta \sin \theta$ に掛かる式であることを示している。)。この2桁の数字を用いると θ 方向の積分結果を容易に表すことができるので、非線形項 1~5 ((4.15)~(4.19)式) に(a)1、(b) $\cos \theta$ 、(c) $\sin \theta$ を乗じ $0 \sim 2\pi$ まで θ について積分し π で割った結果のみを示す。

○非線形項 1 ((4.15)式)

$$-\frac{a^3}{D \sin \phi} (\sin \phi \Phi_{1L} \bar{N}_\phi + \sin \phi \Phi_{2L} \bar{N}_{\theta\phi})^o \quad (4.15)$$

$$(4.15.a) : -\frac{1}{a \sin \phi} [\sin \phi \{2\Phi_{1L} N_\phi^{00} + \Phi_{1L} N_\phi^{10} + \Phi_{1L} N_\phi^{01} + \Phi_{2L} N_{\theta\phi}^{10} + \Phi_{2L} N_{\theta\phi}^{01}\}]^o$$

$$(4.15.b) : -\frac{1}{a \sin \phi} [\sin \phi \{ \Phi_{1L}^{00} N_{\phi}^{10} + \Phi_{1L}^{10} N_{\phi}^{00} \}]'$$

$$(4.15.c) : -\frac{1}{a \sin \phi} [\sin \phi \{ \Phi_{1L}^{00} N_{\phi}^{01} + \Phi_{1L}^{01} N_{\phi}^{00} \}]'$$

○非線形項 2 ((4.16)式)

$$-\frac{a^3}{D \sin \phi} (\Phi_{1L} \bar{N}_{\theta\phi} + \Phi_{2L} \bar{N}_{\theta})' \quad (4.16)$$

(4.16.a) : 0

$$(4.16.b) : -\frac{1}{a \sin \phi} [\Phi_{1L}^{00} N_{\theta\phi}^{01} + \Phi_{2L}^{01} N_{\theta}^{00}]$$

$$(4.16.c) : \frac{1}{a \sin \phi} [\Phi_{1L}^{00} N_{\theta\phi}^{10} + \Phi_{2L}^{10} N_{\theta}^{00}]$$

○非線形項 3 ((4.17)式)

$$-\frac{a^3}{D \sin \phi} \{ \sin \phi ({}_N N_{\phi} + {}_N N_{\theta}) \} \quad (4.17)$$

$$(4.17.a) : -\frac{6a}{h^2} [2{}_N N_{\phi}^{00} + 2{}_N N_{\theta}^{00} + {}_N N_{\phi}^{20} + {}_N N_{\theta}^{20} + {}_N N_{\phi}^{02} + {}_N N_{\theta}^{02}]$$

$$(4.17.b) : -\frac{6a}{h^2} [{}_N N_{\phi}^{10} + {}_N N_{\theta}^{10}]$$

$$(4.17.c) : -\frac{6a}{h^2} [{}_N N_{\phi}^{01} + {}_N N_{\theta}^{01}]$$

○非線形項 4 ((4.18)式)

$$-\frac{a^3}{D \sin \phi} (\sin \phi \Phi_{1N} N_{\phi} + \sin \phi \Phi_{2N} N_{\theta\phi})' \quad (4.18)$$

$$(4.18.a) : -\frac{6}{h^2 \sin \phi} [\sin \phi (2\Phi_{1N}^{00} N_{\phi}^{00} + \Phi_{1N}^{00} N_{\phi}^{20} + \Phi_{1N}^{00} N_{\phi}^{02} + \Phi_{1N}^{10} N_{\phi}^{10} + \Phi_{1N}^{01} N_{\phi}^{01} + \Phi_{2N}^{10} N_{\theta\phi}^{10} + \Phi_{2N}^{01} N_{\theta\phi}^{01})]'$$

$$(4.18.b) : -\frac{6}{h^2 \sin \phi} [\sin \phi (\Phi_{1N}^{00} N_{\phi}^{10} + \Phi_{1N}^{10} N_{\phi}^{00} + \frac{3}{4} \Phi_{1N}^{10} N_{\phi}^{20} + \frac{1}{4} \Phi_{1N}^{10} N_{\phi}^{02} + \frac{1}{4} \Phi_{1N}^{01} N_{\phi}^{11} + \frac{3}{4} \Phi_{2N}^{10} N_{\theta\phi}^{20} + \frac{1}{4} \Phi_{2N}^{10} N_{\theta\phi}^{02} + \frac{1}{4} \Phi_{2N}^{01} N_{\theta\phi}^{11})]'$$

$$(4.18.c) : -\frac{6}{h^2 \sin \phi} [\sin \phi (\Phi_{1N}^{00} N_{\phi}^{01} + \frac{1}{4} \Phi_{1N}^{10} N_{\phi}^{11} + \Phi_{1N}^{01} N_{\phi}^{00} + \frac{1}{4} \Phi_{1N}^{01} N_{\phi}^{20})]'$$

$$+ \frac{3}{4} \Phi_{1N}^{01} N_{\phi}^{02} + \frac{1}{4} \Phi_{2N}^{10} N_{\theta\phi}^{11} + \frac{1}{4} \Phi_{2N}^{01} N_{\theta\phi}^{20} + \frac{3}{4} \Phi_{2N}^{01} N_{\theta\phi}^{02})]'$$

○非線形項 5 ((4.19)式)

$$-\frac{a^3}{D \sin \phi} (\Phi_{1N} N_{\theta\phi} + \Phi_{2N} N_{\theta})' \quad (4.19)$$

(4.19.a) : 0

$$(4.19.b) : -\frac{6}{h^2 \sin \phi} [\Phi_{1N}^{00} N_{\theta\phi}^{01} + \frac{1}{4} \Phi_{1N}^{10} N_{\theta\phi}^{11} + \frac{1}{4} \Phi_{1N}^{01} N_{\theta\phi}^{20} + \frac{3}{4} \Phi_{1N}^{01} N_{\theta\phi}^{02} + \frac{1}{4} \Phi_{2N}^{10} N_{\theta}^{11} + \Phi_{2N}^{01} N_{\theta}^{00} + \frac{1}{4} \Phi_{2N}^{01} N_{\theta}^{20} + \frac{3}{4} \Phi_{2N}^{01} N_{\theta}^{02}]$$

$$(4.19.c) : \frac{6}{h^2 \sin \phi} [\Phi_{1N}^{00} N_{\theta\phi}^{10} + \frac{3}{4} \Phi_{1N}^{10} N_{\theta\phi}^{20} + \frac{1}{4} \Phi_{1N}^{10} N_{\theta\phi}^{02} + \frac{1}{4} \Phi_{1N}^{01} N_{\theta\phi}^{11} + \Phi_{2N}^{10} N_{\theta}^{00} + \frac{3}{4} \Phi_{2N}^{10} N_{\theta}^{20} + \frac{1}{4} \Phi_{2N}^{10} N_{\theta}^{02} + \frac{1}{4} \Phi_{2N}^{01} N_{\theta}^{11}]$$

続いて ϕ 方向に関する積分を実行する。

(3)軸対称支配方程式に含まれる非線形項分

●時間関数が2次式 $T_s T_t$ となる項

(4.15.a)、(4.17.a)の一部

$$-\frac{1}{a \sin \phi} [\sin \phi \cdot 2\Phi_{1L}^{00} N_{\phi}^{00}]' - \frac{6a}{h^2} [2{}_N N_{\phi}^{00} + 2{}_N N_{\theta}^{00}]$$

に $W \sin \phi$ を掛け、 ϕ に関して $0 \sim \phi_0$ まで積分することで得られる。

○1項目

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} [\sin \phi \cdot 2\Phi_{1L}^{00} N_{\phi}^{00}]' W_t d\phi \\ & = -\frac{1}{a} [\sin \phi \cdot 2\Phi_{1L}^{00} N_{\phi}^{00} W_t]_0^{\phi_0} + \frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} \sin \phi \cdot 2\Phi_{1L}^{00} N_{\phi}^{00} W_t' d\phi \\ & = \frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} 2w_0' W_t' N_{\phi}^{00} \sin \phi d\phi \\ & = \frac{1}{a} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} 2G_{is} G_{jt} \int_0^{\phi_0} P_i^s P_j^t N_{\phi}^{00} \sin \phi d\phi T_s \\ & = \frac{1}{a} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} 2C_{ksl} \int_0^{\phi_0} P_{kl} N_{\phi}^{00} \sin \phi d\phi T_s \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_0} 2C_{ksl} G_{jl} \int_0^{\phi_0} P_k [\lambda_j \cot \phi \cdot P_j^o + \{\lambda_j - 2 + j(j+1)\} P_j] \sin \phi d\phi T_s T_l$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k=0}^{N_2} 2C_{ksl} G_{jl} [\lambda_j S_2(k, j) + \{\lambda_j - 2 + j(j+1)\} S(k, j)] T_s T_l$$

ここに、

$$S_2(k, j) = \int_0^{\phi_0} P_k P_j^o \cos \phi d\phi$$

であり、國枝により Legendre 多項式の級数として表されており[21,22,29]、4.4.4 項に採録している。

○2 項目

$$= -\frac{6a}{h^2} \int_0^{\phi_0} [2_N N_\phi^{00} + 2_N N_\theta^{00}] W_l \sin \phi d\phi$$

$$= -\frac{12a}{h^2} (1+\nu) \int_0^{\phi_0} (w_0^o)^2 W_l \sin \phi d\phi$$

$$= -\frac{\kappa}{(1-\nu)} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{jl} \int_0^{\phi_0} P_i^o P_j^o W_l \sin \phi d\phi T_s T_l$$

$$= -\frac{\kappa}{(1-\nu)} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} C_{ksl} \int_0^{\phi_0} P_k W_l \sin \phi d\phi T_s T_l$$

$$= -\frac{\kappa}{(1-\nu)} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k=0}^{N_2} C_{ksl} G_{jl} \int_0^{\phi_0} P_k P_l \sin \phi d\phi T_s T_l$$

$$= -\frac{\kappa}{(1-\nu)} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k=0}^{N_2} C_{ksl} G_{jl} S(k, j) T_s T_l$$

これら2つの式を合わせると以下のようなになる。

$$\frac{1}{a} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k=0}^{N_2} [2\lambda_j C_{ksl} G_{jl} S_2(k, j) + \{2\{\lambda_j - 2 + j(j+1)\} C_{ksl} G_{jl}$$

$$- \kappa C_{ksl} G_{jl} / (1-\nu)\} S(k, j)] T_s T_l$$

●時間関数が2次式 $T_s^c T_l^c$ となる項 ($T_s^s T_l^s$ の項と一致する)

(4.15.a)と(4.17.a)の一部

$$= -\frac{1}{a \sin \phi} [\sin \phi \{\Phi_{1l}^{10} N_\phi^{10} + \Phi_{1l}^{01} N_\phi^{01} + \Phi_{2l}^{10} N_{\theta\phi}^{10} + \Phi_{2l}^{01} N_{\theta\phi}^{01}\}]^o$$

$$= -\frac{6a}{h^2} [N N_\phi^{20} + N N_\theta^{20} + N N_\phi^{02} + N N_\theta^{02}]$$

より求められる。第1項の{}内を展開すると、

$$w_c^o \left[-\frac{1}{\sin^2 \phi} \psi_c + \cot \phi \cdot \psi_c^o + \psi_c - \bar{H}_2(w_c) \right] - \frac{w_c}{\sin \phi} \left\{ \frac{1}{\sin \phi} \psi_c^o - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \psi_c \right\}$$

$$+ w_s^o \left[-\frac{1}{\sin^2 \phi} \psi_s + \cot \phi \cdot \psi_s^o + \psi_s - \bar{H}_2(w_s) \right] - \frac{w_s}{\sin \phi} \left\{ \frac{1}{\sin \phi} \psi_s^o - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \psi_s \right\}$$

となり、時間関数 $T_s^c T_l^c$ と時間関数 $T_s^s T_l^s$ に関して対称な式になることがわかる。また、第2項の[]内も同様に

$$(1+\nu) \left\{ (w_c^o)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_c)^2 + (w_s^o)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_s)^2 \right\}$$

であるから、時間関数 $T_s^c T_l^c$ と時間関数 $T_s^s T_l^s$ に関して対称な式になることがわかるので、ここでは時間関数 $T_s^c T_l^c$ に関する項のみを計算すればよい。よって、

$$= -\frac{1}{a \sin \phi} \left[\sin \phi \left\{ w_c^o \left\{ -\frac{1}{\sin^2 \phi} \psi_c + \cot \phi \cdot \psi_c^o + \psi_c - \bar{H}_2(w_c) \right\} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{w_c}{\sin \phi} \left\{ \frac{1}{\sin \phi} \psi_c^o - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \psi_c \right\} \right\} \right]^o - \frac{6a}{h^2} (1+\nu) \left\{ (w_c^o)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_c)^2 \right\}$$

に $W_l \sin \phi$ を掛け、 ϕ に関して $0 \sim \phi_0$ まで積分することで得られる。部分積分を実行し境界条件 ($w=0$ at $\phi=\phi_0$) および $\sin 0=0$ を考慮すると非積分項は0となるので、上式を ϕ に関して積分した結果は以下のようなになる。

$$= \frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} \left[\sin \phi w_c^o \left\{ -\frac{1}{\sin^2 \phi} \psi_c + \cot \phi \cdot \psi_c^o + \psi_c - \bar{H}_2(w_c) \right\} \right.$$

$$\left. - w_c \left\{ \frac{1}{\sin \phi} \psi_c^o - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \psi_c \right\} \right] W_l^o d\phi$$

$$- \frac{6a}{h^2} (1+\nu) \int_0^{\phi_0} \left[(w_c^o)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_c)^2 \right] W_l \sin \phi d\phi$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_0} G_{is}^1 G_{jl}^1 G_{kl} \int_0^{\phi_0} P_k^o [\sin \phi P_i^{1o} \lambda_j \left\{ -\frac{1}{\sin^2 \phi} P_j^1 + \cot \phi \cdot P_j^{1o} + P_j^1 \right\}$$

$$- \sin \phi P_i^{1o} \{2 - j(j+1)\} P_j^1 - \lambda_j P_i^1 \left\{ \frac{1}{\sin \phi} P_j^{1o} - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} P_j^1 \right\}] d\phi T_s^c T_l^c$$

$$- \frac{\kappa}{2a(1-\nu)} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_0} G_{is}^1 G_{jl}^1 G_{kl} \int_0^{\phi_0} P_k [P_i^{1o} P_j^{1o} - \frac{1}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1] \sin \phi d\phi T_s^c T_l^c$$

よって、

$$= \frac{1}{a} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_0} G_{is}^1 G_{jl}^1 G_{kl} [\lambda_j \{-Q_1(k, i, j) - Q_1(k, i, j)$$

$$+ Q_2(k, j, i) + Q_3(k, j, i)\} + \{\lambda_j - 2 + j(j+1)\} Q_4(k, j, i)$$

$$- \kappa \{Q_5(k, j, i) + Q_6(k, j, i)\} / 2(1-\nu)] (T_s^c T_l^c + T_s^s T_l^s)$$

ここに、Legendre 多項式の3重積分を以下のように定義する。

$$Q_1(i, j, k) = - \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \frac{1}{\sin \phi} d\phi$$

$$Q_2(i, j, k) = - \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \cos \phi d\phi$$

$$Q_3(i, j, k) = - \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} d\phi$$

$$Q_4(i, j, k) = - \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \sin \phi d\phi$$

$$Q_5(i, j, k) = \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \sin \phi d\phi$$

$$Q_6(i, j, k) = \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \frac{1}{\sin \phi} d\phi$$

これらの式は「4.4.3 項 Legendre 陪多項式重積の積分」で閉形表現を与える。

●時間関数が3次式 $T_s T_i T_u$ および $T_s T_i^c T_u^c$ となる項 ($T_s T_i^c T_u^c$ の項は $T_s T_i T_u^s$ の項と一致する)

これらの項は(4.18.a)式より計算される。

$$(4.18.a) \quad -\frac{6}{h^2} \frac{1}{\sin \phi} [\sin \phi (2\Phi_{1N}^{00} N_\phi^{00} + \Phi_{1N}^{00} N_\phi^{20} + \Phi_{1N}^{00} N_\phi^{02} + \Phi_{1N}^{10} N_\phi^{10} \\ + \Phi_{1N}^{01} N_\phi^{01} + \Phi_{2N}^{10} N_{\phi\theta}^{10} + \Phi_{2N}^{01} N_{\phi\theta}^{01})] \\ = -\frac{6}{h^2} \frac{1}{\sin \phi} [2(w_0^0)^3 \sin \phi + w_0^0 \sin \phi \{3(w_c^0)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_c^0)^2\} \\ + w_0^0 \sin \phi \{3(w_s^0)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_s^0)^2\}]$$

に $W \sin \phi$ を掛け、 ϕ に関して $0 \sim \phi_0$ まで積分することで得られる。部分積分を実行し時間関数の2次式 $T_s^c T_i^c$ のときと同様に境界条件等を考慮すると、上式を ϕ に関して積分した結果は以下のようになる。

$$\frac{6}{h^2} \int_0^{\phi_0} 2(w_0^0)^3 W_i^0 \sin \phi d\phi \\ + \frac{6}{h^2} \int_0^{\phi_0} w_0^0 W_i^0 \{3(w_c^0)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_c^0)^2\} \sin \phi d\phi \\ + \frac{6}{h^2} \int_0^{\phi_0} w_0^0 W_i^0 \{3(w_s^0)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_s^0)^2\} \sin \phi d\phi$$

上式の第1項より時間関数の3次式 $T_s T_i T_u$ に関する係数が計算される。また第2項及び第3項は時間関数 $T_s^c T_i^c$ と時間関数 $T_s^s T_i^s$ に関して対称な式になっており、第2項のみを用いて時間関数の3次式 $T_s T_i T_u^c$ および時間関数の3次式 $T_s T_i T_u^s$ に関する係数を導出することが出来る。

○第1項 (時間関数の3次式 $T_s T_i T_u$ に関する係数)

$$\frac{6}{h^2} \int_0^{\phi_0} 2(w_0^0)^3 W_i^0 \sin \phi d\phi \\ = \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} 2G_{is} G_{jt} \int_0^{\phi_0} P_i^0 P_j^0 w_0^0 W_i^0 \sin \phi d\phi T_s T_t \\ = \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} 2C_{ksl} \int_0^{\phi_0} P_k w_0^0 W_i^0 \sin \phi d\phi T_s T_t \\ = \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} \sum_{u=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} 2C_{ksl} G_{iu} G_{jl} \int_0^{\phi_0} P_k P_i^0 P_j^0 \sin \phi d\phi T_s T_t T_u \\ = \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{u=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{N_2} 2C_{ksl} C_{jul} \int_0^{\phi_0} P_k P_j \sin \phi d\phi T_s T_t T_u \\ = \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{u=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{N_2} 2C_{ksl} C_{jul} S(k, j) T_s T_t T_u \\ = \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{u=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{N_2} 2C_{ksl} C_{jul} S(k, j) T_s T_t T_u$$

○第2項 (時間関数の3次式 $T_s T_i^c T_u^c$ および $T_s T_i^s T_u^s$ に関する係数)

$$\frac{6}{h^2} \int_0^{\phi_0} w_0^0 W_i^0 \{3(w_c^0)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_c^0)^2\} \sin \phi d\phi \\ = \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{jt} \int_0^{\phi_0} P_i^0 P_j^0 \{3(w_c^0)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_c^0)^2\} \sin \phi d\phi T_s \\ = \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} C_{ksl} \int_0^{\phi_0} P_k \{3(w_c^0)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} (w_c^0)^2\} \sin \phi d\phi T_s \\ = \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} C_{ksl} G_{it}^1 G_{ju}^1 \int_0^{\phi_0} P_k \{3P_i^{1^0} P_j^{1^0} + \frac{1}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1\} \sin \phi d\phi T_s T_i^c T_u^c \\ = \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} C_{ksl} G_{it}^1 G_{ju}^1 [3Q_5(k, j, i) + Q_6(k, j, i)] T_s T_i^c T_u^c$$

(4) 逆対称支配方程式に含まれる非線形項分

●時間関数が2次式 $T_s T_i^c$ となる項 ($T_s T_i^s$ の項と一致する)

(4.15.b)+(4.16.b)+(4.17.b)に $W_i^1 \sin \phi$ を掛け、 ϕ に関して $0 \sim \phi_0$ まで積分することで得られる。

$$-\frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} [\sin \phi \{\Phi_{1L}^{00} N_\phi^{10} + \Phi_{1L}^{10} N_\phi^{00}\}]^0 W_i^1 d\phi - \frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} [\Phi_{1L}^{00} N_{\phi\theta}^{01} + \Phi_{2L}^{01} N_\theta^{00}] W_i^1 d\phi \\ - \frac{1}{a} \frac{6a^2}{h^2} \int_0^{\phi_0} [N_\phi^{10} + N_\theta^{10}] \sin \phi W_i^1 d\phi$$

第1項を部分積分し、境界条件等を考慮すると、

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} [\{\Phi_{1L}^{00} N_{\phi}^{10} + \Phi_{1L}^{10} N_{\phi}^{00}\}] W_1^{10} \sin \phi d\phi - \frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} [\Phi_{1L}^{00} N_{\theta\phi}^{01} + \Phi_{2L}^{01} N_{\theta}^{00}] W_1^1 d\phi \\
&\quad - \frac{1}{a} \frac{12a^2}{h^2} (1+\nu) \int_0^{\phi_0} w_c^o w_0^o W_1^1 \sin \phi d\phi \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} w_0^o \left[-\frac{1}{\sin^2 \phi} \psi_c + \cot \phi \cdot \psi_c^o + \psi_c - \bar{H}_2(w_c) \right] W_1^{10} \sin \phi d\phi \\
&\quad + \frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} [\cot \phi \cdot \psi_0^o + \psi_0 - \underline{H}_2(w_0)] w_c^o W_1^{10} \sin \phi d\phi \\
&\quad - \frac{1}{a} \int_0^{\phi_0} \left[w_0^o \left\{ \frac{1}{\sin \phi} \psi_c^o - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \psi_c \right\} - \{ \psi_0^{oo} + \psi_0 - \underline{H}_2(w_0) \} \frac{w_c}{\sin \phi} \right] W_1^1 d\phi \\
&\quad - \frac{1}{a} \frac{\kappa}{(1-\nu)} \int_0^{\phi_0} w_0^o w_c^o W_1^1 \sin \phi d\phi \\
&= \frac{1}{a} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} G_{is} G_{jl} G_{kl} [\\
&\quad \int_0^{\phi_0} P_i^o [\lambda_j \{ -\frac{1}{\sin^2 \phi} P_j^1 + \cot \phi \cdot P_j^{1o} + P_j^1 \} - \{ 2 - j(j+1) \} P_j^1] P_k^{1o} \sin \phi d\phi \\
&\quad + \int_0^{\phi_0} [\lambda_i \{ \cot \phi \cdot P_i^o + P_i \} - \{ 2 - i(i+1) \} P_i] P_j^1 P_k^{1o} \sin \phi d\phi \\
&\quad - \int_0^{\phi_0} P_i^o \left[\frac{1}{\sin \phi} P_j^{1o} - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} P_j^1 \right] P_k^1 d\phi \\
&\quad + \int_0^{\phi_0} [-\lambda_i \{ \cot \phi P_i^o + i(i+1) P_i \} + \lambda_i P_i - \{ 2 - i(i+1) \} P_i] \frac{P_j^1}{\sin \phi} P_k^1 d\phi \\
&\quad - \frac{\kappa}{(1-\nu)} \int_0^{\phi_0} P_i^o P_j^{1o} P_k^1 \sin \phi d\phi \quad] T_s T_i^c \\
&= \frac{1}{a} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} G_{is} G_{jl} G_{kl} [-\lambda_j \{ Q_1(i, j, k) + Q_1(i, k, j) \} \\
&\quad + (\lambda_i + \lambda_j) Q_2(i, j, k) + (-\lambda_i + \lambda_j) Q_3(i, j, k) + \{ \lambda_j - 2 + j(j+1) \} Q_4(i, j, k) \\
&\quad - \kappa Q_4(i, k, j) / (1-\nu) + \{ \lambda_i - 2 + i(i+1) \} Q_5(i, j, k) \\
&\quad + \{ -i(i+1) \lambda_i + \lambda_i - 2 + i(i+1) \} Q_6(i, j, k)] T_s T_i^c
\end{aligned}$$

●その他の逆対称支配方程式に含まれる非線形項分

(4.18.b)と(4.19.b)より得られる。

$$\begin{aligned}
&-\frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} [\sin \phi (4\Phi_{1N}^{00} N_{\phi}^{10} + 4\Phi_{1N}^{10} N_{\phi}^{00} + 3\Phi_{1N}^{10} N_{\phi}^{20} + \Phi_{1N}^{10} N_{\phi}^{02} \\
&\quad + \Phi_{1N}^{01} N_{\phi}^{11} + 3\Phi_{2N}^{10} N_{\theta\phi}^{20} + \Phi_{2N}^{10} N_{\theta\phi}^{02} + \Phi_{2N}^{01} N_{\theta\phi}^{11})] W_1^1 d\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} [4\Phi_{1N}^{00} N_{\theta\phi}^{01} + \Phi_{1N}^{10} N_{\theta\phi}^{11} + \Phi_{1N}^{01} N_{\theta\phi}^{20} + 3\Phi_{1N}^{01} N_{\theta\phi}^{02} \\
&\quad + \Phi_{2N}^{10} N_{\theta}^{11} + 4\Phi_{2N}^{01} N_{\theta}^{00} + \Phi_{2N}^{01} N_{\theta}^{20} + 3\Phi_{2N}^{01} N_{\theta}^{02}] W_1^1 d\phi
\end{aligned}$$

第1項を部分積分し、境界条件を考慮すると、

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} \sin \phi W_1^{10} [12w_c^o w_0^o w_0^o] d\phi \\
&\quad + \frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} \sin \phi W_1^{10} [3w_c^o w_s^o w_s^o + 3w_c^o w_s w_s \frac{1}{\sin^2 \phi} - 2w_c w_s^o w_s \frac{1}{\sin^2 \phi}] d\phi \\
&\quad + \frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} \sin \phi W_1^{10} [3w_c^o w_c^o w_c^o + w_c^o w_c w_c \frac{1}{\sin^2 \phi}] d\phi \\
&\quad + \frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} \frac{1}{\sin \phi} W_1^1 [4w_c w_0^o w_0^o] d\phi \\
&\quad + \frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} \frac{1}{\sin \phi} W_1^1 [3w_c w_s^o w_s^o - 2w_c^o w_s^o w_s + 3w_c w_s w_s \frac{1}{\sin^2 \phi}] d\phi \\
&\quad + \frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} \frac{1}{\sin \phi} W_1^1 [w_c w_c^o w_c^o - 3w_c w_c w_c \frac{1}{\sin^2 \phi}] d\phi
\end{aligned}$$

以上より、第1項と第4項の和から時間関数の3次式 $T_i T_u T_s^c$ の項が出てくる。

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{h^2} \int_0^{\phi_0} [3w_c^o W_1^{10} w_0^o w_0^o \sin \phi + w_c W_1^1 w_0^o w_0^o \frac{1}{\sin \phi}] d\phi \\
&= \frac{6}{h^2} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{u=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{il} G_{ju} \int_0^{\phi_0} [3w_c^o W_1^{10} P_i^o P_j^o \sin \phi + w_c W_1^1 P_i^o P_j^o \frac{1}{\sin \phi}] d\phi T_l T_u \\
&= \frac{6}{h^2} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{u=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} C_{ktu} \int_0^{\phi_0} [3w_c^o W_1^{10} P_k \sin \phi + w_c W_1^1 P_k \frac{1}{\sin \phi}] d\phi T_l T_u \\
&= \frac{6}{h^2} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{u=1}^{M_0} \sum_{k=0}^{N_2} C_{ktu} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is} G_{jl} \int_0^{\phi_0} [3P_i^{1o} P_j^{1o} P_k \sin \phi + P_i^1 P_j^1 P_k \frac{1}{\sin \phi}] d\phi T_l T_u T_s^c \\
&= \frac{6}{h^2} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{M_0} \sum_{u=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} C_{ktu} G_{is} G_{jl} [3Q_5(k, j, i) + Q_6(k, j, i)] T_s^c T_l T_u
\end{aligned}$$

第2項と第5項の和から時間関数の3次式 $T_i^c T_u^c T_s^c$ に関する項が出てくる。

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} \sin \phi W_1^{10} [3w_c^o w_s^o w_s^o + 3w_c^o w_s w_s \frac{1}{\sin^2 \phi} - 2w_c w_s^o w_s \frac{1}{\sin^2 \phi}] d\phi \\
&\quad + \frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} \frac{1}{\sin \phi} W_1^1 [3w_c w_s^o w_s^o - 2w_c^o w_s^o w_s + 3w_c w_s w_s \frac{1}{\sin^2 \phi}] d\phi \\
&= \frac{3}{2h^2} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} G_{is} G_{jl} G_{ku} G_{ml} \int_0^{\phi_0} [\\
\end{aligned}$$

$$3P_i^{1^0}P_j^{1^0}P_k^{1^0}P_m^{1^0}\sin\phi + 3P_i^{1^0}P_j^1P_k^1P_m^{1^0}\frac{1}{\sin\phi} - 2P_i^1P_j^1P_k^1P_m^{1^0}\frac{1}{\sin\phi}$$

$$3P_i^1P_j^1P_k^1P_m^1\frac{1}{\sin\phi} - 2P_i^{1^0}P_j^{1^0}P_k^1P_m^1\frac{1}{\sin\phi} + 3P_i^1P_j^1P_k^1P_m^1\frac{1}{\sin^3\phi}]d\phi T_s^c T_t^s T_u^s$$

ところで、Legendre 多項式の 4 重積分は、

$$\int_0^{\phi_0} P_i^{1^0}P_j^{1^0}P_k^{1^0}P_m^{1^0}\sin\phi d\phi$$

$$= \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j b_p^1 b_q^j \int_0^{\phi_0} P_p P_q P_k^{1^0} P_m^{1^0} \sin\phi d\phi = \sum_{p=0}^{i+j} D_{ij,p}^{hh} \int_0^{\phi_0} P_p P_k^{1^0} P_m^{1^0} \sin\phi d\phi$$

$$= \sum_{p=0}^{i+j} D_{ij,p}^{hh} \sum_{q=1}^k \sum_{r=1}^m b_q^k b_r^m \int_0^{\phi_0} P_p P_q P_r \sin\phi d\phi = \sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m} D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{hh} \int_0^{\phi_0} P_p P_q \sin\phi d\phi$$

$$= \sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m} D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{hh} S(p,q)$$

同様に、

$$\int_0^{\phi_0} P_i^{1^0}P_j^1P_k^1P_m^{1^0}\frac{1}{\sin\phi} d\phi = \sum_{p=0}^{i+j-1} \sum_{q=0}^{k+m-1} D_{ij,p}^{ha} D_{km,q}^{ah} S(p,q)$$

$$\int_0^{\phi_0} P_i^1P_j^1P_k^1P_m^1\frac{1}{\sin^3\phi} d\phi = \sum_{p=0}^{i+j-2} \sum_{q=0}^{k+m-2} D_{ij,p}^{aa} D_{km,q}^{aa} S(p,q)$$

となるので、上式の ϕ に関する積分は

$$3 \sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m} D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{hh} S(p,q) + 3 \sum_{p=0}^{i+j-1} \sum_{q=0}^{k+m-1} D_{ij,p}^{ha} D_{km,q}^{ah} S(p,q)$$

$$- 2 \sum_{p=0}^{i+j-1} \sum_{q=0}^{k+m-1} D_{ij,p}^{ah} D_{km,q}^{ah} S(p,q) + 3 \sum_{p=0}^{i+j-1} \sum_{q=0}^{k+m-1} D_{ij,p}^{ah} D_{km,q}^{ha} S(p,q)$$

$$- 2 \sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m-2} D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{aa} S(p,q) + 3 \sum_{p=0}^{i+j-2} \sum_{q=0}^{k+m-2} D_{ij,p}^{aa} D_{km,q}^{aa} S(p,q)$$

となる。係数 a_l' の上限は $(i-1)$ であるが、表現を簡便にするため、

$$a_l' = 0 \quad (l \geq i)$$

とおくと、

$$\sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m} [3D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{hh} + 3D_{ij,p}^{ha} D_{km,q}^{ah} - 2D_{ij,p}^{ah} D_{km,q}^{ah}$$

$$3D_{ij,p}^{ah} D_{km,q}^{ha} - 2D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{aa} + 3D_{ij,p}^{aa} D_{km,q}^{aa}] S(p,q)$$

と表すことができるので、 $T_s^c T_t^s T_u^s$ に関する項は以下のように表すことができる。

$$\frac{3}{2h^2} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 G_{ku}^1 G_{ml}^1 \sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m} [3D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{hh} + 3D_{ij,p}^{ha} D_{km,q}^{ah}$$

$$- 2D_{ij,p}^{ah} D_{km,q}^{ah} + 3D_{ij,p}^{ah} D_{km,q}^{ha} - 2D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{aa} + 3D_{ij,p}^{aa} D_{km,q}^{aa}] S(p,q) T_s^c T_t^s T_u^s$$

また、第 3 項と第 6 項の和より時間関数の 3 次式 $T_s^c T_t^s T_u^s$ に関する項が出てくる。

$$\frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} \sin\phi W_i^{1^0} [3w_c^o w_c^o w_c^o + w_c^o w_c^o w_c^o \frac{1}{\sin^2\phi}] d\phi$$

$$+ \frac{3}{2h^2} \int_0^{\phi_0} \frac{1}{\sin\phi} W_i^1 [w_c^o w_c^o w_c^o - 3w_c^o w_c^o w_c^o \frac{1}{\sin^2\phi}] d\phi$$

$$= \frac{3}{2h^2} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 G_{ku}^1 G_{ml}^1 \int_0^{\phi_0} [$$

$$3P_i^{1^0} P_j^{1^0} P_k^{1^0} P_m^{1^0} \sin\phi + P_i^{1^0} P_j^1 P_k^1 P_m^{1^0} \frac{1}{\sin\phi}$$

$$+ P_i^1 P_j^1 P_k^1 P_m^1 \frac{1}{\sin\phi} + 3P_i^1 P_j^1 P_k^1 P_m^1 \frac{1}{\sin^3\phi}] d\phi T_s^c T_t^s T_u^c$$

時間関数の 3 次式 $T_s^c T_t^s T_u^s$ に関する項と同様にして 4 重積分を実行すると、以下のように時間関数の

3 次式 $T_s^c T_t^s T_u^c$ に関する項を求めることができる。

$$\frac{3}{2h^2} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 G_{ku}^1 G_{ml}^1 \sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m} [$$

$$3D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{hh} + D_{ij,p}^{ha} D_{km,q}^{ah} + D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{aa} + 3D_{ij,p}^{aa} D_{km,q}^{aa}] S(p,q) T_s^c T_t^s T_u^c$$

(5) 非線形外力項積分

続いて非線形外力項 1~3 ((4.21)~(4.23)式) に、たわみモード式(4.11)を代入し、(a)1、(b) $\cos\theta$ 、(c) $\sin\theta$ を乗じ $0 \sim 2\pi$ まで θ について積分し π で割った結果を示す。その後、(a) $W_k \sin\phi$ 、(b) $W_k^1 \sin\phi$ 、(c) $W_k^1 \sin\phi$ を乗じ $0 \sim \phi_0$ まで ϕ について積分する。

○非線形外力項 1 ((4.21)式)

$$\frac{ma^3}{gD} \ddot{U} \{ \cos\phi H_0(w) - w^o \sin\phi \} \quad (4.21)$$

に、たわみモード式(4.11)を代入すると

$$\frac{\kappa A}{a} \ddot{U} [\cos\phi \{ \underline{H}_0(w_0) + \overline{H}_0(w_s) \sin\theta + \overline{H}_0(w_c) \cos\theta \}$$

$$- \{ w_0^o + w_s^o \sin\theta + w_c^o \cos\theta \} \sin\phi]$$

となる。

(4.21.a) :

θ 方向積分結果は以下ようになる。

$$2 \frac{\kappa A}{a} \ddot{U} \{ \cos\phi \underline{H}_0(w_0) - \sin\phi w_0^o \}$$

つづいて、 ϕ 方向積分を行う。上式{}内は

$$\begin{aligned} & \cos \phi \underline{H}_0(w_0) - \sin \phi w_0'' \\ &= \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} G_{is} [-i(i+1)P_i \cos \phi - P_i'' \sin \phi] T_s \\ &= \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} G_{is} \left[-\frac{i(i+1)(i+2)}{2i+1} P_{i+1} - \frac{i(i-1)(i+1)}{2i+1} P_{i-1} \right] T_s \end{aligned}$$

となるので、

$$-2 \frac{\kappa A}{a} \ddot{U} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{jl} \frac{i(i+1)}{2i+1} [(i+2)S(i+1, j) + (i-1)S(i-1, j)] T_s$$

(4.21.b) :

θ 方向積分結果は以下のようになる。

$$\frac{\kappa A}{a} \ddot{U} \{ \cos \phi \bar{H}_0(w_c) - \sin \phi w_c'' \}$$

つづいて、 ϕ 方向積分を行う。上式{}内は

$$\begin{aligned} & \cos \phi \bar{H}_0(w_c) - \sin \phi w_c'' \\ &= \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{is}^1 [-i(i+1)P_i^1 \cos \phi - P_i^{1''} \sin \phi] T_s^c \\ &= \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{is}^1 \frac{1}{2i+1} [-i^2(i+2)P_{i+1}^1 - (i+1)(i^2-1)P_{i-1}^1] T_s^c \end{aligned}$$

となるので、

$$-\frac{\kappa A}{a} \ddot{U} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jl}^1 \frac{1}{2i+1} [i^2(i+2)S^1(i+1, j) + (i+1)(i^2-1)S^1(i-1, j)] T_s^c$$

(4.21.c) :

θ 方向積分結果は以下のようになる。

$$\frac{\kappa A}{a} \ddot{U} \{ \cos \phi \bar{H}_0(w_s) - \sin \phi w_s'' \}$$

この式は(4.21.b)式のものとも一致するので、

$$-\frac{\kappa A}{a} \ddot{U} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jl}^1 \frac{1}{2i+1} [i^2(i+2)S^1(i+1, j) + (i+1)(i^2-1)S^1(i-1, j)] T_s^c$$

○非線形外力項 2 ((4.22)式)

$$\frac{ma^3}{gD} \ddot{V} \left\{ \sin \phi H_0(w) + w'' \cos \phi - w' \frac{\tan \theta}{\sin \phi} \right\} \quad (4.22)$$

に、たわみモード式(4.11)を代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa A}{a} \ddot{V} [\sin \phi \{ \underline{H}_0(w_0) + \bar{H}_0(w_s) \sin \theta + \bar{H}_0(w_c) \cos \theta \} \\ & \quad + \cos \phi \{ w_0'' + w_s'' \sin \theta + w_c'' \cos \theta \} - \frac{1}{\sin \phi} \{ w_s \sin \theta - w_c \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \}] \end{aligned}$$

となる。

(4.22.a) :

θ 方向積分結果は以下のようになる。

$$2 \frac{\kappa A}{a} \ddot{V} [\sin \phi \underline{H}_0(w_0) + \cos \phi w_0'']$$

つづいて、 ϕ 方向積分を行う。上式{}内は

$$\begin{aligned} & \sin \phi \underline{H}_0(w_0) + \cos \phi w_0'' \\ &= \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} G_{is} [-i(i+1)P_i \sin \phi + P_i'' \cos \phi] T_s \\ &= \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} G_{is} \left[\frac{1}{2i+1} \{-i(i+2)P_{i+1}^1 + (i^2-1)P_{i-1}^1\} \right] T_s \end{aligned}$$

となるので、

$$2 \frac{\kappa A}{a} \ddot{V} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{jl} \left[\frac{1}{2i+1} \{-i(i+2)S_3(j, i+1) + (i^2-1)S_3(j, i-1)\} \right] T_s$$

(4.22.b) :

θ 方向積分結果は以下のようになる。

$$\frac{\kappa A}{a} \ddot{V} \left[\sin \phi \bar{H}_0(w_c) + \cos \phi w_c'' + \frac{1}{\sin \phi} w_c \right]$$

つづいて、 ϕ 方向積分を行う。上式[]内は

$$\begin{aligned} & \sin \phi \bar{H}_0(w_c) + \cos \phi w_c'' + \frac{1}{\sin \phi} w_c \\ &= \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{is}^1 [-i(i+1)P_i^1 \sin \phi + P_i^{1''} \cos \phi + \frac{1}{\sin \phi} P_i^1] T_s^c \\ &= \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{is}^1 [i(i+1) \{ i \cos \phi P_i - i P_{i-1} \} + \cos \phi \sum_{k=1}^i b_k' P_k + \sum_{k=1}^{i-1} a_k' P_k] T_s^c \\ &= \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{is}^1 \left[\frac{i^2(i+1)^2}{2i+1} (P_{i+1} - P_{i-1}) + \sum_{k=1}^i b_k' \frac{1}{2k+1} \{ (k+1)P_{k+1} + kP_{k-1} \} + \sum_{k=1}^{i-1} a_k' P_k \right] T_s^c \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{\kappa A}{a} \ddot{V} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jl}^1 \left[\frac{i^2(i+1)^2}{2i+1} \{ S_3(i+1, j) + S_3(i-1, j) \} \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^i b'_k \frac{1}{2k+1} \{(k+1)S_3(k+1, j) + kS_3(k-1, j)\} + \sum_{k=1}^i a'_k S_3(k, j) \mathcal{I}_s^c$$

(4.22.c) :

θ 方向積分結果は以下ようになる。

$$\frac{\kappa A}{a} \dot{V} [\sin \phi \bar{H}_0(w_s) + \cos \phi w_s^o - \frac{1}{\sin \phi} w_s]$$

この式は(4.22.b)式の w_c を w_s にし、 a'_i を含む項の符号が負になるものなので、

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa A}{a} \dot{V} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^l G_{jl}^1 \left[\frac{i^2(i+1)^2}{2i+1} \{S_3(i+1, j) + S_3(i-1, j)\} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^i b'_k \frac{1}{2k+1} \{(k+1)S_3(k+1, j) + kS_3(k-1, j)\} - \sum_{k=1}^i a'_k S_3(k, j) \mathcal{I}_s^c \right] \end{aligned}$$

○非線形外力項3 ((4.23)式)

$$\frac{ma^3}{gD} \dot{W} \left\{ \sin \phi H_0(w) + w^o \cos \phi + w' \frac{\cot \theta}{\sin \phi} \right\} \quad (4.23)$$

に、たわみモード式(4.11)を代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa A}{a} \dot{V} [\sin \phi \{ \underline{H}_0(w_0) + \bar{H}_0(w_s) \sin \theta + \bar{H}_0(w_c) \cos \theta \} \\ & + \cos \phi \{ w_0^o + w_s^o \sin \theta + w_c^o \cos \theta \} + \frac{1}{\sin \phi} \{ w_s \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} - w_c \cos \theta \}] \end{aligned}$$

(4.23.a) :

θ 方向積分結果は

$$2 \frac{\kappa A}{a} \dot{W} [\sin \phi \underline{H}_0(w_0) + \cos \phi w_0^o]$$

であり、これは(4.22.a)式の \dot{V} の代わりに \dot{W} としたものと一致するので、

$$2 \frac{\kappa A}{a} \dot{W} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{l=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is}^l G_{jl}^1 \left[\frac{1}{2i+1} \{-i(i+2)S_3(j, i+1) + (i^2-1)S_3(j, i-1)\} \right] \mathcal{I}_s^c$$

(4.23.b) :

θ 方向積分結果は

$$\frac{\kappa A}{a} \dot{W} [\sin \phi \bar{H}_0(w_c) + \cos \phi w_c^o - \frac{1}{\sin \phi} w_c]$$

であり、これは(4.22.c)式の \dot{V} を \dot{W} とし、 w_s を w_c としたものと一致するので、

$$\frac{\kappa A}{a} \dot{W} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^l G_{jl}^1 \left[\frac{i^2(i+1)^2}{2i+1} \{S_3(i+1, j) + S_3(i-1, j)\} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^i b'_k \frac{1}{2k+1} \{(k+1)S_3(k+1, j) + kS_3(k-1, j)\} - \sum_{k=1}^i a'_k S_3(k, j) \mathcal{I}_s^c \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^i b'_k \frac{1}{2k+1} \{(k+1)S_3(k+1, j) + kS_3(k-1, j)\} - \sum_{k=1}^i a'_k S_3(k, j) \mathcal{I}_s^c$$

(4.23.c) :

θ 方向積分結果は

$$\frac{\kappa A}{a} \dot{W} [\sin \phi \bar{H}_0(w_s) + \cos \phi w_s^o + \frac{1}{\sin \phi} w_s]$$

であり、これは(4.22.b)式の \dot{V} を \dot{W} とし、 w_c を w_s としたものと一致するので、

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa A}{a} \dot{W} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^l G_{jl}^1 \left[\frac{i^2(i+1)^2}{2i+1} \{S_3(i+1, j) + S_3(i-1, j)\} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^i b'_k \frac{1}{2k+1} \{(k+1)S_3(k+1, j) + kS_3(k-1, j)\} + \sum_{k=1}^i a'_k S_3(k, j) \mathcal{I}_s^c \right] \end{aligned}$$

4.4.3 Legendre 陪多項式重積の積分

(1) Legendre 陪多項式の2重積 $S^k(m, n)$ 関数閉形表現

$S^k(m, n) = \int_{x_0}^1 P_n^k(x) P_m^k(x) dx$ ($\int_0^{\theta_0} P_n^k(\cos \phi) P_m^k(\cos \phi) \sin \phi d\phi$) について、Legendre 陪多項式の級数で表す。ここに、 $k \geq 1$ であり、 $k=0$ である Legendre 多項式の2重積の積分は國枝[21,22,29]により与えられており、その内容は、4.4.4項に採録している。

○ $m=n$ のとき

$P_n^k(x)$ は次の Legendre の陪微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right\} y = 0$$

を満たすから、

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^k \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right\} P_n^k = 0 \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_m^k \right\} + \left\{ m(m+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right\} P_m^k = 0 \quad (4.25)$$

(4.24) $\times P_m^k$ - (4.25) $\times P_n^k$ より

$$\begin{aligned} & \{m(m+1) - n(n+1)\} P_n^k P_m^k \\ & = P_m^k \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^k \right\} - P_n^k \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_m^k \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

両辺を x に関して区間 $(x_0 \sim 1)$ について積分すると

$$\begin{aligned} & \{m(m+1) - n(n+1)\} \int_{x_0}^1 P_n^k P_m^k dx \\ &= \int_{x_0}^1 \left[P_m^k \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^k \right\} - P_n^k \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_m^k \right\} \right] dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

右辺を部分積分すると、積分項は0になり以下の項のみ残る。

$$\begin{aligned} & \{m(m+1) - n(n+1)\} \int_{x_0}^1 P_n^k P_m^k dx \\ &= \left[P_m^k \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^k \right\} - P_n^k \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_m^k \right\} \right]_{x_0}^1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

また、漸化式

$$(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^k = (n+k) P_{n-1}^k - n x P_n^k$$

および $P_j^k(1) = 0$ より、

$$\begin{aligned} & \{m(m+1) - n(n+1)\} \int_{x_0}^1 P_n^k P_m^k dx \\ &= - \left[(m-n) x P_n^k P_m^k + (n+k) P_{n-1}^k P_m^k - (m+k) P_n^k P_{m-1}^k \right]_{x_0} \end{aligned}$$

$x = \cos \phi$ とおくと、 $dx = -\sin \phi d\phi$ より

$$\begin{aligned} & \int_0^{\phi_0} P_n^k(\cos \phi) P_m^k(\cos \phi) \sin \phi d\phi \\ &= \frac{1}{m(m+1) - n(n+1)} \left[(m-n) \cos \phi P_n^k P_m^k + (n+k) P_{n-1}^k P_m^k - (m+k) P_n^k P_{m-1}^k \right]_{\phi_0} \end{aligned}$$

○ $m=n$ のとき

$$P_n^k(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_n^{k-1}(x) + \frac{(k-1)x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^{k-1}(x)$$

より

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^1 P_n^k(x) P_n^k(x) dx = \int_{x_0}^1 P_n^k \left\{ \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_n^{k-1} + \frac{(k-1)x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^{k-1} \right\} dx \\ &= \int_{x_0}^1 P_n^k \left[\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_n^{k-1} - (k-1) \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1-x^2} \right) P_n^{k-1} \right] dx \\ &= \int_{x_0}^1 P_n^k \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_n^{k-1} dx - (k-1) \int_{x_0}^1 P_n^k \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1-x^2} \right) P_n^{k-1} dx \\ &= \int_{x_0}^1 P_n^k \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_n^{k-1} dx - (k-1) \left[\sqrt{1-x^2} P_n^k P_n^{k-1} \right]_{x_0}^1 \\ &\quad + (k-1) \int_{x_0}^1 \sqrt{1-x^2} \left\{ P_n^k \frac{d}{dx} P_n^{k-1} + P_n^{k-1} \frac{d}{dx} P_n^k \right\} dx \\ &= -(k-1) \left[\sqrt{1-x^2} P_n^k P_n^{k-1} \right]_{x_0}^1 \end{aligned}$$

$$+ k \int_{x_0}^1 P_n^k \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_n^{k-1} dx + (k-1) \int_{x_0}^1 \sqrt{1-x^2} P_n^{k-1} \frac{d}{dx} P_n^k dx$$

ところで、

$$\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_n^{k-1} = P_n^k - (k-1) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^{k-1}$$

$$\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_n^k = k \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^k - (k+n)(n-k+1) P_n^{k-1}$$

より

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^1 P_n^k P_n^k dx = -(k-1) \left[\sqrt{1-x^2} P_n^k P_n^{k-1} \right]_{x_0}^1 \\ &\quad + k \int_{x_0}^1 P_n^k P_n^k dx - (k-1)(n+k)(n-k+1) \int_{x_0}^1 P_n^{k-1} P_n^{k-1} dx \end{aligned}$$

よって、

$$\int_{x_0}^1 P_n^k P_n^k dx = \left[\sqrt{1-x^2} P_n^k P_n^{k-1} \right]_{x_0}^1 + (n+k)(n-k+1) \int_{x_0}^1 P_n^{k-1} P_n^{k-1} dx$$

$x = \cos \phi$ とおくと、 $dx = -\sin \phi d\phi$ より

$$\int_0^{\phi_0} P_n^k P_n^k \sin \phi d\phi = - \left[\sin \phi P_n^k P_n^{k-1} \right]_{\phi_0} + (n+k)(n-k+1) \int_0^{\phi_0} P_n^{k-1} P_n^{k-1} \sin \phi d\phi$$

(2) Legendre 陪多項式の 3 重積 Q 関数閉形表現

3 重積の積分は 4.4.2 項の(1)で定義した係数 a_l, b_l および $D_{jk,n}^{aa}, D_{jk,n}^{ab}, D_{jk,n}^{ba}, D_{jk,n}^{bb}, E_{ijk}$ を用いて以下のように Legendre 陪多項式の級数として表される。

$$\begin{aligned} Q_1(i, j, k) &= - \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1''} \frac{1}{\sin \phi} d\phi = - \int_0^{\phi_0} P_i^1 \bar{P}_j \sum_{m=1}^k b_m^k P_m d\phi \\ &= - \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{m=1}^k \int_0^{\phi_0} P_i^1 a_l^j b_m^k P_l P_m d\phi = - \sum_{n=1}^{j+k-1} D_{jk,n}^{ab} \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_n d\phi \\ &= - \sum_{n=1}^{j+k-1} D_{jk,n}^{ab} \int_0^{\phi_0} \left(\sum_{l=1}^{i-1} a_l^i P_l \sin \phi \right) P_n d\phi = - \sum_{n=1}^{j+k-1} \sum_{l=1}^{i-1} D_{jk,n}^{ab} a_l^i \int_0^{\phi_0} P_l \sin \phi P_n d\phi \\ &= - \sum_{n=0}^{j+k} \sum_{l=0}^i D_{jk,n}^{ab} a_l^i S(l, n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2(i, j, k) &= - \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1''} \cos \phi d\phi = - \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k b_l^j b_m^k \int_0^{\phi_0} P_l^1 P_l P_m \cos \phi d\phi \\ &= - \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{bb} \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_n \cos \phi d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{bb} S_2(n, i) \end{aligned}$$

$$Q_3(i, j, k) = - \int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^1 \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} d\phi = \int_0^{\phi_0} P_i^1 \bar{P}_j \bar{P}_k \cos \phi d\phi$$

$$= -\sum_{l=1}^{j-1} \sum_{m=1}^{k-1} a_l^j a_m^k \int_0^{\phi_0} P_l^1 P_l P_m \cos \phi d\phi = -\sum_{n=0}^{j+k-2} D_{jk,n}^{aa} \int_0^{\phi_0} P_l^1 P_n \cos \phi d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{aa} S_2(n, i)$$

$$Q_4(i, j, k) = -\int_0^{\phi_0} P_l^1 P_j^1 P_k^{1^0} \sin \phi d\phi = -\sum_{l=0}^{i+j} E_{ijl} \int_0^{\phi_0} P_l P_k^{1^0} \sin \phi d\phi$$

$$= -\sum_{l=0}^{i+j} \sum_{m=0}^k E_{ijl} b_m^k \int_0^{\phi_0} P_l P_m \sin \phi d\phi = -\sum_{l=0}^{i+j} \sum_{m=0}^k E_{ijl} b_m^k S(l, m)$$

$$Q_5(i, j, k) = \int_0^{\phi_0} P_l P_j^1 P_k^{1^0} \sin \phi d\phi = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k b_l^j b_m^k \int_0^{\phi_0} P_l P_l P_m \sin \phi d\phi$$

$$= \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{hh} \int_0^{\phi_0} P_l P_n \sin \phi d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{hh} S(i, n)$$

$$Q_6(i, j, k) = \int_0^{\phi_0} P_l P_j^1 P_k^1 \frac{1}{\sin \phi} d\phi = \int_0^{\phi_0} P_l \bar{P}_j \bar{P}_k \sin \phi d\phi$$

$$= \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{m=1}^{k-1} a_l^j a_m^k \int_0^{\phi_0} P_l P_l P_m \sin \phi d\phi = \sum_{n=0}^{j+k-2} D_{jk,n}^{aa} \int_0^{\phi_0} P_l P_n \cos \phi d\phi$$

$$= \sum_{n=0}^{j+k-2} D_{jk,n}^{aa} S(i, n)$$

4.4.4 時間関数に関する最終支配方程式

時間関数および外力を、 $T_l \equiv T_l / h$ 、 $T_l^s \equiv T_l^s / h$ 、 $T_l^c \equiv T_l^c / h$ 、 $\ddot{U} \equiv \ddot{U} / h$ 、 $\ddot{V} \equiv \ddot{V} / h$ 、 $\ddot{W} \equiv \ddot{W} / h$ と板厚で正規化すると時間関数に関する最終支配方程式は次のように表され、 l 番目のモードに関する時間関数 T_l 、 T_l^s 、 T_l^c のみを含んだ非線形連立2階常微分方程式となる。(4.29.a)は上下方向支配方程式、(4.29.b)、(4.29.c)は水平方向支配方程式を示し、それぞれ、考慮するモードの数(上下方向に M_0 個および水平方向に M_1 個)の連立方程式となっている。

$$A_l^1 \ddot{T}_l + A_l^2 T_l + \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_0} A_l^3(s, t) T_s T_t + \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} A_l^4(s, t) \{T_s^c T_t^c + T_s^s T_t^s\}$$

$$+ \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_0} \sum_{u=1}^{M_0} A_l^5(s, t, u) T_s T_t T_u + \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} A_l^6(s, t, u) \{T_s T_t^c T_u^c + T_s T_t^s T_u^s\}$$

$$= A_l^7 \ddot{U} + \ddot{U} \sum_{s=1}^{M_0} A_l^8(s) T_s + (\ddot{V} + \ddot{W}) \sum_{s=1}^{M_0} A_l^9(s) T_s \quad (4.29.a)$$

$$B_l^1 \ddot{T}_l^c + B_l^2 T_l^c + \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_1} B_l^3(s, t) T_s T_t^c + \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_0} \sum_{u=1}^{M_0} B_l^4(s, t, u) T_s^c T_t T_u$$

$$+ \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} B_l^5(s, t, u) T_s^c T_t^s T_u^s + \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} B_l^6(s, t, u) T_s^c T_t^c T_u^c$$

$$= B_l^7 \ddot{V} + \ddot{U} \sum_{s=1}^{M_1} B_l^8(s) T_s^c + \ddot{V} \sum_{s=1}^{M_1} B_l^9(s) T_s^c + \ddot{W} \sum_{s=1}^{M_1} B_l^{10}(s) T_s^c \quad (4.29.b)$$

$$B_l^1 \ddot{T}_l^s + B_l^2 T_l^s + \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_1} B_l^3(s, t) T_s T_t^s + \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_0} \sum_{u=1}^{M_0} B_l^4(s, t, u) T_s^s T_t T_u$$

$$+ \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} B_l^5(s, t, u) T_s^s T_t^c T_u^c + \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} B_l^6(s, t, u) T_s^s T_t^s T_u^s$$

$$= B_l^7 \ddot{W} + \ddot{U} \sum_{s=1}^{M_1} B_l^8(s) T_s^s + \ddot{V} \sum_{s=1}^{M_1} B_l^{10}(s) T_s^s + \ddot{W} \sum_{s=1}^{M_1} B_l^9(s) T_s^s \quad (4.29.c)$$

上式に含まれる係数は以下のように、閉形表現で与えられる。

$$A_l^1 / h = 2\kappa A \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} G_{jl} G_{il} S(j, i)$$

$$A_l^2 / h = 2 \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} G_{jl} G_{il} \{2 - j(j+1)\} \{2 - j(j+1) - \lambda_j\} S(j, i)$$

$$A_l^3(s, t) / h = \left(\frac{h}{a}\right) \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k=0}^{N_2} [2\lambda_j C_{ksl} G_{jl} S_2(k, j) + \{2\{\lambda_j - 2 + j(j+1)\} C_{ksl} G_{jl}$$

$$- \kappa C_{ksl} G_{jl} / (1-\nu)\} S(k, j)]$$

$$A_l^4(s, t) / h = \left(\frac{h}{a}\right) \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} G_{is}^1 G_{jl}^1 G_{kl} [\lambda_j \{-Q_1(k, i, j) - Q_1(k, i, j)$$

$$+ Q_2(k, j, i) + Q_3(k, j, i)\} + \{\lambda_j - 2 + j(j+1)\} Q_4(k, j, i)$$

$$- \kappa \{Q_5(k, j, i) + Q_6(k, j, i)\} / 2(1-\nu)]$$

$$A_l^5(s, t, u) / h = 6 \sum_{k=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{N_2} 2C_{ksl} C_{jul} S(k, j)$$

$$A_l^6(s, t, u) / h = 6 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} C_{ksl} G_{il}^1 G_{ju}^1 [3Q_5(k, j, i) + Q_6(k, j, i)]$$

$$A_l^7 / h = 6\kappa A \sum_{j=1}^{N_0} G_{jl} S(1, j)$$

$$A_l^8(s) / h = -2\kappa A \left(\frac{h}{a}\right) \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{jl} \frac{i(i+1)}{2i+1} [(i+2)S(i+1, j) + (i-1)S(i-1, j)]$$

$$A_l^9(s) / h = 2\kappa A \left(\frac{h}{a}\right) \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{jl} \frac{1}{2i+1} [-i(i+2)S_3(j, i+1) + (i^2 - 1)S_3(j, i-1)]$$

$$B_l^1 / h = \kappa A \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{jl}^1 G_{il}^1 S^1(j, i)$$

$$B_1^2/h = \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} G_{ji}^1 G_{ii}^1 \{2 - j(j+1)\} \{2 - j(j+1) - \lambda_j\} S^1(j, i)$$

$$B_1^3(s, t)/h = \left(\frac{h}{a}\right) \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} G_{is} G_{ji}^1 G_{kl}^1 [-\lambda_j \{Q_1(i, j, k) + Q_1(i, k, j)\} \\ + (\lambda_i + \lambda_j) Q_2(i, j, k) + (-\lambda_i + \lambda_j) Q_3(i, j, k) + \{\lambda_j - 2 + j(j+1)\} Q_4(i, j, k) \\ - \kappa Q_4(i, k, j)/(1-\nu) + \{\lambda_i - 2 + i(i+1)\} Q_5(i, j, k) \\ + \{-i(i+1)\lambda_i + \lambda_i - 2 + i(i+1)\} Q_6(i, j, k)]$$

$$B_1^4(s, t, u)/h = 6 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} C_{klu} G_{is}^1 G_{jl}^1 [3Q_5(k, j, i) + Q_6(k, j, i)]$$

$$B_1^5(s, t, u)/h = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 G_{ku}^1 G_{ml}^1 \sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m} [3D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{hh} + 3D_{ij,p}^{ha} D_{km,q}^{ah} \\ - 2D_{ij,p}^{ah} D_{km,q}^{ah} + 3D_{ij,p}^{ah} D_{km,q}^{ha} - 2D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{aa} + 3D_{ij,p}^{aa} D_{km,q}^{aa}] S(p, q)$$

$$B_1^6(s, t, u)/h = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 G_{ku}^1 G_{ml}^1 \sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m} [3D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{hh} + D_{ij,p}^{ha} D_{km,q}^{ah} + D_{ij,p}^{hh} D_{km,q}^{aa} + 3D_{ij,p}^{aa} D_{km,q}^{aa}] S(p, q)$$

$$B_1^7/h = 3\kappa A \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 S^1(1, j)$$

$$B_1^8(s)/h = -\kappa A \left(\frac{h}{a}\right) \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jl}^1 \frac{1}{2i+1} [i^2(i+2)S^1(i+1, j) \\ + (i+1)^2(i-1)S^1(i-1, j)]$$

$$B_1^9(s)/h = \kappa A \left(\frac{h}{a}\right) \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is} G_{jl}^1 \left[\frac{i^2(i+1)^2}{2i+1} \{S_3(i+1, j) + S_3(i-1, j)\} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^i b'_k \frac{1}{2k+1} \{(k+1)S_3(k+1, j) + kS_3(k-1, j)\} + \sum_{k=1}^i a'_k S_3(k, j) \right]$$

$$B_1^{10}(s)/h = \kappa A \left(\frac{h}{a}\right) \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is} G_{jl}^1 \left[\frac{i^2(i+1)^2}{2i+1} \{S_3(i+1, j) + S_3(i-1, j)\} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^i b'_k \frac{1}{2k+1} \{(k+1)S_3(k+1, j) + kS_3(k-1, j)\} - \sum_{k=1}^i a'_k S_3(k, j) \right]$$

ここに A は材料学的パラメータ (ma^2/Ehg)、 a は半径、 $N_2=2N_0$ を示す。

また、Legendre (陪) 多項式の 3 重積の積分 $Q_1(i, j, k) \sim Q_6(i, j, k)$ は次のように計算される。

$$Q_1(i, j, k) = - \int_0^\pi P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \frac{1}{\sin \phi} d\phi = - \sum_{n=0}^{j+k} \sum_{l=0}^i D_{jk,n}^{ah} a'_l S(l, n)$$

$$Q_2(i, j, k) = - \int_0^\pi P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \cos \phi d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{hb} S_2(n, i)$$

$$Q_3(i, j, k) = - \int_0^\pi P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{aa} S_2(n, i)$$

$$Q_4(i, j, k) = - \int_0^\pi P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \sin \phi d\phi = - \sum_{l=0}^{i+j} \sum_{m=0}^k E_{ijl} b_m^k S(l, m)$$

$$Q_5(i, j, k) = \int_0^\pi P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \sin \phi d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{hb} S(i, n)$$

$$Q_6(i, j, k) = \int_0^\pi P_i^1 P_j^1 P_k^{1^0} \frac{1}{\sin \phi} d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{aa} S(i, n)$$

ここに、

$$D_{jk,n}^{aa} = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k a_l^j a_m^k F^0(l, m, n) \times (2n+1)/2$$

$$D_{jk,n}^{ah} = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k a_l^j b_m^k F^0(l, m, n) \times (2n+1)/2$$

$$D_{jk,n}^{ha} = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k b_l^j a_m^k F^0(l, m, n) \times (2n+1)/2$$

$$D_{jk,n}^{hb} = \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k b_l^j b_m^k F^0(l, m, n) \times (2n+1)/2$$

$$E_{ijk} = F^1(i, j, k) \times (2k+1)/2$$

$$a_l^j = \begin{cases} 2l+1, & l < j \text{ \& } |j-l| = \text{odd} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad b_l^j = \begin{cases} (j+1)^2 - a_l^{j+1}, & (l=j) \\ -a_l^{j+1}, & (l \neq j) \end{cases}$$

ここで用いている Legendre (陪) 多項式 3 重積の一部の解は Gaunt により求められており、以下のよう表される。

$$F^u(l, m, n) = \int_0^\pi P_l^u(\cos \phi) P_m^u(\cos \phi) P_n(\cos \phi) \sin \phi d\phi \\ = (-1)^{s-m} 2 \frac{(l-u)!(m+u)!n!(2s-2n)!s!}{(s-l)!(s-m)!(s-n)!(2s+1)!} \\ \sum_t (-1)^t \frac{(l+u+t)!(m+n-u-t)!}{(l-u-t)!(m-n+u+t)!(n-t)!t!}$$

総和 t の範囲は、 $\text{Max}(0, n-m-u)$ から $\text{Min}(n, l-u, m+n-u)$ であり、また $m+n \geq l \geq m-n$, $l \geq u$, $l \geq n-m$ を満たすものである。この三角条件式を満たさぬものは 0 となる。

Legendre (陪) 多項式の 2 重積の積分 $S^u(r, s)$, $S(r, s)$, $S_2(r, s)$, $S_3(r, s)$ は次のように計算される。 $(S(r, s)$, $S_2(r, s)$, $S_3(r, s)$ は國枝[21,22,29]により示されたものである。)

$$S^n(r, s) = \int_0^{\phi_0} P_s^n(\cos \phi) P_r^n(\cos \phi) \sin \phi d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{r(r+1) - s(s+1)} [(s-r) \cos \phi P_s^n P_r^n - (s+n) P_{s-1}^n P_r^n + (r+n) P_s^n P_{r-1}^n]_{\phi=\phi_0}, & (r \neq s) \\ -[P_r^n P_r^{n-1} \sin \phi]_{\phi=\phi_0} + (r+n)(r-n+1) S^{n-1}(r, r), & (r = s) \end{cases}$$

$$S(r, s) = S^0(r, s) = \int_0^{\phi_0} P_s(\cos \phi) P_r(\cos \phi) \sin \phi d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{r(r+1) - s(s+1)} [(s-r) \cos \phi P_s P_r - s P_{s-1} P_r + r P_s P_{r-1}]_{\phi=\phi_0}, & (r \neq s) \\ \frac{1}{2r+1} [1 - P_r P_r \cos \phi]_{\phi=\phi_0} - 2 \sum_{p=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (2r+1-4p) S^0(r, r-2p), & (r = s) \end{cases}$$

$$S_2(r, s) = - \int_0^{\phi_0} P_r(\cos \phi) P_s^1(\cos \phi) \cos \phi d\phi = -s S(r, s) - \sum_{p=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} (2s+1-4p) S(s-2p, r)$$

$$S_3(r, s) = \int_0^{\phi_0} P_r(\cos \phi) P_s^1(\cos \phi) \sin \phi d\phi = s \sum_{l=0}^{r+s} \frac{2l+1}{2} [c_l F^0(l, r, s) - k_l F^0(l, r, s-1)]$$

$$k_i = \frac{2i-1}{i^2} \sin \phi P_{i-1}|_{\phi=\phi_0} + \frac{(i-1)^2}{i^2} k_{i-2}, \quad k_0 = \phi_0, \quad k_1 = \sin \phi_0$$

$$c_i = \frac{1}{i+1} \sin \phi P_i|_{\phi=\phi_0} + \frac{i}{i+1} k_{i-1}, \quad c_0 = \sin \phi_0$$

$$C_{kst} = \sum_{p=1}^{N_0} \sum_{q=1}^{N_0} G_{ps} G_{qt} D_{p,q}, \quad R(s) = \frac{(2s-1)!!}{s!}$$

$$D_k = \begin{cases} 0, & |p-q| = \text{even} \\ & \& k = \text{even or } |p-q| = \text{odd} \& k = \text{odd} \\ \frac{1}{2} \frac{2k+1}{p+q+k+1} \{p(p+1) + q(q+1) - k(k+1)\} \\ \quad \times \frac{R\left(\frac{p-q+k}{2}\right) R\left(\frac{q-p+k}{2}\right) R\left(\frac{p+q-k}{2}\right)}{R\left(\frac{p+q+k}{2}\right)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

なお、ここに与えた Legendre (陪) 多項式の 2 重積の積分および 3 重積の積分の級数による表現が正しいことは数値的に確認している。

4.5 歪み

歪-変位成分関係式(4.2)にたわみモード式(4.11)と応力関数式(4.12)を代入すると、歪み成分が線形項および非線形項の和として以下のように展開される。

$$e_\phi \equiv_L e_\phi +_N e_\phi \quad (4.30)$$

$$e_\theta \equiv_L e_\theta +_N e_\theta \quad (4.31)$$

$$e_{\theta\phi} \equiv_L e_{\theta\phi} +_N e_{\theta\phi} \quad (4.32)$$

$$\kappa_\phi \equiv_L \kappa_\phi +_N \kappa_\phi \quad (4.33)$$

$$\kappa_\theta \equiv_L \kappa_\theta +_N \kappa_\theta \quad (4.34)$$

$$\kappa_{\theta\phi} \equiv_L \kappa_{\theta\phi} +_N \kappa_{\theta\phi} \quad (4.35)$$

ここに、左下付き文字 L は線形項を示し、 N は非線形項を示し以下のように表される。

$${}_L e_\phi = \frac{1}{a} \{u^o - w + \frac{1}{2a} (w^o)^2\}$$

$$= -\frac{1}{a} \left(\frac{1+\nu}{\kappa} \psi_0^{oo} + w_0 \right) - \frac{1}{a} \left(\frac{1+\nu}{\kappa} \psi_s^{oo} + w_s \right) \sin \theta - \frac{1}{a} \left(\frac{1+\nu}{\kappa} \psi_c^{oo} + w_c \right) \cos \theta$$

$$= -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} \left\{ \frac{1+\nu}{\kappa} \lambda_j P_j^{oo} + P_j \right\} T_i$$

$$- \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \left\{ \frac{1+\nu}{\kappa} \lambda_j P_j^{1oo} + P_j^1 \right\} \times \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \quad (4.30.L)$$

$${}_L e_\theta = \frac{1}{a} \left\{ u \cot \phi + \frac{v'}{\sin \phi} - w \right\} = -\frac{1}{a} \left(\frac{1+\nu}{\kappa} \cot \phi \cdot \psi_0^o + w_0 \right)$$

$$- \frac{1}{a} \left\{ \frac{1+\nu}{\kappa} \left(\cot \phi \cdot \psi_s^o - \frac{1}{\sin^2 \phi} \psi_s \right) + w_s \right\} \sin \theta$$

$$- \frac{1}{a} \left\{ \frac{1+\nu}{\kappa} \left(\cot \phi \cdot \psi_c^o - \frac{1}{\sin^2 \phi} \psi_c \right) + w_c \right\} \cos \theta$$

$$= -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} \left\{ \frac{1+\nu}{\kappa} \lambda_j \cot \phi P_j^o + P_j \right\} T_i$$

$$- \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \left\{ \frac{1+\nu}{\kappa} \lambda_j \left(\cot \phi P_j^{1o} - \frac{1}{\sin^2 \phi} P_j^1 \right) + P_j^1 \right\} \times \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \quad (4.31.L)$$

$${}_L e_{\theta\phi} = \frac{1}{a} (v^o - \cot \phi \cdot v + \frac{1}{\sin \phi} u')$$

$$= \frac{2(1+\nu)}{a\kappa} \left[-\frac{1}{\sin \phi} \psi_s^o + \frac{\cot \phi}{\sin \phi} \psi_s \right] \cos \theta + \frac{2(1+\nu)}{a\kappa} \left[\frac{1}{\sin \phi} \psi_c^o - \frac{\cot \phi}{\sin \phi} \psi_c \right] \sin \theta$$

$$= \frac{2(1+\nu)}{a\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j G_{ji}^1 \left\{ \frac{1}{\sin \phi} P_j^{1o} - \frac{\cot \phi}{\sin \phi} P_j^1 \right\} \times \{T_i^c \sin \theta - T_i^s \cos \theta\} \quad (4.32.L)$$

$${}_L \kappa_\phi = \frac{1}{a^2} (w^{oo} + w) + \frac{1}{a} {}_L e_\phi$$

$$= \frac{1}{a^2} \left(w_0^{oo} - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_0^{oo} \right) + \frac{1}{a^2} \left(w_s^{oo} - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_s^{oo} \right) \sin \theta + \frac{1}{a^2} \left(w_c^{oo} - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_c^{oo} \right) \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} \left\{ 1 - \frac{1+\nu}{\kappa} \lambda_j \right\} P_j^{00} T_i \\
&+ \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \left\{ 1 - \frac{1+\nu}{\kappa} \lambda_j \right\} P_j^{100} \times \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \quad (4.33.L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^L \kappa_\theta &= \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \phi} w'' + \cot \phi \cdot w' + w \right\} + \frac{1}{a} {}^L e_\theta \\
&= \frac{1}{a^2} \cot \phi \left\{ w_0^o - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_0^o \right\} \\
&+ \frac{1}{a^2} \left[\cot \phi \left\{ w_s^o - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_s^o \right\} - \frac{1}{\sin^2 \phi} \left\{ w_s - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_s \right\} \right] \sin \theta \\
&+ \frac{1}{a^2} \left[\cot \phi \left\{ w_c^o - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_c^o \right\} - \frac{1}{\sin^2 \phi} \left\{ w_c - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_c \right\} \right] \cos \theta \\
&= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} \left\{ 1 - \frac{1+\nu}{\kappa} \lambda_j \right\} \cot \phi P_j^o T_i \\
&+ \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \left\{ 1 - \frac{1+\nu}{\kappa} \lambda_j \right\} \left\{ \cot \phi \cdot P_j^{10} - \frac{1}{\sin^2 \phi} P_j^1 \right\} \times \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \quad (4.34.L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^L \kappa_{\theta\phi} &= \frac{2}{a^2 \sin \phi} (-w' \cot \phi + w'') + \frac{1}{a} {}^L e_{\theta\phi} \\
&= \frac{2}{a^2 \sin \phi} \left[w_s^o - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_s^o - \cot \phi \left(w_s - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_s \right) \right] \cos \theta \\
&- \frac{2}{a^2 \sin \phi} \left[w_c^o - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_c^o - \cot \phi \left(w_c - \frac{1+\nu}{\kappa} \psi_c \right) \right] \sin \theta \\
&= \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \left\{ 1 - \frac{1+\nu}{\kappa} \lambda_j \right\} \left\{ \frac{1}{\sin \phi} P_j^{10} - \frac{\cot \phi}{\sin \phi} P_j^1 \right\} \times \{T_i^s \cos \theta - T_i^c \sin \theta\} \quad (4.35.L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^N e_\phi &= \frac{1}{2a^2} (w^o)^2 \\
&= \frac{1}{2a^2} [(w_0^o)^2 + 2w_0^o (w_s^o \sin \theta + w_c^o \cos \theta) + (w_s^o \sin \theta + w_c^o \cos \theta)^2] \\
&= \frac{1}{2a^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{ji} P_i^o P_j^o T_s T_i + \frac{1}{2a^2} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} 2G_{is} G_{ji}^1 P_i^o P_j^{10} T_s \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \\
&+ \frac{1}{2a^2} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{ji}^1 P_i^{10} P_j^1 \times \{T_s^s T_i^s \sin^2 \theta - 2T_s^s T_i^c \sin \theta \cos \theta + T_s^c T_i^c \cos^2 \theta\} \quad (4.30.N)
\end{aligned}$$

$${}^N e_\theta = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{w'}{\sin \phi} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2a^2 \sin^2 \phi} \{ (w_s)^2 \cos^2 \theta - 2w_s w_c \cos \theta \sin \theta + (w_c)^2 \sin^2 \theta \} \\
&= \frac{1}{2a^2 \sin^2 \phi} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{ji}^1 P_i^1 P_j^1 \\
&\quad \times \{T_s^s T_i^s \cos^2 \theta - 2T_s^s T_i^c \sin \theta \cos \theta + T_s^c T_i^c \sin^2 \theta\} \quad (4.31.N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^N e_{\theta\phi} &= \frac{1}{a^2 \sin \phi} w^o w' \\
&= \frac{1}{a^2 \sin \phi} (w_0^o + w_s^o \sin \theta + w_c^o \cos \theta) (w_s \cos \theta - w_c \sin \theta) \\
&= \frac{1}{a^2 \sin \phi} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is} G_{ji}^1 P_i^o P_j^1 T_s \{T_i^s \cos \theta - T_i^c \sin \theta\} \\
&+ \frac{1}{a^2 \sin \phi} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{ji}^1 P_i^{10} P_j^1 \\
&\quad \times \{T_s^c T_i^s \cos^2 \theta + (T_s^s T_i^s - T_s^c T_i^c) \sin \theta \cos \theta - T_s^s T_i^c \sin^2 \theta\} \quad (4.32.N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^N \kappa_\phi &= \frac{1}{2a^3} (w^o)^2 \\
&= \frac{1}{2a^3} [(w_0^o)^2 + 2w_0^o (w_s^o \sin \theta + w_c^o \cos \theta) + (w_s^o \sin \theta + w_c^o \cos \theta)^2] \\
&= \frac{1}{2a^3} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{ji} P_i^o P_j^o T_s T_i + \frac{1}{2a^3} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} 2G_{is} G_{ji}^1 P_i^o P_j^{10} T_s \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \\
&+ \frac{1}{2a^3} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{ji}^1 P_i^{10} P_j^1 \times \{T_s^s T_i^s \sin^2 \theta - 2T_s^s T_i^c \sin \theta \cos \theta + T_s^c T_i^c \cos^2 \theta\} \quad (4.33.N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^N \kappa_\theta &= \frac{1}{2a^3} \left(\frac{w'}{\sin \phi} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2a^3 \sin^2 \phi} \{ (w_s)^2 \cos^2 \theta - 2w_s w_c \cos \theta \sin \theta + (w_c)^2 \sin^2 \theta \} \\
&= \frac{1}{2a^3 \sin^2 \phi} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{ji}^1 P_i^1 P_j^1 \\
&\quad \times \{T_s^s T_i^s \cos^2 \theta - 2T_s^s T_i^c \sin \theta \cos \theta + T_s^c T_i^c \sin^2 \theta\} \quad (4.34.N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^N \kappa_{\theta\phi} &= \frac{1}{a^3 \sin \phi} w^o w' \\
&= \frac{1}{a^3 \sin \phi} (w_0^o + w_s^o \sin \theta + w_c^o \cos \theta) (w_s \cos \theta - w_c \sin \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^3 \sin \phi} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is} G_{jt}^1 P_i^0 P_j^1 T_s^s \{T_i^s \cos \theta - T_i^c \sin \theta\} \\
&+ \frac{1}{a^3 \sin \phi} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 P_i^1 P_j^1 \\
&\quad \times \{T_s^c T_i^s \cos^2 \theta + (T_s^s T_i^s - T_s^c T_i^c) \sin \theta \cos \theta - T_s^s T_i^c \sin^2 \theta\} \quad (4.35.N)
\end{aligned}$$

4.6 応力表現

応力-歪関係式(4.3)および式(4.6)~(4.8)に式(4.30)~(4.35)を代入することにより、(4.3)式の各応力は線形項、非線形項および外力項の和として以下のように表現できる。

$$N_\theta = {}_L \bar{N}_\theta + {}_N N_\theta + {}_f N_\theta, \quad (4.36)$$

$$N_\phi = {}_L \bar{N}_\phi + {}_N N_\phi + {}_f N_\phi \quad (4.37)$$

$$N_{\phi\theta} = {}_L N_{\phi\theta} + {}_N N_{\phi\theta} \quad (4.38)$$

$$M_\theta = {}_L M_\theta + {}_N M_\theta, \quad (4.39)$$

$$M_\phi = {}_L M_\phi + {}_N M_\phi \quad (4.40)$$

$$M_{\phi\theta} = {}_L M_{\phi\theta} + {}_N M_{\phi\theta} \quad (4.41)$$

4.6.1 応力の線形項分 (左下付き文字が L のもの)

$$\begin{aligned}
{}_L \bar{N}_\theta &= \frac{Eh}{a\kappa} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} [-\lambda_j \cot \phi P_j^0 + \{\lambda_j - 2 + j(j+1) - j(j+1)\lambda_j\} P_j^1] T_i \\
&+ \frac{Eh}{a\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 [-\lambda_j \cot \phi P_j^{1''} + \{\lambda_j - 2 + j(j+1) \\
&\quad - j(j+1)\lambda_j + \frac{1}{\sin^2 \phi} \lambda_j\} P_j^1] \times \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \quad (4.36.L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_L \bar{N}_\phi &= \frac{Eh}{a\kappa} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} [\lambda_j \cot \phi P_j^0 + \{\lambda_j - 2 + j(j+1)\} P_j^1] T_i \\
&+ \frac{Eh}{a\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 [\lambda_j \cot \phi P_j^{1''} + \{\lambda_j - 2 + j(j+1) - \frac{1}{\sin^2 \phi} \lambda_j\} P_j^1] \\
&\quad \times \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \quad (4.37.L)
\end{aligned}$$

$${}_L N_{\phi\theta} = \frac{Eh}{a\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \lambda_j \left\{ \frac{1}{\sin \phi} P_j^{1''} - \frac{\cot \phi}{\sin \phi} P_j^1 \right\} \times \{T_i^c \sin \theta - T_i^s \cos \theta\} \quad (4.38.L)$$

$$\begin{aligned}
{}_L M_\theta &= \frac{Eh}{\kappa} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} \{ \{1 - (1+\nu)\lambda_j / \kappa\} \{ (1-\nu) \cot \phi P_j^0 - \nu j(j+1) P_j^1 \} T_i \\
&+ \frac{Eh}{\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \{ \{1 - (1+\nu)\lambda_j / \kappa\} \{ (1-\nu) \cot \phi P_j^{1''} \\
&\quad - \left\{ \frac{1-\nu}{\sin^2 \phi} + \nu j(j+1) \right\} P_j^1 \} \times \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \quad (4.39.L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_L M_\phi &= \frac{Eh}{\kappa} \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{ji} \{1 - (1+\nu)\lambda_j / \kappa\} \{ -(1-\nu) \cot \phi P_j^0 - j(j+1) P_j^1 \} T_i \\
&+ \frac{Eh}{\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \{ \{1 - (1+\nu)\lambda_j / \kappa\} \{ -(1-\nu) \cot \phi P_j^{1''} \\
&\quad + \left\{ \frac{1-\nu}{\sin^2 \phi} - j(j+1) \right\} P_j^1 \} \times \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \quad (4.40.L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_L M_{\phi\theta} &= \frac{Eh}{\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 (1-\nu) \{1 - (1+\nu)\lambda_j / \kappa\} \left\{ \frac{1}{\sin \phi} P_j^{1''} - \frac{\cot \phi}{\sin \phi} P_j^1 \right\} \\
&\quad \times \{T_i^s \cos \theta - T_i^c \sin \theta\} \quad (4.41.L)
\end{aligned}$$

$$Q_\theta = -\frac{Eh}{a\kappa} \frac{1}{\sin \phi} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \{2 - j(j+1)\} P_j^1 \times \{T_i^s \cos \theta - T_i^c \sin \theta\} \quad (4.42)$$

$$Q_\phi = -\frac{Eh}{a\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \{2 - j(j+1)\} P_j^{1''} \times \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \quad (4.43)$$

4.6.2 応力の外力項分 (j) と非線形項分 (N)

$${}_f N_\theta = \frac{ma}{g} \{ \ddot{U} \cos \phi + \ddot{V} \sin \phi \cos \theta + \ddot{W} \sin \phi \sin \theta \} \quad (4.36.F)$$

$${}_f N_\phi = \frac{ma}{g} \{ \ddot{U} \cos \phi + \ddot{V} \sin \phi \cos \theta + \ddot{W} \sin \phi \sin \theta \} \quad (4.37.F)$$

$$\begin{aligned}
{}_N N_\theta &= \nu \frac{6E}{\kappa h} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{jt} P_i^0 P_j^0 T_s T_t \\
&+ \frac{6E}{\kappa h} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} 2G_{is} G_{jt}^1 P_i^0 P_j^{1''} T_s \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \\
&+ \frac{6E}{\kappa h} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 \left[\left(\frac{1}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 \cos^2 \theta + \nu P_i^{1''} P_j^{1''} \sin^2 \theta \right) T_s^s T_t^s \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(\frac{1}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 + \nu P_i^{1''} P_j^{1''} \right) \sin \theta \cos \theta T_s^s T_t^c \right]
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 \sin^2 \theta + \nu P_i^{1''} P_j^{1''} \cos^2 \theta \right) T_s^c T_i^c] \quad (4.36.N)$$

$$\begin{aligned} {}_N N_\phi &= \frac{6E}{\kappa h} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{jt} P_i^o P_j^o T_s T_t \\ &+ \frac{6E}{\kappa h} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} 2G_{is} G_{jt}^1 P_i^o P_j^{1''} T_s \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \\ &+ \frac{6E}{\kappa h} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 \left[\left(\frac{\nu}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 \cos^2 \theta + P_i^{1''} P_j^{1''} \sin^2 \theta \right) T_s^s T_i^s \right. \\ &- 2 \left(\frac{\nu}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 + P_i^{1''} P_j^{1''} \right) \sin \theta \cos \theta T_s^s T_i^c \\ &\left. + \left(\frac{\nu}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 \sin^2 \theta + P_i^{1''} P_j^{1''} \cos^2 \theta \right) T_s^c T_i^c \right] \quad (4.37.N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_N N_{\phi\theta} &= \frac{6E}{\kappa h} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} (1-\nu) G_{is} G_{jt}^1 \frac{1}{\sin \phi} P_i^o P_j^1 T_s \{T_i^s \cos \theta - T_i^c \sin \theta\} \\ &+ \frac{6E}{\kappa h} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} (1-\nu) G_{is}^1 G_{jt}^1 \frac{1}{\sin \phi} P_i^{1''} P_j^1 \\ &\times \{T_s^c T_i^s \cos^2 \theta + (T_s^s T_i^s - T_s^c T_i^c) \sin \theta \cos \theta - T_s^s T_i^c \sin^2 \theta\} \quad (4.38.N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_N M_\theta &= \nu \frac{Eh}{2a\kappa} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{jt} P_i^o P_j^o T_s T_t \\ &+ \nu \frac{Eh}{2a\kappa} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} 2G_{is} G_{jt}^1 P_i^o P_j^{1''} T_s \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \\ &+ \frac{Eh}{2a\kappa} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 \left[\left(\frac{1}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 \cos^2 \theta + \nu P_i^{1''} P_j^{1''} \sin^2 \theta \right) T_s^s T_i^s \right. \\ &- 2 \left(\frac{1}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 + \nu P_i^{1''} P_j^{1''} \right) \sin \theta \cos \theta T_s^s T_i^c \\ &\left. + \left(\frac{1}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 \sin^2 \theta + \nu P_i^{1''} P_j^{1''} \cos^2 \theta \right) T_s^c T_i^c \right] \quad (4.39.N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_N M_\phi &= \frac{Eh}{2a\kappa} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} G_{is} G_{jt} P_i^o P_j^o T_s T_t \\ &+ \frac{Eh}{2a\kappa} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} 2G_{is} G_{jt}^1 P_i^o P_j^{1''} T_s \{T_i^s \sin \theta + T_i^c \cos \theta\} \\ &+ \frac{Eh}{2a\kappa} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 \left[\left(\frac{\nu}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 \cos^2 \theta + P_i^{1''} P_j^{1''} \sin^2 \theta \right) T_s^s T_i^s \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 2 \left(\frac{\nu}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 + P_i^{1''} P_j^{1''} \right) \sin \theta \cos \theta T_s^s T_i^c \\ &\left. + \left(\frac{\nu}{\sin^2 \phi} P_i^1 P_j^1 \sin^2 \theta + P_i^{1''} P_j^{1''} \cos^2 \theta \right) T_s^c T_i^c \right] \quad (4.40.N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_N M_{\phi\theta} &= \frac{Eh}{2a\kappa} \sum_{s=1}^{M_0} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} (1-\nu) G_{is} G_{jt}^1 \frac{1}{\sin \phi} P_i^o P_j^1 T_s \{T_i^s \cos \theta - T_i^c \sin \theta\} \\ &+ \frac{Eh}{2a\kappa} \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} (1-\nu) G_{is}^1 G_{jt}^1 \frac{1}{\sin \phi} P_i^{1''} P_j^1 \\ &\times \{T_s^c T_i^s \cos^2 \theta + (T_s^s T_i^s - T_s^c T_i^c) \sin \theta \cos \theta - T_s^s T_i^c \sin^2 \theta\} \quad (4.41.N) \end{aligned}$$

4.6.3 層せん断力 Q_i

水平一方向加振時に生じる開角 ϕ 上のせん断力を周方向に積分した値を層せん断力 Q_i と定義し、その定式化を行う。当該構造物に対して層せん断力係数という概念は、通常の層状構造物に比べわかりにくいものではあるが、将来的に当該構造物の設計式の基礎となる可能性があると思われる。

置換面外せん断力 V_ϕ 、置換面内せん断力 T_ϕ は釣り合い式

$$F_n \cdot d\theta \sin \phi = F_i$$

$$F_n a \sin \phi d\theta = M_{\phi\theta} a \sin \phi d\theta$$

$$T_\phi \cdot a \sin \phi d\theta = N_{\phi\theta} \cdot a \sin \phi d\theta - F_i$$

$$V_\phi \cdot a \sin \phi d\theta = Q_\phi \cdot a \sin \phi d\theta - F_n d\theta$$

より、

$$T_\phi = N_{\phi\theta} + \frac{1}{a} M_{\phi\theta}, \quad V_\phi = Q_\phi - \frac{1}{a \sin \phi} M'_{\phi\theta}$$

と表すことができる。これらを用いると層せん断力 Q_i は以下のように、周方向に積分することにより得ることができる。

$$Q_i = \int_0^{2\pi} [(N_\phi \cos \phi - V_\phi \sin \phi) \cos \theta - T_\phi \sin \theta] d\theta$$

ここで、各応力を θ 方向に展開した式を以下のようにおく。

$$T_\phi = T_\phi(\phi) \sin \theta, \quad V_\phi = V_\phi(\phi) \cos \theta, \quad N_\phi = N_\phi(\phi) \cos \theta, \quad Q_\phi = Q_\phi(\phi) \cos \theta$$

$$N_{\phi\theta} = N_{\phi\theta}(\phi) \sin \theta, \quad M_{\phi\theta} = M_{\phi\theta}(\phi) \sin \theta$$

置換せん断力 V_ϕ 、 T_ϕ と上式を Q_i に代入すると

$$Q_i = \int_0^{2\pi} \left[\left\{ N_\phi \cos \theta \cos \phi - \left(Q_\phi \cos \theta - \frac{1}{a \sin \phi} M_{\phi\theta} \cos \theta \right) \sin \phi \right\} \cos \theta \right]$$

$$-\left(N_{\phi\theta} \sin \theta + \frac{1}{a} M_{\phi\theta} \sin \theta\right) \sin \theta \Big] d\theta$$

$$\equiv \pi [N_{\phi}^c \cos \phi - Q_{\phi}^c \sin \phi - N_{\phi\theta}^c] \quad (4.44)$$

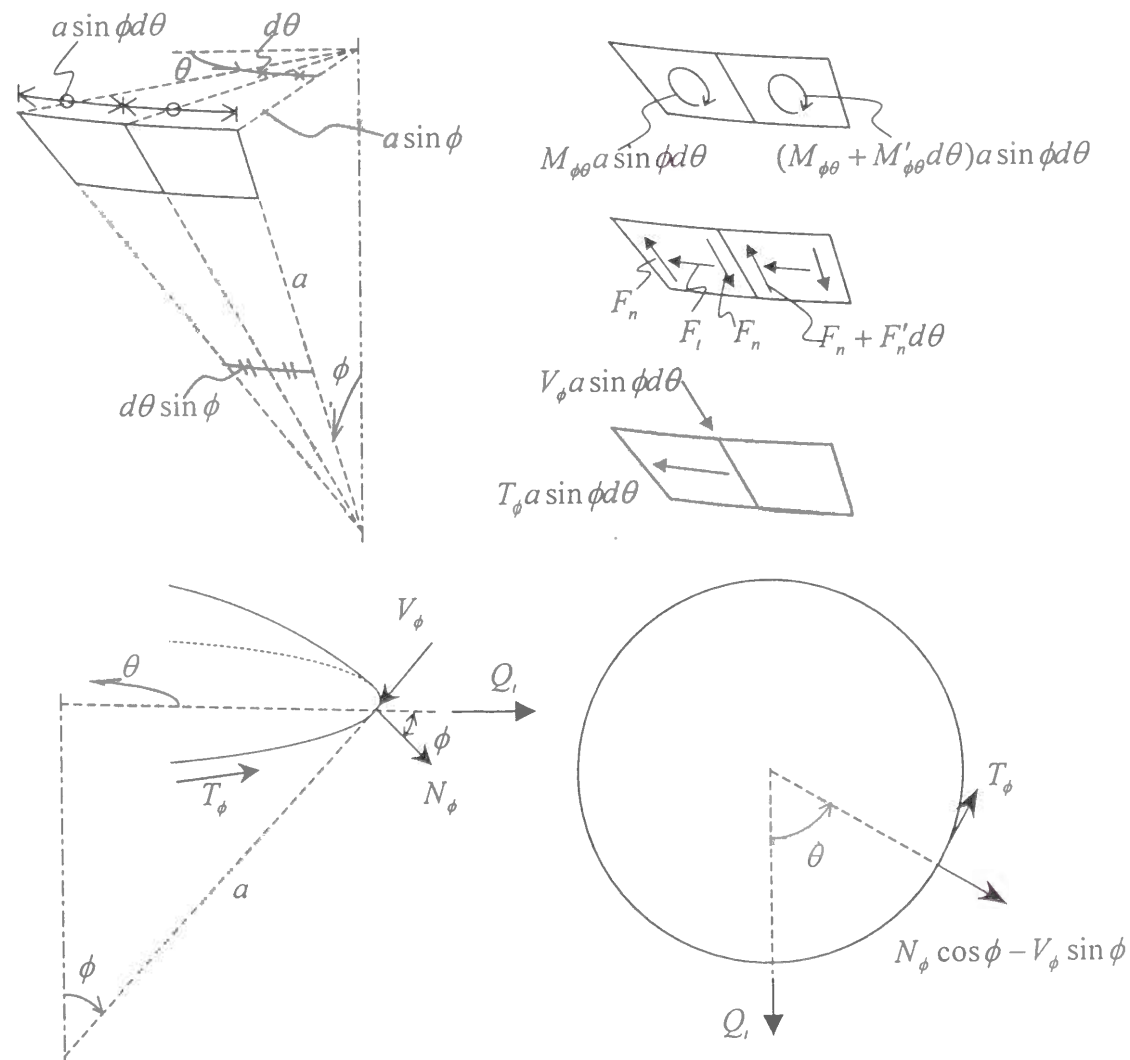
となる。ここに上付の c は、それぞれの応力項の内、 $\cos \theta$ にかかる部分を示す。すなわち

$$N_{\phi}^c = \frac{Eh}{\alpha\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 [\lambda_j \cot \phi P_j^{1''} + \{\lambda_j - 2 + j(j+1) - \frac{1}{\sin^2 \phi} \lambda_j\} P_j^1] T_i^c$$

$$Q_{\phi}^c = -\frac{Eh}{\alpha\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \{2 - j(j+1)\} P_j^{1''} T_i^c$$

$$N_{\phi\theta}^c = -\frac{Eh}{\alpha\kappa} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^1 \lambda_j \left\{ \frac{1}{\sin \phi} P_j^{1''} - \frac{\cot \phi}{\sin \phi} P_j^1 \right\} T_i^c$$

を示す。



4.7 まとめ

本章では球形シェル構造物の軸対称および逆対称固有モードを同時に考慮した非線形動的応答方程式の定式化を行った。得られた最終支配方程式である非線形連立 2 階常微分方程式を見ると明らかのように、上下方向応答による水平方向運動方程式への寄与分がないため、上下方向加振のみを受ける場合には、初期不整を考慮しない限り、水平方向応答が表れる可能性が全くないことがわかる。このことは、実在のシェル構造物に上下方向加振を与えても水平方向応答が表れないことを示しているのではない。本章ではたわみモードを周方向展開次数 n が 0 (軸対称) と 1 (逆対称) の固有モードのみで仮定し、 $n=0$ の軸対称支配方程式と $n=1$ の逆対称支配方程式を導出しているが、周方向展開次数 n が 2 の非対称近似固有モードを本章で仮定したたわみモード式に加え、本章と同様な方法で各方向の支配方程式を定式化すると、本章で示した $n=0$ および $n=1$ 方向の最終支配方程式に $n=2$ の非対称モードに関する時間関数を含む項、および $n=2$ の非対称支配方程式が新たに導出され、上下方向応答による $n=2$ の非対称支配方程式の寄与分と、 $n=2$ の非対称応答による水平方向支配方程式への寄与分が存在することがわかる。つまり、上下方向加振による水平方向応答の評価を行うには、少なくとも周方向展開次数 n が 2 である非対称近似固有モードを含めた定式化が必要であり、実在の球形シェル構造物に上下方向加振を与えても水平方向応答が表れないことを示しているのではない。

また、本論文で扱っているような連続体は無限のモードを持つため、非線形応答挙動を表すには原則的に各方向の無限のモードを採用することが必要である。しかしながら、全てのモードを同時に考慮し、表れる非線形応答挙動の本質を詳細に考察することは非常に困難である。本論文では軸対称および逆対称固有モードのみを考慮した非線形応答方程式を定式化し、これらの限定されたモード間に起こりうる非線形応答挙動を明らかにすることを目的としているが、この得られた最終支配方程式である非線形微分方程式には上述したような問題点が内在していることを踏まえなければならぬ。

5. 地震外力を受ける球形シェルの非線形振動応答

5.1 はじめに

有限要素法等の数値解析手法に基づく数多くの数値解析により、球形シェル構造物に関する多くの有益な結果が示されているが、その中に水平方向加振により上下方向モードが誘起されると言われている現象がある。本章では、モードの連成作用により発生すると考えられる、これらの水平方向加振による上下方向応答モードの誘起、および上下方向加振による水平方向応答モードの誘起という周方向展開次数の異なるモード間のモードの誘起現象の解明を行うことを目的としている。このようなモード連成作用効果を本論のように解析的な定式化に基づき調べる場合、周方向展開次数の異なる固有モードを同時に考慮した幾何学的非線形運動方程式を用いる必要があるが、ここでは、4章で定式化した軸対称および逆対称モードのみを同時に考慮した幾何学的非線形連立2階常微分方程式((4.29)式)を用いて、地震外力下での非線形応答解析を行い応答性状を調べることで目的を達する。しかしながら、4章の結論でも述べたように、得られた幾何学的非線形連立2階常微分方程式には、水平方向応答による上下方向運動方程式への寄与分(寄与項)は存在するが、上下方向応答による水平方向運動方程式への寄与分がないため、上下方向加振のみを受ける場合には、初期不整を考慮しない限り、水平方向応答が表れる可能性は全くない。よって本章では初期不整を考慮した数値計算も行うこととする。

ところで、このような応答解析を行う場合、地震波加速度のピーク値を大きくすると動座屈の発生により、考慮している全てのモードの応答が発散する現象が現れるため、上記の目的を達することはできない。よって、本章では、動座屈を起こさない入力加速度でのモード間の連成作用を調べることを目的とする。幾つかの材料学的パラメータや幾何学的パラメータのもとでの試算をおこなう、水平方向地震動により上下方向応答モードが比較的誘起されているといえる例を示した。水平方向加振による上下方向応答モードの誘起はごくわずかであり、有限要素法による応答解析結果において上下方向応答と呼んでいるものは、逆対称変形モードの上下方向変位成分であることがわかる。

5.2 入力データについて

神戸海洋気象台により記録された神戸地震波の内、NS成分とUD成分を用い、NS成分を $\theta=0$ の方向から水平に、UD成分を上下方向に外力として与えた。これらの地震波は当然のことながら上下方向と水平方向では周波数特性が異なる。本章の計算例では、これらの最大加速度がそれぞれ817.82gal(NS)、332.16gal(UD)であるところを、ともに100galに正規化するのみで用い、周波数特性は変更しないものとした。ここでは、モードの誘起現象を調べるのが目的であり、実地震波による実際の応答性状を調べるのが目的ではないので、(a)上下・水平方向同時加振、(b)水平方向のみ

の加振、および(c)上下方向のみの加振の3種類の加振方法で、振動性状を調べることにする。なお、これらの地震波記録は0.02秒間隔のデジタル量で与えられているので、式(4.29)の未知関数 T_i, T_i', T_i'' は解析的に求め得ない。ここではNigam-Jenningsの方法を用いて直接数値計算する。しかしながら、通常用いられる程度の球形ドームの低次の固有振動数は、この地震動の卓越振動数より低くはないので、この0.02秒程度の間隔で採取されたデジタル量をそのまま用いるのでは解の精度と収斂性が保証されない。従って本計算では3章の検討を踏まえて、データ間を10分割し線形補間されたデータに基づいて数値計算を行った。

入力データを表1に示す。鋼板を用いた球形シェルを想定しており、比較的薄肉(半径-板厚比1000)のものを対象にしている。

表1. 入力データ

入力地震波	Kobe-JMA NS&UD、NSのみ、UDのみ
ポアソン比	0.3
減衰率	0.02
半開角	60度
使用する固有モード	
軸対称モード	1st ~ 6th
逆対称モード	1st ~ 6th
境界条件	単純支持
半径	3,000 cm
板厚	3 cm
ヤング係数	2,100,000 kg/cm ²
単位面積当たり重量	23.55 g/cm ²
材料パラメータ(A)	0.0000343

5.3 応答解析結果および考察

この球形ドームの固有振動数は2章の近似固有モード作成法により、表2のように計算される。軸対称モードと逆対称モードの固有振動数はかなり近接した値であり、モードの連成作用効果が現れることが予想される。

表2. 固有円振動数(1/s)

	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
軸対称モード	25.828	26.804	27.018	27.122	27.213	27.331
逆対称モード	25.176	26.665	26.960	27.081	27.169	27.269

(1) 初期不整がない場合の地震応答

図 1.(a)~(c)に応答振動の位相図を示す。先に述べたように、(a)は上下・水平方向同時加振、(b)は水平方向のみの加振、(c)は上下方向のみの加振を示している。上 2 段が軸対称、下 2 段が cos 系列 (T_i^c) であり、横軸が変位、縦軸が速度を表している。使用している固有モードの振幅 (W_i, W_i') の最大値を 1 になるように正規化しているため、これら変位、速度の値はそれぞれの固有モードの変位あるいは速度の最大値に対応している。

(a)の上下水平方向同時加振を行った応答変位は軸対称変形が 10^{-2}cm のオーダー、逆対称変形が 10^{-3}cm のオーダーで出てきており、ほぼ同程度の変形が生じていることがわかる。

(b)の水平方向のみの加振を行った応答変位は、逆対称変形が 10^{-3}cm のオーダーで生じているのに対し、軸対称変形が 10^{-6}cm のオーダーでしか生じておらず、水平地震外力による対称モードの応答は僅かであり、有限要素法による結果で上下方向応答と呼んでいるものは、逆対称変形モードの上下方向変位成分であることがわかる。

(c)の上下方向のみの加振を行った応答は、最終支配方程式である幾何学的非線形連立 2 階常微分方程式(4.29)を見ると明らかのように、上下方向応答による水平方向運動方程式への寄与がないため、逆対称変形が生じない。上下方向加振のみを受ける場合には、初期不整を考慮しない限り、水平方向応答は表れない式になっているためである。

(2) 初期不整がある場合の地震応答

上下方向応答を水平方向運動方程式に反映させるためには、初期不整を考慮する必要があるため、各モードの時間関数 T_i, T_i^c, T_i^s に変位の初期不整を与え、先と同様の数値解析を行った。図 2.(a)~(c)に初期不整を考慮した場合の結果を示す。また、表 3 に各応答の生じた位置、時刻に関係なくその絶対値が最大となる値のみを取り出したものを示す。(応力の値は全て線形項分のみで計算している)。モーメントは kg cm/cm 、せん断力は kg/cm の次元を持つ。ところで、本節で使用しているシェルの寸法では、初期不整として板厚の 1000 分の 1 以上の値を与えると、初期不整の初期値により発生する全ての応力が、地震応答により発生するものより大きくなる。ここでは初期不整として板厚の 10000 分の 1 を変位の初期値として採用したが、表 3 中、初期不整の有無によって値が変わっているものは、初期不整の初期値により発生したものである。

表 3. 各応答の最大値

入力地震波	初期不整	M_θ	M_ϕ	$M_{\theta\phi}$	N_θ	N_ϕ	$N_{\theta\phi}$	Q_θ	Q_ϕ
NS & UD	あり	0.3423	1.0235	0.0705	22.5678	11.5871	6.6327	0.0026	0.0074
	なし	0.3423	1.0235	0.0705	22.5678	11.5871	6.6327	0.0026	0.0074
NS	あり	0.3318	0.9866	0.0705	22.4247	9.6354	6.6327	0.0026	0.0074
	なし	0.3318	0.9866	0.0705	22.4247	9.6354	6.6327	0.0026	0.0074
UD	あり	0.1190	0.2910	0.0504	9.8431	9.8431	1.0421	0.0012	0.0012
	なし	0.0897	0.2910	0.0000	9.8431	9.8431	0.0000	0.0000	0.0000

図 2.(a)~(c)を図 1 のそれらと比較するとわかるように、地震応答は初期不整の影響を殆ど受けないことがわかる。しかしながら、図 2.(a)の UD、NS 成分を同時に受けたときの水平方向応答、図 2.(b)の NS 成分のみを受けたときの上下方向応答、および図 2.(c)の UD 成分のみを受けたときの水平方向応答は、初期不整が減衰により殆どなくなった状態から加振されているために、初期不整による影響を殆ど受けていないと判断したとも考えられるので、初期不整の影響を詳細に調べるために地震波の入力開始時を変更した数値計算を行う必要があると考えられる。図 3 に図 2.(b)の位相図に対応する NS 成分のみを受けた上下および水平応答の変位の時刻歴を示すが、図を見ても初期不整の影響がなくなった状態で地震波による加振が始まっているようにも捉えられる。

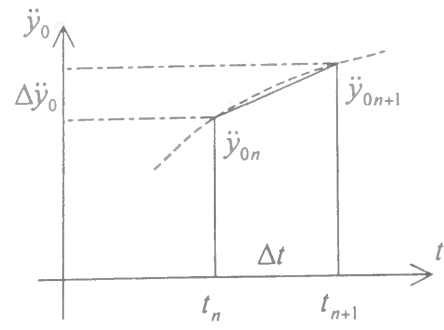
そこで、この図 3 において応答変位がはっきりと確認できる地震波データの 4.0 秒に当たる部分を地震波の開始時間とし、応答解析を行ったものを変位の時刻歴で表したものを図 4 に示す。実線が初期不整を考慮したもの、破線が初期不整のないものを示し、図中の時間は先に使用した地震波データの 4 秒後に当たる部分が 0 秒になっている。初期不整の有無は全くと言っていいほど影響を与えていないことがわかる。

これらの数値解析結果から、実際の地震波のように入力加速度が大きい場合には動的座屈を起こす可能性もあり、水平あるいは上下方向運動方程式に与える他の方向の時間関数の影響を無視することはできないが、ここで示した入力加速度の最大値が動座屈荷重以下の 100gal 程度のものであればシェルの非線形効果は殆ど無視でき、各方向の線形応答解析を同時に行うだけでおおよそ地震応答を把握することができると思われることがわかった。

5.4 まとめ

本章では得られた幾何学的非線形運動方程式を用い、入力加速度がさほど大きくない地震波を用いた地震応答解析を行った。ここで得られた知見は以下のようにまとめられる。

- ①有限要素法等の数値解析手法により水平方向外力により上下方向応答が生じていると言われている現象について、有限要素法による結果で上下方向応答と呼んでいるものは、逆対称変形モードの上下方向変位成分であることが判明した。
- ②動座屈現象が起こらない程度の外力下では、非線形効果は殆ど現れず、初期不整を考慮してもその応答は殆ど変わらないため、線形応答解析のみで応答解析を行っても充分であると結論される。



\ddot{y}_0 : 地動加速度

区間の初めと終わりの応答量の関係を厳密解に基づいた遷移マトリクスで示す。

($\omega' = \omega\sqrt{1-h^2}$ を示す)

区間 $t_n \sim t_{n+1}$ の運動方程式

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y + f(y(t_n)) = -\ddot{y}_{0n} - \frac{\Delta\ddot{y}_0}{\Delta t}(t-t_n)$$

ここに $\Delta\ddot{y}_0 = \ddot{y}_{0n+1} - \ddot{y}_{0n}$ であり、 $f(y(t_n))$ は非線形項分を示す。この非線形項は Δt 間にこの値の変化はないと考える。初期条件 $t=t_n$ 、 $y=y_n$ 、 $\dot{y}=\dot{y}_n$ に対する $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ の解は次のように漸化式で表される。

$$\begin{Bmatrix} y_{n+1} \\ \dot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n \\ \dot{y}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_{0n} \\ \ddot{y}_{0n+1} \end{Bmatrix} + f \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

$$a_{11} = e^{-h\omega\Delta t} \left(\cos \omega'\Delta t + \omega h \frac{\sin \omega'\Delta t}{\omega'} \right) \quad a_{12} = e^{-h\omega\Delta t} \frac{\sin \omega'\Delta t}{\omega'}$$

$$a_{21} = -e^{-h\omega\Delta t} \omega^2 \frac{\sin \omega'\Delta t}{\omega'} \quad a_{22} = e^{-h\omega\Delta t} \left(\cos \omega'\Delta t - \omega h \frac{\sin \omega'\Delta t}{\omega'} \right)$$

$$b_{11} = e^{-h\omega\Delta t} \left\{ \left(\frac{2h}{\omega^3\Delta t} + \frac{1}{\omega^2} \right) \cos \omega'\Delta t + \left(\frac{2h^2-1}{\omega^2\Delta t} + \frac{h}{\omega} \right) \frac{\sin \omega'\Delta t}{\omega'} \right\} - \frac{2h}{\omega^3\Delta t}$$

$$b_{12} = -e^{-h\omega\Delta t} \left\{ \frac{2h}{\omega^3\Delta t} \cos \omega'\Delta t + \frac{2h^2-1}{\omega^2\Delta t} \frac{\sin \omega'\Delta t}{\omega'} \right\} + \frac{2h}{\omega^3\Delta t} - \frac{1}{\omega^2}$$

$$b_{21} = -e^{-h\omega\Delta t} \left\{ \frac{1}{\omega^2\Delta t} \cos \omega'\Delta t + \left(\frac{h}{\omega\Delta t} + 1 \right) \frac{\sin \omega'\Delta t}{\omega'} \right\} + \frac{1}{\omega^2\Delta t}$$

$$b_{22} = e^{-h\omega\Delta t} \left\{ \frac{1}{\omega^2\Delta t} \cos \omega'\Delta t + \frac{h}{\omega\Delta t} \frac{\sin \omega'\Delta t}{\omega'} \right\} - \frac{1}{\omega^2\Delta t}$$

$$d_1 = e^{-h\omega\Delta t} \left\{ \frac{1}{\omega^2} \cos \omega'\Delta t + \frac{h}{\omega} \frac{\sin \omega'\Delta t}{\omega'} \right\} - \frac{1}{\omega^2} \quad d_2 = -e^{-h\omega\Delta t} \frac{\sin \omega'\Delta t}{\omega'}$$

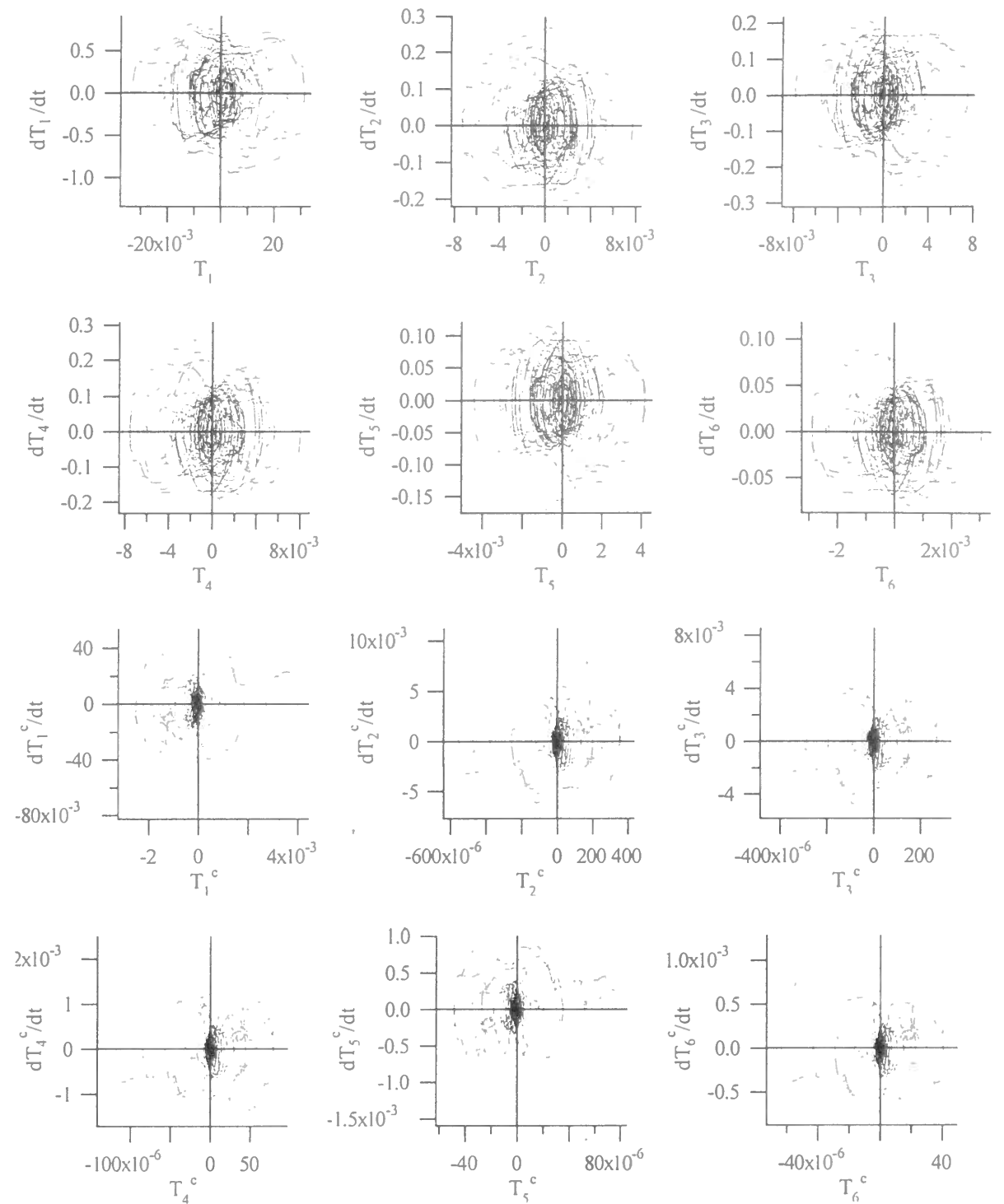


図 1.(a) 各モードの地震波応答位相図 (横軸: 変位(cm)、縦軸: 速度(kine))

(KOBE-JMA UD 成分と NS 成分を同時に与えた、初期不整なし)

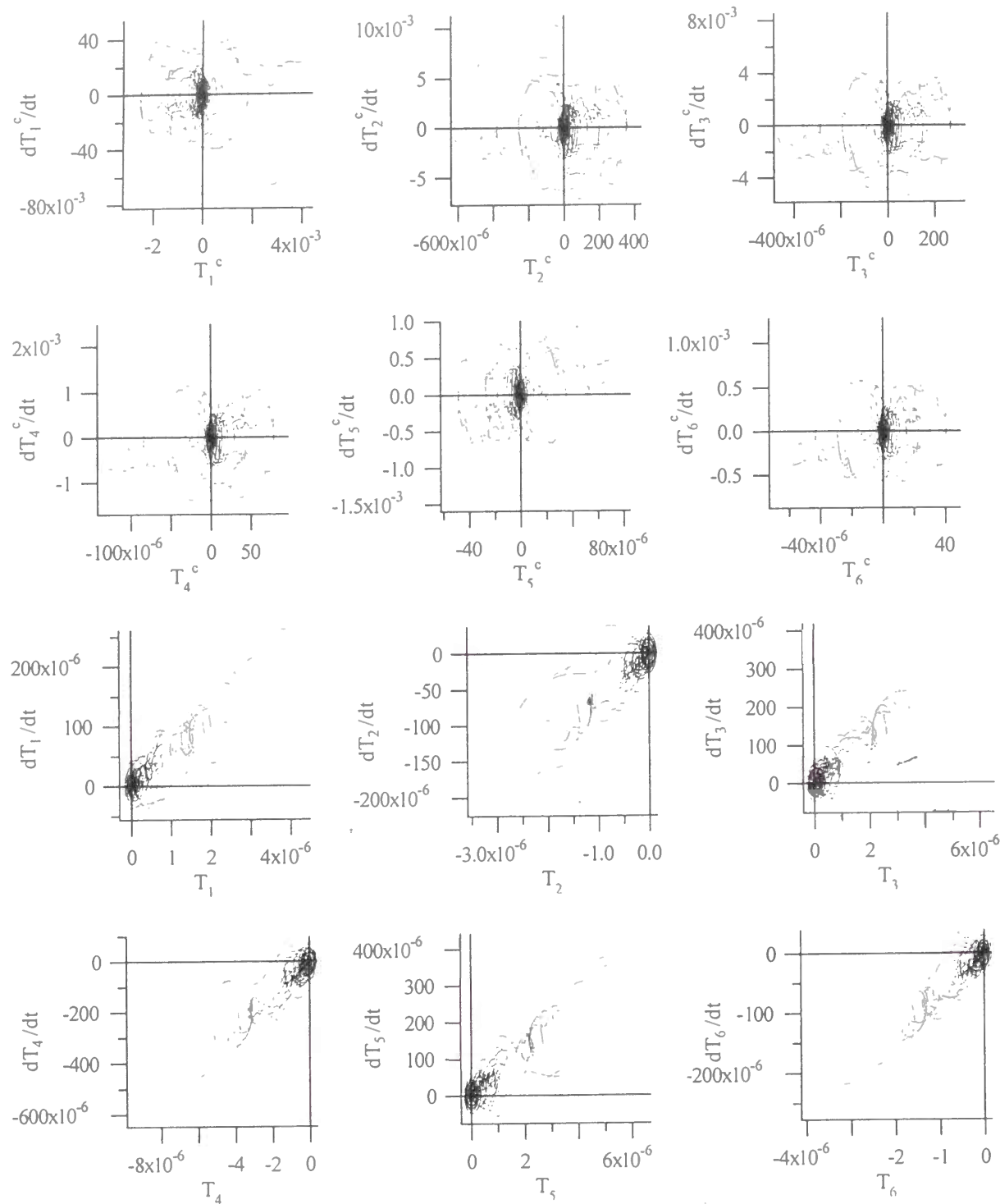


図 1.(b) 各モードの地震波応答位相図 (横軸：変位(cm)、縦軸：速度(kine))
(KOBE-JMA NS 成分のみ、初期不整なし)

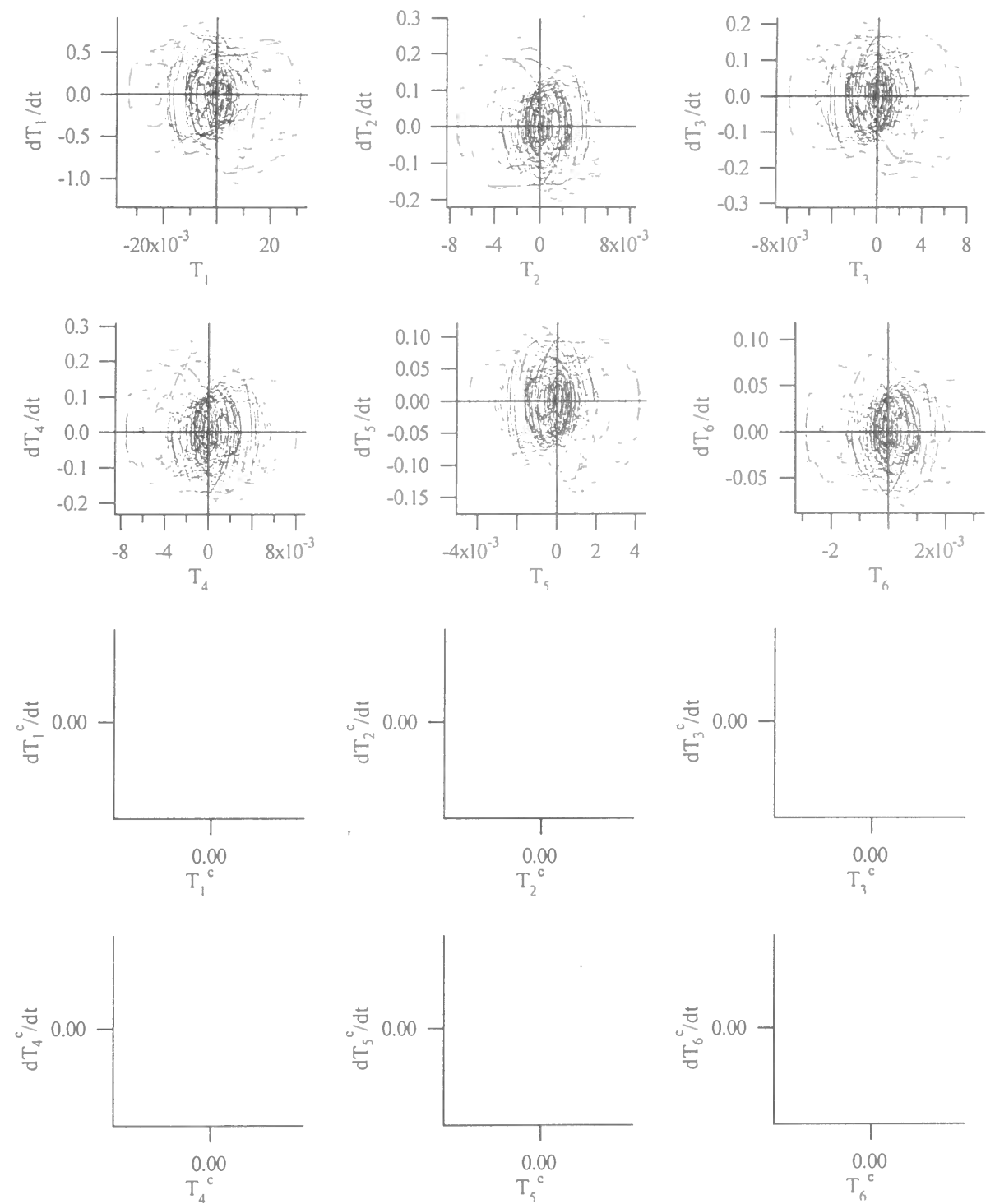


図 1.(c) 各モードの地震波応答位相図 (横軸：変位(cm)、縦軸：速度(kine))
(KOBE-JMA UD 成分のみ、初期不整なし)

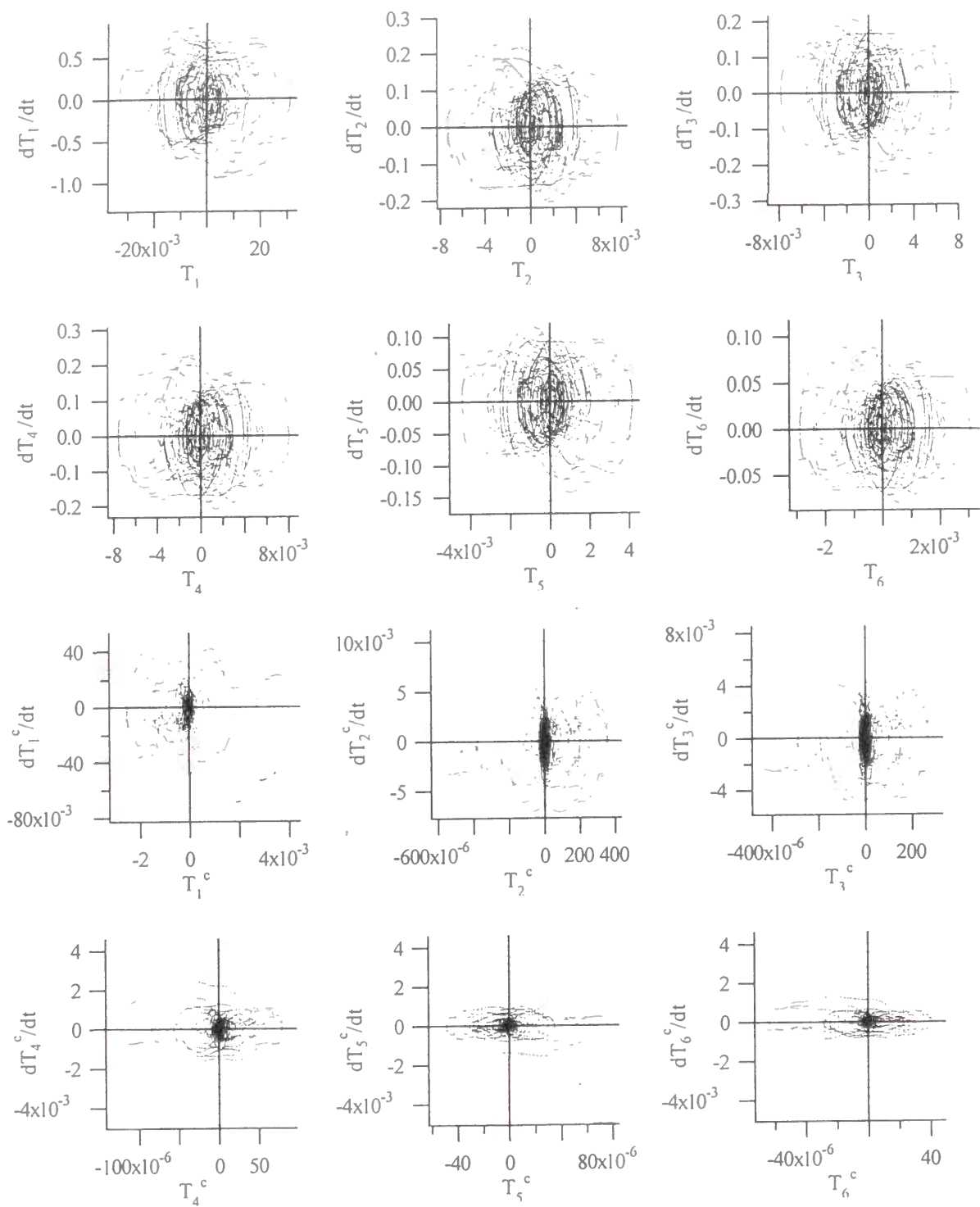


図 2.(a) 各モードの地震波応答位相図 (横軸：変位(cm)、縦軸：速度(kine))
(KOBE-JMA UD 成分と NS 成分を同時に与えた、初期不整あり)

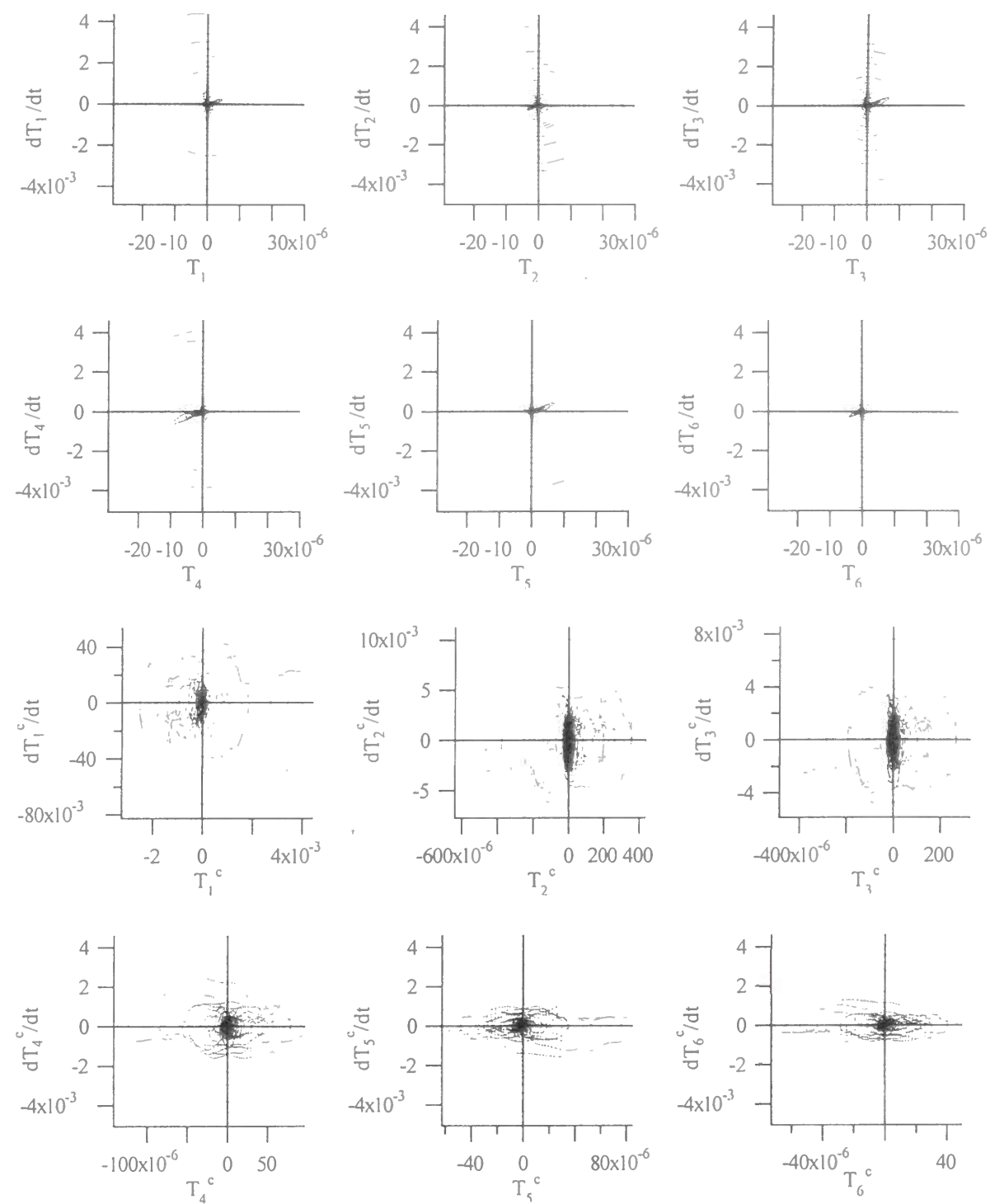


図 2.(b) 各モードの地震波応答位相図 (横軸：変位(cm)、縦軸：速度(kine))
(KOBE-JMA NS 成分のみ、初期不整あり)

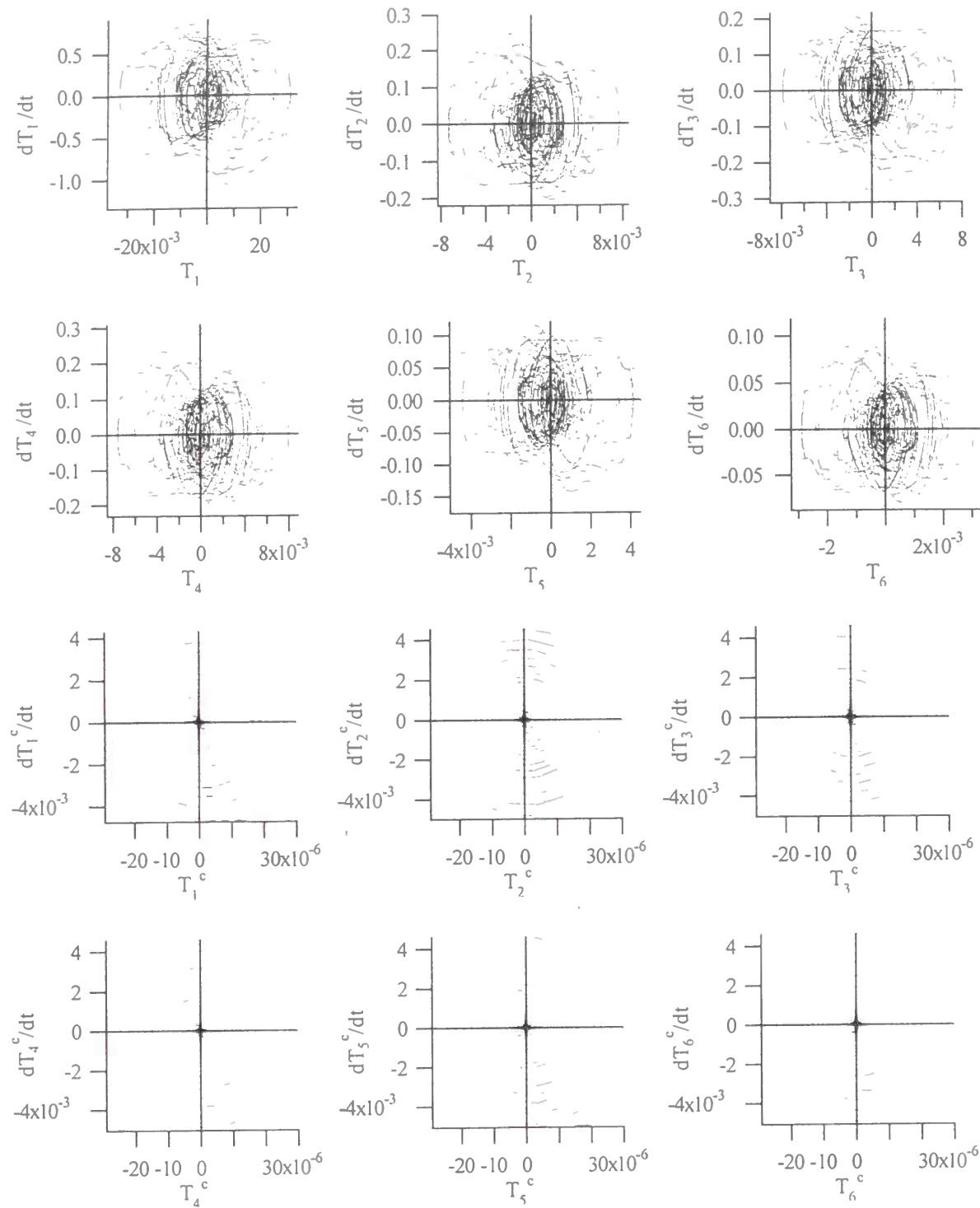


図 2.(c) 各モードの地震波応答位相図 (横軸: 変位(cm)、縦軸: 速度(kine))
(KOBE-JMA UD 成分のみ、初期不整あり)

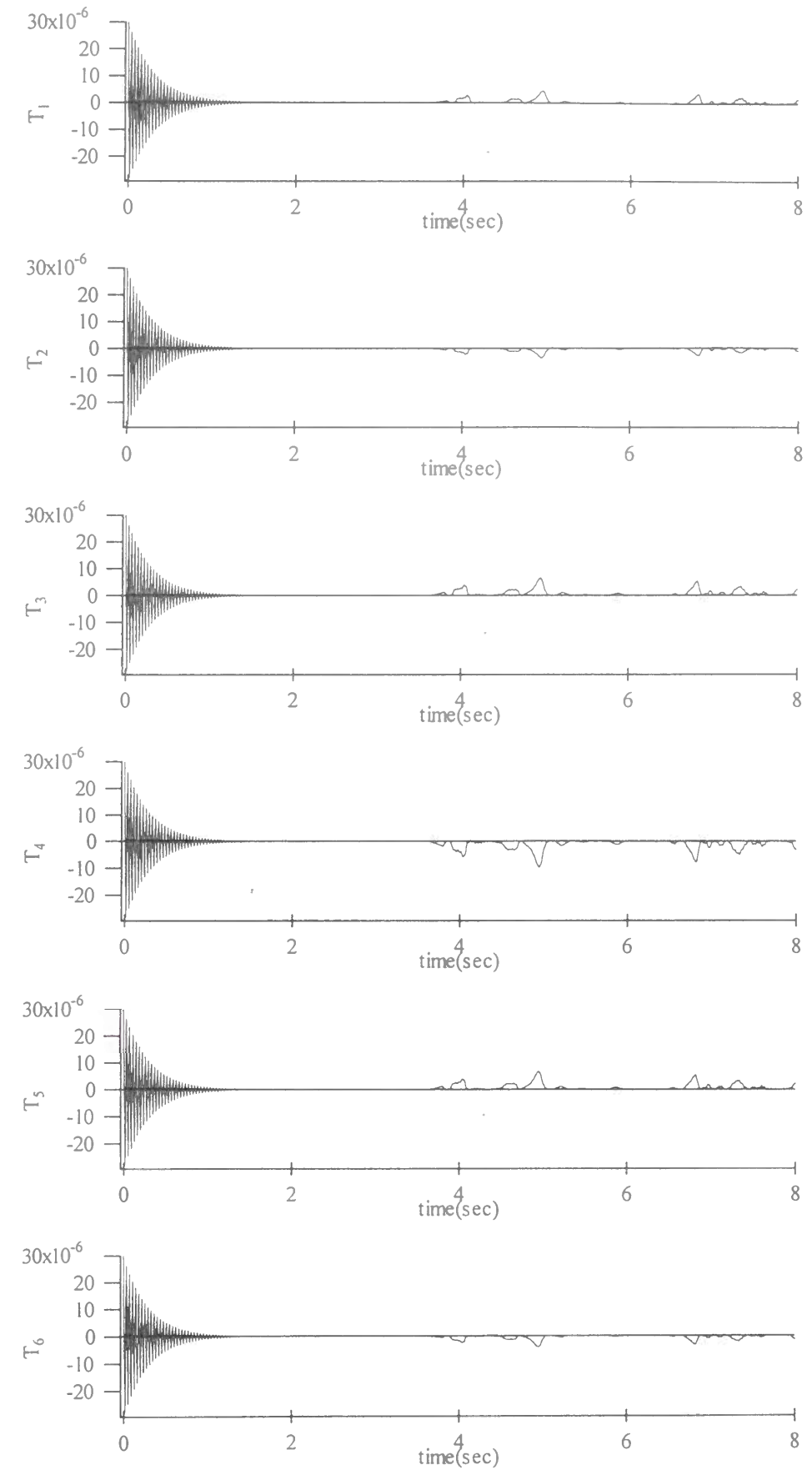


図 3.1 応答変位の履歴 (初期不整あり、NS 成分のみ)

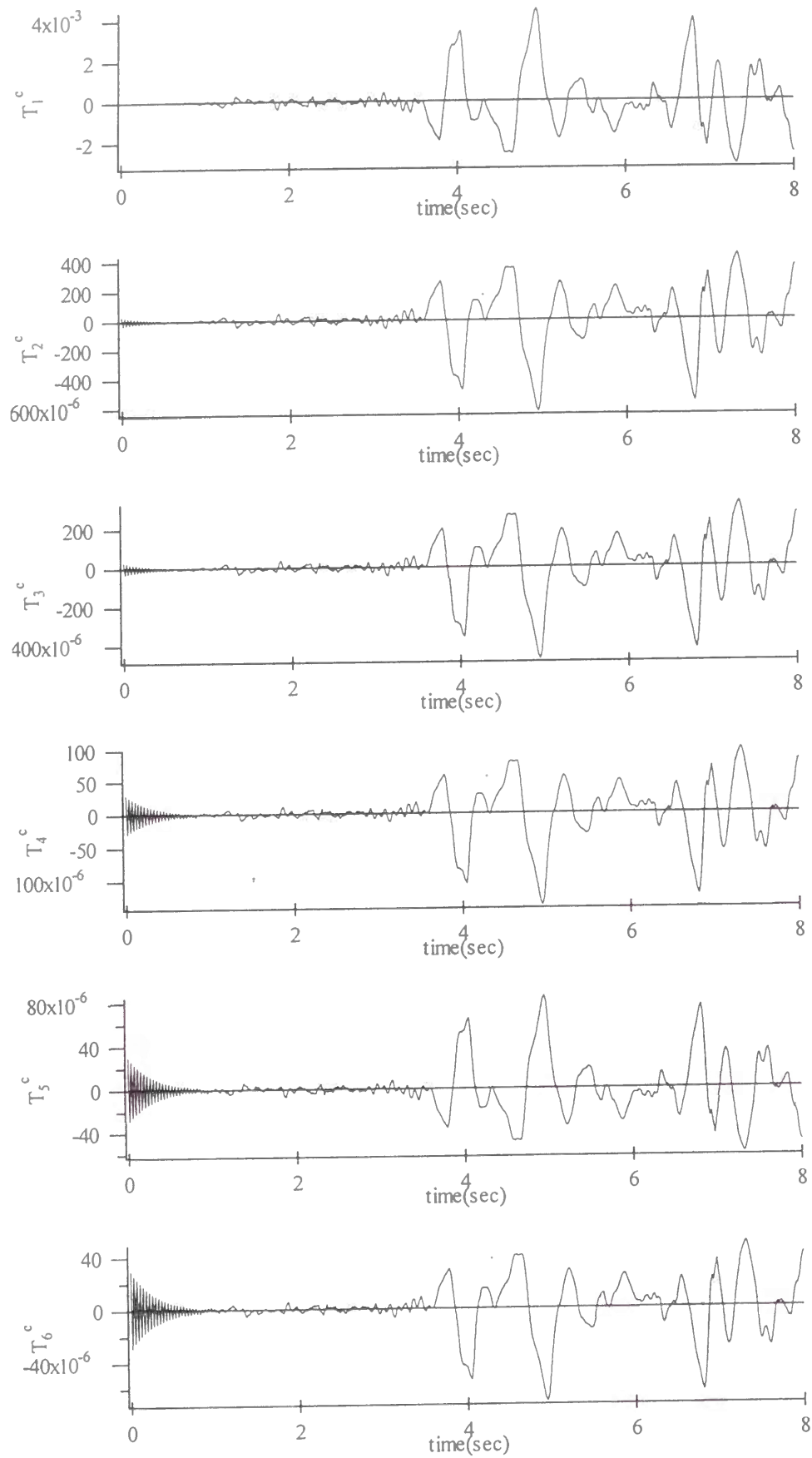


図 3.2 応答変位の履歴 (初期不整あり、NS 成分のみ)

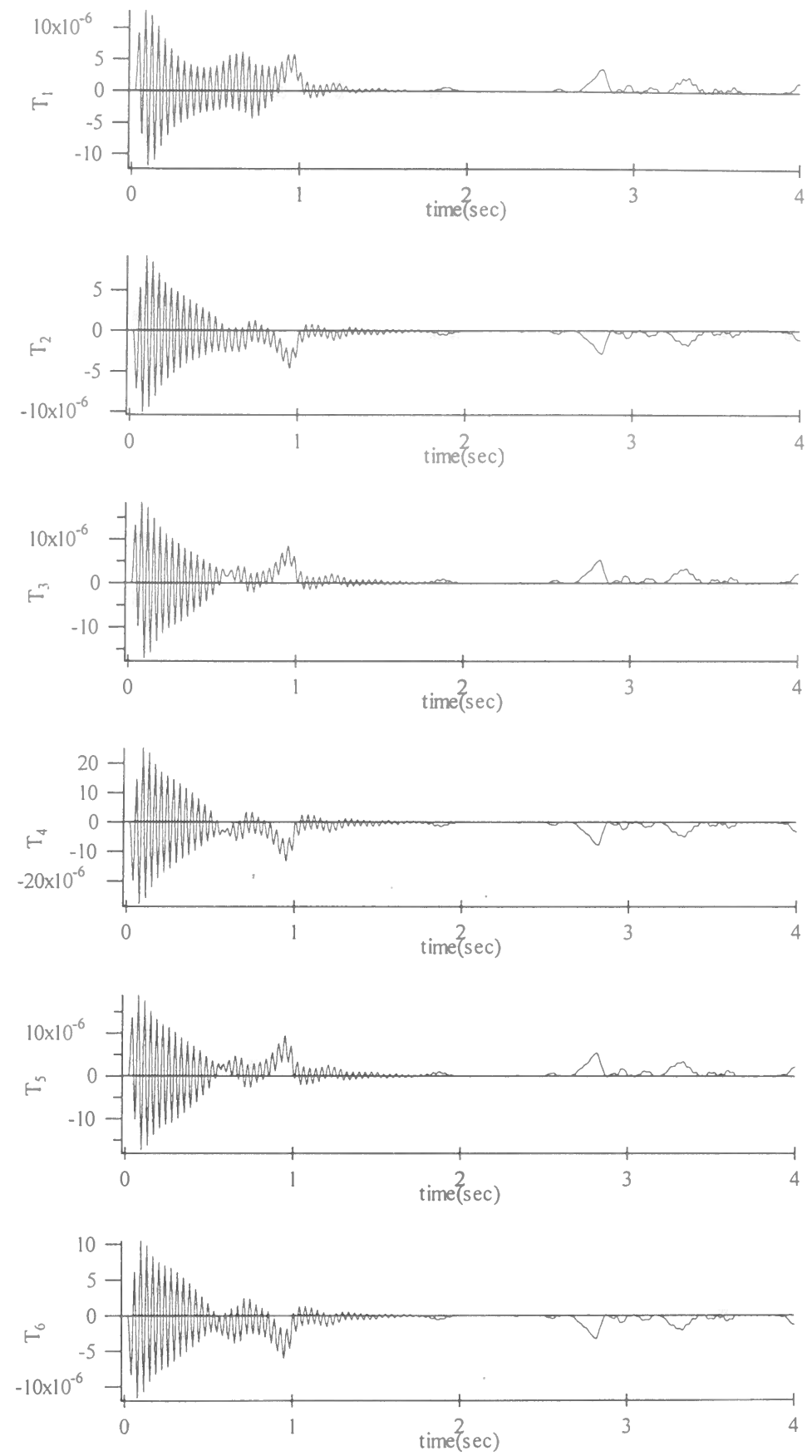


図 4.1 初期不整の影響 (実線：初期不整あり、破線：初期不整なし、NS 成分のみ)

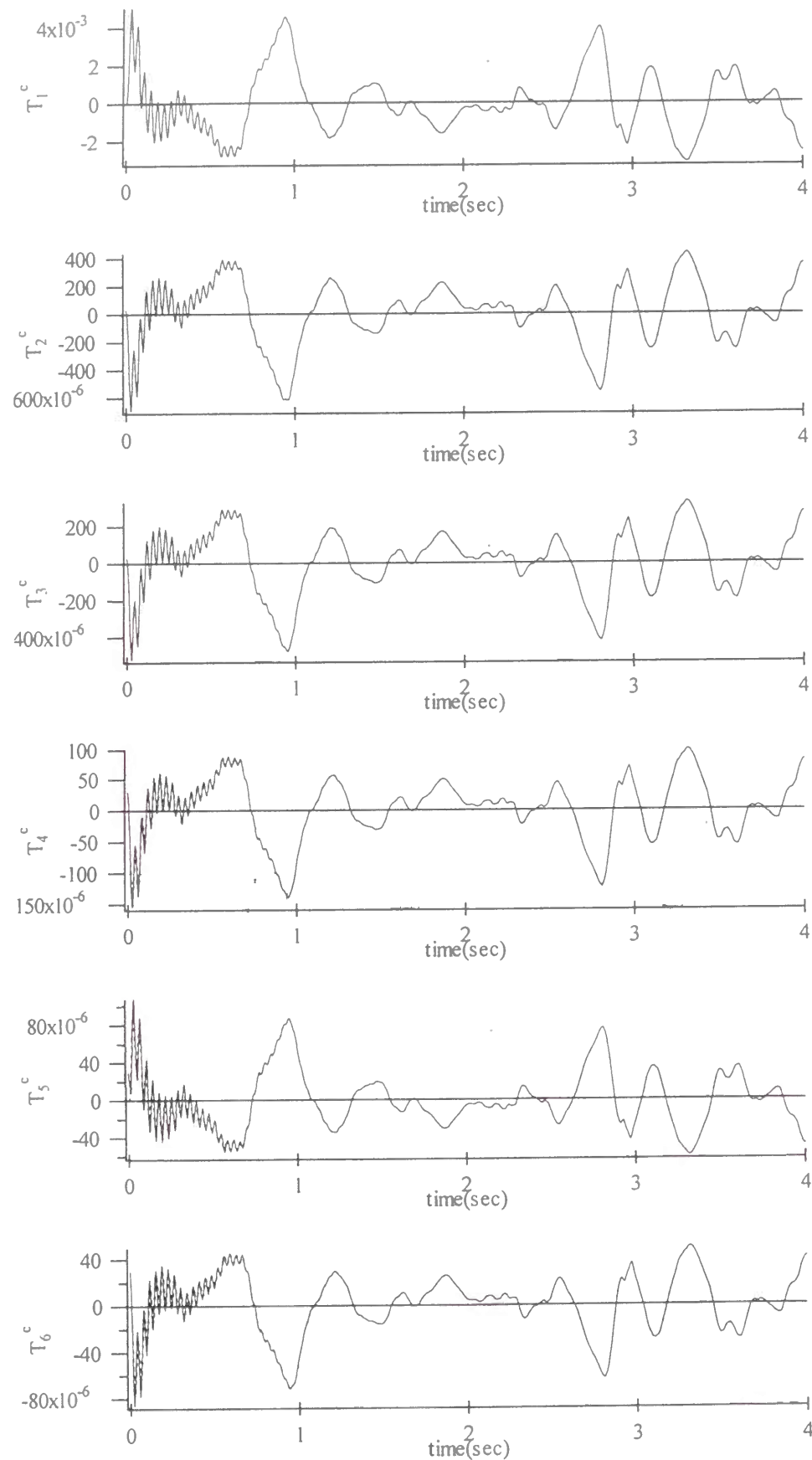


図 4.2 初期不整の影響 (実線: 初期不整あり、破線: 初期不整なし、NS 成分のみ)

6. 逆対称変形モードの動座屈現象

6.1 はじめに

動的安定問題は動的外力による動的座屈を扱う問題と周期外力の下での共振現象を扱う問題に大別される。前章では、動座屈荷重以下の上下水平両方向の地震動を受ける場合に、初期不整が幾何学的非線形項によりどの程度他のモードに影響を与えるかを検証した。得られた結論は動座屈荷重以下における現象を述べたものであり、動座屈荷重を越えるときの現象まで考察したものではない。よって本章では、水平地震動のみを受ける球形シェルの動座屈特性を明らかにすることを目的とする。

構造物が地震動等により加振されるとき、或る加振振幅レベルで動座屈が発生するが、このときの加速度レベルでの臨界値を本論では「臨界入力加速度」と定義する。神戸海洋気象台による阪神・淡路大震災地震動記録 (Kobe-JMA) 及び El Centro 水平地震動記録を用いた応答計算を行い、これら実地震動の臨界入力加速度を求めることで目的を達する。ところで、動座屈現象は応力度あるいは変位で表されるものと考えられるが、応答加速度が急激に増大するときには、応答応力、応答変位も急激に増大する。臨界入力加速度を得るための指標は応力、変位、速度および加速度の何れをとっても同じことになると考えられることから、本論では最大応答加速度を臨界入力加速度を求める際の指標とする。

しかしながら、3章で示したように、線形応答解析時の最大応答加速度は、球形シェルの幾何学的・材料学的寸法により大きく異なる値となることは明らかであり、加振振幅レベルに対する最大応答加速度の比を動座屈現象を表すための指標として用いることは適切でない。本章では「非線形加速度応答比」を「非線形応答解析時最大応答加速度を線形応答解析時最大応答加速度で割った値」と定義し、半開角、半径-板厚比、材料学的パラメータをパラメータとした非線形応答解析を行い、非線形加速度応答比の変化を調べることで目的を達する。

球形シェル構造物の形態によっては非線形応答解析が不可欠であり、線形応答解析では予期しきれない応答が表れることを示す。

6.2 逆対称非線形応答方程式

(1) 振動モードの仮定

逆対称振動時の法線方向変位成分を 2 章で示した逆対称近似固有モードを用いて以下のように仮定する。

$$w = w_c \cos \theta, w_c = \sum_{i=1}^{M_1} W_i^1(\phi) T_i^c(t), W_i^1 = \sum_{j=1}^{N_1} G_{ij}^1 P_j^1(\cos \phi) \quad (6.1)$$

ここに、 M_1 は使用するモードの数、 P_j^1 、 N_1 は Legendre 陪多項式及びそれを使用する数を示す。

(2) 逆対称非線形応答最終支配方程式

flexural 振動を仮定した球形シェル法線方向非線形運動方程式及び適合条件式に(6.1)式を代入し、Galerkin 法を適用すると、4章で得られた時間関数に関する幾何学的非線形応答支配式のうち、逆対称固有モードの応答に関する係数 (cosθ にのみ関する係数) のみを取り出した、以下の幾何学的非線形応答最終支配式が得られる。この式は、l 次のモードに関する T_l^c のみを含んだ非線形連立 2 階常微分方程式となっている。(ここに、 $l = 1 \sim M_l$)

$$B_l^1 \ddot{T}_l^c + B_l^2 T_l^c + \sum_{s=1}^{M_l} \sum_{t=1}^{M_l} \sum_{u=1}^{M_l} B_l^3(s, t, u) T_s^c T_t^c T_u^c = B_l^4 \ddot{V} + \ddot{V} \sum_s B_l^5(s) T_s^c \quad (6.2)$$

ここに、 V は水平方向強制変位を板厚で正規化したものであり、また時間関数 T_l^c も同様に板厚で正規化している。なお、係数 B_l^i は 4 章に示すように、半開角(ϕ_0)、半径-板厚比(alh)、材料パラメータ ($A=ma^2/Ehg$)、境界条件等により計算される。

6.3 数値計算手法および計算パラメータ

(6.2)式は板厚で正規化したものであるが、地震記録波は実次元の単位を持って与えられているため、これを入力とするには半径あるいは板厚という実次元の値を入れる必要があることは前に述べた。また、入力地震波に対する臨界入力加速度を調べる場合、半開角や半径-板厚比の影響を見るためには、同規模のサイズと考えられるシェルの比較を行う方がいいと考えられる。しかしながら、半径や板厚を固定した値とすると、半開角が異なる形状では同規模のサイズのシェルを比較していないという印象を受けるので、ここでは底辺のスパンを固定した値として数値計算を行うこととする。

そこで、数値計算のモデルとして、底辺のスパンが 100m で境界が固定支持されたドームを採用する。入力地震波は阪神大震災及び El Centro 水平地震動記録を用いる。これらの記録は 0.02 秒間隔のデジタル量で与えられているので未知関数 T_l^c は解析的には求められない。ここでは、Nigam-Jennings 法によって直接数値計算する。しかしながら、通常用いられる程度の球形ドームの低次の固有振動数は、この地震動の卓越振動数より低くはないので、この 0.02 秒程度の間隔で採取されたデジタル量をそのまま用いることは解の精度と収斂性が望ましくないと考えられる。従って本計算では 3 章の検討を踏まえて、データ間を 10 分割し線形補間したデータに基づいて数値計算を行った。

表 1. 計算パラメータ

入力地震波	Kobe-JMA-NS, El Centro-NS
ポアソン比(ν)	0.3
減衰率	0.02

半開角 (ϕ_0)	15, 30, 45, 60
使用する固有モード	1st~6th の内 90Hz を越えないもの
板厚比 (alh)	100, 400, 1000
材料パラメータ ($A=ma^2/Ehg$)	0.09 ~ 9.0 x 10 ⁻⁴

6.4 数値計算結果及び考察

(1) 板厚比と半開角の動的安定限界への影響

入力地震波を El Centro とし、半径-板厚比が比較的厚いと考えられる 100 と比較的薄いと考えられる 1000、半開角が 15, 30, 45 度の 6 ケの組み合わせについて材料パラメータ A による非線形加速度応答比 (非線形応答解析時最大応答加速度を線形応答解析時最大応答加速度で割った値) を調査する。横軸に入力加速度のピーク値(gal)をとり、縦軸に非線形加速度応答比を表したものが図 1 である。半径-板厚比が 1000 のものは縦軸を対数表示にしているが、実際の構造物にこのように大きな応答が現れるのではない。ここでは時間関数に関して 3 次までの幾何学的非線形性を考慮しているに過ぎないため大変形応答に追随出来ていないと考えられるためである。

この計算結果から、

- ① 材料パラメータが大きくなるほど、
- ② 半開角が小さいほど、
- ③ 半径-板厚比が大きいくほど (板厚が薄いほど)

非線形応答解析の必要性があるといえる。

ところで実在の構造物は本論のようにモノコック構造ではなく部材により補強されていることが多い。このような場合、補強部材を等価剛性に置き換えて全体的な挙動を把握することが出来る。大スパンのライズの低い球形シェルの場合、半径-板厚比がかなり大きくなると考えられ幾何学的非線形性により、線形応答解析では予測できなかった応答加速度が現れる可能性がある。

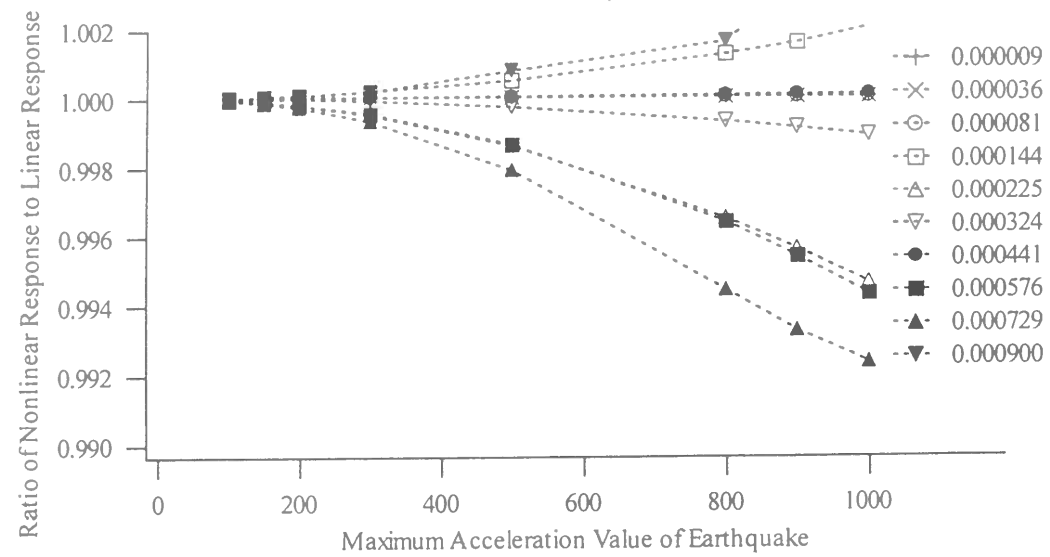


図 1.a 板厚比と半開角の動的安定限界への影響 (半開角 15 度、 $alh=100$)

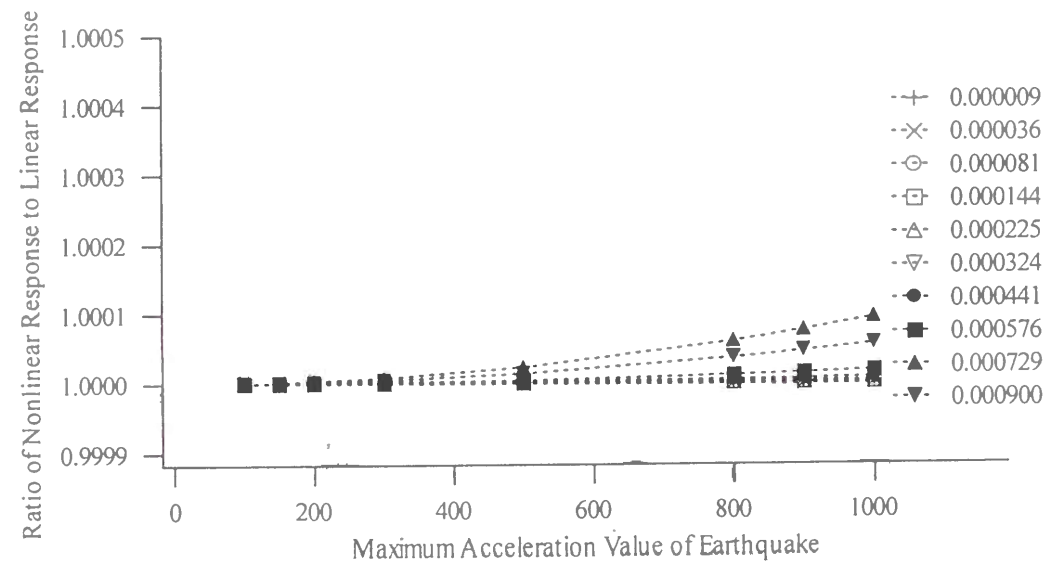


図 1.b 板厚比と半開角の動的安定限界への影響 (半開角 30 度、 $alh=100$)

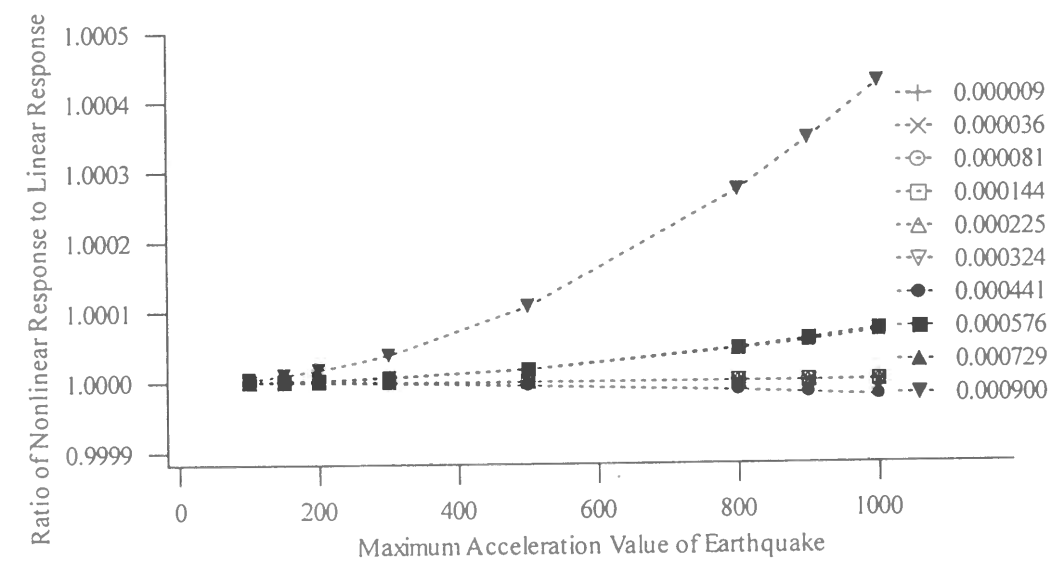


図 1.c 板厚比と半開角の動的安定限界への影響 (半開角 45 度、 $alh=100$)

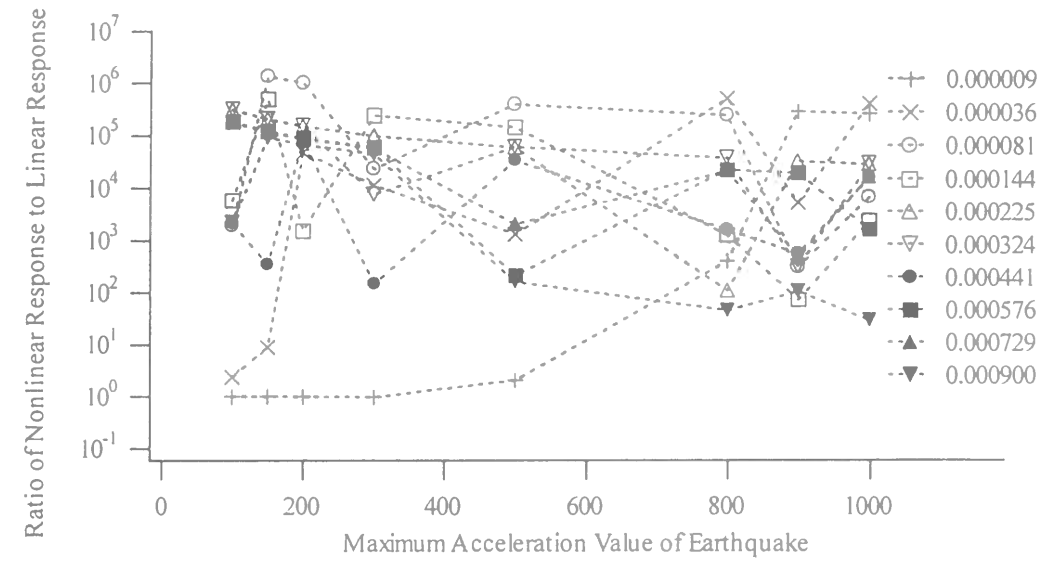


図 1.d 板厚比と半開角の動的安定限界への影響 (半開角 15 度、 $alh=1000$)

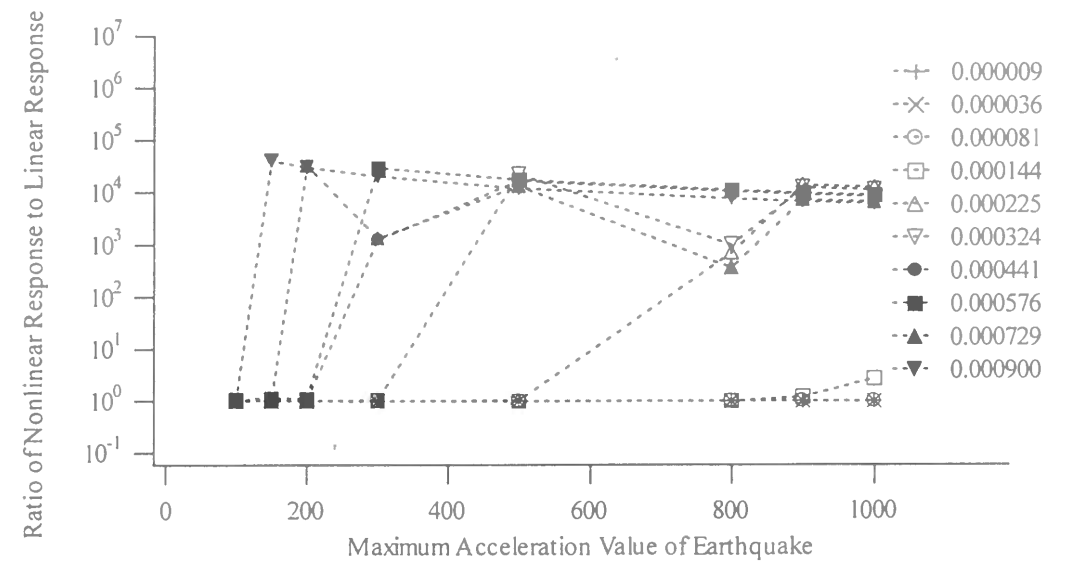


図 1.e 板厚比と半開角の動的安定限界への影響 (半開角 30 度、 $alh=1000$)

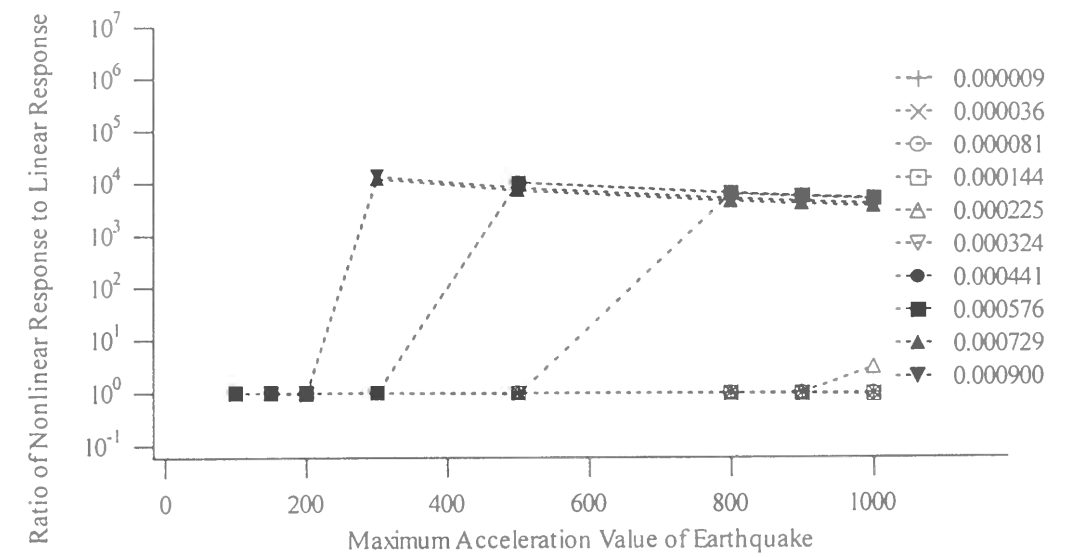


図 1.f 板厚比と半開角の動的安定限界への影響 (半開角 45 度、 $alh=1000$)

(2)臨界入力加速度

上記の結果を踏まえ半開角が 30 度および 45 度、半径-板厚比が 1000 の球形シェルについてより詳細なデータを得るため、Kobe-JMA、El Centro の 2 つの地震波を与え入力加速度のピーク値を 10gal 単位で変化させて非線形加速度応答比の変化を調査した。計算結果を図 2 に示す。横軸を入力加速度のピーク値、縦軸を非線形加速度応答比、凡例として材料パラメータ A を採用している。

入力加速度のピーク値を大きくしてゆくと非線形加速度応答比は少しの上昇を見せた後、急激に増大する様子がわかる。大変形に追従出来る幾何学的高次非線形理論によって定式化を行いこの問題に用いると、この入力外力の加速度ピーク値に対する非線形加速度応答比に上限があつてこのように増大するのみかもしれないが、この理論に基づく限り、臨界入力加速度を得るための基準として非線形加速度応答比が 2.0 を越える時点とすることは実用上問題ないと考えられる。よって、ここでは非線形加速度応答比が 2.0 を越えた時点の入力外力の加速度ピーク値を臨界入力加速度とし、結果を図 3 に示す。横軸を材料パラメータ、縦軸を臨界入力加速度としている。これらの値以下と考えられる構造物は、幾何学的非線形項の影響は殆どなく、前章で述べたように初期不整の影響も殆どないので、幾何学的非線形応答解析を行う必要はなく線形応答解析のみで応答性状は把握出来るといえる。

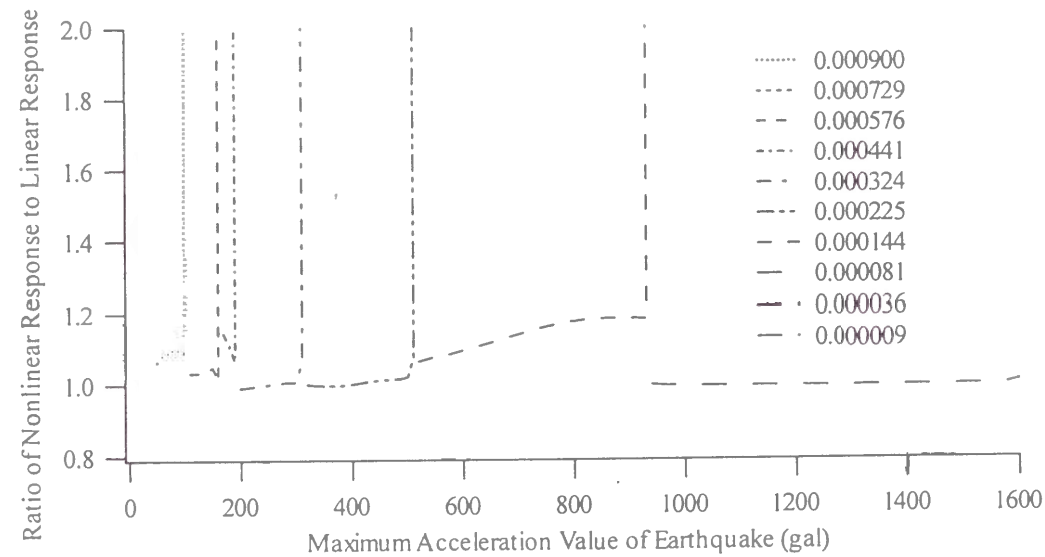


図 2.a 入力地震波と半開角の動的安定限界への影響 (半開角 30 度、El Centro)

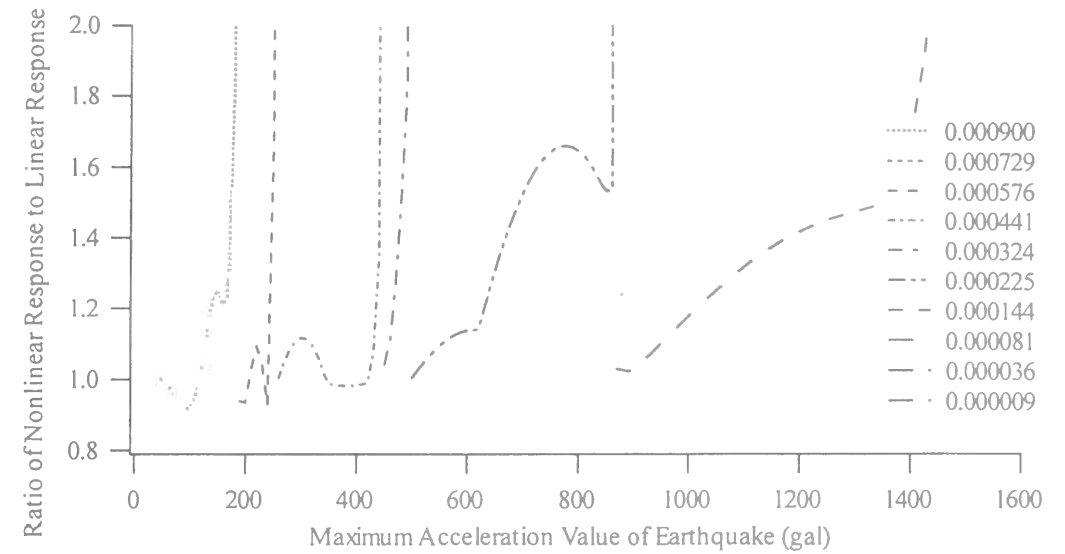


図 2.b 入力地震波と半開角の動的安定限界への影響 (半開角 45 度、El Centro)

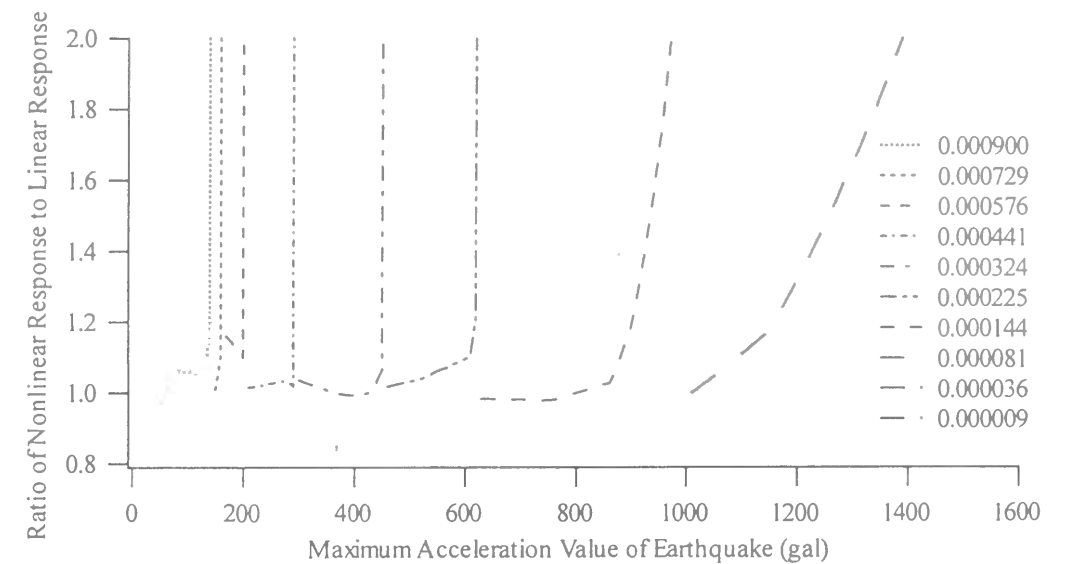


図 2.c 入力地震波と半開角の動的安定限界への影響 (半開角 30 度、Kobe-JMA)

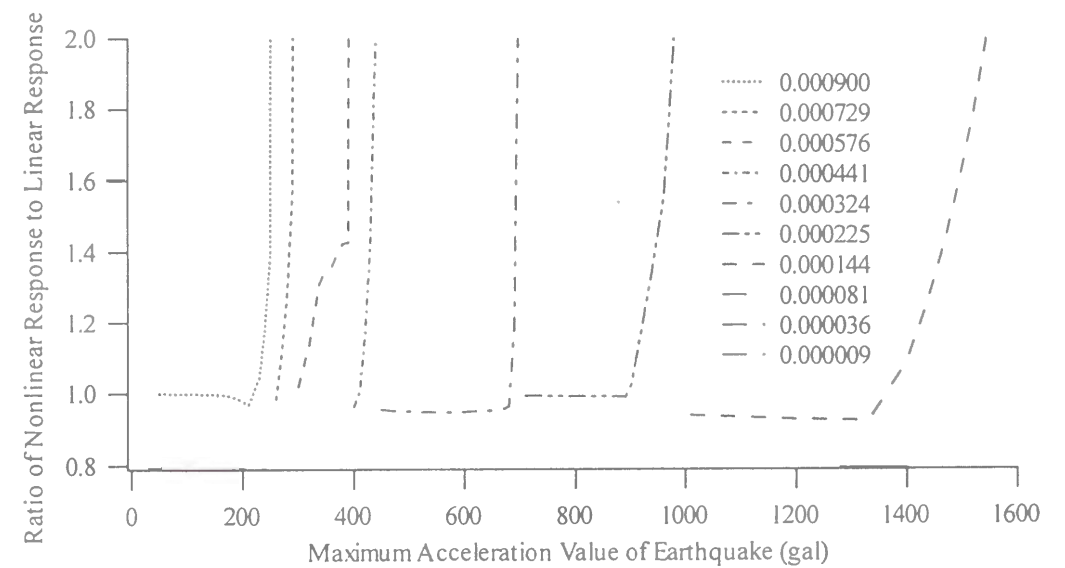


図 2.d 入力地震波と半開角の動的安定限界への影響 (半開角 45 度、Kobe-JMA)

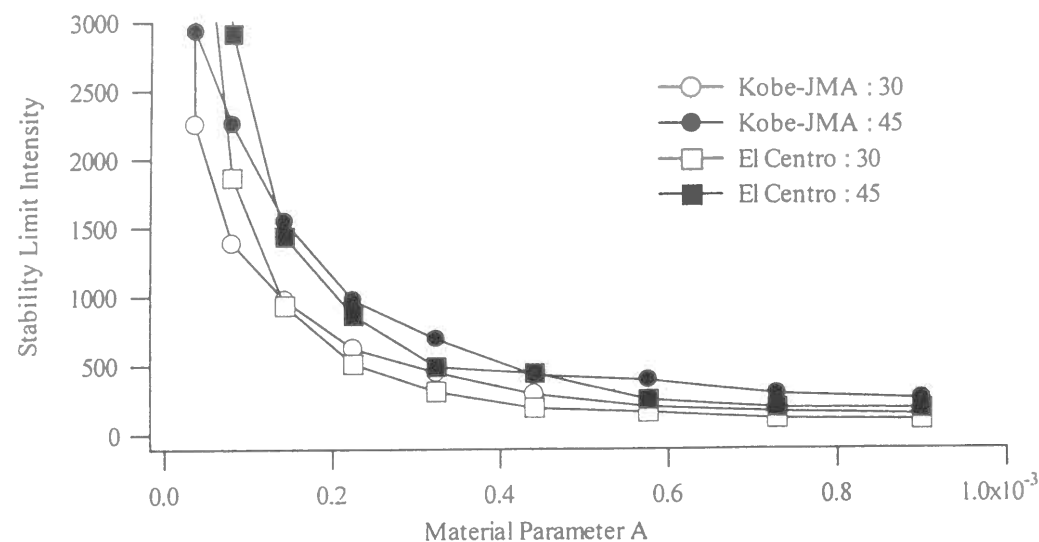


図3 臨界入力加速度（横軸：材料パラメータ、縦軸：臨界入力加速度(gal)）

6.5 まとめ

本章では、非線形加速度応答比（非線形応答解析時最大応答加速度を線形応答解析時最大応答加速度で割った値）を調べることで実地震動の臨界入力加速度を求め、非線形応答解析が必要な材料学的及び幾何学的パラメータの範囲を示した。前章では動座屈荷重以下の荷重に対する初期不整の影響はないことを述べたが、その結論と合わせると、これら動座屈荷重の値以下であれば非線形応答解析を行う必要はなく、線形応答解析のみで応答性状は把握できると考えられる。

本章の結果から、一般的には

- ①材料パラメータが大きくなるほど、
- ②半開角が小さいほど、
- ③半径-板厚比が大きいほど（板厚が薄いほど）

非線形応答解析の必要性があると言える。しかしながら、図3で示す臨界入力加速度は記録された地震波に対するものであり、これから起こりうるであろう地震に対する性状を述べられるものではない。本章で示した臨界入力加速度を記録されている地震波に対し数多く行い、その統計的な立場から一般的であると考えられる動座屈荷重を求めることも可能であると思われるが本論文では行わない。次章以降では、これらの動座屈現象を引き起こしているメカニズムの根底にあると考えられる、周期外力下の幾何学的非線形効果を詳細に調べることをとする。

7. 定常振動外力下での逆対称変形モードの非線形応答

7.1 はじめに

動的安定問題は動的外力による動的座屈を扱う問題と周期外力の下での共振現象を扱う問題に大別される。前章では実地震波を用いた動的外力による動的座屈問題を扱ったが、本章では、4章で得られた時間関数に関する幾何学的非線形運動方程式のうち、逆対称固有モードの応答に関する係数のみを取りだし、周期外力下での共振現象について調べる。

逆対称形応答変形が加振方向に対応する「加振型モード」の他にそれに直交する方向にも生じる「随伴型モード」が存在すると仮定し、逆対称形非線形定常振動解および安定行列式の導出を行い、水平振動による当該構造物の安定性を論じる。この場合、応答変形は緯線方向に伝播型となっている（図1参照）。本章では、定常振動解（3節）および安定行列式（4節）の導出を行った後、初めに加振型モードのみを考えた定常振動解の安定性を述べる（5節）。その後、伝播型モードを考慮した定常振動状態の安定性を述べる（6節）。

なお、本章は逆対称モードのうちのある1つのモードに関するTraveling応答を考察するものであり、複数のモードを同時に考慮した非線形定常振動状態を扱うものではない。複数のモードを同時に考慮した定常振動状態の性状については次章で考察を行う。なお、本章で扱う逆対称非線形定常振動状態を解析的に取り扱った既往の論文には國枝らによるもの[18,19]があり、そこで仮定された変形モードの性能があまりよくないものであったので、ここではこの論文の検証もかねてほぼ同様の手法により定常振動外力下での逆対称変形モードの非線形応答性状を詳細に調べることをとする。この論文では、逆対称変形モードに於ける共振曲線はsoftening型として図示されているが、本論文ではhardening型の結果になっている。論文中に含まれる式に符号等の間違いもあり、どこに原因があるかは特定できないが、逆対称変形モードの共振曲線がhardening型になることは國枝も認めている。

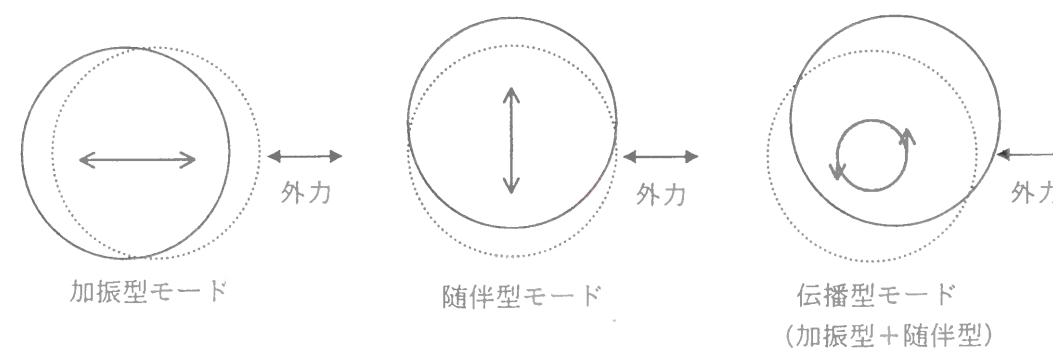


図1. 応答変形モード

7.2 たわみモードの仮定

法線方向変位成分（たわみモード） w を2章で得られた逆対称近似固有モード式（ W_l^1 ）を用いて仮定する。 $\theta=0$ 方向からの外力を考える場合、 w_c が加振型モード、 w_s が随伴型モードとなり、これらの和で伝播型モードを表している。

$$w = w_s \sin \theta + w_c \cos \theta \quad (7.1)$$

ここでは、1次のモードのみを考えることとし、他のモードとの連成を考えないこととすると、

$$w_s = W_l^1(\phi) T_l^s(t), \quad w_c = W_l^1(\phi) T_l^c(t), \quad W_l^1(\phi) = \sum_{j=1}^{N_l} G_{jl}^1 P_j^1(\cos \phi) \quad (7.2)$$

となる。ここに、 P_j^1 、 N_l はLegendre 陪多項式及びそれらを使用する数を示す。 G_{jl}^1 は2章の近似固有モード作成法により計算される定数であり、球形シェル半開角、半径-板厚比および境界条件等を満たすように求められた定数である。

表記を簡便にするため、(7.2)式を以下のようにおく。

$$w_s = W(\phi) x_s(t), \quad w_c = W(\phi) x_c(t) \quad (7.3)$$

7.3 定常振動解の導出

7.3.1 逆対称非線形応答最終支配方程式

入力加速度として角振動数 Ω 、 $\theta=0$ 方向より振幅 P_c' および $\theta=\pi/2$ 方向より振幅 P_s' の定常振動外力を受ける、flexural 振動を仮定した球形シェル法線方向非線形運動方程式および適合条件式に(7.1)、(7.3)式で表されるたわみモード式を代入し、モード重畳法を適用すると、4章で得られた時間関数に関する幾何学的非線形応答方程式のうち、逆対称固有モードの1次のモードに関する時間関数 T_l^c および T_l^s のみに掛かる係数のみを取り出した、以下の幾何学的非線形応答最終支配式が得られる。

$$\ddot{x}_c + \omega^2 x_c = -\gamma \dot{x}_c + \varepsilon(k_1 x_c^3 + k_2 x_c x_s^2) - f_c \quad (7.4)$$

$$\ddot{x}_s + \omega^2 x_s = -\gamma \dot{x}_s + \varepsilon(k_1 x_s^3 + k_2 x_s x_c^2) - f_s \quad (7.5)$$

ここに、(7.4)式は $\theta=0$ 方向の応答支配方程式、(7.5)式は $\theta=\pi/2$ 方向の応答支配方程式であり、それぞれ、加振型モード応答支配方程式および随伴型モード応答支配方程式と呼べるものである。ここに、なお、ここに時間関数 x_s 、 x_c は球形シェルの板厚で正規化されたものを示す。

$$\varepsilon = (h/a)^2, \quad k_1 = -{}_1\beta_2/{}_1\beta_0, \quad k_2 = -{}_1\beta_3/{}_1\beta_0, \quad \omega = (h/a)\sqrt{{}_1\beta_1/{}_1\beta_0}$$

$$\gamma = 2\xi\omega = 2\xi(h/a)\sqrt{{}_1\beta_1/{}_1\beta_0}$$

$$f_c = -P_c'({}_1\beta_4/{}_1\beta_0) \cos \Omega t \equiv P_c \cos \Omega t$$

$$f_s = -P_s'({}_1\beta_4/{}_1\beta_0) \cos \Omega t \equiv P_s \cos \Omega t$$

であり、 a は球形シェルの半径、 h は板厚、 ξ は減衰常数、 ω は1次の逆対称モードの固有円振動数

を示し、半径-板厚比から得られる ε は充分小さな値となっている。なお、 P_c' 、 P_s' は、入力加速度を板厚で正規化ものとして示している。また、係数 ${}_1\beta_0 \sim {}_1\beta_4$ は4章で得られた各々の時間関数の項に掛かる係数のうち、1次のモードに関するものを取り出したものであり、以下のように表される。

$${}_1\beta_0 = \varepsilon B_l^1 / h = 12(1-\nu^2) A \sum_{j=1}^{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} G_{jl}^1 G_{il}^1 S^1(j, i)$$

$${}_1\beta_1 = B_l^2 / h = \sum_{j=1}^{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} G_{jl}^1 G_{il}^1 \{2-j(j+1)\} \{2-j(j+1)-\lambda_j\} S^1(j, i)$$

$${}_1\beta_2 = B_l^6(l, l, l) / h = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_l} \sum_{k=1}^{N_l} \sum_{m=1}^{N_l} G_{il}^1 G_{jl}^1 G_{kl}^1 G_{ml}^1 \sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m} [3D_{ij,p}^{bb} D_{km,q}^{bb} + D_{ij,p}^{ba} D_{km,q}^{ab} + D_{ij,p}^{bb} D_{km,q}^{aa} + 3D_{ij,p}^{aa} D_{km,q}^{aa}] S(p, q)$$

$${}_1\beta_3 = B_l^5(l, l, l) / h = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_l} \sum_{k=1}^{N_l} \sum_{m=1}^{N_l} G_{il}^1 G_{jl}^1 G_{kl}^1 G_{ml}^1 \sum_{p=0}^{i+j} \sum_{q=0}^{k+m} [3D_{ij,p}^{bb} D_{km,q}^{bb} + 3D_{ij,p}^{ba} D_{km,q}^{ab} - 2D_{ij,p}^{ab} D_{km,q}^{ab} + 3D_{ij,p}^{ab} D_{km,q}^{ba} - 2D_{ij,p}^{bb} D_{km,q}^{aa} + 3D_{ij,p}^{aa} D_{km,q}^{aa}] S(p, q)$$

$${}_1\beta_4 = \varepsilon B_l^7 / h = 36(1-\nu^2) A \sum_{j=1}^{N_l} G_{jl}^1 S^1(1, j)$$

なお、ここに用いている記号は4章と同様のものである。

7.3.2 定常振動解の導出

幾何学的非線形応答最終支配式(7.4)、(7.5)の解を

$$x_c = \bar{A}_c(t) \cos(\Omega t + \bar{\eta}_c(t)), \quad x_s = \bar{A}_s(t) \cos(\Omega t + \bar{\eta}_s(t))$$

と仮定し、平均化法を用いて定常振動状態の振動解を求める。ここに(7.4)、(7.5)式において、時間関数 x_s 、 x_c が球形シェルの板厚で正規化されたものを示していることから、上式中に含まれる応答振幅 \bar{A}_c 、 \bar{A}_s も同様に板厚で正規化されたものとなっている。

$$\dot{x}_c = v_c$$

$$\dot{v}_c = -\omega^2 x_c - \gamma v_c + \varepsilon(k_1 x_c^3 + k_2 x_c x_s^2) - P_c \cos \Omega t \quad (7.6)$$

$$\dot{x}_s = v_s$$

$$\dot{v}_s = -\omega^2 x_s - \gamma v_s + \varepsilon(k_1 x_s^3 + k_2 x_s x_c^2) - P_s \cos \Omega t \quad (7.7)$$

離調パラメータ ω^c 、 ω^s を以下のようにおく。

$$\varepsilon \omega^c = \Omega^2 - \omega_c^2, \quad \varepsilon \omega^s = \Omega^2 - \omega_s^2$$

座標変換式は以下のように表される。

$$x_c = A_c \cos(\Omega t + \eta_c), \quad v_c = -\Omega A_c \sin(\Omega t + \eta_c) \quad (7.8)$$

$$x_s = A_s \cos(\Omega t + \eta_s), \quad v_s = -\Omega A_s \sin(\Omega t + \eta_s) \quad (7.9)$$

$$A_c = \sqrt{x_c^2 + \frac{v_c^2}{\Omega^2}}, \quad A_s = \sqrt{x_s^2 + \frac{v_s^2}{\Omega^2}} \quad (7.10)$$

$$\eta_c = -\tan^{-1}\left(\frac{v_c}{\Omega x_c}\right) - \Omega t, \quad \eta_s = -\tan^{-1}\left(\frac{v_s}{\Omega x_s}\right) - \Omega t \quad (7.11)$$

(7.10)、(7.11)式の t に関する微分は以下のようになる。

$$\dot{A}_c = \frac{1}{A_c} \left(x_c \cdot \dot{x}_c + \frac{1}{\Omega^2} v_c \cdot \dot{v}_c \right) \quad (7.12)$$

$$\dot{\eta}_c = -\frac{1}{A_c^2 \Omega} (x_c \dot{v}_c - v_c \dot{x}_c) - \Omega \quad (7.13)$$

$$\dot{A}_s = \frac{1}{A_s} \left(x_s \cdot \dot{x}_s + \frac{1}{\Omega^2} v_s \cdot \dot{v}_s \right) \quad (7.14)$$

$$\dot{\eta}_s = -\frac{1}{A_s^2 \Omega} (x_s \dot{v}_s - v_s \dot{x}_s) - \Omega \quad (7.15)$$

(7.12)、(7.13)式に(7.6)、(7.8)、(7.10)式を代入することにより \dot{A}_c 、 $\dot{\eta}_c$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{A}_c A_c \Omega &= -A_c^2 (\Omega^2 - \omega_c^2) \cos(\Omega t + \eta_c) \sin(\Omega t + \eta_c) - \hat{\gamma} A_c^2 \Omega \sin^2(\Omega t + \eta_c) \\ &\quad + \varepsilon \{ -k_1 A_c^4 \cos^3(\Omega t + \eta_c) \sin(\Omega t + \eta_c) \\ &\quad - k_2 A_c^2 A_s^2 \cos(\Omega t + \eta_c) \sin(\Omega t + \eta_c) \cos^2(\Omega t + \eta_s) \} \\ &\quad + P_c A_c \sin(\Omega t + \eta_c) \cos \Omega t \\ - A_c^2 \dot{\eta}_c \Omega &= -\omega_c^2 A_c^2 \cos^2(\Omega t + \eta_c) + \hat{\gamma} \Omega A_c^2 \cos(\Omega t + \eta_c) \sin(\Omega t + \eta_c) \\ &\quad + \varepsilon k_1 A_c^4 \cos^4(\Omega t + \eta_c) + \varepsilon k_2 A_c^2 A_s^2 \cos^2(\Omega t + \eta_c) \cos^2(\Omega t + \eta_s) \\ &\quad - P_c A_c \cos(\Omega t + \eta_c) \cos \Omega t - \Omega^2 A_c^2 \sin^2(\Omega t + \eta_c) + A_c^2 \Omega^2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

同様に、 \dot{A}_s 、 $\dot{\eta}_s$ は(7.14)、(7.15)式に(7.7)、(7.8)、(7.9)式を代入することにより得られる。

$$\begin{aligned} \dot{A}_s A_s \Omega &= -A_s^2 (\Omega^2 - \omega_s^2) \cos(\Omega t + \eta_s) \sin(\Omega t + \eta_s) - \hat{\gamma} A_s^2 \Omega \sin^2(\Omega t + \eta_s) \\ &\quad + \varepsilon \{ -k_1 A_s^4 \cos^3(\Omega t + \eta_s) \sin(\Omega t + \eta_s) \\ &\quad - k_2 A_c^2 A_s^2 \cos(\Omega t + \eta_s) \sin(\Omega t + \eta_s) \cos^2(\Omega t + \eta_c) \} \\ &\quad + P_s A_s \sin(\Omega t + \eta_s) \cos \Omega t \\ - A_s^2 \dot{\eta}_s \Omega &= -\omega_s^2 A_s^2 \cos^2(\Omega t + \eta_s) + \hat{\gamma} \Omega A_s^2 \cos(\Omega t + \eta_s) \sin(\Omega t + \eta_s) \\ &\quad + \varepsilon k_1 A_s^4 \cos^4(\Omega t + \eta_s) + \varepsilon k_2 A_c^2 A_s^2 \cos^2(\Omega t + \eta_c) \cos^2(\Omega t + \eta_s) \\ &\quad - P_s A_s \cos(\Omega t + \eta_s) \cos \Omega t - \Omega^2 A_s^2 \sin^2(\Omega t + \eta_s) + A_s^2 \Omega^2 \end{aligned} \quad (7.17)$$

すでに記号として用いているが、値 A_c 、 A_s 、 η_c 、 η_s は定数なので、これらの値を時間で微分した項を含む左辺の値はすべて0になっている。(7.16)~(7.19)式の右辺を $\Omega t = 0 \sim 2\pi$ について平均化(領域に渡って積分し、 2π で割る)すると定常振動解は以下のように得られる。

$$-\frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2)A_c + \frac{3}{8}\varepsilon k_1 A_c^3 + \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_c A_s^2 \{ \cos 2(\eta_c - \eta_s) + 2 \} - \frac{1}{2}P_c \cos \eta_c = 0 \quad (7.20-a)$$

$$-\frac{1}{2}\gamma \Omega A_c - \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_c A_s^2 \sin 2(\eta_c - \eta_s) + \frac{1}{2}P_c \sin \eta_c = 0 \quad (7.20-b)$$

$$-\frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2)A_s + \frac{3}{8}\varepsilon k_1 A_s^3 + \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_s A_c^2 \{ \cos 2(\eta_s - \eta_c) + 2 \} - \frac{1}{2}P_s \cos \eta_s = 0 \quad (7.20-c)$$

$$-\frac{1}{2}\gamma \Omega A_s - \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_s A_c^2 \sin 2(\eta_s - \eta_c) + \frac{1}{2}P_s \sin \eta_s = 0 \quad (7.20-d)$$

ここに、 A_s 、 A_c は板厚で正規化された応答振幅、 η_s 、 η_c は応答の位相を示す。

7.4 安定行列式の導出

振動解に微小攪乱が付加された場合の解を以下のようにおく。

$$x_c = \tilde{A}_c \cos(\Omega t + \tilde{\eta}_c), \quad x_s = \tilde{A}_s \cos(\Omega t + \tilde{\eta}_s)$$

ここに

$$\tilde{A}_c = A_c + a_c e^{\lambda t}, \quad \tilde{A}_s = A_s + a_s e^{\lambda t}, \quad \tilde{\eta}_c = \eta_c + \zeta_c e^{\lambda t}, \quad \tilde{\eta}_s = \eta_s + \zeta_s e^{\lambda t}$$

であつて、 a_c 、 a_s 、 ζ_c 、 ζ_s は充分小さい値とする。また λ は必要なオーダーで小さいとする。これらは定常振動解(7.20)式を満たさなくてはならないので、(7.20)式に代入する。

(7.20-a)式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2)(A_c + a_c e^{\lambda t}) + \frac{3}{8}\varepsilon k_1 (A_c + a_c e^{\lambda t})^3 \\ + \frac{1}{8}\varepsilon k_2 (A_c + a_c e^{\lambda t})(A_s + a_s e^{\lambda t})^2 [\cos 2\{\eta_c - \eta_s + e^{\lambda t}(\zeta_c - \zeta_s)\} + 2] \\ - \frac{1}{2}P_c \cos(\eta_c + \zeta_c e^{\lambda t}) = 0 \end{aligned} \quad (7.20-a')$$

ここで、以下の近似式

$$e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = 1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots \cong 1 + \lambda t$$

$$\cos 2e^{\lambda t}(\zeta_c - \zeta_s) \cong \cos(2 + 2\lambda t)(\zeta_c - \zeta_s) \cong \cos 2(\zeta_c - \zeta_s) \cong 1$$

$$\sin 2e^{\lambda t}(\zeta_c - \zeta_s) \cong \sin(2 + 2\lambda t)(\zeta_c - \zeta_s) \cong \sin 2(\zeta_c - \zeta_s) \cong 2(\zeta_c - \zeta_s)$$

$$\cos(\eta_c + \zeta_c e^{\lambda t}) = \cos \eta_c \cos \zeta_c e^{\lambda t} - \sin \eta_c \sin \zeta_c e^{\lambda t}$$

$$\cong \cos \eta_c \cos \zeta_c - \sin \eta_c \sin \zeta_c \cong \cos \eta_c - \zeta_c \sin \eta_c$$

と、(7.20-a)、(7.20-b)を考慮すると(7.20-a)式は以下のように書き換えられる。

$$-\frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2)a_c + \frac{3}{8}\varepsilon k_1 \times 3A_c^2 a_c + \frac{1}{8}\varepsilon k_2(2A_c A_s a_s + A_s^2 a_c)\{\cos 2(\eta_c - \eta_s) + 2\} - \frac{1}{2}P_c \sin \eta_c \times \zeta_c = 0 \quad (7.21)$$

同様に、(7.20-b)式は

$$-\frac{1}{2}\gamma\Omega(A_c + a_c e^{\lambda t}) + \frac{1}{2}P_c \sin(\eta_c + \zeta_c e^{\lambda t}) - \frac{1}{8}\varepsilon k_2(A_c + a_c e^{\lambda t})(A_s + a_s e^{\lambda t})^2 \sin 2\{\eta_c - \eta_s + e^{\lambda t}(\zeta_c - \zeta_s)\} = 0 \quad (7.20-b')$$

ここで、上記の近似式と以下の近似式

$$\sin 2\{\eta_c - \eta_s + e^{\lambda t}(\zeta_c - \zeta_s)\} \cong \sin 2(\eta_c - \eta_s) + \cos 2(\eta_c - \eta_s) \times 2(\zeta_c - \zeta_s)$$

$$\sin(\eta_c + \zeta_c e^{\lambda t}) \cong \sin \eta_c + \zeta_c \cos \eta_c$$

を用い、(7.20-b)式を考慮すると(7.20-b')は以下のように書き換えられる。

$$\frac{1}{2}\gamma\Omega a_c - \frac{1}{2}P_c \cos \eta_c \times \zeta_c + \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_c A_s^2 \cos 2(\eta_c - \eta_s) \times 2(\zeta_c - \zeta_s) + \frac{1}{8}\varepsilon k_2(A_s^2 a_c + 2A_s A_c a_s) \sin 2(\eta_c - \eta_s) = 0 \quad (7.22)$$

(7.21)、(7.22)式を ζ_c 、 a_c 、 ζ_s 、 a_s に関してまとめると以下のようになる。

$$A_{11}\zeta_c + A_{12}a_c + A_{13}\zeta_s + A_{14}a_s = 0$$

$$A_{21}\zeta_c + A_{22}a_c + A_{23}\zeta_s + A_{24}a_s = 0$$

ここに

$$A_{11} = -\frac{1}{4}\varepsilon k_2 A_c A_s^2 \sin 2(\eta_c - \eta_s) + \frac{1}{2}P_c \sin \eta_c$$

$$A_{12} = -\frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2) + \frac{9}{8}\varepsilon k_1 A_c^2 + \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_s^2 \{\cos 2(\eta_c - \eta_s) + 2\}$$

$$A_{13} = \frac{1}{4}\varepsilon k_2 A_c A_s^2 \sin 2(\eta_c - \eta_s)$$

$$A_{14} = \frac{1}{4}\varepsilon k_2 A_c A_s \{\cos 2(\eta_c - \eta_s) + 2\}$$

$$A_{21} = \frac{1}{4}\varepsilon k_2 A_c A_s^2 \cos 2(\eta_c - \eta_s) - \frac{1}{2}P_c \cos \eta_c$$

$$A_{22} = \frac{1}{2}\hat{\gamma}\Omega + \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_s^2 \sin 2(\eta_c - \eta_s)$$

$$A_{23} = -\frac{1}{4}\varepsilon k_2 A_c A_s^2 \cos 2(\eta_c - \eta_s)$$

$$A_{24} = \frac{1}{4}\varepsilon k_2 A_s A_c \sin 2(\eta_c - \eta_s)$$

なお、 A_{11} は(7.22)式を用いると以下のようになる。

$$A_{11} = \frac{1}{2}\hat{\gamma}\Omega A_c - \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_c A_s^2 \sin 2(\eta_c - \eta_s)$$

また、 A_{21} は(7.21)式を用いると以下のようになる。

$$A_{21} = \frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2)A_c - \frac{3}{8}\varepsilon k_1 A_c^3 + \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_c A_s^2 \{\cos 2(\eta_c - \eta_s) + 2\}$$

同様に(7.20-c)、(7.20-d)式も以下のように計算できる。

$$A_{31}\zeta_c + A_{32}a_c + A_{33}\zeta_s + A_{34}a_s = 0$$

$$A_{41}\zeta_c + A_{42}a_c + A_{43}\zeta_s + A_{44}a_s = 0$$

ここに、

$$A_{31} = \frac{1}{4}\varepsilon k_2 A_s A_c^2 \sin 2(\eta_s - \eta_c)$$

$$A_{32} = \frac{1}{4}\varepsilon k_2 A_s A_c \{\cos 2(\eta_s - \eta_c) + 2\}$$

$$A_{33} = \frac{1}{2}\hat{\gamma}\Omega A_s - \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_s A_c^2 \sin 2(\eta_s - \eta_c)$$

$$A_{34} = \frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2) + \frac{9}{8}\varepsilon k_1 A_s^2 + \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_c^2 \{\cos 2(\eta_s - \eta_c) + 2\}$$

$$A_{41} = -\frac{1}{4}\varepsilon k_2 A_s A_c^2 \cos 2(\eta_s - \eta_c)$$

$$A_{42} = \frac{1}{4}\varepsilon k_2 A_c A_s \sin 2(\eta_s - \eta_c)$$

$$A_{43} = \frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2)A_s - \frac{3}{8}\varepsilon k_1 A_s^3 + \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_s A_c^2 \{\cos 2(\eta_s - \eta_c) + 2\}$$

$$A_{44} = \frac{1}{2}\hat{\gamma}\Omega + \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_c^2 \sin 2(\eta_s - \eta_c)$$

ところで、(7.20)式の右辺が0となっているのは、値 A_c 、 A_s 、 η_c 、 η_s が定数であり、これらの値を時間で微分した項を含む左辺の値がすべて0になるとした以下の式を適用したためである。

$$[A_c \dot{\eta}_c \Omega \quad \dot{A}_c \Omega \quad A_s \dot{\eta}_s \Omega \quad \dot{A}_s \Omega]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

ここでは、これらの値 A_c 、 A_s 、 η_c 、 η_s の代わりに

$$\tilde{A}_c = A_c + a_c e^{\lambda t}, \quad \tilde{A}_s = A_s + a_s e^{\lambda t}, \quad \tilde{\eta}_c = \eta_c + \zeta_c e^{\lambda t}, \quad \tilde{\eta}_s = \eta_s + \zeta_s e^{\lambda t}$$

を用いなければならないので、 \tilde{A}_c 、 $\tilde{\eta}_c$ 、 \tilde{A}_s 、 $\tilde{\eta}_s$ を代入すると右辺には以下の項が上記の計算では出なかった差分として残る。

$$\tilde{A}_c \tilde{\eta}_c \Omega = A_c (\dot{\eta}_c + \lambda \zeta_c e^{\mu}) \Omega = A_c \Omega \lambda \cdot \zeta_c$$

$$\dot{\tilde{A}}_c \Omega = (\dot{A}_c + a_c \lambda \cdot e^{\mu}) = \lambda \Omega \cdot a_c$$

$$\tilde{A}_s \tilde{\eta}_s \Omega = A_s (\dot{\eta}_s + \lambda \zeta_s e^{\mu}) \Omega = A_s \Omega \lambda \cdot \zeta_s$$

$$\dot{\tilde{A}}_s \Omega = (\dot{A}_s + a_s \lambda \cdot e^{\mu}) = \lambda \Omega \cdot a_s$$

よって(7.20)の右辺に当たる部分は

$$[A_c \Omega \lambda \zeta_c \quad \Omega \lambda a_c \quad A_s \Omega \lambda \zeta_s \quad \Omega \lambda a_s]^T$$

となり、先の式変形の過程で正負が逆になっていることに注意すると、(7.20)式は微小攪乱が付加された場合の解を代入した結果、以下のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_c \\ a_c \\ \zeta_s \\ a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_c \Omega \lambda \zeta_c \\ -\Omega \lambda a_c \\ -A_s \Omega \lambda \zeta_s \\ -\Omega \lambda a_s \end{bmatrix}$$

よって、 ζ_c 、 a_c 、 ζ_s 、 a_s に関して次式のようにまとめることができる。

$$\begin{bmatrix} A_{11} + A_c \Omega \lambda & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} + \Omega \lambda & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} + A_s \Omega \lambda & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} + \Omega \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_c \\ a_c \\ \zeta_s \\ a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式を

$$[E_{ij}][\zeta_c, a_c, \zeta_s, a_s]^T = \{0\}$$

とおくと、有意な $a_c \sim \zeta_s$ が定まるための条件として以下の安定行列式を得る。

$$\det[E_{ij}] = 0 \quad (i, j = 1 \sim 4) \quad (7.23)$$

ここに

$$E_{11} = A_c \Omega (\lambda + \frac{1}{2} \gamma) - \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c A_s^2 S_c, \quad E_{12} = -\frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) + \frac{9}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_s^2 (C_c + 2)$$

$$E_{13} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_c A_s^2 S_c, \quad E_{14} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_c A_s (C_c + 2)$$

$$E_{21} = \left\{ \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) - \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_s^2 (C_c - 2) \right\} A_c$$

$$E_{22} = \Omega (\lambda + \frac{1}{2} \gamma) + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_s^2 S_c, \quad E_{23} = -\frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_c A_s^2 C_c, \quad E_{24} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_c A_s S_c$$

$$E_{31} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_s A_c^2 S_s, \quad E_{32} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_c A_s (C_s + 2), \quad E_{33} = A_s \Omega (\lambda + \frac{1}{2} \gamma) - \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_s A_c^2 S_s$$

$$E_{34} = -\frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) + \frac{9}{8} \varepsilon k_1 A_s^2 + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c^2 (C_s + 2), \quad E_{41} = -\frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_s A_c^2 C_s$$

$$E_{42} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_c A_s S_s, \quad E_{43} = \left\{ \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) - \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_s^2 + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c^2 (C_s - 2) \right\} A_s$$

$$E_{44} = \Omega (\lambda + \frac{1}{2} \gamma) + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c^2 S_s$$

であり、ここに、

$$S_s = \sin 2(\eta_s - \eta_c), \quad S_c = \sin 2(\eta_c - \eta_s), \quad C_s = \cos 2(\eta_s - \eta_c), \quad C_c = \cos 2(\eta_c - \eta_s)$$

を示す。

7.5 加振型モードのみの定常振動について ($A_s = P_s = 0$ のとき)

はじめに、加振型モード (逆対称形応答変形が加振方向に対応するモード) のみを考慮した場合の定常振動解および、その安定性について考察を行う。これは、(7.1)式において、 $\cos \theta$ に関するもののみを扱っていることを示す。つまり、仮定した変形モード式(7.1)の代わりに

$$w = w_c \cos \theta$$

を用いたものであり、これは、定常振動解(7.20)式において、 $A_s = P_s = 0$ としたものと一致する。

(1) 共振曲線

定常振動解(7.20)式において、 $A_s = P_s = 0$ と置く。(7.20-c,d)式は恒等的に満たされて、(7.20-a,b)式は以下ようになる。

$$\frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) A_c - \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^3 + \frac{1}{2} P_c \cos \eta_c = 0$$

$$-\frac{1}{2} \gamma \Omega A_c + \frac{1}{2} P_c \sin \eta_c = 0$$

上記2式より、 η_c を消去することで共振曲線は次の形で求まる。

$$A_c^2 \left[\left\{ \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) - \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 \right\}^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 \Omega^2 \right] = \frac{1}{4} P_c^2 \quad (7.24)$$

(2) 不安定性

$A_s = P_s = 0$ のときの安定行列式(7.23)は以下ようになる。

$$\det \begin{bmatrix} E'_{11} & E'_{12} & 0 & 0 \\ E'_{21} & E'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & E'_{44} \end{bmatrix} = 0$$

ここに、係数 $E'_{11} \sim E'_{44}$ は安定行列式の係数 $E_{11} \sim E_{44}$ に $A_s = P_s = 0$ を代入したもの、

$$E'_{11} = A_c \Omega \left(\lambda + \frac{1}{2} \gamma \right), \quad E'_{12} = -\frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) + \frac{9}{8} \varepsilon k_1 A_c^2$$

$$E'_{21} = \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) A_c - \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^3, \quad E'_{22} = \Omega \left(\lambda + \frac{1}{2} \gamma \right)$$

$$E'_{34} = -\frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c^2 \{ \cos 2(\eta_s - \eta_c) + 2 \}$$

$$E'_{44} = \Omega \left(\lambda + \frac{1}{2} \gamma \right) + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c^2 \sin 2(\eta_s - \eta_c)$$

であり、これら以外の E'_{ij} 等の要素は全て 0 になっている。この安定行列式は 3 列目が 0 となり行列式は必ず 0 になるので、安定行列式を $i, j = 1 \sim 4$ について用いても有意な解は得られない。

ここでは上記行列式を用いて、

- I. 加振型モード自身に起因する不安定領域 ($i, j = 1, 2$)、および、
 - II. 随伴モードの発生により加振型モードが不安定 ($i, j = 3, 4$) になる条件
- に分けて考察を行う。

I. 加振型モード自身に起因する不安定領域について

$A_s = P_s = 0$ のとき、有意な $a_c \neq 0$, $\zeta_c \neq 0$ となる加振モードの解 (a_c, ζ_c) が存在する条件として、安定行列式(7.23)の

$$\det[E_{ij}] = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

を求めればよいので、以下の式が得られる。

$$\Omega^2 \left(\lambda + \frac{1}{2} \gamma \right)^2 + \left\{ \frac{9}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 - \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) \right\} \left\{ \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 - \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) \right\} = 0$$

この式を λ について展開すると以下のように書き換えられる。

$$\Omega^2 \lambda^2 + \Omega^2 \gamma \lambda + \frac{1}{4} \gamma^2 + \left\{ \frac{9}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 - \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) \right\} \left\{ \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 - \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) \right\} = 0 \quad (7.25)$$

この式は微小撓乱の式に含まれる λ に関する特性方程式である。ここで、(7.25)式を

$$l \lambda^2 + m \lambda + n = 0 \quad (l > 0)$$

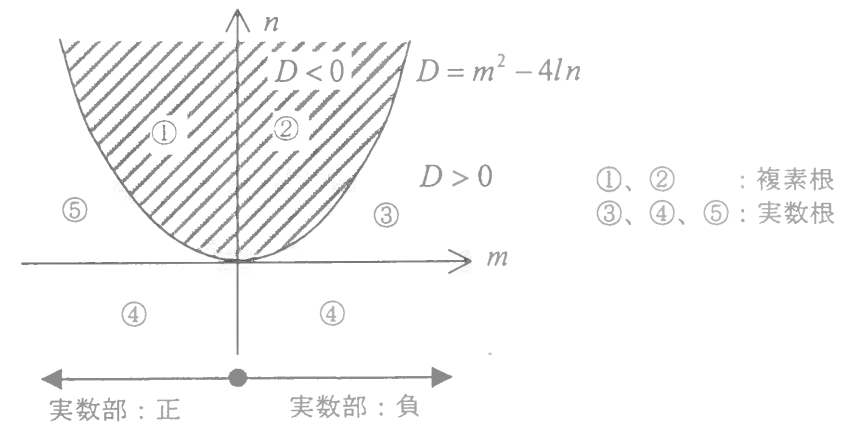
のように表すものとし、不安定領域の分類を行う。この式の解は、

$$\lambda = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4ln}}{2l}$$

であり、ここに

$$D = m^2 - 4ln$$

とおくと、 D 及び m, n の符号により、振動性状は以下のように分類することができる。



①: 実数部正の複素根	$\exp((\alpha + i\beta)t)$: 振動しながら発散	不安定
②: 実数部負の複素根	$\exp(-\alpha + i\beta)t$: 振動しながら収束	安定
③: 負の2つの実数根	$\exp(-\alpha t)$: 過減衰	安定
④: 正と負、それぞれの実数根		: ③, ⑤が共存する	不安定
⑤: 正の2つの実数根	$\exp(\alpha t)$: 発散	不安定

(7.25)式は、1次の項(m)および2次の項(l)が正であるので、不安定となるのは0次の項(n)が負になる領域のみであることがわかる。よって、不安定領域は0次の項が負になる条件として以下のように与えられる。

$$\gamma^2 \Omega^2 + \left\{ \frac{9}{4} \varepsilon k_1 A_c^2 - (\omega^2 - \Omega^2) \right\} \left\{ \frac{3}{4} \varepsilon k_1 A_c^2 - (\omega^2 - \Omega^2) \right\} < 0 \quad (7.26)$$

II. 随伴モードの発生により加振型モードが不安定になる条件

$A_s = P_s = 0$ のとき、 $a_s \neq 0$, $\zeta_s \neq 0$ となる随伴モードの解 (a_s, ζ_s) が存在する条件は、安定行列式(7.23)の

$$\det[E_{ij}] = 0 \quad (i, j = 3, 4)$$

を求めればよいが、 $E'_{33} = E'_{43} = 0$ であるから $E'_{34} = E'_{44} = 0$ でなければならない。よって、

$$E'_{34} = -\frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c^2 \{ \cos 2(\eta_s - \eta_c) + 2 \} = 0$$

$$E'_{44} = \Omega \left(\lambda + \frac{1}{2} \gamma \right) + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c^2 \sin 2(\eta_s - \eta_c) = 0$$

より、 η_c, η_s を消去し整理すると

$$\Omega^2 \left(\lambda + \frac{1}{2} \gamma \right)^2 + \left\{ \frac{3}{8} \varepsilon k_2 A_c^2 - \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) \right\} \left\{ \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c^2 - \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) \right\} = 0$$

が得られる。Iの場合と同様に不安定領域は0次の項が負になる条件と一致するので、以下で与えられる。

$$\gamma^2 \Omega^2 + \left\{ \frac{3}{4} \varepsilon k_2 A_c^2 - (\omega^2 - \Omega^2) \right\} \left\{ \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_c^2 - (\omega^2 - \Omega^2) \right\} < 0 \quad (7.27)$$

共振曲線(7.24)式、および不安定領域(7.26)、(7.27)式の両辺を ω^4 で割り、 $\bar{\Omega} \equiv \Omega/\omega$ と置くと、それぞれの式は以下のように表すことができる。

$$A_c^6 + \frac{8}{3}(1-\bar{\Omega}^2) \frac{\beta_1}{\beta_2} A_c^4 + \frac{16}{9} \{ (1-\bar{\Omega}^2)^2 + 4\xi^2 \bar{\Omega}^2 \} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 A_c^2 - \frac{16}{9} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 \left(\frac{P_c}{\omega^2} \right)^2 = 0 \quad (7.24')$$

$$A_c^4 + \frac{16}{9}(1-\bar{\Omega}^2) \frac{\beta_1}{\beta_2} A_c^2 + \frac{16}{27} \{ (1-\bar{\Omega}^2)^2 + 4\xi^2 \bar{\Omega}^2 \} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 < 0 \quad (7.26')$$

$$A_c^4 - \frac{16}{3}(1-\bar{\Omega}^2) \frac{\beta_1}{\beta_3} A_c^2 + \frac{16}{3} \{ (1-\bar{\Omega}^2)^2 + 4\xi^2 \bar{\Omega}^2 \} \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} \right)^2 < 0 \quad (7.27')$$

7.6 伝播型モード定常振動の安定性

ここでは、加振型モードおよび随伴型モードを同時に考慮した伝播型モードの定常振動解およびその安定性について述べる。しかしながら、定常振動解(7.20)および安定行列式(7.23)を、そのまま用いることは非常に困難である。よって、ここでは、取り扱いを簡単にするため、無減衰($\gamma=0$)、一方向入力外力($P_s=0$)の場合を考える。このとき、定常振動解(7.20-d)より、

$$\sin 2(\eta_s - \eta_c) = 0$$

また、この式を定常振動解(7.20-b)に用いると

$$\sin \eta_c = 0$$

が得られる。よって

$$\cos 2(\eta_s - \eta_c) = \pm 1, \quad \eta_c = m\pi \quad (m \in Z)$$

より、以下の(A)、(B)の2つの場合に分けて考察を行う必要がある。

(A) $\cos 2(\eta_s - \eta_c) = 1$ のとき

$$\eta_c = m\pi, \quad \eta_s = \eta_c + n\pi \quad (m, n \in Z)$$

であるから、応答変形は、

$$\begin{aligned} w &= W(\phi) A_c \cos(\Omega t + m\pi) \cos \theta + W(\phi) A_s \cos(\Omega t + n\pi) \sin \theta \\ &= W(\phi) \sqrt{A_c^2 + A_s^2} \cos(\theta + \alpha) \cos \Omega t \end{aligned}$$

の形で表され、 α の中に位相差を含んだ、加振モードのみの定常振動と本質的に異ならないものとなり、伝播型振動状態にはなっていないので考察から除外する。

(B) $\cos 2(\eta_s - \eta_c) = -1$ のとき

$$\eta_c = m\pi, \quad \eta_s = \eta_c + (n+1/2)\pi \quad (m, n \in Z)$$

であるから、応答変形は

$$\begin{aligned} w &= W(\phi) A_c \cos(\Omega t + m\pi) \cos \theta + W(\phi) A_s \cos(\Omega t + n\pi + \frac{\pi}{2}) \sin \theta \\ &= W(\phi) (A_c \cos \theta \cos \Omega t + A_s \sin \theta \sin \Omega t) \end{aligned}$$

の形で表され、これは緯線方向に伝播型状態の応答モードになる。

(B)の場合にのみ伝播型振動状態となっていることがわかったので、以下では $\cos 2(\eta_s - \eta_c) = -1$ の場合についての、共振曲線および安定行列式の定式化を行う。

(1) 共振曲線

このとき、(7.20-a,c)式は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2) A_c + \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^3 + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c A_s^2 \pm \frac{1}{2} P_c &= 0 \\ -\frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2) + \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_s^2 + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c^2 &= 0 \end{aligned}$$

となるので、共振曲線は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} A_c^2 \left[(1-\bar{\Omega}^2) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\beta_3}{\beta_2} \right) + \left(\frac{3}{4} \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{1}{12} \frac{\beta_3}{\beta_2} \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) A_c^2 \right]^2 - \left(\frac{P_c}{\omega^2} \right)^2 &= 0 \\ A_s^2 = -\frac{4}{3} \frac{\beta_1}{\beta_2} \left\{ (1-\bar{\Omega}^2) + \frac{1}{4} \frac{\beta_3}{\beta_1} A_c^2 \right\} & \quad (7.28) \end{aligned}$$

(2) 安定性

このときの安定行列式(7.23)の内容は、

$$\det \begin{vmatrix} A_c \Omega \lambda & E'_{12} & 0 & E'_{14} \\ E'_{21} & \Omega \lambda & E'_{23} & 0 \\ 0 & E'_{32} & A_s \Omega \lambda & E'_{34} \\ E'_{41} & 0 & E'_{43} & \Omega \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$E'_{12} = -\frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2) + \frac{9}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_s^2, \quad E'_{14} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_c A_s$$

$$E'_{21} = \left\{ \frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2) - \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 - \frac{3}{8} \varepsilon k_2 A_s^2 \right\} A_c, \quad E'_{23} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_c A_s^2$$

$$E'_{32} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_c A_s, \quad E'_{34} = \frac{3}{4} \varepsilon k_1 A_s^2, \quad E'_{41} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_s A_c^2, \quad E'_{43} = -\frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_s A_c^2$$

であり、この式を $y = \Omega^2 \lambda^2$ とにおいて、

$$y^2 - Ay + B = 0$$

の形で表現すると、 A 、 B は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{A_c A_s} (A_s E'_{12} E'_{21} + A_s E'_{14} E'_{41} + A_c E'_{23} E'_{32} + A_c E'_{34} E'_{43}) \\
 &= -\frac{1}{4} (\omega^2 - \Omega^2)^2 + \frac{1}{4} \varepsilon (\omega^2 - \Omega^2) (3k_1 A_c^2 + k_2 A_s^2) \\
 &\quad - \varepsilon^2 \frac{1}{64} \{27k_1^2 A_c^4 + 3k_2^2 A_s^4 + (42k_1 k_2 - 8k_2^2) A_c^2 A_s^2\} \\
 B &= \frac{1}{A_c A_s} (E'_{14} E'_{23} E'_{32} E'_{41} - E'_{12} E'_{23} E'_{34} E'_{41} - E'_{14} E'_{21} E'_{32} E'_{43} + E'_{12} E'_{21} E'_{34} E'_{43}) \\
 &= \frac{1}{64} \varepsilon^2 k_2 A_s^2 A_c^2 \left\{ -3(\omega^2 - \Omega^2) k_1 + \frac{1}{4} \varepsilon (27k_1^2 - 2k_2^2) A_c^2 + \frac{3}{4} \varepsilon k_1 k_2 A_s^2 \right\} \\
 &\quad \times \left\{ -(\omega^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4} \varepsilon k_1 A_c^2 + \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_s^2 \right\}
 \end{aligned}$$

両辺を 64 倍し ω^8 で割ることにより $\bar{\lambda} = \lambda / \omega$ を用いて、書き表すと以下のように与えられる。

$$\bar{\Omega}^4 \bar{\lambda}^4 + A' \bar{\Omega}^2 \bar{\lambda}^2 + B' = 0 \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned}
 A' &= 16(1 - \bar{\Omega}^2)^2 + 16 \frac{1}{\beta_1} (1 - \bar{\Omega}^2) (3\beta_2 A_c^2 + \beta_3 A_s^2) \\
 &\quad + \frac{1}{\beta_1^2} \{27\beta_2^2 A_c^4 - 3\beta_3^2 A_s^4 + (42\beta_2 \beta_3 - 8\beta_3^2) A_c^2 A_s^2\} \\
 B' &= \frac{\beta_3}{\beta_1^4} A_c^2 A_s^2 \left\{ 3(1 - \bar{\Omega}^2) \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{4} (27\beta_2^2 - 2\beta_3^2) A_c^2 + \frac{3}{4} \beta_2 \beta_3 A_s^2 \right\} \\
 &\quad \times \left\{ (1 - \bar{\Omega}^2) \beta_1 + \frac{3}{4} \beta_2 A_c^2 + \frac{1}{4} \beta_3 A_s^2 \right\}
 \end{aligned}$$

ここで、(7.29)式が不安定領域を与える条件を考察する。(7.29)式を $\bar{\lambda}^2$ に関する 2 次方程式と考え、その判別式を D とおき判別式の符号を評価する式を

$$D' = D / \bar{\Omega}^4 = (A')^2 - 4B'$$

とおく。(7.29)式は 4 次の特性方程式なので、先の加振型モードのみを考慮した(7.25)式の場合と不安定領域が異なり、 $\bar{\lambda}^2$ が負根のみを有する場合のみ定常振動解は安定となる。

なぜなら、 D' が負の場合においては、 $\bar{\lambda}^2$ は複素根となるが、その解を、

$$\bar{\lambda}^2 = a \pm ib \quad (a, b \in R, i = \sqrt{-1})$$

とおくとき、

$$\bar{\lambda} = m + in \quad (m, n \in R)$$

であるとする、

$$m^2 - n^2 = a, \quad 2mn = \pm b$$

であるから、これらの式より

$$m^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

また、 $m^2 > 0$ であるから、

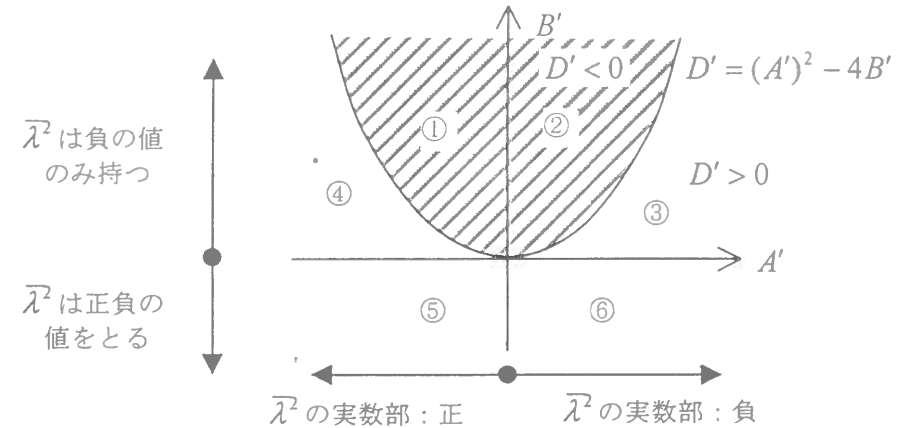
$$m^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

よって、

$$m = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

となり、負の実数部も持つことになるので、不安定領域になるからである。

(7.25)式の場合と同様に(7.29)式に含まれる記号 D' 及び A' 、 B' の符号により、振動性状を図示すると以下のように分類することができる。



- ①、②： $D' < 0$ 、 $\bar{\lambda}$ が負の実数部も持つことになる 不安定
- ⑤、⑥： $\bar{\lambda}^2$ が正負の値を持ちうるので不安定 不安定
- ①、④、⑤： $\bar{\lambda}^2$ の実数部は必ず正となり発散する 不安定

よって、安定領域は③のみであり、(7.29)式の記号を用いると

$$A' > 0, \quad B' > 0, \quad (A')^2 - 4B' > 0$$

で与えられるが、応答振幅を板厚で正規化した値 A_s, A_c がそれぞれ独立な値を取り得ることを考えると明確には求め得ない。以下の数値計算例でそれらの関係を明らかにする。

7.7 数値計算例および考察

数値解析例として半開角 60 度、半径-板厚比 400、材料パラメータ $A(=ma^2/Ehg)=1.0 \times 10^{-4}$ 、単純支持された球形シェル第 1 次のモードを対象とした場合の共振曲線とその安定経路を図示し、随伴型モードが幾何学的非線形定常振動状態にどのような影響を与えるかを考察する。ここで示す数値解析例は 1 つのみであるが、他の幾何学的・材料学的パラメータを用いても同じことが言える。

7.7.1 加振型モード非線形定常振動状態

加振型モードの共振曲線とその不安定領域は(7.24)、(7.26)、(7.27)式より計算される。結果を図 5 に示す。横軸に当該構造物の固有円振動数により正規化された入力加速度の角振動数、縦軸に加振型モードの応答振幅を板厚で正規化した A_c の値、凡例として \bar{P} (入力加速度の振幅を板厚で正規化し当該構造物の固有円振動数の自乗で割ったもの) を採用している。ただし、減衰率を 0.02 にしている。入力外力の加振振幅を大きくしていくと、共振曲線が背骨曲線に沿うように右上に成長していく hardening の性状を示していることがわかる。

図中、破線で囲まれた領域 (Exciting) は加振型モード自身に起因する不安定領域 (式(7.26)) であり、飛び移り座屈を解説する多くの書物で不安定経路として示される共振曲線を包絡している。また、一点鎖線で囲まれた領域 (Adjoint) は随伴型モードが発生することにより加振型モードが不安定となる領域を示したもの (式(7.27)) である。随伴型モードを考慮すると、加振型モードのみを考慮すれば安定であった領域が不安定領域となり、この随伴型モードによる不安定領域 (Adjoint) により安定な共振経路が存在しない周波数領域が発生することがわかる。

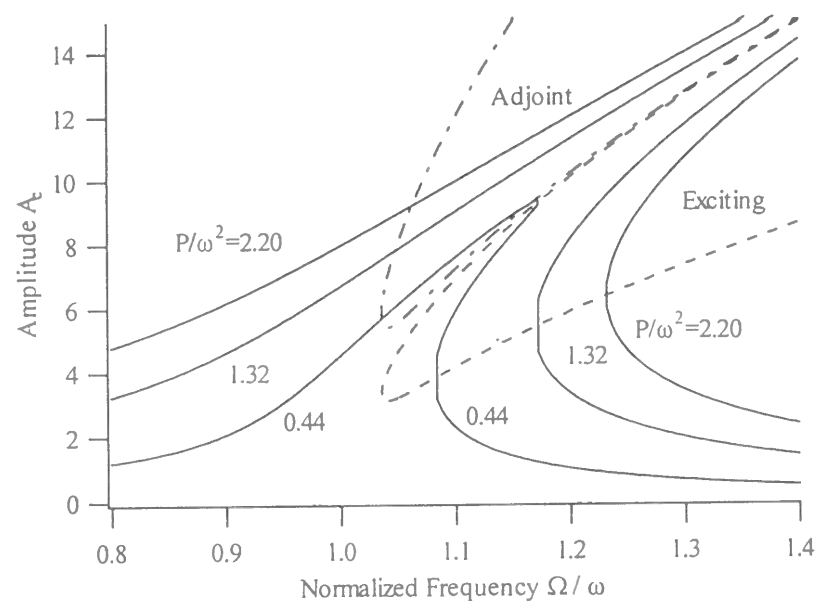


図 5. 加振型モードの共振曲線および安定限界の計算例

7.7.2 伝播型モード非線形定常振動状態

伝播型モード定常振動についての共振曲線を(7.28)式により求めたものが図 6 である。縦軸は応答振幅を板厚で正規化したもの、横軸は入力外力の角振動数を当該構造物の固有円振動数で正規化したものを示している。図中、 A_c 、 A_s はそれぞれ加振型モードおよび随伴型モードの応答振幅を板厚で正規化したものを表している。安定限界を(7.29)式により直接計算することは、前述の通り明確には求め得ない。ここでは、求めた共振曲線が安定であるかどうかを(7.29)式により調べるのみとし、安定な共振曲線を実線で、不安定なものを破線で示している。随伴型モードに微小攪乱が生じて、加振型モードの安定なパスが存在するため、随伴型モードが不安定になることはないことがわかる。このことは、6 章で加振型モードのみを用いて実地震動に対する動的安定限界強度を求めたことに対する正当性を示している。しかしながら、安定な定常振動状態を考えると、加振型モードの安定な定常振動状態より低い振幅で随伴型モードの安定した定常振動状態が存在するので、定常応答振動解析には、伝播型モードの採用の必要性があるといえる。

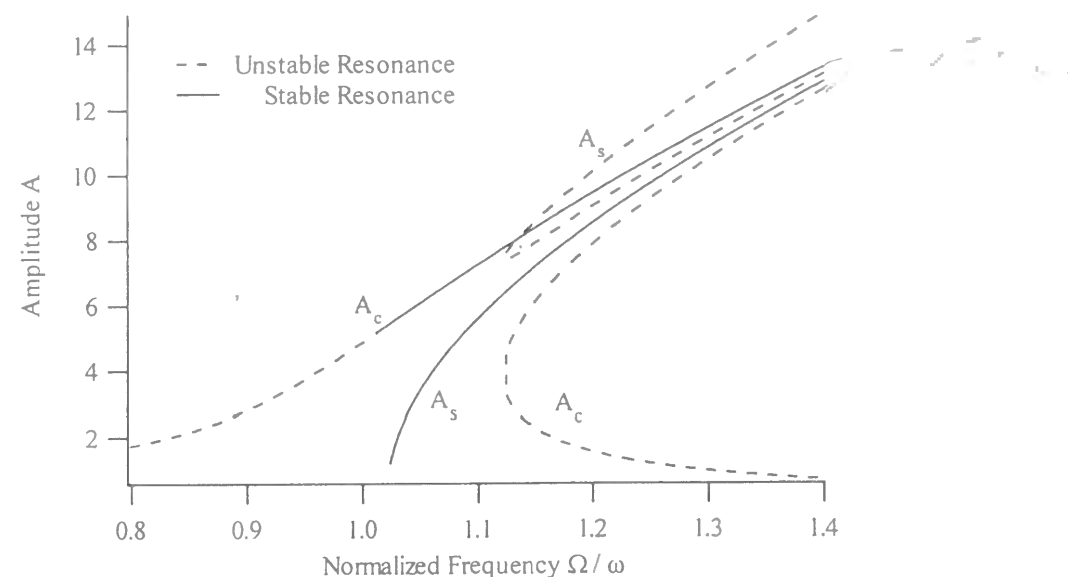


図 6. 伝播型振動状態の共振曲線と安定性

7.8 まとめ

本章では、逆対称モードのうちのある 1 つのモードに関する周期外力下での共振現象について、応答変形が加振方向に対応する「加振型モード」の他にそれに直交する方向にも生じる「随伴型モード」が存在すると仮定し、逆対称形非線形定常振動解および安定行列式の導出を行い、水平振動による当該構造物の安定性を論じた。7.7 節の数値解析例からわかるように、幾何学的非線形定常応答解析においては伝播型モード、つまり周方向に回転するモードを採用することが必要であることを示した。

8. 逆対称変形モード間のモード連成作用効果

8.1 はじめに

7章では、ある1つのモードに関する非線形定常振動状態について示したが、他のモードの連成作用についての考察は行っていない。入力角振動数を一意に指定し、入力振幅の数値を変更してゆく非線形定常振動応答解析を数値解析的に行うと、入力加速度の振幅がある値を超えると、複数のモードを考慮した場合の各モードの応答振幅は、各々のモードのみを考慮した応答振幅に比べて小さくなるのがわかる。これは、モードの連成作用効果による減衰効果類似の現象が生じていると考えられ、本論ではこの現象を「構造減衰」と呼ぶこととし、本章では、球形シェル構造物の逆対称非線形定常振動状態におけるこの構造減衰現象についての考察を行う。

定常振動外力を入力外力とする構造物の応答性状は、単一のモードのみを考慮する場合には前章で示したように非線形定常振動解およびその安定性を調べることで実現されるが、複数のモードを同時に含む非線形定常振動解は多元連立非線形微分方程式となり、前章と同じ手法で共振曲線を求め、非線形定常振動応答性状を調べることは非常に困難である。また、定常振動外力は角振動数および振幅の2つのパラメータにより一意に定めることが出来るので、これらのパラメータを適切に指定し、5章および6章で行った地震応答解析と同様な数値実験を行うことも可能であるが、一般的な応答性状を表せると考えられる程の数値実験を行うのは、非常に繁雑である。

本章では、あるモードが非線形効果により、その共振曲線が hardening の性状を見せ始め、そこに含まれる不安定領域の影響により近接固有値を持つ高次側の固有モードの応答に影響を与えることが構造減衰の起因に関与すると考え、各々の単一のモードの共振曲線が不安定領域を生じ始める入力振幅と複数のモードを同時に考慮した非線形応答性状との比較検討を行うことにより、この仮説を検証し、構造減衰の現象解明を行う。

そこで本章では、ある1つの逆対称固有モードのみを考慮した当該構造物の幾何学的非線形支配方程式が Duffing 型の非線形方程式となることに着目し、はじめに一般的な Duffing 型非線形方程式について、単一の固有モードが共振曲線の不安定領域を生じ始める入力加速度の振幅の最小値が、減衰率より得られる係数 c_ξ とその他のパラメータよりモード毎に得られる係数 κ_l の積 $c_\xi \kappa_l$ で表されることを示す。その後、複数の固有モードを同時に考慮した球形シェルの逆対称幾何学的非線形支配方程式に於ける共振曲線の不安定領域を生じ始める入力加速度の振幅値を評価する手段として、単一のモードが不安定領域を生じ始めるモード毎の値 $c_\xi \kappa_l$ を用いることは有効であり、少なくともある一つのモードが不安定領域を生じない限り構造減衰が生じることはないことを示す。

この構造減衰現象は球形シェル構造物に限らず他の一般的な構造物においても現れる非線形振動性状として知られていることではあるが、この現象の解明を行った既往の論文はなく、本章で示す手法は構造減衰現象を評価する初めての試みであり、また、本章で示す評価方法は球形シェル構造

物だけではなく、非線形運動方程式が Duffing 型非線形方程式として表される他の構造物の非線形定常振動応答性状を評価する手法としても有効であると考えられる。

8.2 単一モードのみを考慮した共振曲線の不安定領域の導出

ここでは、一般的な Duffing 型非線形方程式を用いて、単一の固有モードが共振曲線の不安定領域を生じ始める入力加速度の振幅の最小値が、減衰率より得られる係数 c_ξ とその他のパラメータよりモード毎に得られる係数 κ_l の積 $c_\xi \kappa_l$ で表されることを示す。

8.2.1 単一モードのみを考慮した共振曲線

入力加速度として角振動数 Ω 、振幅 P の定常振動外力を受ける、幾何学的非線形運動方程式にモード重畳法を適用する。得られた幾何学的非線形支配方程式の l 番目の固有モードのみを考慮した方程式が Duffing 型となる場合、その方程式は時間関数 x_l により以下のように表すことができる。

$$m_l \ddot{x}_l + 2\xi m_l \omega_l \dot{x}_l + k_l x_l + s_l x_l^3 = g_l P \cos \Omega t \quad (8.1)$$

ここに、

$$\omega_l = \sqrt{k_l / m_l}$$

また ξ は減衰率であり、 m_l 、 k_l 、 s_l 、 g_l は l 次のモードに対するそれぞれの項に掛かる係数を示す。

(8.1)式を以下のように表す。

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\gamma \dot{x} + \varepsilon k_2 x^3 - f \quad (8.1')$$

ここに、

$$\varepsilon \ll 1, \quad \dot{U} = P' \cos \Omega t, \quad \omega^2 = \omega_l^2 = \frac{k_l}{m_l}, \quad \gamma = 2\xi \omega_l \quad (8.2)$$

$$k_2 = -\frac{s_l}{\varepsilon m_l}, \quad f = -P' \frac{g_l}{m_l} \cos \Omega t \equiv P \cos \Omega t$$

である。ここで(8.1)式の解を

$$x_l = \bar{A}_l(t) \cos(\Omega t + \bar{\eta}_l(t)) \quad (8.3)$$

と仮定し、平均化法を適用して共振曲線を与える式を求める。なお、表記を簡便にするため、 $A \equiv A_l$ および $x \equiv x_l$ 等とモードを表す添え字 l を省略する。時間関数 x の時間に関する微分を表す関数 v を導入し、式(8.1')を展開すると以下ようになる。

$$\dot{x} = \dot{v} \quad (8.4)$$

$$\dot{v} = -\omega^2 x - \gamma v + \varepsilon k_2 x^3 - P \cos \Omega t$$

式(8.3)を用いると座標変換式は以下のように表すことが出来る。

$$x = A \cos(\Omega t + \eta) \quad (8.5)$$

$$v = -\Omega A \sin(\Omega t + \eta)$$

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\Omega^2}}, \quad \eta = -\tan^{-1}\left(\frac{v}{\Omega x}\right) - \Omega t \quad (8.6)$$

(8.6)式の t に関する微分は以下のように表される。

$$\dot{A} = \frac{1}{A} \left(x\dot{x} + \frac{1}{\Omega^2} v\dot{v} \right) \quad (8.7)$$

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{A^2 \Omega} (x\dot{v} - v\dot{x}) - \Omega \quad (8.8)$$

これら2つの式を $\Omega t = 0 \sim 2\pi$ について積分するためには、(8.4)、(8.5)式を代入する必要がある。

初めに(8.7)式に(8.4)式を代入する。

$$\dot{A} = \frac{1}{A} \left[xv + \frac{1}{\Omega^2} v \{ -\omega^2 x - \gamma v + \varepsilon k_2 x^3 - P \cos \Omega t \} \right]$$

上式の両辺に A を乗じ、(8.5)式を代入すると以下の式が得られる。なお、ここで、表記を簡便にするため $C \equiv \cos(\Omega t + \eta)$ 、 $S \equiv \sin(\Omega t + \eta)$ の記号を導入する。

$$A\dot{A} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) (-\Omega A^2) CS - \gamma A^2 S^2 + \frac{\varepsilon}{\Omega^2} k_2 (-\Omega A^4 C^3 S) + \frac{P}{\Omega^2} \Omega A S \cos \Omega t \quad (8.9)$$

(8.7)式と同様にして(8.8)式に(8.4)、(8.5)式を代入する。

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{A^2 \Omega} (x\dot{v} - v\dot{x}) - \Omega$$

$$-A^2 \Omega \dot{\eta} = x\dot{v} - v\dot{x} + A^2 \Omega^2$$

$$= x \{ -\omega^2 x - \gamma v + \varepsilon k_2 x^3 - P \cos \Omega t \} - v^2 + A^2 \Omega^2$$

$$= -\omega^2 A^2 C^2 + \gamma \Omega A^2 CS + \varepsilon k_2 A^4 C^4 - PAC \cos \Omega t - \Omega^2 A^2 S^2 + A^2 \Omega^2 \quad (8.10)$$

得られた(8.9)、(8.10)式を $\Omega t = 0 \sim 2\pi$ について平均化する。このとき各項に含まれる積分項は

$$1 \rightarrow 2\pi, S \rightarrow 0, C \rightarrow 0, C^2 \rightarrow \pi, CS \rightarrow 0, S^2 \rightarrow \pi, C^3 \rightarrow 0, C^2 S \rightarrow 0, CS^2 \rightarrow 0, S^3 \rightarrow 0$$

$$C^4 \rightarrow 3\pi/4, C^3 S \rightarrow 0, C^2 S^2 \rightarrow \pi/4, CS^3 \rightarrow 0, S^4 \rightarrow 3\pi/4$$

$$\int_0^{2\pi} S \cdot \cos \Omega t d(\Omega t) = \pi \sin \eta, \quad \int_0^{2\pi} C \cdot \cos \Omega t d(\Omega t) = \pi \cos \eta$$

となるので、(8.9)、(8.10)式はそれぞれ以下ようになる。

$$\gamma A \Omega = P \sin \eta \quad (8.9')$$

$$A \left(-\omega^2 + \Omega^2 + \frac{3}{4} \varepsilon k_2 A^2 \right) = P \cos \eta \quad (8.10')$$

(8.9')、(8.10')式より η を消去することで共振曲線は以下のように求められる。

$$A^2 \left[\left(-\omega^2 + \Omega^2 + \frac{3}{4} \varepsilon k_2 A^2 \right)^2 + \gamma^2 A^2 \Omega^2 \right] = P^2$$

両辺を ω^4 で割り、 $\bar{\Omega} = \Omega/\omega$ 、 $\bar{P} = P/\omega^2$ の記号を導入すると上式は以下ようになる。

$$A^2 \left[\left\{ (-1 + \bar{\Omega}^2) + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon k_2}{\omega^2} A^2 \right\}^2 + \left(\frac{\gamma^2}{\omega^2} \right) A^2 \bar{\Omega}^2 \right] = \bar{P}^2 \quad (8.11)$$

ここで、(8.2)式より

$$\frac{\varepsilon k_2}{\omega^2} = \varepsilon \left(-\frac{s_l}{\varepsilon m_l} \right) \frac{m_l}{k_l} = -\frac{s_l}{k_l}, \quad \frac{\gamma^2}{\omega^2} = 4\xi^2 \omega^2 \frac{1}{\omega^2} = 4\xi^2$$

$$\bar{P}^2 = \frac{P^2}{\omega^4} = (P')^2 \left(\frac{g_l}{m_l} \right)^2 \left(\frac{m_l}{k_l} \right)^2 = \left(\frac{g_l}{k_l} \right)^2 (P')^2$$

であるから、(8.11)式は以下ようになる。

$$A^2 \left[\left\{ (-1 + \bar{\Omega}^2) - \frac{3}{4} \frac{s_l}{k_l} A^2 \right\}^2 + 4\xi^2 A^2 \bar{\Omega}^2 \right] = \left(\frac{g_l}{k_l} \right)^2 (P')^2 \quad (8.12)$$

展開し A に関して整理すると、以下の A に関する6次の方程式が得られる。

$$A^6 + \frac{8}{3} (1 - \bar{\Omega}^2) \frac{k_l}{s_l} A^4 + \frac{16}{9} \frac{k_l^2}{s_l^2} \{ (1 - \bar{\Omega}^2)^2 + 4\xi^2 \bar{\Omega}^2 \} A^2 - \frac{16}{9} \frac{g_l^2}{s_l^2} (P')^2 = 0 \quad (8.13)$$

よって、振幅 $A_i (=A)$ および入力振動数 Ω を系の固有振動数 ω_l で正規化した $\bar{\Omega}$ を用いて共振曲線は最終的に以下のように表すことができる。

$$A_i^6 + \frac{8}{3} (1 - \bar{\Omega}^2) \beta_l A_i^4 + \frac{16}{9} \beta_l^2 \{ (1 - \bar{\Omega}^2)^2 + 4\xi^2 \bar{\Omega}^2 \} A_i^2 - \frac{16}{9} \beta_l^2 \bar{P}^2 = 0 \quad (8.14)$$

ただし、

$$\beta_l = \frac{k_l}{s_l}, \quad \bar{P} = \frac{g_l}{k_l} P \quad (8.15)$$

を示す。次項では本項で得られた共振曲線の式(8.14)および(8.15)を用いて、単一モードのみを考慮した共振曲線の周波数領域に於ける不安定領域を評価する式を定式化する。

8.2.2 共振曲線の不安定領域が生じ始める入力加速度の振幅

前節で得られた共振曲線が不安定領域を生じ始める入力加速度の振幅の最低値 P_l と周波数領域に於ける不安定領域の最小値 $\bar{\Omega}_l$ および最大値 $\bar{\Omega}_{l'}$ を求める。共振曲線の不安定領域を求める場合、定常振動解の振幅及び位相に微小攪乱を与え安定行列を求める方法が一般的に用いられているが、本論では(8.14)式を A_i^2 に関する3次方程式と見なし、 A_i^2 が異なる3つの正の実根を持つときに不安定領域が生じていることに着目した定式化を行う。これは、ある外乱強度 \bar{P} における共振曲線を描画

する場合、(8.14)式において $\bar{\Omega}$ を与え、 A_l^2 に関する3次方程式を解く方法が用いられるが、その解が3つの実根である場合、図1の周波数領域 $\bar{\Omega}_L < \bar{\Omega} < \bar{\Omega}_U$ のように不安定領域を含むことに着目したものである。

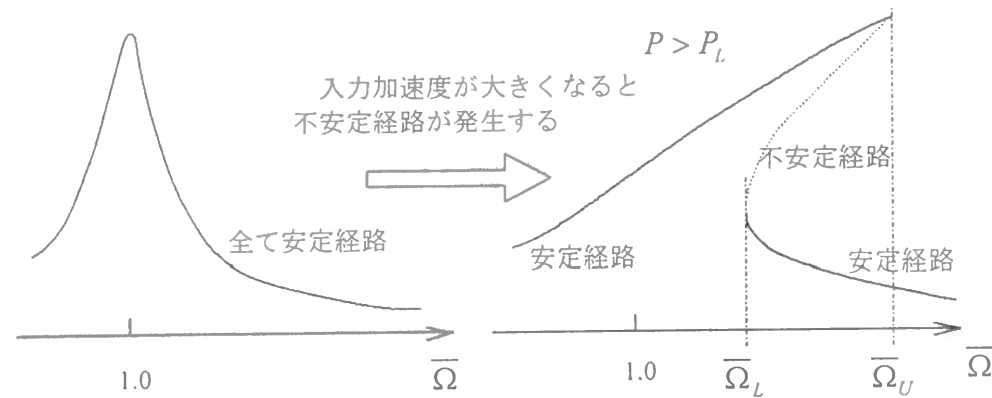


図1. 共振曲線の不安定経路

なお、この図1は各々の共振曲線の高さが同じになるよう表示しており、外乱強度の増加により共振曲線が傾くことを示しているわけではない。共振曲線は外乱強度の増加によりその頂点が背骨曲線に沿うよう成長してゆくのは周知の通りである。

Cardanoの解法により、(8.14)式の A_l^2 が異なる3つの正の実根を持つための判別式は以下のように表すことができる。

$$D_0 = \frac{256}{729} \beta_l^4 \left[-243 \bar{P}^4 + 48 \beta_l \bar{P}^2 (-1 + \bar{\Omega}^2) \{ 1 + (-2 + 36 \xi^2) \bar{\Omega}^2 + \bar{\Omega}^4 \} - 256 \beta_l^2 \xi^2 \bar{\Omega}^2 \{ 1 + (-2 + 4 \xi^2) \bar{\Omega}^2 + \bar{\Omega}^4 \}^2 \right] > 0 \quad (8.16)$$

また(8.16)式において \bar{P}^2 が実数解となる条件は、上式の \bar{P}^2 に関する2次方程式の判別式を D_1 とおくと以下のように表すことができる。

$$D_1 = D_1 / (2304 \beta_l^2) \\ = 1 + (-6 + 45 \xi^2) \bar{\Omega}^2 + 15(1 - 12 \xi^2 + 72 \xi^4) \bar{\Omega}^4 - 2(10 - 135 \xi^2 + 1080 \xi^4 + 216 \xi^6) \bar{\Omega}^6 \\ + 15(1 - 12 \xi^2 + 72 \xi^4) \bar{\Omega}^8 + (-6 + 45 \xi^2) \bar{\Omega}^{10} + \bar{\Omega}^{12} \quad (8.17)$$

この D_1 を用いると $D_0=0$ となる \bar{P}^2 は以下のように得られる。

$$\bar{P}^2 = |\beta_l| \cdot \bar{P}_0^2 \quad (8.18)$$

ここに、

$$\bar{P}_0^2 = r \frac{8}{81} \left[(-1 + \bar{\Omega}^2) \{ 1 + (-2 + 36 \xi^2) \bar{\Omega}^2 + \bar{\Omega}^4 \} \mp \sqrt{D_1} \right] \quad (8.19)$$

であり、 r は β_l が正であるとき値1、負であるとき値-1をもつ。ここでは、まず、 β_l が正であるとし

て(8.19)式についての考察を行う。

(8.19)式の2つの解を \bar{P}_{0+}^2 、 \bar{P}_{0-}^2 とすると、 $D_0 > 0$ を満たす解は、(8.16)式の \bar{P}^4 の符号を考慮して

$$\bar{P}_{0-}^2 < \bar{P}^2 < \bar{P}_{0+}^2 \quad (8.20)$$

となり、(8.17)、(8.19)、(8.20)式より \bar{P}_0^2 が正となるのは、 β_l が正であるとき $\bar{\Omega}$ が1より大きくなることにあることがわかる。また(8.17)~(8.19)式より明らかなように、正規化された周波数領域で表されたこの不安定領域は、構造物の減衰率(ξ)にのみ依存し、質量や剛性といった他の構造特性には影響を受けないことがわかる。そこで \bar{P}_0 が採りうる下限値を c_ξ 、また不安定領域を生じている $\bar{\Omega}$ の上下限値を $\bar{\Omega}_L$ 、 $\bar{\Omega}_U$ とし、 $\bar{\Omega}$ の1近傍を描くと図2のようになる。

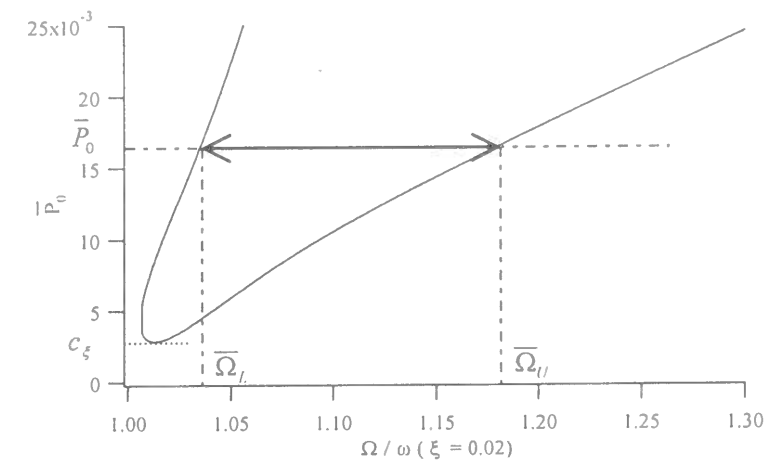


図2. 不安定領域を生じ始める \bar{P}_0 が採りうる下限値 c_ξ の例

不安定領域が生じ始める入力加速度の振幅 P の最小値 P_L は(8.15)、(8.18)式より以下のように表すことができる。

$$P_L = c_\xi \kappa_l \quad (8.21)$$

ここに κ_l は1次のモード毎に決まる値であり以下のようになる。

$$\kappa_l = \frac{k_l}{g_l} \sqrt{\frac{k_l}{s_l}}$$

8.2.3 減衰率による不安定領域の変化

(8.17)、(8.19)式より減衰率(ξ)の値による不安定領域の変化は図3、また \bar{P}_0 の下限値 c_ξ は表1のようになる。 ξ が小さくなると不安定領域が発生する \bar{P}_0 の下限値 c_ξ は低くなり、その発生領域も右の方に急激に拡大することがわかる。

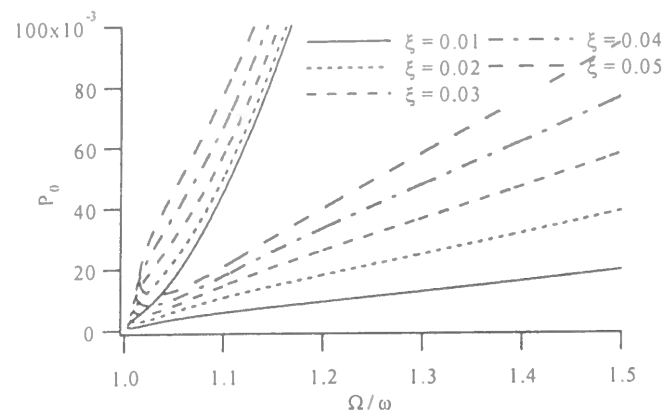


図3. 減衰率による不安定領域の変化

表1. 係数 c_ξ

ξ	c_ξ
0.01	0.00099981
0.02	0.00288557
0.03	0.00529775
0.04	0.00823395
0.05	0.01161561

8.2.4 入力加速度の振幅と不安定領域の上下限值

ここで、入力加速度の振幅を以下のように表現することとし、この α と不安定領域の上下限值 $\bar{\Omega}_l$ 、 $\bar{\Omega}_U$ の関係を調べる。

$$P = \alpha c_\xi \kappa_p \quad (8.22)$$

α は不安定領域が発生するとき値1となる。先に述べたように、この不安定領域は構造物の減衰率にのみ依存するので、間隔 $\Delta\bar{\Omega} (= \bar{\Omega}_U - \bar{\Omega}_l)$ の不安定領域が発生するときの c_ξ の値とその上下限值 $\bar{\Omega}_l$ 、 $\bar{\Omega}_U$ を減衰率(ξ)0.01~0.05に関して図示したものが図4.1~図4.5である。縦軸に $\Delta\bar{\Omega}$ 、横軸に $\bar{\Omega}$ 、図中に示す数値が α であり線の両端が $\bar{\Omega}_l$ 、 $\bar{\Omega}_U$ となっている。

また、不安定領域の間隔 $\Delta\bar{\Omega}$ を生じる α の値を減衰率0.01~0.10に関して示したものが図5である。横軸に $\Delta\bar{\Omega}$ 、縦軸に α を採用している。 α がある程度以上の数値になると急激に不安定領域が拡大する様子がわかり、仮定した減衰率が大きいほどその傾向は大きくなる。

これらの図より、例えば、ある固有モードの周波数が100Hz程度であり、減衰率が0.02であるとすると、10Hz程度($\Delta\bar{\Omega} = 0.1$)の間隔の不安定領域が現れるためには α が5程度の値をとる必要があることがわかる。

β_l が負の場合には、不安定領域の上下限值 $\bar{\Omega}_l$ 、 $\bar{\Omega}_U$ は $\bar{\Omega} = 1$ 軸について対称な結果となる。つまり、 β_l が負の場合の不安定領域の上下限値を $\bar{\Omega}_l^-$ 、 $\bar{\Omega}_U^-$ とおくと、

$$\bar{\Omega}_l^- = 1 - \bar{\Omega}_U, \quad \bar{\Omega}_U^- = 1 - \bar{\Omega}_l$$

となる。

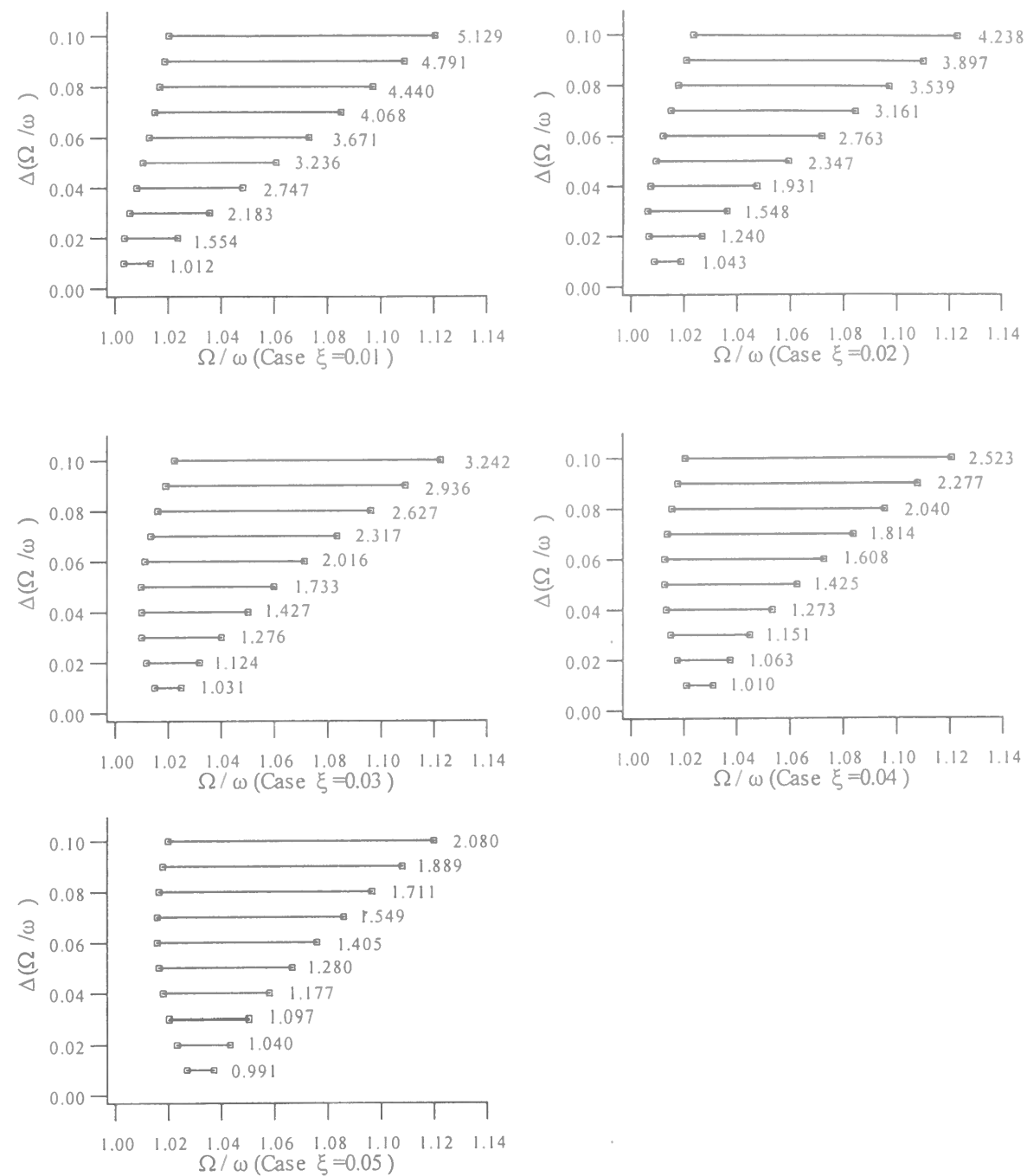


図4. 不安定領域の上下限値の例

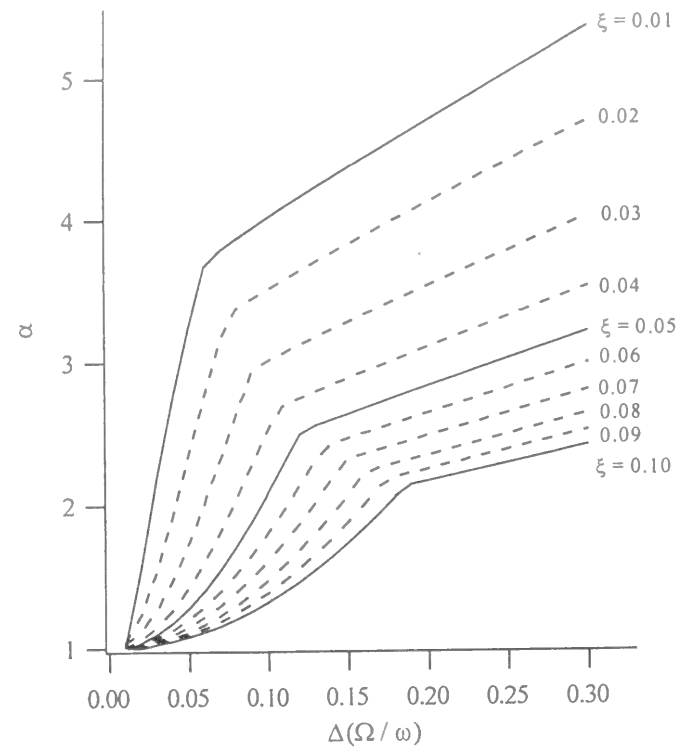


図 5. 不安定領域の変化と α の関係

8.3 球形シェル構造の逆対称幾何学的非線形定常振動におけるモード連成作用効果

前節で定式化した単一の固有モードのみを考慮した不安定領域の発生が、複数の固有モードを同時に考慮したときにどのような影響を与えるかを、球形シェル構造の逆対称型幾何学的非線形支配式について検討する。

8.3.1 逆対称モードを考慮した球形シェルの非線形連立支配方程式

ここで扱う球形シェル構造は頂点が閉じたものであり、半開角を ϕ_0 とする。非線形運動方程式の解 w を、2章で示した球形シェル逆対称近似固有モード式 (W_i^l) を用いて以下のように設定する。

$$w = w_c \cos \theta \quad (8.23)$$

$$w_c = \sum_{i=1}^{M_1} W_i^l(\phi) T_i^c(t), \quad W_i^l = \sum_{j=1}^{N_1} G_{ji}^l P_j^l(\cos \phi)$$

ここに、 M_1 は使用する逆対称モードの数、 P_j^l 、 N_1 は Legendre 陪多項式及びそれを使用する数を示す。

仮定したたわみモード式を球形シェルの逆対称型幾何学的非線形運動方程式に代入し Galerkin 法を適用すると、 l 番目の固有モードについて固有モードで離散化された時間関数により、以下のように表すことが出来る。(4.29)式の一部を取り出したものになる)。

$$B_l^l \ddot{T}_l^c + B_l^2 T_l^c + \sum_{s=1}^{M_1} \sum_{t=1}^{M_1} \sum_{u=1}^{M_1} B_l^6(s, t, u) T_s^c T_t^c T_u^c = B_l^7 \ddot{V} \quad (l=1 \sim M_1) \quad (8.24)$$

ここに、 T_l^c は逆対称モードの l 次の固有モードにかかる時間関数を板厚で正規化したもの、 B_l^l 等は各項にかかる係数であり 4章で示したものである。また \ddot{V} は $\theta=0$ 方向から入力される外力の加速度を示し、(8.24)式ではそれを板厚で正規化したものを示している。複数のモードを同時に考慮した応答はこれら M_1 々の非線形連立微分方程式を解く必要がある。

ここでは定常振動状態を扱うので、入力加速度として角振動数 Ω の外力を考える。

$$\ddot{V} = P \cos \Omega t \quad (8.25)$$

ここに、 \ddot{V} が水平方向外力の加速度を板厚で正規化したものを示しているので、 P は水平方向の入力加速度の振幅を板厚で割ったものとなっている。

8.3.2 単一のモードのみを考慮した非線形定常振動状態の不安定領域が生じ始める入力加速度の振幅

(8.24)、(8.25)式より単一の l 次のモードのみを考慮した非線形支配方程式は Duffing 型となり以下のようなになる。

$$B_1^1 \ddot{T}_1^c + B_1^2 T_1^c + B_1^6 (l, l, l) \cdot (T_1^c)^3 = B_1^7 P \cos \Omega t \quad (8.26)$$

(8.1)式とこれらの式を比較すると、係数 κ_1 は1次の固有モードについて、以下のように求められる。

$$\kappa_1 = \frac{B_1^2}{B_1^7} \sqrt{\frac{B_1^2}{B_1^6(l, l, l)}} \quad (8.27)$$

減衰比(ζ)を 0.02 (このとき、 $c_\xi = 0.0028557$) と仮定し、係数 κ_1 と c_ξ をかけたものを、半径-板厚比($a/h = 100, 400, 1000$)、半開角 (30, 45, 60, 75, 90 度)、境界条件 (単純支持、固定支持)、固有モード 1st ~ 6th、材料パラメータ $A (\equiv ma^2/Ehg) = 0.0001$ について図 6 に示す。(m はシェル中立面単位面積当たり重量、 E はヤング係数、 g は重力加速度を示している)。

横軸が固有モードの次数、縦軸に $c_\xi \kappa_1$ 、また凡例に半開角の値を採用している。(8.26)式中の入力加速度の振幅を板厚で割った値 P がこれらの値 $c_\xi \kappa_1$ を超えると単一のモードのみを考慮した非線形定常振動状態において不安定領域が発生することになる。(式(8.22)の $\alpha=1$ の時に相当する)

ところで、シェル単位体積質量を ρ とすると、 m はシェル中立面単位面積当たりの重量であるから、 $m = \rho h g$ と表すことができるので、これを材料パラメータ $A (= ma^2/Ehg)$ に代入すると、材料パラメータ A は $\rho a^2/E$ となり、材料パラメータは半径-板厚比(a/h)に独立したものとなっている。ここでは、材料パラメータ A を 0.0001 としているが、この値はヤング係数(E)や単位体積質量(ρ)としてコンクリートのそれらを用いるとき、半径(a)が 30m 程度のものを考えていることになる。

なお、材料パラメータ A は係数 B_1^7 の中にのみ 1 次式として含まれているものなので、 κ_1 は材料パラメータ A に反比例するものである。材料パラメータが $\rho a^2/E$ と表されることを考えると、 κ_1 は半径の 2 乗および単位体積重量に反比例し、ヤング係数に比例することとなる。

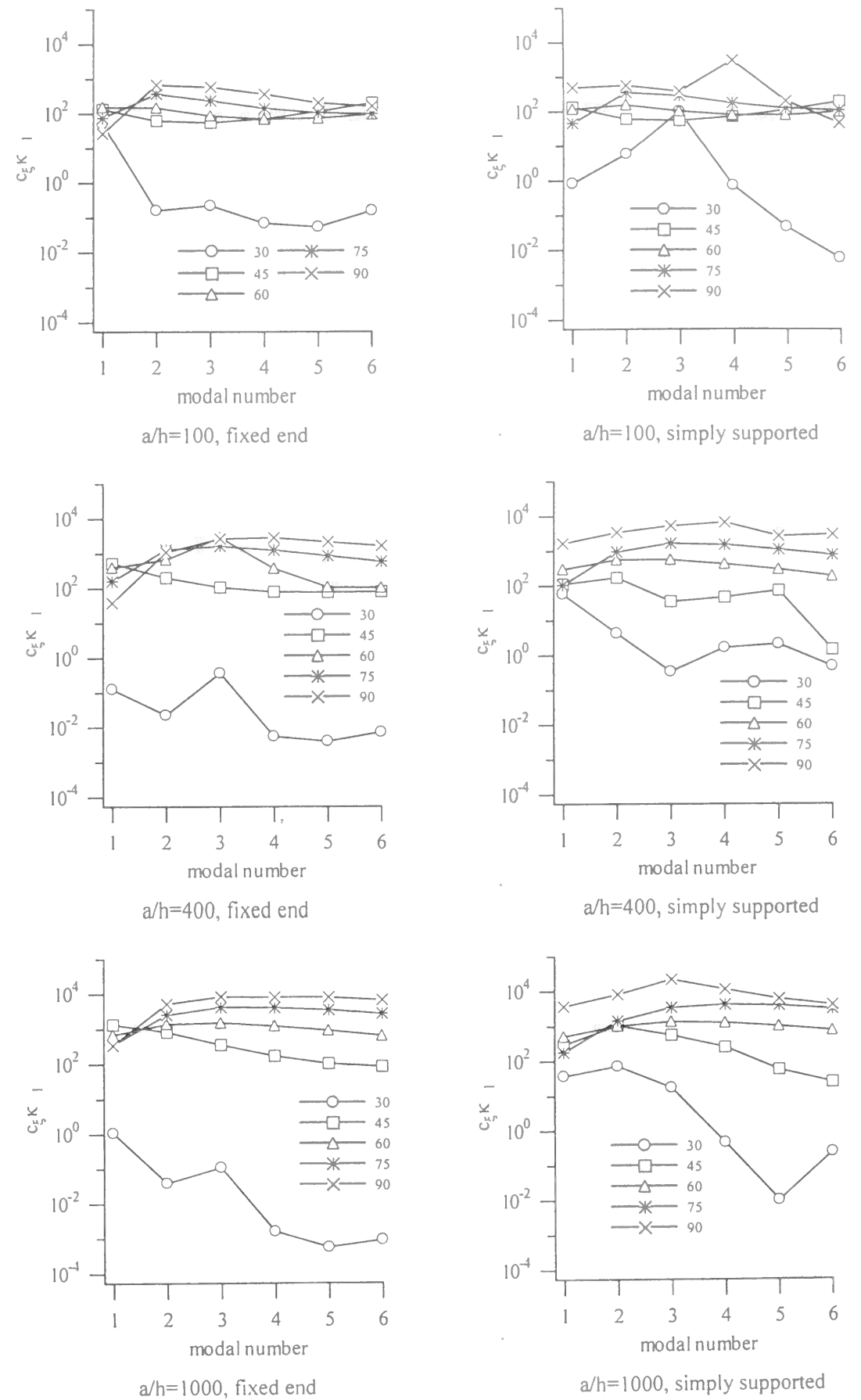


図 6. 不安定領域が発生する入力加速度の振幅を板厚で割った値

8.3.3 複数のモードを考慮した非線形定常振動状態の不安定領域が生じ始める入力加速度

単一の固有モードを考慮した場合の共振曲線に不安定領域が生じ始める入力加速度 $c_{\xi} \kappa_l$ の近傍の値のとき、複数の固有モードを考慮した場合の共振曲線にどのようなことが起こるかを数値計算例により示す。

ここで示す計算例は、頂点の閉じた球形シェルが単純支持された、半径-板厚比 400、半開角(ϕ_0)30度、材料パラメータ(A)0.0001 のものである。先に述べたがこの材料パラメータが 0.0001 となっているものは、材質がコンクリートだと仮定すると、半径が 30m 程のものを想定していることになる。この場合、半径-板厚比が 400 であるので、板厚は約 7.5cm となっている。

また減衰比(ζ)を 0.02 (このとき、 $c_{\xi}=0.0028557$) と仮定すると、(8.27)式より得られる逆対称固有モードに於ける κ_l と c_{ξ} を掛けたものはそれぞれの固有モードについて以下ようになる。

表 2. 当該構造物の $c_{\xi} \kappa_l$ の値

mode	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
$c_{\xi} \kappa_l$	58.41	4.38	0.34	1.66	2.11	0.49

これら $c_{\xi} \kappa_l$ の値を参考にして、入力加速度の振幅を板厚で割った値(P)が 0.1、1.0、10.0 の時の逆対称固有モードの共振曲線を図示したものが図 7.1～図 7.3 である。横軸に周波数、縦軸に各モードの応答倍率を板厚で割った値を採用している。(これらの P の値は、材質がコンクリートであると仮定すると、板厚が約 7.5cm に相当するので、加速度が 0.75gal、7.5gal、75.0gal の定常波を与えることに相当する)。

図中、白抜きマークと点線で示すものが、単一のモードのみを考慮したものであり、平均化法を用いた手法により求めている(8.2.1 節参照)。実線と黒く塗りつぶしたマークで示したものは複数のモードを同時に考慮したものである。複数のモードを含む定常振動解は多元連立非線形方程式となり、平均化法を用いた手法で共振曲線を求めることは非常に困難である。そのため本論では複数のモードを含む共振曲線は、時間関数に関する非線形連立 2 階常微分方程式 ((8.24)式) を、Sweep 加振する数値解析により得ている。Sweep 加振し応答倍率を得るための計算パラメータは以下のようになっている。

加振領域および加振周波数：90Hz～160Hz、0.5Hz 毎 (低次の周波数からのみ計算している)

計算時間間隔：加振周波数毎にその一周期を 1800 で割った値

応答倍率：各周波数毎に 35 周期加振した時点で定常振動状態になっていると仮定し、そこから 5 周期加振する間の最大応答変位より求める

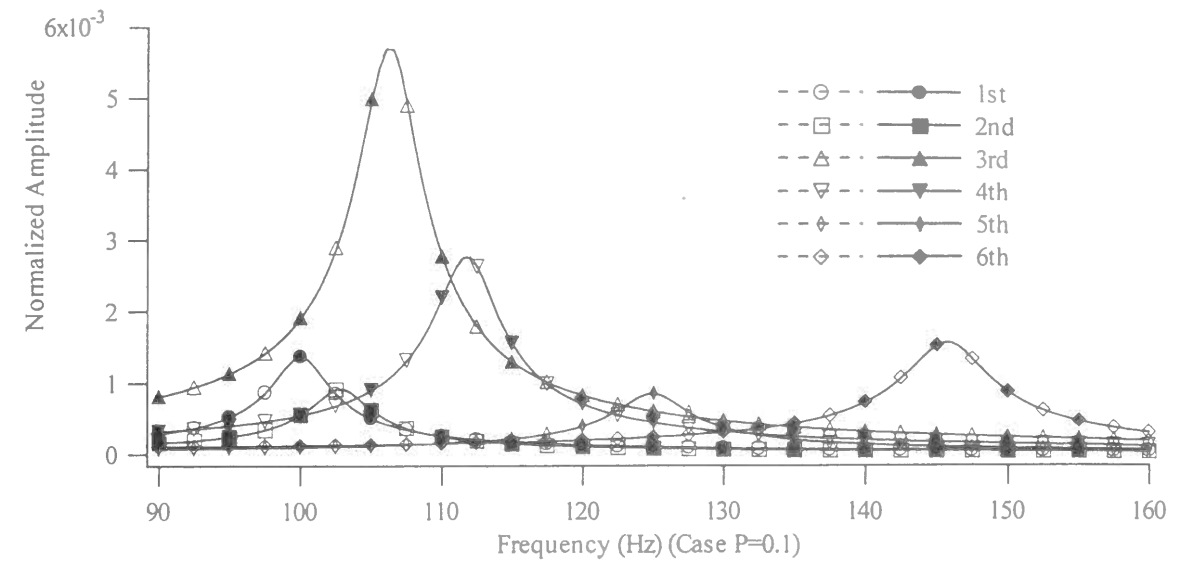


図 7.1 共振曲線の例 ($P=0.1$ の場合)

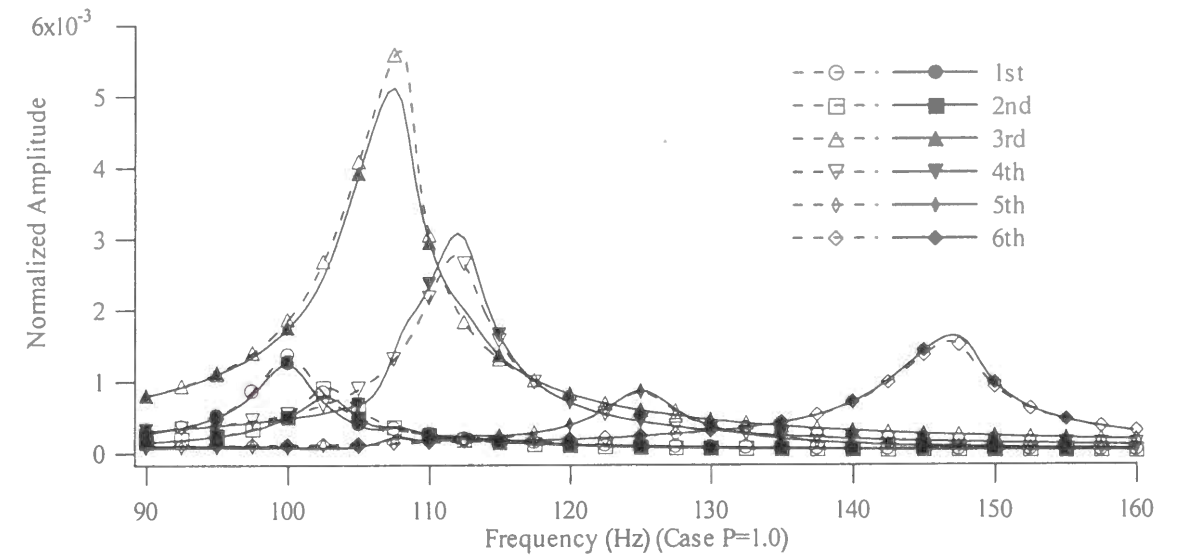


図 7.2 共振曲線の例 ($P=1.0$ の場合)

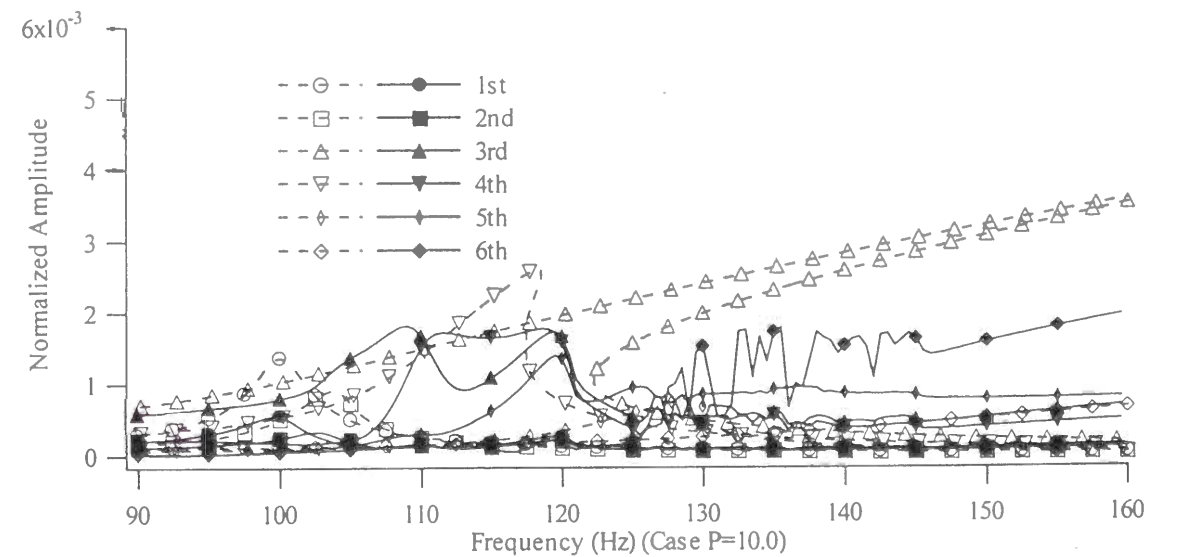


図 7.3 共振曲線の例 ($P=10.0$ の場合)

P が 0.1 のとき不安定領域は発生せず(図 7.1)、1.0 のとき 3rd と 6th モードに不安定領域が生じ始めている(図 7.2)。10.0 のときには 1st 以外のモードに不安定領域が発生し、近接固有値を持つ高次側の固有モードの応答に大きく影響を与え、モードの連成作用効果による構造減衰が大きく現れている様子がわかる(図 7.3)。これらは表 2 において、 $P=0.1$ がどのモードの値 $c_{\xi} \kappa_l$ よりも小さく、 $P=1.0$ は 3rd と 6th モードの値 $c_{\xi} \kappa_l$ より大きく、 $P=10.0$ は 1st のモード以外の値 $c_{\xi} \kappa_l$ より大きな値となっていることと一致している。

このことは、複数の固有モードを同時に考慮した場合の各モードの応答性状が図 6 に示した $c_{\xi} \kappa_l$ の値と不安定領域の位置を示す図 4 により推測することができる、つまり単一のモードのみを考慮した非線形定常振動状態において不安定領域が発生する入力加速度の振幅の値を示した図 6 の値は、モード連成作用効果が生じ始める値と一致し、その影響範囲は図 4 の $\bar{\Omega}_l$ 、 $\bar{\Omega}_l$ 程度になることを示している。

本計算例により、少なくとも球形シェル構造の逆対称振動においては、複数の固有モードを同時に考慮した場合に起こるモード連成作用効果は、ある固有モードが不安定領域を生じない限り現れないといえることがわかった。また図 6 より、球形シェル構造のモード連成作用効果が現れる入力加速度の振幅を板厚により正規化した値は半開角が小さいほど低くなる傾向にあり、ライズが低いものほどモード連成作用効果により応答振幅が小さくなることがわかった。係数 κ_l が材料パラメータ A に関して反比例する、つまり、モード連成作用効果が現れる外乱強度が材料パラメータ A に反比例するので、材料パラメータ A が大きくなるほどモード連成作用効果により応答振幅が小さくなることがわかった。

なお、図 6 は材料パラメータが 0.0001、減衰率が 0.02 として図示したものである。 κ_l が材料パラメータ A に関して反比例するものであることから、設計しようとするシェルの材料パラメータを計算し 0.0001 の比の逆数を掛けたものが図 6 の縦軸の値になることは言うまでもなく、減衰率に関しても表 1 との比を考慮すると同様のことが行えるので、図 6 は半径-板厚比が 100、400、1000 に関する、球形シェル構造の逆対称型非線形定常振動状態に於けるモード連成作用効果が発生する外乱強度を一般的に表していると言える。

8.4 まとめ

本章では球形シェルの逆対称幾何学的非線形定常振動状態に関して以下のことを明らかにした。

- ・単一モードのみを考慮した場合の不安定領域を生じ始める入力加速度の振幅の最小値が、減衰率より得られる係数 c_{ξ} とその他のパラメータよりモード毎に得られる係数 κ_l の積で表されること。
- ・不安定領域が発生する周波数領域における範囲 ($\bar{\Omega}_l < \bar{\Omega} < \bar{\Omega}_l$) は入力加速度の振幅と係数 $c_{\xi} \kappa_l$ との比(α)および減衰率 ξ のみに関係するものであることと、その範囲。

・複数の固有モードを同時に考慮する場合にも、単一モードが不安定領域を生じ始める入力加速度の振幅値 $c_{\xi} \kappa_l$ が有効であり、少なくとも球形シェルの逆対称幾何学的非線形定常振動状態を考える場合には、あるモードが不安定領域を生じない限り、構造減衰が生じることはない。

・材料パラメータ A が大きくなるほど、構造減衰が生じやすい。

なお、球形シェルの軸対称固有モードを同時に考慮する場合、本手法は適用できない。4 章に示すように軸対称固有モードを含む幾何学的非線形運動方程式は、軸対称固有モードの時間関数に関する 2 次項を含むが、平均化法による共振曲線の導出ではこの 2 次項が評価されないためである。また、逆対称固有モードの時間関数に関する 2 次式と軸対称固有モードの時間関数に関する 1 次式の積の項を含むため、パラメトリック共振を起こす。このことは、複数の軸対称および逆対称固有モードを同時に考慮した共振曲線を得る方法として、本章と同様な Sweep 加振による方法を選択することができないことを示している。

一般に行われている Duffing 型の非線形支配方程式で表される有限要素法等の離散系の問題に本手法を適用しその有効性を調べることと、上記の問題点を含んだ、軸対称固有モードを同時に考慮した幾何学的非線形定常振動応答の評価をどのように行うかが今後の課題である。

9. 結論

本論では、國枝により示された球形シェルの軸対称近似固有モード作成法を逆対称および非対称の場合に拡張した近似固有モード作成法を展開し、得られた近似固有モードを用いて、主に逆対称非線形応答性状についての考察を行った。

近似固有モード式は、一般厳正解が複素数次および非整数次の Legendre 陪関数の式で表されるところを、比較的取り扱いが簡便な直交関数である Legendre 陪多項式を用いて展開することにより得ている。そのため、仮のモードを作成するための Legendre 陪多項式の上下限の次数の設定が、近似固有モードの精度に大きく影響するが、半開角が 90 度であることを基準とした Legendre 陪多項式の節点分布の近似による計算式は、多少の補正を必要とするものの、充分実用に耐えることがわかる。逆対称および非対称自由振動時の厳正解には、軸対称自由振動時には含まれない接線方向変位成分 u, v の回転による剛体変位相当項が存在し、その項は本来計算結果として求められる固有振動数の関数であるが、本論では、初めに適当な値を固有振動数として与え、計算結果として出てきた固有振動数を再び与えて計算する方法により解を得ることができることを示した。得られた近似固有モードは、一般厳正解より得られる固有値、固有モードとかなりの精度で一致している。また、一般厳正解を用いた振動応答解析式の定式化に比べ、この近似固有モード式を用いた定式化は簡便であり、実用性があるといえる。

また、本来、厳正解を直交関数で展開するには直交関数の無限級数和としなければならないが、本論では有限級数和としており、求めようとする固有モードの高次の数個のモードにのみ、その影響が表れることがわかったので、応答解析時には必要なモードの個数に幾つか足した個数のモードを求め、高次の数個のモードを捨てる必要がある。

この近似固有モードは、球形シェルの幾何学的および材料学的パラメーターのうち、半開角、半径一板厚比、境界条件およびポアソン比を満たすように得られ、本論中で用いている材料学的パラメーター $A (=ma^2/Ehg : m$ はシェル中立面単位面積当たり重量、 a は半径、 h は板厚、 g は重力加速度、 E はヤング係数) およびそこに含まれるパラメーターから独立したものとなっている。2 章の最後に示した近似固有モードの固有振動数の表は正規化された振動数 Ω を示しており、材料パラメーター A の平方根で割ることにより、実際の形状に於ける固有振動数を得ることができるので、設計時の基準参考資料として用いることができる。

本論では、この 2 章で示した近似固有モード式を用い、主に逆対称幾何学的非線形応答性状を詳細に調べることを目的とし、3 章で逆対称線形応答解析、4 章で軸対称および逆対称モードを同時に考慮した幾何学的非線形応答方程式の定式化、5 章で動座屈荷重以下の水平地震動を受けた時の軸対称および逆対称モードの連成および初期不整の影響の有無、6 章で水平地震動の動座屈荷重と幾何学的および材料学的パラメーターとの関係、7 章で定常振動外力下でのある 1 つの逆対称モードの非線形応答性状、8 章で定常振動外力下での逆対称変形モード間の非線形応答性状を示した。

3 章では、球形シェル構造物に水平方向地震力がかかったときの応答性状の概要を知るため、モー

ド重畳法による線形応答解析を遂行した。入力地震波として神戸海洋気象台による阪神・淡路大震災地震動記録 (Kobe-JMA) 及び El Centro 水平地震動記録のうち NS 成分を用いたが、これら想定した入力地震波の区別なく、最大応答加速度だけを見る場合、単純支持よりも固定境界の球形シェルの方が地震応答が大きく現れることがわかった。また想定した材料学的パラメーターの範囲では、その値が大きくなるほど、地震応答加速度が大きく現れることがわかる。また、振動時における各応力分布状態の例を示し、最大応答加速度や最大応答変位のみを考慮するだけでは、実設計に必要な各応力を推定することは出来ないことを示した。

当該構造物のように固有振動数が互いに近接した構造物においては、何れか 1 つのモードの時間関数のみが卓越した値を持つことはなく、またその正負も予測できないので、想定される地震波について応答解析を遂行せずに応力分布状態を把握することは出来ないことがわかった。

4 章では球形シェル構造物の軸対称および逆対称固有モードを同時に考慮した非線形動的応答方程式の定式化を行った。得られた最終支配方程式である非線形連立 2 階常微分方程式を見ると明らかのように、上下方向応答による水平方向運動方程式への寄与分がないため、上下方向加振のみを受ける場合には、初期不整を考慮しない限り、水平方向応答が表れる可能性が全くないことがわかる。これは、上下方向加振による水平方向応答の評価を行うには、少なくとも周方向展開次数 n が 2 である非対称近似固有モードを含めた定式化が必要であり、上下方向加振により水平方向応答が誘起されないということではないということの本論中で述べた。本論のように無限自由度を持つ連続体の応答の変形モードを有限個の固有モードで仮定する際には、何を目的とした解析を行うのかを明確にし、得られた最終支配方程式の適用範囲を知ることが重要である。

本論文で扱っているような連続体は無限のモードを持つため、非線形応答挙動を表すには原則的に各方向の無限のモードを採用することが必要である。しかしながら、全てのモードを同時に考慮し、表れる非線形応答挙動の本質を詳細に考察することは非常に困難であるので、4 章では軸対称および逆対称固有モードのみを考慮した非線形応答方程式を定式化し、これらの限定されたモード間に起こりうる非線形応答挙動を 5 章以降で明らかにした。

5 章では、初めに、有限要素法解析に基づき水平地震動入力により上下方向応答が誘起されるといわれている現象の解明を行うため、4 章で得られた幾何学的非線形応答方程式を用い、モードの連成作用により発生すると考えられる水平方向加振による上下方向応答モードの誘起、および上下方向加振による水平方向応答モードの誘起という対称性の異なるモード間のモードの誘起現象の解明を目的とした数値解析を行い、有限要素法による解析結果で上下方向応答と呼んでいるものは、逆対称変形モードの上下方向変位成分であることを明らかにした。また、初期不整の影響の解明を行うため、動座屈荷重以下の入力地震動を与えた幾何学的非線形応答解析を行い、初期不整の影響は殆どなく、動座屈現象が起こらない程度の外力下では幾何学的非線形応答解析は必要ではなく、線形応答解析のみで応答解析を行っても充分であることを明らかにした。

6 章では、逆対称変形モードの動座屈問題を扱った。3 章で使用した水平地震動記録と同じものを用いた幾何学的非線形応答解析を行い、非線形加速度応答比 (非線形応答解析時最大応答加速度を

線形応答解析時最大応答加速度で割った値)を調べることによりこれら実地震動の動的安定臨界入力加速度を求め、非線形応答解析が必要な材料学的及び幾何学的パラメータの範囲を示した。5章で動座屈荷重以下の荷重に対する初期不整の影響はないことを述べたが、その結論と合わせると、動座屈荷重の値以下であれば非線形応答解析を行う必要はなく、線形応答解析のみで応答性状は把握できると考えられる。本章の結果から、一般的には、材料パラメータが大きくなるほど、半開角が小さいほど、半径-板厚比が大きいほど(板厚が薄いほど)非線形応答解析の必要性があると言える。しかしながら、本章に示す動的安定臨界入力加速度は記録された地震波に対するものであり、これから起こりうるであろう地震に対する性状を述べられるものではない。本章で示した動的安定臨界入力加速度を記録されている地震波に対し数多く行い、その統計学的な立場から一般的であると考えられる動座屈荷重を求めることも可能であると思われるが本論文では行っていない。

7章では周期外力下における1つの逆対称モードの幾何学的非線形定常振動状態を解明することを目的とした解析を行った。応答変形が加振方向に対応する「加振型モード」の他にそれに直交する方向にも生じる「随伴型モード」が存在すると仮定した解析を行い、逆対称幾何学的非線形定常応答解析においては伝播型モード、つまり周方向に回転するモードを採用することが必要であることを示した。

8章では、7章で考慮されていない周期外力下における複数の逆対称モード間に起こる幾何学的非線形現象の解明を目的とした解析を行った。複数のモードを同時に考慮する場合、個別のモードのみで応答解析を行った結果に比べ、その応答振幅が小さくなることは知られているが、ここでは、あるモードが非線形効果により、その共振曲線がhardeningの性状を見せ始め、そこに含まれる不安定領域の影響により近接固有値を持つ高次側の固有モードの応答に影響を与え、モードの連成作用効果による減衰効果類似の現象(本論では構造減衰と呼んでいる)が生じているという仮説を立て、この仮説の検証を行った。数値解析の結果、少なくとも球形シェル逆対称幾何学的非線形応答については、この仮説は正しく、且つ、複数のモードを同時に考慮した時に発生する構造減衰を生じ始める入力加速度の振幅値は、単一のモードが不安定領域を生じ始める入力加速度の振幅値を用いて評価できることを示した。本章で用いた手法はDuffing型の非線形支配方程式で表される応答方程式に容易に適用可能なように、定式化しており、一般に行われているDuffing型の非線形支配方程式で表される有限要素法等の離散系の問題に本手法を適用しその有効性を調べることができる。

以上まとめると、球形シェルの逆対称幾何学的非線形振動状態について以下のことがいえる。

- ・設計時に当該構造物の振動時の応力分布状態を必要とする場合、想定される地震動を入力外力とした応答解析を行わなければならない。
- ・動座屈荷重以下では幾何学的非線形応答解析を行う必要はなく、線形応答解析のみで設計に必要な応力分布状態が算出できる。
- ・動座屈荷重は、一般的に、材料パラメータが大きくなるほど、半開角が小さいほど、また半径-板厚比が大きいほど(板厚が薄いほど)大きくなるといえる。
- ・定常振動状態に於いて構造減衰が生じ始める入力加速度の振幅値は、単一のモードのみを考えた

ときの振動方程式の係数を調べるだけでよく、複数のモードを同時に考慮した非線形応答解析を行う必要はない。

これらのことより、球形シェルの逆対称幾何学的非線形振動状態における非線形性は非常に小さいが、動的外力下の振動応答や応力分布状態を知るには幾何学的非線形応答解析が必要であることが判明した。

本論文では、主に逆対称変形のみを考慮した幾何学的非線形振動性状についてまとめたが、2章で示した近似固有モード式を適切に用い4章で示した手法で幾何学的非線形応答方程式を作成することで、今まで解析が困難であった球形シェルの幾何学的非線形振動性状をパラメトリックに明らかにすることができ、より多くの知見を得ることができると考えられる。また、8章で示した手法を、一般に行われているDuffing型の非線形支配方程式で表される有限要素法等の離散系の問題に適用しその有効性を調べること、軸対称固有モードを同時に考慮した幾何学的非線形定常振動応答の評価をどのように行うか、また、非線形定常振動状態の延長にあると考えられる実地震波を受ける当該構造物の非線形振動応答の評価をどのように行うかが今後の課題である。

参考文献

- [1] H.Lamb : London Math. Soc. Proc. vol. 13, 1882
- [2] J.W.S. Rayleigh : The Theory of Sound, 1894
- [3] E. Reissner : On Transverse Vibrations of Thin Shallow Elastic Shells, Quart. of Applied Mathematics, Brown Univ. vol. XIII, No. 2, 1955
- [4] E. Reissner : On Axi-Symmetrical Vibrations of Shallow Spherical Shells, Quart of Applied Mathematics Brown Univ. vol. XIII, No. 3, 1955
- [5] S. Timoshenko : Theory of Plates and Shells, 2nd edition, McGraw-Hill, New York, 1959
- [6] P.M.Naghdi : On the General Problem of Elasto-kinetics in the Theory of Shallow Shells, Proceedings of the I.U.T.A.M. Symposium 1959
- [7] W. Flugge : Stresses in Shells, Springer, Berlin, 1960
- [8] P.M.Naghdi, A.Kalnis : On Vibrations of Elastic Spherical Shells. Journal of Applied Mechanics., 1962
- [9] J.L.Sanders Jr. : Nonlinear Theories for Thin Shells, Quart. Applied Mathematics Vol. XXI, no.1, 1963
- [10] 横尾義貫、松岡 理、國枝治郎 : 球殻振動時の一般解 (その1・理論式誘導と厳正解)、日本建築学会論文報告集、83号、1963
- [11] 横尾義貫、松岡 理、國枝治郎 : 球殻振動時の一般解 (その2 振動性状・近似解)、日本建築学会論文報告集、84号、1963
- [12] 横尾義貫、松岡 理、國枝治郎 : 球殻振動時の一般解、日本建築学会論文報告集、89号、1963
- [13] 國枝治郎 : 球殻自由振動時の固有振動数 ($n=1$ の場合、脚部固定、ピン支持に対して)、日本建築学会論文報告集、号外、1966.10
- [14] A. Kalnins and H. Kraus : Effect of transverse shear and rotatory inertia on vibration of spherical shells, Proceedings of the 5th U.S. National Congress of Applied Mechanics, Minneapolis, pp.134, 1966
- [15] Harry Kraus : Thin Elastic Shells, John Wiley & Sons, Inc., 1967
- [16] J.M.T. Thompson and G.W. Hunt : A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, 1973
- [17] P. Seide : Small Elastic Deformations of Thin Shells, Noordhoff, Leiden, pp.333-404, 1975
- [18] 横尾義貫、國枝治郎、村田潤一 : 非偏平な球殻の逆対称形非線形振動解析、日本建築学会近畿支部研究報告書、pp.133-136、1975
- [19] 國枝治郎、村田潤一、作本好文 : 非偏平球殻の逆対称形応答振動特性、構造工学論文集、pp.93-104、1979.2
- [20] Werner Soedel : Vibrations of Shells and Plates (Mechanical engineering; 10), MARCEL DEKKER INC., 1981
- [21] 國枝治郎 : 球形シェルの軸対称自由振動時の近似解、京都大学防災研究所年報、第 26号 B-1、pp.173-181、1983.4
- [22] 國枝治郎 : 上下地震動を受ける球形ドームの応答解析、京都大学防災研究所年報、第 26号 B-1、pp.135-145、1983.4
- [23] Haruo Kunieda : Solutions of free vibration of spherical shells, Part 3 Natural Frequencies and Modes in Axi- and Anti-symmetric State、日本建築学会論文報告集、pp.57-66、No. 325、Mar.、1983
- [24] Niordson, F. I. : Free vibrations of thin elastic spherical shells, International Journal of Solids and Structures, pp.667-687, 1984
- [25] Frithiof I. Niordson : Shell theory (North-Holland series in applied mathematics and mechanics; v.29), 1985
- [26] H.Kunieda : Responses of Spherical Domes Subjected to Vertical Earthquakes., Shells, Membranes and Space Frames, 1986, ELSEVIER.
- [27] Phillip L. Gould : Analysis of Shells and Plates, Springer-Verlag New York, 1988
- [28] H.Kunieda : On Dynamic Instability of Structures Subject to Dynamic Excitation: A Trial Regarding Prediction of Incipient Instability, 9th World Conference of Earthquake Engineering, 1989, pp.1-6.
- [29] 國枝治郎 : 上下地震動を受ける球形シェル Part 1 固有モードの設定と次の論文(Part 2)の問題点、日本建築学会近畿支部 構造力学講究録、pp.131-134、第 7号、1990.7
- [30] 國枝治郎 : 上下地震動を受ける球形ドームの動的安定、シェル・単層ラチス構造の振動解析—地震、風応答と動的安定—、日本建築学会、pp.371-381、1993
- [31] H.Kunieda : Dynamic Stability of Spherical Domes Subject to Earthquakes, Proceedings of 4th International Conference on Space Structure, Vol.1, 1993, pp.507-516.
- [32] H.Kunieda : Prediction of the Critical Intensity of Excitations for Incipient Dynamic Instability of Space Structures, Proceedings of SEIKEN-IASS Symposium on Nonlinear Analysis and Design for Shells and Spatial Structure, 1993, pp.545-552.
- [33] 鈴木勝義、山田 元、成田吉弘、齋藤 俊 : シェルの振動入門、コロナ社、1996
- [34] H.Kunieda : シェルの地震応答特性、計算工学講演会論文集 1997、第 2 卷第 3 号、pp.885-888
- [35] Stress Characteristics of Shells Subjected to Kobe-Earthquake, Structural Engineering World Wide 1998, ed.Srivastava N.K., (Elsevier), Paper T102-106, 1998

発表論文リスト

●本論に関する論文および会議論文

論文

- [1] 球形シェルの逆対称振動近似固有モード作成及び応答解析への適用、日本建築学会構造系論文集、第466号、pp.79-85、1994（共著者：國枝治郎、韓 相乙）
- [2] Spherical Domes Subjected to Horizontal Earthquakes, Proc. IASS-ASCE Sympo., Atlanta, pp.229-238, 1994 (with H. Kunieda, K. Onodera)
- [3] 球形シェルの自由振動近似固有モード作成、京都大学防災研究所年報、第39号 B-1、pp.85-93、1996（國枝治郎）
- [4] 軸対称・逆対称近似固有モードを用いた球形シェルの非線形応答方程式、京都大学防災研究所年報、第40号 B-1、pp.107-113、1997（國枝治郎）
- [5] 球形シェルの逆対称形非線形振動特性、京都大学防災研究所共同研究集会「シェル・空間構造の自然災害時非線形挙動とその抑止対策」論文集、pp.145-151、1997（國枝治郎）
- [6] 対称・逆対称モード共存時の球殻非線形運動方程式の閉形表現、日本建築学会構造系論文集、第509号、pp.91-97、1998（國枝治郎）
- [7] 球形シェルの逆対称形非線形振動特性、日本建築学会構造系論文集、第509号、pp.99-104、1998（國枝治郎）
- [8] 球形シェル構造の逆対称非線形定常振動状態におけるモード連成作用効果の基礎的研究、日本建築学会構造系論文集、（國枝治郎）（第527号に掲載予定）

会議論文

- [1] 球形ドームの非対称近似固有モードの作成、日本建築学会学術講演梗概集、pp.1495-1496、1993（小野寺幸治、國枝治郎）
- [2] 水平地震動を受ける球形ドームの応答解析、日本建築学会学術講演梗概集、pp.1497-1498、1993（國枝治郎）
- [3] 球形シェル非線形応答最終支配方程式、日本建築学会学術講演梗概集、pp.967-968、1996（國枝治郎）
- [4] 水平地震動を受ける球形シェルの動的安定限界強度、日本計算工学会講演会論文集、pp.905-908、1997（國枝治郎）
- [5] 水平地震動を受ける球形シェルの動的安定限界地震動強度、建築学会大会学術講演梗概集、pp.983-984、1997（國枝治郎）
- [6] 定常振動状態にある球形シェル構造物のモード連成作用効果の基礎的研究－逆対称モードのみを考慮した場合－、日本計算工学会講演会論文集、1999（國枝治郎）

●その他の発表論文等

- [1] 既設空間構造の振動特性実測について、京都大学防災研究所共同研究集会「空間構造の耐震性能・評価をどう進めるか？」論文集、pp.73-84、1998（國枝治郎、萬田 隆）
- [2] 張力導入型構造物の微小剛体変位メカニズムへの仮想バネ導入手法、日本建築学会構造系論文集、第514号、pp.149-154、1998（門脇秀宜、國枝治郎）
- [3] 境界要素法を用いたアーチ状構造物解析の基礎的研究、日本建築学会学術講演梗概集、pp.753-754、1995（國枝治郎）
- [4] 部材接合部に欠陥を持つトラス構造物の基礎的研究、建築学会大会学術講演梗概集、pp.1041-1042、1997（志摩好宣、國枝治郎）
- [5] 微小剛体変位メカニズムを有する構造物への仮想バネ導入手法（その1）導入、建築学会大会学術講演梗概集、pp.1063-1064、1998（門脇秀宜、國枝治郎）
- [6] 微小剛体変位メカニズムを有する構造物への仮想バネ導入手法（その2）テンセグリティ単位構造への適用、建築学会大会学術講演梗概集、pp.1065-1066、1998（門脇秀宜、國枝治郎）