

学位審査報告書

（ふりがな） 氏名	あんどう ひろし 安藤 浩志
学位（専攻分野）	博士（理学）
学位記番号	理博第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科 数学・数理解析専攻
（学位論文題目） Polish Groups of Finite Type and Their Lie Algebras （有限型 Polish 群とその Lie 環について）	
論文調査委員	（主査） 小嶋 泉 准教授 山田 道夫 教授 泉 正己 教授

理学研究科

(続紙 1)

京都大学	博士 (理学)	氏名	安藤 浩志
論文題目	Polish Groups of Finite Type and Their Lie Algebras (有限型 Polish 群とその Lie 環について)		
(論文内容の要旨)			
<p>ユニタリ群 $U(n)$ への埋め込みによる有限次元コンパクト Lie 群の特徴づけと類似の形で、無限次元 Lie 群のあるクラスを特徴づけようとする、非有界作用素である Lie 環の生成元に対する代数演算とそれらの定義域の整合性が忽ち問題となる。学位申請者の安藤浩志氏は、3年前から始まった北大数学の大学院生・松澤泰道氏との共同研究を通じてこの問題を考察し、有限型 von Neumann 環 M に affiliate する非有界作用素全体をその強レゾルベント収束位相に従って扱うことがこの目的に相応しい代数的位相的舞台を与えることを次の定理の形で明らかにした：</p> <p>定理 (安藤・松澤) Hilbert 空間 H 上の有限型 von Neumann 環 M のユニタリ群 $U(M)$ の強閉部分群 G に対して、$\exp(tA) \in G (\forall t \in \mathbb{R} : \text{実数})$ を満たす反自己共役作用素 A の全体 $\text{Lie}(G)$ は、強レゾルベント収束位相に関して完備位相 Lie 環となり、$A, B \in \text{Lie}(G)$ に対して和 $A+B$、Lie 括弧 $AB-BA$ は well-defined かつ連続。</p> <p>このようなユニタリ群 $U(M)$ およびそこに埋め込まれ得る群は強位相に関して可分・完備距離付可能な Polish 群となるので、冒頭の問題はこの文脈で、$U(M)$ に埋め込み可能な Polish 群を特徴づける条件は何か？という問題に帰着する。偶然にもこの同じ問題が Sorin Popa によりコサイクル超剛性定理の証明過程から提起されていたことが判明したので、安藤・松澤両氏はこれを Popa の埋め込み問題と呼ぶ事にした。</p> <p>この問題に対する完全な解答は未だ得られていないが、その解決に向かう上で、Polish 群 G のユニタリ表現可能性 (UR) : $G \hookrightarrow U(\ell^2)$ と、SIN-群性 (Small Invariant Neighborhood) という2つの性質の重要性に着目して、申請者の安藤氏は G の有限性に対する十分条件を得た：</p> <p>定理 (安藤) UR 性および SIN-群性を満たす Polish 群 G に対して、G の上の正定値関数 ϕ を通る G の共役随伴軌道 $0(\phi)$ が次の2条件の何れかを満たせば、G は有限型 Polish 群である：</p> <ol style="list-style-type: none">(1) $0(\phi)$ は G 上の有界連続関数のなす Banach 空間において相対弱コンパクト。(2) $0(\phi)$ の凸包のコンパクト開位相による閉包はノルム可分。 <p>他方、Popa の埋め込み問題に対する反例の候補も知られ、その文脈で安藤・松澤の共同研究が役立つ可能性も考慮中である。</p> <p>学位論文として提出された2編のうち、主論文は上記、安藤・松澤両氏による共同研究の諸成果を、そこで用いられた作用素環、函数解析等々の手法の説明と併せて、作用素環論、Lie 群・Lie 環論の理論的・歴史的な文脈の中に置いて、Popa の埋め込み問題が持つ数学的意義を位置付ける目的で書かれた thesis であり、参考論文は、この問題の解決に向けて安藤・松澤両氏が取り組んできた共同研究の現段階での諸成果を述べたオリジナルの論文である。</p>			

(続 紙 2)

(論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨)

元々、Lie 群の由来は、代数方程式に対するガロア理論の真髄を、微分方程式論に拡張適用する目的で Sophus Lie が導入したものであり、特別なタイプの微分方程式系に対して適用可能な differential Galois theory と呼ばれる理論がその後、展開されたが、それは Lie が目指した本来の目的からすれば必ずしも満足の行くものとは言えなかった。加えて 20 世紀前半、物理学の領域で量子論が発見されて以降、非可換力学系の定式化、その対称性変換の扱い等々のため、Lie 群・Lie 環が演ずべき役割は時と共に拡大する一方、局所ゲージ変換群や可積分系理論の進展につれて、Kac-Moody Lie 環等、Lie 群・Lie 環の概念を無限次元化することの必要性・重要性が大きくなってきた。このような文脈で、Banach Lie 群、Fréchet Lie 群等々、無限次元 Lie 群を数学的に扱うための多くの数学的定式化が試みられてきたが、大抵の場合、無限次元特有の[病理現象]が頻出し、それへの対応に追われて、予期された理論的成果が得られることは稀であった。

こうした無限次元 Lie 群を巡る抽象的理論状況に安藤・松澤両氏は飽き足りず、特殊であっても含意の深い特定のクラスの無限次元 Lie 群を選び出し、作用素環的・作用素論的・函数解析的道具立てをフルに駆使することで、その深い内部構造を掘り下げることを目標に据えた研究プロジェクトを、3 年前立ち上げたのだった。そのための数学的足場を固める共同作業は、(論文内容の要旨)に述べた定理(安藤・松澤)という研究成果の形をとって遺憾なくその効力を発揮した。

これが第 1 段階とすれば、このアプローチで無限次元 Lie 群を更に発展させ、次のステップに移るには、そのための方法論、技術論として、von Neumann 環の詳細なテクニックが必要となった。あいにく、作用素環論の研究が C*-環に主軸を移し、von Neumann 環の精緻な扱いに習熟した研究者の数が顕著に減って、そのような研究者との研究交流の機会が大幅に限られるようになった現状において、安藤氏が試みて成功したのは、von Neumann 環研究の世界的な第一人者であるデンマークの Prof. Uffe Haagerup の指導・助言を得ることであった。

この目的で同氏は、2010 年 9 月から 2011 年 11 月の期間、コペンハーゲン大学数学教室に留学し、研究指導の委託を引き受けて下さった Prof. Uffe Haagerup の指導を受けることになった。そこで有限型 von Neumann 環のユニタリ群への埋め込み問題を中心テーマに、松澤氏・Prof. Haagerup との研究討論を深め、それに基づく大部の thesis を仕上げた。

平成 23 年 12 月 17 日に開催された公開講演会では、博士課程進学以降の時期に取り組んだ研究とその成果の意味を平易に説明し、そこから導かれた上記の埋め込み問題の重要な本質を明らかにしつつ、研究の到達段階と未解決問題を明快に説明した。このような研究内容の説明を受けて関連した口頭試問を行った結果、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認め、合格と判定した。

要旨公開可能日： 年 月 日以降