

②

学位申請論文

球殻中の流体の運動の  
Bénard 不安定性について

京都大学大学院理学研究科  
物理第一専攻

荒木 圭典

文部省申請書

○曲線の極限の中核

について

東京大学理学部

数学一系

奥村 浩

# Contents

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| 1 概観                               | 2  |
| 1.1 1成分正常等方流体と Boussinesq 近似       | 3  |
| 1.2 系のモデルと基礎方程式の無次元化               | 6  |
| 2 静止している球殻中での Bénard 不安定性          | 9  |
| 2.1 はじめに                           | 9  |
| 2.2 臨界 Rayleigh 数のアスペクト比への依存性      | 10 |
| 2.2.1 基礎方程式                        | 10 |
| 2.2.2 薄層近似による漸近展開                  | 12 |
| 2.2.3 数値計算の結果                      | 15 |
| 2.2.4 この節のまとめ                      | 16 |
| 2.2.5 付録: $Ra^{(1)}$ の表式について       | 17 |
| 2.3 安定性の十分条件について                   | 20 |
| 2.3.1 エネルギー法による安定性の十分条件            | 20 |
| 3 球殻 Taylor-Couette 流の Bénard 不安定性 | 23 |
| 3.1 はじめに                           | 23 |
| 3.2 基礎方程式と数値解法                     | 23 |
| 3.2.1 基礎方程式と境界条件                   | 23 |
| 3.2.2 系の対称性と解の分類                   | 24 |
| 3.2.3 回転の無い場合の線形安定性                | 26 |
| 3.2.4 低 Reynolds 数における解の概形         | 27 |
| 3.2.5 数値計算の方法                      | 28 |
| 3.2.6 エネルギー・スペクトル                  | 28 |
| 3.3 計算結果                           | 30 |
| 3.3.1 回転の無い場合の Bénard 不安定性に伴う分岐    | 31 |
| 3.3.2 0-渦解に対する Bénard 不安定性に伴う分岐    | 33 |
| 3.4 まとめ                            | 35 |
| 4 結論                               | 37 |
| 参考文献                               | 39 |

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several paragraphs and appears to be a formal document or report. Two circular punch holes are visible on the right side of the page.

## 1 概観

球あるいは球殻という形状は、恒星や惑星によくあらわれる構造です。したがって、球あるいは球殻の内部における流体の運動は、宇宙物理学および地球物理学的な観点から、重要な対象です。太陽や、地球の外殻におけるダイナモ過程による磁場の生成や、マントルにおける対流過程、木星などの巨大惑星の内部構造とその表面の流れのパターンの関連など、現在活発な研究が行なわれています。

このような天体中の流体を駆動する力は、一般に内部の物質の核反応や化学反応による発熱過程による熱エネルギーが、浮力を通して物質の運動エネルギーに転換されているものと考えられています。すなわち、天体中の流体の運動は、対流的な過程に支配されているのです。この関連において、球殻中における静止流体および層流の安定性が、このような系における流体運動の基礎的な問題として研究されてきました。

このような系における対流過程の研究は、対象を直接観察することができない上に、多成分の複雑な反応を伴う過程であるので、どうしてもモデル化をしなくてはなりません。問題に対するアプローチの仕方は多様であり、実に様々な外場や境界条件に対するモデルを考えることができます。また物質の運動を支配する方程式に対しても、流体の成分の数や圧縮性や熱伝導性、あるいは電磁氣的性質などに関して、さまざまな基礎方程式系を考えることができます。正常等方1成分流体に対する Boussinesq 近似は、そのような基礎方程式系のうちで、古くから研究されている最も簡単なモデルの一つです。

静止している球殻中の流体の Bénard 不安定性は、球殻中の熱対流の研究の出発点として、重要な意味を持っています。本論文では、簡単化のために、境界条件や外場の条件に対して球対称性を仮定します。この対称性のおかげで、線形問題に対し、 $SO(3)$  の既約表現を用いることができ、問題を動径方向  $r$  のみに依存する問題として取り扱うことができるようになります。しかしなお重力場や温度場の  $r$  依存性についてさまざまなモデルを考えることができます。

さて、回転の無い球や球殻中の静止流体の線形安定性解析は、古くから多くの研究がなされており、初期の研究のレビューとして Chandrasekhar の著名なモノグラフがあります (Chandrasekhar (1961))。系が球対称性を持っているので、線形解析の固有値は、 $(\vartheta, \varphi)$  方向に関しては  $SO(3)$  の既約表現によってつくられています。したがって、臨界モードは球面調和関数の主モード数  $l$  によって指定され、この方向には  $(2l+1)$ -重の縮退を起こしています。この縮退がどのように解けていくのかという問題に対して、弱非線形の定常問題に対する幾何学的アプローチがあります (例えば Busse (1975))。また計算機の発達に伴って、直接数値計算による対流パターンの研究も進んできました (例えば Glatzmaier et al. (1990))。

球殻中における Bénard 問題は、系の大きさが有限ですから、線形問題のスペクトルが離散的になります。有限な大きさの箱での熱対流の固有値は離散的であり、対応する固有関数は箱の大きさで決まる離散的な波長によって特徴付けられます。一般に、有限な大きさの箱の熱対流では、臨界 Rayleigh 数が、無限に広がる流体層での値よりも、一般に大きな値になります。なぜなら、有限な大きさの箱では、無限に広がる流体層での臨界波長をとることが、一般には許されないからです (例えば Chen (1992))。球殻という形状においても、同様の問題が存在します。この場合、回転群  $SO(3)$  の既約表現である球面調和関数  $Y_l^m$  の主モード数  $l$  が、臨界モードにおける波数の役割を果たします。

しかしながら、臨界 Rayleigh 数と臨界モード数のアスペクト比 (流体層の厚みと内殻の半径の比)、重力場、温度場への依存性については、線形問題の範囲においてさえ、これ

までに系統的には調べられてはいませんでした。本論文第2章において、この問題を取り上げます。

球殻という形状の持つ系の大きさの有限性より、臨界モードの選択に対し、球殻のアスペクト比が重要になります。また、臨界 Rayleigh 数は、重力場や温度勾配の関数形によって、その値が変わります。2.2節で臨界 Rayleigh 数のアスペクト比と重力場の形への依存性を、数値的な計算によって求め、「薄層」近似による漸近展開による解析との比較を行います。

一方、熱対流に対する回転の効果として、流体の運動に対する Coriolis 力の影響を考慮することができます。回転系に対しては、Taylor-Proudman の定理により、回転軸方向の流れが抑圧され、臨界 Rayleigh 数が上昇することが知られています (例えば Galdi and Straughan (1985) とその中の参考文献)。

熱対流に対する回転の効果を知るための、もう一つの極端なモデルとして、内外の球面が異なる角速度で回転している場合を考える事ができます。ここでは、回転軸はそろっていることを仮定します。この場合には、流体層に温度勾配がかかっていなければ、問題は球殻 Taylor-Couette 問題に帰着します。本論文の後半第3章では、球殻 Taylor-Couette 流の Bénard 不安定性の問題を取り上げます。

球殻 Taylor-Couette 流は、境界が曲がっているために、平行平板間の Taylor-Couette 流と異なり、一様平行流 (Stokes 解、 $\Delta(\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  を満たす解) に対応する状態が存在しません。Navier-Stokes 方程式の非線形項のために、Reynolds 数が小さくても有限であれば、南北両半球にそれぞれひとつずつ大きな対流ロールが存在する解 (0-渦解) を形成します。数値計算によるアプローチとして、Marcus and Tuckerman により分岐の詳しいふるまいが  $R = 5.5$  の場合に調べられました (Marcus and Tuckerman(1987))。

流体層に逆転温度勾配による不安定密度成層があるときには、事情が異なっています。流体にかかる重力は球殻の中心方向を向いていると仮定して、この 0-渦解に対する Bénard 問題を数値的に調べました。

## 1.1 1成分正常等方流体と Boussinesq 近似

この研究では、流体は1成分正常等方流体とし、化学反応の寄与等を直接には扱わないことを前提します。例えば、化学反応に伴う発熱の寄与は、エントロピーのつりあいの方程式で「天から降ってきた」湧き出し項として表現します。

解析の出発点となる基礎方程式として、1成分正常等方流体のみたす、次の5つの方程式をとります (Reichl (1980), Chapt.14)。

連続の式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\rho v_\mu) = 0, \quad (1.1)$$

運動量  $\rho \mathbf{u}$  のつりあいの式:

$$\frac{\partial (\rho v_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \rho v_\mu v_j + p \delta_{\mu j} - \zeta \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \delta_{\mu j} - 2\eta e_{\mu j}^s \right) = F_j, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

単位質量あたりのエントロピー  $\rho s$  のつりあいの式:

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \rho s v_\mu - \frac{K}{T} \frac{\partial T}{\partial x_\mu} \right) = \sigma_p + \sigma_Q, \quad (1.3)$$

ここで、 $\rho$ : 流体の密度、 $\mathbf{u} = (v_j)$ : 流体の速度、 $s$ : 流体のもつ単位体積あたりのエントロピー、 $p$ : 静水圧、 $\zeta$ : 体積粘性率、 $\eta$ : ずれ粘性率、 $F_j$ : 単位質量あたりの外力、 $K$ : 熱伝導度、 $\sigma_Q$ : 「天から降ってきた」エントロピーの湧き出し項であり、 $e_{ij}^s$ は速度勾配テンソル  $(\partial v_j / \partial x_i)$  の対称でトレース零の部分:

$$e_{ij}^s = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} \delta_{ij}, \quad (1.4)$$

$\sigma_p$ はエントロピー生成率:

$$\sigma_p = \frac{K}{T^2} \left\| \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{\zeta}{T} \left( \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right)^2 + \frac{2\eta}{T} e_{\lambda\mu}^s e_{\lambda\mu}^s \quad (1.5)$$

です。これらの式で同じギリシア文字の添え字は、アインシュタインの記法を表しています。これらの方程式は、局所平衡が成り立つ、すなわち流体の各点ごとに、巨視的変数が十分によく定義されていて、その変数の変化に対する系の応答が線形である、言い換えると、各点ごとに熱力学の第1法則・第2法則・Gibbs-Duhemの関係式が成り立つ、という仮定より導かれたものです。

熱力学の第1・第2法則より、局所平衡近傍でのエントロピーのゆらぎ $\delta s$ と、その点での温度のゆらぎ $\delta T$ 、密度のゆらぎ $\delta \rho$ との間には、関係式

$$\delta s = \frac{1}{T} \delta u + \frac{p}{T} \delta \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{c_v}{T} \delta T - \frac{p}{\rho^2 T} \delta \rho \quad (1.6)$$

が成り立ちます、ここで $u$ :内部エネルギー、 $c_v$ :等積比熱です。これを用いると、エントロピーのつりあいの式より、その点の温度 $T$ に対する温度ゆらぎ $\delta T$ の時間発展の方程式

$$\frac{\rho c_v}{T} \frac{D(\delta T)}{Dt} = -\frac{p}{\rho T} \left( \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} \right) + \frac{K}{T} \frac{\partial^2 (\delta T)}{\partial x_\mu^2} + \frac{\zeta}{T} \left( \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} \right)^2 + \frac{2\eta}{T} e_{\lambda\mu}^s e_{\lambda\mu}^s + \sigma_Q \quad (1.7)$$

が導かれます、ここで $D/Dt$ はLagrange微分:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (1.8)$$

であり、また式(1.1)を用いました。

流体の圧縮性が無視できる条件について調べましょう。密度ゆらぎ $\delta \rho$ は、温度ゆらぎ $\delta T$ と圧力ゆらぎ $\delta p$ を用いて

$$\delta \rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \delta T + \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \delta p \quad (1.9)$$

と表されます。これより、ゆらぎの時間発展の関係式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{D(\delta \rho)}{Dt} &= -\alpha \frac{D(\delta T)}{Dt} + \chi T \frac{D(\delta p)}{Dt} \\ &= -\alpha \frac{D(\delta T)}{Dt} + \frac{c_p}{c_v} \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{D(\delta p)}{Dt} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

が得られます。ここで $\alpha$ :熱膨張率、 $\chi_T$ :等温圧縮率、 $c_p$ :等圧比熱であり、応答関数間の関係

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{\chi_T}{\chi_s}, \quad (1.11)$$

( $\chi_s$ :断熱圧縮率)と、局所的な音速

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{1}{\chi_s \rho} \quad (1.12)$$

を用いました。これより圧縮性が近似的に無視できる条件は、ゆらぎの特徴的スケールと熱力学的応答関数との間に次のような関係が成り立つ場合になります。

1. 温度ゆらぎ $\delta T$ 、もしくは熱膨張率 $\alpha$ が十分に小さい:

$$\alpha \delta T \ll 1, \quad (1.13)$$

2. 一般に $c_p/c_v \sim O(1)$ なので、圧力ゆらぎ $\delta p$ の特徴的スケールが、流体の密度 $\rho$ と、系の代表的速度ゆらぎの大きさ $U$ を用いて、

$$\frac{\delta p}{\rho} \sim U^2$$

と表されるとき、 $U$ が局所的な音速 $c$ に比べて十分に小さい:

$$\frac{U^2}{c^2} \ll 1. \quad (1.14)$$

流体が重力場中に置かれているとしましょう。このとき式(1.2)の外力項は

$$F_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = g_0 \rho \mathbf{g}(\mathbf{r}) \quad (1.15)$$

と表現されます。ここで $\Phi$ :重力ポテンシャル、 $g_0$ :特徴的な重力加速度、 $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ : $g_0$ で規格化された重力場の関数です。いわゆる Boussinesq 近似は、条件(1.13)、(1.14)が成立したうえで、浮力の効果が系の特徴的スケールの大きさ

$$g \alpha \delta T \sim L U^2 \quad (1.16)$$

のままに残るという仮定です。ここで $L$ はゆらぎの特徴的長さです。

非圧縮近似の条件(1.13)、(1.14)の間にさらに

$$\frac{U^2}{c^2} \ll \alpha \delta T \ll 1 \quad (1.17)$$

を仮定すると、連続の式(1.1)は $\alpha \delta T$ のオーダーまでで

$$\alpha \frac{D(\delta T)}{Dt} = \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} \quad (1.18)$$

になります。この近似より、式 (1.2)、(1.7) は $\alpha\delta T$ のオーダーまででそれぞれ、

$$\begin{aligned} \frac{Dv_j}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0}(1 + \alpha\delta T)\frac{\partial}{\partial x_j}(p + \Phi) \\ &\quad + \frac{\eta(1 + \alpha\delta T)}{\rho_0}\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_\mu^2} + \frac{(\zeta + \frac{1}{3}\eta)\alpha}{\rho_0}\frac{D(\delta T)}{Dt} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\frac{D(\delta T)}{Dt} = \frac{K}{\rho c_v}\frac{\partial^2(\delta T)}{\partial x_\mu^2} - \frac{p\alpha}{\rho^2 c_v}\frac{D(\delta T)}{Dt} + \frac{2\eta}{\rho c_v}e_{\lambda\mu}^s e_{\lambda\mu}^s + \frac{\sigma Q}{\rho c_v} \quad (1.20)$$

となります。Boussinesq 近似の仮定より、 $g_0\alpha\delta T$ を残しつつ、 $\alpha\delta T \rightarrow 0$ の極限をとると、これらの式は

$$0 = \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} \quad (1.21)$$

$$\frac{Dv_j}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x_j}(p + \Phi) + g_0\alpha g_j(\mathbf{r})\delta T + \nu\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_\mu^2} \quad (1.22)$$

$$\frac{D(\delta T)}{Dt} = \kappa\frac{\partial^2(\delta T)}{\partial x_\mu^2} + \frac{\nu}{2c_v}\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\mu} + Q \quad (1.23)$$

に帰着します。ここで $\rho_0$ :流体の局所平衡密度、 $\nu = \eta/\rho_0$ :動粘性係数、 $\kappa = K/(\rho_0 c_v)$ :熱拡散係数、 $Q = (\sigma Q/\rho c_v)$ :内部熱源です。

式 (1.23) の右辺第2項は、歪速度テンソルによる流体の対流による熱散逸の寄与を与えます。この論文では、定積比熱 $c_v$ は十分に大きいので、対流の熱散逸からのエントロピー生成への寄与は無視できると仮定します。この結果、温度ゆらぎ $\delta T$ の従う方程式は

$$\frac{D(\delta T)}{Dt} = \kappa\frac{\partial^2(\delta T)}{\partial x_\mu^2} \quad (1.24)$$

となります。これは密度変化に対する仮定とは独立な、しかし、よくとられる仮定です。

## 1.2 系のモデルと基礎方程式の無次元化

本研究では、地球物理学的な状況を非常に単純化したものを、研究のモデルとして採用します。座標系は、球の中心を原点とする球座標をとります。(図 1.1参照)

まず流体は、半径 $R$ および $R+d$ の同心球面の間に閉じこめられていて、境界を通じた質量の出入りはないとします。流体の運動は Boussinesq 近似によって十分に記述できるものと仮定しますので、基礎方程式は、連続の式 (1.21)、運動量の式 (1.22) および熱伝導方程式 (1.24) の5つになります。

流体には球の中心方向に向かう重力加速度:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\Phi(r) = -g_0\gamma\left(\frac{r}{R}, \lambda_G\right)\frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.25)$$

がかかっているものとします。ここで $\Phi(r)$ :重力ポテンシャル、 $g_0$ : $r = R$ での重力加速度で、 $\gamma(r/R, \lambda_G)$ : $\gamma(1, \lambda_G) = 1$ をみたす関数、 $\lambda_G$ :重力場の $r$ 依存性をコントロールするパラメーターとします。ここで流体は基準状態として一様な密度 $\rho = \rho_0$ をもち、流体の受

ける重力加速度の  $r$  依存性は、流体の密度の力学的変化や温度変化による影響を被らないと仮定しています。

この流体に対する、Rayleigh-Bénard 問題としての条件は、流体中には熱源  $Q(r)$  があり、流体層には内殻において  $T_0 + \Delta T$ 、外殻において  $T_0$  (ただし  $T_0 \gg \Delta T$ ) の等方的な逆転温度勾配がかかっているとします。このとき流体にかかる温度  $T(r)$  は、方程式 (1.24) の解:

$$T(r) = CR \left(1 - \frac{R}{r}\right) + \int_R^r \left(\frac{R}{x}\right)^2 \int_R^x \left(\frac{y}{R}\right)^2 q \left(\frac{y}{R}\right) dy dx + T_0 + \Delta T \quad (1.26)$$

によって与えられます。ここで  $C$  は境界条件  $T(R+d) = T_0$  より決まる定数、 $q = RQ$  によって定義される関数です。

この系を、流体層の厚み  $d$ 、熱拡散係数  $\kappa$ 、内殻と外殻の温度差  $\Delta T$  を用いて無次元化します。したがって、系を支配する無次元パラメーターは、

$$\begin{aligned} \text{アスペクト比} & : R^* = \frac{R}{d}, \\ \text{(規格化された内殻半径)} & \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\text{Prandtl 数} : Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (1.28)$$

$$\text{Rayleigh 数} : Ra = \frac{g_0 \alpha \Delta T d^3}{\kappa \nu}, \quad (1.29)$$

です。球殻全体が一様に回転している場合や、内殻のみが回転している場合 (3章) を取り扱う場合には、球殻の回転の角速度  $\Omega$  を無次元化したパラメーター:

$$\text{Reynolds 数} : Re = \frac{R^2 \Omega}{\nu}$$

$$\text{Taylor 数} : Ta = \left(\frac{2R^2 \Omega}{\nu}\right)^2$$

を用います。

このとき無次元化された変数  $\mathbf{u}^* = (\kappa/d)\mathbf{u}$ ,  $\theta^* = \delta T/\Delta T$  の従う方程式は、連続の式:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (1.30)$$

Boussinesq 近似された Navier-Stokes 方程式:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^*\right] \mathbf{u}^* = -\nabla^* P^* + Pr Ra \gamma \left(\frac{r^*}{R^*}, \lambda_G\right) \theta^* \frac{\mathbf{r}^*}{r^*} + Pr \nabla^{*2} \mathbf{u}^*, \quad (1.31)$$

および熱伝導方程式:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^*\right] \theta^* = \tau^*(r) \mathbf{r}^* \cdot \mathbf{u}^* + \nabla^{*2} \theta^* \quad (1.32)$$

になります、ここで  $P^*$  は一般化圧力:

$$P^* = \left(\frac{\kappa}{d}\right)^2 \frac{p + \Phi}{\rho_0}$$

です。

最後に系が一定の角速度 $\Omega \mathbf{e}_z$ で一様に回転している場合を考えます。この系に乗ったときの運動量の方程式には、Coriolis 項:  $2\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z$ 、と遠心力項:  $\Phi_{cf} = \Omega(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z)^2$ が付け加わります。系が高速で回転している場合には、一般に見かけの重力として遠心力項を考慮にいれなくてはなりません。この項が無視できない条件は、

$$\frac{\Omega^2 R}{g_0} = \frac{PrTa}{Ra} \left(\frac{d}{R}\right)^3 \alpha \Delta T \quad (1.33)$$

によって与えられます。したがって摂動展開などによる安定性の解析などをする場合には、圧縮性をどの程度の大きさで無視したかの情報を考慮して、Boussinesq 近似と首尾一貫しているか確かめる必要があると思われます。しかし、一般には  $\alpha \Delta T \ll 1$  の仮定により、遠心力の寄与を安直に無視しています。この項を無視する場合、運動量の方程式には、単に Coriolis 項が付け加わるだけになります。

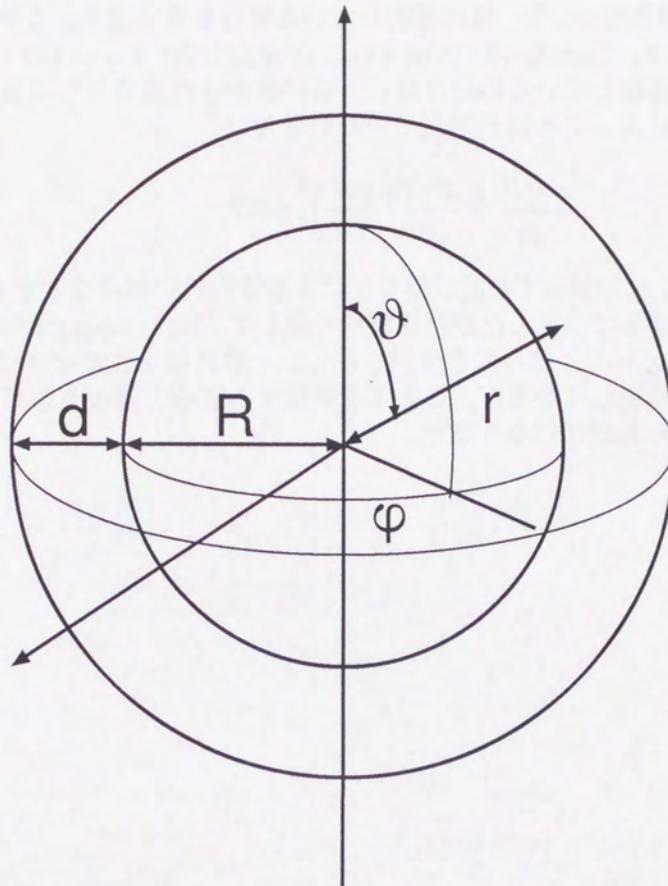


図 1.1. 系の概念図。流体は二つの球面の間に閉じこめられており、球の中心方向を向いた重力がかかっています。

figure.1.1

## 2 静止している球殻中での Bénard 不安定性

### 2.1 はじめに

静止している球殻中の流体の Bénard 不安定性は、球殻中の熱対流の研究の出発点として、重要な意味をもっています。系に Coriolis 力が働かない場合においてさえ、問題に対するアプローチの仕方は多様であり、様々な外場や境界条件に対するモデルを考えることができます。ここでは簡単化のために境界条件や外場の条件に対して球対称性を仮定します。この対称性のおかげで、線形安定性の問題に関して、 $SO(3)$  の既約表現を用いることができ、動径方向  $r$  のみに依存する問題として取り扱うことができるようになります。しかしなお重力場や温度場の  $r$  依存性についてさまざまなモデルを考えることができます。

さて、回転のない球や球殻中の静止流体の線形安定性解析は、古くから多くの研究がなされており、初期の研究のレビューとして Chandrasekhar の著名なモノグラフがあります (Chandrasekhar (1961))。このモノグラフでは、重力場として、内殻の内側には質量  $M$  の一様な物質があり、流体の平均密度  $\rho$  は  $r$  によらず一定であるものを採用しています。このとき、式 (1.25) の重力場の関数形  $\gamma$  は、

$$\gamma\left(\frac{r}{R}, \lambda_G\right) = (1 - \lambda_G) \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \lambda_G \frac{r}{R} \quad (2.1)$$

となります。ここで  $g_0$  は内殻上での重力加速度、 $\lambda_G$  は重力パラメーターで、それぞれ

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}, \quad \lambda_G = \frac{4\pi\rho R^3}{3M} \quad (2.2)$$

で定義されます。また温度場としては、一定の内部発熱  $Q$  の存在する場合を考えています。このとき熱伝導平衡状態にある温度場は一般に

$$T(r) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} - \beta_2 r^2 \quad (2.3)$$

となります。ここで  $\beta_2 = Q/6\kappa$  です。数値的な計算結果は特定の  $\lambda_G$  や  $\beta_1 = 0$  に対してのみ与えられています。

この問題は Joseph と Carmi によってさらに研究がなされました (Joseph and Carmi (1966))。彼らは、エネルギー法を用いて、線形問題が自己随伴でなければ、Bénard 対流への分岐は一般に亜臨界になることを示しました。エネルギー法、および弱非線形の摂動展開による解析は Joseph (1975) にレビューされています。しかしながら、彼らも特定の重力場と温度場のモデルの組み合わせしか調べていません。

系が球対称性を持っているので、線形解析の固有値は、 $(\vartheta, \varphi)$  方向に関しては  $SO(3)$  の既約表現によってつくられています。したがって、臨界モードは球面調和関数の主モード数  $l$  によって指定され、この方向には  $(2l+1)$ -重の縮退を起こしています。この縮退がどのように解けていくのかという問題に対しては、Busse と Riahi が弱非線形の定常問題としてアプローチしました (Busse (1975), Busse and Riahi (1982), Riahi and Busse (1988))。

しかしながら、臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  のアスペクト比、重力場、温度場への依存性については、これまでに系統的に調べられてはいませんでした。球殻が非常に「薄い」場合、すなわちアスペクト比が十分に大きい場合、この問題は平行平板間の熱対流の問題に漸近していくことが、期待されます。このことに関して、重力場が  $r^{-2}$  に比例し、流体内部に

熱源が存在しないときに、臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  がアスペクト比  $R$  に反比例して、平行平板間の臨界値 1707.8 に漸近していくことが、数値的に明らかになりました (Araki *et al.* (1993) 主論文 2)。この数値計算は速度や温度の攪乱に軸対称性を仮定していました。

2.2節で臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  のアスペクト比と重力場の形への依存性を、数値的な計算によって求め、「薄層」近似による漸近展開による解析との比較を行います。

2.3節では、エネルギー法の簡単なレビューを行います。

## 2.2 臨界 Rayleigh 数のアスペクト比への依存性

静止している球殻中の Bénard 問題では、系の球対称性から、臨界状態において選ばれる主モード数  $l$  と臨界 Rayleigh 数が、アスペクト比  $R$  のみの関数になっていなくてはなりません。さらにアスペクト比  $R$  が大きい極限を考えると、不安定性に対する球殻の曲率の影響は無視できるようになり、問題が無限に広がる平行平板間の Bénard 問題に帰着されることが、自然に期待されます。

この節では、線形安定性における臨界 Rayleigh 数の、アスペクト比の逆数  $\epsilon = 1/R$  に関する漸近展開を試み、重力場、温度場の形の臨界 Rayleigh 数への寄与を調べ、数値実験の結果との比較をします。

### 2.2.1 基礎方程式

この節では、重力のモデルとして、式 (2.1) をとります。基準の温度場は、内部発熱なしのモデル

$$T(r) = T_0 + R \left( \frac{R+1}{r} - 1 \right) \quad (2.4)$$

を用いることにします。

熱伝導定常状態のまわりで線形化された無次元の攪乱の方程式は、

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \Phi + Pr Ra g(r) \theta \mathbf{r} + Pr \Delta \mathbf{u}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \tau(r) + \Delta \theta, \quad (2.7)$$

となります。ここで

$$g(r) = \left[ (1 - \lambda_G) \left( \frac{R}{r} \right)^2 + \lambda_G \frac{r}{R} \right] \frac{1}{r},$$

$$\tau(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial T(r)}{\partial r} = \frac{R(R+1)}{r^3},$$

$\Phi$  は一般化圧力であり、 $Ra$  と  $Pr$  はそれぞれ Rayleigh 数と Prandtl 数です。一般化圧力  $\Phi$  を消去するために、式 (2.6) の両辺に  $\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times$  を演算し、非圧縮性の条件 (2.5) を用いて整理すると、

$$\Delta \left( \Delta - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \right) V = Ra \frac{g(r)}{R} L^2 \theta, \quad (2.8)$$

を得ます。ここで  $V = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} / R$  であり、 $L^2$  は

$$L^2 \equiv -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

で定義される作用素です。式 (2.7) はこの  $V$  を用いて、

$$\left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \theta = -\tau(r) R V \quad (2.9)$$

と整理できます。また境界条件は

$$r = R, R+1 \text{ において } V = \frac{\partial V}{\partial r} = \theta = 0 \quad (2.10)$$

と表されます。

ここで考えている系は球対称ですから、この線形固有値問題の固有関数の空間は、回転群  $SO(3)$  の既約表現、すなわち球面調和関数  $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$  の主モード数  $l$  ごとに張られる空間の直和に分解され、その固有値は  $l$  ごとに  $2l+1$  重に縮退していることが、演算子の詳細によらずに結論できます。ですから、 $V$  と  $\theta$  を

$$\begin{pmatrix} V(r, \vartheta, \varphi, t) \\ \theta(r, \vartheta, \varphi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(r, t) \\ \phi_2(r, t) \end{pmatrix} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (2.11)$$

と変換します。これらを、式 (2.8) と (2.9) に代入し、時間依存性を  $\exp(\sigma t)$  と仮定すると、 $\phi_1, \phi_2$  に関する次の方程式を得ます。

$$(\mathbf{L} - \sigma \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

ここで、演算子の定義は次のとおりです。

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & -RaL_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} Pr^{-1}L_{22} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

ここで、 $L_{ij}$  の具体的な表式は

$$\begin{aligned} L_{11} &= L_{22}L_{22}, \\ L_{22} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}, \\ L_{12} &= \frac{l(l+1)}{R^2} \left[ (1 - \lambda_G) \left( \frac{R}{r} \right)^3 + \lambda_G \right], \\ L_{21} &= \frac{R^2(R+1)}{r^3} \end{aligned}$$

です。この式が以下の解析の出発点になります。

### 2.2.2 薄層近似による漸近展開

アスペクト比が大きくなるにつれて、流体が閉じこめられた球殻は次第に「薄く」なり、曲率の影響がしだいに減っていきます。したがって、 $R \rightarrow \infty$  の極限で水平な平行平板間の Bénard 問題へと漸近していくことが期待されます。この節では、 $R$  が十分に大きいとして、 $\epsilon \equiv R^{-1}$  に関する漸近展開を試み、臨界 Rayleigh 数のアスペクト比依存性を  $O(\epsilon)$  までの範囲で調べます。

最も起こり易い対流では、対流セルの水平方向の大きさが流体層の厚みと同程度であることが期待されます。つまり、アスペクト比が大きくなるにつれて、最も不安定な  $Y_l^m$  の主モード数  $l$  も、 $R$  と同程度で発散していくはずですが、したがって  $R \rightarrow \infty$  の極限で、 $l/R$  が  $O(1)$  に留まることを仮定し、規格化波数  $k \equiv (l/R)$  を導入します。そしてこの極限においては、 $k$  を連続変数として扱います。

以下いわゆる安定性の交換、すなわち臨界状態  $Re(\sigma) = 0$  において、 $Im(\sigma) = 0$  を仮定します。 $\sigma = 0$  を式 (2.12) に代入することによって、Bénard の安定性問題は Rayleigh 数  $Ra$  に関する固有値問題へと還元されます。固有値  $Ra$  は、アスペクト比の逆数  $\epsilon$  と規格化波数  $k$  の関数であり、 $(\epsilon, k, Ra)$  の空間において中立曲面  $Ra = Ra(\epsilon, k)$  をなしています。ある特定のアスペクト比  $R$  に対する臨界 Rayleigh 数は、この相空間における中立曲面と平面  $\epsilon = 1/R$  の交線の最小値によって与えられます。したがって、臨界規格化波数  $k_c(\epsilon)$  と臨界 Rayleigh 数  $Ra_c(\epsilon)$  の間には、関係式

$$\frac{\partial Ra}{\partial k}(\epsilon, k_c(\epsilon)) = 0$$

が、成り立っています。

この章において、わたしたちは中立曲面の全体ではなく、 $\epsilon = 0$  のときの臨界 Rayleigh 数、 $Ra = Ra(0, k_c(0))$  の近傍での中立曲面のふるまいに興味を集中します。この点の近傍でのふるまいを調べるために  $k^{(0)} = k_c(0)$  とおいて、規格化波数を  $k = k^{(0)} + \epsilon k^{(1)}$  と展開します。このとき、 $Ra$  を  $\epsilon$ -展開すると

$$\begin{aligned} Ra(\epsilon, k) &= Ra(0, k^{(0)}) + \frac{\partial Ra}{\partial \epsilon}(0, k^{(0)})\epsilon + \frac{\partial Ra}{\partial k}(0, k^{(0)})k^{(1)}\epsilon \\ &\quad + \frac{\partial^2 Ra}{\partial \epsilon^2}(0, k^{(0)})\epsilon^2 + 2\frac{\partial^2 Ra}{\partial \epsilon \partial k}(0, k^{(0)})k^{(1)}\epsilon^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 Ra}{\partial k^2}(0, k^{(0)})k^{(1)2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

という表式を得ます。ここで右辺第 3 項は、臨界性の条件  $(\partial Ra / \partial k)(0, k^{(0)}) = 0$  より、 $k^{(1)}$  の値によらず恒等的にゼロになります。したがって  $k^{(1)}$  の決定には  $Ra$  の 2 階の導関数の情報が必要になります。目標を臨界 Rayleigh 数の  $O(\epsilon)$  までの表式を得ることに置いているので、規格化波数  $k$  を  $\epsilon$  のべきで展開する必要はなく、 $k^{(0)} + \epsilon k^{(1)}$  の代わりに  $k^{(0)}$  を計算に用いても構いません。

$\epsilon$ -展開を導入するために、座標を  $r$  から  $x$  へ、 $x = r - R$  によって変換します。このとき、 $x \in [0, 1]$  です。この変換によって、微分演算子は

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}$$

となり、 $r/R$ は

$$r/R = 1 + \epsilon x$$

と $\epsilon$ -展開されます。さらに全ての変数と演算子を

$$\begin{aligned} Ra &= Ra^{(0)} + \epsilon Ra^{(1)} + O(\epsilon^2), \\ \phi_i &= \phi_i^{(0)} + \epsilon \phi_i^{(1)} + O(\epsilon^2), \\ L_{ij} &= L_{ij}^{(0)} + \epsilon L_{ij}^{(1)} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

のように $\epsilon$ -展開します。

この展開式 (2.13) を式 (2.12) に代入し、 $\sigma = 0$  とおくと、 $O(\epsilon^0)$  では方程式は平行平板間の Rayleigh-Bénard 問題の式:

$$\mathbf{L}^{(0)} \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

を得ます。ここで

$$\mathbf{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} \Delta_0^2 & -Ra^{(0)}k^2 \\ 1 & \Delta_0 \end{pmatrix}$$

であり、 $\Delta_0 = D^2 - k^2$ 、ただし  $D = \partial/\partial x$  です。

この式に対する境界条件は式 (2.10) より

$$\phi_1^{(0)} = D\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)} = 0 \quad \text{at } x = 0 \text{ and } 1. \quad (2.15)$$

となります。この境界条件に対する臨界 Rayleigh 数  $Ra_c^{(0)}$  およびその臨界規格化波数  $k_c^{(0)} \equiv k_c(0)$  は、

$$Ra_c^{(0)} = 1707.8, \quad \text{and} \quad k_c^{(0)} = 3.1159 \quad (2.16)$$

となることが数値計算の結果わかっています。

さて  $\epsilon$ -展開を先に進める前に、随伴方程式について簡単にまとめておきましょう。これは、次の次数での可解条件を求めるために必要になってきます。線形問題 (2.14) の随伴問題を解くためには、関数の組  $\mathbf{X}$  に関する内積を定義しなくてはなりません。多くの論文や教科書 (例えば Chandrasekhar (1961)) においては、内積の導入が暗にもしくは曖昧な形でしかなされていません。ここでは次のような内積を導入します、

$$(\mathbf{X}, \mathbf{LX}) = \langle \phi_1^+ L_{11} \phi_1 \rangle + \langle \phi_1^+ L_{12} \phi_2 \rangle + K \langle \phi_2^+ L_{21} \phi_1 \rangle + K \langle \phi_2^+ L_{22} \phi_2 \rangle,$$

ここで、 $\langle \rangle$  は流体層全体、 $[0, 1]$  での積分、 $K$  はゼロでない任意の数です。この定数  $K$  は、多くの文献において、よく  $K = Ra^{(0)}$  と暗に定義されています。関数  $\phi_i^+(x)$  は  $\phi_i^{(0)}$  の随伴関数です。これらが式 (2.15) と同様の境界条件をみたしているとして、上の内積の定義より導かれる式 (2.14) の随伴方程式は、

$$\begin{pmatrix} \Delta_0^2 & K \\ -Ra^{(0)}k^2 & K\Delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

です。この方程式は、定数倍を除いて  $\phi_i^{(0)}$  と同じ固有関数を与えます、すなわち

$$\phi_1^+ \propto \phi_1^{(0)}, \quad \phi_2^+ \propto \phi_2^{(0)} \quad (2.18)$$

となります。<sup>1</sup> このとき、式 (2.14) は自己随伴であるといいます。ここでは計算の便宜上  $\phi_1^+ = \phi_1^{(0)}$  にとります。これによって同時に

$$K\phi_2^+ = -Ra^{(0)}k^2\phi_2^{(0)} \quad (2.19)$$

とおくこととなります。ここで、式 (2.12) のとき、すなわち重力場と温度場が  $r$  の関数のとき、随伴方程式は

$$\begin{pmatrix} L_{11} & KL_{21} \\ -RaL_{12} & KL_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

となるので、自己随伴の条件は

$$L_{12} \propto L_{21} \quad (2.21)$$

となります。

$\epsilon$ -展開を先に進めると、式 (2.12) は  $O(\epsilon)$  の次数において、

$$\mathbf{L}^{(0)}\mathbf{X}^{(1)} = -\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{X}^{(0)} \quad (2.22)$$

となります。ここで演算子は

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(1)} &= \begin{pmatrix} L_{22}^{(1)}\Delta_0 + \Delta_0L_{22}^{(1)} & -Ra^{(0)}L_{12}^{(1)} - Ra^{(1)}k^2 \\ L_{21}^{(1)} & L_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ L_{22}^{(1)} &= 2D - k + 2k^2x, \\ L_{12}^{(1)} &= k - 3(1 - \lambda_G)k^2x, \\ L_{21}^{(1)} &= 1 - 3x \end{aligned}$$

となります。この式 (2.22) は、右辺の非斉次項が随伴方程式 (2.17) の任意の解に対して直交するときのみ、解をもちます。いまの場合、この可解条件は

$$\begin{aligned} &\langle \phi_1^+ (L_{22}^{(1)}\Delta_0 + \Delta_0L_{22}^{(1)})\phi_1^{(0)} \rangle - Ra^{(0)}\langle \phi_1^+ L_{12}^{(1)}\phi_2^{(0)} \rangle \\ &- Ra^{(1)}k^2\langle \phi_1^+\phi_2^{(0)} \rangle + K\langle \phi_2^+ L_{21}^{(1)}\phi_1^{(0)} \rangle + K\langle \phi_2^+ L_{22}^{(1)}\phi_2^{(0)} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

となります。境界条件 (2.15) を用いて部分積分し、任意定数  $K$  を式 (2.19) を用いて消去すると、可解条件は

$$\begin{aligned} &(k^2 - k) \left( 2\|D\phi_1^{(0)}\|^2 + 2k^2\|\phi_1^{(0)}\|^2 + Ra^{(0)}k^2\|\phi_2^{(0)}\|^2 \right) \\ &- \left[ Ra^{(0)} \left( k - \frac{4 - 3\lambda_G}{2}k^2 \right) + Ra^{(1)}k^2 \right] \langle \phi_1^{(0)}\phi_2^{(0)} \rangle = 0 \end{aligned}$$

となります。ここで  $\|f\|^2 \equiv \langle f^2 \rangle$  です。この式変形において、臨界点  $Ra^{(0)} = Ra_c^{(0)}$ 、 $k = k_c^{(0)}$  では、式 (2.14) の解  $\phi_1^{(0)}$ 、 $\phi_2^{(0)}$  が、流体層の中心  $x = 1/2$  に関して偶関数である

<sup>1</sup>一般に  $(\phi_1^+, \phi_2^+) \propto (\phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)})$  にはならないことに注意。

ことを用いました。これより臨界 Rayleigh 数の 1 次の補正  $Ra_c^{(1)}$  は

$$Ra_c^{(1)} = Ra_c^{(0)} \left[ \frac{4 - 3\lambda_G}{2} - \frac{1}{k_c^{(0)}} + (k_c^{(0)} - k_c^{(0)2}) \frac{\|\phi_2^{(0)}\|^2}{\langle \phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)} \rangle} \right] - 2 \left( 1 - \frac{1}{k_c^{(0)}} \right) \frac{\|D\phi_1^{(0)}\|^2 + k_c^{(0)2} \|\phi_1^{(0)}\|^2}{\langle \phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)} \rangle}, \quad (2.24)$$

となります。この煩雑な積分は、都合の良いことに臨界点においてほとんどが互いに打ち消しあって、

$$Ra_c^{(1)} = \left( 1 - \frac{3}{2}\lambda_G \right) Ra_c^{(0)} \quad (2.25)$$

となることが、エネルギー法による変分問題を解くことにより示されます。したがって、臨界 Rayleigh 数の  $O(R^{-1})$  までの近似式は、

$$Ra_c = Ra_c^{(0)} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{2}\lambda_G \right) \frac{1}{R} \right]. \quad (2.26)$$

となります。

### 2.2.3 数値計算の結果

安定性の交換  $\sigma = 0$  を仮定すると、式 (2.12) は主モード数  $l$  ごとの  $Ra$  に関する固有値、 $Ra(l)$  を求める問題になります。この固有値問題を数値的に解くために、関数を多項式の有限級数で近似して、その展開係数のベクトルに関する計算に還元します。このとき、方程式中の微分演算子は係数ベクトルに作用する行列に還元され、その固有値を求めることになります。この章では、Chebyshev 多項式を用いて、関数  $\phi_1(x)$ 、 $\phi_2(x)$  を次のように有限級数で近似します。

$$\phi_1(x) = \sum_{i=1}^m \Phi_{1i} F_i(y), \quad \phi_2(x) = \sum_{i=1}^m \Phi_{2i} G_i(y), \quad (2.27)$$

ここで、 $y$  は  $y = 2x - 1$  で、区間を  $[-1, 1]$  に引き延ばすための変数変換、 $F_i(y)$ 、 $G_i(y)$  はそれぞれ

$$F_i(y) = T_i(y)(1 - y^2)^2, \quad G_i(y) = T_i(y)(1 - y^2),$$

ここで  $T_i(y)$  は  $i$  次の Chebyshev 多項式です。スペクトルの基底、 $\{F_i\}$ 、 $\{G_i\}$  は、各モードが境界条件 (2.15) を満たすような基底ですが、区間  $[-1, 1]$  上の正規直交な基底ではありません。コロケーション法の要点は、上記の関数が方程式 (2.12) が、区間  $[-1, 1]$  上の  $m$  個のコロケーション点において、満たされるように係数を決定することにあります。数値計算のパラメータは、 $m = 20$ 、 $0.25 \leq R \leq 30$  及び  $1 \leq l \leq 100$  です。アスペクト比  $R$  での臨界 Rayleigh 数  $Ra_c = Ra_c(R)$  は、 $R$  を固定した上での  $Ra(l)$  の最小値になります。

図 2.1 は、 $\lambda_G = 0$  のときの方程式 (2.12) の固有値  $Ra$  のアスペクト比  $R$  に対する依存性を、 $0.25 \leq R \leq 3$  および  $2 \leq l \leq 10$  の範囲で描いたものです。図の実践は偶数の  $l$  を、破線は奇数の  $l$  を示しています。この図において臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  は、これらの曲線の  $R$  ごとの最小値、すなわち曲線群の包絡線によって与えられます。図の一点鎖線は、

臨界 Rayleigh 数の漸近的表示、式 (2.26) で表される曲線です。臨界 Rayleigh 数は全ての  $l$  で、アスペクト比  $R \rightarrow \infty$  での臨界値 1707.8 よりも大きい値が得られました。これは、式 (2.26) より予想されていたふるまいです。一方、 $\lambda_G = 1$  での臨界 Rayleigh 数は、図 2.2 に示されるように、1707.8 よりも小さい臨界値を与えます。 $\lambda_G = 1$  のとき、式 (2.26) は  $R < 0.5$  において負の値を示しますが、もちろん、ここにおいては漸近解析は妥当しません。 $\lambda_G = 0$  と 1 の双方において、臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  を与えるモード数  $l$  が一つずつ入れ替わることが、はっきりと示されています。

図 2.3 は、 $\lambda_G = 0$  のときの臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  がその漸近値  $Ra_c^{(0)} = 1707.8$  からどれほどずれているかを、両対数で図示したものです。一点鎖線は漸近解析の結果 (式 (2.26)) を示しています。これより、漸近解析の結果は広い  $R$  の範囲において良い近似となっていることが示されています。図 2.4 は  $\lambda_G = 1$  での結果を示しています。こちらも、漸近解析の結果が数値計算の結果をよく説明しています。

$R$  を変化させたときの臨界モード  $\{\phi_i\}$  の概形を、図 2.5 に示しました。計算の結果、温度場および速度場の関数のピークは、内殻よりに現れることがわかりました。 $R$  が増えるにつれて、ピークは流体層の中心  $x = 0.5$  へと漸近し、その関数形は次第に左右対称になっていきます。この傾向より、系が平行平板の極限へと漸近していくことがあきらかです。一方、 $\lambda_G$  の変化に伴う臨界モードの関数形の変化は、とても小さく、 $R > 0.5$  程度以上ではほとんど区別がつかいませんでした。

図 2.6 は臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  の  $R$  および  $\lambda_G$  に対する依存性を  $0.25 \leq R \leq 10$  の範囲で描いたものです。ここでは  $\lambda_G$  を 0 から 1 まで変化させました。全ての  $\lambda_G$  において、 $R$  が増えるごとに臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  が 1707.8 へと漸近しています。 $R \geq 2$  において曲線群は、 $\lambda_G \geq 0.7$  に対しては 1707.8 より下に、 $\lambda_G \leq 0.6$  に対しては 1707.8 より上に出ており、このことは漸近解析の結果 (2.26) と良く一致しています。

#### 2.2.4 この節のまとめ

この節では、静止した球殻中での流体の Bénard 不安定性を、安定性交換の原理を仮定して調べました。

$O(R^{-1})$  までの漸近解析の結果、このオーダーまでの臨界 Rayleigh 数の補正には  $Ra_c^{(0)}$  と重力場の形の情報のみが必要であり、臨界波数  $k_c$  の一次の補正はいらなかったことがわかりました。臨界波数の補正には、 $Ra$  の中立曲面の 2 次の導関数が必要となります。

有限の  $R$  に対する固有値問題 (2.12) を数値的に解きました。 $R \rightarrow \infty$  に対する漸近解析を行い、 $O(R^{-1})$  までのオーダーまでの臨界 Rayleigh 数の表式を得ました。この表式は、数値計算との比較の結果、重力場の形に関するパラメータ  $\lambda_G$  に対する臨界 Rayleigh 数のふるまいをよく表現し、また小さな  $R$  に対しても良い近似値を与えます。その精度は、 $\lambda_G = 0$  のとき  $R > 1.5$  において 95% 以上、 $R > 4$  において 99% 以上の正確さです。一方  $\lambda_G = 1$  のときには、 $R > 2.8$  において 95% 以上、 $R > 4.5$  において 99% 以上の精度で臨界値を与えます。

臨界 Rayleigh 数は重力加速度の基準をどこに置くかによって、同じ状態に対しても、異なる値を与えます。ここで簡単に重力場の基準位置の違いによる臨界 Rayleigh 数の換算について考えましょう。 $r = R + x$  での重力加速度は

$$g_x = g_0 \left[ (1 - \lambda_G) \left( \frac{R}{R+x} \right)^2 + \lambda_G \left( \frac{R+x}{R} \right) \right]$$

なので、ここを基準にとった Rayleigh 数  $Ra_x$  はこれまでの Rayleigh 数  $Ra$  と式

$$Ra_x = Ra \left[ (1 - \lambda_G) \left( \frac{R}{R+x} \right)^2 + \lambda_G \left( \frac{R+x}{R} \right) \right]. \quad (2.28)$$

によって結ばれています。したがって、臨界 Rayleigh 数  $Ra_{cx}$  の  $O(R^{-1})$  までの表式は、

$$Ra_{cx} = Ra_c^{(0)} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{2} \lambda_G \right) (1 - 2x) \frac{1}{R} \right] \quad (2.29)$$

となります。この式より、重力加速度の基準位置を流体層の中心  $x = 0.5$  に置くと、 $\lambda_G$  の変化の臨界値への寄与が  $1/R$  のオーダーでは無くなることとなります。数値実験の結果を式 (2.28) に従って変換した結果、 $x = 0.5$  のときには、臨界 Rayleigh 数  $Ra_{cx}$  の 1707.8 からのずれは著しく減少しました。(図 2.7 参照)

ですから漸近解析の結果 (式 2.26) は、球殻中の流体層と平行平板間の流体層との安定性の比較の基準である、と安直に解釈することはできません。しかしながら、 $O(R^{-1})$  までの解析によって、臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  の  $R$  および  $\lambda_G$ 、さらには重力の基準点  $x$  への依存性が十分に再現できるので、この次数までの近似は、球殻中の流体の運動に対する境界の形の影響を十分によく反映しているのではないかと推測されます。

いまのところ、重力パラメーター  $\lambda_G = 2/3$ 、すなわち流体の密度が内殻内部の物質の密度の  $2/3$  倍になる点を境にして、臨界 Rayleigh 数のアスペクト比依存性の符号を変えるのか、ということへの明確な物理的理由は見つかっていません。しかしながら、弱非線形の解析のプロセスを考えると、次のような予想が出来るのではないかと思います。一般に重力場を

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g_0 \gamma (1 + \epsilon x, \lambda_G) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{say}),$$

とおきます、ここで  $r/R = 1 + \epsilon x$  です。この重力場の関数  $\gamma$  が

$$\gamma(1 + \epsilon x, \lambda_G) = 1 + \epsilon \gamma^{(1)}(x, \lambda_G) + O(\epsilon^2),$$

と  $\epsilon$ -展開できると仮定すると、臨界 Rayleigh 数の  $O(R^{-1})$  までの補正は  $\gamma^{(1)}(x, \lambda_G)$  によって決定されます。

### 2.2.5 付録: $Ra^{(1)}$ の表式について

$Ra_c^{(1)}$  の表式 (2.24) をまず次のように変形しておきます:

$$\begin{aligned} Ra_c^{(1)} &= \left[ 1 - \frac{3}{2} \lambda_G \right] Ra_c^{(0)} - \left( 1 - \frac{1}{k_c} \right) \frac{1}{\langle \phi_1 \phi_2 \rangle} \\ &\times \left[ 2 \| D \phi_1 \|^2 + 2 k_c^2 \| \phi_1 \|^2 + Ra_c^{(0)} k_c^2 \| \phi_2 \|^2 - Ra_c^{(0)} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle \right] \end{aligned}$$

この小節では  $\phi_i$  および  $k_c$  の上付きの  $(0)$  は単純化のために取り除きます。この小節の目標は、変分原理を用いて、上式の第 2 項が臨界点  $(Ra, k) = (Ra_c^{(0)}, k = k_c)$  では互いに打ち消しあってゼロになることを示すことです。

変分の汎関数を導出するために、エネルギー法 (次節参照) を用います。エネルギー法は Lyapunov 関数を構成することから出発するので、Chandrasekher の教科書の方法に比

べ、変分の物理的な意味付けが式の上から明瞭になるという利点があります。時間発展に対する不安定モードの指数関数的成長という仮定を外すと、式 (2.14) は

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} (D^2 - k^2) \phi_1 = (D^2 - k^2)^2 \phi_1 - Ra^{(0)} k^2 \phi_2, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \phi_1 + (D^2 - k^2) \phi_2. \end{cases} \quad (2.30)$$

となります。この式より Lyapunov 関数  $E(t)$  を

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{Pr} \left( \|D\phi_1\|^2 + k^2 \|\phi_1\|^2 \right) + Ra^{(0)} k^2 \|\phi_2\|^2 \right], \quad (2.31)$$

と構成します。この関数の時間発展は

$$\frac{dE(t)}{dt} = -RaI_1 \left( \frac{1}{Ra} - \frac{I_2}{I_1} \right), \quad (2.32)$$

によって与えられます。ここで積分  $I_1, I_2$  は

$$I_1 = \|D^2 \phi_1\|^2 + 2k^2 \|D\phi_1\|^2 + k^4 \|\phi_1\|^2 + Rak^2 \|D\phi_2\|^2 + Rak^4 \|\phi_2\|^2, \quad (2.33)$$

$$I_2 = 2k^2 \langle \phi_1 \phi_2 \rangle. \quad (2.34)$$

によって与えられます。

安定性の十分条件は

$$\frac{1}{Ra} - \frac{1}{Ra_E} \geq 0 \quad (2.35)$$

によって与えられます。ここで

$$\frac{1}{Ra_E} = \max_{\phi_1, \phi_2, k} \frac{I_2}{I_1}$$

です。Chandrasekhar の教科書との相違は、波数  $k$  をパラメーターとして捉え、 $k$  に対する変分を含んでいる点にあります。線形問題が自己随伴な場合には、線形での臨界値とエネルギー法による安定性の十分条件とが一致するので (2.3節参照)、この問題の場合には、この方法による解析の結果は、非線形安定性まで含んでいます。 $\phi_1, \phi_2, k$  に関する変分は、

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{I_2}{I_1} \right) &= \frac{1}{I_1} \left( \delta I_2 - \frac{I_2}{I_1} \delta I_1 \right), \\ &= \frac{1}{I_1} \left( \delta I_2 - \frac{1}{Ra_E} \delta I_1 \right), \\ &= -\frac{1}{Ra_E I_1} (\delta I_1 - Ra_E \delta I_2). \end{aligned}$$

によって与えられます。最後のかっこの中の変分は

$$\begin{aligned} &\delta I_1 - Ra_E \delta I_2 \\ &= \langle \delta \phi_1 \left( 2D^4 \phi_1 - 4k^2 D^2 \phi_1 + 2k^4 \phi_1 - 2Rak^2 \phi_2 \right) \rangle \\ &\quad + \langle \delta \phi_2 \left( -2Rak^2 \phi_1 - 2Rak^2 D^2 \phi_2 + 2Rak^4 \phi_2 \right) \rangle \\ &\quad + \delta k \left[ 4k \|D\phi_1\|^2 + 4k^3 \|\phi_1\|^2 - 4Rak \langle \phi_1 \phi_2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + 2Rak \|D\phi_2\|^2 + 4Rak^3 \|\phi_2\|^2 \right]. \end{aligned}$$

となります。第1項、第2項からは、線形安定性の式(2.14)が出ます。したがって、これらより中立曲線  $Ra = Ra(k)$  が求まります。第3項より、中立曲線上の  $k$  に関する極小の条件が得られます。

したがって、中立安定曲線の極小  $(Ra, k) = (Ra_c^{(0)}, k_c)$  では、次の連立方程式が成り立ちます。

$$\begin{aligned} 0 &= D^4\phi_1 - 2k_c^2 D^2\phi_1 + k_c^4\phi_1 - Ra_c^{(0)}k_c^2\phi_2 \\ 0 &= \phi_1 + D^2\phi_2 - k_c^2\phi_2 \\ 0 &= 2\|D\phi_1\|^2 + 2k_c^2\|\phi_1\|^2 - 2Ra_c^{(0)}\langle\phi_1\phi_2\rangle + Ra_c^{(0)}\|D\phi_2\|^2 + 2Ra_c^{(0)}k_c^2\|\phi_2\|^2 \end{aligned}$$

3番目の方程式を次のように変形します。

$$\begin{aligned} 0 &= 2\|D\phi_1\|^2 + 2k_c^2\|\phi_1\|^2 - Ra_c^{(0)}\langle\phi_1\phi_2\rangle + Ra_c^{(0)}k_c^2\|\phi_2\|^2 \\ &\quad - Ra_c^{(0)}\langle\phi_1\phi_2\rangle + Ra_c^{(0)}\|D\phi_2\|^2 + Ra_c^{(0)}k_c^2\|\phi_2\|^2 \\ &= 2\|D\phi_1\|^2 + 2k_c^2\|\phi_1\|^2 - Ra_c^{(0)}\langle\phi_1\phi_2\rangle + Ra_c^{(0)}k_c^2\|\phi_2\|^2 \\ &\quad - Ra_c^{(0)}\langle(\phi_1 + D^2\phi_2 - k_c^2\phi_2)\phi_2\rangle \end{aligned}$$

後半部分は、線形安定の式より零なので、前半の4項の和は零になります。

だから式(23)は厳密に

$$Ra_c^{(1)} = \left[1 - \frac{3}{2}\lambda_G\right] Ra_c^{(0)}$$

であり、臨界 Rayleigh 数の1次までの表式は

$$Ra_c = Ra_c^{(0)} + \left[1 - \frac{3}{2}\lambda_G\right] Ra_c^{(0)} R^{-1}$$

となります。

## 2.3 安定性の十分条件について

この節では、静止している球殻中の Bénard 問題に対する安定性の十分条件について、エネルギー法と線形問題との比較を通じて考察します。

エネルギー法の要点は、攪乱  $\mathbf{u}$ ,  $\theta$  の時間発展の方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \Phi + Pr Ra g(r) \theta \mathbf{r} + Pr \Delta \mathbf{u}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \tau(r) - \mathbf{u} \cdot \nabla \theta + \Delta \theta, \quad (2.37)$$

より、Lyapunov 関数 (「エネルギー」)

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \lambda Pr \|\theta\|^2$$

( $\lambda$  は正の結合定数) を構成し、系が安定である十分条件、

$$\frac{dE}{dt} \leq 0$$

をみたく  $Ra$  の範囲を変分によって求めることにあります (Joseph(1975), Straughan(1992))。

ここで構成された Lyapunov 関数,  $E(t)$  は、熱力学的に考えると過剰エントロピー生成  $\delta^2 Z$  (Gransdorff and Prigogine(1971)) に他なりません。したがってこの場合、エネルギー法は非平衡系での Gransdorff-Prigogine の安定性の素直な拡張 (有限振幅の攪乱に対する安定性) になっています。

もしも、重力場のモデルと温度場のモデルが同じ関数形をもつならば、線形安定性問題における作用素は自己随伴になります。この場合、エネルギー法による安定性の十分条件と、線形問題の臨界が一致することが、簡単に示せます。つまり、線形問題が自己随伴ならば、分岐は超臨界 (supercritical bifurcation) となります。

そうでない場合は、分岐は一般に亜臨界 (subcritical bifurcation) となります。この場合、弱非線形の摂動展開によって、分岐が双方向 (double-sided bifurcation) になります。

### 2.3.1 エネルギー法による安定性の十分条件

考えている流体は一様で、領域  $D$  内に閉じこめられているとします。無次元の方程式において、便宜上さらに  $\theta$  を  $\sqrt{Ra}\theta \rightarrow \theta$  によって変数変換しておきますと、これらの式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \Phi + Pr \mathcal{R} g(r) \theta \mathbf{r} + Pr \Delta \mathbf{u}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathcal{R} \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \tau(r) - \mathbf{u} \cdot \nabla \theta + \Delta \theta, \quad (2.39)$$

となります。ここで  $\mathcal{R} = \sqrt{Ra}$  です。この系の安定性を粘着境界条件:

$$\text{境界 } \partial D \text{ において、} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \theta = 0 \quad (2.40)$$

のもとで解くことを考えます。このとき Lyapunov 関数の時間発展の方程式は、

$$\frac{dE}{dt} = -Pr \mathcal{R} I_1 \left[ \frac{1}{\mathcal{R}} - \frac{I_2}{I_1} \right] \quad (2.41)$$

となります。ここで

$$E = \frac{1}{2} (\|\mathbf{u}\|^2 + \lambda Pr \|\theta\|^2), \quad (2.42)$$

$$I_1 = \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \lambda \|\nabla \theta\|^2, \quad (2.43)$$

$$I_2 = \langle g\theta \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \rangle + \lambda \langle \tau\theta \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \rangle \quad (2.44)$$

であり、 $\langle f \rangle$  は領域  $D$  での関数  $f$  の体積積分、 $\|f\|^2 = \langle f^2 \rangle$  です。式 (2.41) を導く際に、境界条件 (2.40) を用いて部分積分をしました。

この Lyapunov 関数より導かれる安定性の十分条件の表式は

$$\frac{1}{\mathcal{R}} - \frac{1}{\mathcal{R}_E} > 0 \quad (2.45)$$

となります。ここで  $\mathcal{R}_E$  はエネルギー法による臨界 Rayleigh 数の平方根で、

$$\frac{1}{\mathcal{R}_E} = \max_{\mathcal{H}, \lambda} \frac{I_2}{I_1} \quad (2.46)$$

によって与えられます。ここで  $\mathcal{H}$  は変分の許容される関数空間を表しています。ここで極大条件:  $\delta(I_2/I_1) = 0$  の左辺の変分は次のように与えられます:

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{I_2}{I_1} \right) &= \frac{1}{I_1} \left( \delta I_2 - \frac{I_2}{I_1} \delta I_1 \right), \\ &= \frac{1}{I_1} \left( \delta I_2 - \frac{1}{\mathcal{R}_E} \delta I_1 \right), \\ &= -\frac{1}{\mathcal{R}_E I_1} (\delta I_1 - \mathcal{R}_E \delta I_2). \end{aligned}$$

上式最後の行の変分は、

$$\begin{aligned} \delta I_1 - \mathcal{R}_E \delta I_2 &= \langle \delta \mathbf{u} (-2\Delta \mathbf{u} - 2\mathcal{R}_E L_E \theta \mathbf{r} + 2\pi(r)) \rangle \\ &\quad + \langle \delta \theta (-2\lambda \Delta \theta - 2\mathcal{R}_E L_E \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \rangle + \delta \lambda (\|\theta\|^2 + \mathcal{R} \langle \tau\theta \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \rangle) \end{aligned}$$

です。ここで  $L_E(r, \lambda) = \frac{1}{2}(g(r) + \lambda\tau(r))$  です。 $\mathbf{u}$  に関する変分をとる際に、非圧縮性の条件を課すために

$$\langle 2\pi(r) \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle = 0 \quad (2.47)$$

を加えました。ここで  $r$  の任意スカラー関数  $\pi(r)$  は 'Lagrange の未定定数' です。

この変分により与えられる Euler-Lagrange 方程式は

$$\Delta \mathbf{u} + \mathcal{R}_E L_E \theta \mathbf{r} = \nabla \pi(\mathbf{r}), \quad (2.48)$$

$$\lambda \Delta \theta + \mathcal{R}_E L_E \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.49)$$

$$\|\theta\|^2 + \mathcal{R}_E \langle \tau\theta \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (2.50)$$

および非圧縮性の条件  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  となります。この線形方程式において重要なことは、交差項における演算子が対称化されているということです。最後の積分式 (2.50) は式 (2.49) を用いて

$$\lambda = \frac{\langle g\theta \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \rangle}{\langle \tau\theta \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \rangle} \quad (2.51)$$

と書き直せます。この式は臨界値を評価するための結合定数 $\lambda$ の最適値を評価する式です。ここで注意しなくてはならないことは、この式の右辺は一般に結合定数 $\lambda$ の関数になっていることです。したがって、臨界値 $\mathcal{R}_E$ を求める問題は $\mathcal{R}$ に関する固有値問題 (2.48), (2.49) を、拘束条件 (2.51) のもとで解くことに帰着します。

さて、ここで線形問題が自己随伴である場合について、エネルギー法による安定性の十分条件と、線形安定性の与える臨界値との比較をしましょう。2.2.2において既に示したように、自己随伴の条件は $g(r) \propto \tau(r)$ によって与えられるので、ここでは

$$g(r) = K\tau(r) \quad (2.52)$$

とします。ここで $K$ は正の定数とします。このときエネルギー法の結合定数 $\lambda$ の最適値は式 (2.51) により

$$\lambda = K \quad (2.53)$$

となります。これを式 (2.48), (2.49) に代入すると、

$$\Delta \mathbf{u} + \mathcal{R}_E g(r) \theta \mathbf{r} = \nabla \pi(\mathbf{r}), \quad (2.54)$$

$$\Delta \theta + \mathcal{R}_E \tau(r) \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.55)$$

となり、 $Ra = \mathcal{R}_E^2$ とおくことによって、安定性交換の原理を仮定した線形安定性の方程式に帰着します。

以上の議論より、線形化された安定性問題が自己随伴であるならば、エネルギー法による安定性の十分条件と、線形安定性による臨界の値が一致することが、示されました。したがって、線形問題が自己随伴となる Benard 問題ならば、分岐のふるまいは超臨界 (supercritical) となることが結論されます。

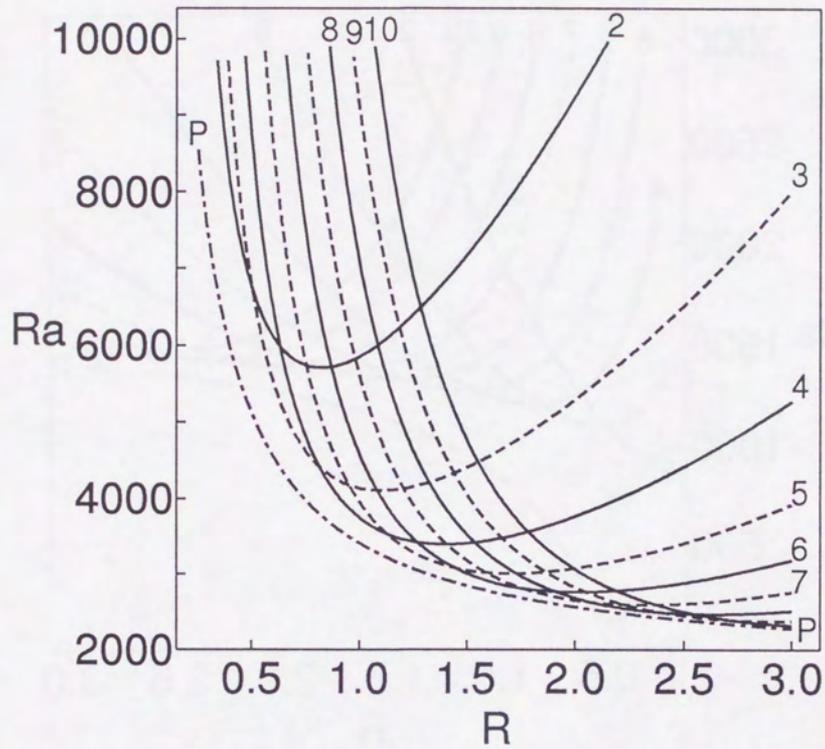


図 2.1.  $\lambda_G = 0$  のときの、主モード数  $l$  ごとの中立安定曲線。実線は偶数  $l$ 、破線は奇数  $l$  のモード。それぞれの線の端に付した数字は  $l$  の値。臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  はこれらの曲線群の包絡線によって与えられる。一点鎖線は式 (2.26) より求められた曲線。

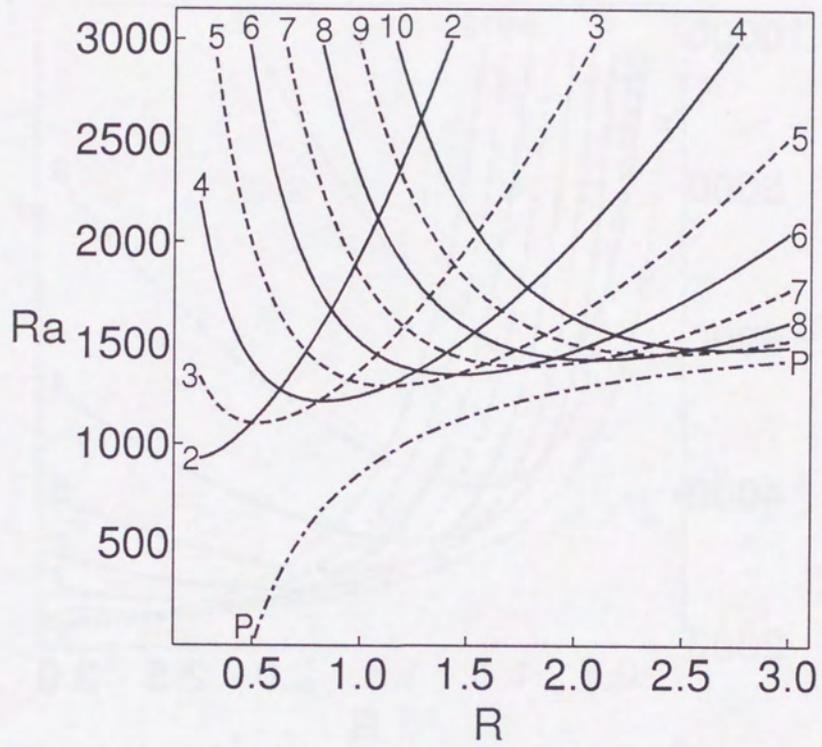


図 2.2.  $\lambda_G = 1$  のときの、主モード数  $l$  ごとの中立安定曲線。詳細は図 2.1 に同じ。

figure.2.2

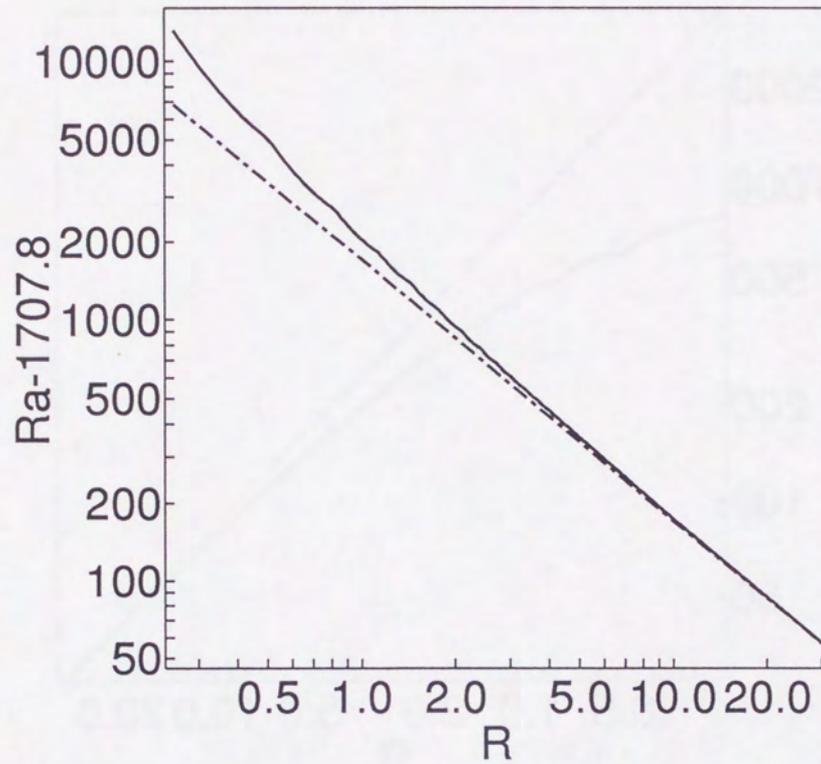


図 2.3.  $\lambda_G = 0$  のときの臨界 Rayleigh 数のアスペクト比依存性。平行平板間での臨界値からのずれ  $Ra_c - 1707.8$  の対数をプロットしてある。一点鎖線は式 (2.26) より求められた直線。

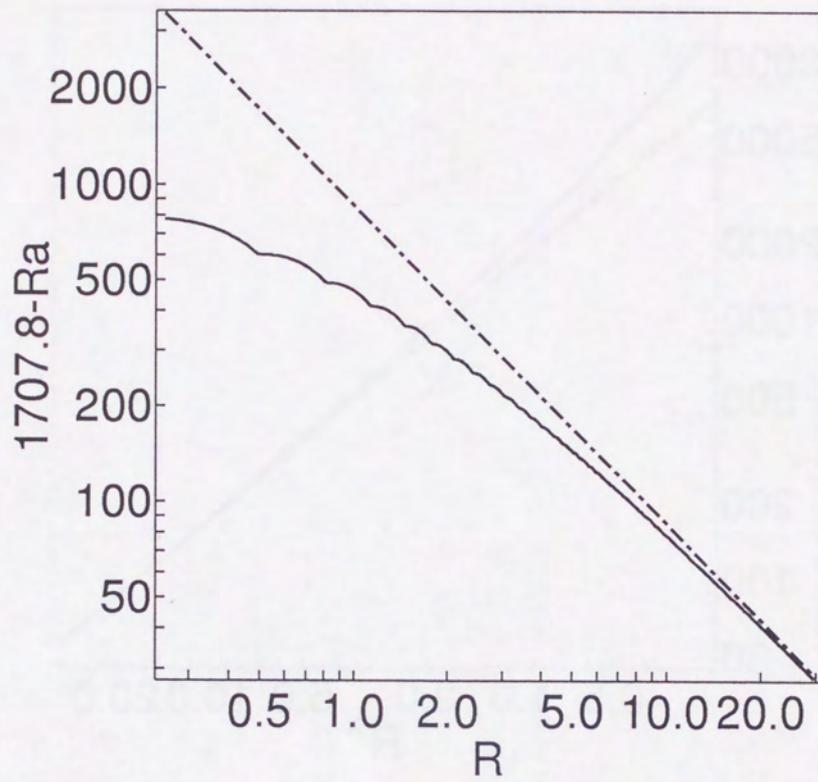


図 2.4.  $\lambda_G = 1$  のときの臨界 Rayleigh 数のアスペクト比依存性。詳細は図 2.3に同じ。

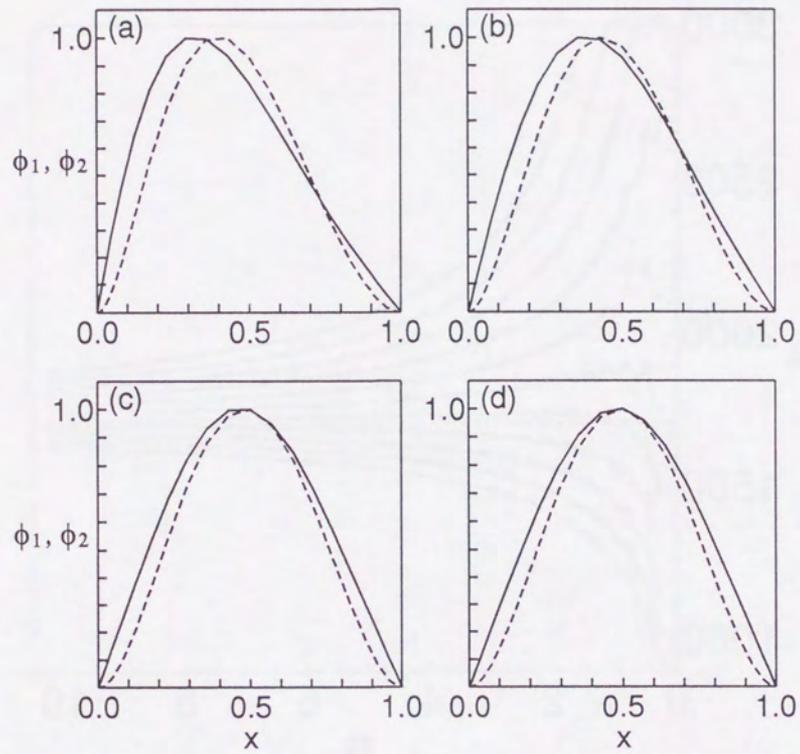


図 2.5. 式 (2.12) の固有関数のアスペクト比による変化。 $\lambda_G = 0$  のとき。実線: 温度の攪乱,  $\phi_2$ ; 破線: 速度の攪乱,  $\phi_1$ . (a)  $R = 0.5$ , (b)  $1.0$ , (c)  $5.0$  and (d)  $10.0$ . 各関数はおのおのその最大値で規格化されている。

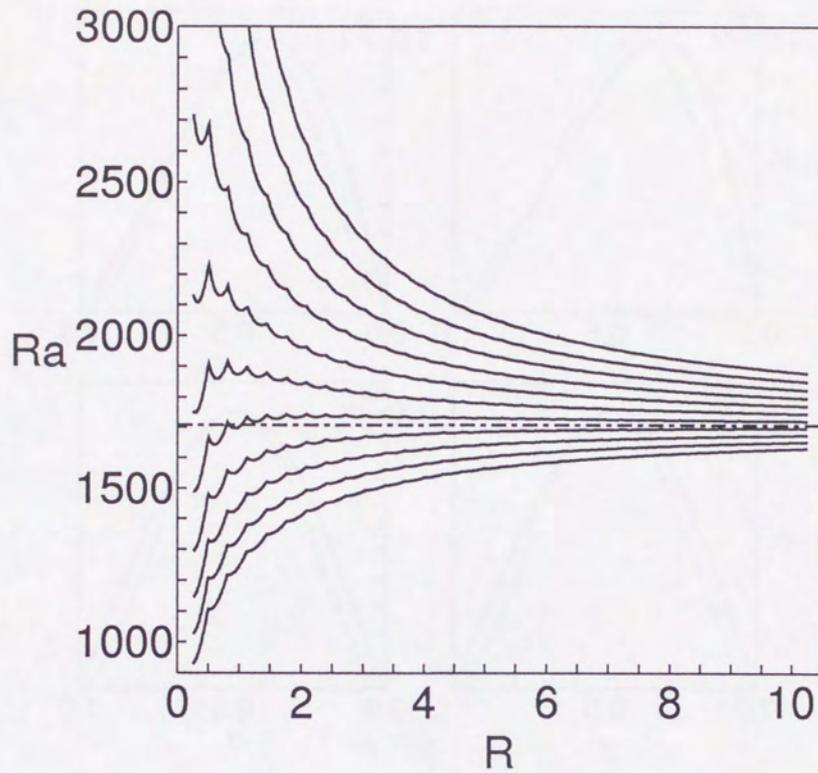


図 2.6.  $0 \leq \lambda_G \leq 1$  の範囲で  $\lambda_G$  を変えたときの臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  のアスペクト比  $R$  依存性。各曲線は  $\lambda_G$  を固定したときの  $Ra = Ra(R, \lambda_G)$ 。一番上が  $\lambda_G = 0$  の場合。曲線が一つ下がるごとに  $\lambda_G$  が 0.1 ずつ増えていく。一番下が  $\lambda_G = 1$  の場合。

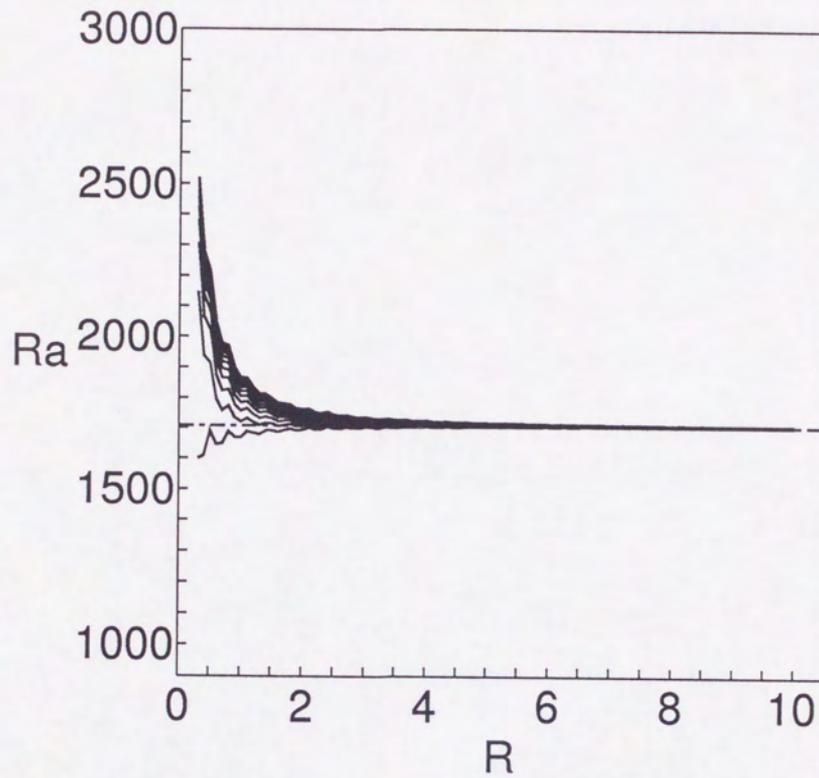
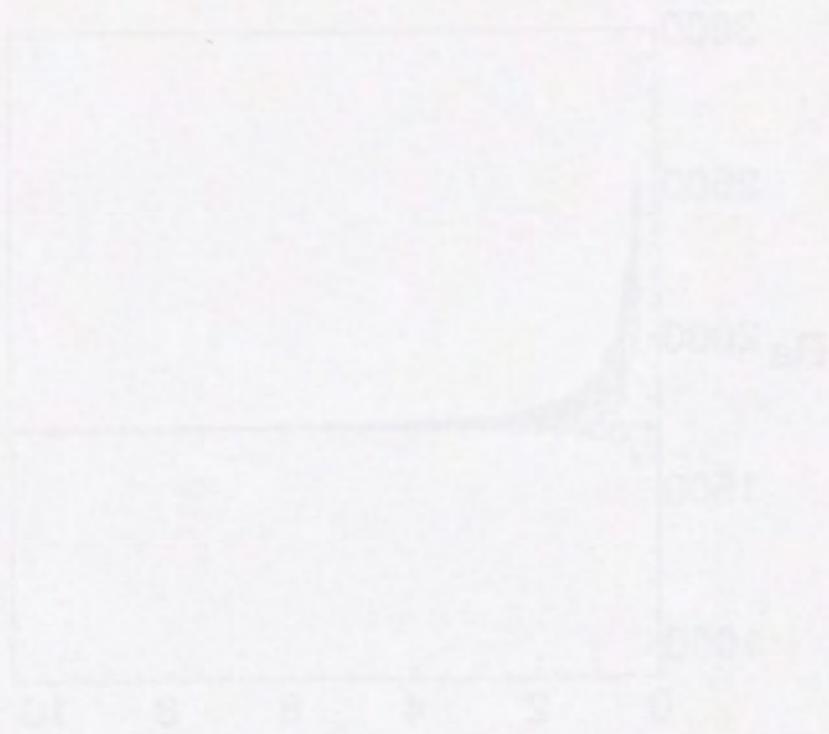


図 2.7. 重力加速度の基準を  $x = 0$  から  $x = 0.5$  へと変えたときの臨界 Rayleigh 数  $Ra_{cx}$  の  $\lambda_G$ ,  $R$  に対する依存性。図 2.6 の結果を式 (2.28) にしたがって換算した。曲線の順番は図 2.6 と逆になっており、一番下が  $\lambda_G = 0$  の場合で、一番上が  $\lambda_G = 1$  の場合。



The graph shows the relationship between the variables X and Y. The Y-axis represents the dependent variable, ranging from 1000 to 3000. The X-axis represents the independent variable, ranging from 0 to 6. The curve indicates that as X increases, Y also increases, with a significant increase in Y for small increases in X near the origin.

### 3 球殻 Taylor-Couette 流の Bénard 不安定性

#### 3.1 はじめに

熱対流に対する回転の効果を調べるための、もう一つの極端なモデルとして、境界の球面が異なる角速度で回転している場合を考える事ができます。ここでは、回転軸はそろっていることを仮定します。この場合には、流体層に温度勾配がかかっていなければ、問題は球殻 Taylor-Couette 問題に帰着します。この問題に対しては、地球物理学的・工学的な興味から、これまでに実験、および数値シミュレーションによる研究がなされてきました。熱対流に対する差分回転の影響を考察する前に、球殻 Taylor-Couette 流の性質を概観することにしましょう。

球殻 Taylor-Couette 流は、境界が曲がっているために、平行平板間の Taylor-Couette 流と異なり、一様平行流 (Stokes 解、 $\Delta(\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  を満たす解) に対応する状態が存在しません。Navier-Stokes 方程式の非線形項のために、Reynolds 数が小さくとも有限であれば、南北両半球にそれぞれひとつずつ大きな対流ロールが存在する解 (0-渦解) を形成します。(3.2.4節参照)

球殻 Taylor-Couette 問題における、この解の不安定化および分岐は、実験の結果により、この流体層のアスペクト比が  $R > 4$  を満たす場合にのみ生じます (Belyaev, Monakhov and Yavorskaya (1978))。数値計算によるアプローチは、Marcus and Tuckerman により分岐の詳しいふるまいが  $R = 5.5$  の場合に調べられました (Marcus and Tuckerman (1987))。数値計算の結果、多くのことが判明していますが、その内のいくつかを以下に挙げます。安定な解として 0-渦、1-渦、2-渦の解が存在する。0-渦/1-渦、1-渦/2-渦の共存するパラメータ領域が存在する。共存領域での解の選択には、履歴的な現象が存在する。南北反対称なモードによる不安定化の過程において、ダイナミックな渦の再編成の過程が存在する。

流体層に逆転温度勾配による不安定密度成層があるときには、事情が異なります。ここでは、流体にかかる重力は球殻の中心方向を向いていると仮定して、この 0-渦解に対する Bénard 問題を数値的に調べました。

#### 3.2 基礎方程式と数値解法

##### 3.2.1 基礎方程式と境界条件

この章では、重力を  $r^{-2}$  に比例する形、

$$\gamma\left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (3.1)$$

に、温度場の基準状態を内部発熱を持たないときの拡散平衡解

$$T_{st}(r) = T_0 + R\left(\frac{R+1}{r} - 1\right) \quad (3.2)$$

に限定して考えます。(以下、諸量は無次元化されたものです。) また、Taylor-Couette 問題としては、内殻が特定の軸 (これを以下用いる球座標系における  $\theta = 0$  および  $\theta = \pi$  とります) のまわりに角速度  $\Omega$  で回転しており、外殻は静止しているとします。したがって、基礎方程式を次の境界条件の下で解くことになります:

$$\begin{aligned} r = R \text{ において、} & \quad \mathbf{u} = R\Omega \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi, \quad T = T_0 + 1, \\ r = R + d \text{ において、} & \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad T = T_0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで  $e_\varphi$  は系の各点における  $\varphi$ -方向の単位ベクトルです。

この章ではさらに、変数  $\mathbf{u}$ ,  $T$  が内殻の回転軸に関して軸対称、 $\partial/\partial\varphi \equiv 0$  であると仮定します。このとき、速度  $\mathbf{u}$  は南北方向流れ関数  $\Psi(r, \vartheta)$  および東西方向流れ関数  $\omega(r, \vartheta)$  を用いて、

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad u_\vartheta = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad u_\varphi = \frac{\omega}{r \sin \vartheta} \quad (3.4)$$

とあらわすことができます。この変数は  $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0$  を自動的に満たします。これを用いると、無次元化された運動方程式および熱伝導方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^2 \Psi}{\partial t} = & \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial D^2 \Psi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial D^2 \Psi}{\partial r} \right) - \frac{2D^2 \Psi}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) \\ & - \frac{2\omega}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) + Pr Ra \gamma(r) \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \\ & + Pr D^2 D^2 \Psi, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + Pr D^2 \omega, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial T_{fl}}{\partial t} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial T_{fl}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial T_{fl}}{\partial r} \right) + \frac{R(R+1)}{r^4 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} + \Delta T_{fl} \quad (3.7)$$

となります、ここで  $T_{fl}$  は平衡解のまわりの温度場の攪乱で、

$$T(r, \vartheta, t) = T_{st}(r) + T_{fl}(r, \vartheta, t)$$

を満たします。また、これらの方程式に現れる演算子の定義は次のとおりです：

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad (3.8)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \quad (3.9)$$

これらの方程式がこの章での解析の出発点になります。

### 3.2.2 系の対称性と解の分類

軸対称系の基礎方程式 (3.5)(3.6)(3.7) は、境界条件 (3.3) において内殻の回転方向を固定しなければ、南北に関する対称性より解は一般に4重に縮退しています、つまり

$$(\Psi_0(\vartheta), \omega_0(\vartheta), T_0(\vartheta))$$

がこれらの方程式の解である場合に、

$$\begin{aligned} (\Psi_1(\vartheta), \omega_1(\vartheta), T_1(\vartheta)) &= ( -\Psi_0(\pi - \vartheta), \quad \omega_0(\pi - \vartheta), \quad T_0(\pi - \vartheta) ), \\ (\Psi_2(\vartheta), \omega_2(\vartheta), T_2(\vartheta)) &= ( \quad \Psi_0(\vartheta), \quad -\omega_0(\vartheta), \quad T_0(\vartheta) ), \\ (\Psi_3(\vartheta), \omega_3(\vartheta), T_3(\vartheta)) &= ( -\Psi_0(\pi - \vartheta), \quad -\omega_0(\pi - \vartheta), \quad T_0(\pi - \vartheta) ) \end{aligned} \quad (3.10)$$

の三つの組も同時に解となります。ωの反転は、Ω = 0のときの解、もしくは内殻の回転方向の反転に伴うものと考えます。したがって、南北の反転に関する作用素をΓと表現すると、ΓのΨ, ω, Tに関する作用は

$$\Gamma \begin{pmatrix} \Psi(\vartheta) \\ \omega(\vartheta) \\ T(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Psi(\pi - \vartheta) \\ \omega(\pi - \vartheta) \\ T(\pi - \vartheta) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

とならなくてはならないことが判ります。

ここで注意すべきことは、一般に東西方向の流れを表す関数ωの符号は任意にとることができることです。これは、回転の効果が内殻での境界条件としてのみ入り、基礎方程式自身には南北の方向に関する区別を持たないことの結果です。これは、系が一様回転をしている系との大きな違いになっています。そのような系では、南北の反転に関する非対称性が Coriolis 項によって基礎方程式の中に表現されています。ωの反転対称性より、この章において考察されている軸対称系は、基礎方程式の段階では、O(2)対称性を持っていると結論されます。これに対し一様回転系にはSO(2)の対称性しかありません。

南北反転の変換Γ: ϑ → π - ϑに関する対称性で、流れ関数Ψ, ω、温度Tで構成される関数空間(以下、Hと書くことにします)を分解します。作用素ΓはΓ<sup>2</sup> = id (idは恒等写像)を満たすので、Γの固有値は±1になります。したがって、解の空間を、このそれぞれの固有値に対応する次の二つのモードよりなる部分空間に分解します。

1. 対称モード H<sup>+</sup> (固有値 1): 速度場 **u** および温度場 T が赤道面に対して対称。

$$\begin{pmatrix} \Psi_s(\vartheta) \\ T_s(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Psi_s(\pi - \vartheta) \\ T_s(\pi - \vartheta) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\omega_s(\vartheta) = \omega_s(\pi - \vartheta) \quad (3.13)$$

2. 反対称モード H<sup>-</sup> (固有値 -1): 速度場 **u** および温度場 T が赤道面に対して反対称。

$$\begin{pmatrix} \Psi_a(\vartheta) \\ T_a(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_a(\pi - \vartheta) \\ -T_a(\pi - \vartheta) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\omega_a(\vartheta) = -\omega_a(\pi - \vartheta) \quad (3.15)$$

これらの部分空間 H<sup>+</sup>, H<sup>-</sup> は、回転のない場合および対称モード H<sup>+</sup> に属する解の線形安定性解析の場合には、各々独立に空間を張っていますが、非線形のモード間相互作用が入ると、対称モード H<sup>+</sup> のみが独立した部分空間をなします。というのも対称モードに属する解は、それ自身が反転関係(3.10)を自動的に満たしているからです。この場合、解の縮退はωの符号に関するものだけになります。一方、反対称モード H<sup>-</sup> は非線形段階では、自分自身と相互作用し対称モードに属する成分を生じるので、閉じた部分空間ではなくなります。

ωの発展方程式(3.6)はωに関して線形の方程式なので、Ψが対称モードに属するならば、ωの空間は、対称・反対称いずれのモードも、非線形段階において独立した部分空間になっています。しかし、内殻が有限の角速度Ωで回転している場合には、境界条件が対称モードに属するので、対称モードのみがωの閉じた部分空間になります。

以下の考察において、 $\omega$  の符号に関する縮退は境界条件 (3.3) における内殻の回転方向を固定することにより特定の解を指定するものとします。有限な $\Omega$ において、特定の回転方向を指定することは、系の  $O(2)$  対称性を破ることになります。しかし、ここでは考察の対象を、攪乱も含めて軸対称に限定するので、この対称性の破れが陽に現れることはありません。

### 3.2.3 回転の無い場合の線形安定性

回転の無いときの Benard 安定性について簡単に触れます。内殻の回転がない場合には、問題は 2.2 で扱った球対称な問題において、重力場の形を  $\lambda_G = 0$  に限定し、球面調和関数  $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$  のうち  $m=0$  のモードに限定したものと、等価にはなりません。ですから、2.2 節での数値計算の結果をそのまま用いることができます。ここでは、線形問題の固有関数のうち、特に $\vartheta$ -方向の固有関数が、軸対称系の定式化のなかでどのように表現されるかをまとめます。

内殻の回転がない場合、基礎方程式 (3.5)(3.6)(3.7) を線形化すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M} - \mathbf{L}\right) \mathbf{X} = 0 \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - Pr D^2\right) \omega = 0 \quad (3.17)$$

となります、ここで  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{L}$  の定義は

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \Psi \\ T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} Pr D^2 D^2 & Pr Ra \gamma(r) \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{R(R+1)}{r^4 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \Delta \end{pmatrix}$$

です。東西方向流れ関数  $\omega$  の式は、他の 2 式からは独立した拡散方程式になっています。したがって、この式の固有関数には、拡散によって消滅する解しか存在しません。それに対し、 $\Psi$  と  $T$  の式はたがいに結合しています。

速度場は流れ関数  $\Psi$ ,  $\omega$  によって表現されていますが、温度場  $T$  はそのままなので、 $T$  の固有関数は Legendre の多項式  $P_l(\cos \theta)$  によって表現されていなくてはなりません。したがって、流れ関数  $\Psi(r, \vartheta)$  の $\vartheta$ -方向の固有関数は、式 (3.16) より明らかに

$$\hat{P}_l(\cos \vartheta) = \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_l(\cos \vartheta) \quad (3.18)$$

によって表現されます。この関数は、微分演算子  $D^2$  の  $\vartheta$ -方向の成分

$$D_{\vartheta}^2 = \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

の固有関数なので、 $\omega$  の固有関数にもなっています。以上より、線形安定性問題の固有関数は、Legendre 多項式  $P_l$  とその微分を用いて

$$\begin{aligned} \Psi(r, \vartheta) &= \hat{\psi}_l(r) \hat{P}_l(\cos \vartheta) \\ \omega(r, \vartheta) &= \hat{\omega}_l(r) \hat{P}_l(\cos \vartheta) \\ T(r, \vartheta) &= \hat{T}_l(r) P_l(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (3.19)$$

と自然に表すことができます。線形問題の範囲内では、これらのモードは  $l$  ごとに互いに独立で相互作用がありません。臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  は、 $l$  ごとの固有値  $Ra(l)$  のうち最も低いものによってあたえられます。(図 2.1 参照)

ここで注意すべきことは、 $\Psi, \omega$  の固有関数の組  $\{\hat{P}_l\}$  は、互いに一次独立ですが、互いに直交した基底にはなっていないということです。

### 3.2.4 低 Reynolds 数における解の概形

球殻中の Taylor-Couette 流では、平行平板間や二重円筒間の流れと異なって、有限の Reynolds 数に対して、Stokes 流、つまり  $\Delta(\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  の解が基礎方程式 (3.5), (3.6) の厳密解にはなりません。非線形の相互作用のために、有限の Reynolds 数で必ず南北方向の流れを引き起こします。このときの厳密解を解析的に求めることは非常に困難です。しかしながら、Reynolds 数が小さい場合には、東西方向の流れ関数  $\omega(r, \vartheta)$  はほとんど Stokes 流  $\omega_{st}$  で近似できるので、南北方向の流れ関数の概形を求めることができます。

まず Stokes 流  $\omega_{st}$  は方程式

$$D^2\omega = 0 \quad (3.20)$$

を境界条件

$$r = R \text{ において } \omega = \Omega R^2 \sin^2 \theta, \quad r = R + 1 \text{ において } \omega = 0 \quad (3.21)$$

のもとで解いて得られる解で、その表式は

$$\omega_{st} = \frac{RePrR \sin^2 \theta}{(R+1)^3 - R^3} \left[ \frac{(R+1)^3}{r} - r^2 \right] \quad (3.22)$$

となります。ここで Reynolds 数:  $Re = (\Omega R^2 / Pr)$  です。

このときの南北方向の流れ関数  $\Psi$  は近似的に次の方程式の解になります:

$$Pr D^2 D^2 \Psi = -6A^2 B \left( \frac{B}{r^5} - \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \vartheta \cos \vartheta, \quad (3.23)$$

ここで  $A, B$  は

$$A = \frac{RePrR}{(R+1)^3 - R^3}, \quad B = (R+1)^3$$

です。ここで、右辺の三角関数は式 (3.18) で定義した  $\hat{P}_l$  を用いて

$$\hat{P}_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$$

と表されるので、 $\Psi$  は  $r$  の関数  $f(r)$  と  $\vartheta$  の関数  $\hat{P}_2$  とに変数分離できます。動径方向の関数  $f(r)$  の表式は

$$f(r) = a_1 r^5 + a_2 r^3 + \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_4}{r^5} + \frac{A^2 B}{4Pr} r^2 - \frac{A^2 B^2}{4Pr} \frac{1}{r}$$

となります。ここで  $a_1, a_2, a_3, a_4$  は境界条件

$$r = R, R + 1 \text{ において } f(r) = \frac{df}{dr}(r) = 0$$

より決まる定数です。

南北流れ関数  $\Psi$  の概形が  $\hat{P}_2$  によって与えられるので、速度場は南北両半球にひとつづつ大きな循環を持ちます。(図 3.1 参照) この流れは直観的には、内殻の回転によって、両極の内殻側に遠心力が働いて、内殻に沿って流体が動き、赤道面で流体がぶつかって上昇していると解釈できます。

### 3.2.5 数値計算の方法

方程式 (3.5), (3.6), (3.7) の定常解、およびその解の線形安定性を、数値計算を用いて調べます。積分の方法としてスペクトル法的一种であるコロケーション法を用い、変数  $\Psi, \omega, T$  を、ある関数系で展開し展開係数に関する連立方程式に還元して解きます。数値計算の方法は、定常解には Newton-Raphson 法を用い、その線形安定性には QR 法を用いて計算しました。

今回の数値計算では、無次元化された変数を、空間変数に関して、次のように関数展開しました。

$$\Psi(r, \vartheta) = \sin \vartheta \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \psi_{mn} F_m(x) \sin n\vartheta, \quad (3.24)$$

$$\omega(r, \vartheta) = \omega_{st}(r, \vartheta) + \sin^2 \vartheta \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \omega_{mn} G_m(x) \cos n\vartheta \quad (3.25)$$

$$T(r, \vartheta) = T_{st}(r) + \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N T_{mn} G_m(x) \cos n\vartheta \quad (3.26)$$

ここで  $x = 2(r - R) - 1$  (このとき  $x \in [-1, 1]$ ) であり、

$$\begin{aligned} F_m(x) &= (1 - x^2)^2 T_m(x) \\ G_m(x) &= (1 - x^2) T_m(x) \end{aligned} \quad T_m(x): m \text{ 次 Chebyshev 多項式,}$$

$\omega_{st}$  は Stokes 解 (3.22)、 $T_{st}$  は熱拡散平衡解 (3.2) です。

この変換をほどこすことで、関数で級数展開する部分の境界条件は、境界で零になるようになります。ここで注意すべきことは、 $F_m, G_m$  は、境界条件を各モード毎に満たすようにとった、互いに一次独立ですが、直交性は失われている基底であることです。

### 3.2.6 エネルギー・スペクトル

線形安定性の問題において、線形作用素の  $\vartheta$ -方向の固有関数は、拡散項の固有関数ごとに独立していました。しかし臨界点を越えて不安定モードの振幅が有限になると、線形問題の場合には独立であった各々のモードが、非線形項を通して相互作用するようになります。このモード間の相互作用を定量的に評価するため、関数のエネルギー・スペクトルについて考えます。

式 (3.19) を拡張して、有限な振幅での  $\Psi, \omega, T$  を拡散項の固有モードを用いて次のよ

うに展開します:

$$\begin{aligned}\Psi(r, \vartheta) &= \sum_l \hat{\psi}_l(r) \hat{P}_l(\cos \vartheta), \\ \omega(r, \vartheta) &= \sum_l \hat{\omega}_l(r) \hat{P}_l(\cos \vartheta), \\ T(r, \vartheta) &= \sum_l \hat{T}_l(r) P_l(\cos \vartheta).\end{aligned}\tag{3.27}$$

これらのモード間の相互作用を評価するために、モード  $l$  ごとのエネルギーを調べる必要があります。ここで関数  $f = f(r, \vartheta)$  のエネルギー (2 乗積分) を次の式で定義します:

$$\|f\|^2 = \iiint f^2(r, \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi,\tag{3.28}$$

積分は球殻の全体で行ないます。これより温度場  $T$  のエネルギーは

$$\|T\|^2 = \sum_l \frac{4\pi}{2l+1} \int_R^{R+1} (\hat{T}_l(r))^2 r^2 dr\tag{3.29}$$

となるので、 $T$  のエネルギー・スペクトル  $E_l(T)$  を次式によって定義します:

$$E_l(T) = \frac{4\pi}{2l+1} \int_R^{R+1} (\hat{T}_l(r))^2 r^2 dr.\tag{3.30}$$

これに対し  $\Psi, \omega$  の場合には、展開の基底である  $\{\hat{P}_l\}$  が直交基底ではないので、(3.30) と同様な表現を用いて  $\Psi, \omega$  のエネルギー・スペクトル  $E_l(\Psi), E_l(\omega)$  を考えることは一般に不適切だとおもわれます。

$\hat{\psi}_l$  は  $\Psi$  のエネルギー・スペクトルとは一意に結びつきませんが、式 (3.4) によって、速度  $\mathbf{u}$  の  $r$  成分  $u_r(r, \vartheta)$  との間に

$$u_r(r, \vartheta) = - \sum_l \frac{l(l+1)}{r^2} \hat{\psi}_l(r) P_l(\cos \vartheta)\tag{3.31}$$

という関係がつくので、 $u_r$  のエネルギー・スペクトルを表現する関数になっています。このとき  $u_r$  のエネルギーは

$$\|u_r\|^2 = 4\pi \sum_l \frac{l^2(l+1)^2}{2l+1} \int_R^{R+1} (\hat{\psi}_l(r))^2 r^{-2} dr\tag{3.32}$$

によって与えられるので、 $u_r$  のエネルギー・スペクトル  $E_l(u_r)$  を

$$E_l(u_r) = 4\pi \frac{l^2(l+1)^2}{2l+1} \int_R^{R+1} (\hat{\psi}_l(r))^2 r^{-2} dr\tag{3.33}$$

によって定義します。

Legendre 多項式による展開係数  $\psi_l(r)$ ,  $T_l(r)$  と、式 (3.24)(3.26) における数値計算のための関数展開の係数  $\psi_{mn}$ ,  $T_{mn}$  との変換則は、次式によって与えられます:

$$\hat{\psi}_l(r) = -\frac{2l+1}{2l(l+1)} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (l|n)_u \psi_{mn} F_m(x), \quad (3.34)$$

$$\hat{T}_l(r) = \frac{2l+1}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (l|n)_T T_{mn} G_m(x), \quad (3.35)$$

ここで変換行列  $(l|n)_u$ ,  $(l|n)_T$  は

$$(l|n)_u = \int_0^\pi P_l(\cos \vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \sin n\vartheta) d\vartheta \quad (3.36)$$

$$(l|n)_T = \int_0^\pi P_l(\cos \vartheta) \sin \vartheta \cos n\vartheta d\vartheta \quad (3.37)$$

によって与えられます。したがってエネルギー・スペクトルは

$$E_l(u_r) = (2l+1)\pi \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \sum_{m_1=0}^M \sum_{m_2=0}^M (l|n_1)_u (l|n_2)_u \langle m_1 m_2 \rangle_F \psi_{m_1 n_1} \psi_{m_2 n_2}, \quad (3.38)$$

$$E_l(T) = (2l+1)\pi \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \sum_{m_1=0}^M \sum_{m_2=0}^M (l|n_1)_T (l|n_2)_T \langle m_1 m_2 \rangle_G T_{m_1 n_1} T_{m_2 n_2} \quad (3.39)$$

となります、ここで変換行列  $\langle m_1 m_2 \rangle_F$ ,  $\langle m_1 m_2 \rangle_G$  は

$$\langle m_1 m_2 \rangle_F = \int_R^{R+1} F_{m_1}(x) F_{m_2}(x) r^{-2} dr, \quad (3.40)$$

$$\langle m_1 m_2 \rangle_G = \int_R^{R+1} G_{m_1}(x) G_{m_2}(x) r^2 dr \quad (3.41)$$

によって与えられます。

### 3.3 計算結果

基礎方程式 (3.5)(3.6)(3.7) の定常解、およびその軸対称攪乱に対する線形安定性を数値的に調べました。

計算のパラメーターは次のとおりです。

- アスペクト比:  $R = 2.23, 2.5$
- Prandtl 数:  $Pr = 7$
- Rayleigh 数:  $Ra = 2500 \sim 3500$
- Reynolds 数:  $Re = 0 \sim 70$
- Chebyshev モード数:  $M = 8$
- Fourier モード数:  $N = 32$  (対称モード),  $65$  (全モード)

アスペクト比  $R = 2.23$  のとき、回転の無い場合には 2.2 節での数値計算の結果より、Benard 不安定性の臨界 Rayleigh 数は、 $Ra_c = 2541.7$  です。また  $\vartheta$ -方向の臨界モード数は  $l = 8$  になります。2.2 節での計算結果より、臨界モード数  $l$  は、重力場や温度場の形にほとんど依存しない量です。 $l = 8$  が線形安定性の臨界になるのアスペクト比の範囲はおおよそ  $2.1 < R < 2.4$  です。 $R = 2.23$  をとくに選んだ理由は、線形安定性において第 2 番目の不安定モード ( $l = 7$  または  $l = 9$ ) との臨界 Rayleigh 数の差が最も大きくなるので、これらのモードの不安定化による干渉の影響が最も少ないからです。

$R = 2.23$  のとき、臨界モード  $l = 8$  が対称モード (3.12), (3.13) に属しているので、計算に際して対称モードのみで展開したものを用いました。対称解のモード数  $N = 32$  の選択に際しては、 $N = 64$  での計算を特定の解において計算し、Nusselt 数、エネルギーが 5 桁以上の精度で収束することを確かめました。

$R = 2.5$  のとき、回転の無い場合の臨界モード数は  $l = 9$ 、臨界 Rayleigh 数は  $Ra_c = 2446.6$  となります。このとき、計算のモード数は、 $N = 65$  としました。

解の振幅を特徴付ける量として、以下では Nusselt 数と、 $u_r$  のエネルギーを用います。Nusselt 数は次の式によって定義されます：

$$Nu = \frac{\int_{\partial V} \frac{\partial T(r)}{\partial r} dS}{\int_{\partial V} \frac{\partial T_{st}(r)}{\partial r} dS} \quad (3.42)$$

ここで  $\int_{\partial V} dS$  は境界面での積分、 $T(r)$  は対流過程も含めた温度場、 $T_{st}(r)$  は平衡温度場 (3.2) です。ここでは、境界面  $\partial V$  として、外殻をとります。したがって、対流過程による熱輸送の増加を計るものさし、言い替えると、 $T_{fl}$  の振幅の代表値は、 $Nu - 1$  になります。一方、 $u_r$  のエネルギーは、 $\Psi$  の振幅の代表値とみなすことができます。

### 3.3.1 回転の無い場合の Benard 不安定性に伴う分岐

この節では、回転の無い場合の有限振幅の熱対流解の分岐の性質と、系の持つ対称性に関して考察します。

3.2.2 節で考察したように、基礎方程式 (3.5) - (3.7) の解  $\mathbf{X} = (\Psi, \omega, T)$  の空間  $H$  は、対称モードの空間  $H^+$  と反対称モードの空間  $H^-$  の直和に分解されます。静止状態または対称モード解のまわりの線形安定性問題では、これらのモードは互いに独立しています。

系に解の振幅に関する反転対称性が存在する場合には、解の分岐は一般に熊手型分岐となります。(例えば Crawford (1991) 参照) この節では、系の南北の反転に関する対称性、および南北反転の変換  $\Gamma$  が、解の振幅の反転の変換とどのような関係にあるのか、変換  $\Gamma$  に関する解の対称性が分岐のふるまいにどのような影響を与えるのか、について定性的な考察を行ない、数値計算の結果を考察します。

線形安定性の範囲内では、臨界モード  $\mathbf{X}_c = (\Psi_c, \omega_c, T_c)$  は南北の反転に関する変換  $\Gamma$  の固有値 ( $\pm 1$ ) に応じて、対称モード  $H^+$  か反対称モード  $H^-$  のいずれかに属しています。臨界モードがトポロジカルには熊手型の局所分岐をするものと仮定して、臨界モードの符号の反転に関する縮退は、どのように解けるのでしょうか。

反対称モードが不安定化した場合の分岐

変換  $\Gamma$  に関する反対称モードの固有値は  $-1$  なので、臨界点の近傍、すなわち問題が線形で扱える範囲において、 $\Gamma$  はモードの振幅の反転に関する変換になっています。(図 3.2(a) 参照) もちろん、反対称モードから成長した枝に属する解は、非線形段階では赤道面に関する対称性を持っていませんから、 $\Gamma$  は厳密には振幅の反転だけではなく、南北の反転に関する変換を伴っています。重要な点は、変換  $\Gamma$  が、臨界点での符号の相違に伴う二つの枝を、臨界点近傍では、互いに他へと移している点にあります。したがって、トポロジカルに考えて、枝の全ての点において、解は変換  $\Gamma$  によって互いに他の枝の解へと移らなくてはなりません。このことは、これら二つの枝に属する解が、非線形段階においても、物理的な性質に関して縮退をしていることに他なりません。

このことより、反対称モードの不安定化による局所分岐は、もしも存在するならば、完全な熊手型分岐でなくてはならない、ということが結論されます。この性質を利用して、数値計算においては、反対称モードの分岐、およびその解の性質に関して、枝を一つだけ追いかけて考察することにします。

2.2節での数値計算の結果、回転の無い場合には、 $R = 2.5$  における臨界モード数は  $l = 9$ 、臨界 Rayleigh 数は  $Ra = 2446.6$  です。この章で考察している系は、重力の関数形  $\gamma$  と拡散平衡解の温度勾配  $\partial T_{st}/\partial r$  が相似なので、線形問題は自己随伴となり分岐は超臨界でなくてはなりません。図 3.3は、 $R = 2.5$ ,  $Re = 0$  の場合の非対称解の  $u_r$  のエネルギー  $E(u_r)$  とそのスペクトルです。エネルギー  $E(u_r)$  は、Rayleigh 数の単調増加関数で、図より判るように、おおむね  $(Ra - Ra_c)$  の 1 次関数になっています。これは、分岐が熊手型なので、南北流れ関数  $\Psi$  の平衡振幅が、 $\sqrt{Ra - Ra_c}$  に比例していることと、首尾一貫しています。図 3.4は、 $Ra = 2530$  の場合の南北流れ関数の等高線図です。南北両半球に合わせて 9 個のロールを持っています。解の概形は、おおむね南北に反対称な流れを表していますが、3.2.2節で述べたように、非線形の相互作用により対称モードに属するモードが励起されているので、厳密には南北の対称性は持っていません。(図 3.3(b) 参照)

### 対称モードが不安定化した場合の分岐

一方、対称モードでは、変換  $\Gamma$  に関する固有値が  $1$  なので、南北の反転に関する変換と、解  $X_c$  の振幅の符号の反転が、結び付いていません。したがって、反対称モードの場合と異なり、 $\Gamma$  が解の枝の交換に関する変換になっていません。符号の異なる臨界モードより成長したそれぞれの枝が、変換  $\Gamma$  によって自分自身に移ってしまうので、局所的な分岐が、トポロジカルに熊手型であったとしても、分岐が完全である必然性はありません。(図 3.2(b) 参照) 言い替えると、分岐の枝ごとに物理的性質が異なっても構わないということです。したがって、線形問題の符号の反転に関する縮退は、有限振幅の段階では解けてしまいます。このことが、反対称モードの不安定化の場合との大きな違いとなっています。

分岐ダイアグラムにおいて、対称な臨界モードの符号の反転に伴う枝のそれぞれに属する解を、赤道面での  $u_r$  の向きに応じて、 $u_r > 0$  のものを上昇解、 $u_r < 0$  のものを下降解と呼ぶことにします。(図 3.5参照) この分類法に従えば、球殻 Taylor 流れである 0-渦解は上昇解に属し、下降解に対応する解は存在しません。

図 3.6は、 $R = 2.23$ ,  $Re = 0$  の場合の、対称解の物理的性質の Rayleigh 数依存性です。2.2節での数値計算の結果、回転の無い場合には、 $R = 2.23$  における臨界モード数は  $l = 8$ 、臨界 Rayleigh 数は  $Ra = 2541.7$  です。この章で考察している系は、重力の関数形  $\gamma$  と拡散平衡解の温度勾配  $\partial T_{st}/\partial r$  が相似なので、線形問題は自己随伴となり分岐は超臨界でなくてはなりません。図 3.6(a) は Nusselt 数、図 3.6(b) は  $u_r$  のエネルギー・スペクトルです。いずれも、ほぼ  $Ra - Ra_c$  に線形に依存しています。したがって、反対称モー

ドの場合と同様に、南北流れ関数  $\Psi$  の平衡振幅がおおよそ  $\sqrt{Ra - Ra_c}$  によって与えられます。しかし、Rayleigh 数が十分に大きくなると、解の特性は上昇解の枝と下降解の枝とで異なってきます。Nusselt 数、エネルギーの双方とも、下降解の枝の方が大きい値を示しています。

図 3.6(c), (d) はそれぞれ上昇解、下降解のエネルギー・スペクトルです。いずれも  $l = 8$  とその高調波に極大をもつスペクトルになっています。しかし、平行な流体層の場合と異なり、球殻中での対流の場合には、 $l = 8$  とその高調波以外のモードも、非線形の相互作用により励起されます。

### 3.3.2 0-渦解に対する Benard 不安定性に伴う分岐

内殻が有限の角速度で回転をしている場合は、0-渦解が必ず存在しています。逆転温度勾配による不安定化が始まる前に、既に対流が存在しています。したがって分岐ダイアグラムに現れる枝は、対称モードに属する解の場合には、上昇解、下降解および 0-渦解の 3 本となります。

#### Re=10

図 3.7 は、 $R = 2.23$ ,  $Re = 10$  での解の物理的特性です。まず Rayleigh 数の低いときの 0-渦解の枝は、滑らかに上昇解の枝へとつながっていきます。エネルギー・スペクトル (図 3.7(c)) は、この滑らかな移行の前後において、Rayleigh 数の増加に伴う  $l = 8$  とその高調波の急激な成長を示しています。一方、下降解の属する枝は、 $Ra = 2543$  より Rayleigh 数の低い領域には、存在していません。

図 3.8 は、分岐点近傍での解の枝のふるまいを、Nusselt 数を用いて表示したものです。まず、上昇解と下降解の Nusselt 数が、 $Re = 0$  の場合と比較して、枝の分離が明瞭になるまでに、明らかに大きく異なっています。また、熱輸送の大小も  $Re = 0$  のときと逆で、上昇解の方がより大きな Nusselt 数を示しています。

下降解へとつながる枝は、転回点を通過して、Rayleigh 数のより高い領域の 0-渦解の枝へと滑らかに移行しています。したがって、Nusselt 数を定常解の振幅の代表値として考えると、有限の Reynolds 数の領域での解の分岐のふるまいは、熊手型分岐から鞍状・結節点分岐へと、トポロジカルに変化していることが示唆されています。

#### Re=20

図 3.9 は、 $R = 2.23$ ,  $Re = 20$  での解の物理的特性です。まず Rayleigh 数の低いときの 0-渦解の枝は、滑らかに上昇解の枝へとつながっていきます。エネルギー・スペクトル (図 3.9(c)) は、この滑らかな移行の前後において、Rayleigh 数の増加に伴う  $l = 8$  とその高調波の急激な成長を示しています。急激な移行の起こる Rayleigh 数は、およそ  $Ra = 2550$  のあたりです。この値は、 $Re = 10$  の場合と比較して、明らかに Rayleigh 数の高い領域へとずれています。一方、下降解の属する枝の存在領域の下限もまた、 $Ra = 2557$  へと上昇しています。

図 3.10 は、分岐点近傍での解の枝のふるまいを、Nusselt 数を用いて表示したものです。上昇解・下降解へとつながる枝のトポロジカルな性質は、 $Re = 10$  の場合と同じです。

#### Re=30

図 3.11は、 $R = 2.23$ ,  $Re = 30$  での解の物理的特性です。分岐のトポロジカルな性質は、 $Re = 20$  の場合と同じく、滑らかな 0-渦解-上昇解の移行と、下降解-0-渦解の鞍状・結節点分岐です。上昇解のエネルギー・スペクトル(図 3.11(c))は、この滑らかな移行の前後において、Rayleigh 数の増加に伴う  $l = 8$  とその高調波の成長が、Reynolds 数が 20 以下の場合に比べて、曖昧になっています。一方、下降解の属する枝の存在領域の下限は、 $Ra = 2620$  へと上昇しています。

下降解-0-渦解の枝のうち、0-渦解の部分を丁寧に追跡すると、 $Ra = 2800$  のあたりより、Nusselt 数の上昇を見ました。エネルギー・スペクトルを調べた結果、この上昇は  $l = 10$  のモードの励起によるものであることが、判りました。このモードの励起による解の枝は、今までの Reynolds 数においても存在していたはずですが、これは、数値計算上の技術として、パラメーターのゆっくりとした変化による、解の「断熱的」変化をこれまでの数値計算では、追跡しきれていなかったためであると思われる。したがって、解を探索する際のパラメーターの選び方を慎重にすれば、いままでのパラメーターにおいても、このような最不安定モード以外のモードより励起された枝を見つけることが出来ると思われる。(図 3.12参照)しかし、そのような解は物理的には、あまり重要ではないと思われるので、詳しい探索は行ないませんでした。

#### Re=40

図 3.13は、 $R = 2.23$ ,  $Re = 40$  での解の物理的特性です。分岐のトポロジカルな性質は、鞍状・結節点分岐になっています。上昇解のエネルギー・スペクトル(図 3.13(c))は、この滑らかな移行の前後において、Rayleigh 数の増加に伴う  $l = 8$  とその高調波の成長が、さらに曖昧になっています。一方、下降解の属する枝の存在領域の下限は、 $Ra = 2780$  へと上昇しています。下降解の枝のエネルギー・スペクトル(図 3.13(d))は、臨界の近傍においても  $l = 8$  とその高調波が、大きく励起されたままであることを示しています。

鞍状・結節点分岐の臨界点近傍では、下降解の枝の Nusselt 数および  $u_r$  のエネルギーが上昇解の値を上回っている部分が、観察されました。また、 $Ra = 3500$  の Nusselt 数、 $u_r$  のエネルギーは、 $Re = 30$  の場合と比較して、小さくなっています。これは、回転の影響が大きくなるにつれて、内殻の回転の影響と、熱対流の影響とが、競合してしまい、互いに他を抑制するようになっていると思われる。

#### Re=50

図 3.14は、 $R = 2.23$ ,  $Re = 50$  での解の物理的特性です。分岐のトポロジカルな性質は、鞍状・結節点分岐のままです。上昇解のエネルギー・スペクトル(図 3.14(c))は、この滑らかな移行の前後において、Rayleigh 数の増加に伴う  $l = 8$  とその高調波の成長が、さらに曖昧になっています。とくに  $l = 10$  のモードの励起が、いままでに比べて大きくなっています。これは、内殻の回転の影響による  $l = 2$  のモードと、熱対流の  $l = 8$  のモードの直接の相互作用が、十分に大きくなっていることを示していると思われる。上昇解の熱輸送の大きさの Rayleigh 数の増加に伴う上昇率は、解を探索した範囲内においては、 $Re = 40$  のときに比べて、全体に小さくなっています。これは内殻の回転による熱対流の抑制がさらに強くなっているためであると思われる。言い替えると、熱勾配の対流に対する影響が小さくなっています。

一方、下降解-0-渦解の分岐点は、 $Ra = 2940$  へと上昇しています。解を探索した範囲内では、下降解の枝の熱輸送が、上昇解の値を上回っています。下降解の枝のエネルギー・スペクトル(図 3.14(d))は、臨界の近傍においても  $l = 8$  とその高調波が、大きく励起さ

れたままであることを示しています。こちらの枝でも、 $l = 10$  の励起が観察されました。また、鞍状・結節点分岐の臨界点近傍では、下降解の枝の Nusselt 数および  $u_r$  のエネルギーが上昇解の値を上回っている部分が、 $Re = 40$  の場合と比較して大きくなっていることが観察されました。

### 3.4 まとめ

内殻の差分回転に伴う流れに対する逆転温度勾配の影響について、定常解を数値的に求めることによって、調べました。

まず、系の南北の反転対称性についての考察より、対称モードは、解の各々が南北の反転に対して不変であるために、かえって分岐ダイアグラムの全体からみると、符号の反転に関する対称性を破ってしまう可能性のあることが、判りました。数値計算の結果、回転の無い場合においてさえ、対称臨界モードの分岐は、トポロジカルには熊手型ですが、各々の枝の解の熱輸送特性が異なっています。この熱輸送特性の非対称性は、重力場および平衡温度勾配の形が、流体層の中心に関して非対称なので、この方向の対称性の破れの結果であると思われます。

これに対して、反対称モードの不安定化に伴う分岐は、解の符号の反転が、南北の反転に伴ったかたちで表現されているので、分岐は、流体層の中心に関する非対称性にもかかわらず、完全な熊手型にならなくてはなりません。

内殻が差分回転している場合には、南北両半球にひとつずつ大きな対流ロールを持つ 0-渦解が生成されます。数値計算の結果、0-渦解の存在にもかかわらず、臨界モードの主モード数  $l$  は、回転の無い場合と同じであることが、 $R = 2.23$  および  $R = 2.5$  の場合に確かめられました。

これは、回転の影響が境界条件としてのみ入ってくるためだと思われます。というのも、内殻の回転の向きの反転は、南北に関する流れの向きの反転の変換と等価になるからです。これは、系がパリティの反転に対して不変であることのあらわれです。

これに対して、系全体が一様に回転している場合には、回転の影響が Coriolis 項として表現されるので、系のパリティの反転に関する対称性が破れています。このような系では一般に分岐は Hopf 分岐となります。また、一様回転する球殻中の Benard 不安定性においては、臨界モードの波数は球殻のアスペクト比だけではなく、回転数にも左右されることが、判っています。(Zhang and Busse (1987))

$R = 2.23$  における、0-渦解-Benard ロール解の分岐は、数値計算の結果、熊手型分岐が不完全になり、0-渦解-上昇解の枝と、鞍状・結節点分岐をする 0-渦解-下降解の枝に、トポロジカルに分離してしまうことが、判りました。これは、各々の枝に属する解の対称性と矛盾しません。というのも、対称モードに属する解は、南北反転の変換によって、自分自身に写像されてしまうからです。不完全分岐の原因は、0-渦解の存在によって、対称モードに属するすべてのモードが、あらかじめ励起されているためだと思われます。

0-渦解-下降解の鞍状・結節点分岐の臨界 Rayleigh 数は、Reynolds 数とともに増加していることが判りました。これは、定性的には、0-渦解のモードが系を安定化するはたきがあることを示しています。

この分岐のふるまいを、エネルギー・スペクトルを用いて調べました。Reynolds 数の低いときには、臨界点の近傍において、急激な対流ロールのモードの成長が観察されました。Reynolds 数が高くなるにつれて、この対流ロール・モードの励起の始まりは曖昧になっていきます。これは、内殻の回転に伴う 0-渦解のモードと、Benard ロールのモード

の競合が、Reynolds 数の増加とともに強くなっているためだと思われます。

$l = 8$  の Benard ロール解を、 $R = 2.5$  において追跡する数値計算を行ないました。 $l = 8$  のモードは  $R = 2.5$  においては臨界を与えないので、物理的にはあまり現実的ではありません。しかし、分岐のふるまいに対するアスペクト比の影響の重要性を調べる手がかりになります。数値計算の結果、 $R = 2.5$  の場合には 0-渦解との干渉に伴う分岐の不完全化は観察されませんでした。これより、 $R = 2.23$  での分岐の不完全化の起こる条件として、アスペクト比によって決まる臨界モードの対称性が、対称モードに属するときのみ、分岐の不完全化が生じるものと思われます。

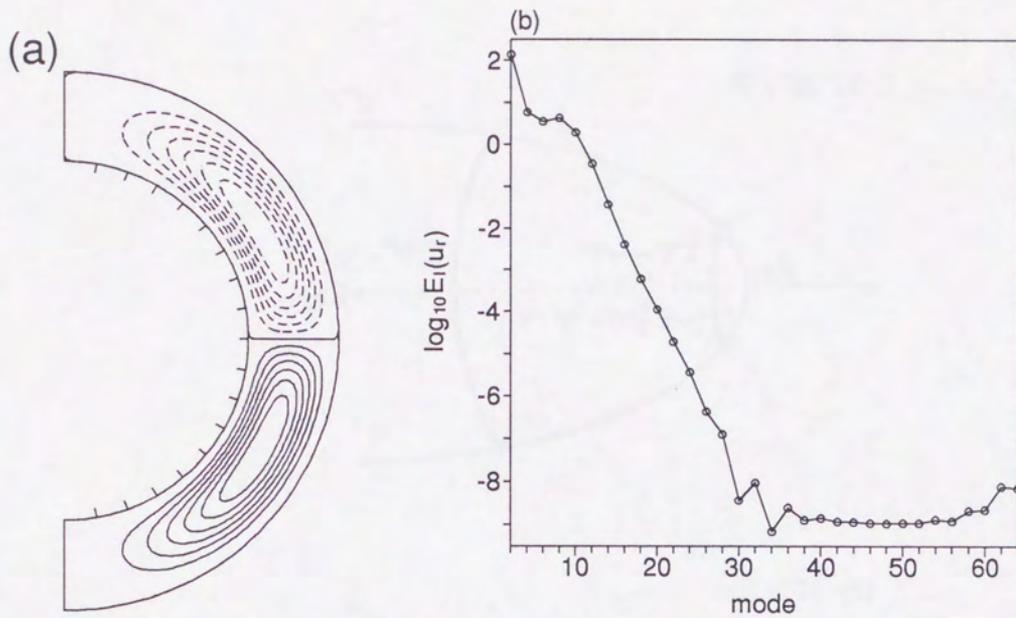


図 3.1. 0-渦解の (a) 南北流れ関数、(b) 典型的なエネルギー・スペクトル。実線は紙面に対し時計回り ( $\Psi > 0$ )、点線は反時計回り ( $\Psi < 0$ ) の流れを表します。0-渦解は対称モード  $H^+$  に属しているため、スペクトルの図は偶数  $l$  に関するものだけで構成されています。内殻が有限の角速度  $\Omega$  で回転している場合、非線形項の影響で南北方向に大きな循環が生じます。

figure.3.1

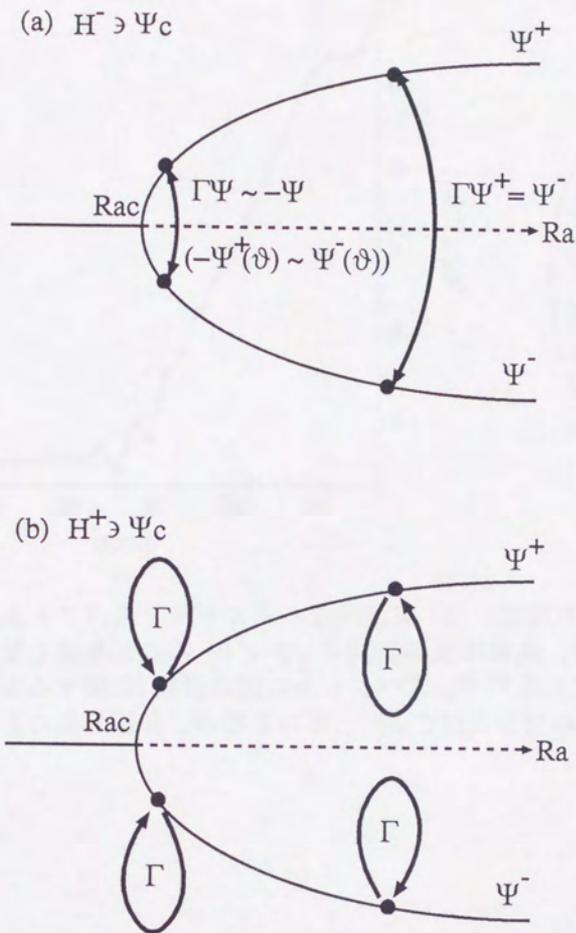


図 3.2. 臨界モードの対称性の分岐のふるまいに対する影響の模式図。(a) 反対称モードの不安定化に伴う分岐。(b) 対称モードの不安定化に伴う分岐。反対称モードは  $\Gamma$  の固有値が  $-1$  なので、臨界点の近傍で  $\Gamma$  が振幅の反転の変換になっています。一方、対称モードは、非線形段階においても、解の空間  $H$  の閉じた部分空間になっているので、分岐を起こした枝は各々自分自身へと移されてしまいます。

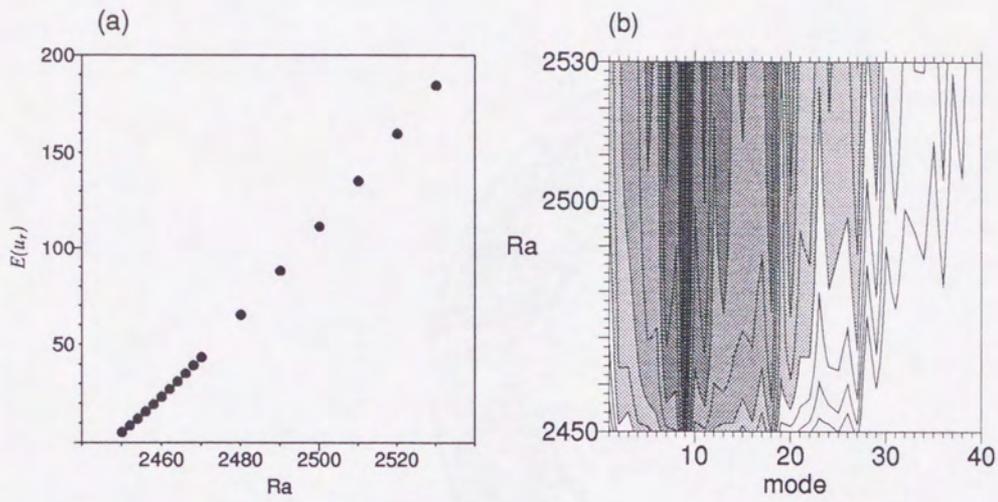


図 3.3.  $R = 2.5$ ,  $Re = 0$  の場合の、非対称解の  $u_r$  のエネルギー。(a) エネルギー  $E(u_r)$  の Rayleigh 数依存性。(b) Rayleigh 数の変化に伴う、エネルギー・スペクトルの変化。 $\log_{10}[E_l(u_r)]$  の等高線を示しています。色の濃いところがスペクトルの強いところにあたります。 $l = 9$  およびその高調波成分のところに極大があらわれています。

figure.3.3

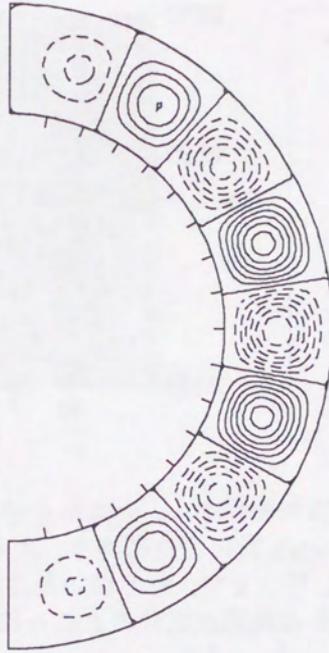


図 3.4.  $R = 2.5$ ,  $Re = 0$ ,  $Ra = 2530$  の場合の南北流れ関数。流れの向きは図 3.1と同じです。見ためには反対称ですが、対称モードに属する波数のモードが励起されているので、厳密な南北対称性は持っていません。(図 3.3(b) 参照)

figure.3.4

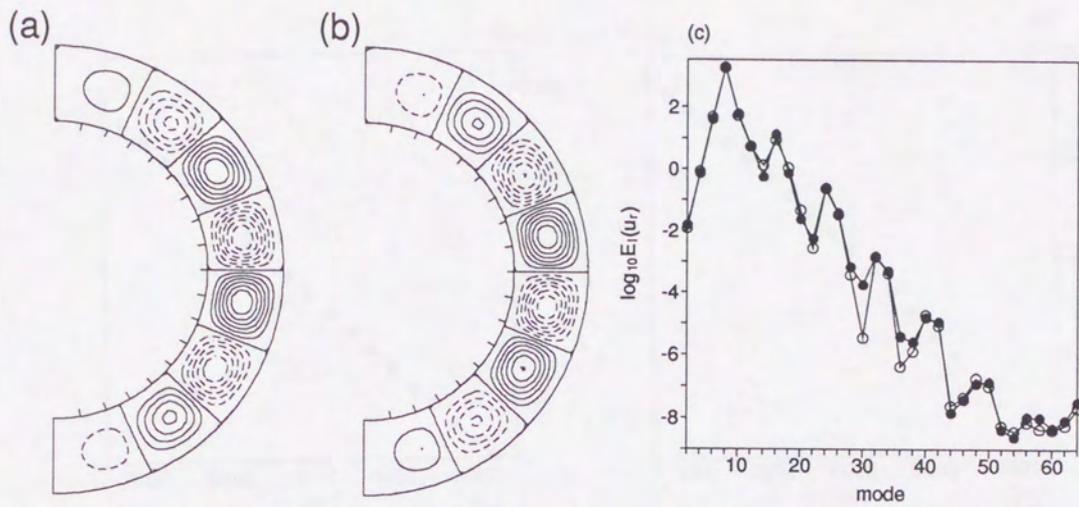


図 3.5. 内殻の回転の無い場合 ( $Re = 0$ ) の軸対称 Benard ロール解。(a) 上昇解の南北流れ関数、(b) 上昇解の南北流れ関数、(c) 典型的なエネルギー・スペクトル: 白丸は上昇解、黒丸は下降解。パラメーターは、 $R = 2.23$ ,  $Re = 0$ ,  $Ra = 3500$  です。流れの向きは図 3.1 と同じです。 $l = 8$  のときの臨界モードから Rayleigh 数を上げて得られました。臨界点ではこのモードは符号に関して縮退していますが、有限振幅になると縮退が解けます。

figure.3.5

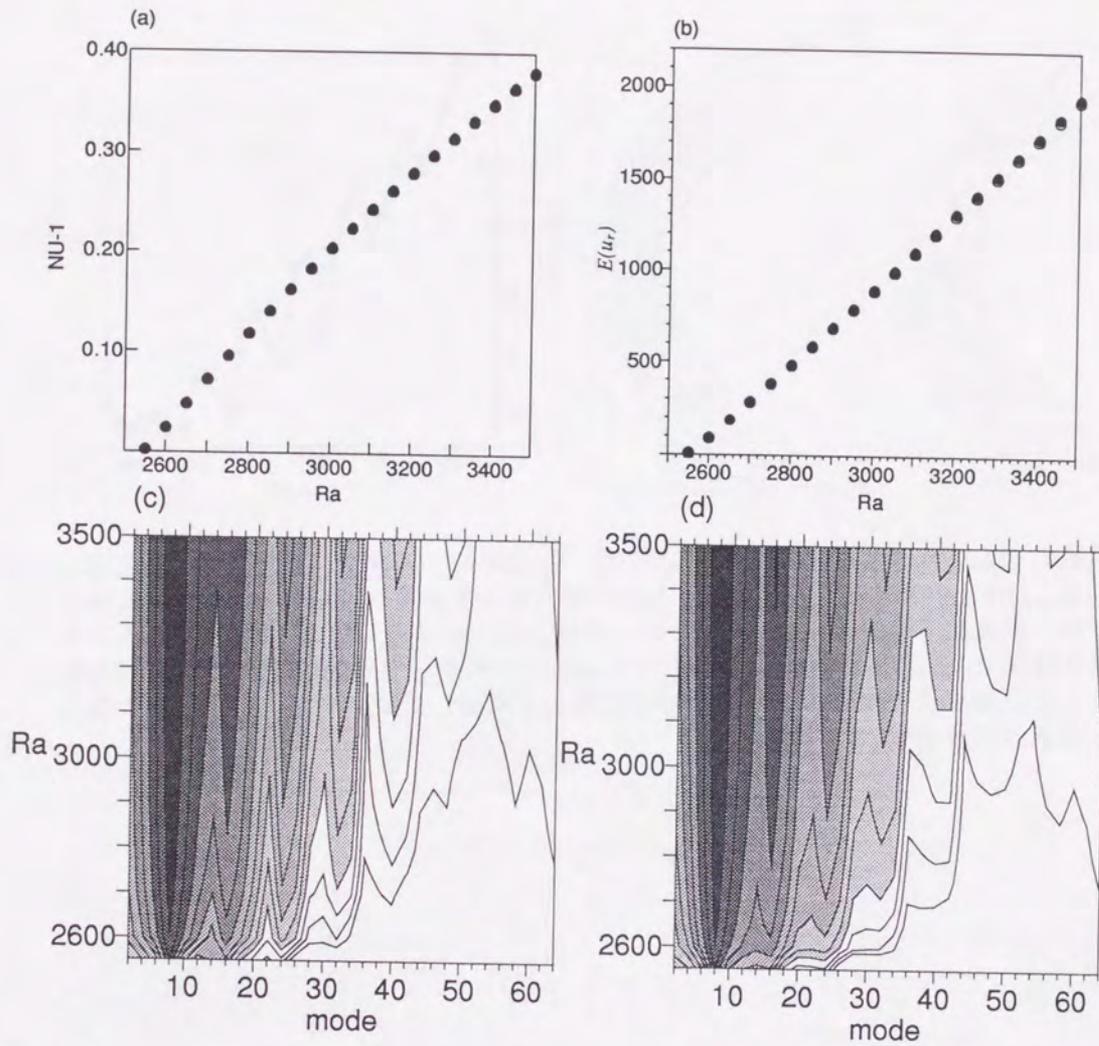


図 3.6.  $R = 2.23$ ,  $Re = 0$  の場合の、対称解の物理的性質の Rayleigh 数依存性。(a) Nusselt 数、(b)  $u_r$  のエネルギー。白丸は上昇解、黒丸は下降解の値を表しています。(c), (d) 解のエネルギー・スペクトルの Rayleigh 数依存性。(c) は上昇解、(d) は下降解のもので、偶数  $l$  のモードのみを用いて、 $\log_{10} [E_l(u_r)]$  の等高線図を描いたものです。臨界モードの縮退が取れるので、Rayleigh 数が大きくなるにつれて、熱輸送特性が異なってきます。

figure.3.6

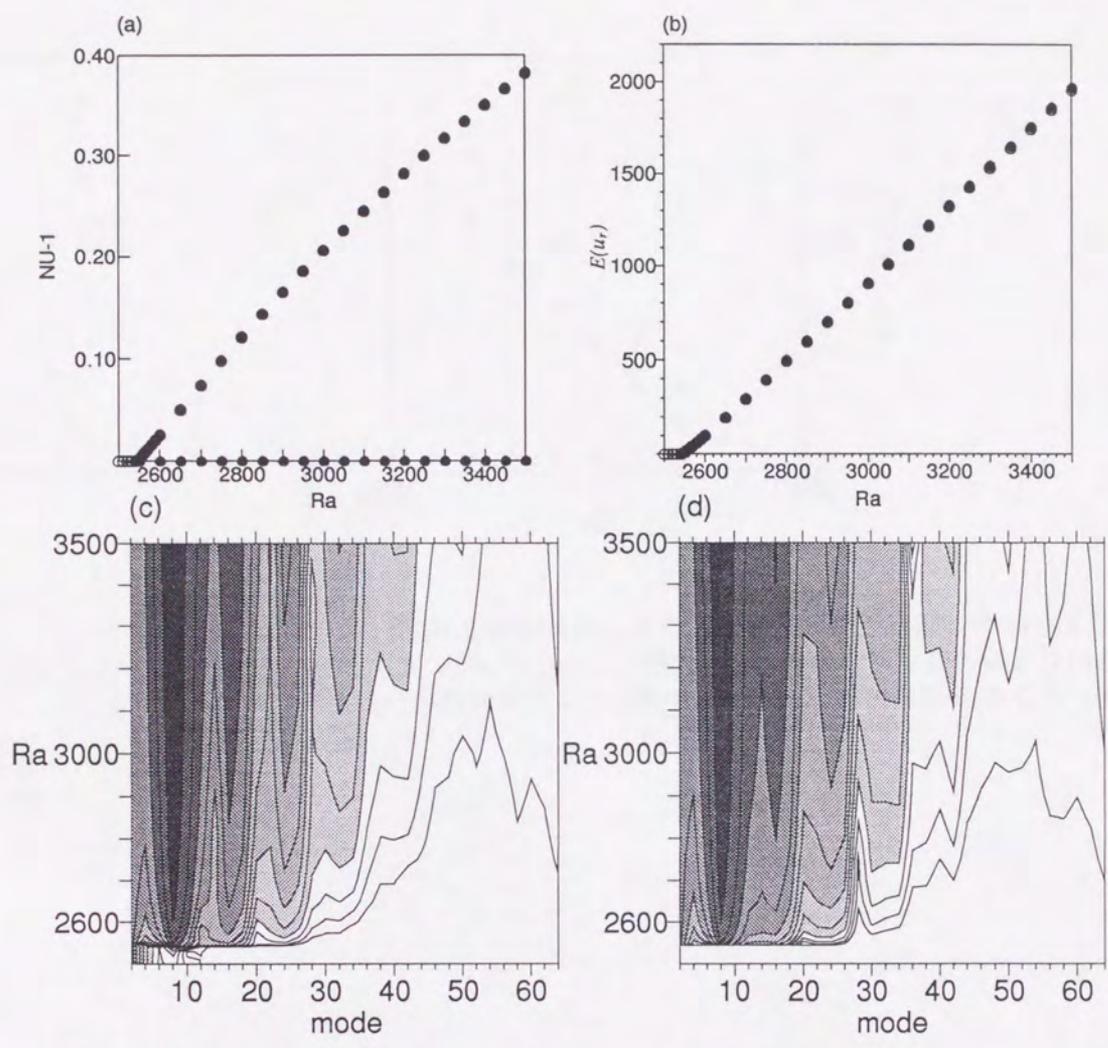


図 3.7.  $R = 2.23$ ,  $Re = 10$  の場合の、対称解の物理的性質の Rayleigh 数依存性。(a) Nusselt 数、(b)  $u_r$  のエネルギー、(c) 上昇解のエネルギー・スペクトル、(d) 下降解のエネルギー・スペクトル。(a), (b) において、白丸は上昇解につながる枝、黒丸は下降解につながる枝の値を表しています。下降解の枝は  $Ra = 2543$  以下には存在していません。

figure.3.7

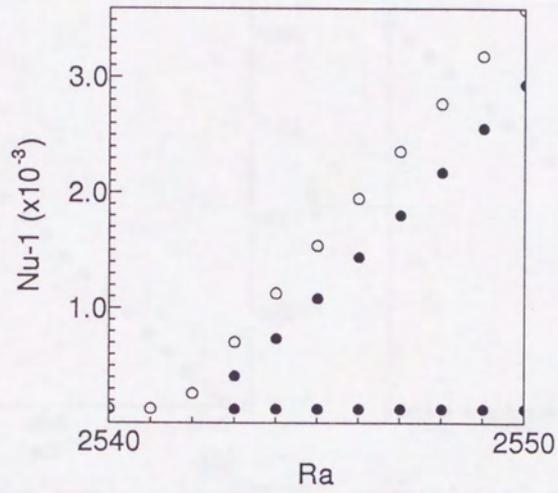


図 3.8. 図 3.7(a) の分岐点近傍の拡大図。白丸、黒丸は図 3.7 に同じ。Ra が 2545 程度のときの 0-渦解の枝は滑らかに上昇解の枝へとつながっています。一方、Ra が 2548 程度以上のときの 0-渦解の枝は、転回点を通過して下降解の枝へと接続して

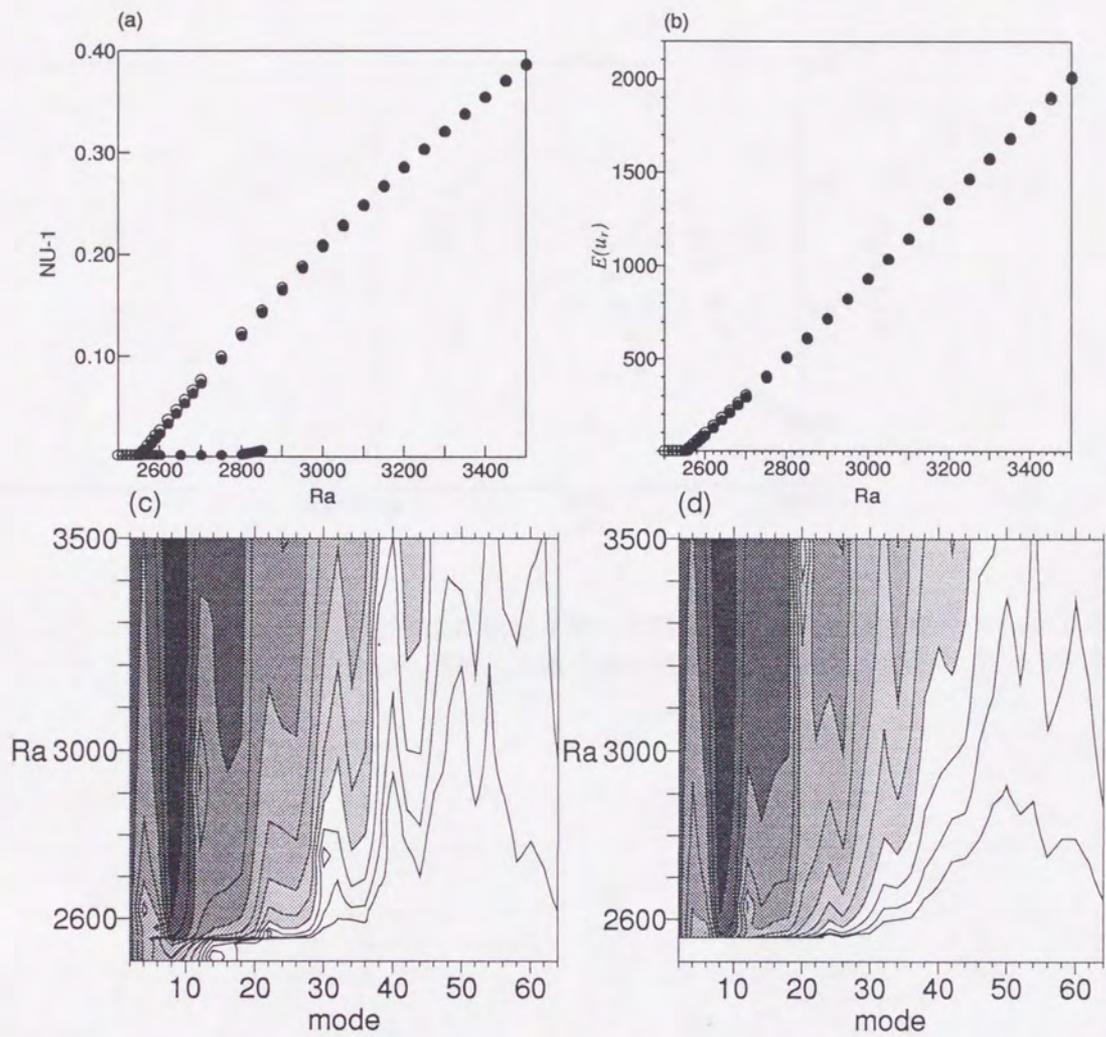


図 3.9.  $R = 2.23$ ,  $Re = 20$  の場合の、対称解の物理的性質の Rayleigh 数依存性。(a), (b), (c), (d) は図 3.7 と同様です。下降解の枝は  $Ra = 2557$  以下には存在していません。

figure.3.9

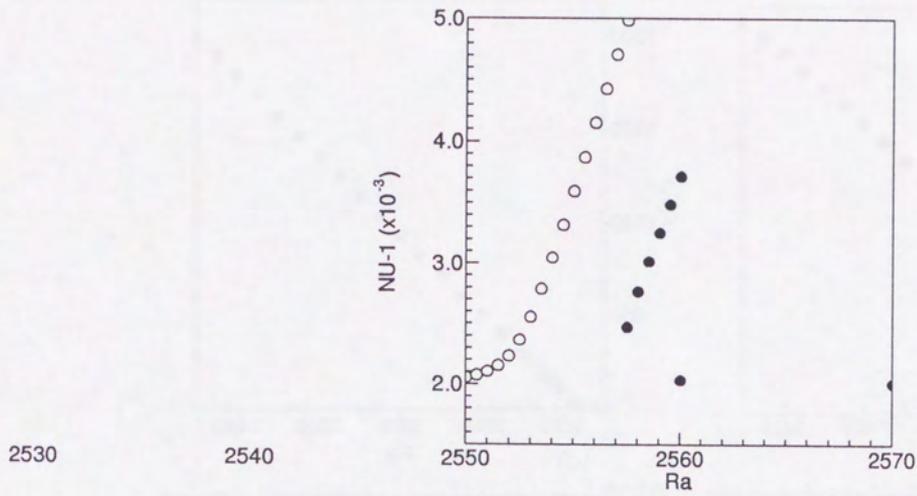


図 3.10. 図 3.9(a) の分岐点近傍の拡大図。白丸、黒丸は図 3.7 に同じ。マニ  
は  $Re = 10$  の場合と同様で、下降解の枝が鞍状・結節点分岐を

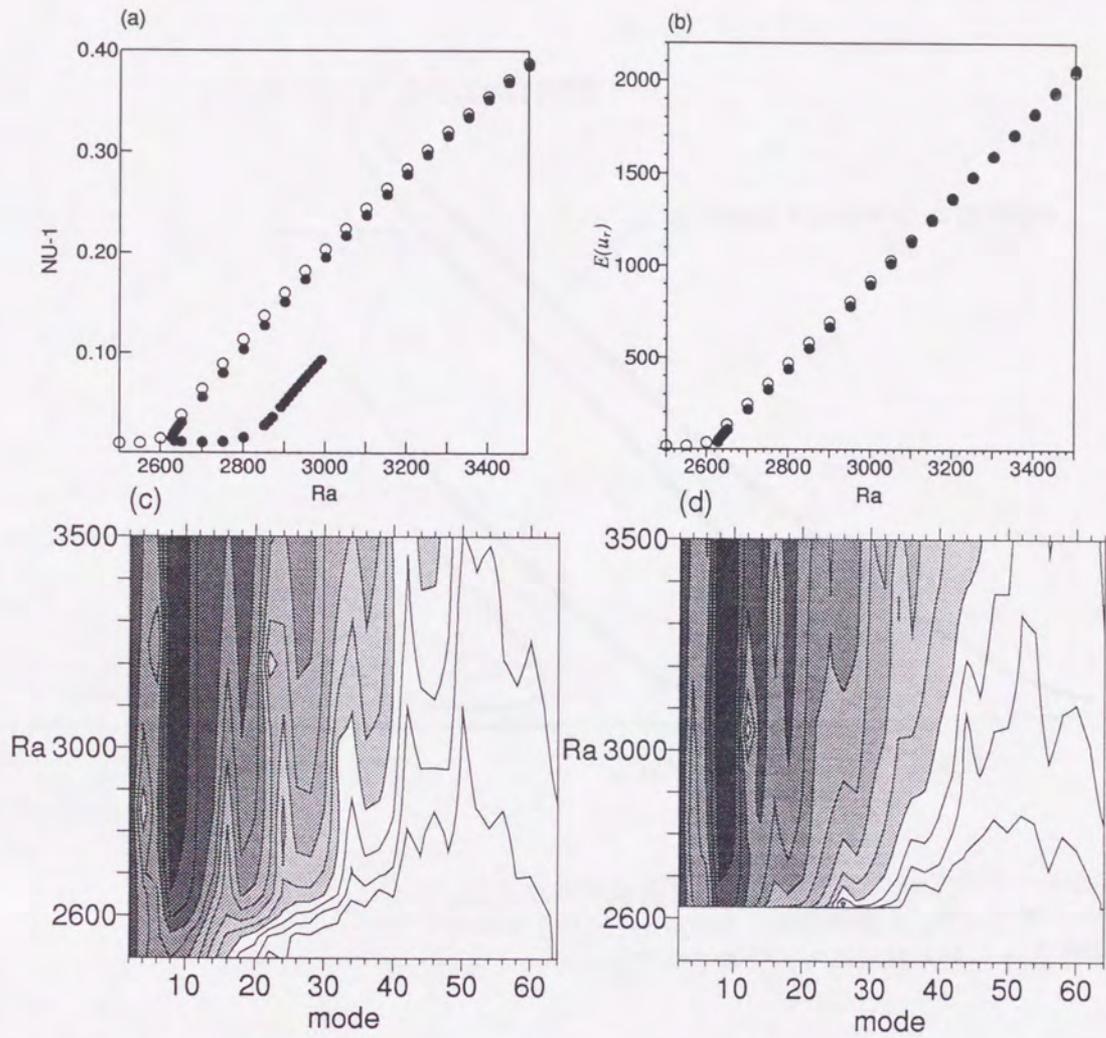


図 3.11.  $R = 2.23$ ,  $Re = 30$  の場合の、対称解の物理的性質の Rayleigh 数依存性。(a), (b), (c), (d) は図 3.7 と同様です。トポロジカルな性質は  $Re = 10$  の場合と同様で、下降解の枝は  $Ra = 2627$  以下には存在していません。

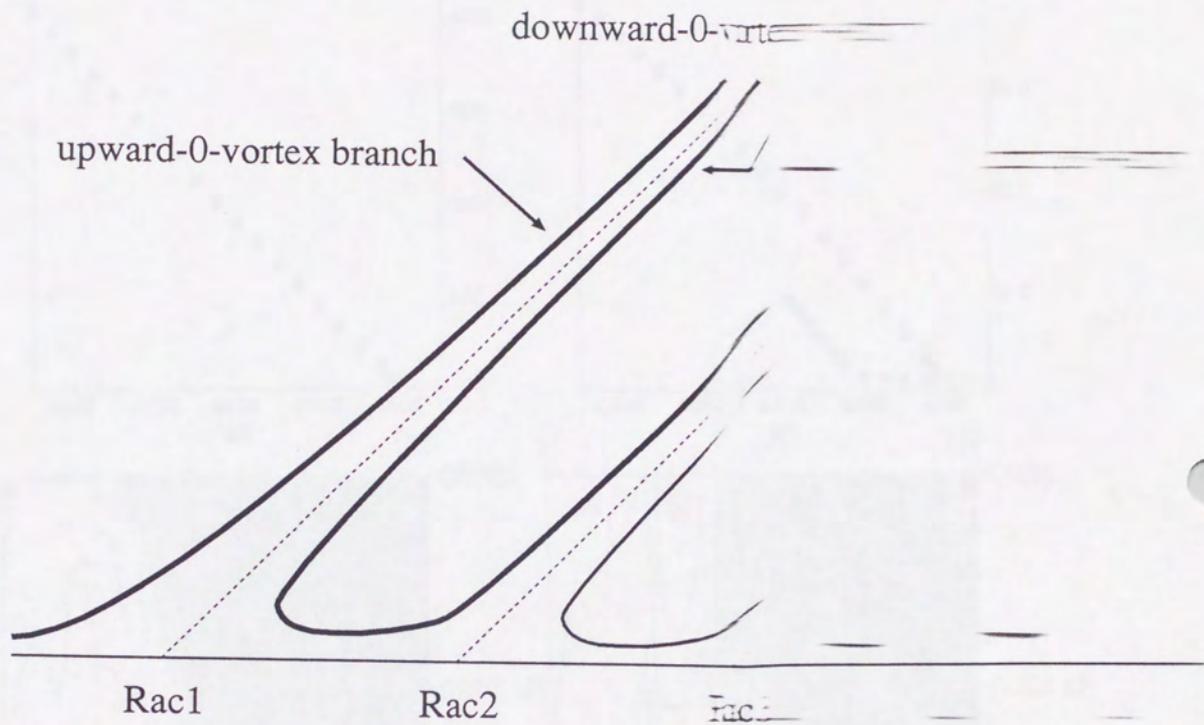


図 3.12. 対称モードの分岐のふるまいに対する影響の模式図。 $Ra_c$  はモードの固有値。0-渦解の枝は Benard 不安定な対称モードとして「切れ込み」を入れられて、分離されているものと思われる。

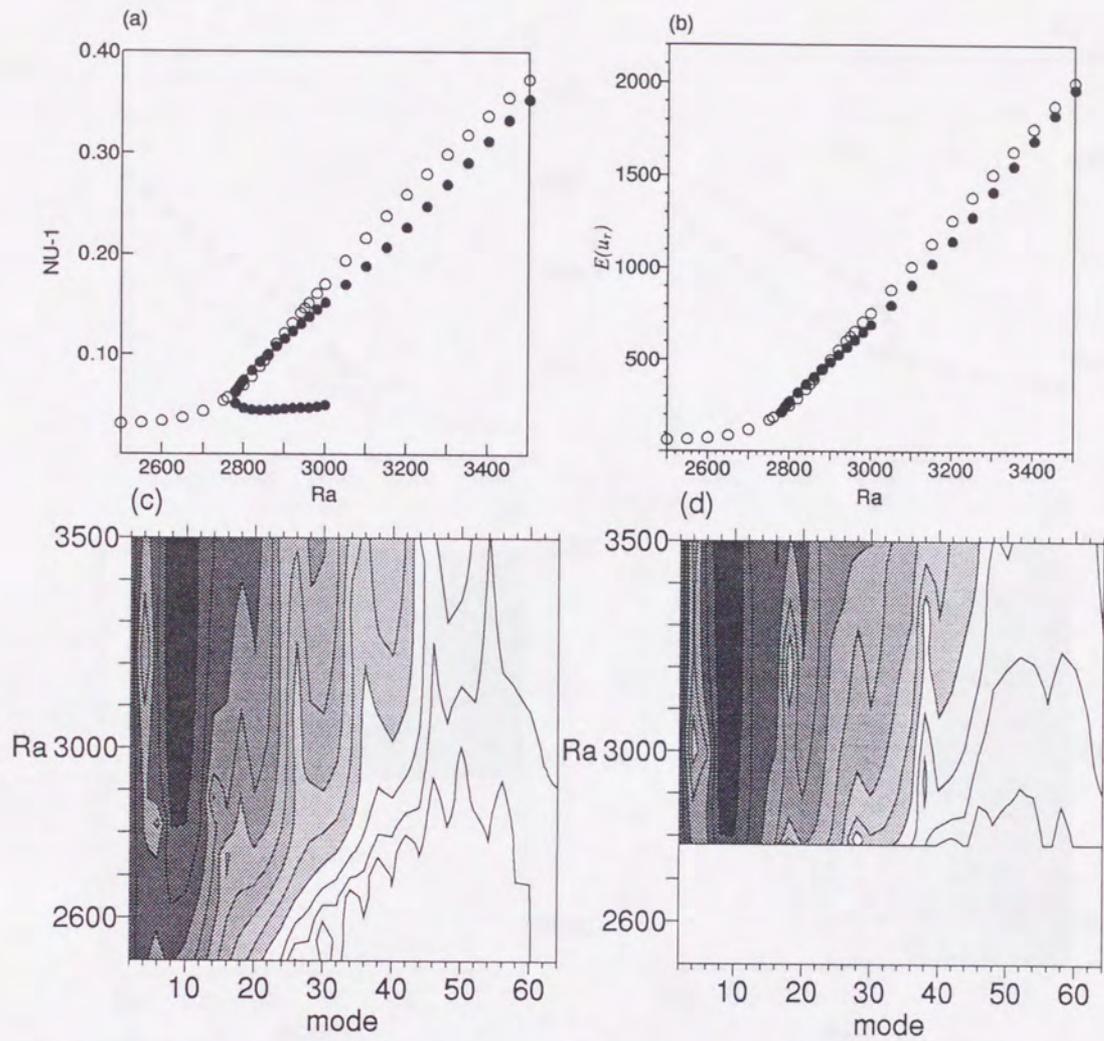


図 3.13.  $R = 2.23$ ,  $Re = 40$  の場合の、対称解の物理的性質の Rayleigh 数依存性。(a), (b), (c), (d) は図 3.7 と同様です。トポロジカルな性質は  $Re = 10$  の場合と同様で、下降解の枝は  $Ra = 2780$  以下には存在していません。

figure.3.13

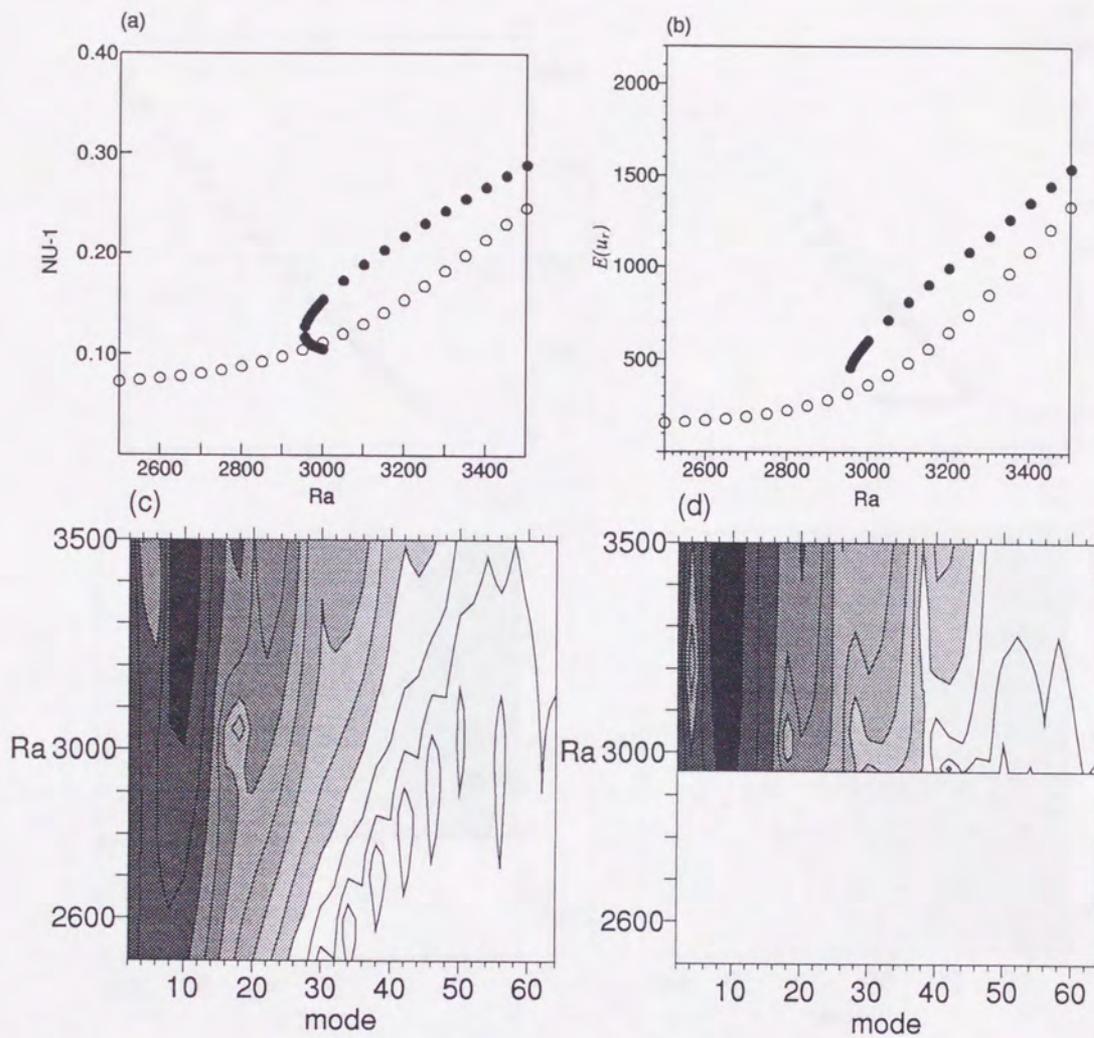


図 3.14.  $R = 2.23$ ,  $Re = 50$  の場合の、対称解の物理的性質の Rayleigh 数依存性。(a), (b), (c), (d) は図 3.7 と同様です。トポロジカルな性質は  $Re = 10$  の場合と同様で、下降解の枝は  $Ra = 2955$  以下には存在していません。

figure.3.14

## 4 結論

静止した球殻中での流体の Bénard 不安定性、および球殻 Taylor-Couette 流の Bénard 不安定性を、主に数値実験を用いて調べました。

まず、静止した球殻中での静止流体の Bénard 不安定性に関して、球殻のアスペクト比  $R$  の臨界 Rayleigh 数  $Ra_c$  に与える影響を、薄層極限 ( $R \rightarrow \infty$ ) からの漸近展開、および数値計算によって調べました。

$R \rightarrow \infty$  に対する漸近解析の結果、 $O(R^{-1})$  までのオーダーまでの臨界 Rayleigh 数の表式が、

$$Ra_c = Ra_c^{(0)} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{2} \lambda_G \right) \frac{1}{R} \right]$$

となることを示しました。ここで、 $Ra_c^{(0)}$  は水平な流体層での臨界 Rayleigh 数、 $\lambda_G$  は流体と内殻内の物質の密度比です。 $O(R^{-1})$  までの漸近解析の結果、このオーダーまでの臨界 Rayleigh 数の補正には  $Ra_c^{(0)}$  と重力場の形の情報のみが必要であり、臨界波数  $k_c$  の一次の補正はいらないことがわかりました。臨界波数の補正には、 $Ra$  の中立曲面の 2 次の導関数が必要となります。

有限の  $R$  に対する臨界 Rayleigh 数を、球面調和関数  $Y_l^m$  の主モード数  $l$  ごとの固有値問題として、数値的に解きました。漸近解析による表式は、数値計算との比較の結果、密度比パラメーター  $\lambda_G$  に対する臨界 Rayleigh 数のふるまいをよく表現し、また小さな  $R$  に対しても良い近似値を与えます。このことは、球殻という形状の効果を、薄層極限からの漸近展開によって、方程式に取り込むことができる可能性を示唆しています。

また、数値計算の結果、臨界モード数  $l$  は重力場の関数形には、依存しないことがわかりました。これは、臨界モードの「波数」が、系のアスペクト比のみの関数になっていることを示しています。

次に、内殻の差分回転に伴う流れ (球殻 Taylor-Couette 流) に対する逆転温度勾配の影響について、定常解を数値的に求めることによって、調べました。

回転の影響が境界条件としてのみ入ってくるので、系には南北反転に関する対称性が存在しています。この対称性は、南北反転の変換を  $\Gamma$  と表すと、運動方程式が  $\Gamma$  と可換であることとして表現されます。 $\Gamma$  の固有値は  $\pm 1$  であり、その各々に対応する解を対称モード、反対称モードと呼ぶことにします。

反対称モードの不安定化に伴う分岐は、解の符号の反転が南北の反転に伴ったかたちで表現されているので、熊手型分岐が存在するならば、それは完全な熊手型にはなりません。これに対して、対称モードは、解の各々が南北の反転に対して不変であるために、かえって分岐ダイアグラムの全体からみると、符号の反転に関する対称性を破ってしまう可能性のあることがわかりました。数値計算の結果、回転の無い場合においてさえ、対称臨界モードの分岐は、トポロジカルには熊手型ですが、各々の枝の解の熱輸送特性が異なっています。この熱輸送特性の非対称性は、重力場および平衡温度勾配の形が、流体層の中心に関して非対称なので、この方向の対称性の破れの結果であると思われます。

内殻が差分回転している場合には、南北両半球にひとつずつ大きな対流ロールをもつ 0-渦解が生成されます。数値計算の結果、0-渦解の存在にもかかわらず、臨界モードの主モード数  $l$  は、回転の無い場合と同じであることが、 $R = 2.23$  および  $R = 2.5$  の場合に確かめられました。

これは、回転の影響が境界条件としてのみ入ってくるためだと思われる。というのも、内殻の回転の向きの反転は、南北に関する流れの向きの反転の変換と等価になるから

です。これは、系がパリティの反転に対して不変であることのあらわれです。

$R = 2.23$  における、0-渦解-Bénard ロール解の分岐は、数値計算の結果、熊手型分岐が不完全になり、0-渦解-上昇解の枝と、鞍状・結節点分岐をする 0-渦解-下降解の枝に、トポロジカルに分離してしまうことが、わかりました。これは、各々の枝に属する解の対称性と矛盾しません。というのも、対称モードに属する解は、南北反転の変換によって、自分自身に写像されてしまうからです。不完全分岐の原因は、0-渦解の存在によって、対称モードに属するすべてのモードが、あらかじめ励起されているためだと思われます。

0-渦解-下降解の鞍状・結節点分岐の臨界 Rayleigh 数は、Reynolds 数とともに増加していることがわかりました。これは、定性的には、0-渦解のモードが系を安定化するはたらきがあることを示しています。

この分岐のふるまいを、エネルギー・スペクトルを用いて調べました。Reynolds 数の低いときには、臨界点の近傍において、急激な対流ロールのモードの成長が観察されました。Reynolds 数が高くなるにつれて、この対流ロール・モードの励起の始まりは曖昧になっていきます。これは、内殻の回転に伴う 0-渦解のモードと、Bénard ロールのモードの競合が、Reynolds 数の増加とともに強くなっているためだと思われます。

$l = 8$  の Bénard ロール解を、 $R = 2.5$  において追跡する数値計算を行ないました。 $l = 8$  のモードは  $R = 2.5$  においては臨界を与えないので、物理的にはあまり現実的ではありません。しかし、分岐のふるまいに対するアスペクト比の影響の重要性を調べる手がかりになります。数値計算の結果、 $R = 2.5$  の場合には 0-渦解との干渉に伴う分岐の不完全化は観察されませんでした。これより、 $R = 2.23$  での分岐の不完全化の起こる条件として、アスペクト比によって決まる臨界モードの対称性が、対称モードに属するときのみ、分岐の不完全化が生じるものと思われます。

以上の考察より、球殻中の流体の運動の Bénard 不安定性に伴う分岐の性格は、系のアスペクト比によって決まる有限サイズの効果に、強く支配されていると思われます。

## 謝辞

まず、私を球殻中の Bénard 問題へと導き、安定性の研究の最初歩から手取り足取り忍耐強く御指導下さった、水島二郎先生、柳瀬眞一郎先生に感謝します。また、この出来の悪い学生を寛容の精神で見守って下さり、流体力学の物の見方・考え方を御指導下さった、川原琢治先生、木田重雄両先生に感謝します。安定性問題に留まらず、様々な領域にわたる、私の愚かしい質問に、常に忍耐強く答えて下さった藤定義氏に感謝します。氏との議論は、常に私を問題の原点へとたち帰らせ、いい加減であった対象への理解を深める方向へと、導くものでした。

## 参考文献

- Belyaev, Y. N., Monakhov, A. A., and Yavorskaya, I. M., 1978, Stability of spherical Couette flow in thick layers when the inner sphere revolves, *Fluid Dyn*, **2**, pp.162-168.
- Busse, F. H., 1975, Patterns of convection in spherical shells, *J. Fluid Mech.*, **72**, pp.67-85.
- Busse, F. H., and Riahi, N., 1982, Patterns of convection in spherical shells. Part 2, *J. Fluid Mech.*, **123**, pp.283-301.
- Chandrasekhar, S., 1961, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon, Oxford.
- Chen, Y. Y., 1992, Boundary conditions and linear analysis of finite-cell Rayleigh-Bénard convection, *J. Fluid Mech.*, **241**, pp.549-586.
- Crawford, J. D., 1991, Introduction to bifurcation theory, *Rev. Mod. Phys.*, **63**, pp.991-1037.
- Galdi, G. P., and Straughan, B., 1985, A nonlinear analysis of the stabilizing effect of rotation in the Bénard problem, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A402**, pp.257-283.
- Glatzmaier, G. A., Shubert, G., Bercovici, D., 1990, Chaotic, subduction-like downflows in a spherical model of convection in the Earth's mantle, *Nature*, **347**, pp274-277.
- Gransdorff, P. and Prigogine, I., 1971, *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*, Wiley, London.
- Joseph, D. D., 1975, *Stability of Fluid Motions II*, Springer Verlag, Berlin.
- Joseph, D. D. and Carmi, S., 1966, Subcritical convective instability. Part 2. Spherical shells, *J. Fluid Mech.*, **26**, pp.769-777
- Marcus, P. S. and Tuckerman, L. S., 1987, Simulation of flow between concentric rotating spheres. Part 1. Steady states, *J. Fluid Mech.*, **185**, pp.1-30; Simulation of flow between concentric rotating spheres. Part 2. Transitions, *J. Fluid Mech.*, **185**, pp.31-65;
- Reichl, L. E., 1980, *A Modern Course in Statistical Physics*, University of Texas Press, Austin.
- Riahi, D. N. and Busse, F. H., 1988, Pattern generation by convection in spherical shell, *J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP)*, **39**, pp.699-712
- Straughan, B., 1992, *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection*, Springer, New York.