

②

学位申請論文

ゲーム力学系における  
新しい型の力学的振舞い

茶碗谷 毅

1995年9月

### Abstract

この論文では、これまで知られていない型の力学系のアトラクタ及びその近傍における相流の性質が関係する二つの現象について報告する。その一つは、軌道の漸近的挙動が非定常・カオス的な性質を示すというものである。これは、ヘテロクリニック軌道が作るネットワークがアトラクタとなる場合に見られる。このアトラクタに漸近する軌道は、幾つかの準平衡状態の間をカオス的な順序で遷移しながら動き回る。軌道の準安定状態への滞在時間は幾何級数的に延び続けるという特徴があり、この漸近的挙動は非定常的なものになっている。もう一つの現象は、相空間の中に可算無限個のアトラクタの列が共存するというものである。この場合、多数のアトラクタがヘテロクリニック軌道の作るネットワークに集積するような形で共存する。個々のアトラクタは周期軌道の場合とカオス的な軌道の場合の双方が見つかっている。これらの現象は共にゲーム力学系においてみられる、パラメータ空間の有限の領域において起こる生成的な現象である。これらの現象の存在を示す数値計算の結果と共に、このような現象が起こる機構について解析を行なった結果を示す。

# Contents

1	はじめに	2
1.1	ゲーム力学方程式	3
1.2	ロトカボルテラ系	5
1.3	漸近的挙動の定性的分類	6
1.4	個体数の長時間平均の漸近的な振舞いについて	9
2	非定常・カオス的な運動	12
2.1	相空間の構造の特徴	12
2.2	仮定	14
2.3	座標変換	15
2.4	サドル近傍	15
2.5	近似力学系の導入	17
2.6	縮約	18
2.6.1	変数の分離による縮約	18
2.6.2	帰還写像を使った解析	19
2.6.3	ヘテロクリニックサイクルの安定性	20
2.7	不規則にサドルを渡り歩き続ける運動	22
2.7.1	不規則運動への分岐	26
2.8	まとめ	27
3	可算無限個のアトラクタの共存	29
3.1	階層的な構造を持つヘテロクリニックネットワーク	29
3.2	数値実験で見られている軌道の例	30
3.3	帰還写像	38
3.4	帰還写像で見られる繰り返し構造の起源とその限界	43
3.5	パラメータの変化によって起こるこの他の現象	44
3.6	まとめ	46
4	議論とまとめ	49
4.1	より大自由度の系との関係	49
4.2	他の系との関係について	50
4.3	まとめ	51
A	線形近似の誤差の評価	52

# Chapter 1

## はじめに

散逸的な力学系を研究する上で重要と考えられる概念の一つにアトラクタという構造がある。これは、相空間上で様々な初期条件をもつ軌道を「引きつける」ような集合である。アトラクタが存在する場合、初期条件が一定の領域内にあれば、十分時間がたったあとでの軌道はアトラクタの近くに引き寄せられていると考えられる。したがってアトラクタの近傍での流れの性質を研究する事によって、初期条件の細かな違いにはよらない、長時間での系の挙動の一般的な性質を知る事ができることになる。このようなアトラクタの性質及びその近傍での流れの性質は、非線形の力学系の研究において大きな部分をしめてきた。

一般的な力学系で見られるアトラクタ及び対応する漸近的な振舞いは、平衡点(静止状態)、リミットサイクルアトラクタ(周期的な運動)、トーラス(準周期運動)、ストレンジアトラクタ(カオスの運動)に分類することができる。しかし、最近幾つかのモデル系において、これらの分類に当てはまらないタイプの漸近的挙動を示すものが現われる場合があることが報告されている。これはヘテロクリニック軌道がつくるサイクルがアトラクタになっていると考えられるもので、漸近的振舞いが非定常性を示すという特徴がある [1] [2][3][4] [5][6]。

この論文では、ゲーム力学系(レプリケーター方程式系)において見つかった、これまで知られていなかった2種類のアトラクタ及びその近傍での流れの性質について報告する。一つは、ヘテロクリニック軌道が作るネットワークがアトラクタとなるというものである。この場合軌道は幾何級数的に増大する時間間隔を持って、幾つかの準安定状態間を不規則に遷移し続けるという挙動を示す。またもう一つは、相空間中に可算無限個のアトラクタが共存するという構造が存在するというものである。個々のアトラクタはリミットサイクルの場合、及びストレンジアトラクタの場合の双方が存在することがわかっている。この場合、軌道は初期条件に応じてこの無限個のアトラクタのうちのどれかに引き寄せられて、周期的/カオス的な振動を続ける事になる。

これら2つの現象はともにヘテロクリニック軌道がつくる再帰的なネットワークの存在と密接に結び付いている。このようなネットワーク(サイクルも含む)が一般的なパラメータに対して存在できるためには、力学系はある種の条件を満たす必要がある。この論文では、ヘテロクリニック軌道のネットワークが生成的に存在できるような系の中で最も単純なモデルを使って解析を行なった。この系が持つ性質のうち、上で述べたような現象の存在に関与している部分は、一般的にある種の対称性を持つような系でも見られるものである。従って、物理的に意味のあると考えられる幾つかのモデル系においても同様の現象が起こり得る。

まずこの章ではこの論文で扱っているモデル系について簡単に紹介する。そして、次及びその次の章で上の二つの現象に関してそれぞれ数値実験の結果及び機構の解析を行なった結果を示す。最後にこれらの現象と関連して見つかった幾つかの現象についても触れる。

## 1.1 ゲーム力学方程式

この論文では、主にゲーム力学系またはレプリケーター方程式と呼ばれているモデルを扱う。この方程式系は動物の行動やゲーム理論における「戦略」の進化のモデルとして 1978 年に Taylor と Jonker によって提案された [7]。これは幾つかの戦略をとりえるような 2 者対戦型ゲームを繰り返し行なう競技者の集団において、各々の戦略の出現頻度の時間発展を記述するモデル方程式である。この方程式は、「ポピュレーションダイナミクス」つまり広い意味での生態系における個体数の変動を表すモデル方程式の一種である。

ポピュレーションダイナミクスに関する研究は比較的古くから行われている [8]。そして系を構成する種の数が少ない小規模のモデルの挙動に関しては詳しい研究がある。しかし多数の種を含むような系に関して一般的な議論を展開するのは難しく、得られている結果はかなり限られたものである。ポピュレーションダイナミクスの中では最も単純な部類に属するロトカボルテラ系やゲーム力学系についても、その挙動が明らかになっているのは系の自由度がせいぜい 3 程度迄で、それ以上の規模の系についてはまだよくわかっていない部分が多い。

この方程式系は、生態系における現象を記述するだけではなく、広い範囲の現象に関わっていると考えられる。その理由の一つは、この方程式が「自己複製」するものの多体系一般を記述するモデルとして、様々な現象に関係して現われるという点である。例えば「自己複製する分子」の反応系の進化のモデル [9] や、遺伝子の淘汰のモデル [10] など、生物の個体以外の「自己複製子」の系のモデルとしても同様の方程式が現れることが知られている。もう一つの理由は、この系が適度な対称性を持つ系でみられるような不変集合の構造をもつ最も単純なモデルになっていると考えられるためである。

この論文で扱っているような、構造安定なヘテロクリニック軌道が関係すると考えられる現象は、幾つかのモデル系で見つかっているが、不変集合の持つ特異な構造はこれらの現象と本質的な関係がある。この論文で展開している解析の本質的な部分は、これらのより複雑な系における類似の現象に対しても適用可能である。このゲーム力学系は、これらの系の力学、特にそれらのアトラクタの構造を研究する上で最も単純で見通しの良いモデルであり、解析に適しているものであると思われる。

次にこのゲーム力学方程式を具体的に紹介しておく。このモデルは基本的には次のような状況における戦略の進化を記述しているものであると考えられる。「二者対戦型のゲームを行う競技者の集団を考える。このゲームには採りうる選択肢が幾つかあって競技者はそれらのうちどれかを選択する。そして自分と対戦相手の選んだ選択肢の組み合わせによって各々が得点を受け取る。このゲームは対戦相手を変えながら何回も繰り返される。各選択肢が選ばれる確率は、その選択肢をその集団の中でとった場合の得点の期待値が高ければ増加して、低ければ減少して行く。」この様な状況は例えば動物行動の進化を考える際に現れると考えられる [11]。

集団全体としての「戦略」 $p$ を、集団全体を平均したときの各選択肢がとられる確率の分布で定義する。この時戦略 $p$ をもつような集団(のメンバー)と戦略 $q$ を持つような集団(のメンバー)が対戦した場合の $p$ 側の得点の期待値を $P(p|q)$ と表すことにする。この時、戦略 $p$ が「安定」に実現されるためには、他の戦略を持つような集団が「侵入する」ことがあってはいけない。つまり、 $p$ は次のような条件を満たさなければならないと考えられる。[12]。

- $P(p|p) \geq P(q|p)$
- if  $P(p|p) = P(q|p)$  then  $P(p|q) > P(q|q)$

この条件は進化的に安定な戦略 (ESS) の条件呼ばれている。ゲーム力学系はこのESSの状態を局所安定な平衡点として持つような力学系として提案されたものである。

ここで扱うモデル方程式の形は、

$$\dot{x}_i = \left( \sum_j g_{ij} x_j - \sum_j \sum_k g_{jk} x_j x_k \right) x_i, \quad (1.1)$$

というものである。ただし、拘束条件として

$$\sum_i x_i = 1, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad (1.2)$$

を考慮して相空間のうちでこの条件を満たすような部分のみを考える。(1.1)式の $i$ についての和を取れば、この方程式系が超平面 $\sum_i x_i = 1$ を不変に保つことは簡単に確かめることができる。また初期条件において $x_i \geq 0$ が満たされていれば、任意の時刻において $x_i \geq 0$ が成り立つのもまた明らかである。後の議論を進める上での便宜上、各成分の「成長率」 $\lambda_i$ を次のように定義しておく。

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i, \quad (1.3)$$

$$\lambda_i = \sum_j g_{ij} x_j - \sum_j \sum_k g_{jk} x_j x_k, \quad (1.4)$$

ここで、 $x_i$ は $i$ 番目の選択肢が選ばれる確率を表す。また、 $g_{ij}$ は二人の競技者がそれぞれ $i$ 番目と $j$ 番目の選択肢を選んだ場合に、 $i$ をとった側の競技者が受け取る得点を表す。この行列 $g_{ij}$ はゲームの内容を規定するもので、この力学系が持つパラメータにということになる。それぞれの選択肢を選んだ場合の得点の期待値と、その選択肢を選ぶ確率の変化の間に(1.4)式のような関係があるので、(その時点の「環境」、つまり $\vec{x}$ の値に対して)平均よりも高い得点を挙げられるような選択肢が選ばれる確率は高く、逆に期待値が低い選択肢が選ばれる確率は低くなるように変化する。

この方程式は、 $i$ が種の区別を表し、 $x_i$ を種 $i$ の個体数の全体に対する比率を表すとみなすと、個体数の総和が一定となるような条件のもとでの、生態系の時間発展のモデル方程式ともみることができる。この場合 $g_{ij}$ は種 $j$ の一個体が種 $i$ の成長率(死亡率)へ及ぼす影響を表す係数であると考えられる。種固有の増殖率は各々異なっていると考えられることから、 $a_i x_i$ の様な項( $x_i$ について1次の項)を考える必要があるようにも見えるが、これは

$g_{ij} \rightarrow g_{ij} + a_i$  というように、 $g_{ij}$  の対応する行の全ての成分に「種固有の増殖率」を加えることによって  $g_{ij}$  の中に吸収できるので、特にそのような項を追加する必要はない。

このモデルを他のポピュレーションダイナミクスモデルと比べたときの特徴の一つは、個体数の総和が一定値に保たれるという拘束条件を持っている点である。これは (1.4) 式の第 2 項のような形で、全ての種の成長率に対して一様に適当なバイアスをかけることによって実現されている。またもう一つの特徴は、相互作用の単純さである。このモデルで取り入られている相互作用は二体間のものに限られ、しかもそれらは全て（それぞれの種の成長率に対する）線形の相互作用として扱われている。これらの特徴は解析をやすくしているが、この論文で注目している現象に関してはあまり本質的な点では関与していない。従って個体数の総和が変動する系や、非線形の相互作用を持つ系の場合にも同様な現象は起こる。例えば個体数の和が一定であるという性質が本質的に重要でないということは、この方程式がすぐ次の節で述べるロトカボルテラ系（このモデルは個体数の総和を保存しない）と実質的には等価な方程式系とみなすことができることからわかる。

## 1.2 ロトカボルテラ系

この節ではロトカボルテラ方程式とゲーム力学方程式との関係について簡単に紹介する。ロトカボルテラ方程式は 1920 年に Lotka が化学反応系のモデルとして [13]、1931 年に Volterra が被食者・捕食者の関係にある魚の個体数変動のモデルとして [14] 独立に提案した方程式系で、微分方程式による生態系のモデルとしては最も古典的でまた最も単純なものの一つである。

元々の方程式は、被食者・捕食者の関係にある 2 種の生物の個体数変動をモデル化したもので、

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad (1.5)$$

というものである。この方程式系においてもゲーム力学系の場合と同様、二種間の相互作用はそれぞれの個体数の積つまり個体同士の遭遇頻度に比例する形で取り入れられている。この方程式を 2 種だけでなくより多数の種に対しても一般化した方程式、

$$\dot{u}_i = (a_i + \sum_j b_{ij}u_j)u_i \quad (1.6)$$

もやはりロトカボルテラ方程式と呼ばれている。オリジナルの方程式においては  $b_{ii}$  に相当する項は入っていなかったが、一般的にはこれも取り入れた形で扱う。この項は同じ種の個体同士の相互作用、いわゆる込み合いの効果を表していると考えられる。

ロトカボルテラ方程式とゲーム力学方程式との間には、表面的には

- (1.6) 式の右辺が  $u$  について 1 次及び 2 次であるのに対して、ゲーム力学方程式 (1.1) の右辺は  $x$  について 2 次及び 3 次の式になっている。
- ゲーム力学系の相空間が有界であったのに対して、ロトカボルテラ系の方はそうではない。

などの違いがある。しかしこれら二つの系は変数変換による対応付けが可能である [15]。この際、 $n$  成分を持つゲーム力学系には  $(n-1)$  成分のロトカボルテラ系が対応する。この対応を見るためには、

$$u_i = \frac{x_i}{x_n} \quad (1.7)$$

という変換を考えてやればよい。(1.7) 式および、(1.1) 式より、

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \frac{d}{dt} \left( \frac{x_i}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{x_n} \left( \dot{x}_i - \frac{\dot{x}_n}{x_n} x_i \right) \\ &= \frac{1}{x_n} \left( \sum_j g_{ij} x_j - \sum_j \sum_k g_{jk} x_j x_k - \sum_j g_{nj} x_j + \sum_j \sum_k g_{jk} x_j x_k \right) x_i \\ &= \frac{x_i}{x_n} \sum_j (g_{ij} - g_{nj}) x_j \\ &= u_i \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} (g_{ij} - g_{nj}) u_j + (g_{in} - g_{nn}) \right\} x_n \end{aligned}$$

となる。 $x_n$  は軌道上の運動の速さだけに関係しており、これを除いても軌道そのものは変化しない。従って

$$a_i = g_{in} - g_{nn} \quad , \quad b_{ij} = g_{ij} - g_{nj} \quad (1.8)$$

とおけば (1.6) 式と (1.1) 式の二つの方程式系の軌道の間に対応を付けることができる。

ロトカボルテラ系ではパラメータの値によっては有限時間で個体数が無限大に発散する爆発解が見られる。この現象には、ゲーム力学系の相空間が単体上に制限されているのに対して、ロトカボルテラ系の相空間は有界でないという相違点が端的に現われている。この爆発解は上の (1.7) 式による対応付けでは  $x_n = 0$  の平面へ漸近する軌道に対応する。ゲーム力学系においては有限時間では  $x_n = 0$  の平面へは到達しないが、軌道上の運動の速さの因子の違いにより、対応するロトカボルテラ系においては有限時間で発散が起こることになる。このように (1.7) 式の関係を使ってゲーム力学系とロトカボルテラ系との対応を考える場合には、 $x_n = 0$  の面に近づく軌道については注意して扱う必要がある。しかし、大概の点においてはゲーム力学系とロトカボルテラ系とはよく対応しており、それぞれの系で得られている結果の大部分は相互に翻訳可能になっている。この論文で引用しているゲーム力学系の性質も、元はロトカボルテラ系の研究の中で明らかにされたものが多い。

### 1.3 漸近的挙動の定性的分類

この節及び次の節では、ゲーム力学系の漸近的な振る舞いについてこれまでの研究でわかっていることのうちで、この論文の内容に関係の深い部分について簡単にまとめておく。まずは漸近的挙動とそれに対応するアトラクタの定性的な分類について述べる。

**静止状態への漸近** 漸近的な振る舞いとして最も単純なものは、安定な静止状態へ漸近するというものである。これは相空間においては安定な平衡点へ収束する軌道に対応する。このような軌道は系に含まれる成分の数がいくつであっても現われる。



**振動状態** 静止状態の次に単純な挙動として、振動的振舞いがある。周期運動自体は2自由度しか持たないオリジナルのロトカボルテラ系(1.5)においても見られる。しかしこの周期軌道は中立安定で、リミットサイクルにはなっていない。またこの振動的振舞い自体、一般のロトカボルテラ系(1.6)のパラメータ空間の中で見ると、全ての $i$ に対して $b_{ii} = 0$ が成り立つという条件を満たすメジャーゼロの集合の上でしか起こらない。従ってこれは例外的な現象であると考えられる。

より一般的な振動的挙動は、もう一つ成分の数が多い系で初めて見られる。つまり三つ以上の成分をもつロトカボルテラ系及び四つ以上の成分を持つゲーム力学系である。これらの系では平衡点がホップ分岐を起こしてリミットサイクルが現われうることが示されている[15]。

一般的な力学系の性質としては、リミットサイクルは相空間の自由度が2以上であれば現われてもおかしくはない。自由度2のゲーム力学系やロトカボルテラ系においてリミットサイクルが現われないのは、成分間の非線形の相互作用を考えていないためである。非線形の相互作用を持つ系では自由度が2の生態系モデルにおいてもリミットサイクルが存在できる[16]。

**カオス的な状態** 相空間の自由度が三以上、つまりロトカボルテラ系ならば三成分以上、ゲーム力学系ならば四成分以上を持つ系では、カオス的な振舞いが現われうることが確かめられている[17][18]。

**爆発解** ロトカボルテラ系においては、爆発解もまた成分の数が一つの場合から見られる振舞いである。しかし、これは先に述べたようにゲーム力学系では $x_n = 0$ の超平面に漸近するような通常の軌道に対応させることができるので、ここではこれ以上は特に触れない。

**ヘテロクリニックサイクルへの漸近** これまでにあげた挙動は(爆発解は別として)一般的な力学系においてもみられるものであるが、この系では他の系ではあまり見られない特徴的な漸近的挙動を示す例が存在することも知られている。ヘテロクリニックサイクルへの漸近[1]である。これはゲーム力学系においてもロトカボルテラ系においても系が3つ以上の成分を含む場合に起こりうる。この場合見られる漸近的挙動は、「3つの成分のうち1つの成分だけが1に近い値を持ち、残りの2つの成分の値がほとんどゼロになるという状態を、1に近い値を持つ種を順番に交代しながら繰り返す。」というもので、その周期が幾何級数的に伸びるという特徴を示す。この場合それぞれの成分が完全に「絶滅」する(つまり $t \rightarrow \infty$ において $x_i(t) \rightarrow 0$ となる)ことはないが、振動の一周期の間の各成分の最低値はいくらでもゼロに近づく。この場合に対応する時系列は図1.1のようなものである。

**パーマネンスとパーシステンス** パラメータの値と系の漸近的挙動との関係、つまりこの系における相図は系の自由度が3以下の場合にはある程度調べられている[19][20][21]。しかし、行列 $g_{ij}$ の各成分がこの系のパラメータであるから、系に含まれる成分の数を $n$ とすると、パラメータの数は表面上は $n^2$ 個、独立でないものを除いても $n^2 - n - 1$ 個ある(ゲーム力学系の場合)。また成分の数が多くなるにつれて複数のアトラクタが共存する場合も多くなる。

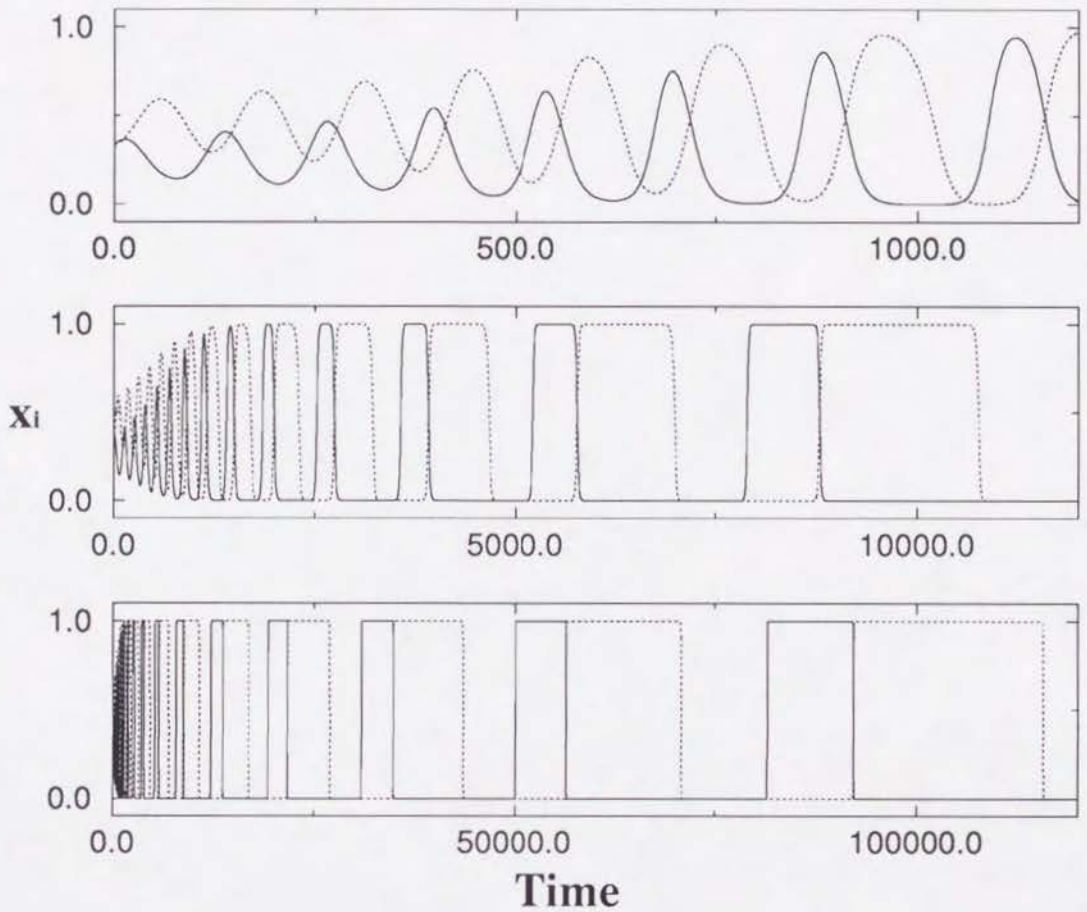


Figure 1.1: ヘテロクリニックサイクルへと漸近する軌道の例

この図は3成分のゲーム力学系で数値的に得られた軌道を元に、そのうちの2成分 ( $x_1, x_2$ ) の時間変化を表示したものである。パラメータは、

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0.0 & -0.09 & 0.12 \\ 0.1 & 0.0 & -0.1 \\ -0.11 & 0.05 & 0.0 \end{pmatrix},$$

としてある。また初期条件は  $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$  である。実線は  $x_1$ 、破線は  $x_2$  の時間変化を表す。3つの図は同一の軌道について、異なる時間のスケールを取って描いたものである。軌道が準安定状態の近傍に留まる時間は次第に長くなるが、それらの状態の間を遷移するのにかかる時間はほとんど変わらないことがわかる。

そのためそれ以上種の数が多い場合について、具体的にパラメータの値と漸近的挙動との対応を求めて細かい相図を描くことは困難であり、またあまり有用であるとも思えない。

そこで、一つの方向として系に含まれる種が絶滅するか、それとも全ての種が共存しつづけることができるかという点に着目しての研究が進められた [22][23][24]。ところで、ヘテロクリニックサイクルへの漸近の例を見てもわかるように、ゲーム力学系やロトカボルテラ系においては「全ての種が絶滅しない」ということが、「全ての種が共存する」ことを意味しない。この系の場合初期条件で  $x_i > 0$  であれば  $x_i = 0$  になることはないので、「絶滅」は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (1.9)$$

を意味すると考えるのが自然である。これに対して「絶滅しない」条件は、パーシステンスの条件と呼ばれており、

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) > 0 \quad (1.10)$$

で表される [25]。これに対して「共存する」条件、つまり「全ての種が常に一定以上の個体数を維持する」条件は、パーマネンスの条件と呼ばれていて、

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) > \delta, \delta > 0 \quad (1.11)$$

となる [26]。当然パーマネンスの条件はパーシステンスの条件の十分条件になっている。Hofbauer らのテキスト [16] の定義では、相空間内部の任意の点から出発する軌道が全ての種についてこれらの条件を満たす場合にこれらの言葉を使っている。この論文の中では、便宜上あるアトラクタに対応する吸引領域（ベージン）に初期条件をもつ軌道に対してこれらの条件が成り立つ場合には、対応するアトラクタを「パーマネンスの条件を満たすアトラクタ」と呼ぶことにする。

この論文で報告する一つめの現象（第2章）は、このヘテロクリニックサイクルへの収束と多くの点で共通する性質を持つ非定常な運動である。それらに対応するアトラクタは、パーシステンスの条件を満たしているが、パーマネンスの条件は満たしていないようなものになっている。これについては改めて次の章で分析する。

## 1.4 個体数の長時間平均の漸近的な振舞いについて

この節ではパーマネンスの条件を満たすアトラクタに収束する軌道の上での個体数の時間平均と、相空間内部にある平衡点との関係について述べる。この関係は具体的には

- ゲーム力学系がパーマネンスの条件を満たすアトラクタを持つ場合、そのアトラクタに収束する軌道に対する個体数の時間平均は、相空間の内部にある平衡点に収束する。

というものである [16]。これは同時に、パーマネンスの条件を満たすアトラクタが存在する場合には必ず相空間の内部に平衡点が存在するということも意味している。これは以下のようにして示すことができる。

相空間内部の平衡点、(つまり全ての種について  $x_i \neq 0$  となるような平衡点) は連立方程式

$$\begin{cases} \sum_j g_{ij} x_j = \bar{s}, & (i = 1, \dots, n), \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

の解になっている。ここで  $\bar{s}$  は平均得点を表す  $i$  によらない数である。連立方程式

$$\sum_j g_{ij} x_j = 1, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.13)$$

の解は一般的には一意に決まる。この解を  $\bar{p}_i$  とするとき、

$$\bar{s} = \left( \sum_i \bar{p}_i \right)^{-1} \quad (1.14)$$

$$p_i = \bar{p}_i \bar{s} \quad (1.15)$$

とおけばこれらは (1.12) 式の唯一の解となる。従って一般的には (1.12) 式を満たす  $p_i$ 、 $\bar{s}$  は一意に決まる。

一方、個体数及び適応度の長時間平均を、

$$X_i(T) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt x_i(t), \quad (1.16)$$

$$S_i(T) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \left( \sum_j g_{ij} x_j(t) \right), \quad (1.17)$$

$$\bar{S}(T) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \bar{s}(t), \quad (1.18)$$

として定義する。ここで (1.3) 及び (1.4) を  $t = 0$  から  $t = T$  まで積分して  $T$  で割ると、

$$\frac{\log x(T) - \log x(0)}{T} = S_i(T) - \bar{S}(T) \quad (1.19)$$

が得られるが、パーマネンスの条件より、 $T$  によらない定数  $\epsilon > 0$  が存在して、 $\epsilon < \log x(0) < 1$ 、 $\epsilon < \log x(T) < 1$  が成り立つとしてよい。従ってこの式の左辺の分子の絶対値は常に  $|\log(\epsilon)|$  よりも小さい。従ってこの式の左辺は  $T \rightarrow \infty$  で 0 に収束する。また  $S_i$  の定義の式で和と積分の順序を入れ換えると  $S_i(T) = g_{ij} X_j(T)$  が得られる。従って

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_j g_{ij} X_j(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{S}(T), \quad (1.20)$$

がえられる。一方任意の時刻で (1.2) 式が成り立つことから、

$$\sum_i X_i(T) = 1 \quad (1.21)$$

は  $T$  の値によらず常に成り立つ。(1.12) の解が一意であるとする、(1.20) 及び (1.21) より  $\lim_{T \rightarrow \infty} X(T)$  は  $p_i$  と、 $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{S}(T)$  は  $\bar{s}$  と各々一致する。従って  $X_i(T)$  は  $p_i$  に収束することがわか

る。また、ゲーム力学系の相空間は凸なので  $X_i$  の収束する先は空間の内部にあることは明らかである。

この性質はアトラクタが平衡点、リミットサイクル、ストレンジアトラクタなどのうちどれの場合であっても成立する。もし一部の種が絶滅するような場合には、それらの種を除いた部分系を考えればよい。その部分系のアトラクタがパーマネンスの条件を満たす場合には、部分系の相空間内部の平衡点（元の系から見るとこの平衡点は境界上の平衡点ということになる）とこのアトラクタの間には同様の関係が成り立つ。ロトカボルテラ系においても、パーマネンスの条件を満たすアトラクタに漸近する軌道上での個体数の平均値と相空間内部の平衡点の間には同じような関係が存在する。

漸近的な運動における各成分の長時間平均が平衡点での値に収束するという性質は、アトラクタがパーマネンスの条件を満たす場合に限られる。アトラクタがヘテロクリニックサイクルへの場合には、アトラクタに漸近する軌道上でとった個体数の長時間平均は、平衡点へと収束する代わりにある閉曲線（多角形）に巻き付いて、幾何級数的に周期が延びるような振動を示す [27]。

# Chapter 2

## 非定常・カオス的な運動

この章ではまずゲーム力学系の相空間が持つ特徴的な構造について述べる。その後で、この構造が深く関係している、ヘテロクリニック軌道のネットワークの近傍での軌道の振舞いについて述べる。特にカオス的な特徴とヘテロクリニックサイクルアトラクタへ漸近する軌道の特徴を合わせ持ったような、新しい型の運動の存在について述べる。

### 2.1 相空間の構造の特徴

ゲーム力学系は、拘束条件 (1.2) を見るとわかるように、閉じた相空間を持っている。この相空間の形は  $n-1$  次元空間中の単体になっている。そして、単体の表面 ( $n$  個の  $n-2$  次元単体) は、各々が  $x_i = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$  で表され、各々が相流に対する不変集合となっている。これら  $n-2$  次元単体の表面もまた各々が不変集合となっていて、階層的な構造を作っている。

これらの単体上の相流は、元の方程式系において幾つかの成分を無視することによってえられるような、ゲーム力学系の方程式で表すことができる。ここではこの一部の成分を無視することによってえられるゲーム力学系を「部分系」と呼ぶことにする。

この様な不変集合の階層的な構造は、この系の漸近的挙動に対して重要な関係を持つ幾つかの特徴をもたらしている。一つは、多数のサドルが相空間内 (正確には相空間の境界上) に共存するという点であり、もう一つはそれらのサドルの間を結ぶヘテロクリニック軌道が構造安定に存在するという点である。

上で述べた各々部分系はそれぞれ閉じた相空間を持つ力学系なので、必ず一つは平衡点を持つ。部分系の平衡点は全体の平衡点にもなっているので、ゲーム力学系は全体としては多数の平衡点を持つことになる。(ただし一般的にはその多くはサドルである。)

ところでこれらの平衡点のほとんどは相空間の境界上にあり、相空間の「内部」には平衡点は一般的には高々一つしかないことを示すことができる。これは  $g_{ij}$  が縮退していない場合、平衡点においては、全ての成分が  $x_i > 0$  を満たすとすると、全ての  $i$  について  $\lambda_i = 0$ 、つまり  $\sum_j g_{ij} x_j = C$  ( $C$  は任意の定数) が成り立つこと、及び拘束条件  $\sum_i x_i = 1$  が成り立つことから  $(n+1)$  個の条件式が与えられ、これらにによって、 $(n+1)$  個の変数全て ( $x_i$  及び  $C$ ) の値が一意に決まるためである。(cf.1.4 節)

これは適当な部分系をとって成り立つため、各平衡点はそれを相空間の内部に含むような部分系を指定することによって特定することが出来ることになる。部分系を指定するためには考慮する成分の集合を与えればよい。そのようなわけで、この論文では  $\{1, \dots, n\}$  の適当な部分集合を使って平衡点を指定することにする。例えば  $\{3\}$  は  $x_3 = 1$  で他の成分は全てゼロであるような平衡点、 $\{1, 2\}$  は  $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 = 1$  をみたし、残りの成分はゼロであるような平衡点を表す。

これらの平衡点の近傍における相流を扱う際、便宜上平衡点における非ゼロ成分に対応するものと、ゼロ成分に対応するものをわけておくことにする。ここでは前者をメジャーな成分、後者をマイナーな成分と呼ぶことにしておく。

この系のもう一つの重要な特徴は、この系においてはヘテロクリニック軌道が「構造安定」に存在できるという点である。ヘテロクリニック軌道は二つのサドルをつなぐような軌道、つまり  $\alpha$ -極限集合としてあるサドル  $A$ 、 $\omega$ -極限集合として別のサドル  $B$  を持つような軌道のことである。「構造安定」とは力学系が微小に変化した時、ヘテロクリニック軌道も連続的に変化するということをさす。構造安定でない場合には、微小な力学系の変化によってヘテロクリニック軌道そのものがなくなってしまう場合もある。

一般的な力学系においては、 $A$  の不安定多様体の次元と  $B$  の安定多様体の次元を足したものが、力学系の自由度よりも大きくないかぎり、力学系が微小に変化した場合にこれらを結ぶヘテロクリニック軌道は壊れてしまうことが知られている [28]。  $A, B$  がともに双曲的な平衡点であるとすると、 $A$  の安定多様体よりも  $B$  の安定多様体の方が次元が大きくなければ、ヘテロクリニック軌道は構造安定にはなれないことになる。つまり幾つかのサドル間を結ぶヘテロクリニック軌道が全て構造安定となるためには、それらのサドルをヘテロクリニック軌道で結ばれた順序にならべた時に、各サドルの安定多様体の次元は単調に増加していなければならないことになる。従って構造安定なヘテロクリニック軌道がサイクルのような再帰的構造を作ることはありえないことになる。

ゲーム力学系の場合には、パラメータの変化によって壊されないような部分系（に対応する不変集合）が存在するため事情が異なる。サドルは適当な部分系においてアトラクタになっている場合がある。各部分系において、サドル又はリペラーからアトラクタに向かうような軌道は、系のパラメータを微小に変化させても壊れないという意味で構造安定である。これは全体の系における各々のサドルの安定多様体の次元とは関係がないので、このような軌道が再帰的な構造を作ることも可能である。簡単な例として図 1.1 で示した系を挙げておく。この系の相空間は図 2.1 のようになっている。この三角形の各辺は各々が 2 成分からなる部分系を表している。この場合、 $\{1, 2\}$  の部分系では  $\{2\}$  がアトラクタになっているので、 $\{1\}$  と  $\{2\}$  を結ぶヘテロクリニック軌道はパラメータを変えても壊れない。同様に  $\{2, 3\}$  の部分系においては  $\{3\}$  が、 $\{1, 3\}$  の部分系においては  $\{1\}$  がアトラクタになっているので、それらも「構造安定」なヘテロクリニック軌道である。従ってこれら 3 つのサドルの間を順に結ぶようなヘテロクリニックサイクルもまた「構造安定」なものであることがわかる。

ヘテロクリニック軌道は単純なサイクルだけでなく、「分岐」を含むようなもっと複雑な構造を作る場合もある。この論文で扱う現象にはそれらのヘテロクリニック軌道が作る複雑なネットワークが直接的に関与している。これらのネットワークを構成するヘテロクリニック軌道も上で触れたような意味で構造安定であり、ネットワーク全体もパラメータを微小に

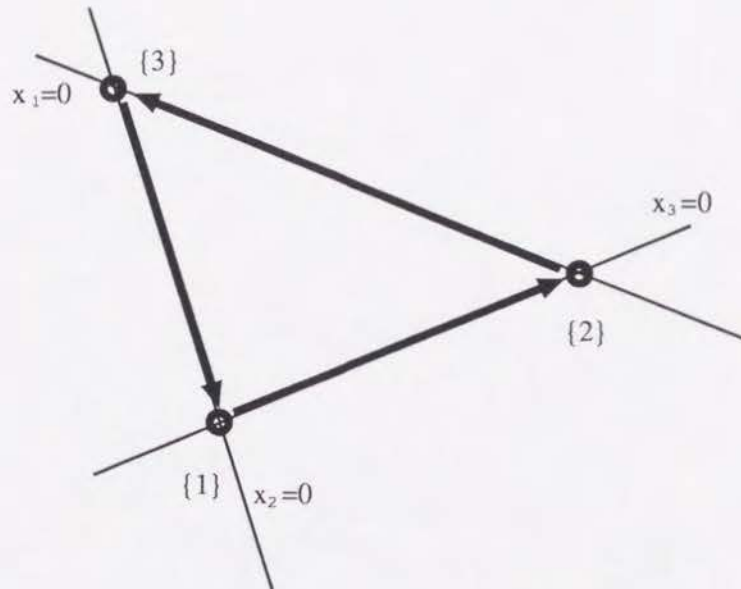


Figure 2.1: ヘテロクリニックサイクルアトラクタを持つ3成分系の相空間の模式図

小さな丸が平衡点(サドル)、矢印がヘテロクリニック軌道を表す。矢印が載っているやや細い直線は  $x_i = 0$  の面(パラメータの値によらない不変集合)を表す。ヘテロクリニック軌道はパラメータの値を変えても直線上から外れる事はないので、このヘテロクリニックサイクル自体はパラメータを微小に変えても壊れない。

変化させても壊れないものになっている。

## 2.2 仮定

以下の節ではヘテロクリニック軌道の近くでの軌道の振舞いの定性的な分析を行なう。この議論においては、

**A** サドル近傍に滞在する時間のスケールはサドル間の遷移に要する時間に比べて圧倒的に長い。

**B** 軌道に関係する全てのサドルは双曲的な平衡点である。

という2つの条件が成り立つことを前提としておく。

軌道がヘテロクリニック軌道の十分近くにいる期間については、軌道がサドルの近くを通る際には各サドルの十分近付くを通る。従ってサドル近傍での滞在時間は長く、**A** の条件は成り立つと考えられる。特に軌道がヘテロクリニック軌道の作るアトラクタへと吸引される場合には、時間  $t$  が十分大きい極限でこの条件は成り立っていると考えられる。一方 **B** の仮定はパラメータの値によって、成り立つ場合と成り立たない場合があり、どちらの場合も生成的なものである。次の章ではこの仮定が成り立たないような一つの例について扱う。**B** が成り立たないような例は、次章で扱うが、その他にも平衡点のかわりにサドル的なりミットサイクル/「ストレンジアトラクタもどき」が現われる例などがある。



## 2.3 座標変換

サドルやヘテロクリニック軌道の近傍での軌道の振舞いを調べる際、元の変数を使った表現よりも、その対数を使った方が見通しがよい。そこで、

$$y_i \equiv \log x_i, \quad (2.1)$$

によって定義されるような変数  $y_i$  を導入する。この変数変換は、元の座標系における相空間の内部でのみ定義できる変換であるが、

- 初期条件が相空間の内部にある場合、軌道は任意の時刻で相空間の内部に留まる。
- 初期条件が相空間の境界上にある場合、初期条件においてゼロとなる成分を無視してやれば、この軌道を適当な部分系の相空間内部の軌道と見なすことができる。

従って、この変数変換を行っても任意の初期条件を持つ軌道の、漸近的な挙動を含む振舞いを解析することが可能である。

この座標系における運動方程式は

$$\frac{d}{dt} y_i = \lambda_i \quad (2.2)$$

で表される。ただし、 $\lambda_i$  は元の変数で見た時の各成分の成長率で、

$$\lambda_i = \sum_j g_{ij} e^{y_j} - \sum_j \sum_k g_{jk} e^{y_j} e^{y_k}, \quad (2.3)$$

である。また  $y_i$  は (1.2) に対応する拘束条件

$$\sum_i e^{y_i} = 1, \quad (y_i < 0) \quad (2.4)$$

を満たす。

## 2.4 サドル近傍

ここでサドルの近傍を定義しておく。ここでは便宜的にサドルからの各成分 ( $x_i$ ) のずれが  $\epsilon$  よりも小さい点、つまり、 $\epsilon$  は正の定数、 $\bar{x}^A$  がサドル上の点を表すとするとき、

$$\max_i |x_i - x_i^A| < \epsilon, \quad (2.5)$$

を満たすような点の集合としておく。 $\epsilon$  は十分小さく、各サドルの近傍の相流は線形近似が可能であるとする。以下の議論は、 $\epsilon$  が 1 に比べて十分小さく、サドル近傍への滞在時間が  $|\log \epsilon|$  よりも十分大きいとみなせる限りにおいて、 $\epsilon$  の値にはよらない。

ここでサドルの近傍がこの座標系ではどのように表されるかについて触れておく。例としてサドル  $\{1, 2\}$  を考えて、この平衡点の位置を  $(a, b, 0, \dots)$  としておく。 $a, b$  は  $O(1)$  と考えられるので、 $\epsilon$  は、 $a, b$  に比べて十分小さいとしてよい。従って、 $\bar{y}$  に対応する点がこの平

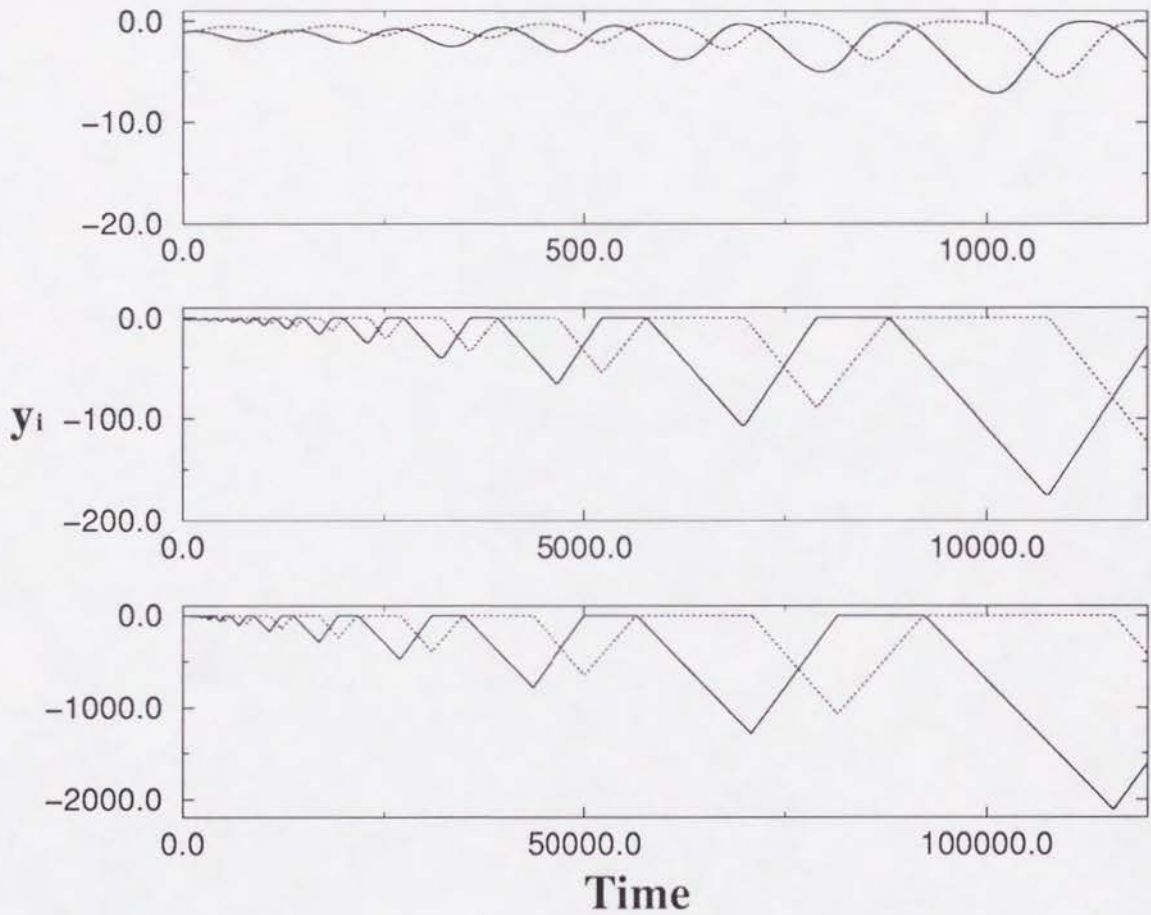


Figure 2.2: ヘテロクリニックサイクルへ漸近する軌道の例 2

図 1.1 で示した軌道について、各成分の対数 (つまり  $y_i$ ) を表示したもの。時間軸 (横軸) のスケールは図 1.1 と全く同じものである。3 つの図の縦軸のスケールは、各々の図の時間のスケールと比例させて変えてある。この図において  $y_i$  がほぼ直線的に変化している部分は、軌道が一つのサドル近傍に滞在している期間に対応している。

平衡点の近傍にある場合、 $|y_1 - \log a| < |\log\{(a - \epsilon)/a\}|$  となりこれは  $O(\epsilon)$  の小さな量であると見なすことが出来る。一方、 $y_i$  の他の成分 (つまりマイナーな成分) は  $y_i < \log \epsilon$  を満たす。つまり  $y_i$  の絶対値としては大きな ( $|y_i| > |\log \epsilon|$ ) 値を取るようになる。

滞在しているサドルが、メジャーな成分からなる部分系においては安定になっている場合には、サドル近傍からの離脱はマイナーな成分 ( $x_i$ ) のゼロからのずれが成長することによって起こる。これは  $y_i$  の変化においては、マイナーな成分に対応する  $y_i$  の絶対値がゼロに近づくことに対応する。ヘテロクリニックサイクルアトラクタへ漸近する軌道を、この変数変換をして見ると図 2.2 のようになる。この図を見ても明らかなように、一つのサドル近傍に滞在している間の  $y_i$  の変化はほとんど線形になっている。以下の節ではこの  $y_i$  の変化を近似する力学系を導入して、それを用いて漸近的な振舞いの解析を行なう。

## 2.5 近似力学系の導入

一般に軌道とサドルとの距離が近付けば近づく程、サドル近傍への滞在時間は長くなる。従ってサドル近傍への滞在時間はいくらかでも長くなる場合が考えられる。これに対してサドル近傍の間の遷移にかかる時間はほぼ一定である。これらのサドル近傍への滞在と、サドル近傍間の遷移という過程を、異なった時間のスケールを持つ現象として、分けて扱うことができる。これに対応して、 $y_i$  について一種の粗視化を行なって、サドル近傍への滞在の長さのスケールを持つ部分だけを取り出して扱うことにする。ここでは  $y_i$  を粗視化して滞在時間に線形なオーダーを持つ部分を取り出した変数を  $Y_i$  で表すことにする。 $\vec{y}$  についての拘束条件 (2.4) に対応して、 $\vec{Y}$  は拘束条件  $\max_i Y_i = 0$  を持つ。

サドル間の遷移の間におこる  $y_i$  の変化はサドル近傍への滞在時間がいくら長くなってもあまり変わらない。サドル近傍への滞在時間のスケールを  $T$  とすると、これは  $O(T^0) \sim o(T^1)$  程度の大きさなので、粗視化を行う際には無視できる。従って  $Y_i$  の変化としてはサドル近傍に滞在している間の変化だけを考えることになる。またメジャーな成分に対応する  $y_i$  の値は  $T$  によらずにはほぼ一定であるから、メジャーな成分に対応するものについては  $Y_i = 0$  となる。

各サドル近傍への滞在中の  $y_i$  の変化は図 2.2 に見られるようにほぼ一定の傾きを持つ直線的な変化である。この変化率 (傾き) は対応するサドル上での  $\lambda_i$  の値によってよく近似できる。一つのサドルの近傍に滞在する間のこの近似による誤差は、滞在の長さによらない定数によって抑えられる (cf. appendix A)。従って、一定の傾きを持つ線形的な時間変化が、一つのサドル近傍への滞在に対応するあいだ続くような、区分線形的な時間変化として  $Y_i$  の変化を表すことができる。

ヘテロクリニック軌道にそった運動に対応する  $Y_i$  の変化は、次のようなものになる。軌道がサドル  $\{1, 2\}$  近傍に滞在している間、 $Y_1 = Y_2 = 0$  で、他の成分は負の値を取っている。そしてサドルからの離脱がというイベントは負の成分のうちの一つ (例えば  $Y_3$ ) がゼロになるというのに対応する。その後、軌道は  $Y_i = 0$  を満たす成分からなる部分系におけるアトラクタへと接近するが、この遷移にかかる時間及びその間の  $\vec{Y}$  の変化は無視できる。その後、軌道が次のサドルの近傍に滞在する間、 $Y_i$  はそのサドルに対応する変化率に従って、次に別な成分がゼロになるまで線形的な時間変化を続ける。

サドル間の遷移は  $Y_i = 0$  を満たす成分からなる部分系での流れに沿って起こると考えられる。出発側のサドルは、必ずこの部分系の相空間の境界上にあり、またその不安定多様体は境界に垂直でその次元は1である。つまりこの不安定多様体に沿って動く軌道が次に立ち寄るサドルは  $\vec{Y}$  (及び  $\{g_{ij}\}$ ) の情報だけから求めることができる。従って  $\vec{Y}$  の閉じた力学系を考えることが可能であることになる。

$\vec{Y}$  の運動方程式を形式的に

$$\dot{\vec{Y}} = \vec{f}(\vec{Y}), \quad (2.6)$$

と表すことにする。 $\vec{Y}$  の値は、軌道がどのサドルの近くにいるかによって決まるが、これは  $Y_i = 0$  を満たす成分の集合を与えれば決まる。従ってこの関数  $\vec{f}(\vec{Y})$  は、 $\vec{Y}$  の各成分がゼロかそれとも非ゼロかという点にだけ依存するような関数になっている。

この様にして導入した近似は各サドル近傍への滞在の間の  $\vec{y}$  の変化を、滞在時間の長さによらないような誤差の範囲で近似する。一方この間の  $\vec{y}$  の変化自体は滞在時間のオーダーである。従ってこの近似による相対誤差は滞在時間が無限大になる極限でゼロになる。このような意味でこの力学系はサドルの十分近くを通るような軌道の振舞いを解析する上ではよい近似を与えると考えられる。

## 2.6 縮約

軌道の漸近的振舞いの特徴を明らかにするため、この節では前節で導入した力学系を更に縮約する。具体的には、この力学系の線形性を利用した変数分離、及びポアンカレ断面における帰還写像を使って、自由度を落とす方法について述べる。

### 2.6.1 変数の分離による縮約

ここではまず変数の分離による縮約が可能であることを示す。このために  $\vec{Y}$  の運動を「向き」の自由度と「長さ」の自由度に分けて扱うことにする。

$$\vec{\eta} \equiv \frac{\vec{Y}}{|\vec{Y}|} \quad (2.7)$$

によって変数  $\vec{\eta}$  を定義する。 $\vec{\eta}$  は

$$\begin{cases} |\vec{\eta}| = 1, \\ \max_i \eta_i = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

という二つの拘束条件を満たすので、力学系としての自由度は成分の数よりも2だけ小さくなることになる。

更に

$$U \equiv |\vec{Y}|, \quad (2.9)$$

$$\vec{g}(\vec{\eta}) \equiv \vec{f}(\vec{\eta}) - (\vec{\eta} \cdot \vec{f}(\vec{\eta}))\vec{\eta}, \quad (2.10)$$

$$h(\vec{\eta}) \equiv \vec{\eta} \cdot \vec{f}(\vec{\eta}), \quad (2.11)$$

等の記号を使うと、(2.6)は

$$\frac{d}{dt}\vec{\eta} = U^{-1}\vec{g}(\vec{\eta}), \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dt}U = h(\vec{\eta}), \quad (2.13)$$

のように変形できる。

ここで新しく

$$\frac{d\tau}{dt} = U^{-1}. \quad (2.14)$$

をみたすような時間の変数 $\tau$ をとることにすると、(2.12)及び(2.13)は

$$\frac{d}{d\tau}\vec{\eta} = \vec{g}(\vec{\eta}), \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{d\tau}(\log U) = h(\vec{\eta}). \quad (2.16)$$

という形に変形できる。

結局 $\vec{\eta}$ (つまり $\vec{Y}$ の「向き」)の運動は、閉じた力学系によって記述できることがわかる。 $\vec{Y}$ の向きが決まるということは、どの成分がゼロになるかが決まる、つまり軌道がどのサドルの近傍にいるかが決まることになる。これは $\vec{\eta}$ の軌道が与えられれば、対応する $\vec{x}$ の軌道がどのような順序でサドルに立ち寄るかが決まることを示している。

また(2.16)より、 $U$ は特徴的なスケールを持たない変数であることがわかる。 $\vec{\eta}$ が(時間座標を $\tau$ でとった時に)定常的な振動を示す場合、 $\log U$ はその一周あたりある一定量だけ変化することになる。これは $d\tau/dt$ つまりこの運動の $t$ 座標系でみた時の「速さ」が一周毎に等比数列的な変化を示すことを意味している。ちなみにこの場合に対応する元の系の運動は幾つかのサドルを順に訪れながら各サドルへの滞在時間は幾何級数的な変化を示すというもので、ヘテロクリニックサイクルアトラクタへの収束に漸近する軌道(またはその時間反転のような運動)に対応することになる。

## 2.6.2 帰還写像を使った解析

軌道が安定な平衡点、または安定なリミットサイクルなどに収束せず、幾つかのサドルの間をさまよい続ける場合には、軌道が繰り返し横切るような面を相空間にとることが出来る。この面(ポアンカレ断面)上での帰還写像を使って、軌道の振舞いを調べることにする。ここではその断面を適当な二つのサドルの間の遷移の途中、どちらのサドルの近傍からも離れている間に横切るように設定することにする。

サドル間の遷移にかかる時間は $o(T)$ であるから、この断面上の点に対応する $\vec{y}$ の各成分の値はどちらのサドルの近傍にも $o(T)$ 程度の変化でたどり着けなくてはならない。従って、 $Y_i$ の値は、 $i$ が二つのサドルのうちどちらかについてメジャーな成分になっている場合にはゼロになっていると考えることが出来る。

この面における $\vec{Y}$ の値を考える場合、自由度の縮約は少なくとも二つの成分について値がゼロになるという点に現われている。帰還写像はこれらの成分を除いた高々 $n-2$ 次元の写像によって表されることになる。

この面上では2つよりも多くの成分がゼロになる場合がある。これは出発側のサドルが2つ以上のメジャーな成分を持つような場合である。次の節の例で見るように、このような場合には帰還写像の持つ自由度は更に少なくなる。余分な自由度の縮約は、サドルにおける力学的な収束の効果からくると考えられる。元の力学系においてこの力学的な収束の効果は、対応するサドル近傍への滞在時間の長さに対して指数関数的に依存するような縮小率を持つ収縮をもたらす。 $\vec{Y}$ の力学では対応する方向への拡大率はゼロ、つまり超安定な方向を持つことになっているが、これはこの力学系がサドル近傍への滞在の長さが他と比べて十分長い極限での軌道の振舞いを記述するものであることからみて妥当なことであると考えられる。

この断面上でのリターンマップを考える前に、一つのサドルの近傍に滞在する前後での $\vec{Y}$ の変化について試みる。マイナーな成分に対応する $Y_i$ の各成分のうちで、最初にゼロに到達するものを $I$ で表すことにすると、このサドル近傍への滞在時間は、 $-Y_I/\Lambda_I$ 、また各成分の変化は

$$(Y_i) \mapsto \left( -\frac{\Lambda_i}{\Lambda_I} Y_I + Y_i \right), \quad (2.17)$$

という線形写像で表される。(ただし $\Lambda_i$ はこのサドルにおける各成分の成長率を表すものとする。)

正の成長率を持つ成分(つまりサドルの不安定方向)が複数存在する場合には、最初にゼロに到達する成分 $I$ はこのサドルの近傍に到達した時点での $\vec{Y}$ の値に応じて変わる。従ってこのサドルの近傍における $\vec{Y}$ の変化は幾つかの線形写像を張り合わせたような区分線形写像によって表されることになる。

この断面を出発した軌道は、幾つかのサドルを経由してこの断面へと戻ってくる。従って帰還写像は経由する各々のサドルに対応する写像の積になる。戻ってくるまでに経由するサドルの系列には幾つかの可能性があるが、それぞれの系列に対して一つの線形写像が対応して、帰還写像は全体としては区分線形な写像になっている。

この帰還写像についても、前の節の議論と同様に $\vec{Y}$ の大きさの自由度を分離して更に自由度を減らすことができる。 $\vec{Y}$ の帰還写像の持つ固有ベクトルは、この縮約した帰還写像では平衡点に対応することになる。

### 2.6.3 ヘテロクリニックサイクルの安定性

ここで、上で扱った $\vec{Y}$ の帰還写像とヘテロクリニックサイクルの安定性との関係について述べておく。

ヘテロクリニックサイクルがアトラクタとなるためには、一定のサドルの系列を無限に繰り返すような軌道が、生成的な初期条件に対して見られなければならない。このためには $\vec{Y}$ の軌道はそのサドルの系列に対応する領域に留まる必要がある。この領域での $\vec{Y}$ の写像は一つの線形写像で表されるが、この写像の持つ絶対値最大の固有ベクトルはこの領域の内部になければならない。この場合この帰還写像を更に縮約して得られる $\vec{\eta}$ の写像は、対応する安定平衡点を持つことになる。

ヘテロクリニックサイクルがアトラクタとなるためには、この他にも、軌道が次第にサドル(及びヘテロクリニック軌道)に近付くという条件が必要である。これは、絶対値最大の固有値の値が1よりも大きいという条件を与える。

まとめると、適当なサドルの系列の繰り返しに対応するヘテロクリニックサイクルがアトラクタとなるためには、 $\bar{Y}$ の帰還写像のうちでそのサイクルに対応する一部分となっている線形写像の、固有値・固有ベクトルが次のような条件を満たさなければならない。

- 絶対値最大の固有値を持つ固有ベクトルは、この経路に対応する領域に入っている。
- この固有ベクトルに対応する固有値は1よりも大きい。

このサイクルに対応する領域に絶対値最大ではない固有ベクトルが存在する場合には、適当な等式を満たすようなメジャーゼロの集合に属する初期条件をもつ軌道が、対応するヘテロクリニックサイクルに漸近するという事はありえる。しかし、その場合には一般的な初期条件を持つ軌道はこのサイクルを離れて、別のサドルへと向かうので、このサイクルはアトラクタではなくて、一種のサドル的な集合となっている。

二つめの条件が満たされない場合には、軌道は一定の順序でサドルを巡りながら次第にサイクルから離れていく。これにつれて滞在時間は等比数列的に短くなり、有限時間のうちにサドル間の遷移とサドル近傍への滞在を区別することができなくなると考えられる。

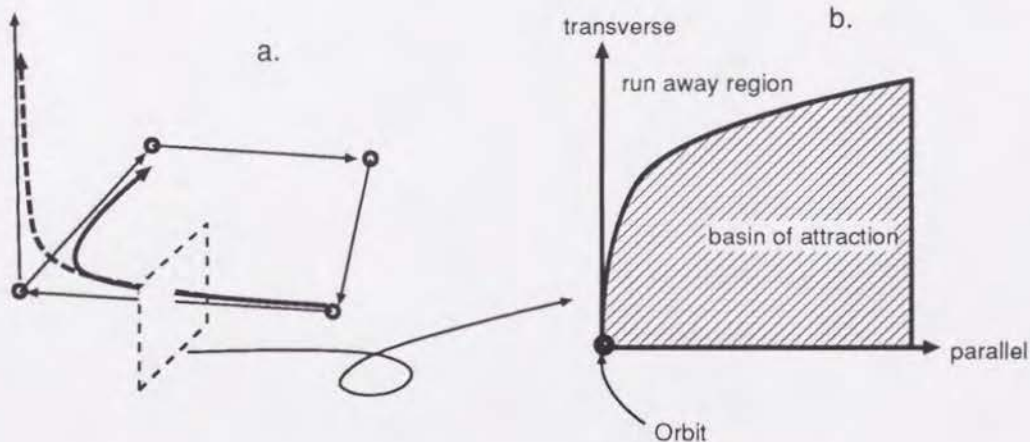


Figure 2.3: 漸近安定でないようなヘテロクリニックサイクルアトラクタの模式図

サイクルに含まれるサドルの中に、2つ以上の不安定方向を持つものがある場合、軌道がサイクルとは垂直な方向に離脱することが考えられる。サイクルに引き付けられる様な初期条件と、離脱してしまう初期条件の分布は、軌道を横切るような断面の上でみると (b) の様になっており、サイクルのいくらでも近くにこのサイクルから離脱してしまうような点が存在する。

ヘテロクリニックサイクルがアトラクタであっても、そのヘテロクリニックアトラクタは漸近安定とは限らない [29]。サイクルに含まれるサドルのうち、一つでも2方向以上に対して不安定なサドルがある場合、図 2.3で見られるように、このヘテロクリニックサイクルアトラクタの近傍にも、このサドルからヘテロクリニックサイクルに沿わない方向に離れていくような軌道に対応する初期条件が存在することになる。上で示した帰還写像の安定性を基にした議論は、ヘテロクリニックサイクルの近傍の内の、ある条件 (最低1周はこのサイ

クルに沿って運動する)を満たすような部分集合の上での、「相対的な安定性」[30][31]に関するものであって、ヘテロクリニックサイクルの漸近安定性を意味するものではない。

またこの他にもヘテロクリニックサイクルアトラクタが関係する奇妙な現象としては、複数のヘテロクリニックサイクルアトラクタが一つのヘテロクリニック軌道を共有して共存するという現象が報告されている [32]。上で見た $\eta$ の写像は幾つかの区間毎に異なるの写像を張り合わせたものになっているので、複数の安定な平衡点が異なる区間に存在していてもおかしくない。このような場合、このポアンカレ断面に対応するヘテロクリニック軌道を含むような幾つかのヘテロクリニックサイクルが、各々漸近安定ではないが相対安定なアトラクタとなることが可能である。

## 2.7 不規則にサドルを渡り歩き続ける運動

この節では、漸近的な挙動として不規則なサドル系列を生成するような運動が現れる例について扱う。これは前節で扱った $\eta$ の力学系がカオス的なアトラクタを持つ場合に相当する。サドルの系列を決める $\eta$ の力学系においてカオス的な軌道が現れるためには、この力学系は3つ以上の自由度を持っていなければならない。したがって元のゲーム力学系は最低でも5つ以上の成分を含んでいなければならないことがわかる。

ここでは系のに含まれる成分の数が5の場合について扱う。系のパラメータは

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1.0 & -20.0 & -0.4 & -1.0 & 1.0 \\ 1.5 & 0.0 & -0.7 & -7.3 & 0.5 \\ X & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 \\ -0.9 & 0.8 & 1.0 & -1.0 & -0.1 \\ 0.0 & -8.0 & 0.7 & 1.3 & 0.0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

というように設定する。適当な  $X$  の値に対しては、不規則な順序でサドルの間を渡り歩くような軌道がみられる。またヘテロクリニックサイクルアトラクタが崩壊して、この様なタイプのアトラクタへと交代する分岐についても簡単に触れることにする。上の行列で  $X$  はこの分岐をみるためのコントロールパラメータとしておく。

幾つかの  $X$  の値に対応するサドルの系列を、横軸に時間の対数、縦軸にその時刻に近付いているサドルをとって表示したものが、図 2.4 である。  $X = 0.32$  及び、  $X = 0.25$  の場合には、不規則なサドルの系列が現われている。ここで現われるサドルの系列を整理して、サドル  $\{3, 4\}$  を出発してから再びこのサドルに戻ってくるまでの軌道を分類すると、表 2.1 のように三通りの経路があることがわかる。  $X = 0.24$  の時には  $C2$  のみが、  $X = 0.25$  の時には  $C2$  及び  $C3$  が、そして  $X = 0.32$  の時にはこれら3種類全てが現われる。これらの現われる順序は周期的にはなっていない。これらの経路に関するヘテロクリニック軌道を模式的に示すと、図 2.5 のようになっている。

このようなサドルの系列を生成する機構を解析するため、ポアンカレ断面をとってみる。ここでは軌道が  $\{3, 4\}$  から  $\{5\}$  への遷移の途中で横切るような面をとる。断面上の点に対応する  $\vec{Y}$  を考えると、非ゼロの成分は  $Y_1$  及び  $Y_2$  の二つだけしかない。従って帰還写像は2行2列の行列で表すことが出来るような線形写像をつなぎあわせたものになる。また、 $\eta$  の帰



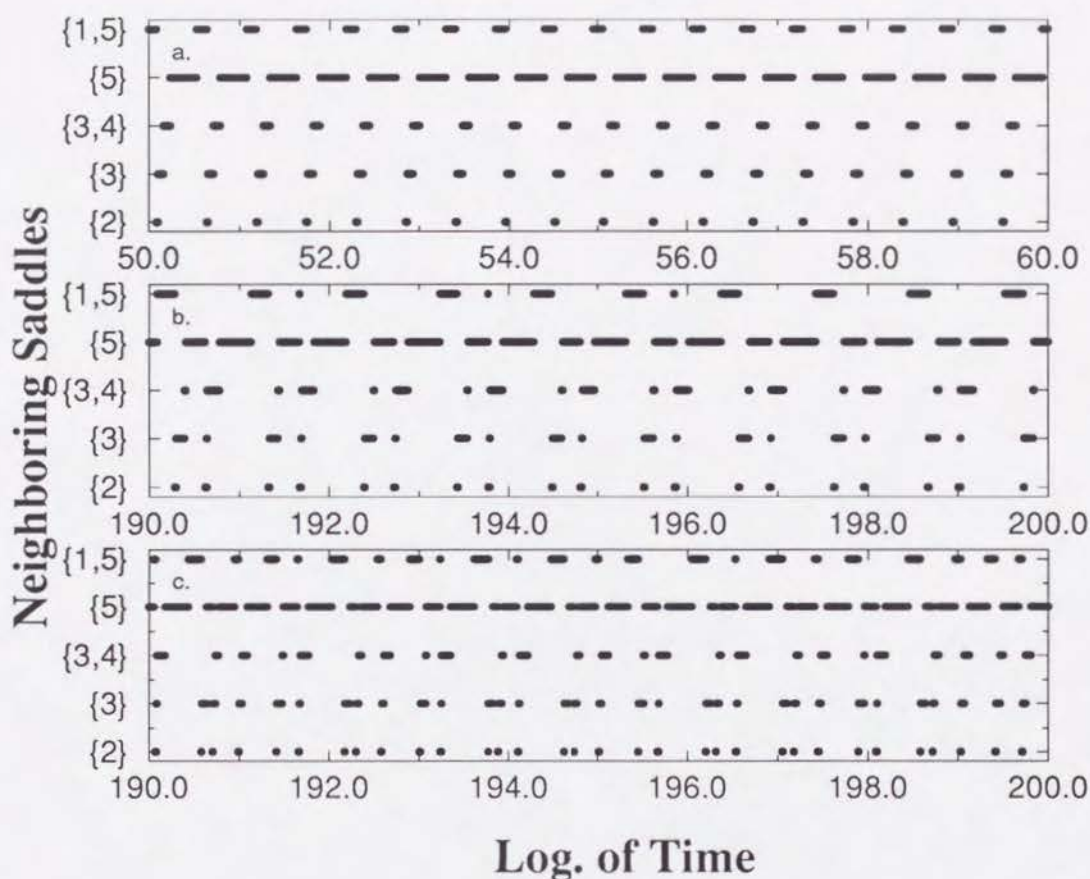


Figure 2.4: 数値的に得られているサドルの時系列の例

5成分のゲーム力学系において数値的に得られた軌道を元に、軌道が訪れるサドルの系列を示した図。横軸は時刻の対数を表し、縦軸はその時刻に軌道がどのサドルの近傍に滞在しているかを示している。サドル間の遷移はここでは表示していないが、遷移にかかる時間はこの図のスケールでは無視できる。横軸は時間の対数を表しているので、この図は各サドルへの滞在時間は一定ではなく幾何数的に長くなっていることを示している。パラメータの値は、(2.18)で与えられるようなものである。ただし  $X$  の値は3つの図で各々異なる。これらは各々、(a):  $X = 0.24$ , (b):  $X = 0.25$ , (c):  $X = 0.32$  の場合の軌道に対応している。初期条件はどの場合も  $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 0.2$  である。

軌道	サドルの系列
C1:	$\{3,4\} \rightarrow \{5\} \rightarrow \{1,5\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{3\} \rightarrow \{5\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{3\} \rightarrow \{3,4\}$
C2:	$\{3,4\} \rightarrow \{5\} \rightarrow \{1,5\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{3\} \rightarrow \{3,4\}$
C3:	$\{3,4\} \rightarrow \{5\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{3\} \rightarrow \{3,4\}$

Table 2.1: サドル  $\{3,4\}$  近傍を通過した軌道のたどる経路

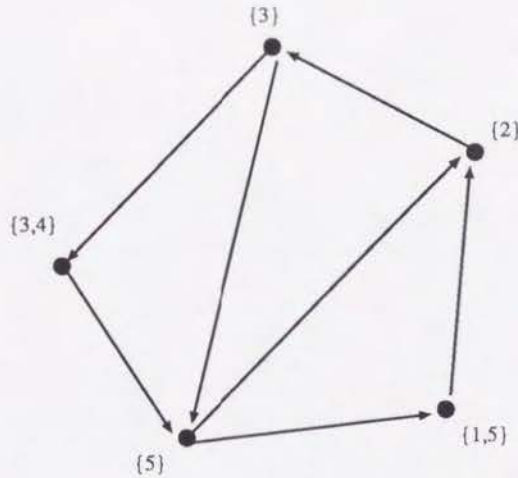


Figure 2.5: ヘテロクリニック軌道が作るネットワークの概念図

小さな丸が平衡点(サドル)、矢印がヘテロクリニック軌道を表す。これらのサドルが関係するようなヘテロクリニック軌道は他にも存在するが、ここでは数値的に見られている漸近的振舞いと関係しているヘテロクリニック軌道のみを取り出して描いてある。

還写像を考えると、更に1自由度を減らすことができるので、結局一次元の写像をえることができる。ここでは計算の都合上 $\vec{Y}$ の向きを $\vec{\eta}$ ではなく

$$Z \equiv \frac{Y_1}{Y_2} \quad (2.19)$$

を使って表し、 $Z$ についての帰還写像を扱うことにする。

まず $\vec{Y}$ の帰還写像を考えると、上の表にあげてある3つの経路に対応して各々線形な3つ写像が得られる。これらの線形写像を表す行列は $g_{ij}$ から計算することができて、 $C1$ に対しては、

$$M_{ij}^{(C1)} = \begin{pmatrix} 12.6508X + 3.80874 & -25.3016X + 2.48516 \\ 19.047X + 6.0291 & -38.094X + 2.7594 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

$C2$ に対しては、

$$M_{ij}^{(C2)} = \begin{pmatrix} 6.418X + 1.9389 & -12.836X + 1.2386 \\ 8.42X + 2.841 & -16.84X + 0.634 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

$C3$ に対しては、

$$M_{ij}^{(C3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3.1164 \\ 0 & 6.316 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

のようになる。各々の経路には

$$C1 : \left( \frac{10.618X - 0.7118}{5.309X + 1.6977} \right) < \frac{Y_1}{Y_2} < \left( \frac{4.28X - 0.078}{2.14X + 0.747} \right)$$

$$C2 : \left( \frac{4.28X - 0.078}{2.14X + 0.747} \right) < \frac{Y_1}{Y_2} < 2.0$$

$$C3 : 2.0 < \frac{Y_1}{Y_2}$$

を満たす領域が対応する。

この写像に対応する  $Z$  の写像は上で求めた行列の要素をもとに、

$$Z \mapsto \left( \frac{M_{11}^{(*)}Z + M_{12}^{(*)}}{M_{21}^{(*)}Z + M_{22}^{(*)}} \right), \quad (2.23)$$

として計算することができる。 $X = 0.24$ ,  $X = 0.25$ , 及び  $X = 0.32$  の場合にこの写像を図示すると図 2.6 のようになる。 $X = 0.32$  の場合、図を見てわかるようにこの写像は  $C2$  に対応する領域に平衡点を持っているが、この平衡点は不安定で、一般的な初期条件をもつ軌道は  $Z \approx 0.8$  から  $Z \approx 3.1$  の範囲でカオス的な運動をすると考えられる。

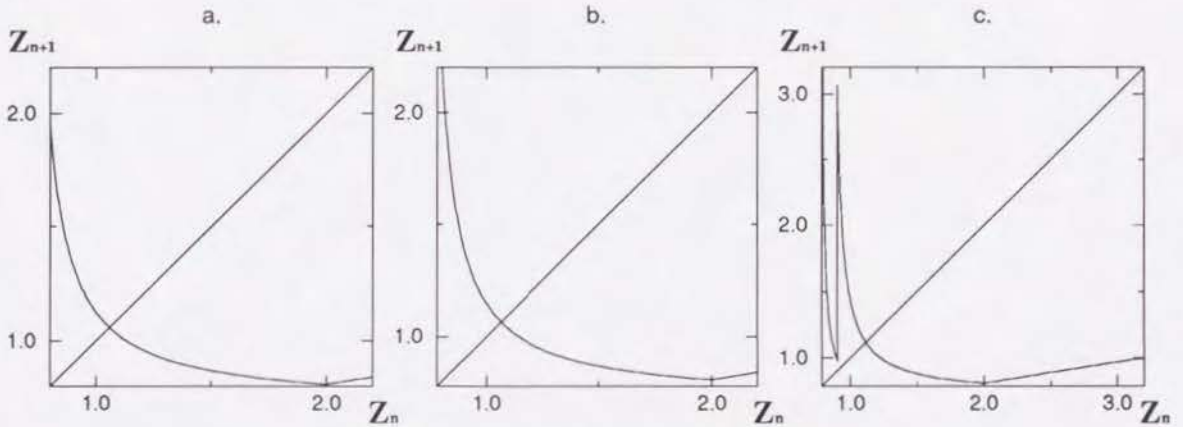


Figure 2.6: ポアンカレ断面上での  $Z$  の帰還写像

図の曲線は (2.20-2.23) 式に従って、軌道がサドル  $\{3, 4\}$  から  $\{5\}$  へと遷移する途中に横切るようなポアンカレ断面における、 $Z (\equiv Y_1/Y_2)$  の帰還写像を解析的に求めたものである。前の図と同様、(a),(b),(c) は各々  $X = 0.24$ ,  $X = 0.25$ ,  $X = 0.32$  に対応する。

この近似的な力学系の軌道とオリジナルの力学系の対応を見るため、ここで扱ったポアンカレ断面に対応する断面をオリジナルの力学系においてとって、上で求めた  $Z$  の帰還写像と、ゲーム力学系の軌道から数値的に求められる  $y_1/y_2$  の帰還写像を比べてみることにする。得られた結果を図 2.7 に示す。軌道がヘテロクリニック軌道にあまり近付いていない初期緩和に対応する幾つかの点を除くと良く一致していることがわかる。

この例の場合、帰還写像を繰り返し適用することによって、 $\bar{Y}$  の大きさは平均的には指数関数的に大きくなっていく。これは軌道がサドル及びヘテロクリニック軌道へとだんだん近付いて行くことを示している。またこれにつれて、各サドル近傍への滞在時間についても同様に指数関数的な伸び見られることになる。これらの場合のアトラクタは、 $X = 0.24$  の時はヘテロクリニックサイクル  $C2$ 、 $X = 0.25$  及び  $0.32$  の時には、それぞれ  $C2$  と  $C3$  及び  $C1, C2, C3$  の和集合で表されるようなヘテロクリニックネットワークということになる。

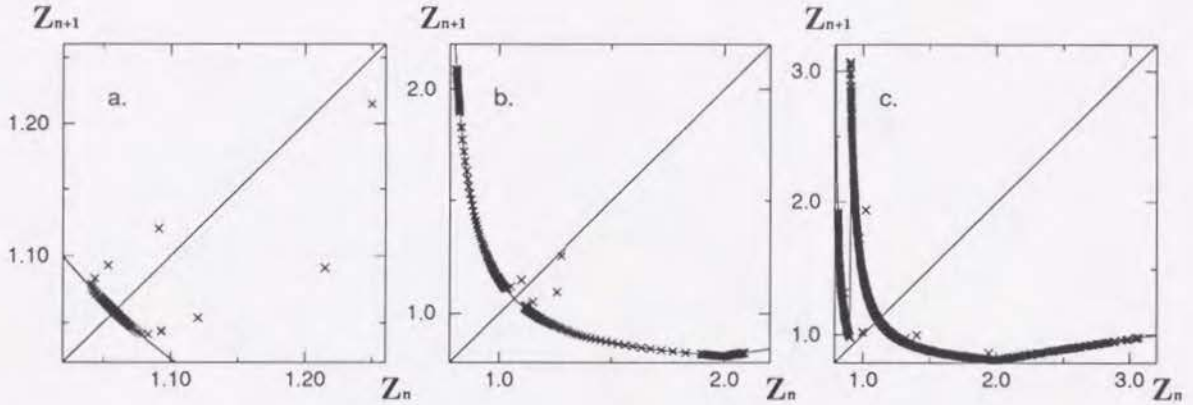


Figure 2.7: ポアンカレ断面上での  $Z$  及び  $y_1/y_2$  の帰還写像

全図で示した  $Z$  の帰還写像と、対応する  $y_1/y_2$  の帰還写像を比較のために重ねた図。 $y_1/y_2$  の帰還写像は、数値的に求めた一本の軌道を使って、この軌道が断面を横切った瞬間、及びその次の回にこの断面を横切る時の  $y_1/y_2$  の値をそれぞれ横軸・縦軸にとって  $\times$  印で表示した。前の図と同様、(a),(b),(c) は各々  $X = 0.24$ ,  $X = 0.25$ ,  $X = 0.32$  に対応する。 $y_1/y_2$  の帰還写像を求める際の、ポアンカレ断面の位置は、 $x_5 = \epsilon$ ,  $x_1 < \epsilon$ ,  $x_2 < \epsilon$ ,  $x_3 > \epsilon$ ,  $x_4 > \epsilon$ , ( $\epsilon = 10^{-8}$ ) とした。

### 2.7.1 不規則運動への分岐

ここでは上で調べた系を使ってアトラクタがヘテロクリニックサイクルからヘテロクリニックネットワークへと交代する分岐について見ることにする。

前節の例では、 $Z$  の帰還写像が  $C2$  に対応するサイクルの領域に平衡点を持っていた。ここではこの平衡点の安定性の変化による分岐に注目する。この分岐を調べるためには、上で求めた  $M_{ij}^{(C2)}$  という行列の固有値に注目すれば良い。この行列は二つの固有ベクトルを持つが、今考えている  $X$  の値の付近では、そのうち一つは正、一つは負の固有値に対応している。また正の固有値に対応する固有ベクトルは  $C2$  に対応する領域に存在している。したがってこの固有ベクトルが安定となるためには、対応する固有値が、もう一つの固有値の絶対値よりも大きくなっていけばよいことがわかる。この条件はこの行列のトレースが正となる条件から求めることができる。その結果  $X < X_c$  ( $X_c = 0.247\dots$ ) の場合には固有ベクトルが安定で、 $X > X_c$  の場合には不安定になることがわかる。

この様子に対応する  $Z$  の写像で見ると図 2.8 のようになる。ここでは平衡点の不安定化を見やすいように 2 回写像を示してある。 $X < X_c$  の場合には  $C2$  の領域内にある平衡点が安定であるが、 $X > X_c$  の時には平衡点が不安定で、この点からのずれは写像の繰り返しによって増幅され、最終的には  $C2$  の領域から飛び出してしまうことがわかる。

一般的には、分岐がおきて平衡点が不安定化しても非線形効果によってずれの成長が抑えられて平衡点のすぐ近くに周期軌道が現れる。しかし、この場合には、 $C2$  の領域内では平衡点からのズレの増幅が非線形効果によって抑えられてしまうことはない。従って安定な周期軌道が現れる、ということも起こらない。従って平衡点が不安定になると同時に、軌道

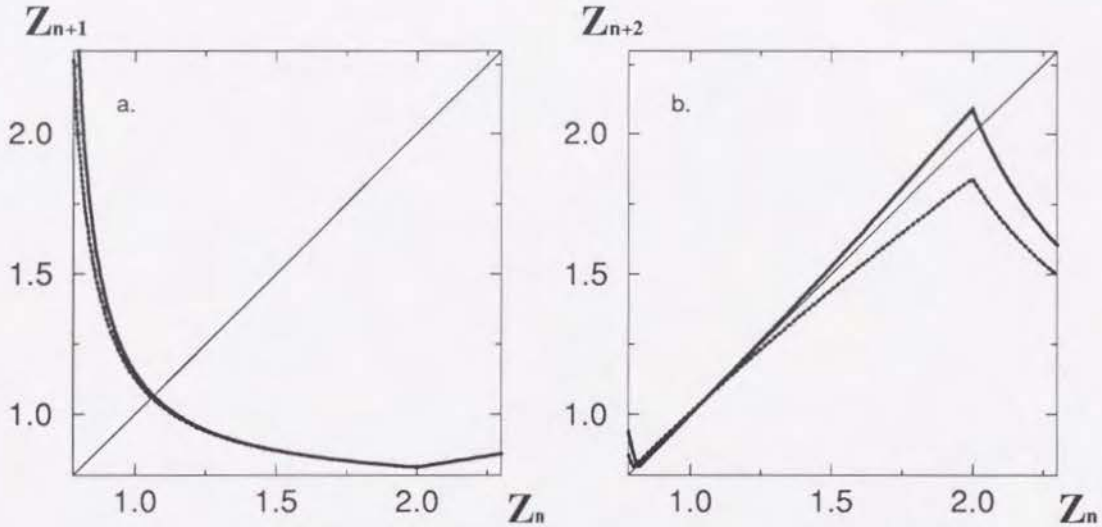


Figure 2.8: 前図と同じ断面における、 $Z$ の2次の帰還写像

$C2$  に対応する平衡点が不安定化する分岐の前後の  $Z$  の帰還写像を比較した図。ポアンカレ断面は前図と同じ面をとった。 $X = 0.24$  の場合 (破線) 及び  $X = 0.25$  の場合 (実線) を重ねて描いてある。

はサイクル  $C2$  をまわり続けることができなくなって、アトラクタは元の平衡点から離れたところに現れる。これは  $\vec{Y}$  の時間発展が線形写像で表されることからくる性質である。

この例の場合、 $C2$  が不安定化した後、 $C2$  をまわり続けることができなくなった軌道は  $C3$  で表される経路を通して再び  $C2$  の領域に戻って来る。ここで見られる  $C2$  と  $C3$  の行き来はカオス的なものであるが、( $X$ 以外の) パラメータ ( $g_{ij}$ ) の値によっては  $C2$  と  $C3$  の間を周期的に行き来する軌道が安定となる場合もあり得る。この場合、アトラクタは分岐を含むような構造をもつヘテロクリニックネットワークであるが、軌道の漸近的な振舞いは規則的 (周期的) なサドルの系列に対応するということになる。

## 2.8 まとめ

この章では幾つかのサドル的平衡点の間を渡り歩き続けるような運動についての解析について述べた。この運動はヘテロクリニックサイクルを始めとするような、ヘテロクリニック軌道が作るネットワーク構造がアトラクタとなる場合に見られ、これらのアトラクタへ漸近する軌道に対応している。

解析に際しては軌道がヘテロクリニック軌道の近傍にある場合に有効になる近似、及びポアンカレ断面における帰還写像を使って力学系を縮約した。その結果

- これらのアトラクタに漸近する軌道に関しては、特徴的な運動の時間スケールが存在しない。
- 立ち寄るサドルの順序が非周期的 (カオス的) になる場合が存在する。この場合、複数

のヘテロクリニックサイクルの和集合として表されるネットワークがアトラクタとなっている。

ということがわかった。

# Chapter 3

## 可算無限個のアトラクタの共存

この章ではゲーム力学系で見つかった、もう一つの奇妙な力学的構造について述べる。これは、相空間のなかに可算無限個のアトラクタが共存するというものである。これらのアトラクタはヘテロクリニック軌道の作るネットワークに集積するような形で規則的に並んでいる。各々のアトラクタはリミットサイクルの場合とカオス的なアトラクタの場合がある。この現象は5つ以上の成分を含むようなゲーム力学系において起こりうるもので(系の自由度は4以上ということになる)、パラメータ空間の有限のメジャーを持った領域で見られる。

コンパクトな相空間を持つ連続な力学系で、無限個のアトラクタが共存するというのは直観には反する現象である。しかし二次元の微分同相写像の場合にこのような現象が起こりうることは、Newhouseによって示されている [33][34]。彼はホモクリニックタンジェンシーに近い写像のなかに、可算無限個の周期アトラクタを持つようなものが存在できる場合があることを示している。

この章で扱っている現象は、可算無限個のアトラクタの共存が微分方程式系において見つかったという点、及び無限個のストレンジアトラクタの共存が見られているという点で、これまでに知られていない現象である。ここで述べる現象と、Newhouse が述べている系との間には、ホモクリニック/ヘテロクリニック軌道の近傍に多数のアトラクタが共存するという表面上の類似点はみられるが、それ以上の直接的な対応はつかないように見える。

### 3.1 階層的な構造を持つヘテロクリニックネットワーク

ヘテロクリニック軌道は前の章で扱ったようなネットワークよりも更に複雑な構造を作る場合がある。ここで扱う可算無限個のアトラクタが共存する現象には、「階層的」な構造を持ったネットワークが関与している。このネットワークは図 3.1 に示したような構造を持つ。これは全体としては一つの大きなサイクルを作っているが、そのなかには更にヘテロクリニックサイクル(子サイクル)を一つの「サドル」として含んでいるとみなすことが出来る。

これが前章で扱ったような通常のヘテロクリニックネットワークと違う点は、ネットワークのなかに、平衡点を $\alpha$ -極限集合、ヘテロクリニックサイクルを $\omega$ -極限集合として持つような軌道を含んでいる点である。以下に示すように、この違いはネットワーク近傍における相流の性質に本質的な違いをもたらす。

前章で扱ったネットワークが構造安定であったのと同様に、このタイプのネットワーク

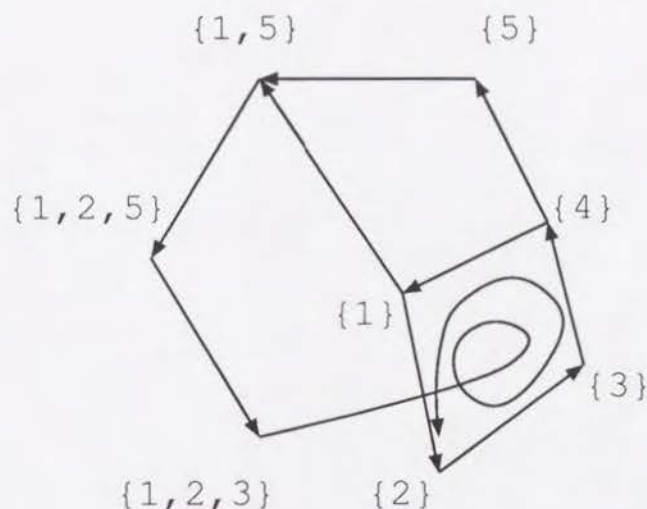


Figure 3.1: この章で扱うヘテロクリニックネットワークの模式図

ここで扱う軌道と関係しているヘテロクリニック軌道の作る構造を模式的に表した図。「準安定」なヘテロクリニックサイクル  $\{1\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{3\} \rightarrow \{4\} \rightarrow \{1\}$ 、及びそのサイクルを  $\omega$ -極限集合として持つようなヘテロクリニック軌道を含んでいる。

もまたパラメータの変化によって壊れないという意味で構造安定に存在できる。従ってゲーム力学系においてはこのようなネットワーク構造の存在も、例外的な現象ではないと考えられる。

### 3.2 数値実験で見られている軌道の例

ここでは具体的に系のパラメータを設定して話をすすめる。考える系は前章と同様成分の数が5、つまり4自由度の系である。パラメータの値は、

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0.0 & -0.4 & 1.0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.0 & -2.5 & -0.2 & -0.2 \\ -0.4 & 1.0 & 0.0 & -0.8 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 & 1.5 & 0.0 & -0.1 \\ 0.2 & -0.1 & -0.6 & X & 0.0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

としておく。ここで  $X$  はコントロールパラメータとしておき、1.8 から 2.0 の範囲の幾つかの値に設定した場合についての数値計算の結果を必要に応じて示す。以下で示している系の挙動は生成的なものであり、この行列の任意の成分を微小に変化させても系の定性的な振舞いは変わらない。

まず数値実験の結果から、多数のアトラクタが規則的に並んだ構造の存在が示唆される例を示す。この規則的な構造の起源については次の節で改めて考察する。

ここで表示している数値実験の結果は全て、初期条件の値は  $\vec{y} = (A, A, A, B, A)$  の形で、 $A = -\log 4$ 、 $B$  は幾つかの異なる値を与えている。これらの初期条件は正確には拘束条件



を満たさないが、実際に数値計算を行なう際には、各ステップにおいて  $\sum x_i = 1$  が満たされるように再規格化を行なっているため、この拘束条件の破れが系の振舞いに影響を与えることはない。以下の例では  $B$  には大きな絶対値を持つ負の値を与えているので、拘束条件の破れは数値計算の精度よりかはるかに小さくなっており、示されている  $\bar{y}$  の値は実際の値のとても良い近似値となっている。なお数値計算においては各時刻における  $\bar{y}$  の値を変数としてとって数値計算を行っているため、 $x_i$  が非常にゼロに近い値を取る場合でもアンダーフローを起こすことなく計算することが可能になっている。

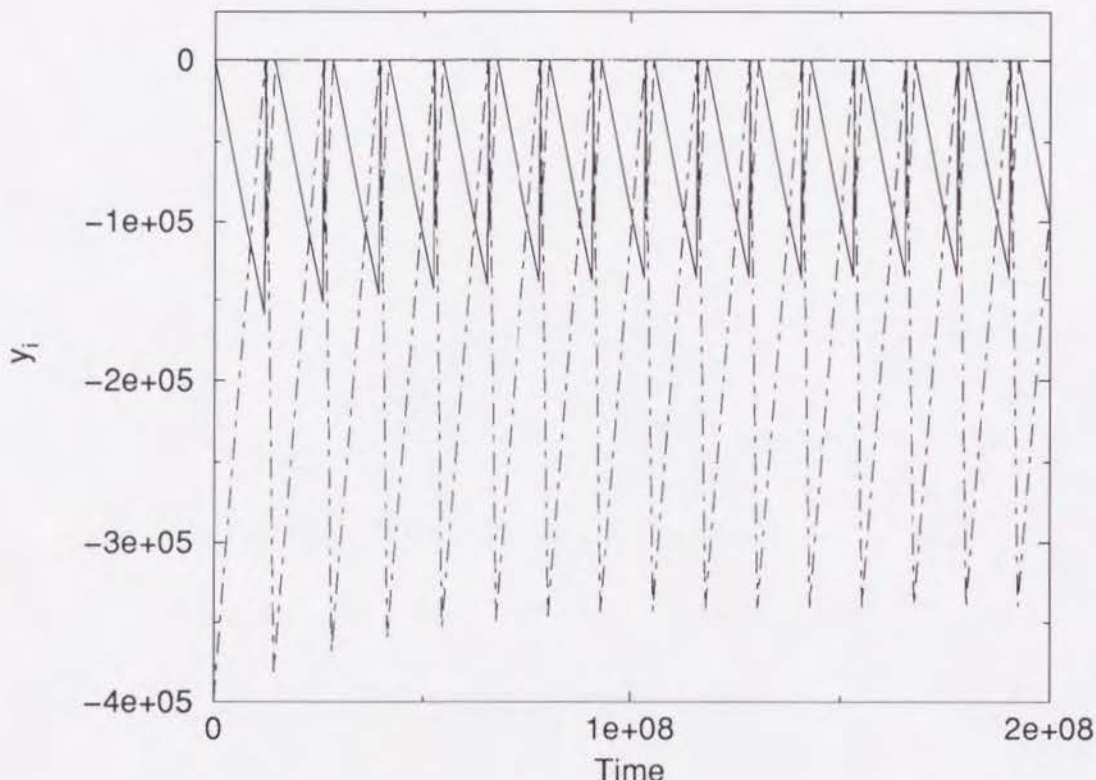


Figure 3.2: リミットサイクルに収束する軌道の例

式 3.1 で与えられるようなパラメータを持つ系で見られる軌道について、 $y_i$  の各成分の時間変化を表示してある。 $X$  の値は 2.00 で、初期条件は  $y_4 = -400000, y_1 = \dots = y_5 = -\log 4$  である。最も振幅の大きい線は  $y_4$ 、実線は  $y_3$ 、残りの 3 成分は振幅が小さいためこの図では判別できない。

一つめの例 (図 3.2) は、多数のリミットサイクルが共存する場合で、 $X = 2.00$  の場合に見られる構造である。まずは  $B = -1.0 \times 10^5$  とした場合の軌道を示しておく。これは数値計算で得られた  $y_i$  の時系列を、全ての成分を重ねて表示した図である。この図を見てわかるように振動の周期はある一定の値に収束している。図 3.3 はこのうちの一周期分を拡大した図である。この振動の一周期は幾つかの直線的变化を示す区間からなっているように見える。この各々の区間は、一つのサドルの近傍への滞在に対応している。この図を更に拡大して見ると (図 3.4)、単純な直線ではない区間が混じっていることがわかる。この区間は「子」の

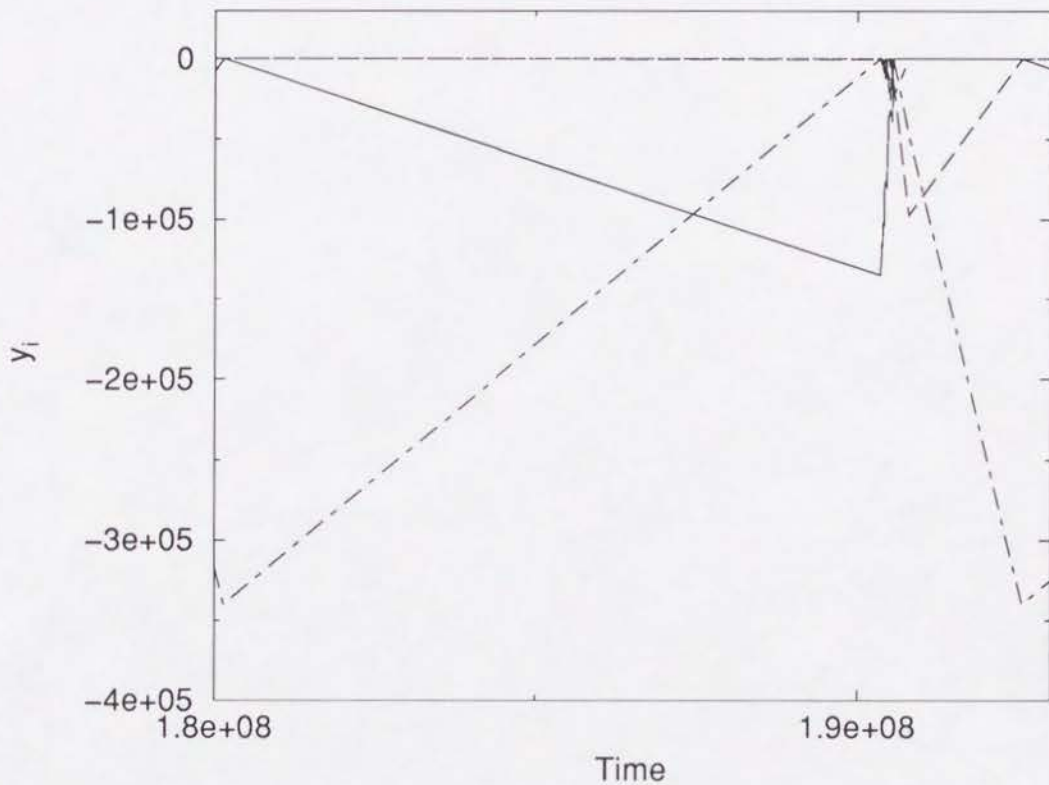


Figure 3.3: リミットサイクル上の運動

図 3.2 の軌道が、十分アトラクタに近付いた後での振動の一周期分を拡大したもの。直線的に見える部分は各々が一つのサドルの近傍への滞在に対応しているが、子サイクルに対応する部分は良く見ると直線ではなく凸凹した変化を示している。(次図参照)

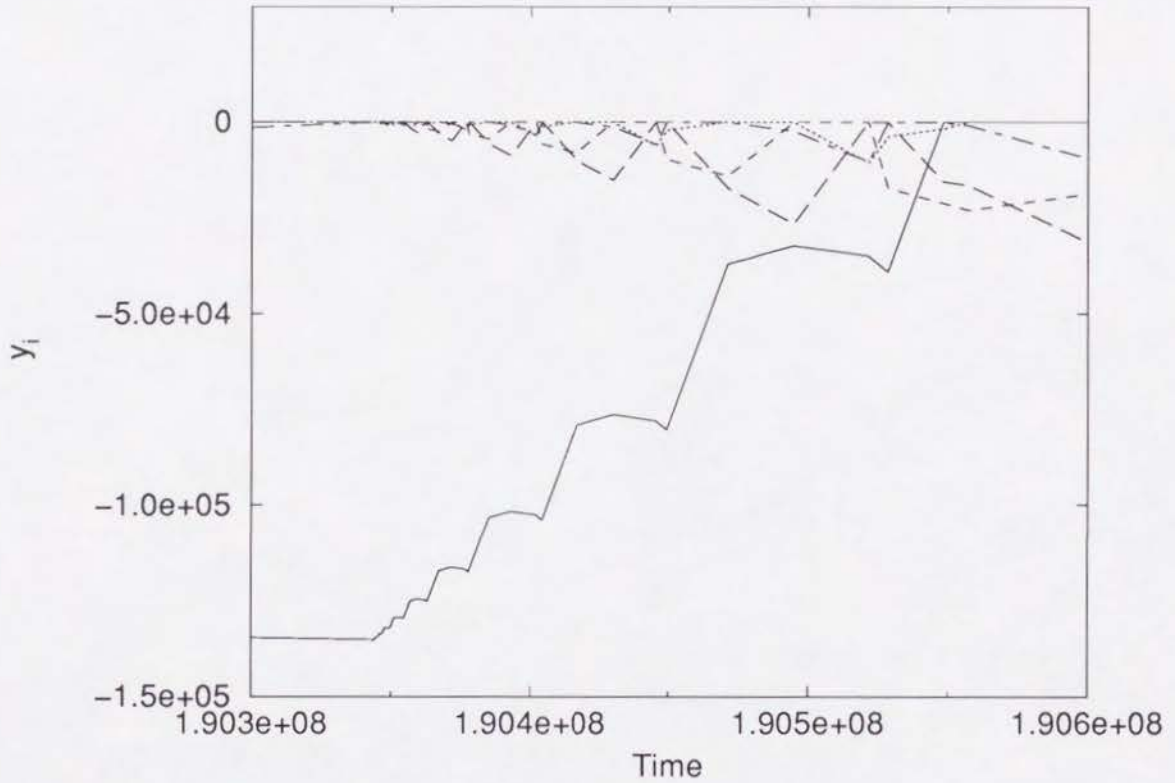


Figure 3.4: 子サイクル近傍での運動

図 3.2 の軌道のうち、子サイクル近傍への滞在中に対応する部分を更に拡大した図。当初にゼロ付近の値を持つ 4 本の線が  $y_1, y_2, y_3, y_4$  の各成分、振動しながら増加している成分 (実線) が  $y_5$  成分の変化を表す。各成分の変化が、振幅・周期が共に等比数列的に大きくなるような振動を示していることがわかる。

サイクル近傍への滞在に対応している。この区間における  $y_i$  の変化は幾何級数的に増大する周期と振幅を持つ区分線形的な振動を示している。

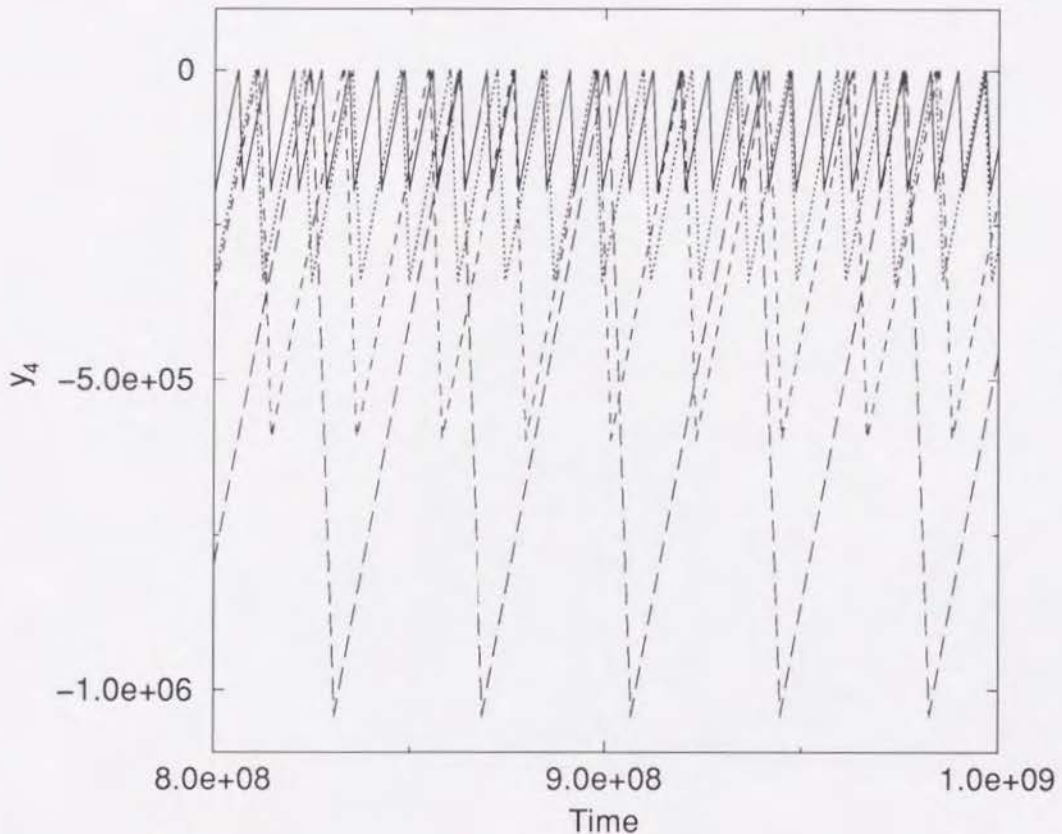


Figure 3.5: 幾つかのリミットサイクルアトラクタの共存

図 3.2 と同じ系 (パラメータは (2.18)、 $X = 2.0$ ) において、幾つかの異なる初期条件を持つ軌道を計算して、各々の軌道の  $y_4$  成分の時間変化を重ね合わせて表示した図。初期条件は全ての軌道について  $y_4 = B$ 、 $y_1 = \dots = y_5 = -\log 4$  の形のものを与えた。4本の線はそれぞれ振幅の小さなものから順に、 $B = 25 \times 10^4, 4 \times 10^5, 7 \times 10^5, 1 \times 10^6$  に対応する。

次に幾つかの異なる初期条件を持つ軌道の関係を見てみることにする。図 3.5 は、 $B = -2.5 \times 10^5$  から  $B = -1.0 \times 10^6$  までの幾つかの  $B$  の値に対応する初期条件を持つ軌道を求めて、各々の場合についての  $y_4$  の時間変化を一つの図に重ねて表示したものである。ここでは漸近的な振舞いを比較するため、初期緩和の部分については省略して、ほぼ定常的な振動が見られる時間領域を表示してある。これらの軌道は明らかに各々異なるのアトラクタに収束している。各々のアトラクタにおける振動の形はお互いに相似形をしている。また隣り合うアトラクタの間の周期の比はほぼ一定値になっている。

パラメータの値を  $X = 1.85$  とした場合にも、これとよく似た構造が現れる。ただしこの場合、個々の軌道の漸近的挙動は周期的な振動ではなく、カオス的な運動になっている。図 3.6 に示すのは軌道の一つの例である。この場合にも図 3.2 の例と同様の振動が見られる。しかし、初期緩和の後でもその周期は揺らいでいることがわかる。図 3.7 に示しているのは、

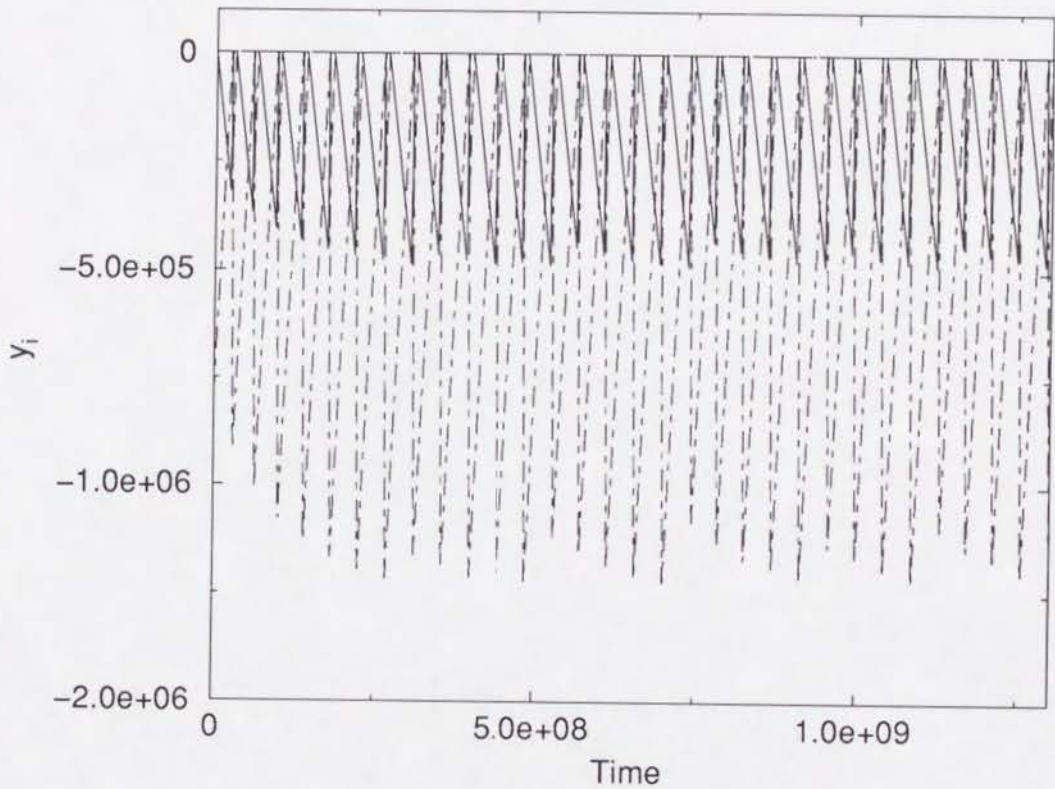


Figure 3.6: カオスの振動が見られる例

パラメータが  $X = 1.85$  である以外は、図 3.2 と同様の図である。この場合は軌道は周期的な運動には落ち着かない。

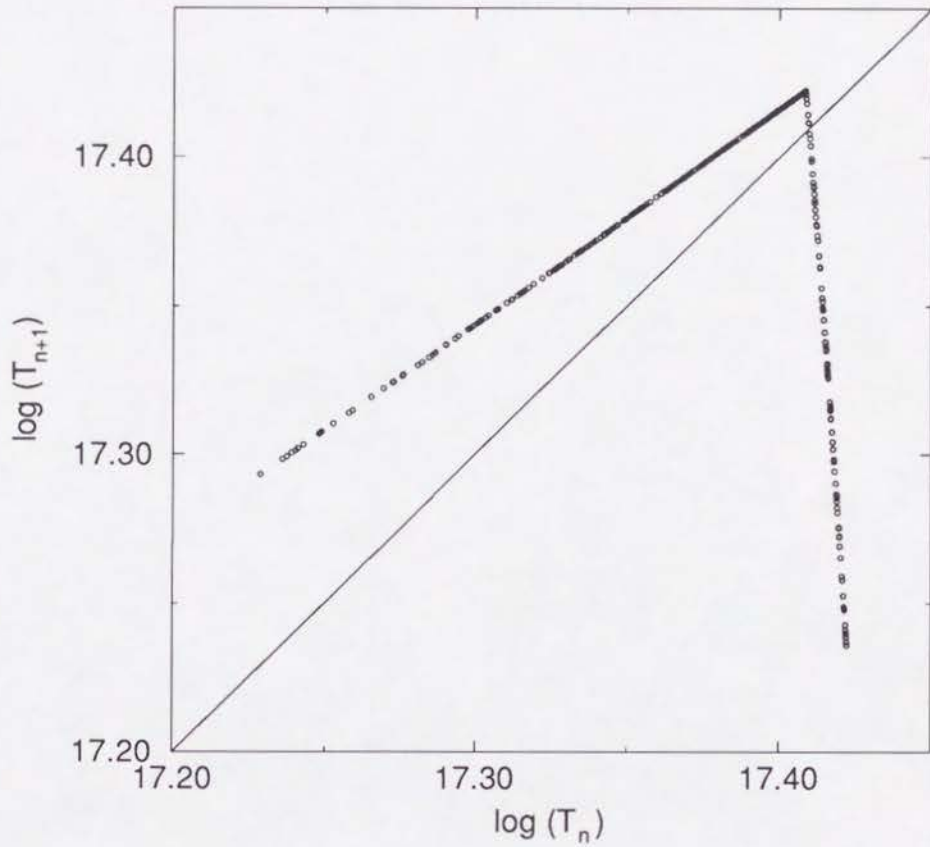


Figure 3.7: 2回のサドル {1,2,3} への滞在時間の相関

図 3.6の軌道で、サドル {1,2,3} 近傍への滞在時間を横軸、その次にこのサドルに近付いた時の滞在時間を縦軸にとって表示したもの。縦軸・横軸は共に滞在時間の対数をとって表示してある。周期がカオス的に揺らいでいることがわかる。

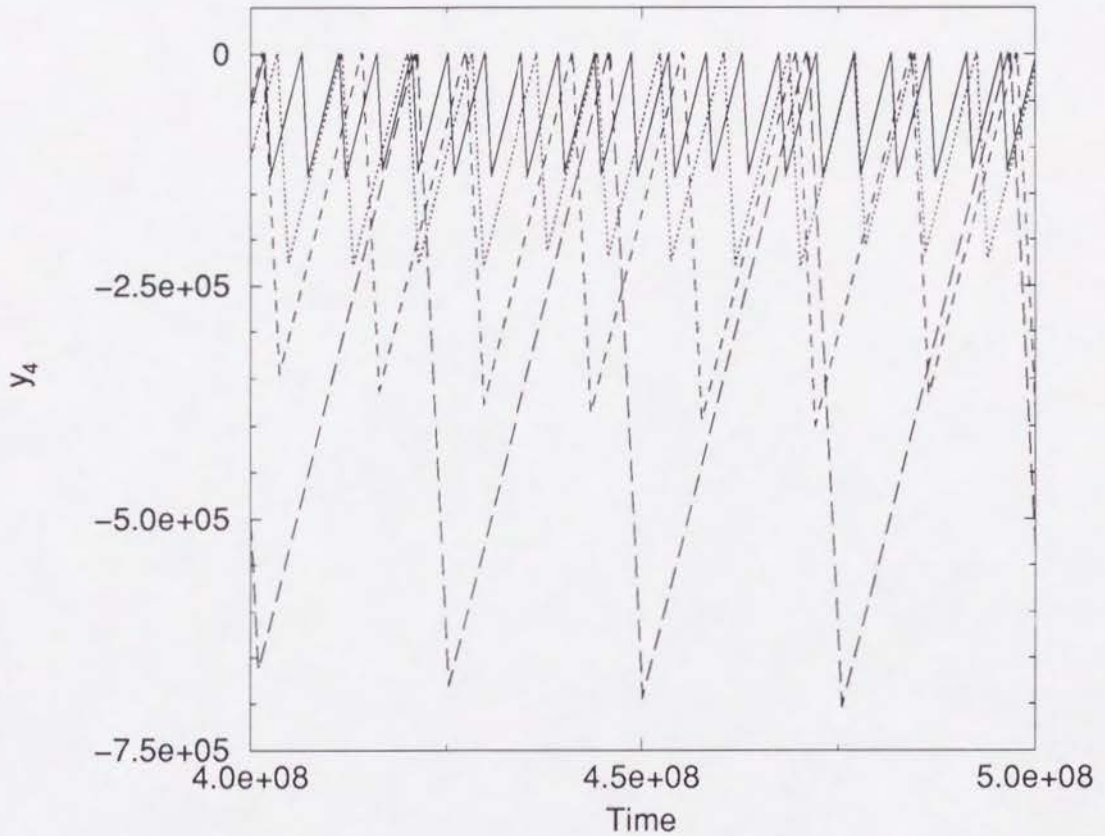


Figure 3.8: 多数のカオスのアトラクタの共存

図 3.6と同じ系 ( $X = 1.85$ ) で、幾つかの異なる初期条件を持つ軌道について、 $y_4$ の時間変化を表示した図。各々の軌道は各々異なるカオス的なアトラクタに引き寄せられていることがわかる。初期条件は  $y_4 = B, y_1 = \dots = y_5 = -\log 4$  で、 $B$ の値を  $8 \times 10^4, 2 \times 10^5, 3.5 \times 10^5, 5 \times 10^5$  とした。

サドル  $\{1, 2, 3\}$  の近傍への滞在時間と、その次にこのサドルに接近した時の滞在時間の関係を示したものである。(図を見やすくするため縦横とも滞在時間の対数を取って表示してある。)これは明らかにテントマップ的な相関の存在を示しており、この揺らぎが決定論的なカオスによるものであることを示している。この場合にも、幾つかの異なる初期条件についての軌道を比べてみると、やはりほぼ等比数列的な振動の周期の違いを示すようなアトラクタの列が存在することがわかる(図 3.8)。

### 3.3 帰還写像

次にこれらの規則性についてももう少し詳しく調べてみる。このため相空間のなかに適当なポアンカレ断面を考えて、その上でのリターンマップを取ることにする。ここでは、軌道がサドル  $\{1, 2, 5\}$  から  $\{1, 2, 3\}$  へと遷移する途中に横切るような面を使ってポアンカレ断面をとる。この面は、具体的には  $x_3 = \epsilon, x_1 > \epsilon, x_2 > \epsilon, x_5 > \epsilon, x_4 < \epsilon, \epsilon = 10^{-8}$  で表されるような断面である。この断面の次元は 3 である。しかし、前章で帰還写像を導入する際に触れたように、実際には更に少ない自由度の写像を得ることができる。サドル  $\{1, 2, 5\}$  への滞在が十分長い場合には、この滞在の間に  $y_1, y_2, y_5$  の各成分は平衡点での値に十分近づくため、この断面での  $y_1, y_2, y_5$  の値はほぼある一定値になる。従って実質的には自由に動ける変数は  $y_4$  一つだけになると考えられる。

この力学系の持つ構造をより明らかにするため、アトラクタ上の点に対応する以外の点についても帰還写像を拡張して、数値的に求めてみることにする。図 3.9 は、 $X = 2.00$  の場合に、初期条件として様々な  $y_4$  及び一定の  $y_1, y_2, y_5$  の値を持つようなこの面の上の点をとって、この軌道が再びこの断面に戻ってきた時点での  $y_4$  の値を数値的に求め、出発時の  $y_4$  と戻って来た時点での  $y_4$  の関係をプロットしたものである。この図ではスケールを変えながら繰り返される構造がみられる。この繰り返し構造は、縦横の軸を対数でとると更に明白になる。つまり図 3.10 のように、 $|y_4|$  の対数を軸にとってプロットすると周期的な構造が見られる。

この写像は繰り返し構造の各ユニットの一つづつ安定平衡点を持っている。従ってこの繰り返しが無限に続くものであるとすると、可算無限個の安定平衡点を持つことになる。これらの安定平衡点は元の力学系においては各々がリミットサイクルアトラクタに対応する。従ってその場合にはゲーム力学系が可算無限個のリミットサイクルアトラクタを持つことになる。

同様の操作を  $X = 1.85$  の場合について行なって得られる写像は図 3.11 のようになる。この場合も  $X = 2.00$  の場合とよく似た繰り返し構造がみられる。しかし各ユニット内に存在するアトラクタは平衡点ではなく、テントマップにおいて良くみられるものによく似たカオス的なアトラクタになっている(図 3.12)。

この図の写像は、 $y_4$  のみを取り出して描いたため非可逆な写像になっているが、本来の帰還写像はもう 2 個の自由度を持っており、原理的には可逆な写像であることを注意しておく。この帰還写像は図 3.10 で省略されている自由度に関しては非常に強い縮小写像になっている。従って上で見たようなカオスが起る場合、本来の断面上でのアトラクタのリアプノフ次元は 1 よりも僅かに大きい値になると考えられる。また、これに対応する元の系のアト



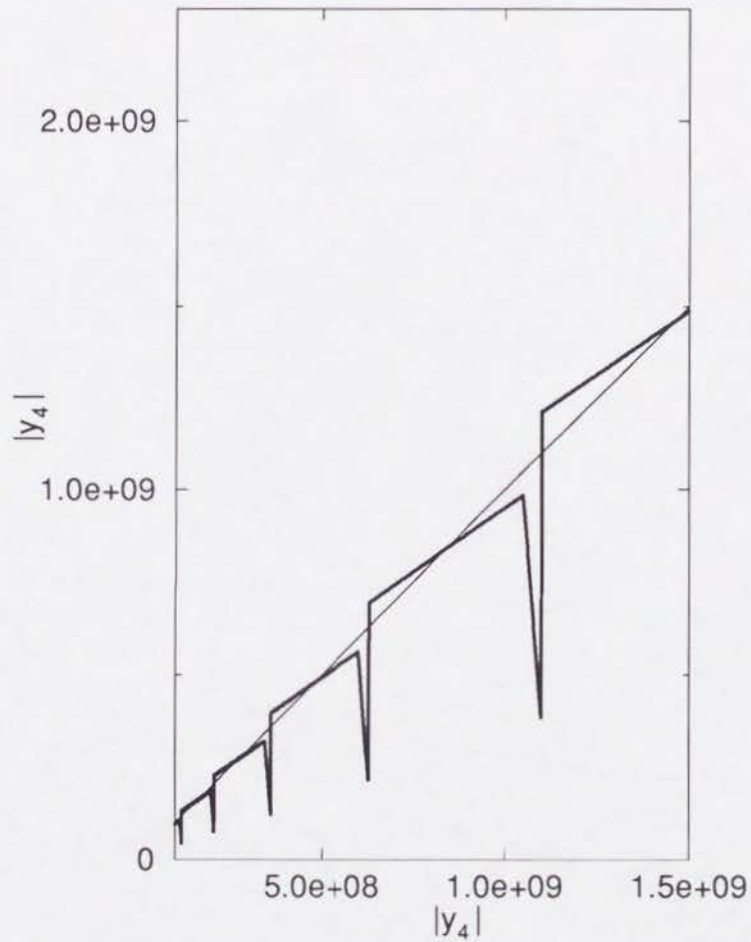


Figure 3.9:  $y_4$ の帰還写像/周期的運動が見られる場合

サドル  $\{1, 2, 5\}$  から  $\{1, 2, 3\}$  への遷移の途中で軌道が横切るような断面における  $|y_4|$  の帰還写像を数値的に計算した結果である。系のパラメータは図 3.2 と同じ ( $X = 2.0$ ) で、数値計算の結果ではリミットサイクルがアトラクタとなることが見られている系である。

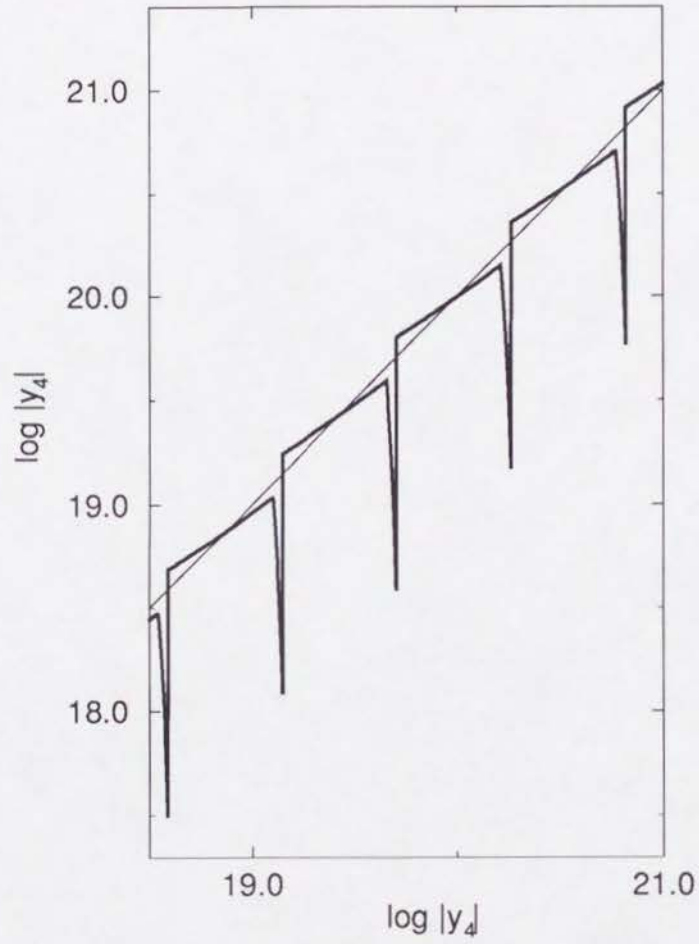


Figure 3.10:  $y_4$ の帰還写像/周期的運動が見られる場合

前図を縦軸・横軸共に対数をとって表示したもの。周期的な構造が見られる。

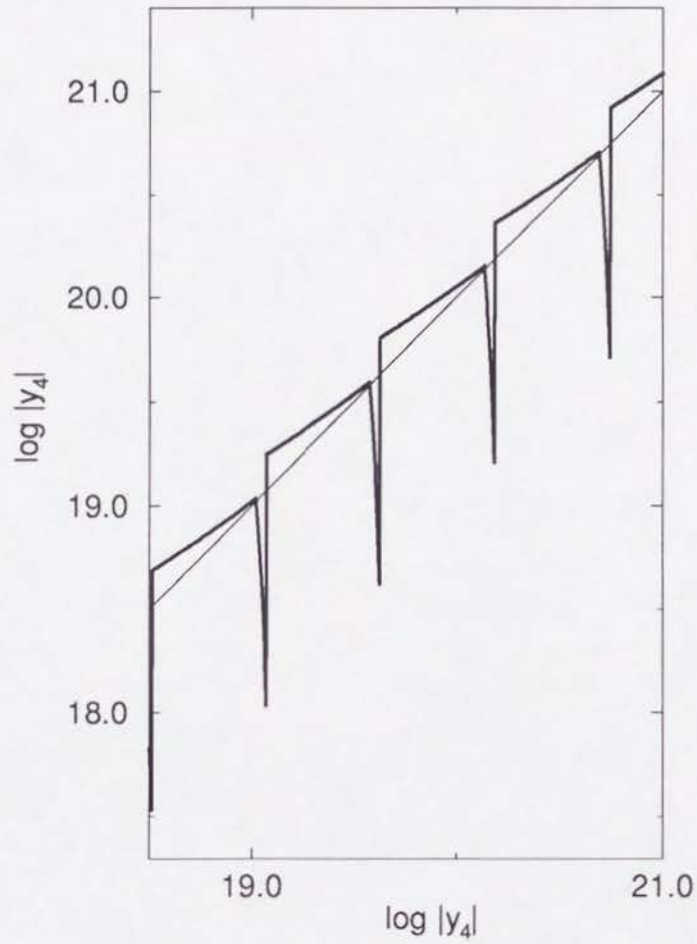


Figure 3.11:  $y_4$ の帰還写像/カオスの挙動が見られる場合

パラメータの値が  $X = 1.85$  の場合に、前図と同様な帰還写像を計算したもの。次の図にその一部を拡大したものも示す。

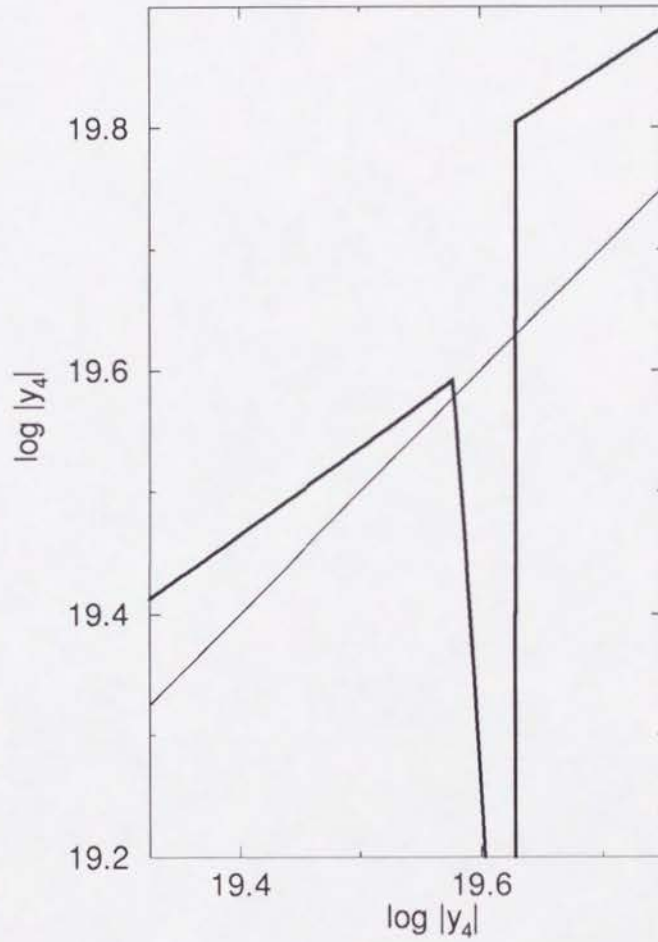


Figure 3.12:  $y_4$ の帰還写像/カオスの挙動が見られる場合

前図を拡大したもの。各繰り返し構造の中には一つずつアトラクタが存在するが、各々がカオス的なアトラクタになっていることがわかる。

ラクタは2より僅かに大きな次元を持つようなストレンジアトラクタになっていると考えられる。

### 3.4 帰還写像で見られる繰り返し構造の起源とその限界

前の章では、サドル的平衡点の近傍における  $y_i$  の変化を線形写像で近似した。もし、この章で扱っているようなヘテロクリニックネットワークの近傍においても前章と同様の議論が成り立つとすると、前節でとった帰還写像は1成分のベクトルに対する線形写像、つまり単純な定数倍で近似できるはずである。しかし図3.9等では、 $|y_4|$  の十分大きい値に対応する領域においても、明らかに線形ではない構造が見られている。このような  $|y_i|$  に対する非線形の依存性には、サドル的平衡点以外のサドル、つまり「子」サイクルの近傍での相流が持つ性質がそのまま現れていると考えられる。そこで「子」のサイクルの近傍における各成分の変化について少し詳しく調べてみることにする。

「子」サイクルの近傍に滞在する時間を  $T$  としておく。また2章における議論と同様に、 $\vec{y}$  を粗視化して  $O(T)$  の変化の部分だけを取り出したものを  $\vec{Y}$  としておく。この滞在中、 $x_5$  成分の値はほとんどゼロに近い値をとっている。付録Aと同様にして、この滞在帰還中にこの成分が  $\vec{y}$  の変化に及ぼす影響を評価すると、これは  $o(T)$  となることが確かめられる。ここで興味があるのは、 $y_i$  の変化のうち、このサイクルへの滞在時間程度の大きさを持つ部分であるから、成分5を除く残りの4つの成分からなる部分系で、 $\{1, 2, 3\}$  を出発した軌道が「子」のサイクルに巻き付く時の各成分の変化の様子を調べればよいと考えられる。

このために  $y_i$  の変化率の、「サイクル近傍への滞在期間中の平均」が滞在期間の長さに応じてどの様に変化するかを考えてみることにする。ヘテロクリニックサイクルに漸近する軌道の上での  $x_i(t)$  の「時間平均」の漸近的振舞いについては、Gauersdorfer の研究 [27] があり、これは一定値には収束せず等比数列的に周期の延びる振動を示している。ここで、 $x_i(t)$  の「時間平均」は、

$$X_i(t) \equiv \frac{1}{(t-t_0)} \int_{t_0}^t dt' x_i(t') \quad (3.2)$$

で定義することにする。 $t_0$  は「巻始め」の時刻をあらわすが、 $t_0$  をどのようにとるかは任意であり、 $X_i(t)$  の漸近的な振舞いには影響しない。軌道がヘテロクリニックアトラクタに漸近する場合、 $\vec{X}$  の軌道はある閉曲線(多角形)に巻き付いて行き、その周期は等比数列的に伸びることが示されている。これは各サドル近傍での滞在の長さが、全体としては等比数列的に伸びる一方で、サドルへの滞在時間の相対的な比率はある決まった比率に漸近するため、前章での解析 ( $Y_i$  の線形写像を使った解析) において、安定なヘテロクリニック軌道の近傍の軌道に対応する  $\vec{Y}$  の向きが最大固有値に対応する固有ベクトルに漸近することに対応している。

ポピュレーションの長時間平均と同様の性質が、 $y_i$  の変化率の長時間平均についても成り立つ。つまり  $(y_i(t) - y_i(t_0))/(t - t_0)$  の軌道もまたある閉曲線に漸近して、十分大きな値を持つ  $\tau$  に対しては、

$$(Y_i(t_0 + \kappa\tau) - Y_i(t_0)) = \kappa(Y_i(t_0 + \tau) - Y_i(t_0)) + o(\tau), \quad (3.3)$$

が成り立つ。ここで  $\kappa$  は子サイクルに巻き付く軌道が示す振動の周期の漸近的な伸び率を表す定数である。

ところで、子サイクル近傍からの離脱は  $Y_5$  成分がゼロに届くというイベントに対応すると考えられる。したがって子サイクル近傍への滞在時間は近似的には  $Y_5(t_0 + \tau)$  がゼロになるような最小の正の  $\tau$  として与えられる。したがって、 $Y_5(t_0)$  が十分大きい場合には、上の式より、 $Y_5(t_0)$  が  $\kappa$  倍になるとこのサイクル近傍への滞在時間もまた  $\kappa$  倍になり、その間の  $Y_i$  の他の成分の変化量も  $\kappa$  倍されるという性質があることがわかる。従って、

- $|\bar{Y}|$  が十分大きな値をとる場合、「子」のサイクル近傍での  $Y_i$  の変化を表す写像は  $\kappa$  倍の操作と可換である。

ということがわかる。

従って図 3.10 等で見られているような  $\log |\bar{Y}|$  について周期的な規則性は  $|\bar{Y}|$  が無限大になる極限で成り立つものであり、この構造は無限に続いていることがわかる。これに対応して、アトラクタの列もまた可算無限個の族を作っていることがわかる。

この節では  $|\bar{Y}|$  が大きくなる側では規則的構造が無限に続いていることを確かめた。しかし逆の側には規則的構造の限界がある。このアトラクタの繰り返し構造の限界付近で、繰り返し構造が変形してこわれる様子は、図 3.13 で見ることができる。この例の場合、これ以上ヘテロクリニックネットワークから離れた初期条件を与えた場合には、軌道はサドル {5} に十分近付かないうちに次のサドル {1, 5} へと向かってしまうようになる。このためこれまで述べて来たような近似が成り立たなくなる。この場合には、軌道は全ての種が共存するような安定平衡点 {1, 2, 3, 4, 5} に収束することが見られている。

### 3.5 パラメータの変化によって起こるこの他の現象

階層的なヘテロクリニックネットワークの周辺での力学に関しては、この章でこれまでに見て来たパラメータの値の周辺に限っても、更にいくつかの興味深い複雑な現象が見られている。

一つはパラメータの変化に伴って起こる、可算無限個のクライシス分岐である。これまでに見て来たパラメータでは、繰り返しの各ユニットが各々一つづつのアトラクタを持っていた。パラメータを変化させていくとこのアトラクタは消えてしまう。これは可算無限個のクライシス分岐を通して起こることになる。これらのアトラクタが消失した場合の軌道の時間無限大での振舞いには幾つかの可能性が考えられる。

1. 次第に周期が延びる振動を示しながらヘテロクリニック軌道に漸近する。
2. 一定の比率で周期が縮む振動を示し、最終的には定常的なアトラクタ (平衡点/ リミットサイクル/ ストレンジアトラクタ) に収束する。
3. それまでとは別のベシン境界を持つアトラクタの族が現われる。
4. 酔歩的 (カオス的) にヘテロクリニック軌道から離れたり近付いたりしながら振動する。

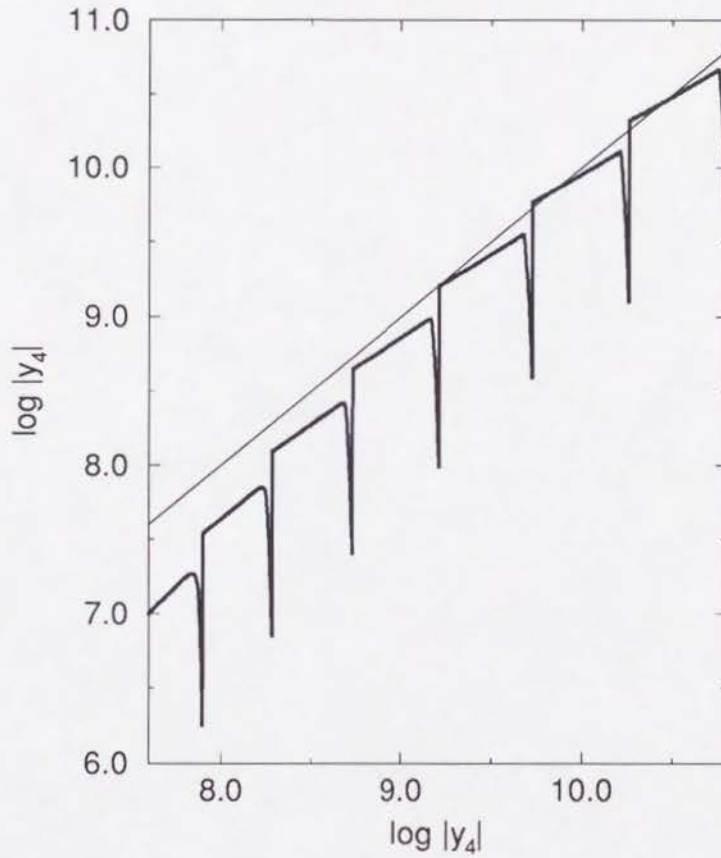


Figure 3.13: アトラクタの列が壊れる付近での帰還写像

アトラクタの列が壊れる付近 ( $y_4 = 2.0 \times 10^4$ 程度) で、図 3.10 と同様の帰還写像を計算した結果。ヘテロクリニック軌道と初期条件との距離がこれよりも離れた場合には、相空間の内部にあるアトラクタ (5成分が共存する平衡点) へと収束することが観察されている。

4番目の運動は、「階層的」な構造を持つヘテロクリニックネットワークの近傍に特徴的な運動であり、やはりこれまでに報告されていない新しいタイプの力学的挙動である。このような運動の一つの例を図3.14及び3.15に示しておく。この例の場合には軌道は酔歩的に運動しながら次第にヘテロクリニック軌道に近付いて行っているように見える。

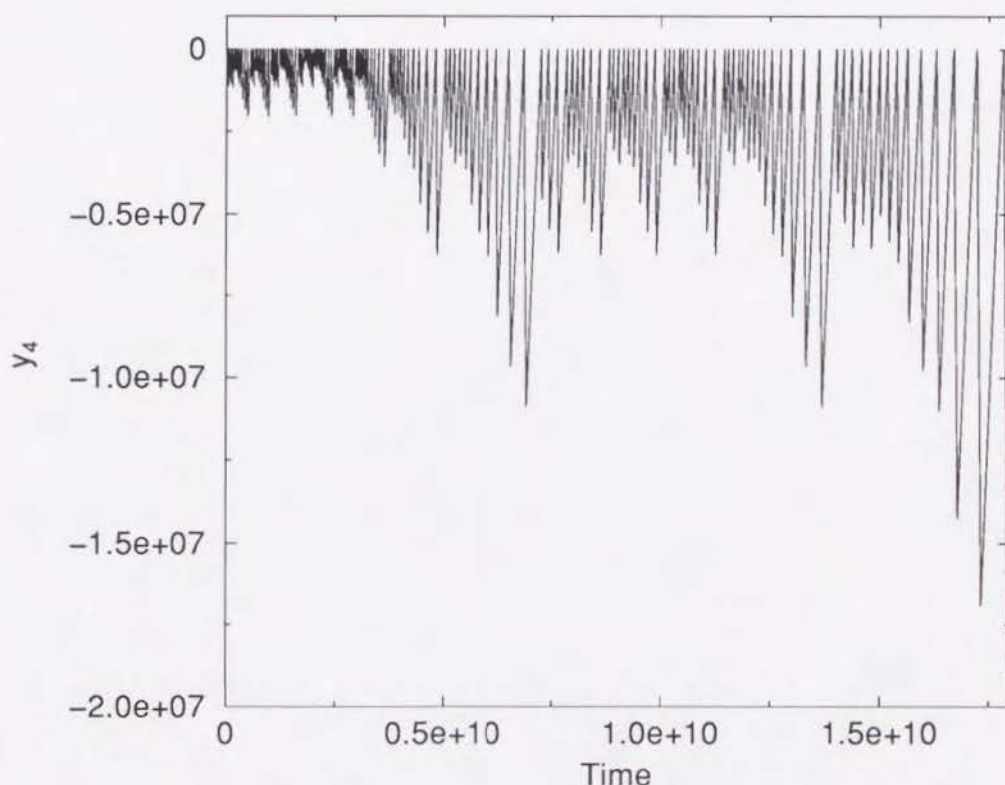


Figure 3.14: 酔歩的な周期の変動を示す軌道の例

5成分からなる系で、(3.1)式で与えられるようなパラメータ ( $X = 1.7$ ) を与えた場合にみられる、酔歩的な周期の変化を伴う軌道の例。横軸は時間、縦軸は  $y_4$  の値を表す。初期条件は、 $\vec{y} = (-\log 4, -\log 4, -\log 4, -10^6, -\log 4)$  を与えた。

この例とは逆に、酔歩的な運動をしながら平均としてはヘテロクリニック軌道から遠ざかるものもあり得る。このような場合には、系は「パーマネンス」の条件を満たさないにも関わらずほとんど全ての初期条件から出発した軌道が内部平衡点に収束するということが起こり得る。

### 3.6 まとめ

この章では階層的な構造を持つヘテロクリニックネットワークの近傍での力学について解析して、そこで見られる現象について述べた。このタイプのネットワークは成分の数が5以上のゲーム力学系において生成的な構造として存在することができる。その近傍の力学は複雑で、幾つかの奇妙な現象が見られる。



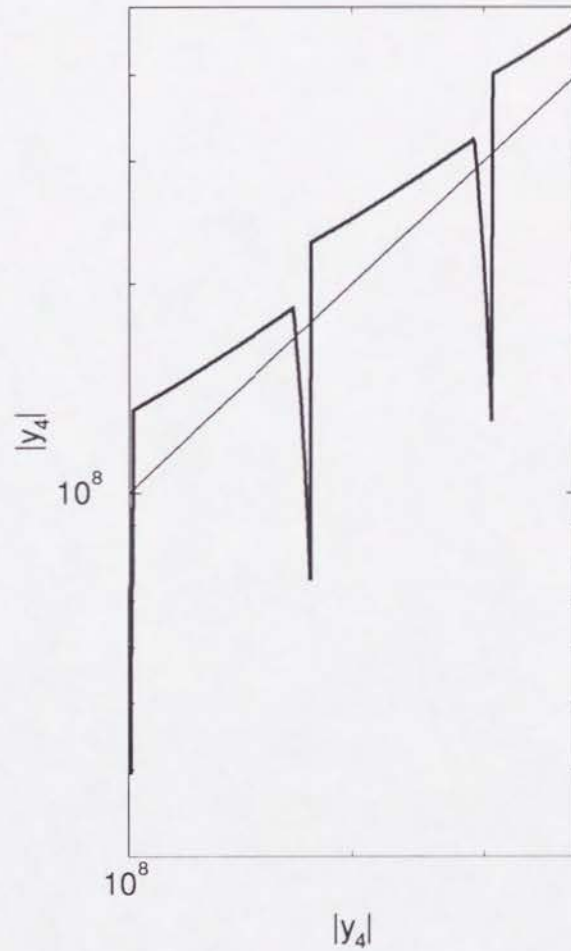


Figure 3.15: 酔歩的な周期の変動を示す場合の  $y_5$  の帰還写像

図 3.10と同様の帰還写像を、 $X = 1.7$ とした場合に求めたもの。軌道はこの写像の繰り返しによって左右に酔歩的(カオスの)に動く。これは前図においてみられる、振動の周期及び振幅の不規則な変化と対応する。

ここでは特に、可算無限個のリミットサイクルまたはストレンジアトラクタが共存する構造について解析した。その結果、このアトラクタの族において、各々のアトラクタ上での運動の特徴的な時間スケール(周期)は等比数列をなしており、これに対応してアトラクタとヘテロクリニック軌道との距離は、対数をとると等比数列となるような数列を作っている。このような規則的な構造は、サドル的なヘテロクリニックサイクル(「子」サイクル)へと漸近する軌道のもつ性質から導かれることを示した。

# Chapter 4

## 議論とまとめ

この論文で扱って来たような運動に関しては、これまでにはあまり報告がなく、またこの研究で明らかにできたのはまだ部分的なものである。ここでは今後の研究の課題と考えられる幾つかの点について触れておく。

### 4.1 より大自由度の系との関係

この論文では、基本的に少数自由度の系における漸近的挙動について調べてきた。特に2章及び3章で挙げた例は、各々の現象が観察されるようなもののうちで、最小の自由度を持つようなものであった。ここでは、系がより多くの自由度をもつ場合にみられる現象についても簡単に触れておくことにする。

**より複雑なネットワーク** この論文で扱った例よりも自由度が多い系においては、より複雑な構造をもつヘテロクリニックネットワークの出現が起こりうる。

第3章扱ったネットワークは、ヘテロクリニックサイクルを一つのサドルとして含むような構造を持つものであった。更に多くの自由度を持つ系の場合には、より複雑な構造を持つネットワークを一つのサドルとして含む様な構造—例えば第2章で扱ったような分岐を含むヘテロクリニックネットワークや、第3章でみたような階層的構造を持つネットワークを一つのサドルとして含むような構造—を持つネットワークが存在できる。

これらの複雑なネットワークの近傍でどのような現象が起こりうるかについてはまだほとんど何もわかっておらず、今後の研究の課題である。

**緩和過程における挙動** 多くの成分を含むようなゲーム力学系を考える場合には、相空間のなかには幾つかのアトラクタが共存するのが一般的である。またこの論文で述べて来たようなものも含めてアトラクタの種類も様々なものがありえる。そのため漸近的な挙動について一般論を展開するのは難しい。また多くの成分を含むようなゲーム力学系を考える場合には、一般的に言ってアトラクタに近づくまでの緩和にかかる時間は長くなる。従ってこのような場合には緩和過程の力学の相対的な重要性が高くなると考えられる。

この緩和過程においても、2章や3章で扱ったような多数のサドルの間をヘテロクリニック軌道に沿って動きまわるような運動が一般的に見られている。この結果、適当な初期条件

を与えた場合にみられる一般的な軌道の振舞いとして、

1. 初期の速い緩和
2. サドル間を遷移しながら、安定なアトラクタを探す遅い緩和
3. 終状態：定常的状态（平衡/周期運動/カオス）又は非定常状态（ヘテロクリニック的運動）

というような段階がみられる。

この2で示した段階は、軌道がサドル近傍に長い時間滞在しながらサドル間を動きまわるという特徴を示す。また各サドル状態に留まる時間の長さには、平均すると指数関数的な伸びを示すなどの規則性が見られ、第2章で述べた運動と共通する特徴が多く、第2章における  $\eta$  の力学に対応するような近似力学系を導入して議論することが可能である。特に系の自由度が十分大きい場合には、サドルの系列を定常的な酔歩的運動と対応付けて扱い、一般的・統計的に成り立つ議論を展開することができる。

## 4.2 他の系との関係について

**他のモデル系との関係** この論文では扱った現象においては、ゲーム力学系が持つ不変集合の構造が本質的に重要な役割を果たしていた。このような不変集合の構造はゲーム力学系に特有のものではなく、適当な対称性を持つ系では一般的に見られる。そして実際に適当な対称性を持つ幾つかのモデル系においては、ヘテロクリニック軌道がパラメータの変化に対してロバストに存在して、これに漸近するような軌道が存在することが数値実験においてもみられている。例えば回転対称性を持つような対流系、大域的に結合した振動子の系などのモデル系ではヘテロクリニックサイクルがアトラクタとして出現することが報告されている。

このように運動法則自体が幾つかの対称性の積で表されるような対称性を持っている場合には、対称性の異なる幾つかの準安定状態間を遷移する運動が起こりうる。この論文で扱ったモデルはこれらの対称性を持つモデル系を更に単純化したものと見なすことも可能である。この場合  $\vec{Y}$  の力学は「実効的な自由度」の時間発展を記述する一種のメタ力学を与える。 $\vec{Y}$  の力学系は自由度が制限された「部分系」の中の力学の詳細については直接は関与していない一般的なものであり、ゲーム力学系に限らず、系の実効的な自由度(対称性)が時間とともに変化するような時間発展が起こる系を解析する際には有効であると考えられる。

**現象との対応** この論文で述べた現象と実験で観測されている現象との直接の対応はこれまでは見つかっていない。しかしここで述べた解析自体は物理的な現象と全く無関係のものではないと考えられる。上で述べたように、このモデルは、幾つかの対称性の積で表されるような対称性を持っている系のメタモデルになっていると考えることができる。実際、このモデル上での解析は、幾つかのモデルで見られているようなヘテロクリニック的な運動を理解する上では役に立つと考えられる。そのような意味で、少なくとも理想化された物理系の挙動を解析する上ではこのモデルは有効であり、物理的な現象と間接的には関係を持っていると考えられる。

一方ヘテロクリニック軌道のネットワークは、対称性を破るような摂動(つまりゲーム力学系では  $x_i = 0$  で表される不変集合を壊すような摂動)に対しては構造安定ではない。そのため少しでも対称性が破れていれば、ヘテロクリニック軌道がつくるアトラクタは消滅してしまうと言う問題点がある。この場合第2章で扱ったような運動が理想的な形で見られることはありえなくなるが、対称性の破れが十分に小さければ、アトラクタへの緩和過程のなかで指数関数的な時間のスケールの変化などの特徴が観測されることはありえる。また第3章で扱ったようなアトラクタの列に関しては、個々のアトラクタは原理的には構造安定なアトラクタである。従って、ヘテロクリニック軌道そのものは微小な摂動で壊れても、ヘテロクリニック軌道から比較的離れた幾つかのアトラクタが生き残ることによって、アトラクタの列の「なごり」が観測されることは原理的にはありえる。ただしヘテロクリニックネットワークに近い軌道程小さな摂動で破壊されるため、無限個のアトラクタ全てが生き残ることはない。

このように、ここで扱った現象はこのままの形で実験的に観測されることは難しい。しかし、その痕跡が物理的現象の中で観測される可能性はあると考えられる。

### 4.3 まとめ

この論文ではゲーム力学系で見つかった、これまでに報告されていないタイプの力学的な構造について解析した結果を述べた。

ここで報告した現象の一つは、幾つかの準安定状態の間を不規則な順序で訪れながら遷移し続けるというものがある。この場合に見られる運動は各状態への滞在時間がほぼ指数関数的に延び続けるという特徴を持ち、非定常な運動になっている。この場合、アトラクタはヘテロクリニック軌道が作るネットワークであり、枝分れを持つ構造になっている。

もう一つの現象は、相空間のなかで可算無限個のアトラクタが同時に共存するというものである。可算無限個のリミットサイクルアトラクタが共存する場合と、可算無限個のストレンジアトラクタが共存する場合の両方を見つけている。これらのアトラクタの族は、ヘテロクリニック軌道からなる階層的な構造を持つネットワークに集積するような形で存在する。このネットワークの近傍に初期条件を持つ軌道は、その初期条件に応じて異なるアトラクタに引き寄せられることになる。ここで述べた無限個のアトラクタの共存という現象はこのようなタイプのネットワークの近傍で見られる多様な現象のごく一部であり、他にもまだ詳しく調べられていない複雑な現象が見られている。

この論文で扱った現象にはヘテロクリニック軌道がつくるネットワーク構造が本質的に関係している。この構造は、一般的な拘束を持たないような力学系においては、生成的ではない特殊な構造である。しかし適当な対称性を与えるような拘束条件を持つ系においては一般的に起こりうるものであり、物理的に意味のあると考えられるモデル系においても見られるものである。ここで扱った系は、単にポピュレーションダイナミクスのモデルという点だけではなく、適当な対称性を持つモデルにおける類似の現象を解析する上でのメタモデルとしての意味を持つと考えられる。

# Appendix A

## 線形近似の誤差の評価

ここでは、写像 (2.17) 及びこの写像と等価な方程式 (2.6) が与える近似の誤差を評価しておく。まず、サドル近傍に滞在中の任意の時間の間の  $\bar{y}$  の変化を、「線形近似」した時の誤差が、時間の長さによらない定数で抑えられることを示す。その後で、サドル近傍への滞在の長さの評価誤差及びそれに派生する  $\bar{y}$  の評価誤差が定数で抑えられることを示す。

まず、あるサドルの近傍に滞在している間の  $y_i$  の変化を評価するが、それに先だって幾つか記号を定義しておく。サドル的な平衡点上での各成分の値及び成長率をそれぞれ  $x_i^A$ 、 $\lambda_i^A$  としておく。また対応する平均得点  $\sum_i \sum_j g_{ij} x_i x_j$  を  $\bar{s}^A$  で表しておく。これらの間には、

$$\sum_j g_{ij} x_j^A = \bar{s}^A + \lambda_i^A, \quad (\text{A.1})$$

という関係が成り立つ。また、添え字については、メジャーな成分とマイナーな成分を区別しない場合には  $i, j$ 、メジャーな成分を表す場合には  $\alpha, \beta$  を、マイナーな成分を表す場合には  $\mu, \nu$  をそれぞれ使うことにする。従って、

$$x_\mu^A = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\lambda_\alpha^A = 0 \quad (\text{A.3})$$

である。これに対応して  $\sum_i$  は全ての成分についての和、 $\sum_\alpha$  はメジャーな成分、 $\sum_\mu$  はマイナーな成分についての和をとることを表すとしておく。

またサドル近傍の大きさを  $\epsilon$  としておく。  $\epsilon$  は次の条件を満たすものとしておく、

$$\text{サドルの近傍内の点については } x_\alpha > \epsilon \text{ が成り立つ。} \quad (\text{A.4})$$

$$\text{サドルの近傍内の点については } |\lambda_\mu| > \epsilon \text{ が成り立つ。} \quad (\text{A.5})$$

平衡点が双曲的であるという仮定のもとでは、 $\epsilon$  を十分小さくとればこれらふたつの条件を満たすことができる。

サドル近傍に滞在中の時刻  $t = 0$  から  $t = T$  までの間についての  $y_i$  の変化を  $\Delta y_i$  とする。この間の個体数、成長率、平均得点の時間平均をとり、それらを  $X_i$ 、 $\Lambda_i$ 、 $\bar{S}$  で表す。

$$\Delta y_i(T) \equiv y_i(T) - y_i(0),$$

$$\begin{aligned}
X_i(T) &\equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt x_i(t), \\
\Lambda_i(T) &\equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \lambda_i(t) = \frac{1}{T} \Delta y_i(T), \\
\bar{S}(T) &\equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \bar{s}(t),
\end{aligned} \tag{A.6}$$

またこれらの平均値の、平衡点における値からのずれを、

$$\delta X_i \equiv X_i - x_i^A, \tag{A.7}$$

$$\delta \Lambda_i \equiv \Lambda_i - \lambda_i^A \tag{A.8}$$

として表しておく。また平均得点についても同様に

$$\delta \bar{S} = \bar{S} - \bar{s}^A, \tag{A.9}$$

として定義しておく。

時刻  $t=0$  及び  $t=T$  の双方において、軌道がこのサドルの近傍にあることから、

$$x_i^A - \epsilon < x_i(t) < x_i^A + \epsilon, \tag{A.10}$$

が成り立つ。

(A.4) より、

$$x_\alpha^A > 2\epsilon \tag{A.11}$$

が成り立つ、従って

$$\frac{1}{3} < \frac{x_\alpha(T)}{x_\alpha(0)} < 3, \tag{A.12}$$

つまり

$$\begin{aligned}
|\Delta y_\alpha| &< \log 3, \\
\delta \Lambda_\alpha &< \frac{\log 3}{T}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

が成り立つ。

一方、マイナーな成分については、 $t \in [0, T]$  の間はサドルの近傍の内部に留まっていることから、

$$\max_{t \in [0, T]} x_\mu < \epsilon, \tag{A.14}$$

がなりたつ。また (A.5) より、この間マイナーな成分の成長率の符号は一定で、その絶対値は常に  $\epsilon$  よりも大きい。従って、成長率が負の場合には、

$$\int_0^T dt x_\mu(t) < \int_0^T dt \epsilon \exp(-\epsilon t) < \frac{1}{T}, \tag{A.15}$$

成長率が正の場合には、

$$\int_0^T dt x_\mu(t) < \int_0^T dt \epsilon \exp\{\epsilon(t-T)\} < \frac{1}{T}, \tag{A.16}$$

となり、いずれにせよ

$$\delta X_\mu < \frac{1}{T}, \quad (\text{A.17})$$

が  $T$  の値によらずに成り立つことになる。

ところで、(1.1) 式を時間  $[0, T]$  について平均すると、

$$\sum_j g_{ij}(x_j^A + \delta X_j) = \bar{s}^A + \delta \bar{S} + \delta \Lambda_i \quad (\text{A.18})$$

が得られる。これと (A.1) 式より

$$\sum_j g_{ij} \delta X_j = \delta \bar{S} + \delta \Lambda_i, \quad (\text{A.19})$$

つまり、

$$\sum_\alpha g_{i\alpha} \delta X_\alpha = \delta \bar{S} + \delta \Lambda_i - \sum_\mu g_{i\mu} \delta X_\mu \quad (\text{A.20})$$

が成り立つことがわかる。

ここで、 $\delta X'_\alpha$  を連立方程式、

$$\sum_\beta g_{\alpha\beta} \delta X'_\beta = \delta \Lambda_\alpha - \sum_\mu g_{\alpha\mu} \delta X_\mu, \quad (\text{A.21})$$

の解として定義すると、(A.20) 及び (A.21) より

$$\sum_\beta g_{\alpha\beta} (\delta X_\beta - \delta X'_\beta) = \delta \bar{S} \quad (\text{A.22})$$

となるが、これを連立方程式として解くと、

$$(\delta X_\alpha - \delta X'_\alpha) = \frac{\delta \bar{S}}{\bar{s}^A} x_\alpha^A, \quad (\text{A.23})$$

$$\delta X_\alpha = \delta X'_\alpha + \frac{\delta \bar{S}}{\bar{s}^A} x_\alpha^A, \quad (\text{A.24})$$

$$\sum_\alpha \delta X_\alpha = \sum_\alpha \delta X'_\alpha + \frac{\delta \bar{S}}{\bar{s}^A}, \quad (\text{A.25})$$

$$(\text{A.26})$$

が得られる。

一方、(1.2) 式より

$$\sum_\alpha (x_\alpha^A + \delta X_\alpha) + \sum_\mu \delta X_\mu = 1, \quad (\text{A.27})$$

従って、

$$\sum_\alpha \delta X_\alpha + \sum_\mu \delta X_\mu = 0, \quad (\text{A.28})$$

$$\sum_\alpha \delta X'_\alpha + \sum_\mu \delta X_\mu + \frac{\delta \bar{S}}{\bar{s}^A} = 0, \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\delta \bar{S}}{\bar{s}^A} = - \left( \sum_\alpha \delta X'_\alpha + \sum_\mu \delta X_\mu \right), \quad (\text{A.30})$$



が成り立つ。結局、

$$\delta X_\alpha = \delta X'_\alpha - x_\alpha^A (\sum_\beta \delta X'_\beta + \sum_\mu \delta X_\mu), \quad (\text{A.31})$$

となる。

(A.13) 及び (A.17) より、(A.21) 式の右辺は  $O(1/T)$  であるから、

$$\delta X'_\alpha \sim O(1/T), \quad (\text{A.32})$$

となり、(A.31) の右辺も  $O(1/T)$  であることがわかる。従って結局

$$\delta X_\alpha \sim O(1/T), \quad (\text{A.33})$$

となることがわかる。従って、(A.19) 及び  $\delta X_i \sim O(1/T)$ 、 $\delta \bar{S} \sim O(1/T)$  より、

$$\delta \Lambda_i \sim O(1/T) \quad (\text{A.34})$$

となる。

一方  $\delta \Lambda_i$  の定義より、

$$\begin{aligned} \Delta y_i - \lambda_i^A T &= (\lambda_i - \lambda_i^A) T \\ &= \delta \Lambda_i T \end{aligned}$$

が成り立つ。これは適当な正の定数  $C$  をとると任意の  $T$  に対して、

$$|\Delta y_i - \lambda_i^A T| < C, \quad (\text{A.35})$$

が成り立つことを示している。

次にサドル近傍への滞在時間について考える。サドルへの滞在時間を  $t = (0, \tau)$  としておく。サドル近傍からの離脱を引き起こす成分を  $I$  で表すことにすると、 $y_I(\tau) = \log \epsilon$  が成り立つ。また

$$\tau_0 \equiv \frac{-y_I}{\lambda_I^A} \quad (\text{A.36})$$

として  $\tau_0$  を定義しておく。(2.17) の近似は  $\tau$  を  $\tau_0$  で評価したものに当たる。ところで、

$$\tau' = \frac{(\log \epsilon - C - y_I(0))}{\lambda_I^A}, \quad (\text{A.37})$$

とおくと、(A.35) 式より、

$$\log \epsilon - 2C < y_I(\tau') < \log \epsilon, \quad (\text{A.38})$$

また、 $0 < t < \tau$  に対して  $\lambda_I(t) > \epsilon$  が成り立つから、

$$\tau' < \tau < \tau' + \frac{2C}{\epsilon}, \quad (\text{A.39})$$

従って、

$$0 < \tau - \tau_0 = \tau - \tau' + \frac{(\log \epsilon - C)}{\lambda_I^A} < \frac{2C}{\epsilon} + \frac{(\log \epsilon - C)}{\lambda_I^A}, \quad (\text{A.40})$$

となり、滞在時間の評価誤差もやはり定数で抑えられる。この滞在時間の評価誤差の上限を  $C'$  としておく。

これらの結果から、サドル近傍への滞在の間の  $y_i$  の変化の評価誤差は

$$\begin{aligned} |\Delta y_i(\tau) - \lambda_i^A \tau_0| &< |(\Delta y_i(\tau) - \Delta y_i(\tau_0))| + (\Delta y_i(\tau_0) - \lambda_i^A \tau_0)| \\ &< C' + C, \end{aligned} \tag{A.41}$$

となる。従ってどんなに長い滞在の場合にもその変化の (2.17) による評価の誤差は一定の幅に収まることがわかる。

一方、ヘテロクリニック軌道に沿ってサドル近傍からサドル近傍まで動く間にかかる時間は、一般的にはサドルへの滞在の長さによらないある定数で抑えられる。 $y_i$  の変化率は定数で抑えることができるので、結局サドル近傍間の遷移の間の  $y_i$  の変化もやはりある定数以下であることがわかる。

従って一つのサドルの近傍にたどり着いてから、そこを脱出して次のサドル近傍に到着するまでの変化を (2.17) で評価した場合の誤差は、滞在時間の長さにはよらない定数で抑えることができる。結局、(2.17) 式の与える線形写像は、軌道とサドル（及びヘテロクリニック軌道）の距離がゼロに近づく極限において、相対誤差がゼロになるような近似を与えることになる。

# References

- [1] R. M. May and W. J. Leonard, *Nonlinear aspects of competition between three species*, SIAM J. Appl. Math, **29**, 243-252, (1975).
- [2] P. Ashwin and J. W. Swift, *The dynamics of  $n$  weakly coupled identical oscillators*, J. Nonlinear Science, **2**, 69-108, (1992).
- [3] K. Okuda, *New aspects of collective dynamics in globally coupled phase oscillators*, Thesis, Kyoto Univ., (1994).
- [4] D. Hansel, G. Mato and C. Meunier, *Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators*, Phys. Rev. E, **48**, 3470-3477, (1994).
- [5] E. Knobloch and M. Silber, *Oscillatory convection in a rotating layer*, Physica D, **63**, 213-232, (1993).
- [6] A. S. Mikhailov and I. Yu. Poteryaiko, *Attractive separatrix loops in connectionist models*, Physica D, **53**, 13-24, (1991).
- [7] P. D. Taylor and L. B. Jonker, *Evolutionarily Stable Strategies and Game Dynamics*, Mathematical Bioscience, **40**, 145-156, (1978).
- [8] F. Scudo and J. Ziegler, *The Golden Age of Theoretical Ecology, 1923-1940*, Lecture Notes in Biomathematics, **22**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, (1978).
- [9] M. Eigen, *Selforganization of matter and the evolution of biological macromolecules*, Die Naturwissenschaften, **58**, 465-523, (1971).
- [10] R. A. Fisher, *The Genetical Theory of Natural Selection*, Oxford: Clarendon Press, (1930).
- [11] J. Maynard Smith, *The Theory of Evolution 3rd edition*, Harmondsworth: Penguin Books, (1975).
- [12] J. Maynard Smith and G. Price, *The logic of animal conflicts*, Nature, **246**, 15-18, (1973).
- [13] A. J. Lotka, *Undamped oscillations derived from the law of mass action*, J. Am. Chem. Soc., **42**, 1595-1598, (1920).
- [14] V. Volterra, *Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*, Paris: Gauthier-Villars, (1931).
- [15] J. Hofbauer, *On the occurrence of limit cycles in the Volterra-Lotka equation*, Nonlinear Analysis, **5**, 1003-1007, (1981).
- [16] J. Hofbauer and K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, (1988).

- [17] A. Arneodo, P. Couillet and C. Tresser, *Occurrence of strange attractors in three dimensional Volterra equations*, Phys. Lett. **79A**, 259-263, (1980).
- [18] M. E. Gilpin, *Spiral chaos in a predator-prey model*, American Naturalist, **113**, 306-308, (1979).
- [19] E. C. Zeeman, *Population dynamics from game theory*, In: Global Theory of Dynamical Systems. Springer Lecture Notes in Mathematics **819**, (1980).
- [20] J. W. Reyn, *Phase portraits of a quadratic system of differential equations occurring frequently in applications*, Nieuw Archief voor Wiskunde **5**, 107-155, (1987).
- [21] I. M. Bomze, *Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification*, Biol. Cybern., **72**, 447-453, (1995).
- [22] G. Butler and P. Waltman, *Persistence in Dynamical Systems*, J. Diff. Equations, **63**, 255-263, (1986).
- [23] G. Butler, H. I. Freedman and P. Waltman, *Uniformly persistent systems*, Proc. Amer. Math. Soc., **96**, 425-430, (1986).
- [24] J. Hofbauer, *A Unified Approach to Persistence*, Acta Applicandae Mathematicae, **14**, 11-22, (1989).
- [25] H. I. Freedman and P. Waltman, *Mathematical analysis of some three species food chain models*, Math. Biosci. **33**, 257-273, (1977).
- [26] P. Schuster, K. Sigmund and R. Wolff, *Dynamical systems under constant organization*, J. Diff. Equations, **32**, 357-368, (1979).
- [27] A. Gaunersdorfer, *Time averages for heteroclinic attractors*, SIAM J. Appl. Math., **52**, 1476-1489, (1992).
- [28] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Math. Sciences, **42**, New York-Heidelberg-Berlin:Springer, (1983).
- [29] I. Melbourne, *An example of a non-asymptotically stable attractor*, Nonlinearity, **4**, 835-844, (1991).
- [30] T. Ura, *On the flow outside a closed invariant set; stability, relative stability and saddle sets*, Contributions to Differential Equations vol.3, No. 3, 249-94, (New York: Wiley, 1964).
- [31] W. Brannath, *Heteroclinic networks on the tetrahedron*, Nonlinearity, **7**, 1367-1384, (1994).
- [32] V. Kirk and M. Silber, *A Competition between heteroclinic cycles*, Nonlinearity, **7**, 1367-1384, (1994).
- [33] S. Newhouse, *Diffeomorphisms with infinitely many sinks*, Topology, **13**, 9-18, (1974).
- [34] J. Palis and F. Takens, *Hyperbolicity & Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic bifurcations*, Cambridge Studies in Advanced Math. **35**, Cambridge Univ. Press, (1993).

## 謝辞

この研究を進めるにあたって協力いただいたすべての方に感謝します。本研究は佐々真一博士（現東京大学）との共同研究がもとになって発展したものであり、この研究に当たっても様々な形で協力して頂きました。また蔵本由紀教授、奥田浩司博士（現北海道大学）、柳田達雄博士（同）、西浦康政教授（同）、田中久陽博士（早稲田大学）には重要な助言・情報を頂きました。その他にも多くの方に議論していただき有益な意見を承りました。また、京都大学理学部物理学教室、京都大学基礎物理学研究所、湯川記念財団及び東北大学電気通信研究所には、計算機の利用、研究費の支給等研究を続けられる環境を与えていただきました。

これまで研究を指導・支援していただいた蔵本先生をはじめ、篠本先生、基礎物理学研究所の村瀬先生、電気通信研究所の澤田先生、佐野先生には論文の提出が遅れて大変御迷惑をおかけしましたことをお詫びします。大学院在学中及びこの論文の執筆中は、非線形動力学研究室を始めとする物性理論研究室の方々及びそのOBの方々、そして電気通信研究所・澤田研の方々には大変お世話になりました。この場を借りて改めて御礼申し上げます。