

学位申請論文

大域結合振動子系における集団運動

中川 尚子

1996年1月

Contents

<b>1</b>	<b>問題意識の整理</b>	<b>3</b>
1.1	研究以前	3
1.2	集団運動への着目 - 具体例からの要求	4
1.3	対象となるモデルの必要条件	6
<b>2</b>	<b>モデルの導入と集団運動の概観</b>	<b>8</b>
2.1	globally coupled complex Ginzburg-Landau 方程式の導入	8
2.2	GCGL に含まれるパラメータの効果	10
2.3	Phase oscillator model	11
2.4	GCGL で見られる集団運動	14
<b>3</b>	<b>少数クラスター状態 (クラスタリング)</b>	<b>16</b>
3.1	1 クラスター状態	16
3.2	2 クラスター状態	18
3.3	クラスター間の相対運動	29
3.4	3 以上の少数クラスター状態と部分クラスター状態	35
3.5	まとめと関連する研究	36
<b>4</b>	<b>連続分布の運動</b>	<b>38</b>
4.1	incoherent 状態	38
4.2	一様分布	41
4.3	連続分布が見せる運動の複雑化	45
4.4	一次元的連続分布と中立安定性	50
4.5	まとめと関連する研究	56
<b>5</b>	<b>大自由度カオス</b>	<b>58</b>
5.1	大自由度カオスの概観	58

5.2	連続分布から大自由度カオス . . . . .	61
5.3	Lyapunov スペクトラムの離散部分と連続部分 . . . . .	65
5.4	Lyapunov スペクトラムの収束形 . . . . .	70
5.4.1	拡張 GCGL の導入 . . . . .	71
5.4.2	Lyapunov スペクトラムの漸近展開 . . . . .	73
5.4.3	大自由度カオスでの Lyapunov スペクトラムの収束形 . . . . .	76
5.5	離散指数と連続スペクトラム、再考 . . . . .	89
5.6	まとめと議論 . . . . .	91
6	最終章 . . . . .	94
A	GCGL の導出 . . . . .	97
	謝辞 - 研究の回想から . . . . .	99
	Bibliography . . . . .	100

## Chapter 1

### 問題意識の整理

#### 1.1 研究以前

動的素子からなる大自由度力学系に強く引かれた背景には、私が生物の中に認める個体として統一の取れた全体性、例えばあたかも巨大な意図に沿って進んでいるかのように調和の取れた個体制御や発生の神秘さ、に取り付かれ、現状の生物学的説明では満足できず、異なる理解法を求めていたという事情がある。生物学では大雑把に表現すれば、“適切な”ときに“適切”な遺伝子が発現し“適切”な酵素反応が“適切”な場所で起こって、全体がうまく行くようになっているのだという説明が加えられる。しかしながら、この説明は時間的にも空間的にも非常に局所的なものであり、局所的にうまく行くを足し合わせれば全体もうまく行くということを信じた場合にのみ正しいと信じることができる。このことを回避するには次のような説明が施されることもある。発生を例にとって簡潔に示すと、発生の過程で見られる、空間的に離れた細胞達がタイミングを取りながら全体の中で必要とされるものに形態を変えていく様子を、各細胞に発生過程の進み具合と自分の占める位置が何らかの形で記憶され、それに合わせて遺伝子が発現しているのだと捉える、という立場である。しかし、このような各細胞や遺伝子という観点だけではなく、細胞集団と見たときの集団性、ひいてはそのもとに生じる生物個体としての全体性という観点で全体の調和を語ることによって、上記の説明でそれとなく現われた記憶とか全体の中の自分の位置の認識という問題にも新たな光を当てることができるのではなかろうか。安直に細胞個体の複雑さに全てを埋め込んで納得してしまうと、問題を棚上げすることになり、結局、細胞個体について議論する際に同じ問題に直面するだけのように思える。いきなり個体制御や発生過程のような問題に突っ込むことはできないが、もう少し単純な場合を例にとって考察することにより、要素(細胞)集団における全体性という概念を構築できないだろうか。この目的のためには動的素子からなる大自由度力学系を研究調査し、現象を整理・把握しておくことが必要であると考えることができる。

生物の世界では、生きているものを扱うかぎり、一つの細胞にしる、一つの個体にしる、全て自律的に動き続けるものが基本となる。このような自律的に動き続けるものが、何らかの手段によって相



相互作用を及ぼしあいその結果集団を形成した時に、集団に生じる“全体性”とはどのようなものでどのように特徴付けられるものなのか、同時にそのとき“個性性”はどのようなのかという問題を設定するためには、果てしなく複雑で難しい現実の生物を具体的にモデル化する以前に最小限の基本性質だけを取り出して構成した理想モデルを調べる必要がある。動的素子からなる大自由度力学系に意義が認められるのはまさにこの点にある。細胞にしろ個体にしろ、内部に非常に巧妙に制御された代謝系や脳神経系をはじめとした様々な器官を抱えている。これらのものの内部構造や個体同士の相互作用のあり方は当然非常に複雑である訳だが、相互作用下で実現される集団の“全体性”とは何か、いかに定義すべきなのかのみを問題にする場合には、もっと単純化された最少の内部構造と理想的相互作用を持つものを考えることによっても何かを得ることは可能なはずである。現時点では、生物における全体性を調べるための何が最少の内部構造で、何が理想的相互作用かという間に答えることはできない。この様な状況下で考えられる一つのアプローチはどのような場合にも含まれていそうな最も基本的な性質のみを反映するモデルシステムを作り、その系では“全体性・個性性”がどのように捉えられるのかを明確にしていくとともに、モデルが拡張された場合にそのシステムでみられる事柄が根幹部分では変わらずに保たれうるのかを見極めることであろう。幸いなことに、この20年間で非線形力学の分野は飛躍的な発展を遂げ、数値計算をするための道具も十分に進歩し、この様な研究を行なうための環境はかなり整えられている。

さてまずはいくつかの簡単な生物個体集団の例を見ていくことにより、実際に集団をなすことにより生じる効果があることを確認し、研究の方向を探ることにしよう。

## 1.2 集団運動への着目－具体例からの要求

### (1) 蛍

東南アジアに生息するタイボタル (*Pteroptyx malacca*) は求愛行動の時期になると、一本の木に非常にたくさんの雄が集まり、壮大な光の点滅を見せる。一匹の雄が放つ光はそれほど強いわけでもないが、集まった雄蛍達が一斉に同じ周期で揃って(同期して)点滅することにより、壮大な光を放つようになるのである [51][52]。この場合は、発情期にある一匹の雄蛍という個体が、光を発する機能的構造を内部に持ち、同時に外部の光を感じるという機能的構造も合わせ持つことにより他個体と相互作用して、巨大な蛍集団を構成することになり、そのもとでの集団効果としての発光の同期現象が観測されることになるのである。同期現象という集団運動は集団運動の中では複雑な部類ではない。この場合には、相互作用の結果個体の個性性は完全に消し去られてしまい、全個体が一致してしまうということであり、一目で集団効果が現われていることがわかる。この様な個性性を消し去る集団運動が実現するという事は、この状況下に置かれた蛍同士がいかに強くお互いの影響を受けているかを示唆している。

### (2) 蟻

*Leptothorax allardycei* という種の蟻は顕著な集団振動を示す [53]。孤立させた一匹一匹の蟻の活動度は突発的に上昇し、その後再びあまり活動しない状態に戻る。その時間変化は非周期的(低次元カオスだと報告されている)に変化し、個体差も大きい。ところが、自然界でコロニーを形成している個体数程度まで蟻の数を増やしてやると、コロニー全体の活動度が突発的に上がるという集団効果が観察できるようになる。この周期は蟻一個体の時間スケールとは全く違う長い周期で、コロニー固有の振動周期といえるだろう。この集団振動は先ほどの同期現象とは違う種類の集団運動である。何故ならば、同期現象での集団の振動周期は、各個体が持っていた周期とほとんど同じであるが、今の場合は個体には存在しない新しい時間スケールの振動周期が生じているからである。また、この集団振動が生じているとき、各個体は同期現象の時のように個体差を無くして全て同じように振動しているのではなく、集団の振動周期や別個体の運動とはあまり関係のない、もともとの個体の運動に近いような振る舞いを見せているだけである。この場合も集団効果が現われていることはすぐに認識できるが、個性性が消え去っていないのに全体としての運動が実現しているという点では、何が起きているのかは即座には理解できず、同期現象より複雑な集団運動といえるであろう。

### (3) 細胞性粘菌

ここからは、上記の二つの例のような集団運動の観点からの報告はなされていないが、集団を形成することによる効果が存在する、あるいはそれを利用していると思われる例をあげ、この研究での目標を示すことにする。

細胞性粘菌 (*Dictyostelium discoideum*) の生活環には、よく知られているように、アメーバ個体として振る舞い増殖し続ける相と、多数のアメーバの集合体として移動体を形成し、この移動体が一つの個体であるかのように振る舞う相とが存在している。ここでは移動体が形成された後にそれが運動を行なっている状況について注目する。移動体は多数のアメーバが粘液鞘に包まれてまとまっている状態で、この状態であちらこちらに動きまわる。内部のアメーバは予定胞子細胞と予定柄細胞にある程度の比率で分化しており、分化後の入れ替わり(ここでの分化は可逆分化である)や内部でのアメーバ細胞の移動運動なども存在している。粘膜鞘で覆われているので、移動体内だけで閉じた系を構築しており全細胞はかなり密に影響を及ぼし合っているであろうと考えられる。この状況下でも各細胞は個性性を維持して移動体内部でかなり動きまわっているが、一方で全体性があるからこそ、分化の比率制御や移動体としての運動が可能になっているはずである。

この様な分化と関係した集団運動で与えられがちな解釈をあげてみよう。遺伝子の発現の結果による分化が起こるとそれによって性質の違う2つの細胞集団が生じる。片方の群に属する細胞が外部環境を敏感に感じる事ができて各々その刺激に対応した運動をする。もう一つの(多数派をなす)群の細胞たちは、ただそれについて行く性質のみを持っているので、結果として移動体が一体となって運動することが可能なのだという理解をしがちである。この理解では各細胞の個別の性質とその足し合わせという描像しか含まれておらず、移動体という密に関連しあった細胞集団を構成することの



意義が感じられない。現状の集団運動への理解ではこのような描像を描いてしまうのも仕方無い状況ではあるが、先ほどの蟻のコロニーの例からも集団運動の可能性はまだまだ広がっていることを予感させ、まず集団運動というものについての知識を蓄える必要性を痛感させられる。

#### (4) 人間集団など

さらに集団効果があるのか無いのかすら分からない例として、人間の集団を挙げてみよう。人間は様々な方法を使ってお互いに影響を及ぼし合い、一人一人が影響を受けつつも別々に生きているわけだが、その集団としての振る舞いは単純さもかいま見られるが、やはり非常に複雑なものと言える。その複雑さの原因は、一人の人間自体の複雑さや環境の複雑さ、生命体としての複雑さ、人間自体が人間について観察・行動するという自己言及的な構造、歴史性の存在など何に起因するかを判断することすら不可能とも言える状況である。この複雑な世界では因果関係を明確にすることは困難であり、我々が一個人として何にどのように対処すればよいのかなどという問題にも答えを得ることはできない。当然ながら、全てを知り整然とした正しい行動をとるなどということはあるが、だからといってこれまでの理解で十分だということの意味するわけではない。やはり、多数の集団によって構成された国という単位がある以上、集団効果というものも現状の複雑さに何らかの影響を与えていると考えるのは自然であるし、集団効果についての知識を得ることは現状への理解なり状況整理なりの手助けになるとも考えられる。場合によっては重要な役割を担っている可能性もあるであろう。

以上の例(特に(1)~(3))では、多くの要素で構成された1つの単位としての集団に着目している。これらの集団には生物個体における細胞集団のように綿密に作り上げられた制御形態は存在しておらず、もっと単純な“集まることによって及ぼし合う影響”の結果生じる集団性が(ある意味で)原始的な形で見えているのだと思われる。

### 1.3 対象となるモデルの必要条件

問題意識の所在は把握されたと期待するが、では、集団運動について理解を深め、様々な方向に概念を拡張できるようにするには、どのようなモデルを立てて研究すればよいのであろうか。何らかの具体的な例に対応させて構築したモデルを利用すれば、その系に特有な性質が誇張されたり、集団運動が生じている原因が要素の(それなりに複雑な)内部構造にあるのか集団性にあるのかが不明確になったりする。今のように自律的な個体の集団運動に焦点を定めている場合には、生じている集団運動を個体の複雑さに帰着させないような単純な要素を選ぶことが望まれる。つまり、モデルの個体要素は直接的具體性はなくとも単純かつ自律的で抽象性の高いものという条件を満たさなければならない。また先ほどあげた例では集団は密に相互作用を及ぼし合う閉じた集団であったことに注目したい。個体同士の相互作用は空間的広がりが大きくて疎な場合もあれば、空間に比して影響が十分強くよく

行き渡っている場合もある。もちろん、生物では個体は十分複雑であるから、様々な型の相互作用が入り組んで存在しているわけだが、ここでは、空間的に広がって起きるパターンと集団性の関係よりも、むしろ、密に関係しあって一つの閉じた系(あるいは単位と言ってもよいかもしれない)を構成するに至っているような集団の“全体性”に関心の中心を置きたい。とすれば、この単位に属する構成要素は全てが全てと関係を持ちあっていると考えるのが最も理想的である。このような理想的な影響の与え方を、力学系の言葉では大域結合(global coupling)と表現し、これは様々な場合の極限的相互作用であるとも言える(次章参照)。

例えば具体例のはじめにあげた同期現象(および引き込み現象)は、このような立場からの説明が成功した例である。この場合各蛍は各々ある周期で光を発するものだと考え、各周期に対応する非線形振動子とする。蛍の発行機構には、他にも様々な要因(温度や季節的なもの、環境など)が関係しているが、それらには触れずに、もっとも直接的な部分のみを考慮するわけである。蛍が分布している領域程度ならば、光は同じ強度で一瞬に伝わるとみなせば、非線形振動子集団の大域結合系としてモデル化されることがわかる。このモデル化により、非線形振動子の大域結合系は集団効果として同期現象を起こすこと、少々振動子の振動数がばらついていても引き込みを起こして集団に属する個体の振動数が同一になること、が再現された。この種の研究の口火を切ったのは Winfree (1967年, [13]([1])) で、集団現象、つまり集団を構成することによってはじめて生じてくる効果があることを意識させた。この同期・引き込み現象のモデルは単に非線形振動子という単純化に留まらず、さらに単純化された位相モデル(Kuramoto[14]([2]))で詳しく調べられた。これは非線形振動子に定義される位相の自由度だけに注目したもので、その大域結合系はかなりの程度まで解析的に扱うことができること、動的要素の多体系としてはもっとも単純化されたモデルであることから、現在でも研究対象として掘り下げられ、拡張され、あるいは応用範囲を広げ続けている[14]~[26]。蛍の同期現象からはじまったこのような成果のもとで、もっと様々な集団効果が存在する可能性が感じられるようになってきたが、位相モデルの範疇では蟻の例で見られるような集団性は報告されておらず、全般に実現される集団運動の種類は豊富とはいえない。これは、位相モデルが動的要素多体系のもっとも単純なモデルとして提出されたことと対応することであり、さらに豊富な集団効果を見るには単純化し過ぎているともとれる。そこで、この研究では、位相モデル以前の非線形振動子の大域結合系([13][27])に戻り、その場合に得られる集団運動を詳しく見ていくことにし、集団運動の範疇を同期現象だけでなくもっと広げることを目指す。これまでの位相モデルを用いない大域結合振動子系の研究は、主に complex Ginzburg-Landau 方程式を用いたもの[13][27][31]と van der Pole 振動子を用いたもの[28][29][30]に大別でき、これらは位相モデルの場合と同様に同期・引き込み現象に関心の中心を置いたものである。一方、[32]および[6]~[9]は同期現象に拘らず、大域結合振動子系で実現される集団運動を全般的に捉えようとする方向の研究であり、本論文のテーマはここに位置付けられる。



## Chapter 2

### モデルの導入と集団運動の概観

#### 2.1 globally coupled complex Ginzburg-Landau 方程式の導入

この節では、この論文を通して主たる対象となる非線形振動子集団の一つの理想的極限としての globally coupled complex Ginzburg-Landau 方程式 (以下 GCGL と略することにする) について、その一般性と特殊性を把握し、動的素子集団による集団運動を考えるためのモデルとして十分妥当であるととも一般的な状況に対応し得るものであることを説明する。

globally coupled complex Ginzburg-Landau 方程式は  $W_j$  を複素変数として

$$\begin{aligned}\dot{W}_j &= W_j - (1 + ic_2)|W_j|^2 W_j + K(1 + ic_1)(\bar{W} - W_j) \\ \bar{W} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W_k, \quad (j = 1, 2, \dots, N)\end{aligned}\quad (2.1)$$

で与えられるある非線形振動子集団の発展方程式である。この方程式は  $N$  個の全く同じ complex Ginzburg-Landau 型の非線形振動子

$$\dot{W} = W - (1 + ic_2)|W|^2 W \quad (2.2)$$

が他の全ての振動子と等しく影響を及ぼし合う global coupling (大域結合) によって集団内の相互作用が表現されているモデルで、特に結合項には  $W$  の最低次数だけしか含まれない

$$K(1 + ic_1)(\bar{W} - W_j) = \frac{K}{N}(1 + ic_1) \sum_{k=1}^N (W_k - W_j) \quad (2.3)$$

を通して相互作用を及ぼし合うようになっている。この系には3つのパラメータ  $c_1, c_2, K$  が存在するが、これらが系の振舞いに与える効果についての簡単な考察は次の節で行なうことにする。

まず eq.(2.2) で与えられる1つの非線形振動子の一般性と特殊性について述べる。散逸系で周期解が得られるような場合、コントロールパラメータを連続的に変えていくと、安定な固定点解が不安定化しそれにともない周期解が生じるような状況がよく見られる。このようにして周期解を生じる

分岐を Hopf 分岐というが、この分岐が起こってすぐの周期解は必ず eq.(2.2) で記述することができる。この方程式は Stewart-Landau 方程式とも呼ばれ、導出法については例えば [2] を参照するとよい。この事実が語るのはどのような非線形振動も Hopf 分岐点近傍では必ず eq.(2.2) で表現される力学によって支配されるということであり、その意味で eq.(2.2) は非常に一般性の高いものである。また異なる観点で一般性を述べれば、どのような非線形振動も (非線形の) 変数変換を通して normal form に書き直すことができるが、そのときの1次と3次 (もっとも低い次数と2番目に低い次数) の項のみをとれば必ず eq.(2.2) と同等なものが得られる。これについては例えば [3] を参照すればよい。

このように eq.(2.2) はあらゆる非線形振動に共通する性質を反映したもっとも抽象性と一般性の高いモデルであることがわかる。しかしそれが故に特殊性も大きい。この非線形振動子の解は  $W = e^{-ic_2 t}$  となり、複素平面上で半径1の円上を等速円運動するだけの単純な周期運動である。この軌道は位相方向に任意に回転しても全く等価であり非常に対称性が高い。Hopf 分岐の分岐点近傍から離れた normal form で高次の効果を入れたりすることは非線形振動子の軌道がこのような単純な円運動からずれることに対応し、これにともなって対称性の高さも失われる。しかし eq.(2.2) を扱う限りは対称性の高さを崩す要因が存在しないので、これから議論する GCGL の集団運動でもこの特殊性を原因とする構造が生じる可能性があることには注意を払う必要があるだろう。

我々は eq.(2.2) が相互作用を及ぼし合う集団を考えるわけだが、まず要素同士が相互作用を与えるための規則にもいろいろあることに注意したい。例えば要素同士が何かの拡散によって相互作用をしている場合は空間的に要素を並べてその時の近傍の要素とのみ相互作用しているような構造を作ればよい。拡散物質の広がる速さが要素自体の時間スケールより十分速いならば、各要素は近傍のみならずより広い範囲の要素から直接影響を受けることになる。もし、このとき要素が存在している空間が有限でその大きさが拡散長と同等かそれ以下であるならば、結果として各要素は全要素から直接影響を受けることになり、厳密に平均場結合した状態、つまり大域結合した状態が実現されることになる。また、例えば神経回路網に見られるシナプス結合などを思い浮かべればわかるように、空間的順序構造から理解される結合ではなく距離的に遠いものや近いものが入り組んで複雑に結合しあっているような場合、結合している個数を決めてその相手を無作為に選ぶ random coupling が考えられるが、結合個数が十分多く無作為に相手が選ばれているならば大域結合と考えて理解することはできるであろう。あるいは、蟻やアメーバのような動き回る要素が相互作用し合う場合を考えると、動き回る領域が個体に依存した局在を見せず、動く時間スケールが個体自体の他の時間スケールより十分速ければ、やはり大域結合系として把握することが可能である。この様に様々なタイプの相互作用の在り方に対してそれぞれある極限的状况を考えれば、系に含まれる全ての要素が他の全ての要素と全く同等に影響を及ぼしあう、単純な大域結合にいきつくことがわかる。

もちろん大域結合といっても様々な形があり得るので、ここまでの議論だけではモデルを決定す



ることは出来ない。一般的形式で非線形振動子集団からなる大域結合系の結合項を記述すれば、 $f(W)$  を複素変数  $W$  の任意の関数として

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(W_k - W_j) \quad (2.4)$$

となる。ここで構成要素となる非線形振動子として eq.(2.2) に至った際の議論を繰り返すと、例えば normal form の見方では周期運動が実現される最低次数のみ考えたように、結合項も含めて normal form を導けば最低次の効果のみに限られることは容易に予想される。あるいは任意の方法で大域結合した非線形振動子集団の発展方程式を Hopf 分岐近傍で分岐解析すれば、結合項は最低次のみが重要であることがわかる。つまり振動子の選択で重視した一般性に合わせて大域結合の方法も考えれば必然的に eq.(2.1) に至ることになる (詳しくは Appendix 参照のこと)。

## 2.2 GCGL に含まれるパラメータの効果

前節で導入した GCGL には振動子数  $N$  以外に 3 種類のパラメータ  $c_1, c_2, K$  が存在している。ここではこれらのパラメータが系に与えている影響について、一つおよび二つの振動子からなる場合の概観を通して把握することにする。

要素数一つだけの場合の GCGL は、結合を通しての相互作用がない孤立した一つの振動子 eq.(2.2) と一致する。この孤立振動子は  $e^{-ic_2 t}$  なる解に従って角速度  $-c_2$  で振動を続ける。ここでさらにパラメータ  $c_2$  のダイナミクスに与える効果を知るために、 $W = r e^{i\theta}$  により位相  $\theta$  と振幅  $r$  の観点から位相空間の構造を見ることにしよう。 $r$  と  $\theta$  の自由度で eq.(2.2) を書き直すと

$$\dot{r} = r - r^3 \quad (2.5)$$

$$\dot{\theta} = -c_2 r^2 \quad (2.6)$$

となり、 $c_2$  がどのように運動に関係しているかがわかりやすい。つまり、複素平面上で振幅の大きいところほど角速度の絶対値が大きく、この振幅依存性の係数として  $c_2$  の効果が現れる。ただし原点では  $c_2$  に無関係に角速度が 0 になる。

次に要素数が二つのみの場合、GCGL は

$$\dot{W}_1 = W_1 - (1 + ic_2)|W_1|^2 W_1 + \frac{K}{2}(1 + ic_1)(W_2 - W_1) \quad (2.7)$$

$$\dot{W}_2 = W_2 - (1 + ic_2)|W_2|^2 W_2 + \frac{K}{2}(1 + ic_1)(W_1 - W_2) \quad (2.8)$$

と書き直すことができる。まず、 $c_1 = 0$  の場合を考えると、この場合は複素平面上にある二つの振動子がお互いに引きあう形で相互作用をし、その強さが  $K$  によって調節される仕組みとなること

わかる。この場合、相互作用の中に引き合う方向からずらすような効果が存在しないので、当然ながら、 $K > 0$  ならば二つの振動子は最終的に全く同じ状態になるまで引き合い続けることになる。しかしながら  $c_1 \neq 0$  の場合は引き付け合いに拮抗する効果が生ずるので、二つの振動子が結果として引き合う (in-phase) ことになるか反発する (anti-phase) ことになるかは単純にはわからない。

$c_1 \neq 0$  の場合は  $c_1 = 0$  の場合の相互作用項に  $(1 + ic_1)$  をかけたと考えればよい。 $c_1 = 0$  のときの相互作用は複素平面上にある二つの振動子が引き合う方向であったわけだから、複素数  $(1 + ic_1)$  がかけられれば相互作用の方向が単純に引き付け合う方向から複素変換されてずれることになる。 $c_2 \neq 0$  ならば、先に述べた  $c_2$  の効果によって振動子の角速度が振幅に依存して変化するので、 $c_1$  の効果により生じた引き合う方向からのずれが、 $c_2$  の効果によって増幅されたり打ち消されたりする。つまり、相互作用項のパラメータ  $c_1$  と孤立振動子の性質を示すパラメータ  $c_2$  の値の関係の在り方によって、二つの振動子は引き付け合ったり完全に引き付けることは出来なかつたりするであろう。この二種のパラメータによる 2 振動子の引き付け・反発の決定に関しては  $K \rightarrow 0$  では厳密に求めることが出来る。詳細は次節の位相モデルに関する説明で述べるので、ここでは解析結果のみ紹介すると、 $1 + c_1 c_2 > 0$  の場合二つの振動子は引き付け合って最終的に同じ状態 ( $W = e^{-ic_2 t}$ ) となり、 $1 + c_1 c_2 < 0$  のときは反発し合って逆位相に落ち着く。

この様に各パラメータの影響は大雑把に、 $K$  は相互作用 (引力) の強さ、 $c_1$  は相互作用の影響の引力方向からのずれ、 $c_2$  は孤立振動子の角速度の振幅依存性として把握することができる。

## 2.3 Phase oscillator model

前節での議論でわかるように GCGL は位相と振幅の 2 自由度からなる非線形振動子の集団結合系と見ることができるが、 $K \rightarrow 0$  の極限では位相自由度による効果が主となり振幅自由度の変化は無視することができる。このような場合は位相自由度だけに縮約した **phase oscillator model** (位相モデル) を考えれば十分である。位相モデルは、散逸系におけるもっとも単純な運動である振動を位相の 1 自由度だけに縮約しているという意味において、動的素子多体系を調べるための minimal model と見なすことができ、過去の研究成果も大域結合系に限らず豊富である。

ここでは GCGL が  $K \rightarrow 0$  の時に満たす位相モデルを導いておくことにしよう。GCGL を  $W_j = r_j e^{i\theta_j}$  によって位相と振幅の自由度で書き直すと、

$$\dot{r}_j = (1 - K)r_j - r_j^3 + \frac{K\sqrt{1+c_1^2}}{N} \sum_{k=1}^N r_k \cos(\theta_k - \theta_j + \alpha) \quad (2.9)$$

$$\dot{\theta}_j = -Kc_1 - c_2 r_j^2 + \frac{K\sqrt{1+c_1^2}}{N} \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{r_j} \sin(\theta_k - \theta_j + \alpha) \quad (2.10)$$

となる。ここで  $\tan \alpha = c_1$  により  $\alpha$  を導入した。 $K = 0$  の時の安定解は  $r_j = 1, \theta_j = -c_2 t + \phi_j$



( $\phi_j$  は任意定数) であるので、 $K \rightarrow 0$  の場合を考えるために  $K = \epsilon\kappa$  ( $\epsilon$  は十分小さい数で  $\kappa \sim O(1)$ ) として、 $r_j = 1 + \rho_j(t)$ ,  $\theta_j = -c_2 t + \phi_j(t)$  により微小な相互作用が加わった時の変化を考える。eq.(2.9), eq.(2.10) より

$$\dot{\rho}_j = \epsilon\kappa - 2\rho_j - \epsilon\kappa\rho_j - 3\rho_j^2 - \rho_j^3 + \frac{\epsilon\kappa\sqrt{1+c_1^2}}{N} \sum_{k=1}^N (1+\rho_k) \cos(\phi_k - \phi_j + \alpha) \quad (2.11)$$

$$\dot{\phi}_j = -\epsilon\kappa c_1 - c_2(2\rho_j + \rho_j^2) + \frac{\epsilon\kappa\sqrt{1+c_1^2}}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1+\rho_k}{1+\rho_j} \sin(\phi_k - \phi_j + \alpha) \quad (2.12)$$

となるので、 $\rho_j$  が十分小さくて  $O(\epsilon)$  以下とみなせるときは、 $O(\dot{\rho}_j) \sim O(\rho_j)$  だから  $\rho_j$  の変化の時間スケールは  $O(t)$  となる。ところが一方、 $\phi_j$  は  $K = 0$  では任意定数に一致するから  $O(1)$  であるのに eq.(2.12) によれば  $\dot{\phi}_j$  は  $O(\epsilon)$  であることがわかる。この間の辻褃を合わせるために、 $\phi_j$  の変化の時間スケールは  $O(\epsilon^{-1}t)$  という  $\rho_j$  よりもずっと遅い運動を行なうという結論に至る。そこで、

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2.13)$$

により、時間スケールを分離してそれぞれのスケールで運動を考える。eq.(2.11) と  $\rho_j$  の変化の時間スケールが  $O(1)$  であることから  $\rho_j$  は  $O(\epsilon)$ 、eq.(2.12) と  $\phi_j$  の変化の時間スケールが  $O(\epsilon)$  であることから  $\phi_j$  は  $O(1)$  と見積もれるので、

$$\begin{aligned} \rho_j &= \epsilon\rho_j^{(1)} + \epsilon^2\rho_j^{(2)} + \dots \\ \phi_j &= \phi_j^{(0)} + \epsilon\phi_j^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

のように  $\epsilon$  で展開することが可能である。これにより、eq.(2.12) から導かれる  $\rho_j$  の最低次 ( $O(\epsilon)$ ) の方程式は

$$\frac{\partial \rho_j^{(1)}}{\partial t} = -\kappa - 2\rho_j^{(1)} + \frac{\kappa\sqrt{1+c_1^2}}{N} \sum_{k=1}^N \cos(\phi_k^{(0)} - \phi_j^{(0)} + \alpha) \quad (2.14)$$

となり、 $t$  の時間スケールでは  $\phi_j$  は定数と見なせるから、安定固定点解

$$\rho_j^{(1)} = \frac{\kappa}{2} \left\{ \frac{\sqrt{1+c_1^2}}{N} \sum_{k=1}^N \cos(\phi_k^{(0)} - \phi_j^{(0)} + \alpha) - 1 \right\} \quad (2.15)$$

が存在する。また、eq.(2.12) と eq.(2.15) から導かれる  $\phi_j$  の最低次 ( $O(\epsilon^0)$ ) の方程式は

$$\frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial \tau} = -\kappa(c_1 - c_2) + \frac{\kappa\sqrt{(1+c_1^2)(1+c_2^2)}}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\phi_k^{(0)} - \phi_j^{(0)} + \alpha - \beta) \quad (2.16)$$

となる (ここで  $\beta$  は  $\tan\beta = c_2$  とした)。この eq.(2.16) が GCGL から導かれた位相モデルである。これを GCGL から直接定義される変数  $\theta_j$  で再度書き直しておけば

$$\dot{\theta}_j = -Kc_1 - (1-K)c_2 + \frac{K\sqrt{(1+c_1^2)(1+c_2^2)}}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\theta_k - \theta_j + \alpha - \beta) \quad (2.17)$$

となり、eq.(2.10) に見られる振幅の変数  $r_j$  が消去されて大域結合項に新たな位相定数が付け加わっていることがわかる。

位相モデルの解の安定性についてはすでに厳密に調べられているので、ここではその結果を概略して述べることにする。まず、オーダーパラメータとして

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\phi_k} \equiv Re^{i\Phi} \quad (2.18)$$

により、 $R, \Phi$  を導入する。このオーダーパラメータを用いると eq.(2.16) は

$$\frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial \tau} = -\kappa(c_1 - c_2) + R\kappa\sqrt{(1+c_1^2)(1+c_2^2)} \sin(\Phi - \phi_j^{(0)} + \alpha - \beta) \quad (2.19)$$

となり、この方程式の解は  $R = 1$  か  $R = 0$  をみだす。  $R = 1$  の場合とは全ての位相が同一になる場合、つまり

$$\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)} = \dots = \phi_j^{(0)} = \dots = \Phi \quad (2.20)$$

が成り立つ場合である。この解の線形安定性は容易に調べられる。  $\Phi - \phi_j^{(0)}$  が十分小さい時 eq.(2.19) は

$$\frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial \tau} = R\kappa\sqrt{(1+c_1^2)(1+c_2^2)} (\Phi - \phi_j^{(0)}) \cos(\alpha - \beta) \quad (2.21)$$

となり  $\kappa > 0$  としているから、 $\phi_j = \Phi$  は  $\cos(\alpha - \beta) > 0$  のときに安定である。つまり

$$1 + c_1 c_2 > 0 \quad (2.22)$$

のとき大域結合系に含まれる全振動子が全く同じ状態になる解 eq.(2.20) が安定である。一方  $1 + c_1 c_2 < 0$  の場合はこのような解は不安定となり、替わって  $R = 0$  なる解が安定になる。  $R = 0$  を満たす解は incoherent 解と呼ばれており、

$$\phi_j^{(0)} = \kappa(c_2 - c_1)\tau + \phi_{0j} \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{N} \sum_k e^{i\phi_{0k}} = 0 \quad (2.24)$$

となるような任意の  $\phi_{0j}$  の組合せが全てこの解に相当する。渡辺・Strogatz[23] により、位相モデルの無数に存在する incoherent 解については詳しく調べられていて、この解は  $N$  個の固有値のうち  $N-$



2個が0になる中立安定な解であることが報告されている。incoherent 状態については GCGL を使って第4章で再び議論することにする。

なお大域結合系の位相モデルに関しては、大域結合項の関数形を eq.(2.16) のような基本波成分のみならず高調波成分を取り入れて拡張した場合についてもその振舞いが議論されている [24]。

## 2.4 GCGL で見られる集団運動

以下の章では GCGL に見られる集団運動について詳しく述べるが、それに先だって集団運動の種類とおおまかなパラメータ依存性について概観しておくことにする。

前節で導いた位相モデルの結果から想像されるように、GCGL は全振動子が同一になる1クラスター状態と平均場  $\bar{W}$  が0になって実質的に相互作用が無くなる incoherent 状態を実現する。1クラスター状態は

$$(1 + c_1^2)K + 2(1 + c_1c_2) > 0 \quad (2.25)$$

のパラメータ条件のもとで安定であり(第2章参照)、 $K \rightarrow 0$ では位相モデルで得た条件 eq.(2.22) と一致することがわかる。また incoherent 状態の一つである一様分布についても安定条件が求めることができる。一様分布とは全振動子の振幅は同じ ( $\sqrt{1-K}$ ) で位相が0から  $2\pi$  の間に一様に分布する状態をさしており、当然ながら  $\bar{W} = 0$  を満たす incoherent 状態である。この状態の安定条件は

$$K(2K - 1)c_1^2 + 4(K - 1)(2K - 1)c_1c_2 - K(K - 1)c_2^2 + (3K - 2)^2 < 0 \quad (2.26)$$

で与えられる(第3章参照の事)。この二つの状態がパラメータ空間でどのような領域を占めるのかを把握するために図2.1を見てみよう。図2.1(a)は  $c_2 = 2.0$  としたときの  $c_1$ - $K$  平面の様子を、図2.1(b)は  $K = 0.4$  としたときの  $c_1$ - $c_2$  平面の様子を描いたものである。A, B, D は各々、1クラスター状態が安定、一様分布が安定、1クラスター状態と一様分布の両方が安定な領域をさしており、C の領域ではどちらも不安定である。この図に見られるように、eq.(2.22) が満たされれば必ず1クラスター状態は安定になり数値計算でも1クラスター状態以外を得ることはないが、一方で  $1 + c_1c_2 < 0$  (eq.(2.22) が成り立たない領域) ではパラメータ  $K$  が大きければ1クラスター状態が実現され、 $K$  が小さければ一様分布が実現される。特に中間的な  $K$  ではCの領域が存在し、ここではこの後の主題となる豊富な集団運動を観察することができる。Cの領域(およびその周辺)で見られる集団運動を  $K$  が大きい方から順にあげると、少数クラスター状態、部分クラスター状態、大自由度カオス、低次元運動する連続分布というように大雑把に分類することができる。以下の章ではこれらの集団運動について詳細に調査・解析し、集団の中で各要素の運動の個性性と全体的運動との関係がいかに変わって行くかについての考察を加え、特徴づけることを目指す。

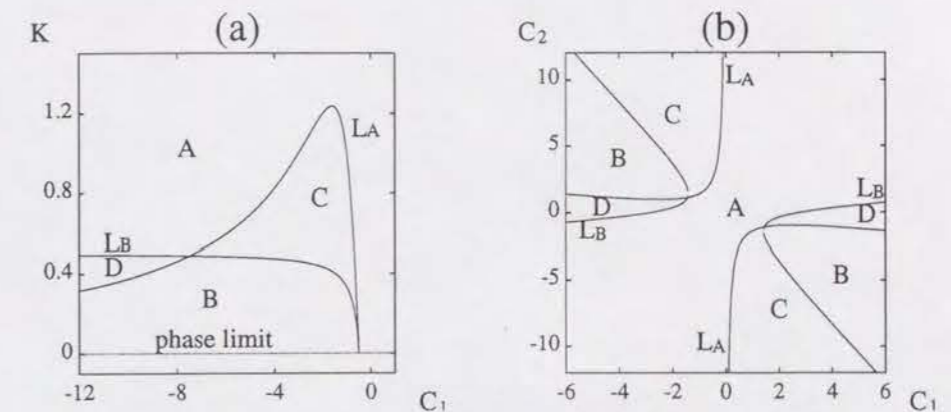


図 2.1: 1クラスター状態と一様分布の線形安定性解析の結果から得た安定性ダイアグラム。曲線  $L_A$  と  $L_B$  は各々1クラスター状態と一様分布の臨界点を表す。A, B, C, D はそれぞれ1クラスター状態が安定、一様分布が安定、両方も不安定、両方も安定なパラメータ領域を意味する。(a)  $c_2 = 2.0$  としたときの  $c_1$ - $K$  平面、(b)  $K = 0.4$  としたときの  $c_1$ - $c_2$  平面。



## Chapter 3

### 少数クラスター状態 (クラスタリング)

パラメータ  $c_1, c_2$  が反発的 ( $1 + c_1 c_2 < 0$ ) で振動子同士はバラバラになる傾向を持っていても、相互作用が十分強ければ ( $K$  が十分大きければ) 全ての要素は同一化してしまう。しかしながら元来の反発性があるために、相互作用が弱くなれば必然的に同一化は達成されなくなり、不完全な同一化が実現される。この様な状態は少数クラスター状態として観察され、全要素がいくつかの集団に分かれてそれぞれで同一化が起こる。この章では少数クラスター状態で集団がクラスタ化 (同一化) できる条件について考察し、さらにクラスタ化した後の相対運動について述べる。

#### 3.1 1 クラスター状態

位相モデルを使った  $K \rightarrow 0$  の場合の議論からもわかるように、GCGL は全ての振動子が引き付けあって同じ振る舞いをするようになる状態 (これを1クラスター状態と呼ぶ) を解として持つ。パラメータの意味から想像されるように、この状態が安定であるかどうかは  $c_1, c_2, K$  のバランスによって決まるであろうが、結合の強さ  $K$  が十分大きい場合は  $c_1, c_2$  に無関係に引き付けあうことは容易に推測できる。

1 クラスター状態が安定に存在する条件を求めることにしよう。そのためにはまず、この状態の安定性を調べるには何を調べれば良いかという問題から議論する必要がある。1 クラスター状態に限らず少数クラスター状態では、クラスターを構成する要素数 (あるいは要素比) さえ決定できれば各クラスターが従う発展方程式を GCGL から導くことができる。1 クラスター状態の場合は全ての振動子が同一化するのであるから

$$W_j = \bar{W} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (3.1)$$

を満たす方程式

$$\dot{W} = W - (1 + ic_2)|W|^2 W \quad (3.2)$$

がクラスターが従う方程式となる。これを解くことにより、1 クラスター状態が実現されれば

$$W_j = e^{-ic_2 t} \equiv W_0 \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (3.3)$$

という孤立振動子と同じ振る舞いをするのがわかる。この様にして、クラスター状態が実現されたのちに従う方程式は容易に導けるが、これは実際にクラスター状態が実現するか否かについては知見をもたらさない。そこで、ここではクラスターの安定性という概念を持ち込むことにする。これは、クラスター解の軌道安定性 (線形安定性) とは異なる概念である。もちろん、クラスター状態の安定性は、GCGL のもとでクラスター解 (例えば eq.(3.3)) の線形安定性を調べ、クラスターの運動との関係を考えれば決定できる問題ではあるが、そのためにはクラスター運動の解を求め、それを用いて GCGL から導いた  $N$  本の複素微分方程式の全ての固有値 (あるいは Lyapunov スペクトラム) を決定しなければならない。これは一般には非常に複雑で面倒である。新たに導入するクラスターとしての安定性は、既に実現されたクラスターのすぐ近くに系を構成しているのと全く同じ振動子を新たに一つ置いたときに、その振動子がクラスターに引き込まれるか否かによって安定か否かを定義する。要素の集団がクラスタ化するためには集団に含まれる要素が引き付け合って最終的には同一化しなければならない。クラスターとしての安定性が成り立たなければ、要素が一つ付け加えられた  $N + 1$  個からなる系ではこのクラスターは新たに要素を取り込んで同一化することができなくなる。  $N$  が十分大きい場合は  $N$  個の系も  $N + 1$  個の系もほとんど差がないので、これは、1 クラスター状態ではもはや1クラスターにまとまることのできないことを、2つ以上のクラスター状態では対象になっているクラスターの構成要素数比が限界まで増大していることを意味する。つまり、構成要素数比を固定して新たに加えた要素の振る舞いを調べればクラスターの限界状態がわかり、この限界状態に達する以前ならばクラスターは要素を同一化する能力を保持しているので、考察しているクラスター状態は実現され得ると見なしてよい。ただし、この安定性解析は存在する全てのクラスターについて別々に行なわなければならない。

では、実際に1クラスター状態のクラスターとしての安定性を調べよう。クラスターから微小に離れた要素を  $W_{ex}$  とする。この  $N + 1$  個の系は

$$\dot{W}_j = W_j - (1 + ic_2)|W_j|^2 W_j + K(1 + ic_1)(\bar{W} - W_j) \quad (j = 0, 1, \dots, N) \quad (3.4)$$

$$\dot{W}_{ex} = W_{ex} - (1 + ic_2)|W_{ex}|^2 W_{ex} + K(1 + ic_1)(\bar{W} - W_{ex}) \quad (3.5)$$

と書ける。ただし

$$\bar{W} = \frac{1}{N+1} \left( \sum_{k=1}^N W_k + W_{ex} \right) \quad (3.6)$$

である。クラスターに含まれている要素は全て同じ振る舞いをするので、 $W_{ex}$  が置かれたことによるクラスター構成要素の状態の変化は、全ての  $j$  に対して一つの微小変数  $w$  を導入することにより



$W_j = W_0(1+w)$ と表すことができる。一方  $W_{ex}$  はクラスターから微小量しか離れていないので、微小変数  $w_{ex}$  を使って  $W_{ex} = W_0(1+w_{ex})$  と書ける。この二つの微小変数を使うって  $\bar{W}$  を  $O(\frac{1}{N})$  まで記述すれば

$$\begin{aligned}\bar{W} &= \frac{1}{N+1}W_0\{N(1+w) + (1+w_{ex})\} \\ &= W_0\{(1+w)(1-\frac{1}{N}) + (1+w_{ex})\frac{1}{N}\} + O(\frac{1}{N^2}) \\ &\sim W_0(1+w - \frac{w-w_{ex}}{N})\end{aligned}$$

と簡単化されるので、eq.(3.4), eq.(3.5) から  $w, w_{ex}$  の最低次の方程式を導くと

$$\dot{w} = -(1+ic_2)(w+w^*) - K(1+ic_1)\frac{w-w_{ex}}{N} \quad (3.7)$$

$$\dot{w}_{ex} = -(1+ic_2)(w_{ex}+w_{ex}^*) + K(1+ic_1)(w-w_{ex})(1-\frac{1}{N}) \quad (3.8)$$

となる。 $\frac{w-w_{ex}}{N}$  が  $w$  や  $w_{ex}$  よりも十分小さくなるくらいに大きい  $N$  のみを考えると、結局

$$\dot{w} = -(1+ic_2)(w+w^*) \quad (3.9)$$

$$\dot{w}_{ex} = -(1+ic_2)(w_{ex}+w_{ex}^*) + K(1+ic_1)(w-w_{ex}) \quad (3.10)$$

となり、クラスターの運動は微小に離された要素からは影響を受けず、 $w=0$  ( $\Leftrightarrow W_j=W_0$ ) は常に安定であることがわかる。この結果より、 $w_{ex}=0$  なる解が線形安定であれば  $W_{ex}$  はクラスターに引き込まれるので、クラスターとしての安定性は

$$\dot{w}_{ex} = -(1+ic_2)(w_{ex}+w_{ex}^*) - K(1+ic_1)w_{ex} \quad (3.11)$$

より、

$$K^2(1+c_1^2) + 2K(1+c_1c_2) > 0 \quad (3.12)$$

が満たされればよいことがわかる。eq.(3.12) は  $K \rightarrow 0$  の極限では位相モデル (eq.(2.16)) から得た結果 (eq.(2.22)) と一致している。また、 $K$  が十分大きいときは  $c_1, c_2$  の値に関わらず常に1クラスター状態が安定であることも含まれており、予測通りの結果であることがわかる。

### 3.2 2クラスター状態

パラメータが1クラスター状態の安定条件 eq.(3.12) が成立する境界に近付くと、 $N$  個の振動子が二つの集団に分かれたのちに各々で同一化する2クラスター状態が見られるようになる。この2クラスター状態が実現された場合には、

$$\begin{aligned}W_1 &= W_2 = \dots = W_{N_1} \equiv W_{(1)} \\ W_{N_1+1} &= \dots = W_N \equiv W_{(2)}\end{aligned} \quad (3.13)$$

のように二つの変数  $W_{(1)}, W_{(2)}$  でクラスター運動を書くことができる。もちろん二つのクラスターに含まれる要素の比率はこの二つの変数では記述できないので、これを  $(1-p):p$  とおいて新たなパラメータ  $p$  を導入する。このとき、各クラスターの運動は

$$\dot{W}_{(1)} = W_{(1)} - (1+ic_2)|W_{(1)}|^2W_{(1)} + pK(1+ic_1)(W_{(2)} - W_{(1)}) \quad (3.14)$$

$$\dot{W}_{(2)} = W_{(2)} - (1+ic_2)|W_{(2)}|^2W_{(2)} + (1-p)K(1+ic_1)(W_{(1)} - W_{(2)}) \quad (3.15)$$

という発展方程式に従う。ここでは一般的な  $p$  に対して解析的議論をするのではなく、 $p \rightarrow 0$  という1クラスター状態に近い極限について考える。 $p \rightarrow 0$  の場合、もし  $W_{(2)}$  (小さい要素数比のクラスター) の値が  $W_{(1)}$  と微小量しか違わないのであれば、 $W_{(1)}, W_{(2)}$  は各々、前節の1クラスター状態でのクラスターとしての安定性解析で導入した  $W_j$  と  $W_{ex}$  と全く同じ立場のものになってしまい、 $W_{(2)}$  が  $W_{(1)}$  に引き込まれない条件が eq.(3.12) の補集合となることは自明である。このことから、1クラスター状態が不安定化するのに伴って2クラスター状態の解が何らかの分岐によって生じるかあるいは安定化するように理解しがちであるが、実際に数値実験をすれば一般的にはその様な関係にはなっていないように見える。そこで、ここでは実際に  $W_{(1)}, W_{(2)}$  を求めたのちに各クラスターのクラスターとして安定な条件を調べ、1クラスター状態との関係を考察することにする。

まず、実際にはあり得ないが、 $p=0$  の場合の2クラスター状態の解を求めることから始める。このとき

$$\dot{W}_{(1)} = W_{(1)} - (1+ic_2)|W_{(1)}|^2W_{(1)} \quad (3.16)$$

となるので、即座に  $W_{(1)} = e^{-ic_2t}$  が得られる。これは1クラスター状態での解と同じである。この結果を eq.(3.15) に代入すると

$$\dot{W}_{(2)} = (1-K-ic_1)W_{(2)} - (1+ic_2)|W_{(2)}|^2W_{(2)} + K(1+ic_1)e^{-ic_2t} \quad (3.17)$$

となる。 $W_{(2)}$  は構成要素数0の仮想クラスターを記述していると捉えられるが、この方程式を見ると、仮想クラスターは巨大なクラスター  $W_{(1)}$  の振動に起因する外力を受ける1振動子とみなしてもよいことがわかる。Eq.(3.15) を  $W_{(2)} = re^{i\theta}$  により位相と振幅の自由度で書き直すと

$$\dot{r} + ir\dot{\theta} = (1-K-ic_1)r - (1+ic_2)r^3 + K(1+ic_1)e^{-i(c_2t+\theta)} \quad (3.18)$$

が得られる。ところで、ここでは仮想クラスター  $W_{(2)}$  と巨大なクラスター  $W_{(1)}$  との相対的位置が最終的には固定されるような解に関心があることに注意したい。この様な解に関心がある理由は、仮想クラスターが巨大クラスターに引き込まれて、結果として1クラスターになってしまう場合もこの種の解に含まれること、および、数値計算によれば1クラスター状態が不安定化するパラメータ領域の近くではこの様な単純な運動をする2クラスター状態しか観察されないことによる。 $W_{(1)} = e^{-ic_2t}$



であるから、相対的位置が固定されるには  $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = -c_2$  が必要である。そこで  $\theta = -c_2 t + \alpha$  とすると、eq.(3.18) から

$$e^{-i\alpha} = \frac{r\{(1+ic_2)(r^2-1)+K(1+ic_1)\}}{K(1+ic_1)} \quad (3.19)$$

$$(r^2-1)\{(1+c_2^2)r^4 - (1+c_2^2-2K(1+c_1c_2))r^2 + K^2(1+c_1^2)\} = 0 \quad (3.20)$$

となって

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ \text{または} \\ r^2 &\equiv r_{\pm}^2 \\ &= \frac{(1+c_2^2) - 2K(1+c_1c_2) \pm \sqrt{(1+c_2^2)^2 - 4K(1+c_2^2)(1+c_1c_2) - 4K^2(c_1-c_2)^2}}{2(1+c_2^2)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

が求まる。 $r = 1$  のときは  $\alpha = 0$  となり  $W_{(2)} = W_{(1)}$  を意味するので、この解が選択された場合は仮想クラスターは孤立したクラスターにはならず 1 クラスター状態が得られる。一方  $r_{\pm}$  は一般的には 1 以外の値をとるので、 $r_{\pm}$  が実数解となるか否かは仮想クラスターが孤立してクラスターとなる可能性の有無を示すことになる。これより、 $p = 0$  の仮想 2 クラスター状態が成立する条件は

$$(1+c_2^2) - 2K(1+c_1c_2) \geq 0 \quad (3.22)$$

$$\{(1+c_2^2) - 2K(1+c_1c_2)\}^2 - 4K^2(1+c_1^2)(1+c_2^2) \geq 0 \quad (3.23)$$

として与えられ、仮想クラスターは  $W_{(2)} = r_{\pm} e^{i(-c_2 t + \alpha(r_{\pm}))}$  となる。今の場合  $1+c_1c_2 < 0$  の状況に注目しているので、eq.(3.22) はいつでも満たされている。

このように仮想クラスターは周期運動を行なうので、仮想クラスター解が軌道安定性を持っていなければアトラクターではないことになる。そこで次にこの仮想クラスター解の軌道安定性(線形安定性)を調べる必要がある。仮想クラスター解から少しずれた状態は微小変数  $w$  を導入することにより  $W_{(2)} = r_{\pm} e^{i(-c_2 t + \alpha)}(1+w)$  と書ける。微小なずれ  $w$  の時間発展を見るために eq.(3.17) から  $w$  の線形方程式を導くと

$$\dot{w} = \{(1+ic_2)(1-2r_{\pm}^2) - K(1+ic_1)\}w - (1+ic_2)r_{\pm}^2 w^* \quad (3.24)$$

となるので、仮想クラスター解が線形安定性を持つのは

$$\begin{aligned} K &> 1 - 2r_{\pm}^2 \\ 3(1+c_2^2)r_{\pm}^4 + 4\{K(1+c_1c_2) - (1+c_2^2)\}r_{\pm}^2 \\ &+ K^2(1+c_1^2) + (1+c_2^2) - 2K(1+c_1c_2) > 0 \end{aligned}$$

の両不等式を満たす場合であることがわかる。この条件は eq.(3.20) を使って  $r_{\pm}$  の 4 次項を消去すると

$$K > 1 - 2r_{\pm}^2 \quad (3.25)$$

$$\{2K(1+c_1c_2) + (1+c_2^2)\}(r_{\pm}^2 - 1) + 2K^2(1+c_1^2) + 4K(1+c_1c_2) < 0 \quad (3.26)$$

と書き直すことができる。

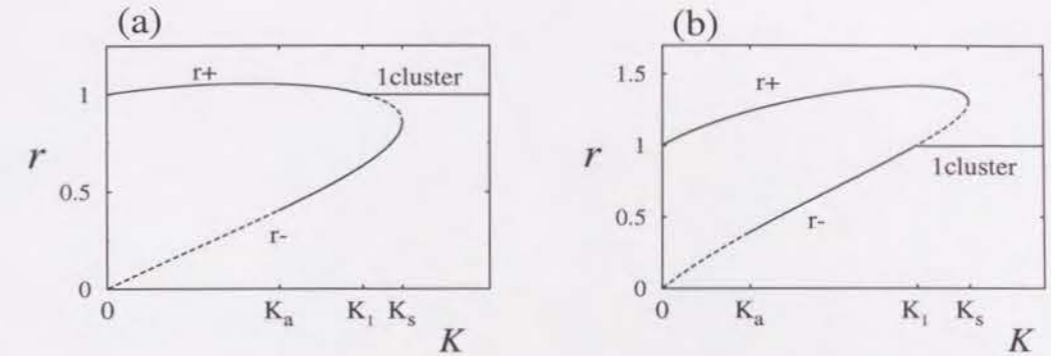


図 3.1: Eq.(3.20) から仮想クラスターの存在する位置  $r_{\pm}$  を数値的に求め  $K$  の関数として表した結果。仮想クラスター解が軌道安定な場合は実線で、不安定な場合は点線で表記してある。(a),(b) の場合とも  $K > K_1$  では 1 クラスター状態 ( $r = 1$  の半直線に相当する) が安定に存在し、この状況下で安定に存在できる仮想クラスターの位置がクラスターから有限距離離れたところに保たれることがわかる。(a)  $c_1 = -1.0, c_2 = 2.0$  の場合。(b)  $c_1 = -2.0, c_2 = 3.0$  の場合

さて孤立クラスターとなる仮想クラスターが存在する条件を、具体的に 2 通りのパラメータ条件下で見てみることにしよう。図 3.1 では eq.(3.21) によって得た  $r_{\pm}$  を  $c_1, c_2$  を固定して  $K$  の関数として描いている。1 クラスター状態のクラスター安定条件 eq.(3.12) から得られる臨界点を  $K_1$ 、仮想クラスター解が存在する条件 eq.(3.23) から得られる臨界点を  $K_s$  として、仮想的 2 クラスター状態の安定条件 (eq.(3.25), eq.(3.26)) と  $K_1, K_s$  の関係を考察することにする。結果は図 3.1 に示されており、各仮想クラスター  $r_{\pm}$  の安定性を実線 (仮想クラスター解が安定に存在する)、点線 (不安定である) によって表示してある。図にもある通り  $r_+ > 1$  は常に満たされるので (後述の eq.(3.27) により明らかである)、 $r_+$  に対しては eq.(3.25) も常に満たされる。 $r_-$  に対してはこの安定条件から得られる臨界値を  $K_a$  とすると、 $K_a$  は図に示されるように  $K_1, K_s$  からはかなり離れたパラメータ値をとる。さて、eq.(3.26) から得られる臨界点について議論しよう。まず、 $r_{\pm}$  を与える方程式 eq.(3.20) は

$$(1+c_2^2)(r^2-1)^2 + \{2K(1+c_1c_2) + (1+c_2^2)\}(r^2-1)$$



$$+K^2(1+c_1^2)+2K(1+c_1c_2)=0 \quad (3.27)$$

と書き換えられるので、eq.(3.12)で得られる1クラスター状態でのクラスター安定性が消失する点( $K=K_1$ )では下線部が0になり、 $r_{\pm}$ のどちらかが必ず $r=1$ を満たすことがわかる。仮想クラスターが軌道安定な条件 eq.(3.26)の左辺を $S(r_{\pm})$ とする、つまり

$$S(r_{\pm}) \equiv \{2K(1+c_1c_2)+(1+c_2^2)\}(r_{\pm}^2-1)+2K^2(1+c_1^2)+4K(1+c_1c_2) \quad (3.28)$$

とすれば、下線部に注目することにより、 $K=K_1$ で $r=1$ が成り立つときに

$$S(r=1; K_1)=0 \quad (3.29)$$

となって、仮想クラスターの軌道安定性が変わることがわかる。この臨界点を $K_b$ とすれば、 $K_b=K_1$ が常に成り立つ。また $K=K_s$ はeq.(3.27)が重解( $r_+=r_-$ )を持つ点に相当するから、

$$r^2-1 = -\frac{2K(1+c_1c_2)+(1+c_2^2)}{2(1+c_2^2)} \quad (3.30)$$

となり、この結果

$$\begin{aligned} 2(1+c_2^2)S(r_+=r_-; K_s) &= -\{2K(1+c_1c_2)+(1+c_2^2)\}^2 \\ &\quad +2(1+c_2^2)\{2K^2(1+c_1^2)+4K(1+c_1c_2)\} \\ &= -\{(1+c_2^2)-2K(1+c_1c_2)\}^2+4K^2(1+c_1^2)(1+c_2^2) \end{aligned} \quad (3.31)$$

が導かれるが、 $K=K_s$ ではeq.(3.23)の等号が成り立つので、

$$S(r_+=r_-; K_s)=0 \quad (3.32)$$

も常に成り立つことがわかる。以上の考察より仮想クラスターの軌道安定性は $K_1$ と $K_s$ で変化し、図ではこの点で実線と点線が入れ替わることに対応する。数値計算によればこれらの点以外に軌道安定性が入れ替わる点(臨界点)は存在しない。

例えば $K=K_1$ で $r_+=1$ が成り立つとしよう(図3.1(a)の場合)。 $K_1$ の近傍では $r_+$ はほぼ1に等しく、このような状況下では $S(r_+)$ は(1クラスターの安定条件 eq.(3.12)の左辺)と近似できる。これは $r=r_+$ の解に対しては、 $K < K_1$ で $S < 0$ で仮想クラスター解は軌道安定、 $K > K_1$ では $S > 0$ で軌道不安定になることを意味する。ここまでに述べた点以外に $S=0$ が満たされる点は存在しないとすれば、 $K=K_s$ での安定性の変化も把握できて、図3.1の結果を得ることになる。以上の議論は $K=K_1$ で $r_-=1$ が成り立つ場合でも全く同じであることに注意したい。つまり、一

般的に仮想クラスターは巨大クラスターから有限の距離離れたところにあるもののみが安定であり、 $K_1 < K < K_s$ では安定な仮想クラスター解は一つしか存在しない。なお、数値的に各安定性条件を解いて得た結果もここで述べた結果と同じになる。ここでは便宜上、広い $K$ の範囲について $r_{\pm}$ を図示したが、仮想クラスターは巨大クラスターがクラスターとして安定である状況下でのみ今の問題設定が妥当であるので、この図は $K \geq K_1$ の範囲に限って意味がある。設定範囲外の部分は後程 $p \rightarrow 0$ について考えるときのために表示してあり、1クラスター状態が不安定化した後は $r_{\pm}$ の両方の解が安定であることがわかる。ここでは、孤立した仮想クラスターの位置は、この存在の仮定が妥当な状況のもとでは、パラメータに依存して一意に決定されるという重要な結果が得られていることに注目したい。

さて $p=0$ の仮想クラスターについての考察結果をもとにして、 $p \rightarrow 0$ の場合の二つのクラスターのクラスターとしての安定性について考えることにしよう。すでに1クラスター状態のところでも議論したように、クラスターとしての安定性を調べるには、クラスターの近傍に1つの要素を置いてそれがクラスターに引き込まれるか否かを見れば良い。2クラスター状態では2つのクラスターが存在するのだから、それぞれのクラスターによって安定性が異なっていることも十分考えられる。要素数 $N \rightarrow \infty$ に関心を限れば、たとえ $p \rightarrow 0$ の微小クラスターであっても1より十分多い要素が含まれているとみなせるであろう。このような状況では、微小クラスターのクラスター安定性を調べる場合でも1クラスターのクラスター安定性の場合と同じく、付け加えた1つの要素が $\bar{W}$ に及ぼす影響は無視することができる。つまり、 $\bar{W} = (1-p)W_{(1)} + pW_{(2)}$ として二つのクラスターと追加試行要素の方程式を立てればよいから

$$\dot{W}_{(1)} = W_{(1)} - (1+ic_2)|W_{(1)}|^2W_{(1)} + pK(1+ic_1)(W_{(2)} - W_{(1)}) \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(2)} &= W_{(2)} - (1+ic_2)|W_{(2)}|^2W_{(2)} + K(1+ic_1)(W_{(1)} - W_{(2)}) \\ &\quad + pK(1+ic_1)(W_{(2)} - W_{(1)}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_{ex} &= W_{ex} - (1+ic_2)|W_{ex}|^2W_{ex} + K(1+ic_1)(W_{(1)} - W_{ex}) \\ &\quad + pK(1+ic_1)(W_{(2)} - W_{(1)}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

について考えればよいことがわかる。試行要素存在下でも eq.(3.33), eq.(3.34)は2クラスターの運動を記述する方程式 eq.(3.14), eq.(3.15)と同じものである。

まず $W_{(1)}, W_{(2)}$ を $O(p)$ の精度で求めることにしよう。 $p$ が十分小さいときは、上の3つの式の各最終項は摂動項とみなすことができるので、 $p=0$ で求めた解をもとに $W_{(1)}, W_{(2)}$ を近似することが可能である。ここでも、 $p=0$ の場合と同じく、二つのクラスターの相対位置が固定されるような解にのみ注目する。 $p$ が有限になることによって加わった摂動項がもたらす巨大クラスターと微小クラスターの解のずれを

$$W_{(1)} = (1+r_1)e^{i\theta_1}e^{-ic_2t} \quad (3.36)$$



$$W_{(2)} = r_{\pm}(1+r_2)e^{i\theta_2}e^{i(-c_2t+\alpha)} \quad (3.37)$$

として、 $p$  に関係した微小変数  $r_1, r_2$  と角度変数  $\theta_1, \theta_2$  によって表現する。この変数を使うと二つのクラスターの相対位置が固定されるという要請は、 $\dot{r}_1 = 0, \dot{r}_2 = 0$  かつ  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \omega, \theta_2 = \theta_1 + \phi$  ( $\omega, \phi$  は微小定数) となる。さて、eq.(3.33), eq.(3.34) をこれらの微小変数で書き直すと

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 + i(1+r_1)\dot{\theta}_1 &= (1+ic_2)(-2r_1 - 3r_1^2 - r_1^3) \\ &\quad + pK(1+ic_1)\{r_{\pm}(1+r_2)e^{i\alpha}e^{i\phi} - (1+r_1)\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_2 + i(1+r_2)\dot{\theta}_2 &= (1+ic_2)\{r_2 - r_{\pm}^2(3r_2 + 3r_2^2 + r_2^3)\} \\ &\quad + K(1+ic_1)\left\{\frac{e^{-i\alpha}}{r_{\pm}}((1+r_1)e^{-i\phi} - 1) - r_2\right\} \\ &\quad + pK(1+ic_1)\left\{1 + r_2 - \frac{e^{-i\alpha}}{r_{\pm}}(1+r_1)e^{-i\phi}\right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

が得られる。ただしこれらの式の中に含まれる  $O(p^0)$  の定数項 (微小でない項) を全て消去するために eq.(3.19) を用いた。この方程式に先ほどの微小変数に対する要請を課して、得られる結果を  $p$  の最低次のオーダーで記述すれば

$$i\omega = -2(1+ic_2)r_1 + pK(1+ic_1)(r_{\pm}e^{i\alpha} - 1) \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} i\omega &= (1-3r_{\pm}^2)(1+ic_2)r_2 + K(1+ic_1)\left\{\frac{e^{-i\alpha}}{r_{\pm}}(e^{-i\phi} - 1 + r_1) - r_2\right\} \\ &\quad + pK(1+ic_1)\left(1 - \frac{e^{-i\alpha}}{r_{\pm}}\right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

となる。ところで eq.(3.41) を得る際に、 $e^{i\phi} \sim 1 + i\phi$  と見なして  $p$  の高次の項に相当するものは省いた。これで  $O(p)$  の精度で巨大クラスターの最終状態 ( $r_1$  と  $\omega$ ) を見積もることが可能になった。つまり eq.(3.40) より即座に

$$r_1 = \frac{1}{2}pK(r_{\pm}\cos\alpha - 1 - c_1r_{\pm}\sin\alpha) \quad (3.42)$$

$$\omega = pK\{(c_1 - c_2)(r_{\pm}\cos\alpha - 1) + (1+c_1c_2)r_{\pm}\sin\alpha\} \quad (3.43)$$

と決定できる。この巨大クラスター解は  $p = 0$  での巨大クラスター解さえ存在すればいつでも存在するが、すでに  $p = 0$  の巨大クラスター解はどのようなパラメータ条件でも存在することがわかっているので、このクラスター解もいつでも存在することになる。ただし、これはこの巨大クラスター解がクラスターとして安定であることを意味するのではない。巨大クラスターのクラスターとしての安定性についてはのちほど考察する。

一方で微小クラスター解はもう少し複雑である。これは  $p = 0$  のときの仮想クラスター解が巨大クラスター解よりも困難を伴い、解の存在条件も考察しなければいけなかったことを思い出せば理解

できる。微小クラスター解を  $O(p)$  の精度で導くことを目指すことにしよう。まず、eq.(3.41) は

$$\begin{aligned} e^{-i\phi} &= 1 + p - r_1 + \left\{\frac{i\omega}{K(1+ic_1)} + \left(1 - \frac{(1-3r_{\pm}^2)(1+ic_2)}{K(1+ic_1)}\right)r_2 - p\right\}r_{\pm}e^{i\alpha} \\ &= 1 + p - r_1 + \frac{i\omega + \{K(1+ic_1) - (1-3r_{\pm}^2)(1+ic_2)\}r_2 - pK(1+ic_1)}{(1+ic_2)(r_{\pm}^2 - 1) + K(1+ic_1)} \end{aligned} \quad (3.44)$$

と書き直せるので、 $r_2$  は

$$\begin{aligned} &|(1+ic_2)(1-r_{\pm}^2) + K(1+ic_1)|^2 \\ &= |(1+p-r_1)(1+ic_2)(r_{\pm}^2 - 1) + K(1+ic_1)(1-r_1) + i\omega \\ &\quad + \{K(1+ic_1) - (1-3r_{\pm}^2)(1+ic_2)\}r_2|^2 \\ \Leftrightarrow &\{K^2(1+c_1^2) - 2K(1+c_1c_2)(1-3r_{\pm}^2) + (1+c_2^2)(1-3r_{\pm}^2)^2\}r_2^2 \\ &+ 2\{[2K(1+c_1c_2) + (1+c_2^2)](r_{\pm}^2 - 1) + 2K^2(1+c_1^2) + 4K(1+c_1c_2)\}(1-r_1) \\ &+ \{K(1+c_1c_2) + (1+c_1^2)(1-3r_{\pm}^2)\}(r_{\pm}^2 - 1)p + Kc_1\omega - (1-3r_{\pm}^2)c_2\omega]r_2 \\ &+ 2[-2K(1+c_1c_2) - K^2(1+c_1^2) + (1+c_2^2)(1-r_{\pm}^2)](p-r_1) - K^2(1+c_1^2)r_1 \\ &- K(1+c_1c_2)(r_{\pm}^2 - 1)p + c_2(r_{\pm}^2 - 1)\omega + Kc_1\omega] \\ &+ (1+c_1^2)(r_{\pm}^2 - 1)^2(p-r_1)^2 + K^2(1+c_1^2)r_1^2 + \omega^2 - 2K(1+c_1c_2)(r_{\pm}^2 - 1)(p-r_1)r_1 \\ &- 2Kc_1r_1\omega + 2c_2(r_{\pm}^2 - 1)(p-r_1)\omega = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

を満たさなければならない。Eq.(3.45) の下線を引いた部分 ( $\equiv A$ ) は  $p = 0$  での孤立した仮想クラスター解の線形安定性条件 eq.(3.26) の左辺に一致していることに注目しておいてほしい。  $A$  を用いて  $r_2$  が実数解として存在するための  $c_1, c_2, K, p$  の条件を記述すると

$$\begin{aligned} D &\equiv [A(1-r_1) - \{[K(1+c_1c_2) + (1+c_1^2)(1-3r_{\pm}^2)](r_{\pm}^2 - 1)p + Kc_1\omega - (1-3r_{\pm}^2)c_2\omega\}]^2 \\ &- \{K^2(1+c_1^2) - 2K(1+c_1c_2)(1-3r_{\pm}^2) + (1+c_2^2)(1-3r_{\pm}^2)^2\} \\ &[2\{-2K(1+c_1c_2) - K^2(1+c_1^2) + (1+c_2^2)(1-r_{\pm}^2)\}(p-r_1) - K^2(1+c_1^2)r_1 \\ &- K(1+c_1c_2)(r_{\pm}^2 - 1)p + c_2(r_{\pm}^2 - 1)\omega + Kc_1\omega \\ &+ (1+c_1^2)(r_{\pm}^2 - 1)^2(p-r_1)^2 + K^2(1+c_1^2)r_1^2 + \omega^2 - 2K(1+c_1c_2)(r_{\pm}^2 - 1)(p-r_1)r_1 \\ &- 2Kc_1r_1\omega + 2c_2(r_{\pm}^2 - 1)(p-r_1)\omega] > 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

となる。  $p = 0$  の仮想クラスターの軌道安定性が十分保たれている場合 ( $\Leftrightarrow |A|$  が  $p$  より十分大きい場合) には eq.(3.46) の中で  $O(p^0)$  となるのは  $A^2$  だけなので、微小クラスター解は必ず存在するという結果を得る。このとき  $r_2$  は  $O(p)$  の精度で

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{[-2K(1+c_1c_2) - K^2(1+c_1^2) + (1+c_2^2)(1-r_{\pm}^2)](p-r_1) - K^2(1+c_1^2)r_1 \\ &\quad - K(1+c_1c_2)(r_{\pm}^2 - 1)p + c_2(r_{\pm}^2 - 1)\omega + Kc_1\omega}{A} \end{aligned} \quad (3.47)$$



と書くことができる。ところが、仮想クラスター解が軌道安定になってすぐのパラメータ領域 ( $\Leftrightarrow |A|$  が  $p$  と同程度になる領域) では eq.(3.46) が成立するかどうかは明らかではなく、eq.(3.47) のような近似は利用できない。よって  $|A|$  が小さい場合 (2 クラスター解が生じた直後のパラメータ領域) は

$$r_2 = \frac{-\{(2K(1+c_1c_2) + (1+c_2^2))(r_{\pm}^2 - 1) + 2K^2(1+c_1^2) + 4K(1+c_1c_2)\}(1-r_1) - \{K(1+c_1c_2) + (1+c_1^2)(1-3r_{\pm}^2)\}(r_{\pm}^2 - 1)p - Kc_1\omega + (1-3r_{\pm}^2)c_2\omega\} \pm \sqrt{D}}{\{K^2(1+c_1^2) - 2K(1+c_1c_2)(1-3r_{\pm}^2) + (1+c_2^2)(1-3r_{\pm}^2)^2\}} \quad (3.48)$$

から微小クラスターの位置を見積もる必要がある。

さて、ひとまず  $p \rightarrow 0$  での 2 つのクラスターの解が求められたので、各々のクラスターのクラスターとしての安定性を求めることにしよう。ところで求めた二つのクラスター解はまだ一意には決定されていないことに注意しておきたい。これは  $p = 0$  での仮想クラスター解が  $r_{\pm}$  の二通りの解を持つことに起因するが、既に図 3.1 で見たように厳密に  $p = 0$  の場合は安定な 2 クラスター解は一意に決定できた。  $p \rightarrow 0$  の場合も、クラスターとしての安定性の議論を通して安定なクラスター解を一意に決定できるのか、あるいは構成要素数比  $p$  に対応するクラスター解は多重安定になるのかを確認する必要がある。まず、巨大クラスターのクラスターとしての安定性を調べよう。このためには 1 クラスターのクラスターとしての安定性を調べたときと同様の手続きをすれば良い。巨大クラスターの近傍に加えた試行要素の時間発展を見るには、eq.(3.35) に、  $W_{ex} = W_{(1)}(1+w_{ex})$  を代入して  $w_{ex}$  の線形安定条件を導けばよい。もちろん、  $W_{(1)} = (1+r_1)e^{i(-c_2+\omega)t}$  である。Eq.(3.35) を  $w_{ex}$  の 1 次まで展開すれば、

$$\dot{w}_{ex} = \left(1 - \frac{\dot{W}_{(1)}}{W_{(1)}}\right) w_{ex} - (1+ic_2)|W_{(1)}|^2(2w_{ex} + w_{ex}^*) - K(1+ic_1)w_{ex} \quad (3.49)$$

となるので、巨大クラスターの近くに置かれた 1 振動子がクラスターに取り込まれる条件、言い換えれば巨大クラスターがクラスターとして安定な条件は、  $O(p)$  の精度で記述すると

$$1 + K + 4r_1 > 0 \quad (3.50)$$

$$K^2(1+c_1^2) + 2K(1+c_1c_2) + 4r_1\{(1+c_2^2) + 2K(1+c_1c_2)\} + 2\omega(Kc_1+c_2) > 0 \quad (3.51)$$

として得られる。  $O(p^0)$  では eq.(3.50) は必ず満たされるので eq.(3.51) にのみ注目すればよい。この結果は  $O(p^0)$  では 1 クラスター状態におけるクラスター安定性 eq.(3.12) と一致しているが、巨大クラスターは 1 クラスター状態でのクラスターとあまり立場的に変わらないものなので、この結果は自然である。

同じように、微小クラスターのクラスターとしての安定条件も導こう。この場合は  $W_{ex} = W_{(2)}(1+w_{ex})$ ,  $W_{(2)} = r_{\pm}(1+r_2)e^{i(-c_2+\omega)t+\alpha+\phi}$  とすればよい。このとき、  $w_{ex}$  の線形方程式は

$$\dot{w}_{ex} = \left(1 - \frac{\dot{W}_{(2)}}{W_{(2)}}\right) w_{ex} - (1+ic_2)|W_{(2)}|^2(2w_{ex} + w_{ex}^*) - K(1+ic_1)w_{ex} \quad (3.52)$$

となり、微小クラスターがクラスターとして安定な条件は

$$K > 1 - 2r_{\pm}^2(1+r_2)^2 \\ 3(1+c_2^2)r_{\pm}^4(1+r_2)^4 + 4\{K(1+c_1c_2) - (1+c_2^2) + \omega c_2\}r_{\pm}^2(1+r_2)^2 \\ + K^2(1+c_1^2) + (1+c_2^2) - 2K(1+c_1c_2) + 2(Kc_1 - c_2)\omega + \omega^2 > 0$$

であるから eq.(3.20) により第二不等式の  $r_{\pm}$  の 4 次項を消去すれば、  $O(p)$  では

$$K > 1 - 2r_{\pm}^2 - 4r_{\pm}^2r_2 \quad (3.53)$$

$$\{2K(1+c_1c_2) + (1+c_2^2)\}(r_{\pm}^2 - 1) + 2K^2(1+c_1^2) + 4K(1+c_1c_2) \\ 2\{2K(1+c_1c_2) + (1+c_2^2)\}r_{\pm}^2 + 3K^2(1+c_1^2)r_2 + 2(Kc_1 - c_2)\omega < 0 \quad (3.54)$$

となる。ところで、eq.(3.53), eq.(3.54) は  $O(p)$  の項を除けば、仮想クラスター解の軌道安定な条件 eq.(3.25), eq.(3.26) と一致していることに気付く。これは、微小クラスター  $W_{(2)}$  のクラスターとしての安定性を調べる手続き ( $W_{ex} = r_{\pm}(1+r_2)e^{i(-c_2+\omega)t+\alpha+\phi}(1+w_{ex})$  として  $w_{ex}$  の線形安定性を調べる) と仮想クラスター解の軌道安定性を調べる手続き ( $W_2 = r_{\pm}e^{i(-c_2t+\alpha)}(1+w)$  として  $w$  の線形安定性を調べる) が  $O(p^0)$  では全く同じであることから容易に推測されたことである。さらに言えば、微小クラスター解の軌道安定性を調べる手続きは微小クラスターのクラスター安定性解析と完全に一致する。これは今のよう  $p$  が十分小さいときには eq.(3.15) と eq.(3.35) が同等になるから成り立つことなので、  $p$  が大きくなれば厳密には成り立たない。また巨大クラスター解の軌道安定性は異なる手続きとして調べなければわからない。

ここで、先程あげておいた、ある  $p$  に対応する安定な 2 クラスター解は複数存在するのかという問題を思い出してほしい。巨大クラスター解には  $r_1, \omega$  を通して  $p = 0$  の仮想クラスター解に関する  $r_{\pm}$  と  $\alpha$  が含まれるので、  $r_{\pm}$  に対応した 2 つの解が存在している。この両方の解がクラスターとして安定であるのかを吟味することにしよう。既に述べたように、eq.(3.12) で得られる 1 クラスター状態でのクラスター安定性が消失する点では、  $r_{\pm}$  のどちらかが  $r = 1$  を満たす。例えば図 3.1(a) の場合は  $K = K_1$  で  $r_+ = 1, r_- < 1$  となり、図 3.1(b) の場合は  $r_+ > 1, r_- = 1$  となる。  $c_1, c_2$  の関係が  $K = K_1$  で  $r_+ = 1$  をもたらずようなものであるとしよう。巨大クラスターがクラスターとして安定な条件 eq.(3.51) の左辺を  $S(r_{\pm})$  とおくことにする。つまり

$$S(r_{\pm}) \equiv \frac{K^2(1+c_1^2) + 2K(1+c_1c_2)}{+4r_1\{(1+c_2^2) + 2K(1+c_1c_2)\} + 2\omega(Kc_1+c_2)} > 0 \quad (3.55)$$



とすれば、 $K = K_1$ では $r_+ = 1, \alpha = 0$ となるので $r_1 = \omega = 0$ が導かれ、必ず $S(r_+ = 1; K_1) = 0$ が成り立つことがわかる。ここまでの結果は $p$ の値に依存しない。 $S(r_+ = 1; K_1) = 0$ は $K = K_1$ の前後で $r_+$ に対応する巨大クラスタのクラスタ安定性が変化することを示唆しているので、この前後の $K$ で $S$ が正か負かを考えればこのクラスタが安定かどうかを決定できる。 $p$ が十分0に近い値で $K$ が $K_1$ から十分離れていれば、下線部のみが重要となるので $S(r_+)$ は1クラスタ状態のクラスタ安定条件と同じと見なせ、 $K > K_1$ では $S(r_+) > 0$ 、 $K < K_1$ では $S(r_+) < 0$ という結果が得られる。 $|K - K_1| \sim O(p)$ の領域では $K = K_1$ 以外で $S(r_+) = 0$ は成り立たないことを仮定すれば、この正負の関係から $r_+$ に対応する巨大クラスタのクラスタとしての安定性が決定できたことになり、 $K > K_1$ でクラスタとして安定、 $K < K_1$ で不安定である。ところがこの結果は図3.1に関連して議論した、仮想クラスタ解の軌道安定性と常に両立しない関係にあることを意味している。 $K = K_1$ で $r_+ = 1$ の場合は $\alpha = r_1 = \omega = 0$ だから、eq.(3.41)から即座に $r_+ = 1$ に対応する微小クラスタについて $r_2 = \phi = 0$ が導けるので、微小クラスタのクラスタ安定性条件eq.(3.54)の左辺も0に一致することになる。この結果と仮想クラスタの軌道安定性は微小クラスタのクラスタ安定性と $O(p)$ しか変わらないことを考慮すると、 $K = K_1$ で微小クラスタのクラスタ安定性が仮想クラスタの軌道安定性と同じ関係で変化することがわかる。これは微小クラスタのクラスタ安定性が巨大クラスタのクラスタ安定性と反転した関係であるということの意味するので、今の場合 $r_+$ に対応するクラスタ解は実現されないことが結論付けられる。この議論は $K = K_1$ で $r_- = 1$ が成り立つような場合でも同様に成り立つので、一般に $p \neq 0$ の場合は $p$ を決定すれば実現される巨大クラスタは一意に決まることになる。

さて、以上の考察より相対位置が固定された2クラスタ状態では構成要素数比 $p$ に対して一意に安定解が決まることがわかったが、本当は $p$ 自体がダイナミクスによる系の内部的条件で決定されるものであるので、パラメータ $c_1, c_2, K$ を固定したときの安定な2クラスタ解は系がダイナミクスの結果として取り得る $p$ の範囲に対応して多様に存在することになる。具体的に、どのような範囲の $p$ が実現されるか数値計算の結果をみてみよう。図3.2は $c_1 = -1.0, c_2 = 2.0$ として $K$ に対して取り得る $p$ の上限と下限を示したものである。この図では大きい方のクラスタと小さい方のクラスタの構成要素数比を一度に表しているのので、 $0 < p < 0.5$ は小さいクラスタの構成要素数比を、 $0.5 < p < 1$ は大きいクラスタの要素数比を示している。小さいクラスタの構成要素数比の下限(=大きいクラスタの構成要素数比の上限)はeq.(3.51)から得られる $p$ の制限(図ではLAとLBで表される曲線に対応)と $p$ が小さい範囲ではよく一致している。この結果は、ここで行なった議論の妥当性を保証するものであり、同時に、クラスタの構成要素数比 $p$ は大きいクラスタのクラスタとしての安定条件eq.(3.51)、言い換えれば大きいクラスタがクラスタとしてまとまる能力によって規定されることを示している。小さいクラスタがクラスタとして安定な条件eq.(3.54)が許容する $p$ の範囲は大きいクラスタによるものよりも広い。これより、大きいクラ

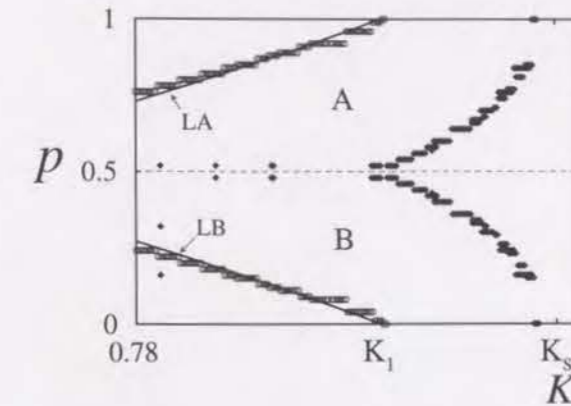


図 3.2:  $c_1 = -1.0, c_2 = 2.0, N = 100$ のもとで数値的に得た2クラスタ状態の構成要素数比の上限と下限。大きいクラスタはAの範囲なら存在可能であり、 $K \sim K_1$ ではほとんど全ての $p$ をとれることがわかる。LBは大きいクラスタがクラスタとして安定な条件eq.(3.51)から得た曲線で、 $p$ が小さい範囲では数値計算の結果と一致している。この図は $p = 0.5$ について対称になっていることに注意。曲線LAもLBから $1-p$ によって導出したものである。

スタのサイズが条件eq.(3.51)で与えられた限界以下であれば両方のクラスタとも必ず一つにまとまることができ、ほとんど全ての $p$ が幅広く採られ得ることになるのであろう。図3.2に示した数値計算の結果によれば、仮想クラスタ解が生じる点 $K_s$ を過ぎてeq.(3.23)が満たされるパラメータ領域に入ると、初期の時点からかなり広い $p$ の範囲の2クラスタ状態が存在すること、このパラメータ条件では $K \sim K_1$ 以下ではeq.(3.51)で許される全ての $p$ (ただし $p = 0.5$ は数値的には確認されていない)を採り得ることがわかる。 $p = 0$ の仮想クラスタ解が存在する条件が2クラスタ状態が実現される条件に相当するように、一般の $p$ に対する小さいクラスタに対応する解が存在する条件(eq.(3.46))が $p$ の上限を決めていると考えられるが、この条件式は $p$ が十分小さいときに限って妥当であり、数値計算の結果が示すように $p$ の上限は2クラスタ解が生じた直後からかなり大きいと考えられるので、eq.(3.23)の適応範囲を越えていると見なすべきである。一般の $p$ に対して2クラスタ状態の解が存在する条件を求めることにはまだ成功していないので、残念ながら現時点では、 $p$ の上限を与える条件や力学的構造についての知見は得られていないと言わざるを得ない。

### 3.3 クラスタ間の相対運動

前節では特に構成要素数比 $p$ が小さいときに限って解析的取り扱いを行ない、2つのクラスタの相対運動が固定される場合について2クラスタ状態の安定条件を導いた。ここでは、より一般的に2クラスタ状態および3クラスタ状態で見られるクラスタ同士の相対運動の複雑化の過程を数値



実験を通して見ていくことにする。

前節の結果が物語るようにパラメータ  $c_1, c_2, K$  を決めたとしても、クラスターの構成要素数比  $p$  は広い任意性を持つ。これは言い換えれば、一口に2クラスター状態といっても初期条件の選び方によって多数の異なる安定解が存在するということであり、初期条件と  $p$  の間の関係は現状では予測することができない。そこでこの章では、初期条件を1通りに定めて、その初期条件から出発したときに得られる最終状態について、 $c_1 = -1.0, c_2 = 2.0$  に固定しパラメータ  $K$  を変えることによって系統的に調べることにした。その結果を概観したのが図 3.3 である。図 3.3(a) は全要素数  $N$  を 100

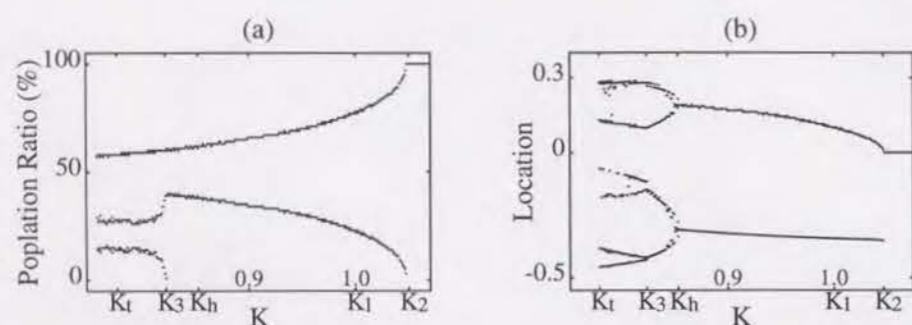


図 3.3:  $c_1 = -1.0, c_2 = 2.0, N = 100$  で各  $K$  値のもとで、複素平面の単位円に一樣に分布させた初期条件から得た最終的なクラスター状態を (a) 構成要素数比と (b)  $\overline{W}$  とともに回転する複素平面のったときの各クラスターの位置の二面から描いた図。詳しくは本文を参照のこと。

として、固定した初期条件から数値実験をはじめたときに得られたクラスター状態について、各クラスターに含まれる構成要素数を結合の強さ  $K$  の関数として表示したものである。この図によれば、初期条件を一定にしても  $K$  を連続的に変えれば、得られるクラスター状態も連続的に移り変わっていくようである。ここで採用したパラメータ値では、eq.(3.12) と eq.(3.23) により  $K_1 = 1.0, K_s \sim 1.156$  と見積もることができ、 $K_1 < K < K_s$  では1クラスター状態と2クラスター状態の両方が安定に存在できることがわかる。今の初期条件では  $K > K_2 \sim 1.05$  では1クラスター状態に、 $K < K_2$  では2クラスター状態に落ち着いている。 $K = K_2$  直後では構成要素数比  $p \sim 0$  であるが  $K_2$  から離れるとともに急速に微小クラスターに含まれる要素数が多くなるので、この図から判断すると1クラスター状態の不安定化とともに連続的に（ヒステリシスなく）分岐した2クラスター状態が遷移していつているかのよう捉えられる。しかしながら、実際はすでに前節で調べた通りこれらの状態は多重安定（1クラスター、2クラスターの2通りだけではなく2クラスターでの構成比の多様さも存在するので）であるので、この図は位相空間の中のこの初期条件に対応する点が多重安定な解のうちどの解の basin に属するかが連続的に移っていくということを示唆している。

$K$  が  $K_2$  から十分離れて二つのクラスターの構成要素数比が大きくなってくると、二つのクラス

ターの相対運動はもはや固定された状態にとどまることはできなくなる。図 3.3(b) は  $\overline{W}$  の回転系で見た各クラスターの位置を  $\text{Im}W$  によって見たものである。 $K > K_2$  における1クラスターの位置と  $K_h < K < K_2$  での二つのクラスターの位置は、相対運動が固定されるので各位置を点によって表示することが可能である。ところが、 $p$  が大きくなるということはクラスター同士が及ぼし合う影響が大きくなることを意味するので、どのようなパラメータや初期条件に対してもいつでもクラスター間の相対運動が固定されるということは考えにくい。具体的に今採用している初期条件では、 $K = K_h$  で Hopf 分岐がおきて2クラスター状態での相対運動が周期運動になる。このときの二つのクラスターの運動の軌道を  $\overline{W}$  の回転系によって複素平面上に表示したのが図 3.4 であり、二つの卵型の周期軌道のうち小さい方が大きいクラスターの軌道を、大きい方が小さいクラスターの軌道を表している。図 3.3(b) ではこの周期軌道を表現するために各軌道の虚数成分の最大値と最小値を取り出して示すことにした。これによって、図 3.3(b) では  $K = K_h$  で二つのクラスターから4つのクラスターに変わったかのように見えるが、ここで起きている変化はそうではなくて、これは2つのクラスターの軌道が周期軌道に変化したことを伝えていることに注意してほしい。

この初期条件ではその後  $K$  を変えても2クラスター状態の相対運動に本質的な変化は見られない。しかしながら  $K = K_3$  まで達すると、この初期条件に対応する最終状態は3クラスター状態に変化する。このときの変化の様子を各クラスターの構成要素数比に着目して図 3.3(a) で見てみると、大きい方のクラスターは2クラスター状態から3クラスター状態に変化してもその前後で定性的変化を見せないが、小さい方のクラスターが  $K = K_2$  で1クラスター状態から2クラスター状態に遷移したときと同じように、巨大クラスターと微小クラスターに分かれることが伺い知れる。この場合も初期条件を変えれば依然2クラスター状態になる場合もあり、やはりクラスター解の多重安定構造が存在している。2クラスター状態が生じたときと異なり、3クラスター状態が生じる時すでにそれ以前に2クラスター状態でもその相対運動が周期運動になっているので、その相対運動ははじめから周期的なものとして観測される。この3つのクラスターの各軌道は図 3.5 のようになっており、図 3.4 に見られる小さいクラスターから二つのクラスターが派生したことがわかりやすい。3クラスター状態になったことによって、図 3.3(b) には3つの周期軌道を反映した6個の点が打たれることになったことに注意してほしい。図 3.5 に見られるように、3つのクラスターのうち小さい2つのクラスターは一つの軌道の中にもう一つが包まれるような形になっているので、6つの点のうち上の二つは最大クラスターの軌道を表すものだが、残りの4つのうち3番目と6番目が一つのクラスターの軌道を、4番目と5番目でもう一つのクラスターの軌道を表している。図 3.3(a) によれば、最大クラスターはこのクラスター自体の構成要素数比には、残りのクラスターの状況の変化の影響を受けていないように思われるが、図 3.3(b) を見るとその周期軌道の形については2クラスター状態から3クラスター状態になることによって明らかに影響を受けていることがわかる。3クラスター状態でのクラスター間の



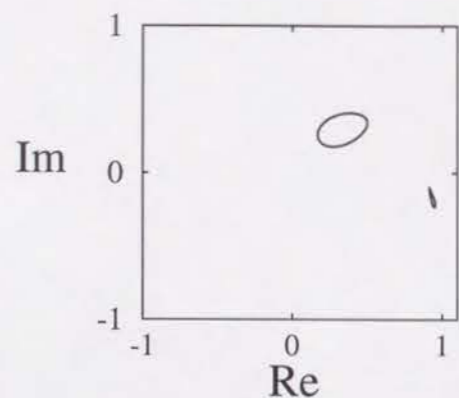


図 3.4:  $c_1 = -1.0, c_2 = 2.0, K = 0.82$  で得られた 2 クラスター状態の相対運動を  $\bar{W}$  の回転系で見た図。各クラスターの軌道は周期軌道になっている。小さい方の軌道が大きいクラスターの軌道に対応しており、この場合の構成要素数比は  $p = 0.36$  である。

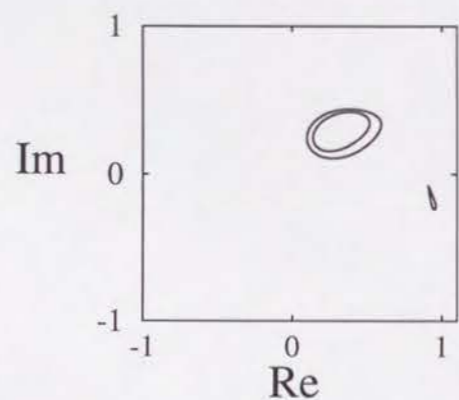


図 3.5:  $c_1 = -1.0, c_2 = 2.0, K = 0.8$  で得られた 3 クラスター状態。図 3.4 と比べると小さい方のクラスターが二つに割れたことがわかる。構成要素数比は  $p_2 = 0.26, p_3 = 0.1$  となっている。

相対運動は、各クラスターの構成要素数比を  $1 - p_2 - p_3 : p_2 : p_3$  とすれば

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(1)} = & W_{(1)} - (1 + ic_2)|W_{(1)}|^2 W_{(1)} \\ & + p_2 K(1 + ic_1)(W_{(2)} - W_{(1)}) + p_3 K(1 + ic_1)(W_{(3)} - W_{(1)}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(2)} = & W_{(2)} - (1 + ic_2)|W_{(2)}|^2 W_{(2)} + K(1 + ic_1)(W_{(1)} - W_{(2)}) \\ & + p_2 K(1 + ic_1)(W_{(2)} - W_{(1)}) + p_3 K(1 + ic_1)(W_{(3)} - W_{(1)}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(3)} = & W_{(3)} - (1 + ic_2)|W_{(3)}|^2 W_{(3)} + K(1 + ic_1)(W_{(1)} - W_{(3)}) \\ & + p_2 K(1 + ic_1)(W_{(2)} - W_{(1)}) + p_3 K(1 + ic_1)(W_{(3)} - W_{(1)}) \end{aligned} \quad (3.58)$$

と書けるので、2 クラスター状態での相対運動より複雑化する潜在性は高いことがわかる。

これまで固定してきた初期条件から得られる 3 クラスターでの相対運動は、 $K > K_t$  では 2 クラスター状態のときと定性的には同じと思われる周期運動をみせるが、それ以下の  $K$  値では相対運動の種類に絞って調べてみないとわからない。そこでここでは  $N = 100$  の系を使って、数値計算から得られた 3 クラスターの構成要素数比とある時刻での各クラスターの位置の結果を利用することにした。これを利用すれば 3 クラスター状態の発展方程式 eq.(3.56), eq.(3.57), eq.(3.58) を使ってクラ

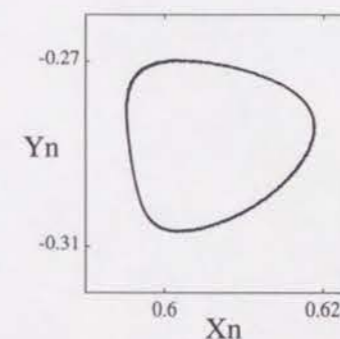


図 3.6:  $c_1 = -1.0, c_2 = 2.0, K = 0.779$  で本文中にある方法で得た Poincaré マップの 2 次元への射影図。この場合の 3 クラスター状態の相対運動が準周期運動であることがわかる。

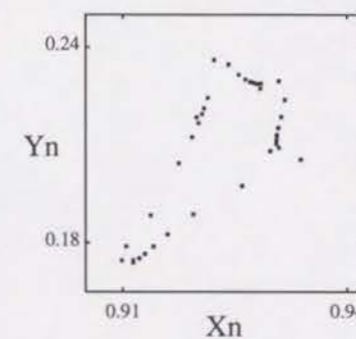


図 3.7: 図 3.6 の状況から  $K$  を 0.7725 まで下げたときに得られる Poincaré マップの射影図。3 7 周期へのロッキングが起こっている。

スター間の相対運動を調べることが可能になるので、低次元系 (6 次元) とみなして位相空間を使っ



た考察法を導入できる。以下の手続きはこのように  $p_2, p_3$  を  $K$  の関数として確認したのちにこの関係の元で行なっているの、 $K$  を変えるという表現がなされた場合はそれともなって  $p_2, p_3$  も変わっていることに注意してほしい。まず、 $K = K_t$  で起こる相対運動の変化を、6次元位相空間内にある断面を設定して5次元の Poincaré マップを得た上で、このマップを2次元に射影したものを見ることにより理解する。このようにすると、 $K > K_t$  では周期運動であることを反映して、どのような2次元を選んで射影しても点が得られるだけである。 $K = K_t$  を過ぎるとマップの2次元射影面上の点は図3.6のように円形に広がり、その大きさは  $K \rightarrow K_t$  では0で  $K$  が  $K_t$  から離れるに従って大きくなる。この事実は2次元射影面の選び方に依存しないので、6次元位相空間中で軌道は2次元トーラスを構成しており、準周期 ( $T/2$ ) 運動が生じたこと、ここで起きている相対運動の変化は Hopf 分岐によることが理解できる。さらに  $K$  の値を下げていくとこの2次元射影面上に得られるマップの形は歪みはじめ、 $K = K_t$  では図3.7のように37周期にモードロッキングを起こしたマップを得る。この後、相対運動は以下に述べるような典型的なルートをたどってカオスに至ることになる。Poincaré マップを通じて相対運動は周期37にモードロックされることがわかったので、軌道が6次元空間内の Poincaré 断面を決まった方向に通過する中で37回に一回だけ値を得て図を描くことにする。このようにすると、図3.7は一点として描かれる。ここから  $K$  を下げるとモードロッキングが解かれていくが、その解かれ方をこの見方で把握すると系統だった結果が得られる。つまり、 $K_t$  から少し離れると、図3.8(a)のように  $K_t$  では一点であったものが線上に広がる様子が見られるので、この結果について First return マップを作ることが可能となる。これは図3.8(b)のように多価関数として得られるので、モードロッキングが解ける際に周期倍分岐を通してカオスになっていることを示唆している。このようにして3クラスター状態の相対運動はカオスになるが、ここで採用し

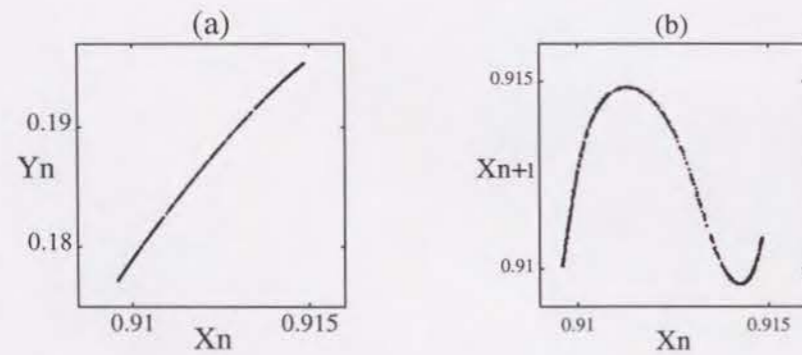


図 3.8: 図 3.7 で得られた 37 周期ごとの点が  $K$  を下げたときに分岐した様子を捉えた図。 $K = 0.772$  の場合は 37 周期ごとに点を拾うと (a) のように線状に広がったマップが得られる。(b) は (a) から構成した 1 次元マップで周期倍分岐を辿ってカオス化したことがわかる。

た初期値ではこのカオスが得られた後 3 クラスター状態が保たれる  $K$  の範囲は広くなく、これ以上の少数個のクラスター状態が得られることもないので、カオスの運動をする少数クラスター状態は実現しにくいことが推測される。相対運動がカオス的で軌道不安定性が存在するという事実と、クラスターがクラスターとして安定か不安定かという問題は別問題ではあるが、2 クラスターの場合の解析の手続きで類推されるように、小さいクラスターのクラスター安定性と相対運動の軌道安定性は関係が深いと考えられるのでこのような結果を得ることは想像に難くない。

### 3.4 3 以上の少数クラスター状態と部分クラスター状態

前節では 2 および 3 クラスター状態を中心に一定の初期条件の元での結果を述べ、3 個以上の少数クラスター状態は得られないことに触れたが、初期条件をうまく探せば 3 個以上の少数クラスター状態に至ることは可能である。これまで数値的に得られているのは  $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$  個のクラスター状態で、これらが実現されるパラメータ領域はかなり狭いようである。このような状態は各パラメータ条件下で最大クラスターの構成要素数比がほぼ最大値に近い場合に生じるが、最大クラスターが十分大きい場合はクラスター間の相対運動が比較的複雑化しにくいことが原因であると思われる。

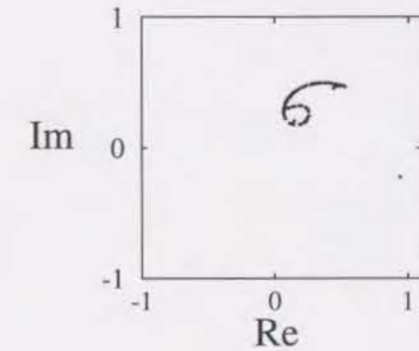


図 3.9:  $c_1 = -1.0, c_2 = 2.0, K = 0.7$  で得た部分クラスター状態。図の右端中央部にあるクラスターに全体の 64% の要素が含まれている。

また、前節で選んだ初期条件の場合にも実現されるのだが、少数クラスター状態が得られなくなった直後のパラメータ領域で、部分クラスター状態を得ることが多い。これは 1 つの大きなクラスターが存在する一方で、このクラスターに含まれない残りの要素はクラスター化せずにバラバラの状態のまま運動を続けるものである。例えば、前節の初期条件では 3 クラスター状態が崩壊した後にこの状態を得るが、これについても図 3.3 を  $K$  の範囲を延長して描けば、大きなクラスターの構成要素数比はそのまま自然に滑らかに下がるのみで小さなクラスターができたか否かによって大きな変化は起き



ていないように見える。バラバラになった残りの要素が相対運動している位置は大きなクラスターから隔離された状態を保ち続け、ちょうど小さなクラスターがかつて占めていた周辺にまとまって存在する(図3.9)。バラバラになったの要素同士の相対運動はかなり複雑で、この自由度に相当する大自由度カオスとなっている。

### 3.5 まとめと関連する研究

この章では、少数クラスター状態についてクラスター同士の構成要素数比と相対運動の複雑化を中心に見てきた。クラスター状態は基本的に多重安定で、初期条件によって選ばれる構成要素数比が異なり、一番大きいクラスターがどれだけの要素を同一化する能力を持っているかによって、取り得る比の範囲は決定される。しかしクラスター数を2個として構成要素数比をある値に固定したもとの  $p \rightarrow 0$  の解析結果によれば、ある  $p$  に対応するクラスター解には多重安定性は存在しないようである。選ばれた比の値によって相対運動のあり方も異なり、クラスターの構成要素数比が対等に近いほど、またクラスターの個数が多いほど相対運動は複雑になる傾向がある。相対運動が軌道不安定性を持つカオスになるような場合には、クラスターとしての安定性と軌道不安定性の両立の困難さを反映して少数クラスター状態の実現は難しく、部分クラスター状態のままになってしまうことが多い。

ここで得られた結果を個性性と全体性の観点から解釈してみよう。各振動子はお互いにバラバラになる傾向を持っているが、相互作用が十分強いとこの個性性はなくなり全てが同一化してしまう。要素間の相互作用が少し弱いとほとんどの要素を同一化できるくらい強い場合が、少数クラスター状態に対応すると思えばよい。元々要素の個性性があるために全ての同一化が果たされず分裂が起きて、いくつかの集団に分散してそれぞれで同一化するようになる。一旦分裂が起きるような条件になれば分裂する要素数比は小さいとは限らず、ほんの少しの条件の違いで、かなり大きな割合を占める要素が別の集団に移っていく場合もある。相互作用が弱くなって異なる集団が出来るようになれば、それに対応して集団同士の相対運動が起きることになり、この集団運動の複雑化がさらに要素が集団にまとまることを難しくしていく。相対運動がカオスに至れば集団に分かれてクラスター化する可能性は非常に低くなってしまい、一つの大きめの集団は自律形成できるが、そこに属せなかった要素はその影響下で個別運動を行なうようになってしまう。

クラスタリングは大域結合系で顕著な現象で、これまでに位相振動子モデルを用いた研究[24]~[26]、カオスマップを用いた研究[10][11]がある。位相振動子モデルのクラスタリングの研究では、既に2章で説明した incoherent 状態に関連する対称クラスター状態(クラスターの構成要素数比が各クラスターで全て同じになるような場合)が中心的役割を担っている。特に奥田[24]は対称クラスター状態の線形安定性を解析的に調べており、相互作用項に高次(高調波)の効果が含まれることがクラスターを安定化させるのに必要であることを示した。これより、位相振動子で実現されるクラスター状態はこの章の主題となった少数クラスター状態とは異なる性格のものであることがわかる。一方、金

子は Logistic マップ[10]と Circle マップ[11]のカオス領域で大域結合を施すことにより、2クラスターをはじめとする少数クラスター状態や部分クラスター状態が得られることを報告しており、ここで述べたクラスター状態と同様、構成要素数比に応じた多様性があることにも触れている。どの様な構成要素数比が実現されやすいかということを除けば、カオスマップ系で得られるクラスタリングと GCGL のクラスタリングは性格がよく似ている。カオスマップ系の場合にはもともと個々の要素がカオスに由来する軌道不安定性を持っているので、もし GCGL のクラスタリングと対照するものであるとすれば、多体系になることによって各要素の個別運動のカオス性を消し去るような効果を持たなければクラスター化は実現することは稀であるはずである。またクラスター間の相対運動に起因するカオス性が生じた場合も、クラスタリングが難しいことが予想される。実際のところ、カオスマップ系での少数クラスター状態では上記のようなことが起きており、GCGLの場合との類似性を伺わせる結果となっている。



## Chapter 4

### 連続分布の運動

前章では結合の強さ  $K$  が比較的大きいところで見られるクラスタリングについて議論した。この章では比較的小さいところで見られる連続分布の安定性と位相空間の構造および分布自体が見せる運動の複雑化について述べることにする。既に2章で位相モデルの場合について概観したように、 $K \rightarrow 0$  では incoherent 状態と呼ばれる状態とその中の特殊例である一様分布が安定に存在する。まずはこれについての解析からはじめることにしよう。

#### 4.1 incoherent 状態

位相モデルでの incoherent 状態と同等なものとして、GCGL の incoherent 状態を  $\bar{W} = 0$  を実現するような状態であると定義する。この拘束条件のもとでは GCGL は解くことができ、

$$W_j = \sqrt{1-K} e^{i\{-(Kc_1+(1-K)c_2)t+\phi_j\}}, \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (4.1)$$

という各振動子が各々半径  $\sqrt{1-K}$  の円上を角速度  $-Kc_1 - (1-K)c_2$  で回転する解が得られる。ただし任意位相  $\phi_j$  は

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} = 0 \quad (4.2)$$

を満たす実数ならばなんでもよい。eq.(4.2) は位相空間では eq.(2.1) による  $2N$  次元空間中の  $N-2$  次元超平面を表しているの、incoherent 状態とはある一つの状態を意味するのではなく、実際は不可算無限個の解が属していることになる。この状態全てについての線形安定性解析は GCGL ではまだ行なわれていないが、位相モデル

$$\dot{\phi}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha) \quad (4.3)$$

では渡辺・Strogatz によって既に解析された [23]。2章で導いたように  $K \rightarrow 0$  では GCGL はこの位相モデルに一致すること、 $K$  が有限の値になっても incoherent 状態には本質的変化は起きていな

いことから [23] による議論がここでも有効であると考えられる。なお、incoherent 状態の特殊な場合である一様分布に関しては次節で解析を含めて議論することにしよう。

渡辺・Strogatz によれば eq.(4.3) からは3つの、全要素の組合せによって定義される特別な変数が重要な意味を持つものとして導き出され、残りの  $N-3$  個は個々の振動子の運動を反映する変数で全体的運動の観点からは implicit な変数として理解される。incoherent 状態の場合、全振動子が eq.(4.1) によるように単純な周期運動を繰り返しているだけなので、個々の要素の運動を反映する  $N-3$  個の変数の固有値は周期運動 (位相) を反映する 0 値となる。一方、全体的な 3 個の変数の固有値は一つが 0 で残りの二つが負となる。つまり、全ての incoherent 状態は  $N-2$  個の 0 固有値を持つ状態であり、GCGL の場合では eq.(4.2) で導入した  $N-2$  次元の超平面に沿った全ての方向が中立安定になっているということを示唆している。この超平面 eq.(4.2) をここでは **neutral space** と呼ぶことにしよう。実際 GCGL の incoherent 状態がこのような構造を持っていることはある inco-

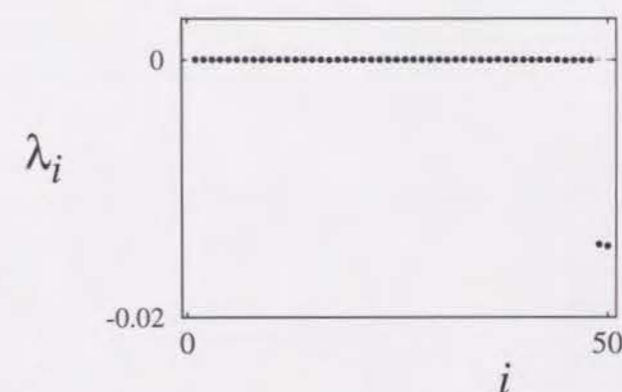


図 4.1: ある incoherent 状態が実現されているときの Lyapunov スペクトラム ( $c_1 = -2.0$ ,  $c_2 = 3.0$ ,  $K = 0.43$ )。  $N-2$  個の 0-指数が並ぶ。

herent 状態について数値計算した Lyapunov スペクトラム (図 4.1) が  $N$  によらず  $N-2$  個の 0-Lyapunov 指数を持つことから示唆される。Neutral space の特徴は、ここに含まれる全ての点に対応する初期条件のもとで最終状態と成り得る (広義の) 固定点と捉えられ、neutral space はその集合として定義されること、しかしながらこの超平面内では各固定点は中立安定な関係にあるので、ほんの少しの揺らぎが加わっても異なる incoherent 状態へと遷移することがあげられる。GCGL の incoherent 状態全体についての解析は行なわれていないので、どのような条件下で各 incoherent 状態が不安定化するのかについては議論することができない。しかしながら、数値実験上での観察からは、不安定でないパラメータ領域が最も狭いのは一様分布で最も広いのは対称的な 2 クラスタ状態



であると推測できる。一様分布については次節で詳しく述べるので、ここでは対称的2クラスター状態の安定条件を求めておくことにしよう。

対称的2クラスター状態を構成要素数比が1:1の2クラスター状態で incoherent 状態でもあるものと定義しよう。2クラスター状態が既に実現しているとする各クラスターの発展方程式は

$$\dot{W}_{(1)} = W_{(1)} - (1 + ic_2)|W_{(1)}|^2 W_{(1)} + \frac{K}{2}(1 + ic_1)(W_{(2)} - W_{(1)}) \quad (4.4)$$

$$\dot{W}_{(2)} = W_{(2)} - (1 + ic_2)|W_{(2)}|^2 W_{(2)} + \frac{K}{2}(1 + ic_1)(W_{(1)} - W_{(2)}) \quad (4.5)$$

と書けるので、ここから得られる incoherent 解は

$$W_{(1)} = \sqrt{1 - K} e^{-i(Kc_1 + (1-K)c_2)t} \quad (4.6)$$

$$W_{(2)} = -\sqrt{1 - K} e^{-i(Kc_1 + (1-K)c_2)t} \quad (4.7)$$

で与えられる。この2クラスターは当然ながら中立安定なので、揺らぎによって簡単にばらけてしまい、前節で扱ったクラスターのようなクラスターとしての安定性はない(中立安定)ことに注意してほしい。つまり、前節と同様にクラスターの近くに一つの振動子  $W_{ex}$  を置いたとする。 $W_{ex}$  を微小変数  $w_{ex}$  を使って  $W_{(1)}(1 + w_{ex})$  (対称性により  $W_{(2)}(1 + w_{ex})$  としても同じである) と書くと、最低次では

$$\dot{w}_{ex} = -(1 - K)(1 + ic_2)(w_{ex} + w_{ex}^*) \quad (4.8)$$

となる。この結果、固有値は  $0, -2(1 - K)$  となって、 $K < 1$  ならば対称的2クラスター状態はクラスターとして中立安定であることがわかる。そこでここでは2クラスター状態が実現されたもとの incoherent 状態の安定性について解析することにする。そのためには eq.(4.7) で得られた解の軌道安定性を調べればよい。

$$W_{(1)} = \sqrt{1 - K} e^{-i(Kc_1 + (1-K)c_2)t} (1 + w_{(1)}) \quad (4.9)$$

$$W_{(2)} = -\sqrt{1 - K} e^{-i(Kc_1 + (1-K)c_2)t} (1 + w_{(2)}) \quad (4.10)$$

として微小変数  $w_{(1)}, w_{(2)}$  を導入し、eq.(4.5) に代入すると、線形方程式

$$\dot{w}_{(1)} = -(1 - K)(1 + ic_2)(w_{(1)} + w_{(1)}^*) - \frac{K}{2}(1 + ic_1)(w_{(2)} - w_{(1)}) \quad (4.11)$$

$$\dot{w}_{(2)} = -(1 - K)(1 + ic_2)(w_{(2)} + w_{(2)}^*) - \frac{K}{2}(1 + ic_1)(w_{(1)} - w_{(2)}) \quad (4.12)$$

が得られる。 $w_{(1)} = w_{(2)} = 0$  の固有値  $\lambda$  は  $\lambda = 0, -2(1 - K)$ 、および

$$\lambda^2 - 2(1 - 2K)\lambda + K^2(1 + c_1^2) - 2K(1 - K)(1 + c_1c_2) = 0 \quad (4.13)$$

の二つの解となる。一つの固有値が0になるのは対称的2クラスター状態を保ったまま全体を位相方向にずらす自由度に関係したものであるため、今注目している対称的2クラスター状態の解の安定性とは無関係である。つまり求める軌道安定な条件は eq.(4.13) から

$$K < \frac{1}{2} \quad (4.14)$$

$$K(1 + c_1^2) - 2(1 - K)(1 + c_1c_2) > 0 \quad (4.15)$$

として得られる。この論文では主に  $1 + c_1c_2 < 0$  の場合について注目しているため  $K < 1$  なら eq.(4.15) 第二不等式はいつも満たされていることになり、incoherent 状態としての対称的2クラスター状態が不安定でない条件は eq.(4.14) というわかりやすい形で与えられると思ってよい。

## 4.2 一様分布

既に述べたように一様分布は incoherent 状態の一つであるので、前節で述べた一般的な事柄は当然この状態についても成り立つ。特に一様分布に注目する理由は、各要素に常にノイズが加わったり、要素の性質にわずかなバラツキがあったり、振動子がここで採用しているような対称性の高いものではない場合など、どちらかといえば現実的な状況に近付いたときに、一様分布を除く incoherent 状態が安定(中立安定も含む)であることはほとんどないと見なせるからである。(5章4.1節および[22]参照)

一様分布は eq.(4.1) の下で任意位相  $\phi_j$  に

$$\phi_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (4.16)$$

という条件を付け加えたものとして与えられる。これは  $N \rightarrow \infty$  では複素平面上の半径  $\sqrt{1 - K}$  の円上に連続的に一様分布した状態(図4.2参照)となるので、この状態の安定性などを  $N \rightarrow \infty$  について議論するには、まず複素平面上での分布関数の発展方程式を導く必要がある。今扱っている系(GCGL)は要素数  $N$  は保存されているので、連続分布と考えられるような大きな  $N$  の極限では連続の方程式を満たさなければならない。これを糸口として分布関数の方程式を導き、それを使って一様分布解について理解することにしよう。

まず、複素平面  $W$  を  $W = re^{i\theta}$  によって径と角度で捉える。複素平面上の分布関数を  $\rho(r, \theta)$  とすると、連続の方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho\dot{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r\rho\dot{\theta}) = 0 \quad (4.17)$$

と書ける。各振動子の運動を決める GCGL の方程式を複素平面上のベクトル場の式と捉えれば

$$\begin{aligned} \dot{W} &= W - (1 + ic_2)|W|^2 W + K(1 + ic_1)(\bar{W} - W) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} &= (1 - K)r - r^3 + KR(\cos(\Theta - \theta) - c_1 \sin(\Theta - \theta)) \\ \dot{\theta} &= -Kc_1 - c_2r^2 + \frac{KR}{r}(c_1 \cos(\Theta - \theta) + \sin(\Theta - \theta)) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$



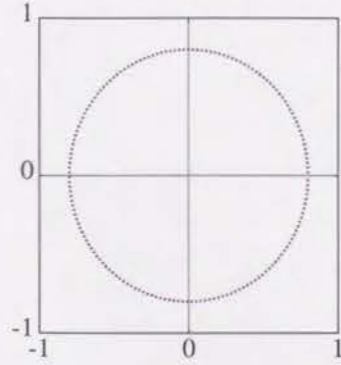


図 4.2: 一様分布をスナップショットによってみた図。複素平面上にある時刻における各要素の状態を一度に表示したもの。

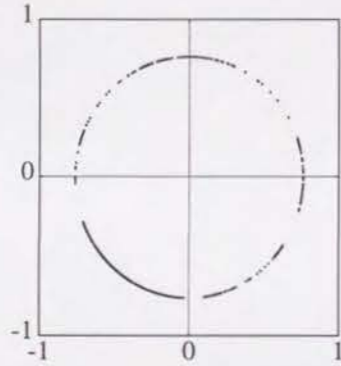


図 4.3: ある incoherent 状態。一様分布と比べて高調波成分が大きく成長している例。この incoherent 状態は一様分布が不安定なパラメータ条件下で得たものである。

が得られる。ただしここでは式を単純化するために  $\bar{W} = Re^{i\Theta}$  として便宜的に  $R, \Theta$  を導入したが、 $\bar{W} = \sum_{j=1}^N W_j/N$  であることからすぐに

$$Re^{i\Theta} = \int \int r e^{i\theta} \rho(r, \theta) r dr d\theta \quad (4.19)$$

が得られるので、eq.(4.18) を  $r, \theta$  のみの式に書き直すことは容易である。このようにして eq.(4.17) と eq.(4.18) より GCGL に従う要素が作る分布の発展方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{(1-K)r - r^3 + KR(\cos(\Theta - \theta) - c_1 \sin(\Theta - \theta))\} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \{-Kc_1 - c_2 r^2 + \frac{KR}{r}(c_1 \cos(\Theta - \theta) + \sin(\Theta - \theta))\} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + 2(1-K-2r^2)\rho = 0 \quad (4.20)$$

として導出される。

eq.(4.20) は要素数が十分多い GCGL が見せる様々な分布状態全てに対応する一般性の高い形式になっているので、ここでの目的である一様分布に焦点を絞れるような形式にせばめる必要がある。eq.(4.1) と eq.(4.16) より一様分布は

$$\rho(r, \theta) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r - \sqrt{1-K}) \quad (4.21)$$

と書けるが、これは  $r = \sqrt{1-K}$  という円上に一次元的分布を一様な密度で形成しているということを表している。同じように考えて、一様分布から少しずれた分布は

$$\rho(r, \theta) = \frac{1}{2\pi r} (1 + f(\theta)) \delta(r - \sqrt{1-K}(1 + g(\theta))) \quad (4.22)$$

のように位相にのみ依存する微小関数  $f(\theta), g(\theta)$  を使って書くことができるであろう。これは、一様分布から少しずれた状態も一様分布がみせる円形の分布と同様に一次元的分布を保っていて、その形状が

$$r = \sqrt{1-K}(1 + g(\theta)) \quad (4.23)$$

という位相についての一価関数となることを仮定している。分布がこのような形状を保っていれば、この一次元ループ上での分布密度の一様分布からのずれは位相  $\theta$  の関数として記述できるので、eq.(4.22) のように置くことが可能になる。

eq.(4.22) を導入したことにより、 $g(\theta), f(\theta)$  の発展方程式を導くことが目的を達することになった。まず、eq.(4.18) と eq.(4.23) により

$$\begin{aligned} \dot{g}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{1-K}} \dot{r} \\ &= -(1-K)(2g + 3g^2 + g^3) + \frac{KR}{\sqrt{1-K}} \{\cos(\Theta - \theta) - c_1 \sin(\Theta - \theta)\} \end{aligned}$$

であることから

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= \dot{g} - \dot{\theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ &= -(1-K)(2g + 3g^2 + g^3) + \{Kc_1 + (1-K)c_2(1+g)^2\} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{KR}{\sqrt{1-K}} \{\cos(\Theta - \theta) - c_1 \sin(\Theta - \theta)\} \\ &\quad - \frac{1}{1+g} \frac{KR}{\sqrt{1-K}} \{c_1 \cos(\Theta - \theta) + \sin(\Theta - \theta)\} \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (4.24)$$

が導ける。さらに eq.(4.20) に eq.(4.22) を代入して  $r$  に関して  $r = \sqrt{1-K}(1 + g(\theta))$  の周り  $\epsilon$  の幅で積分し、eq.(4.24) を使って  $f(\theta)$  の時間発展の方程式に帰着させると

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{Kc_1 + (1-K)c_2(1+g)^2\} \frac{\partial f}{\partial \theta} + 2c_2(1-K)(1+f)(1+g) \frac{\partial g}{\partial \theta}$$



$$-\frac{1}{1+g}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1+f}{1+g}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\frac{KR}{\sqrt{1-K}}(c_1 \cos(\Theta - \theta) + \sin(\Theta - \theta)) + \frac{1+f}{1+g}\frac{KR}{\sqrt{1-K}}\{\cos(\Theta - \theta) - c_1 \sin(\Theta - \theta)\} \quad (4.25)$$

が得られる。また、オーダーパラメータの条件 eq.(4.19) は  $g(\theta)$ ,  $f(\theta)$  を使うと

$$Re^{i\Theta} = \frac{\sqrt{1-K}}{2\pi} \int (1+f)(1+g)e^{i\theta} d\theta \quad (4.26)$$

と書き換えられ、分布関数の拘束条件は

$$\int \int \rho(r, \theta) r dr d\theta = 1 \Leftrightarrow \int f(\theta) d\theta = 0 \quad (4.27)$$

となる。

さて一様分布を詳しく調べるための条件式が揃ったので、具体的に一様分布 ( $f(\theta) = 0, g(\theta) = 0$ ) の線形安定性を調べることにしよう。そのためには  $f(\theta)$ ,  $g(\theta)$  をフーリエ級数に展開して考えるのが良い。つまり、

$$f(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l e^{il\theta} \quad (4.28)$$

$$g(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{il\theta} \quad (4.29)$$

とすると、 $f(\theta)$ ,  $g(\theta)$  が実数関数であることより eq.(4.27) より

$$f_l = f_{-l}^*, \quad g_l = g_{-l}^* \quad (4.30)$$

が要請され、拘束条件 eq.(4.27) より

$$f_0 = 0 \quad (4.31)$$

が成り立たなければならない。この級数で展開すると eq.(4.26) は

$$Re^{i\Theta} = \sqrt{1-K}(f_{-1} + g_{-1} + \sum_{l \neq 0} f_l g_{-l-1}) \quad (4.32)$$

となるから、相互作用に関する項は

$$\begin{aligned} & \frac{KR}{\sqrt{1-K}}\{\cos(\Theta - \theta) - c_1 \sin(\Theta - \theta)\} \\ &= -i\left[\frac{KR}{\sqrt{1-K}}\{c_1 \cos(\Theta - \theta) + \sin(\Theta - \theta)\}\right] \\ &= \frac{K}{2}\{(1-ic_1)(f_1 + g_1 + \sum_{l \neq 0} f_l g_{-l+1})e^{i\theta} \\ & \quad + (1+ic_1)(f_{-1} + g_{-1} + \sum_{l \neq 0} f_l g_{-l-1})e^{-i\theta}\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

と書き換えられる。Eq.(4.24), eq.(4.25) から  $f_l, g_l$  の方程式を線形のオーダーに限りて導くと、基本波 ( $l = \pm 1$ ) に対しては

$$\dot{g}_1 = [-2(1-K) + i\{Kc_1 + (1-K)c_2\} + \frac{K}{2}(1-ic_1)]g_1 + \frac{K}{2}(1-ic_1)f_1 \quad (4.34)$$

$$\dot{f}_1 = \{2ic_2(1-K) + \frac{K}{2}(1-ic_1)\}g_1 + [i\{Kc_1 + (1-K)c_2\} + \frac{K}{2}(1-ic_1)]f_1 \quad (4.35)$$

および高調波 ( $l \neq \pm 1$ ) に対しては

$$\dot{g}_l = [-2(1-K) + il\{Kc_1 + (1-K)c_2\}]g_l \quad (4.36)$$

$$\dot{f}_l = 2ilc_2(1-K)g_l + il\{Kc_1 + (1-K)c_2\}f_l \quad (4.37)$$

となり、基本波と高調波では一様分布の安定性に与える影響が異なっていることがわかる。これは eq.(4.33) に見られるように、GCGL の大域結合の効果は主に基本波を通して働く構造になっていることによる。 $l \neq \pm 1$  の場合は eq.(4.34) から  $g_l = 0$  は ( $K < 1$  ではだが) 必ず漸近安定であり、一方 eq.(4.35) より  $f_l = 0$  は必ず中立安定であることがすぐわかるが、これは既に述べた incoherent 状態が  $N-2$  個の中立安定な方向を持つことと対応している。基本波 ( $l = \pm 1$ ) については構造は異なっていて、一般には中立安定にはならず、漸近安定な条件

$$K(2K-1)c_1^2 + 4(K-1)(2K-1)c_1c_2 - K(K-1)c_2^2 + (3K-2)^2 < 0 \quad (4.38)$$

が存在する。以上の考察からわかることは、一様分布は基本波の揺らぎに対しては安定であるが高調波成分をもつ揺らぎに対しては中立であるので、容易に他の incoherent 状態に遷移してしまうということである。条件 eq.(4.38) が満たされなくなると、他の incoherent 状態が不安定でなくても一様分布は不安定化してしまうが、このことは一様分布の basin に在った初期条件が、一様分布の不安定化に伴って他の incoherent 状態を最終状態とするようになることを意味しているのではない。Eq.(4.34), eq.(4.35) からわかるように一様分布の不安定化は  $f_1 = 0$  と  $g_1 = 0$  を個別にではなく同時に組み合わせて不安定化し、この不安定化に伴って incoherent 状態ではなく分布が作る形状が円形からずれた別の状態に分岐することになる。これについては次節で述べることにする。

既に述べたように、数値計算によれば一様分布は incoherent 状態の中で安定であるパラメータ領域が最も狭い。例えば前節で導いた対称的 2 クラスター状態の安定領域 eq.(4.14) は一様分布の安定領域 eq.(4.38) を完全に内包する。また初期条件を選べば一様分布が不安定な領域でも図 4.3 のような高調波がたった incoherent 状態を得ることができる。

### 4.3 一次元的連続分布が見せる運動の複雑化

一様分布が不安定化すると、それに伴って incoherent 状態とは異なる新たな一次元的連続分布が見られるようになる。この節では一様分布の不安定化から始まる一連の一次元的連続分布の分岐過程



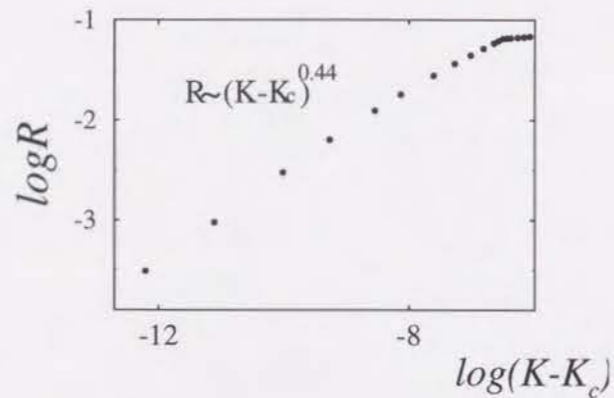


図 4.4: Eq.(3.12) から  $K_c = 0.412305$  として  $R$  の成長と  $K$  の関係を調べた結果。

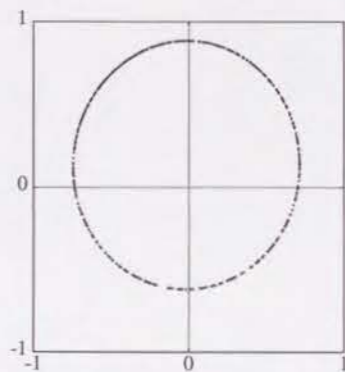


図 4.5: 一様分布が不安定化した後に得られる分布のスナップショット。分布の中心が複素平面の原点からずれ、形状が歪んでいることがわかる。

と分布が見せる運動の複雑化について、数値計算の結果を使って説明しよう。なお、この節ではパラメータを  $c_1 = -2.0$ ,  $c_2 = 3.0$  に固定して、結合の強さ  $K$  を一様分布の領域から徐々に大きくしていくことにする。ここでは複素平面上にある分布全体が見せる集団的振舞いに関心があるので、その振舞いの変化を分布全体によって定義されるオーダーパラメータ、例えば  $\overline{W}$ 、を観察し、その変化を通して捉えることとする。

まず、後ほどのために 3 種類のオーダーパラメータ  $R, R\Omega, \dot{R}$  を

$$Re^{i\theta} \equiv \overline{W}, \quad \Omega = \dot{\theta} \quad (4.39)$$

により定義する。一様分布が安定な場合は  $R = R\Omega = \dot{R} = 0$  が得られる。ただし実際はこの場合に

限り  $\theta$  は定義不可能である。

一様分布は eq.(4.38) によると  $K \sim 0.4123 \equiv K_u$  で不安定化し、その後は

$$R = \text{const.}, \quad R\Omega = \text{const.}, \quad \dot{R} = 0 \quad (4.40)$$

という状態に分岐する。 $R$  の値は  $K \rightarrow K_u$  では 0 であるがそこから離れるとともに図 4.4 に見られるような関係で成長し、それに対応して複素平面上の分布が作る形状が円形からひずんでいくのが見られる (図 4.5)。分布全体は複素平面上を  $\Omega$  で回転しているが、この運動は分布自体が時間変化していることを意味するのではない。複素平面上を  $\Omega$  でまわる回転系で分布を見れば、一旦最終状態に達した後は分布の形状は時間依存性を持たない固定状態にあることが観察できる。分布全体が回転する角速度  $\Omega$  は 2.53 程度で、一様分布の状態が不安定化する直前に各振動子が円上をまわっていた角速度 2.59 と非常に近い値であることが分かる。

分布自体が時間依存性を持った運動を行なう最終状態が実現されるには、 $K$  の値が 0.4138 にまで達する (この値を  $K_p$  と定義する) 必要がある。この変化に伴って全てのオーダーパラメータは周期性を持つようになり、ここで生じたオーダーパラメータの変化の角振動数は 2.56 というすでにこれまでに得ている振動数と非常に近い値になる。オーダーパラメータが周期運動をはじめののに対応して分布が作る形状自体が振動するのが観察され、分布全体が統括されつつ集団での運動も行なうことが可能であるとわかる。この振動の振幅 (オーダーパラメータに表れた周期運動の振幅と同等) の成長は数値実験によれば図 4.6 のように (振幅)  $\sim |K - K_p|^{0.5}$  の関係で 0 から徐々に大きくなるので、オーダーパラメータが定常になる状態が不安定になる際には Hopf 分岐が起きているらしい。ここで

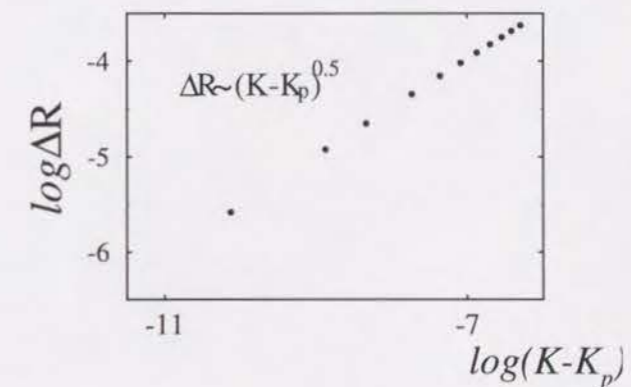


図 4.6:  $K_p = 0.41376$  として  $R$  の振幅と  $K$  の関係を調べた結果。指数の値から Hopf 分岐を起こしたことがわかる

注意したいのは、この場合の運動状態の変化を低次元力学系での分岐現象と同質と捉えてよいのかと



ということである。今の状況下では各要素は分布の中で個別性を維持していると思われるので、本質的に非常に自由度が大きい状態を扱っているはずであるが、ここで見られている全体的な運動の変化は Hopf 分岐という低次元系での変化と同じに見える。

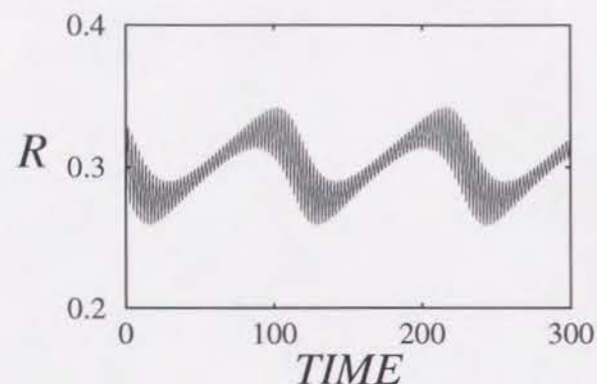


図 4.7: 分布の運動が準周期的になる場合のオーダーパラメータ  $R$  の時間変化。 $O(100)$  の非常に長い周期が生じていることがわかる。( $K = 0.416$ ,  $N = 4096$ )

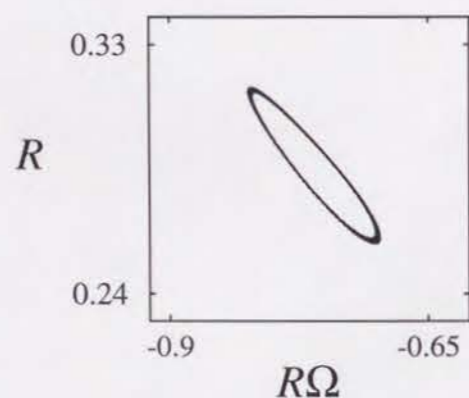


図 4.8: 図 4.7 の状態に対して、本文に記載された方法でオーダーパラメータによる空間を張ることにより得た Poincaré マップ。Poincaré 断面は  $\dot{R} = 0.01$  に設定した。

$K \sim 0.4158 \equiv K_{t2}$  に至るとこの周期運動を行なう状態から更に Hopf 分岐らしきものを経て、オーダーパラメータが準周期的な時間変化を示す状態(図 4.7)に移る。ここで生じた新しい周期はこれまでに得て来た周期とは全く異なる非常に長いもので、その角振動数は 0.06 程度と見積られる。この状態が実際に準周期であるかどうかを見るために、3つのオーダーパラメータにより張ら

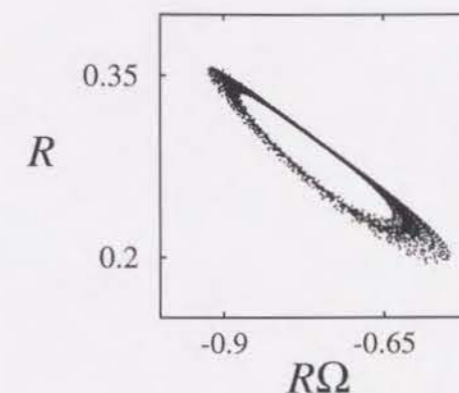


図 4.9: 図 4.8 の場合と同様にしてとった Poincaré マップ。ただし  $K = 0.4165$  である。このマップは分布の運動がもはや準周期運動ではないことを示している(次節の Lyapunov スペクトラムの結果を参照のこと)。

れた 3 次元空間に、オーダーパラメータの時間変化を軌道と見なしてアトラクターを構成してみた。もし図 4.7 に見られる時間変化が準周期であるならば 2 次元トーラスが構成されるので、適当な Poincaré マップを取ればトーラスの断面を見ることができるとは思われる。図 4.8 は  $\dot{R} = 0.01$  という断面で切断して得たマップであり、オーダーパラメータから作ったアトラクターが実際に 2 次元トーラスになっていることを示している。ここで生じた長い周期と分布が見せる運動の関係は、分布が複素平面上をゆっくりと動きまわっては戻ってくる周期に対応している。この運動では分布の形状自体も複素平面上の何処に位置するかによって変化する。 $K$  が  $K_{t2}$  から離れるとともに Poincaré マップに見られるトーラスの断面は大きくなるが、ある  $K \equiv K_c$  あたりから輪郭がぼやけはじめ(図 4.9) 単なる準周期運動とは捉えられなくなってくる。しかしながらこのぼやけ方はあまり大きいものではないので、図 4.7 のようなオーダーパラメータの時間依存性を見ているだけでは変化が起きていることはよくわからない。Lyapunov 数の解析によればこの変化に伴って分布の運動がカオスになることが示唆されるが、これまでのようにオーダーパラメータを使って起きている変化を捉えようとしても、いわゆる典型的なカオスへのルートは観察できないので、どのような仕組みでどのようなカオスが生じたのかを語ることはできない。しかし、 $K$  が 0.4164 あたりで不完全ながらモードロッキングを起こしているマップを得ることができるので、2 次元トーラスから低次元カオスへ至る典型的な様相を示していると捉えることもできる。この様に連続分布全体が見せる運動は複雑化してカオスへ至るが、この過程を通して分布は一次的形状を保ち続けることは注目に値する。

なお、ここで少し触れた Lyapunov スペクトラムに関する具体的な考察は次の節で触れることにしよう。



#### 4.4 一次元的連続分布と中立安定性

前節では、連続分布が一次元的形状を保ちつつ見せる全体運動の複雑化について概観し、定常状態 → 周期運動 → 準周期運動 → カオスというごく普通の自由度の低い力学系で見られる複雑化と同じように捉えられることを示した。しかしながら、この変化を力学的に捉えようとすると困難に直面することがわかる。つまり、ここで扱っている系は  $2N$  次元の非常に自由度が高い系であり、しかも連続分布ではクラスター状態のように要素同士の引き込みによる実質的自由度の低下の機構もないと考えられるので、分布の全体運動の低次元性と内在する自由度の高さとの関係が把握し難いのである。例えば、一様分布が安定な場合については、第1節で incoherent 状態について解説した事柄がそのまま当てはまり、位相空間中に要素の個別運動に関係ある  $N - 3$  次元の中立安定な多様体が存在し全体的な3つの変数から生じる1つの0-固有値の方向とあわせて  $N - 2$  次元の neutral space を考えることができる。この隠れた自由度のために、一様分布は揺らぎが加わったときに簡単に状態が遷移してしまうという性質を持つ。一様分布は定常状態であったので、このような中立安定な多様体が潜在的に存在していても分布の見かけには影響を現さずに存在させることができ、全体的な自由度の低さと内在する自由度の高さを一度に理解することは可能であった。しかしながら一様分布が不安定になった後に生じる、連続分布自体が運動する状態においても同じように捉えてよいのであろうか。とくに準周期運動やカオス的運動にまで複雑化したときにも、一様分布で起きているように個別運動に対応すると捉えられる潜在的自由度と全体的な自由度というのが分離可能なかどうかは重要な問題であろう。そこでこの節では前節であげた運動する連続分布について、Lyapunov スペクトラムを調べることにより、中立安定な高次元多様体が潜在的な形で共存し得るのかどうかについて考察したい。

まずはじめに、 $K < K_u$  で初期条件を適切に選んで得られる一様分布での Lyapunov スペクトラムのうち、はじめの  $N$  個を図 4.10 に提示しておく。既に前節で述べたように、このうち  $N - 2$  個が厳密に 0 に一致しており、残りの二つは一様分布が安定なことを反映して負になっている。

$K_u < K < K_p$  では分布自体の運動は存在せず、力学的には基本波の不安定化に伴った固定点の移動(サドルノード分岐に伴う変化に似ている)が起きているだけと考えられるので、少なくとも  $K_u$  近傍では中立安定な高次元多様体に大きな影響がでているとは考えにくい。数値計算の結果(図 4.11)によるとやはり  $N - 7$  個のほとんど 0 値の Lyapunov 指数と 7 個の負の指数が存在しており、この負の指数の値は 2、2、1、2 個の同じ値の組に分かれているのがわかる。この離散的な負の指数の性質は  $N$  に依存せず、 $N$  とともに変化するのは 0-指数の個数である。これはこの状態でも、スペクトラム中の 0-指数は incoherent 状態における 0-指数と同じ意味を持つと考える根拠になる。一方で、この状態が得られるパラメータ条件で初期条件を様々にとることにより neutral space の存在を示そうとしても、積極的に示唆する結果は得られていない。もし neutral space が存在しないとすると、数値計算で得られる 0-指数はある孤立固定点への非常にゆっくりとした緩和に対応すると解釈することもできる。つまり、位相空間中に neutral space ではなくてこれとよく似た高次元の

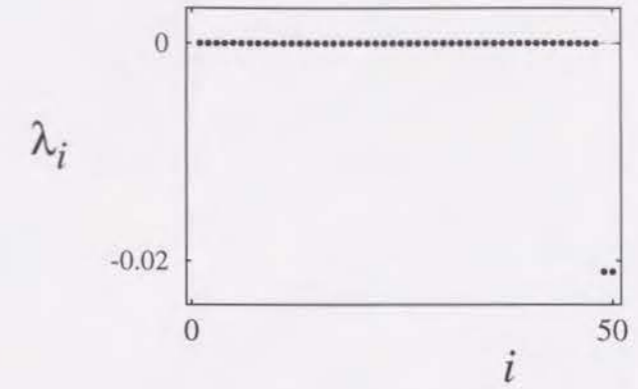


図 4.10: 一様分布が実現されているときの Lyapunov スペクトラム ( $c_1 = -2.0, c_2 = 3.0, K = 0.4$ )。  $N - 2$  個の 0-指数が並ぶ。

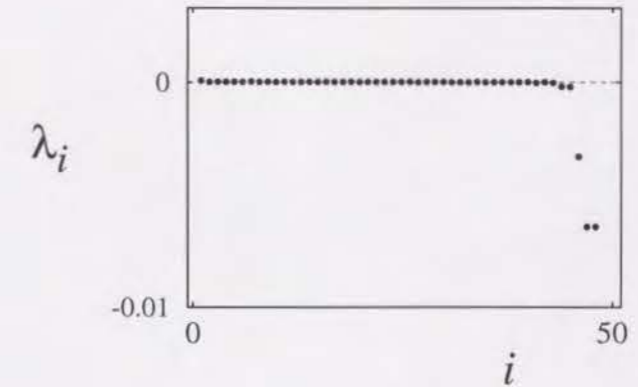


図 4.11: 一様分布が不安定化して分布の形状が少し歪み、オーダーパラメータが定常になる状態(図 4.5)のときの Lyapunov スペクトラム ( $c_1 = -2.0, c_2 = 3.0, K = 0.413$ )。  $N - 7$  個の 0-指数が確認できる。

slow manifold が存在し、最終的な分布の状態に対応する孤立固定点がこの多様体上にあると考えるのである。このような推測は以下の考察によって行われている。今の場合に、回転系にのって分布を固定させて観察すると、分布が作る楕円形(図 4.5)の上で各要素は並んでまわっていることがわかる。これは見方を変えると、complex Ginzburg-Landau 型のような対称性の高い振動子ではなく、より一般的な歪みのある振動子(例えば brusselater など)による大域結合系で、ある定常的な連続分布が実現され



ていると見なすことも可能である。もちろん、回転系に乗るためには全体の角速度  $\Omega$  を知らねばならず、これは GCGL のダイナミクスで決定されているのだから、厳密に歪みのある振動子系の場合と同じになるわけではない。歪みのある振動子系の場合は今扱っている系のようなたくさんの中立安定な incoherent 状態に相当するものは一般的には存在せず、ある分布に相当するような状態が主に選択される。今の場合もその様な状態が実現されているのではないかと推測できる。歪んだ振動子の例ではないが、例えば、GCGL の特殊な対称性 (incoherent 状態の高次の中立安定性) を相互作用項を変化させることによって消したモデルが第 5 章に導入されている。この場合の一様分布の線形安定性解析 (eq.(5.13)) によれば、 $N - 2$  個の 0- 固有値はもはや存在しなくなり、ゆっくりとした一様分布への緩和が見られる。しかし、もしこの様な状況になっていたとしても、neutral space に非常に近い構造が保持されていることには違いはない。

$K = K_p$  での状況変化の後も Lyapunov スペクトラムの特徴は変化せず、やはりほとんど 0 のスペクトラムが続くという数値的結果を得る (図 4.12)。図 4.6 によれば、 $K = K_p$  での周期運動の出現は普通の低次元系での Hopf 分岐と同じ仕組みであることが示唆されており、高次元由来の何か特に新しいことが起きていると捉える必要はないようである。Neutral space のような中立安定

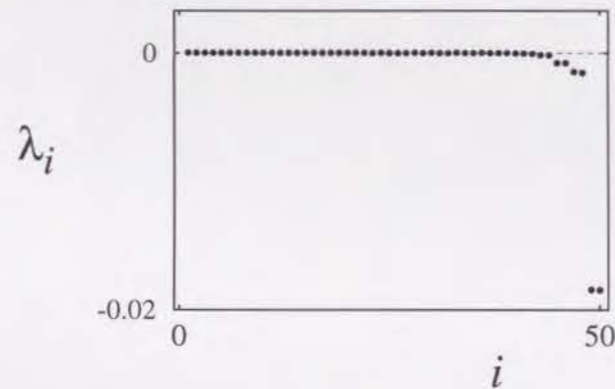


図 4.12: 分布自体が周期的運動を繰り返す状態の Lyapunov スペクトラム ( $c_1 = -2.0$ ,  $c_2 = 3.0$ ,  $K = 0.415$ )。  $N - 8$  個の 0- 指数が確認できる。

か中立安定に非常に近い高次元多様体のもとで、全体運動の分岐が独立を保ちつつ起こり得るのかについては、よく分からない部分が多い。例えば、分布の運動がある程度複雑化した場合に生じる困難さをあげてみよう。分布が周期的に振動する状態は  $K = K_{t2}$  で長い周期が生じる分岐を起こすが、この状態になって以降の分布の運動が低次元運動として捉えてよいのかどうかすらはつきりしない。 $K = K_{t2}$  から更に  $K$  を大きくして分布運動の変化を見た場合、どこにカオスへの分岐点があるか

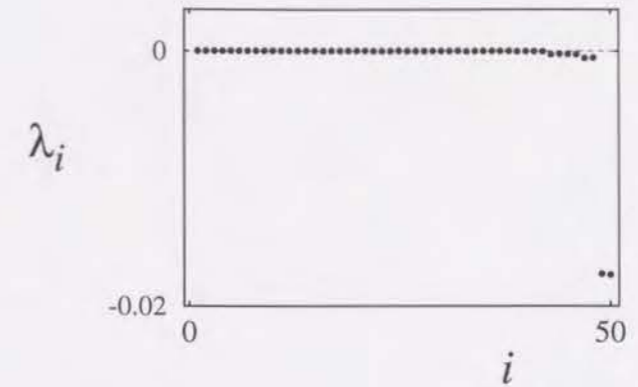


図 4.13: 分布の形状が準周期的に歪んだり、分布が複素平面上を動きまわったりするとき (オーダーパラメータの時間変化は図 4.7) の Lyapunov スペクトラム ( $c_1 = -2.0$ ,  $c_2 = 3.0$ ,  $K = 0.4158$ )。多くとも  $N - 8$  個の 0- 指数が確認できる。

も決定できない。この理由は典型的な低次元カオスへのルートを見つけることができないからというだけではない。分布の運動状態を調べるためには、オーダーパラメータによるマップ (例えば図 4.8) が  $K$  とともにどのように変化していくかに注目するわけだが、このときに得られるマップが初期分布の与え方によって異なったり、非常に長い時間に渡ってマップを取り続けると、少しずつマップが描き出す状態が遷移しているのが認められたりする。前節で、不完全なモードロッキングが見られる ( $K = 0.4164$ ) ということを経験したが、この場合も初期分布を変えればロッキングは得られなくなってしまし、いったんロッキングしたかにも長時間取り続けるとロッキングが外れてしまうのが観測される。(ゆえに不完全なロッキングという表現をしたのである。)  $K < K_{t2}$  ではこのような取り扱いの難しさは存在せず、かなり広い初期条件のもとでパラメータに応じた同じ最終状態を得ることができ、低次元系での分岐と本質的な違いはないと考えられる。一方、 $K > K_{t2}$  では連続分布に特有の中立安定性や高次元性に関連した力学的構造が分布の運動状態に関係していると思われる。 $K = K_{t2}$  直後で図 4.8 と同じパラメータで計算した Lyapunov スペクトラムは図 4.13 で、やはりほとんど 0 に等しい Lyapunov 指数が  $O(N)$  個 ( $N - 2$  個かどうかはわからない) 存在していることがわかる。得られるマップが初期条件に敏感であり、長時間で連続的に変化していくという事実は、初期条件に対応した最終的アトラクターがたくさんありしかもそれが連続的に並んだ構造が位相空間中に存在しているのではないかと考えさせる。これは一様分布が安定な領域で存在していた、無数の incoherent 状態からなる neutral space とほとんど同じ構造である。incoherent 状態の場合は neutral space に含まれる全ての点何らかの初期条件に対応する最終状態で、各点は固定点 (いった



んここに達すればもはや運動が存在しない) になっていたが、今の場合は neutral space を構成するのは2次元トーラスやモードロッキングによる周期軌道であり、各初期条件から出発した軌道は neutral space に含まれるこれらのアトラクターに達した後もアトラクター上で運動を持続する。最終状態が固定点であれば、たとえ周りの他の固定点との関係が中立であったとしても、そこに達した後は外から揺らぎを加えない限り違う状態に移ることはあり得ないが、最終状態が2次元トーラスのようなある程度の複雑さを持った運動状態である場合には、例えば数値計算の誤差や精度が実質的に揺らぎの役目を果たし得るので、徐々に状態が遷移してしまう可能性は十分ある。

パラメータ  $K$  を大きくしていくと少なくとも  $K = 0.4165$  までには図 4.9 に見られるように準周期運動とは異なる状態を得るようになる。このときの Lyapunov スペクトラムは 図 4.14 のよう

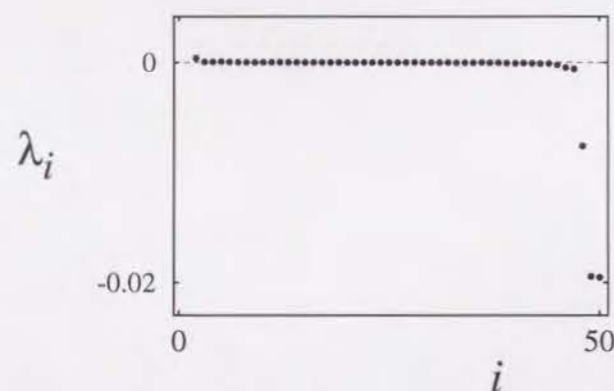


図 4.14: オーダーパラメータからのマップが図 4.9) のように広がってしまっ、分布の運動が準周期運動から複雑化したときの Lyapunov スペクトラム ( $c_1 = -2.0$ ,  $c_2 = 3.0$ ,  $K = 0.4165$ )。少なくとも 1 個の正の指数と  $N$  に比例して個数の増える 0-指数が存在する。

になり、ほとんど 0 に等しい Lyapunov 指数がたくさん含まれている特徴はこれまでと同じであるが、最大 Lyapunov 数がそれ以外とは明らかに異なる正の値になっていることがわかる。数値計算は有限の  $N$  でしかできないが、ここで考察したいのは  $N \rightarrow \infty$  の極限で作られる連続分布の運動であるから、できるだけ  $N$  を大きくして調べることが望ましい。ここでは分布の運動がカオスになっているかどうかが一番の関心があるので、 $N \rightarrow \infty$  で正の値をとる Lyapunov 指数がいくつあるのか - 有限個なのか  $O(N)$  個なのかあるいは正値をとるものは一つもないのか - に注目する。同じパラメータを使って  $N = 4096$  の系で最大 Lyapunov 指数から 5 番目に大きい Lyapunov 指数まで計算した結果を図 4.15 に示す。明らかに 0 とは異なる正値をとる Lyapunov 指数はこの大きな要素数の系でも存在し、その個数は 1 つであるようだ。個数が 1 つという結果は非常に雄弁に状況を物語って

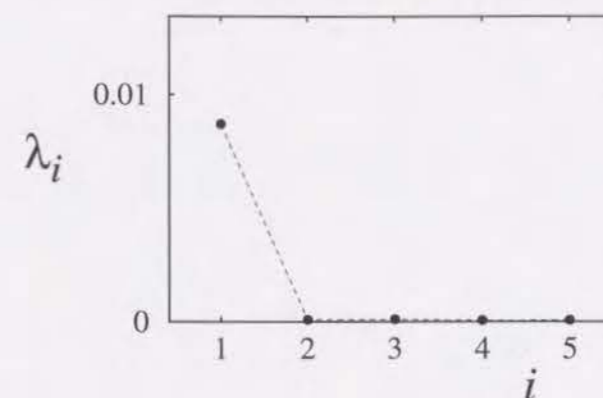


図 4.15: 図 ( 4.14 ) と同じパラメータ条件下で  $N = 4096$  とし、はじめから 5 番目までの Lyapunov 指数を計算した結果。はじめの一つが他の指数とは異なる正の値を持つことが明らかに現われている。

いる。第一に  $K = K_c$  で起きている変化は低次元カオスの発生であること、第二に、スペクトラムの中の 1 つだけが正になり、それ以外の  $O(N)$  個のほとんど 0 値のスペクトラムには変化が及ばないことから、起きている変化は中立安定な方向とはあまり関係がないことがあげられる。この結果として分布全体による運動に関係した変化が起きていることがわかる。この場合も、同じパラメータ値の下でも、初期条件の与え方によってたどり着くアトラクターが異なるらしい。オーダーパラメータによるマップの見かけ (例えばほやけた部分の広がり方など) が異なったものになることが多く、それに対応して最大 Lyapunov 数も異なった数値が得られる。このように連続分布が行なう運動がカオスになった場合にも、位相空間中に高次元の中立安定な多様体である neutral space が存在し、連続的に中立安定な関係で連なる無数の (カオスの) アトラクターを含んでいる。最大 Lyapunov 数の値が収束しているかどうかははっきりしないが、これは先程述べたように揺らぎによって連続的に連なるアトラクター間を動いていくからであると推測できる。とくに neutral space の構成要素がカオス的なアトラクターになると、カオスの軌道不安定性が 2 次元トーラスなどの場合よりも簡単に揺らぎを増幅し得るので、neutral space の中をより速い速度で動きまわることが予想される。オーダーパラメータによるマップ (図 4.9) から、低次元カオスである証拠として、いわゆるよく知られたカオスへの筋道を探そうとしても見つけ出せない。この理由は、このマップ自体がたくさん少しずつ異なるアトラクターからの影響を受けたものであるからかも知れない。しかしながら正の Lyapunov 数が一つしか存在しないという事実は、分布全体が行なう運動が低次元カオス的な振動になるということを主張するには十分であろう。

なお、このあと更に  $K$  を大きくすると  $K \sim 0.4180$  までには上述の連続分布下での低次元カオスが



得られるが、それ以上では次の章の主題である大自由度カオスとなる。

#### 4.5 まとめと関連する研究

この章を通して連続分布が見せる分布自体の運動の複雑化を見てきたが、ここで重要なことは連続分布状態では、各要素の観点で見れば全てバラバラになって個別運動しているのであるが、分布として全体を見るとそこには低次元の秩序だった全体運動が見られるということである。分布自体の運動 - 全体運動 - は周期的な運動からはじまり、準周期運動になると系を構成する振動子には存在しない長い時間スケールが生じる。このような運動、時間スケールの実現は、個別の要素からは知ることのできないマクロレベルの集団効果というものが存在することを示しているといえよう。更に分布の全体運動はカオス的になることもあり、全体のカオス性と個別要素の非カオス性が両立し得ることがわかった。

また力学系として位相空間の面から眺めると、各要素がバラバラのままであるということから、力学的には中立安定またはごく中立安定に近い状態が実現され、neutral space のような構造を持つに至るという結果が得られた。neutral space が存在するという事は、分布が行なう運動が低次元的に見えたとしても、実はその裏には潜在的に無数のよく似た状態が隠れており、揺らぎさえあればこれらの無数の状態を移っていくことすら可能になるということを示している。このような潜在的構造は各要素がバラバラで個別に運動する状態だからこそ実現されるものであり、クラスター状態のように要素同士が引き込んで一体化する場合には、初期条件依存の多重安定性はあってもこのような隠れた高次元性は存在し得ないものである。

この章で得た全体運動は、個別運動と比較すると絶対的な強度が小さく捉えにくいものである。個体の振る舞いを見ていると、集団を形成することによって少し変化が起きたように思えるが、集団運動の発生とは捉えずにノイズ的なものが加わっているだけとして済ますこともできるかも知れない。各個体がバラバラに運動することが許されているので、そこに生じている集団効果が分かりにくいのである。

GCGL は、大域結合という理想的状況のもとで、非線形振動子という元々には乱れが存在しない要素を採用しているために、集団の全体運動は比較的分かりやすくなっているが、要素がカオス的素子であったり相互作用項に空間的效果が入ったりして全体の統一性をとることが難しい状況になると、全体運動を捉えることはより一層困難になる。しかしながら、ここで取り上げたのと同じような全体運動は他の系でも研究されており、集団運動についての議論が盛んになりつつある。例えば大域結合系では、金子により要素をカオス素子である logistic マップにしたときに、相互作用が非常に弱くて各要素がバラバラに個別運動しているような場合にも、何か非常に微小な全体的な運動が生じていて、そのために大数の法則が破られるらしいということが報告された [34]。その後この問題は、より単純なカオス素子であるテントマップを使った議論が主流になり、数値的には、ある状況下

では GCGL で得られたような準周期運動が実現されていることが既の実証されている [36]~[40]。これはマップ系での分布関数の方程式にあたる Perron-Frobenius 方程式を導いた後に分布の発展を調べることによって集団運動へと到達している議論 [38]~[40] と分布関数を使わずにマクロな量を有限系で計算してこの値の変化のありかたを用いて準周期的集団運動へと到達している場合 [36][37] の 2通りがあり、解析的な解決も模索されている [41]。また、相互作用に空間的広がりの影響を組み込んだ場合については Chaté・Manneville[35] による報告がある。この場合も確認された全体運動は準周期運動であり、各要素は個別運動を行なっている。この研究で報告されている全体運動は、構成要素数によっては相互作用の空間性がノイズ的役割をして見えなくなってしまう程微小なものである。このような空間性を取り入れた場合には GCGL の場合とは比較にならないほど構成要素数を多くしたときに、初めて全体運動の存在が確認できるようである。



## Chapter 5

### 大自由度カオス

ここまで、クラスター状態(比較的結合の強さ  $K$  が大きい領域)および連続分布(比較的  $K$  が小さい領域)の両側から、それぞれの状況で生じる運動がどのように複雑化していくかを追ってきた。これらの状態は両方とも大自由度多体系の集団運動ではあるが結果的には集団として低次元運動が実現される場合であり、集団運動としても大自由度性を無視できないような種類の運動はこれらの二つの状態の中間的領域にひろがっている。いかにしてこの様な大自由度の状態に到達するかに関しては既にそれぞれの場合について考察済みである。クラスター状態では、クラスター間の相対運動がカオス化したあとはクラスターとしての安定性と両立が難しくなり、一部のクラスターに崩壊が見られる。この結果、一部の要素はもはやクラスターを構成することができず個別のまま運動を続けることになり、大自由度カオスに至ることとなる。一方、連続分布では分布自体が行なう運動が低次元カオスになっている場合にも neutral space のような本質的に高次元の構造を抱えているのでこの高次元多様体に不安定性が生じればいっきに大自由度カオスへ至ることは容易に想像できる。大自由度カオスは、個別性と全体性の区別が徐々に無くなっている過程に相当すると捉えることもできる。連続分布では前章で述べたように全体運動が実現される一方で各要素は各々が個別運動を行っており、個別性と全体性は分離されていると見なせる。(分離されているから中立安定な高次元多様体という構造が実現されているのである。)クラスター状態では、各要素は属しているクラスターの運動と完全に同じ振る舞いをするので個別性と全体性は等価になっていると考えられる。大自由度カオスがこの中間的状态であると見なすならば、分離された個別性と全体性が関係を持ちあって最終的には等価に至るまでを見ることも可能なはずである。この章では、以上のような観点にしたがって大自由度カオスを捉え、特徴を抽出する試みを連続分布との関係から出発することにより行なうことにする。

#### 5.1 大自由度カオスの概観

大自由度カオスとは Lyapunov スペクトラムに  $O(N)$  個の正の指数が含まれるようなものをさす。構成要素数が増えるにしたがって正の Lyapunov 指数も増えるという性質は、この状態が決して低

次元系としては扱えないということを意味している。それでは具体的にどのような運動状態が実現されるのかをしてみることにしよう。ここでは連続分布で使ったパラメータ値  $c_1 = -2.0$ ,  $c_2 = 3.0$  で  $K$  を大きくして観察した。まず図 5.1 により要素が作る分布がどのような運動形態を見せるかを説明する。この図は  $K = 0.47$  で振動子数  $N$  を 1000 として GCGL を数値計算したときのスナッ

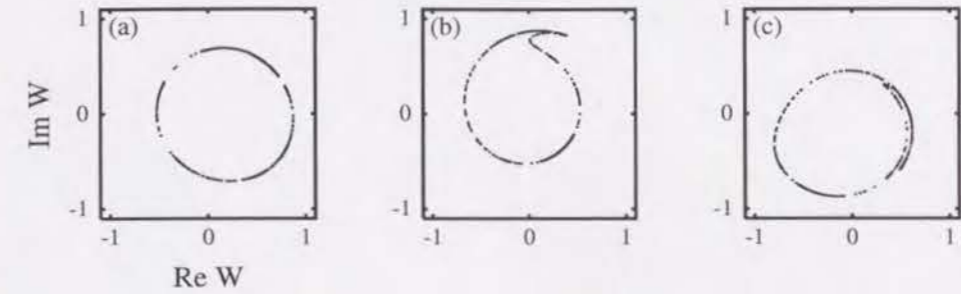


図 5.1:  $c_1 = -2.0$ ,  $c_2 = 3.0$ ,  $K = 0.47$ ,  $N = 1000$  で見た折り畳み引き延ばし型大自由度カオスの振る舞い。スナップショットを時間変化に沿って並べたもの。詳しくは本文を参照。

プショットを、分布が見せる運動が捉えやすいように適当に選んで並べたものである。この場合のスナップショットは、ある時刻における全要素の状態  $W_j$  を一枚の複素平面上に重ね描きしたもので、ある時刻における分布の状況を映している。スナップショットの時間変化は図 5.1(a) から (c) の順で見られ、(c) のあとは再び (a) の状態に戻り同じような行程を繰り返す。図 5.1(a) の状態は連続分布で見られる状態(例えば図 4.5)とよく似ている。分布はこのような 1 次元的形状(閉じた輪)で複素平面上を回転しつつ、少しずつ中心 ( $W = 0$ ) から外れていく。ある程度中心から外れると閉じた輪の一部がとびだしてきて図 5.1(b) に見られるような突き出した角のようなものが生じ、この角がある程度成長すると図 5.1(c) のように丸い周の部分に押しつけられて、最終的には角は周の部分と区別がつかなくなって (a) の状態に戻る。

このスナップショットの変化はあたかも 2 次元トーラスが崩壊したときの Poincaré マップの断面を切り方を変えて順番に見ているかのようであり、低次元カオスが起きるときの折り畳み引き延ばし構造を類推させるので折り畳み引き延ばし型大自由度カオスと呼ぶことにする。折り畳み引き延ばし運動が生じることにより前述の連続分布の低次元運動とは決定的に違う効果が引き起こされる。連続分布の場合は分布の運動はスナップショットに見られる閉じた輪の変形運動として観察されるが、いったん閉じた輪の上で隣り合った二つの要素はどの時刻をとっても必ず隣になければならない。ところが折り畳み引き延ばし運動が存在すると、引き延ばしによって隣の要素との距離が拡大し折り畳みの都度に要素の並び方に変更が加えられる。十分時間が立って幾度となく折り畳み引き延ばし運動が繰り返されれば、初期に要素がどのような並び方をしていたのかの記憶は失われてしまうであら



う。このことは分布に折り畳み引き延ばし運動が生じることを通して要素の攪拌がおきそれによって大自由度カオスが実現されていることを意味している。実際この状態で Lyapunov スペクトラムを計算すると図 5.2 のようにほとんど  $N$  個の指数が正の値をとるという結果が得られ、大自由度カオスになっていることがわかる。

このときのオーダーパラメータ  $R$  の時間変化は図 5.3 のようになり、連続分布での準周期運動の場合 (図 4.7) との類似性を感じさせるかなり規則性の高いものになる。この図に見られる  $O(10)$  の

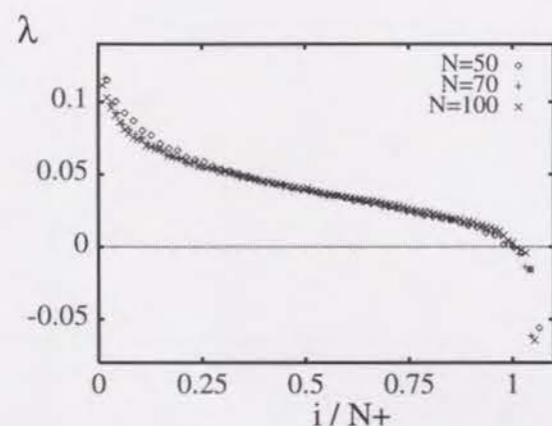


図 5.2: 図 5.1 と同じパラメータ条件で折り畳み引き延ばし型大自由度カオスの Lyapunov スペクトラムを計算した結果。3通りの構成要素数  $N = 50, 70, 100$  により、 $N$  に依存して正の指数の個数が増すかどうか注目している。 $N_+$  は正の指数の個数で  $N$  とともに増加していることがわかる。

長い (疑似) 周期が先程説明した分布の折り畳み運動の周期に対応し、短い周期は閉じた輪の微小変形に関係している。長い周期の繰り返しを見ると総じて  $R$  が大きくなる方が  $R$  の値が下がる時よりも長い、これは図 5.1(b)(c) のような折り畳み引き延ばし運動が時間的には一瞬であり、ちょうど  $R$  が (長いスケールの周期で見たときに) 極大になるあたりで (b) のような引き延ばしがおきそのあとの折り畳み (c) によって  $R$  の値が急激に下がることに対応する。ただし、折り畳み引き延ばし運動は  $R$  が急激に下がるあたりで数回繰り返しておこる。ゆっくりと  $R$  の値が上がるのは (a) のように閉じた輪が少しずつ中心からずれていくことに対応するものである。このようにオーダーパラメータの時間変化や分布全体が見せる運動という観点でこの状態を説明すると、どちらかといえば単純なかなり秩序だった状態のように捉えられ、大自由度カオスで正の Lyapunov 指数が  $O(N)$  個もあるという事実と相容れないように思われる。この矛盾ははじめに述べた全体性と個別性の分離という観点で考えると、二者の分離がなされているかあるいは非常に分離度が高いかであるということによって解釈できると予測できる。これについての詳細は後の節で触れることにする。

さて  $K$  を変えることによって大自由度カオスがどのように変わっていくかを見よう。図 5.4 は  $K$

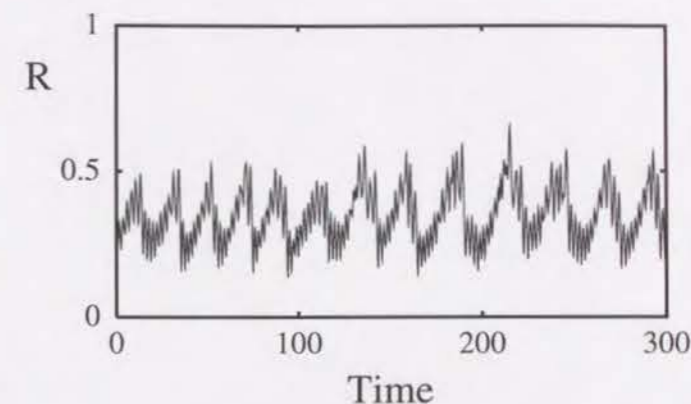


図 5.3: 図 5.1 と同じ状況下でダイナミクスをオーダーパラメータ  $R$  の時間変化から捉えた図。折り畳み引き延ばし型大自由度カオスの特徴はこの図にもよく現われている。

を変えたときの  $R$  の時間変化の様子がどのように変わるかを示したものである。ここでは図 5.3 とは異なる 3通りの値 ((a)  $K = 0.44$ , (b)  $K = 0.48$ , (c)  $K = 0.52$ ) について見た。一見してわかるのは  $K$  を大きくすることによって、(1) 長い  $O(10)$  の周期は短くなる傾向がある、(2) 乱雑さの度合いが高くなる、(3)  $K = 0.52$  の場合は他の二つに比べて  $R$  の値が大きめになり短い周期、長い周期ともはっきりしない、ということであろう。 $K = 0.52$  の場合のスナップショットは図 5.5 のようになり、折り畳み引き延ばし型大自由度カオスの場合と本質的に何らかの差があるのかわからない。全般に角は長くほとんど常に存在した状態で複素平面上を動きまわっており、(c) のように折り畳まれることは稀である。また図 5.1(a) のような閉じた輪の状態もほとんど見られない。この状態が折り畳み引き延ばし型と異なるのかはわからないが、ここでは便宜的に  $\rho$  字型大自由度カオスと呼ぶことにする。この場合も分布の形状は 1 次元的な線の構造を保っているが、更に  $K$  を大きくしていくとこのような性質も失われて段々と 2 次元的に要素が点在するようになってくる。

以下の節では、折り畳み引き延ばし型大自由度カオスにおける全体的観点と個別的観点との食い違い、および  $\rho$  字型大自由度カオスに近付き乱雑さが増すとともに変わってくる個別性と全体性の関係を捉えるために Lyapunov スペクトラムによる考察を中心に進めていくことにする。

## 5.2 連続分布から大自由度カオス

ここでは連続分布から大自由度カオスへの変化の様子を見ることにより大自由度カオス (折り畳み引き延ばし型) での位相空間の構造を考えることにする。

既に 4 章で述べたように連続分布が低次元カオスの運動を実現する場合は、位相空間には無数の



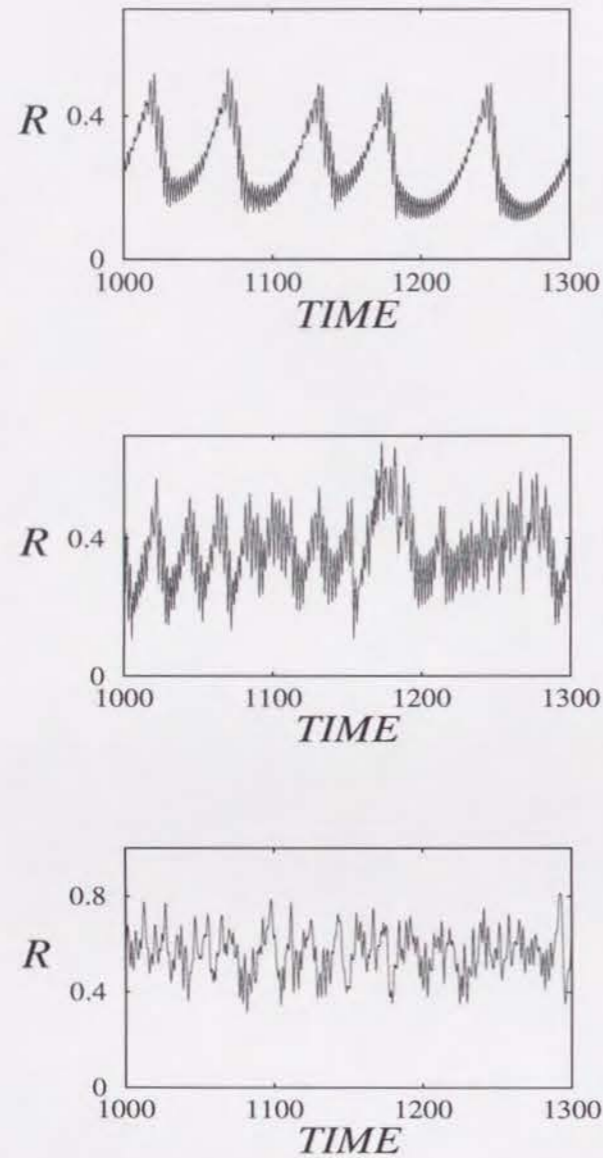


図 5.4: オーダーパラメータ  $R$  の時間変化を通してパラメータ  $K$  の変化とともに大自由度カオスが乱雑さを増して行く様を捉えた図。(a)  $K = 0.44$ 、(b)  $K = 0.48$ 、(c)  $K = 0.52$  ( $\rho$ -字型大自由度カオス)。

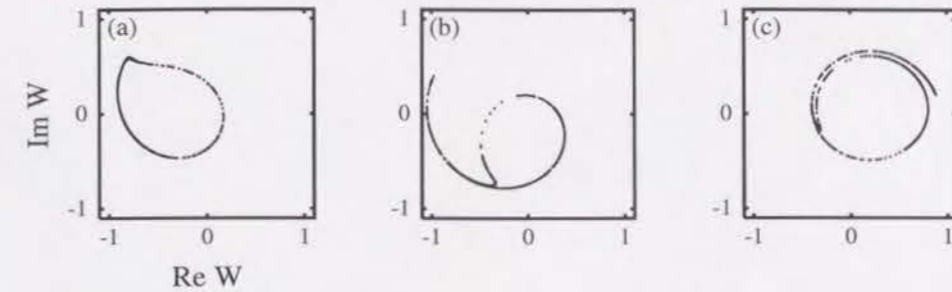


図 5.5:  $\rho$ -字型大自由度カオスの場合のスナップショットの時間変化。オーダーパラメータの時間変化は図 5.4 (c) ( $K = 0.52$ ) に対応し、かなり乱雑さが大きいことがわかる。

カオス的アトラクターから構成される neutral space が存在しており、これに対応して Lyapunov スペクトラムは有限個 (1つ) の正の指数と  $O(N)$  個の 0-指数を含んでいる (図 4.14)。この状態では当然折り畳み引き延ばし運動は存在しないが、 $K$  を 0.4180 まで大きくすると僅かながら折り畳み引き延ばし運動が起こるのが観察される。僅かというのは図 5.1(b) に見られる角の大きさのことを指しており、一回の折り畳み運動で並び変わる要素の割合と関係している。角が小さければ要素の攪拌はあまり起こらないので大自由度カオスの性質はそれほど顕著には表れないと考えられる。折り畳みの規模は小さいが運動自体は前節で上げた状態同様に繰り返し起こるので、定性的には折り畳み引き延ばし型大自由度カオスと同じ種類のものと分類できるだろう。この折り畳み運動の発生に伴って Lyapunov スペクトラムにどのような変化が起きるかを見るために、分布運動が低次元カオスであるときの結果 (図 4.15) と並べて今の場合の計算結果を示してみた (図 5.6)。ただし、ここでの折り畳み引き延ばし運動は規模が非常に小さいので、要素数が少なく分布が疎らになってしまうときちんと状況を反映できなくなる。そこで要素数が大きい系ではじめから 5 番目までの指数だけを調べてスペクトラム全体を推測することにした。これによると、この二つのパラメータで得られるスペクトラムの違いは  $K = 0.4165$  で  $O(N)$  個あった 0-Lyapunov 指数が僅かではあるが正の値になっていることである。5 番目よりあとの結果は存在しないので事実是不明だが、長時間であれば僅かな折り畳み引き延ばし運動でも十分全ての要素が攪拌されることを思えば、 $O(N)$  個の 0-指数がほとんど全て正の値に置き換わったと考えることは妥当であろう。また、当然ではあるがこの正の値がきわめて小さいのは折り畳み引き延ばし運動の規模が小さいことに対応している。一方、分布運動のカオス性を現していた最大 Lyapunov 指数は、折り畳み引き延ばし運動が起こっていてもやはり他の小さい正の指数とは明らかな差を保っており、連続分布の場合から意味的变化はほとんど生じていないと見なせる。このことは大自由度カオスになっても neutral space を構成していた低次元的アトラクターの方は変わらずに存在し続けていることを示しており、折り畳み引き延ばし運動の発現に対応する位相空



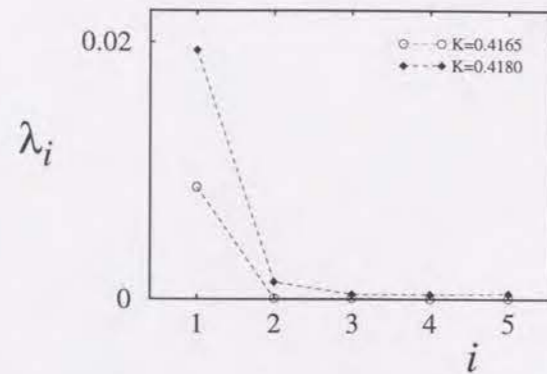


図 5.6: 折り畳み引き延ばし運動が生じてすぐのパラメータ ( $K = 0.4180$ ) での Lyapunov 指数。連続分布での低次元カオスとの差がわかるように、 $K = 0.4165$  (図 4.15) のときの結果を一緒に再掲した。 $N = 4096$  はじめから 5 番目までの指数のみ計算してあり、 $K = 0.418$  では 2 番目以後の全指数が小さい正の値になっていることが特徴である。

間の構造の変化は、neutral space がほとんど全ての中立安定な方向について同時に不安定化するという形でおこっている (neutral space の崩壊) という結論に至る。neutral space が崩壊していないときは初期条件に対応してこの高次元多様体上のいずれかのアトラクターに到達し、そのあとは揺らぎによってのみ多様体上を動くことができるのであったが、この不安定化によって、どのような初期条件を選んだとしても連続的に並んでいるアトラクターを次々と移動して行くことが可能になり、初期条件依存性が消失する。これは同時に、オーダーパラメータや分布の全体運動が (擬) 周期的に繰り返しているように見えても、実際は各時点において異なるアトラクターを反映したものであることを意味する。つまり、4 章で主題とした連続分布の場合とは異なり、オーダーパラメータの運動にも高次元性は反映されており、その時間変化は一見低次元に見えるだけであるということになる。実際、オーダーパラメータの時系列から相関次元 [47][48] を測っても低次元という結果は得られず、ここでの考察の正当さを示している。このように折り畳み引き延ばし型の大自由度カオスでは、連続分布の場合のような形態で完全に全体運動と個別運動が分離されているわけではない。しかしながら、崩壊した neutral space には構成単位としての低次元のアトラクターは変わらずに残っており、その意味では全体と個別は分離されていると言えよう。

以上の考察の結果は大自由度カオスが生じてすぐの場合についてのものなので、更に  $K$  を大きくして大自由度カオスが発展し乱雑さが増したときに個別性・全体性がどうなるかを調べるべきである。しかし、GCGL ではこのあとのパラメータ領域では incoherent 状態が優勢になり (incoherent 状態の中には  $K = 0.5$  まで不安定にならないものもあった)、このため大自由度カオスはトランジェントになってしまっただけで系統的にパラメータ  $K$  を大きくして調べていくことができない。そこで次の

節ではパラメータ  $c_1, c_2$  を変えて、もっと大自由度カオスが強い状況での考察を行なうことにする。

### 5.3 Lyapunov スペクトラムの離散部分と連続部分

前節では大自由度カオスが生じてすぐのパラメータ領域で、正值の Lyapunov スペクトラムが全体運動の見ための低次元性に関係する有限個の指数と個別運動が攪拌されることに関係する  $O(N)$  個の小さな正の値の指数からなることを見た。個別運動と関係する  $O(N)$  個の Lyapunov 指数は全て同じ種類の力学的構造 (崩壊した neutral space) と関係があり、この構造自体は構成要素数  $N$  とともに次元は高くなっても性質は左右されないものである。スペクトラム中でこの構造に関係した部分だけに着目すれば、 $N$  を大きくするとともに同じような正の値を持つ Lyapunov 指数の数が増加することになるが、 $N$  に関係した適切なスケール (例えば neutral space の次元でスケールすれば良い) をすることによって必ず  $N$  によらないスペクトラムの概形を得られるはずである。これは  $N \rightarrow \infty$  という極限では単純に  $N$  でスケールしただけのスペクトラムが収束することを意味し、特に今考えている部分はスケールしたスペクトラムの中で連続的な曲線を形作ることになる。一方で全体運動は分布自体の運動として捉えられるので、要素数を多くすればするほどはっきりと見えてくるものである。しかしながらこれまで見てきた通りある程度以上の  $N$  であれば定性的に全体運動の質は保たれると考えられるので、全体運動 (集団的振る舞いの見ための低次元性) に関係する指数の個数は要素数  $N$  が変わっても影響を受けないはずである。この全体運動に関係した Lyapunov 指数の値は  $N \rightarrow \infty$  ではある一定値に収束するはずであるが、有限の  $N$  では分布としては不完全であることから、いくばくかの  $N$  依存性が出ることは十分考えられる。しかしながら有限の  $N$  でも前述のスペクトラムの連続部分とは性質が異なるものであるから、スペクトラムの連続部分からは分離した離散部分として捉えることは不可能というわけではないであろう。

さて大自由度カオスが生じてすぐのときの位相空間の構造から考えた Lyapunov スペクトラムの性質は、もっと大自由度カオスの度合いが強くなって乱雑さが増しても成り立つのだろうか。これは言い換えれば集団的振る舞いの見かけの低次元性が個別運動に関係する構造と独立性を保って存在しているかを考えることになる。実際に十分な折り畳み引き延ばし運動があるパラメータで Lyapunov スペクトラムを測って、構成要素数  $N$  に対する依存性が先に述べたような特徴を持つ離散部分と連続部分に対応するものがあるかを見積もればよい。ただし、数値計算は有限の比較的小さい  $N$  でしかできないので、その条件下で確認することを考慮しなければならない。そのためには、(1) 離散部分に相当する Lyapunov 指数の  $N$  依存性が大きくない、(2) (すでに崩壊してはいるが) neutral space の次元が何らかの形で見積もれる、が満たされるようなパラメータを見つける必要がある。ここでは  $c_1 = -2.5, c_2 = 3.0, K = 0.445$  として Lyapunov スペクトラムを計算した。このパラメータにおける折り畳み引き延ばし運動の度合いは図 5.7 のようになり、オーダーパラメータの時間変化は図 5.8 となる。



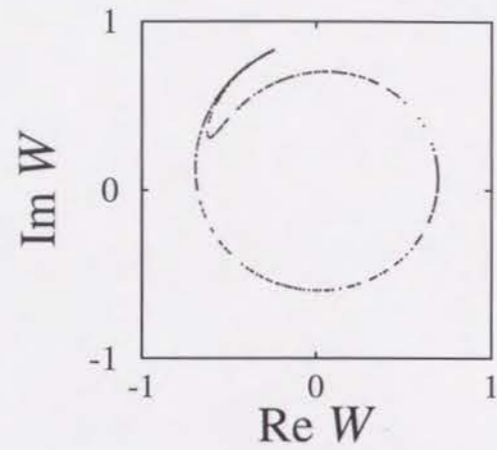


図 5.7:  $c_1 = -2.5, c_2 = 3.0, K = 0.445$  のときのある時刻でのスナップショット。

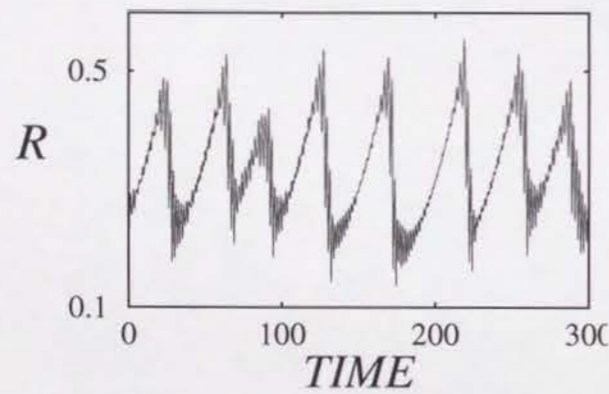


図 5.8:  $c_1 = -2.5, c_2 = 3.0, K = 0.445$  のときのオーダーパラメータ  $R$  の時間変化。

まず (1) が成り立つか調べるために  $N$  を 64 から 1024 までの 6 通りの要素数ではじめから 6 番目までの Lyapunov 指数を計算した (図 5.9)。第 3 章での連続分布の運動が低次元カオスになる場合や前節での大自由度カオスが生じてすぐのときの考察より、離散部分はスペクトラムのはじめに位置すると考えられるからである。この図によれば  $N$  が大きくなるほど各指数の値はわずかずつ小さくなる傾向が見られる。このはじめの部分のいくつかが離散部分とみなせるのかについてはこの図

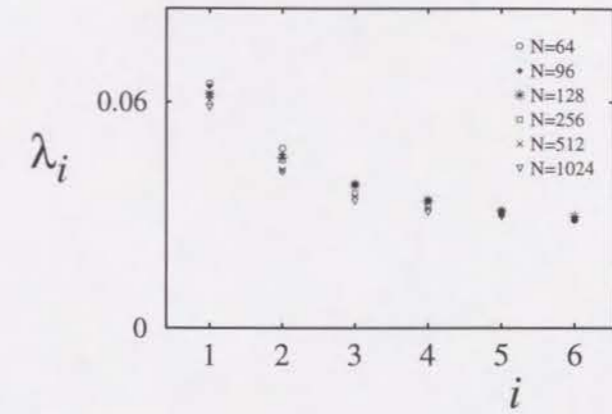


図 5.9: 6 通りの構成要素数  $N$  で計算したはじめから 6 番目までの Lyapunov 指数。

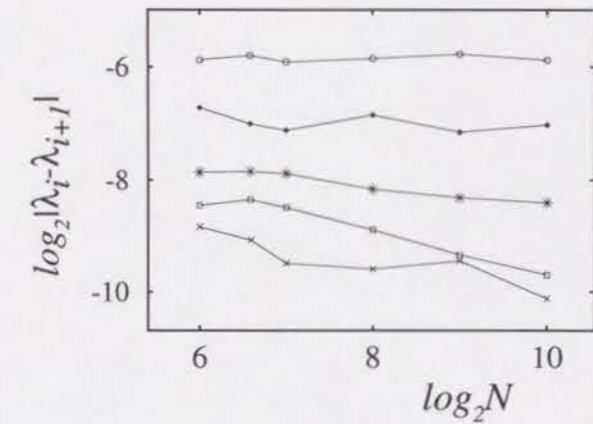


図 5.10: 図 5.9 にあげた Lyapunov 指数の離散性を見るために、 $i$  番目と  $i+1$  番目の Lyapunov 指数の差をとって、 $N$  に依存するかどうかを調べた結果。例えば  $|\lambda_1 - \lambda_2|$  には  $N$  依存性は存在しないが  $|\lambda_5 - \lambda_6|$  は  $N$  が増えるとともに差が小さくなり、離散性は保持されないことが示されている。

だけでは判断できないが、図 5.10 のように隣り合う Lyapunov 指数の差が  $N$  に依存するのを見ればわかりやすい。これによれば、 $|\lambda_1 - \lambda_2|, |\lambda_2 - \lambda_3|$  は  $N$  依存性を持たないとみなせるので  $N \rightarrow \infty$  でも差を保ち続け、離散的であることがわかる。一方  $|\lambda_4 - \lambda_5|, |\lambda_5 - \lambda_6|$  は  $N$  が大きくなるととも



に0に近づく傾向があることがわかり、この部分は連続スペクトラムを形成することがわかる。しかしながら  $|\lambda_3 - \lambda_4|$  の  $N$  依存性はこの図だけからでは判断できず、 $\lambda_4$  が離散部分に属するのか連続部分に属するのかは決定できない。このように図5.9に見られる  $N$  依存性は要素数が少ないことによる影響であることがわかる。

さて次に(2)について考える。図5.11は  $N = 64$  と  $128$  の2通りの Lyapunov スペクトラムを単純に  $N$  でスケールした結果である。この図から、すでに考察したようにスペクトラムのはじめの部分に  $N$  の違いに関係していない指数があることが伺えるが、同時に最後のいくつかの指数も  $N$  に依存していないことがわかる。neutral space に関係した部分はこの二つの離散部分には含まれた部分と考えられるので、後ろにいくつかの離散指数があるのかを見積もらなければならない。ここでは図5.11から判断して  $N - 5$  から  $N$  までの6個の指数が離散的であるとした。この理由は  $N$  を変えてス

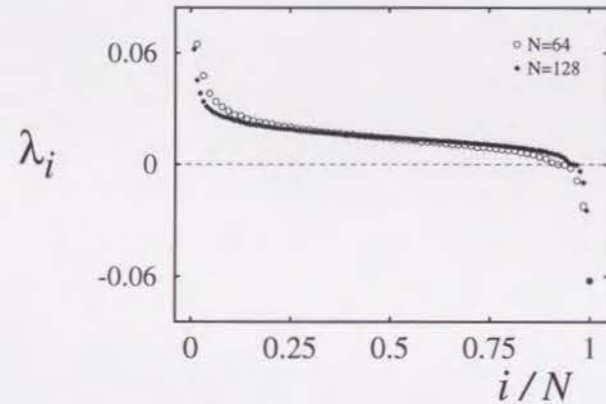


図5.11: 構成要素数  $N$  で規格化した Lyapunov スペクトラムを2通りの  $N$  について図示。  $N \rightarrow \infty$  での収束スペクトラムの形状はこの結果からだけではわからない。

ペクトラムを見たときに、ちょうど Lyapunov スペクトラムが  $\lambda = 0$  を横切るのが常に  $N - 5$  番目の指数のところになるからであり、それ以前の指数は連続的性質を持っているように見えるからである。図5.10の結果からはじめの部分にある離散指数が4個であるとすれば、(すでに崩壊している) neutral space の次元が  $N - 10$  次元と見積もれるようになった。

このように離散部分と連続部分を考慮した Lyapunov スペクトラムへのスケールの施し方は

$$x = \begin{cases} 0 & (i = 1, \dots, 4) \\ \frac{i-4}{N-10} & (i = 5, \dots, N-6) \\ 1 & (i = N-5, \dots, N) \end{cases} \quad (5.1)$$

となり、これに従って  $\lambda = \lambda(x)$  を図示すればよい。この結果は図5.12のようになり、3通りの構成要素数  $N = 64, 96, 128$  に対してほぼ等しい関数形が導き出されていることがわかる。このスケールリングが成功したことから、このパラメータ程度に大自由度カオスの度合いが強くても、大自由度カオスが生じてすぐのときと同質の構造が存在しており、集団的振る舞いの見かけの低次元性と個別運動の攪拌に関係ある構造は分離して捉えることが可能であることが示せた。ところで、図5.12に見られる

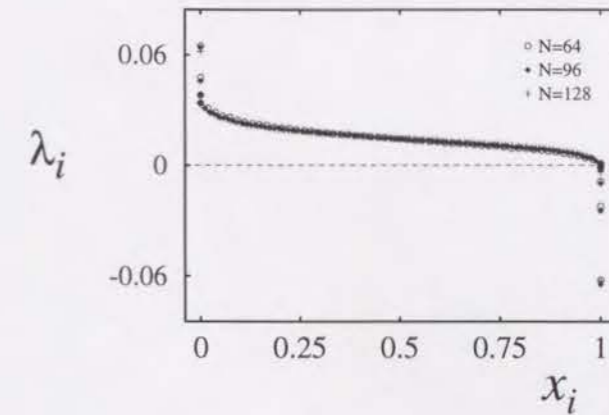


図5.12: 図5.11と同じ数値計算の結果を eq.(5.1) を使って描き直した図。ただしこの場合は3通りの  $N$  の結果を使って収束性を確認している。詳しくは本文参照のこと。

Lyapunov スペクトラムの関数形は、 $N \rightarrow \infty$  では eq.(5.1) のような特殊なスケールリングをしなくても単純に  $N$  で規格化するだけのスケールリングで得られることに注意したい。このことは GCGL で実現される大自由度カオスは構成要素数  $N$  によらず不変な性質を持ち、それを反映して Lyapunov スペクトラムはスケール可能であること、しかも離散部分と連続部分が共存した関数形になることを意味している。

このように大自由度カオスが発達した状況でも Lyapunov スペクトラムに離散部分が保持されており、位相空間の構造に関する考察も概ね正しいという結論に達する。この節で考察した大自由度カオスでは、スペクトラムの連続部分が示唆するように neutral space は崩壊している。しかし、崩壊していてもその痕跡は残っており、neutral space の残骸には連続分布の章で述べた全体運動に対応するアトラクターがそのまま含まれている。これが、離散指数の存在が意味することである。ここで扱った場合は十分に大自由度カオスとして発達しているが、neutral space の崩壊度はそれほど高くないので、このように離散指数を捉え出すことができたのであろう。neutral space の崩壊度(連続スペクトラムの値の大きさに関係する)が大きくなってアトラクターが周囲から軌道を引き付ける強



さと対等な程度になったと仮定すると、もはや全体運動に対応するアトラクターを分離して捉えることはできないから離散指数は連続スペクトラムの中に取り込まれてしまうであろう。このような過程を確認するには更に様々なパラメータ条件下での Lyapunov スペクトラムの収束形を知る必要があるが、今の方法では限られた状況でしか収束形を知ることは出来ない。そこで次の節では、より一般的な状況で収束形を近似する方法を提出する。

ところで、大自由度カオスのような構成要素のレベルまで運動が乱れた状態で Lyapunov スペクトラムに離散部分が存在するような例はこれまで報告されておらず、大自由度多体系における全体性を考えるためにも重要な結果であるといえる。例えば Kuramoto-Sivashinsky 方程式で見られる位相乱流について得られた Lyapunov スペクトラム [42] も、Navier-Stokes 方程式から導出された 2 次元と 3 次元の Gledzer's model で計算された Lyapunov スペクトラム [44] も、Coupled Map Lattice で得られる時空カオスでも [43]、系の大きさ  $N$  で規格化することにより連続スペクトラムを得るとい結果が報告されている。スペクトラムに離散部分が存在するということは、すなわち、それ以外の連続部分とは異なる、系に固有で系全体に影響を及ぼすような力学的構造が存在することを意味するので、多体系の全体性について考察を深めるにはこの離散部分の存在の有無に注目することが一つの観点となるはずである。ここでは離散性の存在を、位相空間の構造が変化していく様子を捉えることから自然に導入したが、離散性を全体運動の存在と結びつけて考えればここで起きていることは実はそれほど単純なことではない。ここでの結果は、各要素の個別運動がカオス化してしまっているにもかかわらず、その集合体が全体的に統括された振る舞いをするのが可能ということを示しているからである。全体的な統括が可能であるためにはどの程度まで個別運動が乱れることが許されるのか、その許容範囲は何との関係によって決まるのかについて考察することは重要である。この問題について考察を行なうためにも、スペクトラムの収束形を任意の状況で知ることが求められる。

## 5.4 Lyapunov スペクトラムの収束形

前節では折り畳み引き延ばし運動を見せる大自由度カオスについて、一つのパラメータ条件に限って Lyapunov スペクトラムの収束形を導き、離散部分と連続部分が共存しているという結論を得た。すでに述べたように、離散部分の有無は全体性について議論するために欠かすことのできない観点であるので、もっと様々な条件下の大自由度カオスについても収束形を知り離散部分を確認することが必要である。特に  $\rho$  字型大自由度カオスにまで乱れの度合いが至ったときに全体性と個性がどのような関係になっているかは興味深く、大自由度カオスの分類の観点からも確認すべきものと思われる。前節で用いたような方法で Lyapunov スペクトラムの収束形を知るには、 $N$  が有限（しかもかなり小さい）の系でも収束形からのずれがそれほど大きくない（収束が十分速い）ようになっていなければならない。ところが、一般にはこのような条件は満たされず、はじめの離散部分が存在するのかわからず  $N$  依存性が強くてわからない。しかしながら、どの大自由度カオスをとっても  $N$  で規格化

したスペクトラムが連続関数に収束しているような傾向があるともいえず、離散部分が含まれていることを暗示しているように思える。そこで、この節では有限の  $N$  での数値計算の結果を使って Lyapunov スペクトラムの収束形を近似する方法を提出し、この方法を実際に GCGL の大自由度カオスに用いてその結果を吟味することにする。

### 5.4.1 拡張 GCGL の導入

2 節の終りに少し触れたように折り畳み引き延ばし型の大自由度カオスは、incoherent 状態の一部が不安定化していないためにトランジエントとなってしまうことが多い。しかし、今の系のように無数の incoherent 状態が不安定性のない中立安定な解として存在するのは GCGL の対称性が非常に高いためであり、振動子の軌道の対称性が崩れるか、相互作用項に高次の項が入るか、あるいは系を構成する振動子が全て同一ではなく振動周期にほんの少しでもばらつきがあるか、など様々な状況下でほとんどの incoherent 状態は中立安定性を失う。このように incoherent 状態の中立安定性が破壊された場合には、ここで注目している大自由度カオスはトランジエントとしてではなく最終状態として限りなく続くことになる。そこでここでは、大自由度カオスの方がより一般的な状況下で実現する状態であるということと同時に、折り畳み引き延ばし型の大自由度カオスが生じてから  $\rho$  字型大自由度カオスに至るまでを系統的に調べるといった目的も鑑みて、次のように相互作用項に高次効果の入った拡張モデルを調べることにする。

$$\dot{r}_j = (1-K)r_j - r_j^3 + \frac{K\sqrt{1+c_1^2}}{N} \sum_{k=1}^N r_k \cos(\theta_j - \theta_k + \alpha) \quad (5.2)$$

$$\dot{\theta}_j = -Kc_1 - c_2 r_j^2 - \frac{K\sqrt{1+c_1^2}}{N} \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{r_j} \frac{\sin(\theta_j - \theta_k + \alpha)}{1 - a \cos(\theta_j - \theta_k + \alpha)} \quad (5.3)$$

ここで  $\tan \alpha = -c_1$  である。このモデルは GCGL を  $W_j = r_j e^{i\theta_j}$  により位相と振幅の自由度で書き直した式から位相自由度の発展方程式の相互作用項だけを eq.(5.3) のように変化させたもので、 $a = 0$  とすれば完全に GCGL と一致する。このモデルを導入するのは、大自由度カオスは GCGL と同じように存在するが無数に存在する incoherent 状態の中立安定性は成り立たないような状況を実現するためなので、 $a \rightarrow 0$  についてのみしか考察しないことにする。とくに数値計算では全て  $a = 0.05$  に固定した。さて  $a \rightarrow 0$  では eq.(5.3) の相互作用項は

$$\frac{\sin(\theta_j - \theta_k + \alpha)}{1 - a \cos(\theta_j - \theta_k + \alpha)} = \sum_{p=0}^{\infty} a^p \sin(\theta_j - \theta_k + \alpha) \cos^p(\theta_j - \theta_k + \alpha) \quad (5.4)$$

によって書き直せるので、 $a = 0$  の場合 (GCGL の場合) は基本波を通じての相互作用しか存在しなかったのが、 $a$  の高次の項として高調波による相互作用が実現されていることがわかる。拡張された GCGL で incoherent 状態の中立安定性がどのような変更を受けているのかを知るために第 4 章の 2



節と同様の方法で一様分布の線形安定性を調べることにする。この場合は eq.(4.17) に eq.(4.18) の代わりに

$$\dot{r} = (1-K)r - r^3 + K\sqrt{1+c_1^2} \int \int \rho(r', \theta') r'^2 \cos(\theta - \theta' + \alpha) dr' d\theta' \quad (5.5)$$

$$\dot{\theta} = -Kc_1 - c_2 r^2 - K\sqrt{1+c_1^2} \int \int \rho(r', \theta') \frac{r'^2}{r} \frac{\sin(\theta - \theta' + \alpha)}{1 - a \cos(\theta - \theta' + \alpha)} dr' d\theta' \quad (5.6)$$

を代入すると、eq.(4.34), eq.(4.35) ( $l = \pm 1$ ) に相当する線形方程式は

$$\dot{g}_l = [-2(1-K) + i\{Kc_1 + (1-K)c_2\} + \frac{K}{2}(1-ic_1)]g_l + \frac{K}{2}(1-ic_1)f_l \quad (5.7)$$

$$\dot{f}_l = \{2ic_2(1-K) + \frac{K}{2}(1-ic_1)\}g_l + [i\{Kc_1 + (1-K)c_2\} + \frac{K}{2}(1-ic_1)]f_l + \frac{K\sqrt{1+c_1^2}}{2}A_l(g_l + f_l) \quad (5.8)$$

となり、eq.(4.36), eq.(4.37) ( $l \neq \pm 1$  の場合) に対しては

$$\dot{g}_l = [-2(1-K) + il\{Kc_1 + (1-K)c_2\}]g_l \quad (5.9)$$

$$\dot{f}_l = 2ilc_2(1-K)g_l + il\{Kc_1 + (1-K)c_2\}f_l + \frac{K\sqrt{1+c_1^2}}{2}A_l(g_l + f_l) \quad (5.10)$$

と変更される。ここで、

$$A_l = \begin{cases} le^{i\alpha} \left[ \sum_{p=l-1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a}{2}\right)^p {}_p C_{\frac{p-l+1}{2}} \right\} - \sum_{p=l+1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a}{2}\right)^p {}_p C_{\frac{p-l-1}{2}} \right\} \right] & (l > 0) \\ le^{i\alpha} \left[ \sum_{p=1-l}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a}{2}\right)^p {}_p C_{\frac{p-l+1}{2}} \right\} - \sum_{p=-l-1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a}{2}\right)^p {}_p C_{\frac{p-l-1}{2}} \right\} \right] & (l < 0) \\ 0 & (l = 0) \end{cases} \quad (5.11)$$

である。これにより、 $l \neq \pm 1$  (高調波) の  $g_l = f_l = 0$  (一様分布解) の固有値は

$$\lambda = -2(1-K), \quad \frac{K\sqrt{1+c_1^2}}{2}A_l \quad (5.12)$$

と求まる。中立安定性に関連した第2固有値に注目すると、 $a \rightarrow 0$  では  $a$  の最低次のみが重要であるから

$$\frac{K\sqrt{1+c_1^2}}{2}le^{i\alpha} \left(\frac{a}{2}\right)^{l-1} \quad (5.13)$$

と見積られる。これより、 $a \neq 0$  では一様分布は一般に0-固有値を持たなくなり、任意の高調波の揺らぎに対して中立安定という特殊構造は崩れていることがわかる。一様分布が一般の  $c_1$  ( $\Leftrightarrow \alpha$ ) の下で高調波 ( $|l| > 1$ ) の揺らぎに対して安定かどうかは  $l$  の選び方によって異なるので一概

にはいえないが、例えば2倍波の揺らぎに対しては  $|c_1| > 1$  で  $a > 0$  か  $|c_1| < 1$  で  $a < 0$  ならば安定となる。なお、 $l = \pm 1$  と  $l = 0$  の線形安定性は  $a \rightarrow 0$  の状況では GCGL の場合の安定性 eq.(4.38) からほとんど変化を受けない。

次の例として incoherent 状態の一つである対称的2クラスター状態のクラスターとしての安定性を調べる。これも、GCGL では中立安定であった。今のモデルでは対称的2クラスター解は、

$$r_{(1)} = r_{(2)} = \sqrt{1-K} \quad (5.14)$$

$$\theta_{(1)} = -Kc_1 - (1-K)c_2 - aK\sqrt{1+c_1^2} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - a^2 \cos^2 \alpha} \quad (5.15)$$

$$\theta_{(2)} = \theta_{(1)} + \pi \quad (5.16)$$

で与えられる。1番目のクラスターのすぐ近くのおかれた振動子 ( $r_{ex}, \theta_{ex}$ ) は、 $r_{ex} = r_{(1)}(1 + \rho_{ex})$ ,  $\theta_{ex} = \theta_{(1)} + \phi_{ex}$  として微小変数を導入すると、最低次での発展方程式が

$$\dot{\rho}_{ex} = -2(1-K)\rho_{ex} \quad (5.17)$$

$$\dot{\phi}_{ex} = -2c_2(1-K)\rho_{ex} - \frac{K\sqrt{1+c_1^2}}{2} \frac{a}{1 - a^2 \cos^2 \alpha} \left\{ -\rho_{ex} \sin 2\alpha + \phi_{ex} \left( 2 \cos 2\alpha - \frac{a^2 \sin^2 2\alpha}{1 - a^2 \cos^2 \alpha} \right) \right\} \quad (5.18)$$

として得られ、固有値は

$$\lambda = -2(1-K), \quad -\frac{K\sqrt{1+c_1^2}}{2} \frac{a}{1 - a^2 \cos^2 \alpha} \left( 2 \cos 2\alpha - \frac{a^2 \sin^2 2\alpha}{1 - a^2 \cos^2 \alpha} \right) \quad (5.19)$$

となる。 $a \rightarrow 0$  では第2固有値は  $-aK\sqrt{1+c_1^2} \cos 2\alpha$  として良いので、 $|c_1| > 1$  かつ  $a > 0$  ならばこのクラスターの近くにおかれた要素はクラスターに取り込まれず、対称的2クラスター状態はクラスターとして不安定となる。

このように、拡張 GCGL モデルは、 $a \rightarrow 0$  では GCGL に非常に近いが incoherent 状態の多重の中立安定性という構造はもはや存在せず、大自由度カオスを調べる際に incoherent 状態の存在が邪魔になることはなくなる。以下、この節での大自由度カオスに関する数値計算は全てこのモデルを採用する。

#### 5.4.2 Lyapunov スペクトラムの漸近展開

すでに2節で折り畳み引き延ばし型の大自由度カオスについて Lyapunov スペクトラムが収束することを見た。この結果から、他のパラメータ条件でも定性的に変わらない大自由度カオスであるならば、Lyapunov スペクトラムは  $N \rightarrow \infty$  で収束形を持つと推測される。そこでここでは Lyapunov



スペクトラムが収束することを前提とした上で、有限の  $N$  で得られた数値的結果からその収束形を近似的に求めるための理論を構築することにする。

(I) 離散部分の場合

まず、図 5.12 のはじめの数個 (4 個?) に見られる離散的な Lyapunov 指数の収束値を漸近展開により近似する方法について述べる。ここで注目する離散指数は  $N$  の値によらず必ずはじめから  $i$  番目に位置し、 $N \rightarrow \infty$  での収束値が  $\lambda(i)$  になると仮定する。このような条件が満たされていれば、ある有限の  $N$  で得る指数の値を  $\lambda(i, N)$  とおくと  $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(i, N) = \lambda(i)$  となるので、

$$\lambda(i, N) = \lambda(i) + \frac{f_1(i)}{N} + \frac{f_2(i)}{N^2} + \frac{f_3(i)}{N^3} + \dots \quad (5.20)$$

のように  $N$  でべき展開すれば収束級数をなすはずである。この級数の展開係数  $f_k(i)$  を決定する方法を考えよう。まず構成要素  $N$  が異なる二つの系で得られた Lyapunov 指数の値から

$$\Delta_\alpha(i, N) \equiv \frac{\lambda(i, N - \alpha) - \lambda(i, N)}{\alpha} \quad (5.21)$$

により  $i$  番目の Lyapunov 指数の差を定義すると、eq.(5.20) より

$$\begin{aligned} \alpha \Delta_\alpha(i, N) &= \left\{ \lambda(i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(i)}{(N - \alpha)^k} \right\} - \left\{ \lambda(i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(i)}{N^k} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(i)}{N^k} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)^{-k} - 1 \right\} \\ &= \alpha \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{N^l} \sum_{k=1}^{l-1} \alpha^{l-k-1} C_{l-k} f_k(i) \\ &= \alpha \left\{ \frac{f_1(i)}{N^2} + \frac{2f_2(i) + \alpha f_1(i)}{N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \right\} \\ \Leftrightarrow \Delta_\alpha(i, N) &= \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{N^l} \sum_{k=1}^{l-1} \alpha^{l-k-1} C_{l-k} f_k(i) \end{aligned} \quad (5.22)$$

という  $\Delta$  と  $f_k(i)$  の関係が得られる。ここからすぐに

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \Delta_\alpha(i, N) = f_1(i) \quad (5.23)$$

が導かれて展開の 1 次の係数が決定できる。

我々が実際に手に入れることができるのは有限の  $N$  での数値計算の結果であるから、 $f_1(i)$  を厳密に知ることはできないが

$$\begin{aligned} F_1(i, N) &\equiv N^2 \Delta_\alpha(i, N) \\ &= f_1(i) + \frac{2f_2(i) + \alpha f_1(i)}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

として eq.(5.23) の関係を使って  $\lambda(i)$  の 1 次近似  $\lambda^{(1)}(i, N)$  を求めることができる。つまり

$$\lambda^{(1)}(i, N) \equiv \lambda(i, N) - \frac{F_1(i, N)}{N} \quad (5.25)$$

とすると、eq.(5.20) により

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)}(i, N) &= \lambda(i) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{N^l} \left\{ f_l(i) - \sum_{k=1}^l \alpha^{l-k} C_{l-k+1} f_k(i) \right\} \\ &= \lambda(i) - \frac{\alpha f_1(i) + f_2(i)}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

となり、 $N$  の有限性による影響が  $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$  に押えられた、より Lyapunov 指数の収束値  $\lambda(i)$  に近い値を有限の  $N$  での数値的結果から得ることができ。また、煩雑にはなるが同種の操作を  $\lambda^{(1)}(i, N)$  に加えれば原理的にはさらに近似をあげることもできる。

(II) 連続部分の場合

次に Lyapunov スペクトラムの大部分を占める連続部分の近似法について述べる。ここで扱うのは Lyapunov スペクトラムが  $N$  で規格化された形  $\lambda(x, N)$ , ( $0 < x = \frac{i}{N} < 1$ ) で表示されたときに  $N \rightarrow \infty$  で連続かつ滑らかな関数形  $\lambda(x)$  に収束するという前提の下でのべき展開による近似法である。ここでは規格化した形でのスペクトラム  $\lambda(x, N)$  と規格化していない形でのスペクトラム  $\lambda(i (= xN), N)$  の両方の見方を利用して話を進める。 $i > 1$  の一方で  $x \leq 1$  であるから、この表記法で二つの見方の混同は起きない。この二つの見方の関係は

$$\lambda(x, N) = \lambda(xN, N) \quad (5.27)$$

であるが、 $N \rightarrow \infty$  での収束形  $\lambda(x)$  が連続かつ滑らかな関数になるならば  $i = xN$  での Lyapunov 指数だけでなく、 $i = xN + j$  (ただし  $j \ll N$ ) に関しても同じ値  $\lambda(x)$  に収束するはずである。つまり

$$\lambda(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(x, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(xN, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(xN + j, N) \quad (5.28)$$

$(j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; |j| \ll N)$

が成り立つので、(I) の場合と同様に  $\lambda(xN + j, N)$  が  $\lambda(x)$  に収束するときの  $N$  依存性をもとに級数展開を施すことができ、 $\lambda(xN + j, N)$  から  $\lambda(x)$  の一次近似が求まることになる。この場合の漸近展開は

$$\lambda(xN + j, N) = \lambda(x) + \frac{f_1(j)}{N} + \frac{f_2(j)}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \quad (5.29)$$

となり、 $\lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \Delta(j, N) = f_1(j)$  を通して  $\lambda(x)$  の一次近似

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)}(xN + j, N) &\equiv \lambda(x) - \frac{F_1(j, N)}{N} \\ &= \lambda(x) - \frac{\alpha f_1(j) + f_2(j)}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \end{aligned} \quad (5.30)$$



へと至る。ところで、この近似は有限の  $N$  で収束値に近い Lyapunov スペクトラムを得るために行っていたのだが、eq.(5.30) は  $j \ll N$  を要請するため十分大きい  $N$  を必要とする。しかし有限の  $N$  で計算するかぎり、 $\lambda(xN+j, N)$  は  $j \neq 0$  では (I) での離散指数の場合のように  $O(\frac{1}{N^2})$  のよい収束を見せないことに注意しておきたい。ただし  $j = 0$  については  $j \ll N$  の要請とは無関係で (I) の場合と全く同じ状況であるから、有限の  $N$  でもよい収束が得られるはずである。これより、有限の  $N$  を用いて計算した Lyapunov スペクトラムの収束形を近似したときに、 $j = 0$  の点のみが収束が良くその周囲の部分での近似した指数値が徐々に  $j = 0$  の値に近付いているならば、その近傍はスペクトラムの連続部分をなしそこでの収束値は  $j = 0$  で得られる値で近似できることがわかる。

### 5.4.3 大自由度カオスでの Lyapunov スペクトラムの収束形

この節では実際に拡張 GCGL について計算した Lyapunov スペクトラムに、先ほど導入したベキ展開による近似法をあてはめて収束形を概算してみる。用いたパラメータ条件は図 5.4 にあげた 3 通りで、結合の強さ  $K$  を大きくしていくことにより大自由度カオスの乱雑さが大きくなっている。この 3 通りのパラメータ条件の各々について構成要素数  $N$  を 24 から 56 までで 5 通りを選んで Lyapunov スペクトラムを数値計算した。ただし  $0 < i < N$  の全てを求めたのではなく、はじめから 24 番めまでの Lyapunov 指数のみを計算した (図 5.13)。この結果を  $N$  で規格化して表示したのが図 5.14 である。この 2 通りの図示から、(a)  $K = 0.44$  の場合はすでに前節でスペクトラムの離散性を得た方法 (eq.(5.1) を参照) を用いれば収束形に到達できると推測できるが、(b)(c) に関しては収束スペクトラムの形状を図だけから読み取ることは難しい。そこでこの 3 通り全てについて展開による近似を行ない、(a) については既知の収束形との比較をしてこの近似法が実際に有効であることを確認し、(b)(c) が実際にどのような収束形に至るかを考えることにする。

#### (1) 離散部分の近似

まずスペクトラムのはじめの部分に含まれるであろう離散指数の収束値を見積もることとする。ただし何番目までが離散指数となっているかは前もってわからないので、24 番目まで全てが離散指数であるとして収束値を見積もった上で、得られた結果から逆に離散指数の個数を考えることにする。 $F_1(i, N)$  を  $N$  が 8 個ずつ異なる系の Lyapunov 指数の差 ( $\Delta_8(i, N)$ ) から、eq.(5.25) を使って計算すると図 5.15 が得られる。この図は  $N = 32, 40, 48, 56$  の 4 通りの場合について重ね描きをして表示してあるが、各パラメータごとの  $F_1(i, N)$  の  $i$  依存性はほぼ同じ傾向を示しており、要素数  $N$  がそれほど大きくなくても収束しているように見える。(a) の場合は  $F_1(i, N)$  自体の値が小さいので数値計算上の誤差が原因と考えられるばらつきが目につくが、 $i$  依存性の全体的な傾向としては同じ性質を持っており、 $f_1(i) (= \lim_{N \rightarrow \infty} F_1(i, N))$  の関数形は推測可能である。(b) の場合は  $N = 32$  (つまり  $N = 24$  と  $N = 32$  の 2 通りのスペクトラムの差) がそれ以外のものと分離しているが、それ以上の  $N$  では良く一致した結果を見せている。 $N = 32$  の場合が分離してしまうのは、 $N = 24$  と

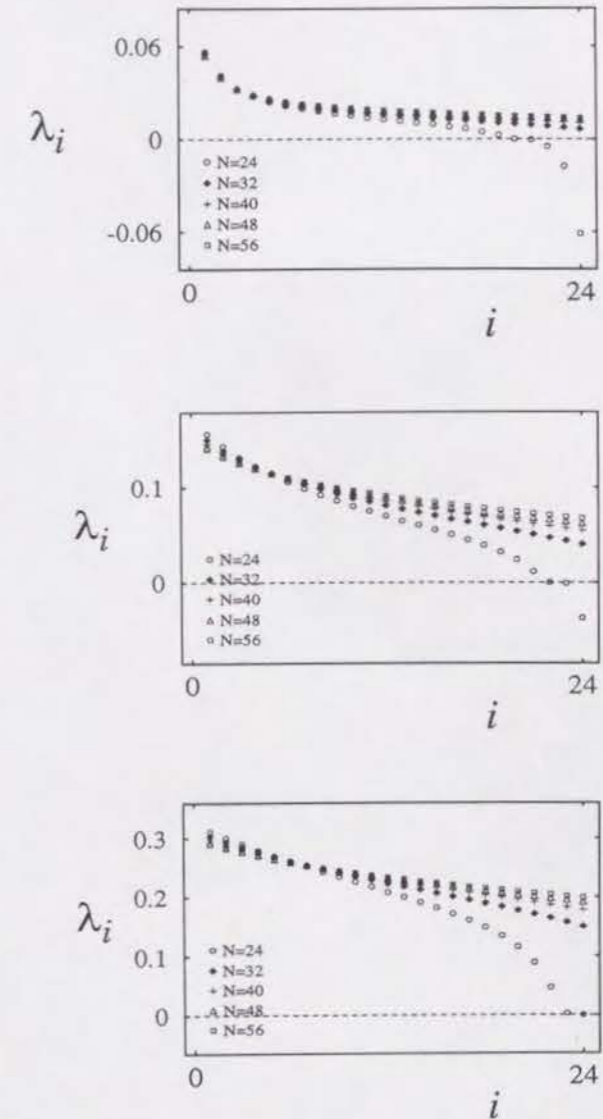


図 5.13: 図 5.4 の 3 通りの大自由度カオスに対応させて計算した、はじめから 24 番目までの Lyapunov スペクトラム。構成要素数  $N$  は 5 通り選んである。



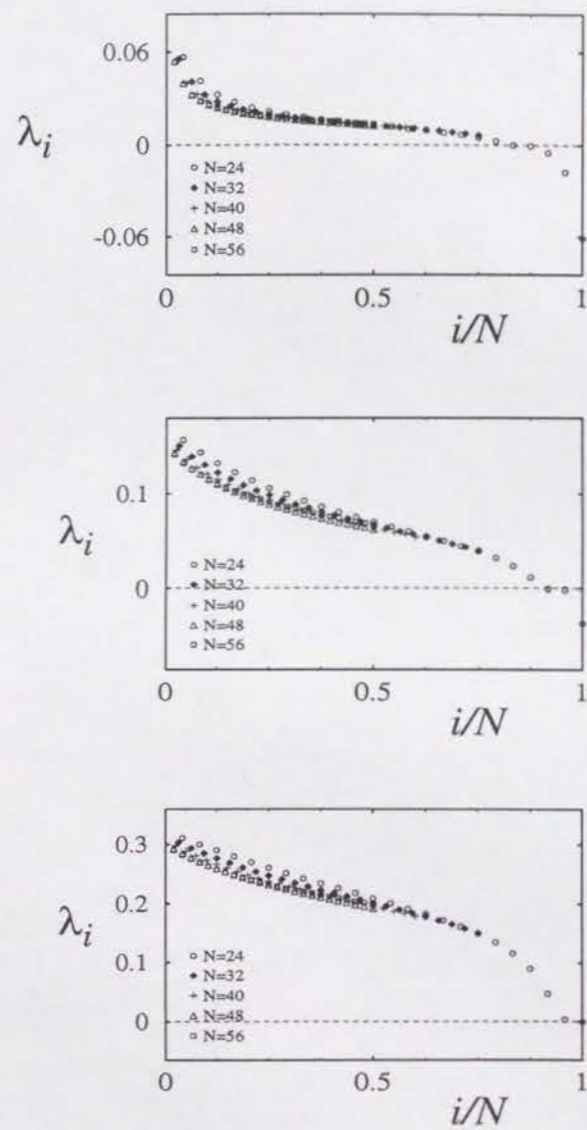


図 5.14: 図 5.13と同じデータを  $N$  で規格化して表記した結果。

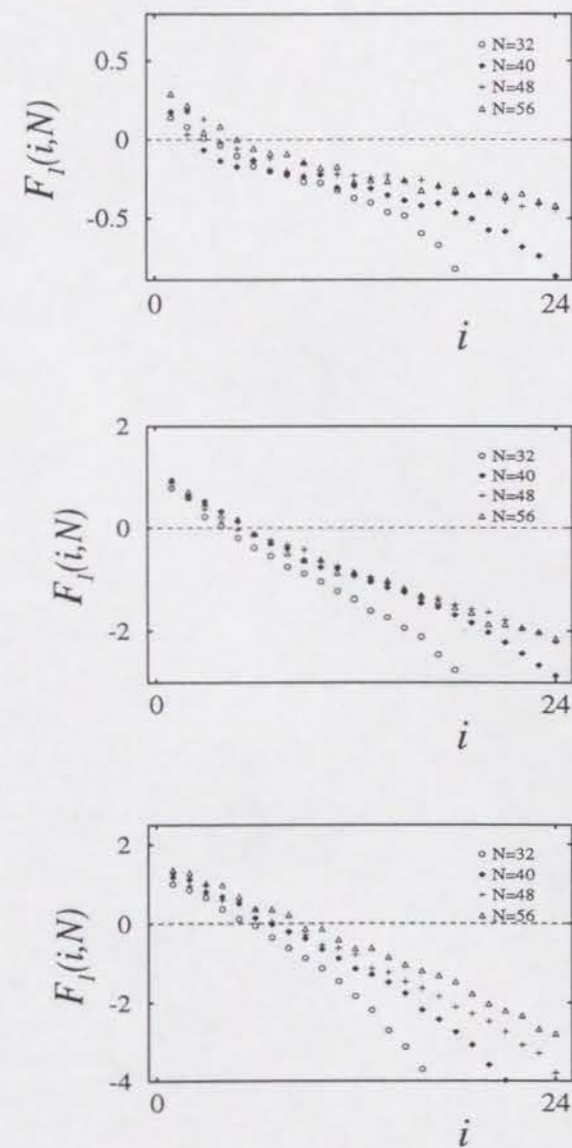


図 5.15: 図 5.13に示された数値から計算した雑散部分を近似するための展開係数  $F_1(i, N)$  (eq.(5.25) 参照)。  
 $i < 5$  程度の部分が  $N$  の変化に対して収束傾向を示していることに注意。



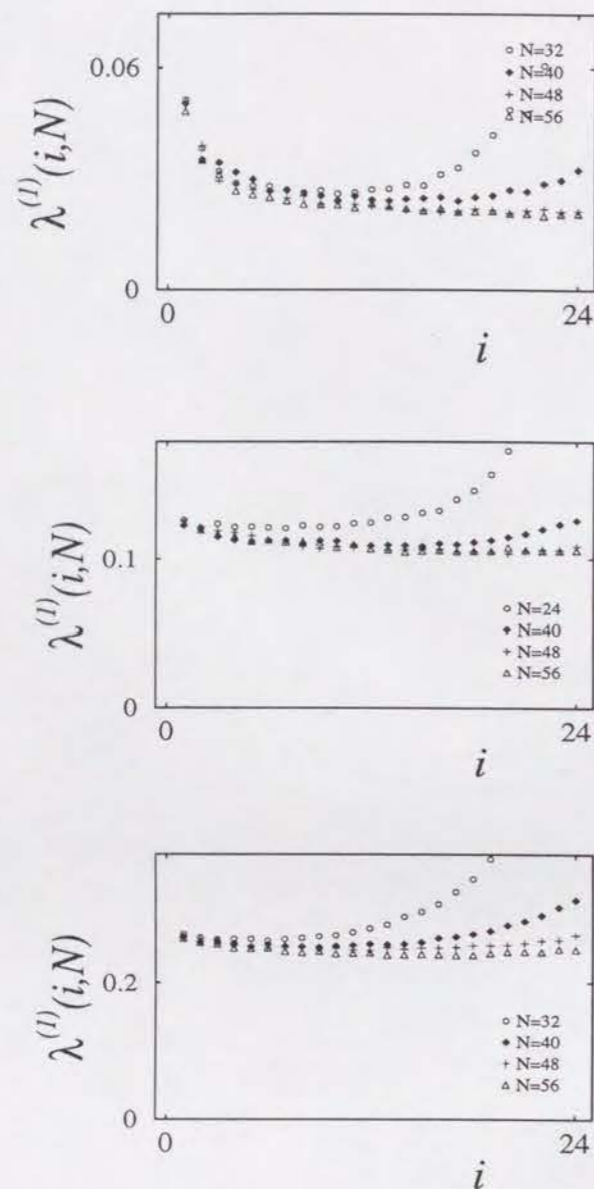


図 5.16: Eq.(5.25) に従い図 5.15にある結果を使って近似した離散 Lyapunov 指数の収束値。小さい  $i$  での値を図 5.13と比較すると、特に (b)(c) では  $N$  に対して良く収束した値が得られていることがわかる。

いう構成要素数が少な過ぎて収束列に属するようなダイナミクスに到達できていないせいかもしれない。しかしこの場合も  $N \leq 32$  では  $f_1(i)$  を類推できるぐらいの収束性を見せている。(c) の場合は  $i < 10$  程度のごくはじめの部分ぐらいしか収束傾向は見られず、特に  $N = 24$  はほとんど収束していない。 $F_1(i, N)$  に収束傾向すらはっきり捉えられないような  $N$  依存性が存在するという事は、漸近展開 eq.(5.20) における  $f_2(i)$  など高次の項の影響が大きいのか、収束傾向が見られない  $i$  の部分については離散指数としての扱いをすることが妥当でないかのどちらかであると考えられる。ここで取り上げた3通りの大自由度カオスから計算した  $F_1(i, N)$  に共通して見られる特徴は、 $i = 4$  か  $5$  あたりで  $F_1(i, N)$  の  $i$  依存性が変化していることであり、これ以下の  $i$  ではどのパラメータでも  $N$  依存性は大きくない。このことは、少なくともこの範囲の  $i$  では離散指数としての取り扱いをして Lyapunov 指数の収束値を考えることを正当化する。(a)(b) の場合はこれ以上の  $i$  で  $i$  依存性のあり方が変化した後も  $N$  による収束傾向が持続してるが、十分大きい  $i$  でも連続スペクトラムには属さず離散指数として存在しているとは考えがたいので、ここでは同じ傾向を示している小さい  $i$  の部分に注目すべきであろう。

さて、このような特徴を持った  $F_1(i, N)$  を使って eq.(5.25) から  $\lambda^{(1)}(i, N)$  を計算した結果が図 5.16である。図 5.13と比較すると、3つの場合を通して、はじめのいくつかの Lyapunov 指数についてはかなりよく収束した値を得ていることがわかる。

すでに (c) については離散指数としての扱いが妥当なのはせいぜい  $i < 5$  ぐらいであると触れたが、この図からさらに離散指数の個数を決定する必要がある。この近似を施した結果、はじめの3個は離散指数であることが図 5.16から見てとれるが、更に厳密に議論することができるのだろうか。連続部分の開始点について議論するためには、具体的に有限の  $N$  で連続部分を近似したときに得られる結果と性質を説明しておく必要があるので、まず一般的な連続部分の収束値を近似することにしよう。

### (2) 連続部分の近似

ここでは  $x = \frac{3}{8}$  ( $i = \frac{3}{8}N$ ) の近傍での連続スペクトラムの収束値を近似する場合を例に取り、詳細に手順を追っていくことにしよう。この場合は

$$\begin{aligned}
 F_1(j, N) &\equiv \frac{N^2 \{ \lambda(\frac{3}{8}N + j, N - \alpha) - \lambda(\frac{3}{8}N + j, N) \}}{\alpha} \\
 &= f_1(j) + \frac{2f_2(j) + \alpha f_1(j)}{N} + O(\frac{1}{N^2})
 \end{aligned}$$

を計算すれば、eq.(5.30) を用いて  $x = \frac{3}{8}$  の点での Lyapunov スペクトラムの収束値とその近傍での収束の傾向を知ることができる。先ほどの離散指数の場合と同じデータ (図 5.13) を使って  $\alpha = 8$  として  $F_1(j, N)$  を計算し、その結果の  $j$  依存性を見たのが図 5.17である。この図から  $j = 0$  ( $i = \frac{3}{8}N$  の点) の周りでは  $F_1(j, N)$  の形状は  $N$  にあまり依存しないことがわかる。これを用いて eq.(5.30) から  $\lambda^{(1)}(\frac{3}{8}N + j, N)$  を求め、 $j$  について表示したのが図 5.18である。 $j = 0$  での  $\lambda^{(1)}$  が最も収束が良



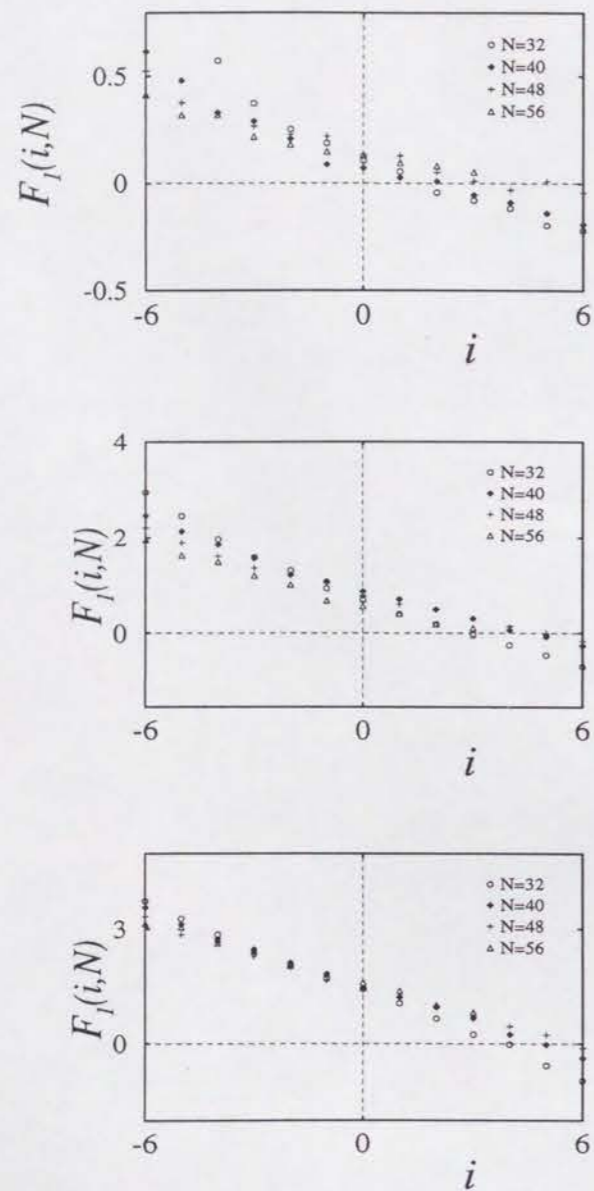


図 5.17: 図 5.13 に示された数値から計算した、 $i = \frac{3}{8}N$  のところでの連続スペクトラムの収束値を近似するための展開係数  $F_1(i, N)$ 。

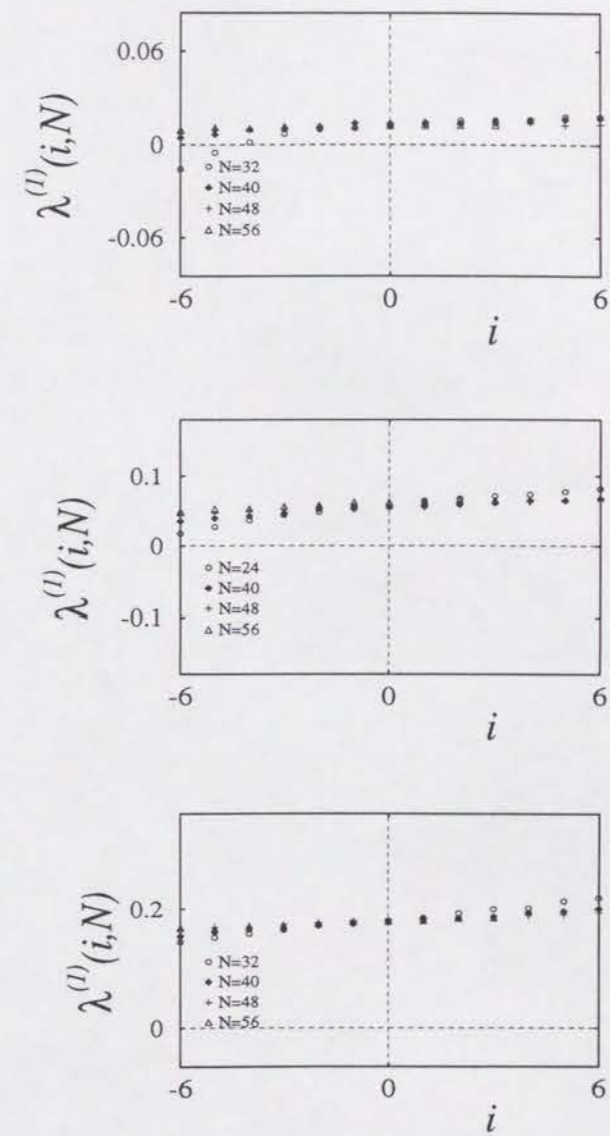


図 5.18: Eq.(5.25) に従い図 5.17 にある結果を使って近似した Lyapunov スペクトラムの連続部分 ( $x = \frac{3}{8}$  の近傍) の収束値。  $i = 0$  については収束が良いが、 $i \neq 0$  では収束しておらず  $N$  を増やすとともに平らになる傾向が現われている。



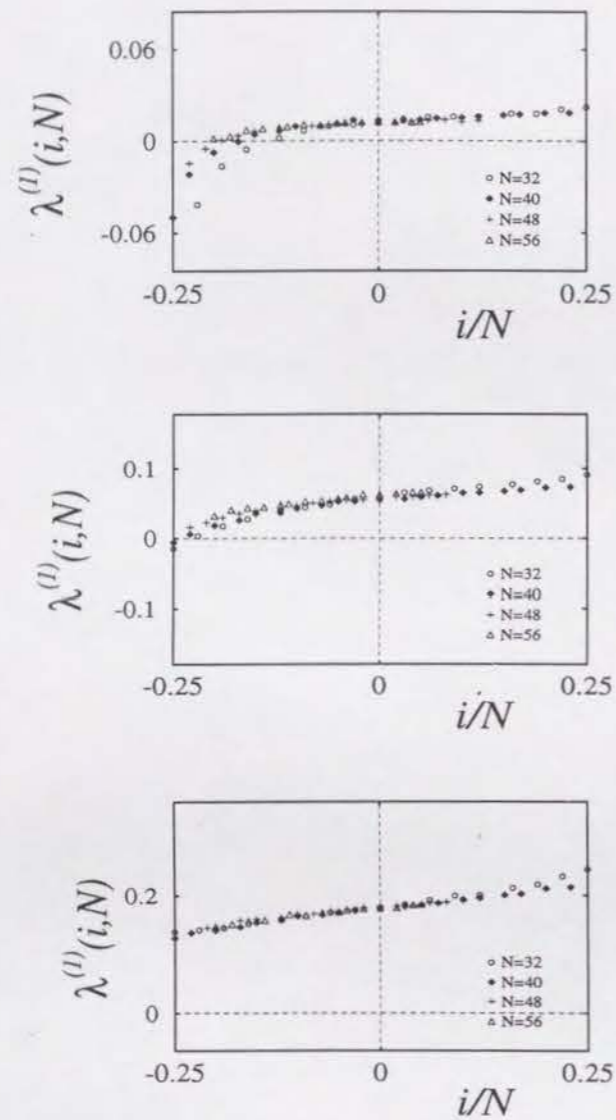


図 5.19: 図 5.18 に示した近似結果を  $N$  で規格化して描き直した図。規格化によって各々一つの関数系が得られていることがわかる。

く、 $|j|$  が大きくなるにつれて  $N$  による差が大きくなっているが、この  $N$  依存性は  $N$  が大きいほど  $\lambda^{(1)}$  が平らな関数になる (つまり  $j = 0$  での値に近付いていく) という傾向であるので、先だって述べた通り、この点の近傍で Lyapunov スペクトラムが連続かつ滑らかな関数であることを反映したものである。連続かつ滑らかなスペクトラムが存在するという事は、これに関係した数多くの位相空間の方向に渡って同じダイナミカルな構造が存在することを意味する。よって、この様に連続スペクトラムをなしていると考えられる場合、図 5.18 に見られる  $N$  依存性が  $N$  の有限性だけによるはずなので、 $\lambda^{(1)}$  をこの点の周りで  $N$  で規格化すれば  $N$  によらず同じ結果が得られることが予測される。 $\lambda^{(1)}$  を  $N$  で規格化して 4 通りの  $N$  で同一の性質が得られるかどうかを見たのが図 5.19 で、やはり予想通り  $j/N = 0$  の近傍では  $N$  によらない関数が現われている。これは連続スペクトラムが形成されているということを示すと同時に、この近傍の Lyapunov 指数は全て同種のダイナミクスを反映したものであることも示している。以下、連続部分のいろいろな点の近傍について同様の手続きを繰り返して、そこでの Lyapunov スペクトラムの連続性を確認し収束値を近似することにより、スペクトラムの収束形の概形を求めることができる。

### (3) 連続部分の開始点の見積り

さてここまでの議論を踏まえた上で、連続部分の開始点の見積りに戻ることにして。仮に  $N$  がある程度以上の量であれば、必ず  $i = i_0$  からあとの Lyapunov 指数は全てスペクトラムの連続部分をなすとしてしよう。もし  $i_0$  以降が連続部分に収束するのであれば、 $N \rightarrow \infty$  では  $i = i_0 + j$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots; j \ll N$ ) の全ての  $\lambda(i)$  が  $\lambda(i_0)$  に一致するはずである。有限の  $N$  のもとでは、この性質は各  $N$  を用いて近似した  $i_0$  以降の収束値  $\lambda^{(1)}(i_0 + j, N)$  が  $N$  を大きくするとともに真の収束値  $\lambda(i_0)$  に近付いていく性質として反映されるはずである。図 5.16 によれば、はじめから 5 番目の指数あたりから  $\lambda^{(1)}(i, N)$  が  $i$  に依らずほぼ同じ値となるような領域が続いており、これは連続部分の開始と一致するように思われる。

では  $i_0 = 5$  として、この仮定が妥当であるかを吟味することにして。連続部分を近似する方法 eq.(5.30) に  $xN = i_0 = 5$  を代入して、 $\lambda^{(1)}$  と  $j$  の関係を図示しても図 5.16 と同じ結果になることに注意したい。つまり、この図での  $i > i_0$  での  $i$  依存性が先程の連続部分の近似の際に議論したのと同様の性質を持っていれば、連続部分が始まっていると見なせることになる。もし  $i_0$  の周辺が連続部分に属するならば、 $N$  を増やすにつれて  $i_0$  のまわりで Lyapunov 指数の  $i$  依存性が無くなっていく ( $\lambda^{(1)}(i, N)$  が平らな関数になっていく) のが見られるはずである。図 5.16 では  $i < i_0$  にはこのような傾向は全く現われないので、この部分がスペクトラムの連続部分とは別の離散指数になっているという描像に正当性を与えている。一方、 $i > i_0$  では (特に (a)(b) の場合は) かなり平らな関数形が得られてはいるが、図 5.18 でのようなはっきりした  $N$  依存性を見出すことは出来ない。そこで、次に  $i = 5$  を中心として  $N$  で規格化した図 5.20 に連続部分の特徴が現われるかどうかを見てみる。確かに (a)(b) の場合は、 $i = i_0$  の  $i > i_0$  側の近傍では  $\lambda^{(1)}$  の関数形が  $N$  に対して収束しているのが見



られ、連続部分としての特徴を満たしている。一方  $i < i_0$  側は明らかに  $N$  依存性を持ち、この結果からは連続部分とは決定できないことを示している。このように、(a)(b) に関しては  $i = 5$  に連続部分の開始点があると仮定することはかなり妥当であると思われるが、(c) の場合はこの図でもやはり収束性が良くないので、離散指数の存在と個数を主張するための積極的な理由を図 5.16 の見かけ以外に見つけることができない。さらにこの理由づけについても、(c)  $K = 0.52$  の場合は  $i = 1$  ですら離散指数としてもかなり連続部分に値が近くなってしまっているので、何番目までが離散指数かの決定は便宜的といわざるを得ない。また (a)(b) の場合でも、 $i = 5$  の近傍ではたとえ離散部分に属していても収束が悪いのか離散部分に属するのかの厳密な区別がつけられないために、この決定は完全なものではない。ただし、ここで扱ったどの大自由度カオスでも  $i = 1 \sim 3$  については、その後方に続く  $\lambda^{(1)}(i, N) = \lambda(i_0)$  なる部分とは明らかに異なる指数値を持ち、(1) で行なった近似の結果の収束もかなり良いので、離散指数であると主張することは妥当であろう。

このようにして、漸近展開による近似法を適用した結果、ここで採用した 3 通りの大自由度カオスでは、いずれの場合も Lyapunov スペクトラムに離散指数が含まれており、その個数は 4 個と考えられるという結論に到達した。ただし、大自由度カオスの乱雑さの度合いが強くなるほど離散指数の連続部分からの乖離は小さくなる傾向があり、特に (c) の場合 ( $\rho$ -字型大自由度カオスと考えられる場合) は離散性は非常に小さく、離散指数の個数もはっきりとはわからない。ここまで述べた確認調査により、どの場合も連続部分およびはじめの 3 個の離散指数の存在に関しては十分信頼でき、値の収束性もよいと言えよう。

以上の議論により、離散部分と連続部分をそれぞれ近似して求めた Lyapunov スペクトラムの収束形は図 5.21 のようになる。連続部分については図 5.13 に示されているデータを使って  $x = \frac{i}{8}$ , ( $i = 1 \sim 5$ ) について概算した。Lyapunov スペクトラムのデータが  $i \leq 24$  に限ってしか求められていないため、連続部分の全体を見積もることはできず、前節で異なる方法で得たスペクトラムの収束形のように連続部分の後に存在する離散部分について議論することもできない。この図では連続部分の概略を把握するために、求めた点の間を連続関数(点線)でつないだ(ただし (b)(c) のみである)。離散部分と連続部分の開始点は  $N \rightarrow \infty$  で  $x = 0$  に集積するので、 $x = 0$  には 4 個の離散指数と連続スペクトラムの始まりの値 ( $\lambda^{(1)}(5, N)$ ) を同時に図示してある。この結果を図 5.14 と比較すると、(a) のように大自由度カオスの乱雑さの度合いが低い場合は、ここで使ったような少ない構成要素数でも Lyapunov スペクトラムの値は収束値からそれほど離れておらず、離散性もはっきりしていることがわかる。しかし、乱雑さが増すとともに収束値からのずれは大きくなり、(b) や (c) のような大自由度カオスが発達した状況では、Lyapunov スペクトラムの収束形や離散指数の存在を近似を使わずに推測するためには、非常に大きい  $N$  が必要であることがわかる。また (a) の場合に得た結果は、既に別の議論を経て得た異なるパラメータ条件での Lyapunov スペクトラムの収束形と特徴がよく一致しており、ここでの近似法が正当であることを示唆しているといえるであろう。

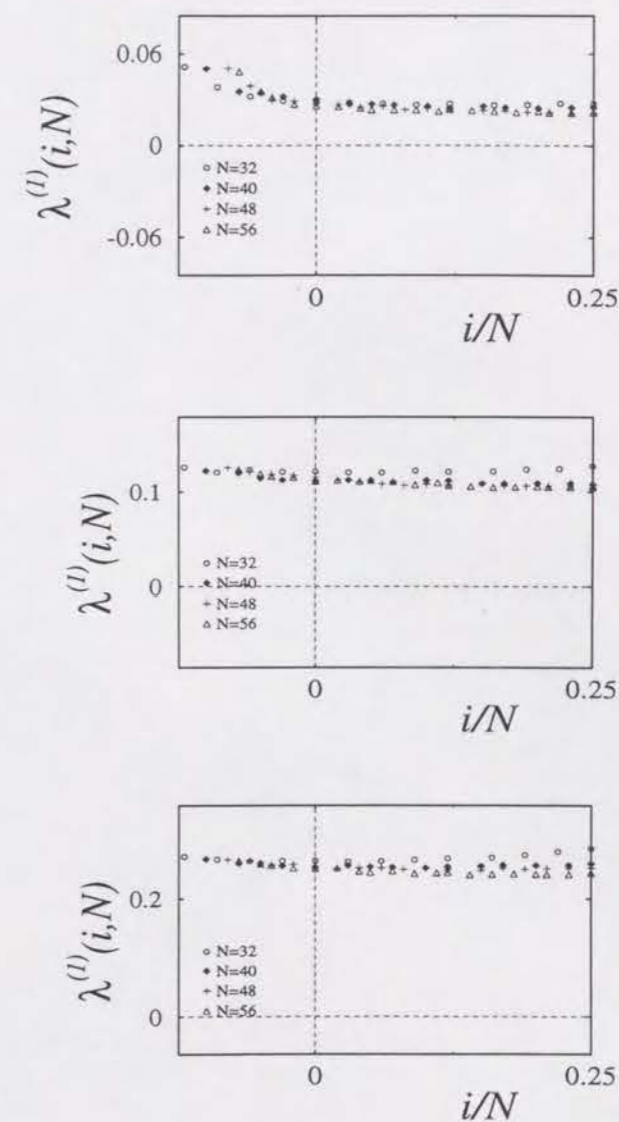


図 5.20: 連続部分の開始点が  $i_0 = 5$  であるとして、 $i > i_0$  を連続部分として扱うことの妥当性を見た図。図 5.19 と同様の操作をしてある。



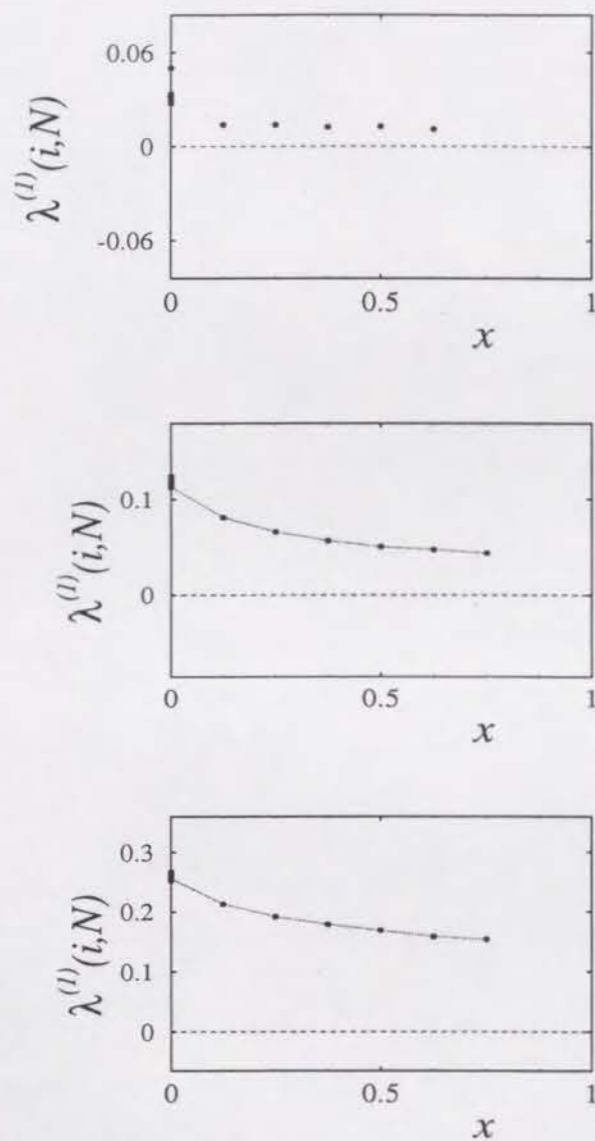


図 5.21: 離散部分、連続部分をそれぞれ近似して求めた収束スペクトラムの近似形。(b)(c)についてはベキ関数で連続部分をつないだ結果を点線で表示してある。(a)はデータが足りずこの様な操作ができなかった。

## 5.5 離散指数と連続スペクトラム、再考

この章ではここまで、GCGLで現われる大自由度カオスの特徴をつかむために Lyapunov スペクトラムに注目し、離散指数と連続スペクトラムの共存が得られるという結果に至った。この結果が反映する構造は neutral space なる高次元多様体とそれを構成する低次元的アトラクターの存在であり、この neutral space の崩壊が起こることによって大自由度カオス化を示すと解釈した。

neutral space が崩壊しはじめて大自由度カオスが生じてすぐの状況では確かに neutral space の残骸はダイナミクスの中で大きな位置を占めているので、Lyapunov スペクトラムを neutral space の次元の考察から収束形へと導くことが可能であった。しかしながら neutral space の崩壊が進み連続スペクトラムの値が大きくなってきた場合、スペクトラム中の離散部分が意味する事柄を崩壊初期の場合と同じように捉えても良いのであろうか。Lyapunov スペクトラムの収束形を近似した結果(図 5.21)を見れば、離散指数と連続スペクトラムの値の相対的距離関係は乱雑さが増すとともに徐々に接近しているので、位相空間における変化も徐々に進んでいると見なせ、離散指数の対応物が全く異なるものに置き換わるとは考えがたい。この考察を受け入れれば、離散指数と連続スペクトラムが意味するところは、折り畳み引き延ばし型大自由度カオスの発生から  $\rho$ -字型大自由度カオスに至るまで定性的には変化しないという結論を得ることになる。

それでは何故、離散指数はスペクトラムのはじめのところに現われるのであろうか。例えば図 5.21を見ると、 $K = 0.48$  では連続部分の開始点では  $\lambda(x) \sim 0.1$  となっているが、neutral space 崩壊直後(図 5.6)では  $\lambda_1 \sim 0.02$  であり、離散指数の値が連続スペクトラムの値の成長に合わせて増加していないと大自由度カオスにおける離散指数がスペクトラムのはじめに位置することはできないことがわかる。連続スペクトラムの値が増加するのは neutral space の崩壊が進行し乱雑さが増したためと解釈できるが、その増加に見合う形で離散指数も値を増していることについてはこれまで述べた描像だけでは説明できないように思える。離散指数が連続スペクトラムから有限値だけ離れた状況を維持しているのは、崩壊した neutral space の残骸の中に含まれる(含まれていた?)低次元的アトラクターの影響が存在することと関係があると考えられるのは確からしい。これから、離散指数の値自体が大きくなるのは単にこの低次元的アトラクターが持つ軌道不安定性の度合が大きくなったからという解答を思いつくが、これは離散指数と連続スペクトラムの値の大小関係の保存という問題について解決をもたらすものではない。そこで更に詳しく位相空間の状況を把握するために、スペクトラム中の各部分に対応するローカル Lyapunov 指数の時間変化を観察した結果の概略をあげて、位相空間中の neutral space 以外からのダイナミクスへの効果についても触れてみることにしよう。

ローカル Lyapunov 指数とは、注目したい Lyapunov 指数に対応する Lyapunov ベクトルの各瞬間での拡張指数を、ある短い間隔に渡って時間平均したものである。ローカル指数は各 Lyapunov ベクトルに対応して1つずつ計算されるので、全部で位相空間の次元に対応する数だけ存在する。全ローカル指数の時間変化を見ると、軌道とともに移り変わる位相空間の構造の変化の様子を詳しく知



ることができる。例えば折り畳み引き延ばし型大自由度カオスで乱雑さがあまり強くないような場合には、ある期間に渡って、離散指数に対応するローカル Lyapunov 指数は孤立した正の値を保つが連続部分に対応するものはこの孤立値より小さいどちらかと言えば0に近い値を持つ傾向を見せ、一時的に4章で取り上げた連続分布の低次元カオスでの neutral space によく似た状況が実現されていることがわかる。これは位相空間中に neutral space の残骸があまりほやけないう存在していることを示唆している。一方同じ大自由度カオスについて Lyapunov ベクトルやローカル Lyapunov 指数から位相空間の構造を見ていても neutral space の残骸のような存在が認められない期間もある。この場合にはローカル指数の特徴に、離散指数に対応するか連続スペクトラムに対応するかという区別を見ることができない。このような neutral space からの解釈が一見通用しないように見える複雑な場合を全て一括みにして捉えてしまってもよいのか議論の余地があるが、この期間のローカル指数には大まかには以下のような特徴をあげることができる。離散指数に対応するローカル指数であるか連続部分に対応するものであるかによらず、ほとんど全てのローカル指数は正の値をとる。各ローカル指数の間の値の大小関係は対応する Lyapunov ベクトルと一致した大小関係を整然と保ち続けるのではなく、頻繁に大小関係がひっくり返るのが観察される。これは位相空間が急激に変化していることを意味しているのだと思われる。このような状況が実現されているときには、各指数に対応する Lyapunov ベクトルの間にも明確な差を見出すことは容易ではなさそうである。

例えば図 5.4 にあげられた  $K = 0.44$  (折り畳み引き延ばし型大自由度カオスで乱雑さがかなり低い場合) と  $K = 0.52$  ( $\rho$ -字型大自由度カオス) のときについて比較的解説してみることによろう。 $K = 0.44$  の場合、スナップショットの折り畳み引き延ばし運動 (図 5.1 参照) の繰り返しははっきりとしているので、それに対応した形でローカル Lyapunov 指数の変化も捉えることができる。図 5.1(a) のような折り畳み引き延ばし運動が起こっていない期間には、ローカル指数は離散指数に対応するものが他のものとは特異的に異なる大きい正の値を取り、連続部分に対応するローカル指数はこの大きい正の値と比較したらほとんど0に近いような値を取り続け、この0に近い値を取るローカル指数同士の値の大小関係はあまり明確ではない。このような期間を仮にラミナ部分と呼ぶことにしよう。一方図 5.1(b)(c) のように折り畳み引き延ばし運動が起きている期間には離散指数に対応するローカル指数の値を連続部分に対応するものが追いついたり、この折り畳み引き延ばし運動が続く一つの期間中にもローカル指数の値の大小関係が変動したりするのが見受けられる。この時のローカル指数の値は (変動は大きい) ラミナ部分での0に近い値と比較すれば、かなり大きな正の値を取っている。このような相対的に乱れた期間をラミナ部分に対応させてバースト部分と呼ぶことにする。今述べた場合にはラミナ部分は neutral space の残骸と明確に関係している期間であり、バースト部分はこの関係があるか否かについて明言できない期間と捉えられる。実際はラミナ部分とバースト部分に分けることは便宜的であり、その間の移り変わりなどがどのような位置付けになるのかなどははっきりとしない。大自由度カオスの乱雑さが強くない場合にはそれぞれの対応物を見て今のような説明

をすることはたやすいが、度合が強くなると、ラミナ部分とバースト部分の変化が早くなることも関係して上記のようなはっきりした特徴を持つラミナ部分を見出すことは難しくなる。これは neutral space の残骸が軌道を引き付ける能力が相対的に弱くなっていること、あるいは neutral space の残骸という形態自体がかなりほやけてしまっていることを意味していると捉えられよう。 $K = 0.52$  にまで至ると、ラミナ部分に相当するような時間変化を見出すことは稀にはなるが、一応、孤立的に大きな正の値を持つローカル指数が存在する期間を見ることはでき、この時のスナップショットは  $\rho$ -字型よりも図 5.1(a) のようである。ほとんど全ての時間でローカル指数はバースト部分のような乱れた時間変化を示しており、バースト部分と  $\rho$ -字 (あるいは折り畳み引き延ばし型の角) 型には関係があることを推測させる。

この様に便宜的ではあるが、ラミナ部分とバースト部分といった捉え方で位相空間とダイナミクスの関係を考察してみると、常に離散指数の値が連続スペクトラムの値より大きくなる理由についての解釈を与えることが可能になる。つまり、ラミナ部分からの Lyapunov スペクトラムへの寄与は孤立した正の Lyapunov 指数と多くの小さな指数をもたらすものであり、バースト部分からの寄与は同じような正の指数を全てに与えるものであるから、大雑把な議論では、Lyapunov スペクトラムはこの二つからの寄与を合わせたものとして把握することができる。これによって離散指数は常にスペクトラム中の一番はじめの部分に位置することになり、その値は連続スペクトラムの値の増加に合わせて大きくなることが予想される。

ここで展開したラミナ部分とバースト部分という描像に基づく大自由度カオスの理解は大雑把なものである。しかも有限のあまり大きくない構成要素数  $N$  を用いた調査結果であるので、最も関心のある  $N \rightarrow \infty$  の場合についてどの程度の効力があるかは疑問がある。ここで述べた議論をもっと正確なものにし、より深く理解するためには、大自由度カオスが生じる際の一つのシナリオのようなものを引き出して、neutral space の崩壊とその残骸のような考え方をもっと有効な形で捉え出すことがのぞまれ、これは今後の大きな課題になるだろう。

## 5.6 まとめと議論

この章では GCGL で生じる大自由度カオスを連続分布で見られる低次元運動と関係づけることからはじめ、パラメータとともに徐々に複雑化する様子を位相空間および Lyapunov スペクトラムの特徴の変化を通して捉えた。Lyapunov スペクトラムに離散部分が存在することは分布全体として統括された運動が何らかの形で残っていることを意味し、(正または0の)連続部分が存在することは各要素の個別運動が実現されていることを示している。 $K$  を大きくしていくことにより図 5.4 のようにオーダーパラメータの振る舞いはどんどん乱雑になっていくが、オーダーパラメータは分布全体を反映するものなので、分布全体の運動に統括された低次元的なものがいくらかでも残っていればその影響がオーダーパラメータに現われ、観察者はそれを通して大自由度カオスの中の見かけの低次元性 (全体



性の存在)を感じるようになる。

$p$ -字型大自由度カオスのように乱雑さの度合が高くなると連続スペクトラムの値自体がかなり大きくなり、このことが乱雑さと関係しているように思われるが、同時に離散指数が連続部分とほとんど同化しそうな程接近しているということも大きく関係しているであろう。もし、離散指数が完全に連続スペクトラムに取り込まれてしまったら、分布全体を統括するような運動はもはや存在しなくなり、オーダーパラメータの時間変化もまさに高次元効果のみで、離散指数が存在したときのように一見低次元になったり乱雑になったりという変化はもはや見出すことのできない、乱雑な見かけだけのものになるはずである。ここでの議論は Lyapunov スペクトラムのはじめの部分に含まれる離散指数についてしか考慮していないので、例えばスペクトラムの後半部分に存在していた離散指数が集団運動に対してどのような効果を持っているのか、はじめの部分の離散指数が消えた後も残るものなのかについてはわからない。この後半部分について考察していないにもかかわらず、オーダーパラメータの時間変化に残る一時的な見かけの低次元性(全体性の存在)と、はじめの離散指数の存在及び連続部分からの独立性は十分に対応関係があるように思える。はじめの離散部分が存在するということは neutral space の断片が存在しているということを意味し、少なくともこの断片を通して分布運動の全体性の実現されていることになる。neutral space は痕跡もないような状況に至れば、分布全体を統括する運動は全く存在しなくなるであろうが、これは同時にはじめの離散部分が消失することも意味している。なぜならば、離散部分がなくなったときの位相空間の状況を考えて、(崩壊した) neutral space の断片が軌道を引き付ける強さと neutral space の崩壊による不安定性の強さが対等に達したか不安定性の方が強くなったかと捉えることができるからである。

はじめの離散部分がなくなった後はどのようなことが起きるのであろうか。  $c_1 = -2.0$ ,  $c_2 = 3.0$  の場合は、  $K = 0.52$  以上のある広さの  $K$  の範囲で Lyapunov スペクトラムの値やパターンがしばらく変化しなくなる。つまり、スペクトラムの離散部分を失った後の大自由度カオスは、力学的構造やエントロピーがパラメータに依存しないある一定の性質を保持することが推測される。このような状況は、言い換えれば、neutral space を元にした理解法は効力を失い、これ以上大きい  $K$  の領域で観察される大自由度カオスについて考察するには異なる観点を見つけることが必要になる。このような視点を得るには、まず部分クラスター状態を捉える指標を見つけだすことが必要であると思われる。もしそのような指標や力学的描像を得ることができたならば、その変遷を追うことによって部分クラスター状態の側から大自由度カオスの構造を把握することができるであろう。その後、この二つの理解法の関係から大自由度カオスを全体的に俯瞰することによって、ある広さを持ったパラメータ領域で大自由度カオスがパラメータによらない性質を獲得するのかについての答えが得られるものと考えられる。

最後に個性性と全体性の観点から大自由度カオスの発展を解釈することで、この章を終えることにしよう。前節の連続分布が運動する状態では、全要素が完全に統括されて全体運動が実現し、その

もとで各要素が個別運動を行っていた。各要素の個別運動は、もともと要素自身が保持していた性質(振動子としての性質)を維持しつつ独立性も保っていると見なせるが、集団を形成することによって既存性質を越えるような新たな可能性を獲得したとは考えられない。大自由度カオスへの転移を経た後も全要素はある程度統括され、全体性は残っている。一方、個別運動はこの変化に伴いこれまではないカオス的性質を持つようになり、集団を形成することが、個体の活動度をあげることにつながっている。個体の活動度があがると、当然全体を統括することは難しくなる。各要素のカオス性が強ければ強いほど全体性はかき乱され、だんだん統一性を見出すことができなくなってくる。集団内の相互作用が強くなるのが個体の活動度をあげ、完全に全体性が消去された状態まで個別運動のカオス性が強くなったら、それ以上個体の活動度は増加しないようである。



## Chapter 6

### 最終章

この論文のテーマは、自律的に運動する要素が集団を構成したときに生じる集団運動を捉えだし、特徴付け、分類することにある。集団が構成されることによって生じる、個別の要素には存在しない運動や現象はまさしく集団効果の現われであり、これまで知られていた同期現象・引き込み現象以外にも集団性に起因する現象の存在が明らかになってきたのは最近の研究の成果である。その一つはクラスタリングであり、もう一つは集団振動 (collective oscillation) で、これらは3章、4章にあった通り両方とも GCGL でも実現され、同時にかなり幅広いモデルで実現可能だと思われる。

クラスタリングは、たとえ全く同じ性質の要素であって潜在的な差異が存在しなくても、集団が構成されればその中で複数のグループに自発的に分離し得ることを物語っており、分離後は要素単位の運動ではなくグループ同士の相対関係により振る舞いが決定されてしまうこと、グループ (クラスター) の数や構成要素比にはかなりの任意性があること、グループ同士の相対運動がカオス的なことと要素がクラスターにまとまることは両立しにくいことがわかる。クラスタリングという集団効果を認識することによって、生物の分化や発生あるいは社会構造の形成の問題に新たな一つの光を投げかけることが可能となるであろう。実際、クラスタリングを使って分化を説明しようという試みは既にはじまっており、細胞性粘菌の可逆分化をクラスタリングと結びつけて捉えたり [58]、大腸菌を大域結合的状況下で飼育するという実験 [54] で観察された自発的分化を、クラスタリングの観点で再現したモデル [57] などもある。この試みはさらにより広い分化や発生を説明するべく拡張されつつあり、今後の結果が期待される。

集団振動 (collective oscillation) については第1章で触れた蟻の例 [53] が存在することから、おそらく自然界のあちこちに存在している集団現象だと推測できる。この種の集団運動では各要素は個別性を保って一見バラバラに振る舞っているが、実は全要素がある一つの分布を形作っており、この全体的分布は固定的なもの (構成要素数依存性が大数の法則に従う分布) だけでなく分布形が組織だった時間変化 (準周期運動、GCGL では低次元カオスも見られた) を示し得る場合も存在するので一般的には大数の法則が成り立たない。つまりこの現象の発見は、これまで揺らぎとして片

付けられてきたこと、大数の法則にしたがっていることを当然として改めて調べられなかったことにも疑問を挟む余地があることを指摘している。集団全体によって実現されるこの種の分布の運動は、各個体が持つダイナミクス・時間スケールとは異なる新たなものである。しかしながらこの集団運動は、個体運動と比較してその運動が顕著なものではないことが多いので、かなり実験や観測の条件を整えて絞り込まないとあらわにはなりにくく、それゆえに報告例も少ないと思われる。この制約は集団振動をはじめとする分布による全体運動の重要性が低いということの意味するわけではない。というのは、人間をはじめとする様々な生物の集団を考えたときに、個体の自由を成り立たせながら同時に全体性も保持されるような状況への理解は重要な位置を占めることは想像に難くないからである。あるいは生物などの例に限らず、より一般的なマクロな物理現象の原子レベルからの理解という課題を考えたときに、この現象は重要な意義を持つ可能性がある。例えば熱対流系では境界条件などをうまく設定することにより、対流ロールがあるパターンを作ったり周期的運動や典型的な低次元カオスの運動を見せたりする。この現象下で原子 (分子) レベルに着目すれば、各々の原子 (分子) が全体 (ロール) と一致した振る舞いを常にしているのではなく、個別に (熱揺らぎの運動をはじめとした) 何らかの運動をしているはずである。それにも関わらず、全体としては上述のようなまとまった振る舞いを見せるわけであるから、ここでは個別運動と全体運動の共存が実現されていることがわかる。このような状況はこの例に限らずかなり一般的に起きていると考えられるが、集団振動をはじめとする分布の全体運動が実現される集団現象も同じ性質を持つと捉えることもできるので、何らかの理想系を用いて集団振動のような現象について更に研究することから物理系でのマイクロ・マクロの問題に対する糸口に至ることが可能かも知れない。

GCGL はこの二つの集団現象以外に、集団カオスとしての大自由度カオスについて顕著な性格を見せていることにも注目したい。この場合は集団の全体性もある程度保持されつつ、個体の個別運動は元々の個体の持っていない動的側面を持つようになる。これもやはり集団効果と捉えられるだろう。集団運動あるいは collectivity という言葉が何をさすのかについては、まだ議論がなされている最中であり、研究者間に見識の相違も大きい。一番寛容な立場は、集団を作ったときに生じる運動は全て集団運動というものであり、全く正しい立場といえよう。しかし更に理解を進めるには、漠然とした種々雑多の集団運動の中から概念化されたカテゴリーをすくい上げる必要がある。同期現象、クラスタリング、集団振動はカテゴリー化に成功した (成功しつつある) 例であるが、実はこれらは集団に含まれる要素の多さ、自由度の多さにもかかわらず、集団効果によって少数自由度化されたり低次元の運動が実現されたりする現象ばかりである。この論文中で扱った大自由度カオスは、これらの例のような低次元化では括れない、本質的に大自由度であることが如実に現われる現象である。低次元力学系という道具だけでは、大自由度カオス中で起きているダイナミクスはまだ不透明で、まずは力学系の問題としてこれに取り組む必要性も感じられる。現在まで、力学系として大自由度カオスを捉え理解に至ることに成功した例は存在していないが、GCGL で位相空間の構造を考えることにより



得た neutral space とその崩壊シナリオについて見直すことは、力学系の観点から大自由度カオスの理解に至るはじめの一步に繋がるかも知れない。GCGL で得られる大自由度カオスでは全体性と個性という集団運動の観点から解釈するのに都合の良い Lyapunov スペクトラムの特異性が得られる。これは (崩壊した) neutral space がどの程度形状を残しているかの指標と見ることもでき、Lyapunov ベクトルやローカル Lyapunov 指数の調査を通して離散指数と連続指数の関係を捉えることが、力学系として大自由度カオスを理解するための手助けになることを示唆している。また特異性の存在は集団運動としての大自由度カオスを個性性と全体性の観点からカテゴリー化して捉え出す可能性があることも示唆しており、個性性と全体性が積極的に影響を及ぼしあっている場合の両者の関係のあり方といった、これまで議論されてこなかった問題について考える契機になると捉えることもできよう。

## Appendix A

### GCGL の導出

本文中第 1 章で述べた通り、集団を構成する要素が全て同一かつ同等な関係にあるような理想的大域結合系で、要素が Hopf 分岐を起こす場合には、分岐点近傍ではほとんど全ての大域結合系が GCGL で記述できる。導出の簡便さのため、以下のようなモデルを使ってこのことを確認しよう。

$$\dot{Z}_j = (\epsilon + i\omega)Z_j - (1 + ic_2)|Z_j|^2 Z_j + \epsilon \frac{K}{N} \sum_{k=1}^N f(Z_k - Z_j) \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $Z_j$  は各要素の状態を表す複素変数、 $f(Z)$  は大域結合を司る複素関数で微分可能性を条件とする。各要素は  $\epsilon = 0$  で Hopf 分岐を示し、他の要素との相互作用が存在しなければ (孤立していれば)  $\epsilon > 0$  で

$$Z = \epsilon^{\frac{1}{2}} e^{i(\omega - \epsilon c_2)t} \quad (\text{A.2})$$

という周期解 (limit cycle) が得られる。相互作用はこの周期構造を破壊しない程度の強さであることを仮定すれば、結合項は、eq.(A.1) に明示的に記されているように、 $O(\epsilon)$  であることが要請される。 $\epsilon$  が十分 0 に近い正の値であるときに注目すると、eq.(A.1) の右辺は  $Z_j$  の一次の係数が  $O(\epsilon)$  と  $O(\epsilon^0)$  の二つのオーダーからなっているので、左辺にもこの構造が反映されているはずである。つまり、 $Z_j$  の運動が  $O(\epsilon^0)$  の早い時間スケールと  $O(\epsilon^{-1})$  の遅いスケールの分離された 2 成分からなることがわかる。そこで、 $u_j$  を複素変数として

$$t = t + \epsilon^{-1}\tau \quad (\text{A.3})$$

$$Z_j = \epsilon^{\frac{1}{2}} u_j^{(1)} + \epsilon u_j^{(2)} + \epsilon^{\frac{3}{2}} u_j^{(3)} + \dots \quad (\text{A.4})$$

のように eq.(A.1) を  $\epsilon$  で展開すると、最低次のオーダー ( $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ ) では

$$\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial t} - i\omega u_j^{(1)} = 0 \quad (\text{A.5})$$



という発展方程式が得られる。これを解くと、 $W_j(\tau)$  を遅い時間  $\tau$  のみに依存する複素関数として

$$u_j^{(1)} = W_j(\tau)e^{i\omega\tau} \quad (\text{A.6})$$

という振動解を得る。この解は孤立要素の解 eq.(A.2) の最低次と一致している。隷従原理 ([4]) により、運動にとって重要なのは遅い時間スケールの効果であることから、 $W_j(\tau)$  についての発展方程式が求まるまで  $\epsilon$  の高次の影響を考えて行く必要がある。Eq.(A.1) の高次の部分は、 $f(Z)$  の  $Z = 0$  の周りでの展開を利用すれば

$$O(\epsilon) : \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial t} - i\omega u_j^{(2)} = Kf(0) \quad (\text{A.7})$$

$$O(\epsilon^{\frac{3}{2}}) : \frac{\partial u_j^{(3)}}{\partial t} - i\omega u_j^{(3)} = \frac{Kf'(0)}{N} \sum_{k=1}^N (u_k^{(1)} - u_j^{(1)}) \quad (\text{A.8})$$

のように書ける。ここで  $f'(Z)$  は  $Z$  についての微分を表している。これらの高次の方程式が eq.(A.6) と両立するためには可解条件を満たさなければならない。Eq.(A.7) が可解条件を満たすことは明らかであり、 $\tau$  の時間スケールでの発展に関する事柄は得られないので、eq.(A.8) についてのみ議論することにしよう。今の場合、可解条件を得るには eq.(A.6) の複素共役を利用できるので比較的容易で、

$$\int_0^{2\pi} dt e^{-i\omega t} \left( -\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial \tau} + u_j^{(1)} - (1 + ic_2)|u_j^{(1)}|^2 u_j^{(1)} + \frac{Kf'(0)}{N} \sum_{k=1}^N (u_k^{(1)} - u_j^{(1)}) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial W_j}{\partial \tau} = W_j - (1 + ic_2)|W_j|^2 W_j + \frac{Kf'(0)}{N} \sum_{k=1}^N (W_k - W_j) \quad (\text{A.9})$$

を満たせば eq.(A.8) は可解である。この条件式は  $W_j(\tau)$  の発展方程式になっていることがわかる。 $f'(0)$  は一般に複素数であるから eq.(A.9) は GCGL と同じ方程式であることが帰結され、この結果、GCGL が大域結合系の Hopf 分岐近傍での遅い時間スケールの運動の発展方程式に相当することがわかる。

## 謝辞 – 研究の回想から

早いもので、大学院に入り研究の世界に足を踏み入れてから、もう5年が経つこととなります。こまっしゃくれた不良学部生であった当時、自分が生物から受ける感動と現状の生物学的理解との間にギャップを感じ、なんとか居心地の悪さを解消するような方法論がないかと探していた中で、偶然にも動力学という世界を知りました。ほとんど動物的勘だけでこの分野を選択し、蔵本由紀教授の教えを乞うことになったのですが、今でもこの選択は正しかったという満足感を感じれる恵まれた研究生活を送りました。これは、蔵本教授が、私の問題意識に非常に近い自律的要素の集団による集団運動という問題を開拓するという立場で、一般性の高い GCGL というモデルを提案して下さったことによる部分が大きで、この研究を通して生物現象に対する見方がより深くなり、今後の研究の方向にも光をあててくれています。さらにこの研究を通して様々な人と議論を交わすことができ、特に金子邦彦教授、Hughes Chaté 博士、佐々真一博士、渡辺辰矢博士との集団運動に関する議論は、一つのモデルの世界で閉じてしまいがちな思考に異なる発想からの問を投げかけてくれ、研究が新たな段階にはいるきっかけを与えてくれるものとなりました。もちろん、研究の進展に関しては蔵本教授からの適切な指導があったことは言うに及びません。

上述の方々以外にも、奥田浩司博士、佐野雅己助教授、水口毅博士、Glenn Paquette 博士、狐崎創氏をはじめとする蔵本研究室の皆さんとの議論は刺激に富むものでした。また東京大学教養学部金子研究室の皆さん、東北大学電気通信研究所澤田研究室の皆さんとの交流も非常に有意義なものでした。他にも数多くの方からの支えがあったことに深く感謝します。

なお、研究に際しては日本学術振興会特別研究員制度からの援助がありました。



# Bibliography

## General References

- [1] A.T.Winfrey, *The Geometry of Biological Time*, Springer-Verlag, New York (1980).
- [2] Y.Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* Springer-Verlag, Berlin (1984).
- [3] P.Manneville, *Dissipative Structure and Weak Turbulence* Academic Press, Boston (1990).
- [4] H.Haken, *Synergetics—An Introduction: Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology, 3rd ed.* Springer, Berlin, Heidelberg (1983).
- [5] E.Ott, *Chaos in DYNAMICAL SYSTEMS* Cambridge University Press (1993).

## Globally coupled complex Ginzburg-Landau equation

- [6] N.Nakagawa and Y.Kuramoto, Collective chaos in a Population of globally coupled oscillators, *Prog.Theor.Phys.* **89** (1993), 313-323. N.Nakagawa and Y.Kuramoto, From collective oscillations to collective chaos in a globally coupled oscillator system, *Physica D* **75** (1994), 74-80.
- [7] N.Nakagawa and Y.Kuramoto, Anomalous Lyapunov spectrum in globally coupled oscillators, *Physica D* **80** (1995), 307-316.
- [8] V.Hakim and W.-J.Rappel, Dynamics of the globally coupled complex Ginzburg-Landau equation, *Phys.Rev. A* **46** (1992), R7347-R7350.
- [9] V.Hakim and W.-J.Rappel, Noise-induced periodic behavior in the globally-coupled complex Ginzburg-Landau equation, *Europhys.Lett.* **27** (1994), 637-642.

## Globally coupled chaotic maps

- [10] K.Kaneko, Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements, *Physica D* **41** (1990), 137-172.
- [11] K.Kaneko, Globally coupled circle maps, *Physica D* **54** (1991), 5-19.
- [12] T.Konishi and K.Kaneko, Clustered motion in symplectic coupled map systems, *J.Phys.A: Math,Gen.* **25** (1992), 6283-6296.

## Phase oscillator model

### (I) Synchronization and/or entrainment

- [13] A.T.Winfrey, Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators, *J.Theor.Biol.* **16** (1967), 15-42.
- [14] Y.Kuramoto, Self-entrainment of a population of coupled oscillators, In: *Int. Symp. on Math. Prob. in Theor. Phys.* H.Araki, ed. Lecture Notes in Physics **39**, Springer-Verlag, New York (1975) 420-422.
- [15] G.B.Ermentrout,  $n : m$  phase-locking of weakly coupled oscillators, *J.Math.Biol.* **12** (1981), 327-342.
- [16] G.B.Ermentrout, Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies, *J.Math.Biol.* **22** (1985), 1-9.
- [17] Y.Kuramoto and I.Nishikawa, Statistical macrodynamics of large dynamical systems, *J.Stat.Phys.* **49** (1987), 569-605.
- [18] H.Sakaguchi, S.Shinomoto and Y.Kuramoto, Mutual entrainment in oscillator lattices with nontrivial type interaction, *Prog.Theor.Phys.* **79** (1988), 1069-1079.
- [19] H.Daido, Intrinsic fluctuations and a phase transition in a class of large populations of interacting oscillators, *J.Stat.Phys.* **60** (1990), 753-800.

### (II) Incoherent state

- [20] K.Wiesenfeld and P.Hadley, Attractor Crawding in Oscillator Arrays, *Phys.Rev.Lett.* **62** (1989), 1335-1338.



- [21] S.H.Strogatz and R.E.Mirollo, Stability of Incoherence in a Population of Coupled Oscillators, *J.Stat.Phys.* **63** (1991), 613-635.
- [22] S.H.Strogatz, R.E.Mirollo and P.C.Matthews, Coupled Nonlinear Oscillators below the Synchronization Threshold: Relaxation by Generalized Landau Damping, *Phys.Rev.Lett.* **68** (1992), 2730-2733.
- [23] S.Watanabe and S.H.Strogatz, Integrability of a Globally Coupled Oscillator Array, *Phys.Rev.Lett.* **70** (1993), 2391-2394. S.Watanabe and S.H.Strogatz, Constants of motion for superconducting Josephson arrays, *Physica D* **74** (1994), 197-253.

### (III) Clustering

- [24] K.Okuda, Variety and generality of clustering in globally coupled oscillators, *Physica D* **63** (1993), 424-436.
- [25] D.Golomb, D.Hansel, B.Shraiman and H.Sompolinsky, Clustering in globally coupled phase oscillators, *Phys.Rev. A* **45** (1992), 3516-3530.
- [26] D.Hansel, G.Mato and C.Meunier, Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators, *Phys.Rev.E* **48** (1993), 3470-3477.

### Oscillator population with amplitude degrees of freedom

- [27] Y.Aizawa, Synergetic approach to the phenomena of mode-locking in nonlinear systems, *Prog.Theor.Phys.* **56** (1976), 703-716.
- [28] Theory of Self-synchronization in the Presence of Native Frequency Distribution and External Noises, *Physica D* **11** (1984), 212-226.
- [29] M.Shiino, Nonequilibrium phase transition in systems of stochastically perturbed oscillators, *Phys.Lett. A* **111** (1985), 396-398.
- [30] M.Shiino and M.Frankowicz, Synchronization of infinitely many coupled limit-cycle type oscillators, *Phys.Lett. A* **136** (1989), 103-108.
- [31] G.B.Ermentrout, Oscillator death in populations of "all to all" coupled nonlinear oscillators, *Physica D* **41** (1990), 219-231.

- [32] P.C.Matthews, R.E.Mirollo and S.H.Strogatz, Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators, *Physica D* **52** (1991), 293-331.
- [33] H.Sakaguchi, Desynchronization in a Population of Globally Coupled Identical Oscillators, *Prog.Theor.Phys.* **91** (1994), 693-698.

### Collective motion

- [34] K.Kaneko, Globally Coupled Chaos Violates the Law of Large Numbers but Not the Central-Limit Theorem, *Phys.Rev.Lett.* **65** (1990), 1391-1394. K.Kaneko, Mean field fluctuation of a network of chaotic elements, *Physica D* **55** (1992), 368-384.
- [35] H.Chaté and P.Manneville Collective Behaviors in Spatially Extended Systems with Local Interactions and Synchronous Updating, *Prog.Theor.Phys.* **87** (1992), 1-60.
- [36] G.Perez and H.A.Cerdera, Instabilities and Nonstatistical Behavior in Globally Coupled Systems, *Phys.Rev.A* **46** (1992), 7492-7497.
- [37] G.Perez S.Sinha and H.A.Cerdera, Order in the turbulent phase of globally coupled maps, *Physica D* **63** (1993), 341-349.
- [38] A.S.Pikovsky and J.Kurths, Do Globally Coupled Maps Really Violate the Law of Large Numbers? *Phys.Rev.Lett.* **72** (1994), 1644-1646.
- [39] K.Kaneko, Remarks on the mean field dynamics of networks of chaotic elements, *Physica D* **86** (1995), 158-170.
- [40] S.Morita, Bifurcations in Globally Coupled Chaotic Maps, accepted to *Phys.Rev.A*.
- [41] S.V.Ershov and A.B.Potapov, On Mean Field Fluctuations In Globally Coupled Maps, *Physica D* **86523** (1995), 523-558.

### Lyapunov Spectrum in High-dimensional Systems

- [42] P.Manneville, Liapunov exponents for the Kuaramoto-Sivashinsky model, *Lecture Notes in Physics* **230** (1985), 319-326.
- [43] K.Kaneko, Lyapunov Analysis and Information Flow in Coupled Map Lattices, *Physica D* **23** (1986), 436-447.



- [44] M.Yamada and K.Ohkitani, Lyapunov Spectrum of a Model of Two-dimensional Turbulence, *Phys.Rev.Lett.* **60** (1988), 983-986. M.Yamada and K.Ohkitani, Lyapunov Spectrum of a Model of Three-dimensional Turbulence, *J.Phys.Soc.Japan* (1987), 4210-4213.
- [45] G.Paladin and A.Vulpiani, Scaling law and asymptotic distribution of Lyapunov exponents in conservative dynamical systems with many degrees of freedom, *J.Phys.A: Math.Gen.* **19** (1986), 1881-1888. R.Livi, A.Politi and S.Ruffo, Distribution of characteristic exponents in the thermodynamic limit, *J.Phys.A: Math.Gen.* **19** (1986), 2033-2040. C.M.Newman, The Distribution of Lyapunov Exponents: Exact Result for Random Matrices, *Commun.Math.Phys.* **103** (1986), 121-126. R.Livi, A.Politi, S.Ruffo and A.Vulpiani, Liapunov Exponents in High-Dimensional Symplectic Dynamics, *J.Stat.Phys.* **46** (1987), 147-160. K.Kaneko and T.Konishi, Transition, Ergodicity and Lyapunov Spectra of Hamilton Dynamical Systems, *J.Phys.Soc.Japan* **56** (1987), 2993-2996.

#### General theory of dynamical systems

- [46] G.Benettin, L.Galgani and J.-M.Strelcyn, Kolmogorov entropy and numerical experiments, *Phys.Rev. A* **14** (1976), 2338-2345. R.A.Johnson, K.J.Palmer and G.R.Sell, J.M.Green and J.-S. Kim, The calculation of Lyapunov spectra, *Physica D* **24** (1987), 213-225. Ergodic property of linear dynamical systems, *SIAM J.MATH.ANAL.* **18** (1987), 1-33.
- [47] P.Grassberger and I.Procaccia, *Physica D* **9** (1983), 189-208. P.Grassberger, T.Schreiber and C.Schaffrath, NONLINEAR TIME SEQUENCE ANALYSIS, *Int.J.Bifurcation and Chaos* **1** (1991), 521-547.
- [48] T.Schreiber and P.Grassberger, A simple noise-reduction method for real data, *Phys.Lett.A* **160** (1991), 411-418.
- [49] T.C.Halsey, M.H.Jensen, L.P.Kadanoff, I.Procaccia and B.I.Shraiman, Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, *Phys.Rev.A* **33** (1986), 1141-1151. J.P.Eckmann and I.Procaccia, Fluctuations of dynamical scaling indices in nonlinear systems, *Phys.Rev.A* **34** (1986), 659-661.
- [50] J.P.Eckmann and D.Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Rev.Mod.Phys.* **57** (1985), 617-656.

#### Experiment and observation

- [51] J.Buck and E.Buck, Synchronous fireflies, *Scientific American* **234** (1976), 74-85.
- [52] J.Buck, Synchronous rhythmic flashing of fireflies, *Quart.Rev.Biol.* **63** (1988), 265-289.
- [53] B.J.Cole Is animal behavior chaotic? Evidence from the activity of ants *Proc.R.Soc.Lond.B* **244** (1991), 253-259.
- [54] E.P.Ko, T.Yomo and I.Urabe, Dynamic clustering of bacterial population, *Physica D* **75** (1994), 81-88.
- [55] K.Wiesenfeld, C.Bracikowsky, G.James and R.Roy, Observation of Antiphase States in a Multimode Laser, *Phys.Rev.Lett.* **65** (1990), 1749-1752.
- [56] K.Otsuka, Winner-takes-all dynamics and antiphase states in modulated multimode lasers, *Phys.Rev.Lett.* **67** (1991), 1090-1093.

#### Extension from global coupling

- [57] K.Kaneko and T.Yomo, Cell division, differentiation and dynamical clustering, *Physica D* **75** (1994), 89-102. K.Kaneko and T.Yomo, Isologous Diversification: A Theory of Cell Differentiation, preprint (1995).
- [58] T.Mizuguchi and M.Sano, Proportion Regulation in Globally Coupled Nonlinear Systems, *Phys.Rev.Lett* **75** (1995), 966-.
- [59] Y.Kuramoto, Scaling behavior of turbulent oscillators with non-local interaction, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995), 321-330.
- [60] F.Mertens, R.Imbihl and A.Mikhailov, Breakdown of global coupling in oscillatory chemical reactions, *J.Chem.Phys.* **99** (1993), 8668-8671. F.Mertens, R.Imbihl and A.Mikhailov, Turbulence and Standing Waves in oscillatory chemical reactions with global coupling, *J.Chem.Phys.* **101** (1994), 9903-9908.