

660

卷線における内部振動及
進行波に関する研究

西田富士夫

昭和30年10月

結 言

この種の問題の発展段階をLC線路の進行波現象と対比することは興味がある。即ち送電線上の進行波の問題は、その初期においては、T型、π型等の集中定数回路で取り扱われたが、今日では分布定数回路である導線系の場合も含めて簡明に定性的定量的に取り扱われている。

これと同様に巻線に関する研究は、LCその他の集中定数回路で模擬されてきたが、電気機器巻線のやうな、その規模の増大と実験技術の進歩による極超短時間領域の開発はこれを分布定数回路としての考察を必要とせしめた。又送電線と接続される電力系統の一要素としてのこの種の特性を知ることは、その分野において極めて重要である。

しかしながらその取り扱いは、Bewley氏や、Riidenberg氏等の二三の先駆者的な論文を除き立ち入って考察がなされていはいやうである。

これは一つはLC線路の解の簡明さによるが、それは逆にそれ以上の考察の困難なことを裏書しているものと考えられる。構造上からいっても、レール線や送電線と異なり自己巻線内で静電的電磁的な結合をもち、その影響は場合によつては全然無視できない。その結合の仕方、種々の巻線方式により異なるであらうが、本論文においては、電気機器関係の変圧器巻線及び発電機巻線におけるこの種の問題を結合を考慮して取り扱った。その考察結果は、かなり複雑なものもあるが、実測との一致は定性的に良好であり、電気機器巻線に限らず巻線一般のこの種の問題を取り扱う一つの基準を與えたものと思う。

終りに終始御指導を賜った恩師林重憲教授に深甚の感謝の意を表す。又種々の助言と文献等を指示下された姫路工業大学美禰忠雄教授ならびに神戸大学小川春吉教授、更に卒業研究において協力下された星野聰、京本義章、平山茂樹の諸君に感謝の意を表す。

目次

第1章	内部振動現象としての考察	1
	緒言及び歴史的展望	1
第1節	相互誘導作用を考慮した内部振動	2
1.1	直線分布 (Blume, Boyajian, Bewley 氏の解の 検討と厳密解及び近似解)	3
1.2	指数函数分布	18
1.3	鉄心内の磁束分布	24
1.4	損失による減衰を考慮したとき	29
1.5	指数函数分布 (m 分布) と自己インダクタンス 分布 (L 分布) 及び直線分布 (M 分布) との比 較	34
1.6	ニミの実測波形と波形の数値計算例	37
1.7	三相変圧器の内部振動	50
1.8	物理的考察	56
1.9	一般的論議	60
1.10	定常交流現象	62
1.11	差分方程式としての取り扱い	65
第2節	鉄心の減衰に與える影響	69
2.1	ニミの実験的予想	70
2.2	磁束に対する渦流効果 漏洩磁束を無視したとき	72
	漏洩磁束を考慮したとき	74
2.3	内部振動の基本周波数が $1\text{KC} \sim 60\text{KC}$ にある 普通の場合の等価回路及び L 分布としての解	77
2.4	内部振動の基本周波数が 100KC 以上の極めて 特別な場合の内部振動に及ぼす減衰効果	79
2.5	L, C, K, R 回路の検討	81
第3節	高周波共振における過渡現象	83
3.1	相乗計算による基本波の勵振状態	83
3.2	実験例	88
第4節	二次巻線を考慮したとき	91
4.1	二巻線変圧器としての考察	92

4. 2	一次巻線から二次巻線への移行現象における 一つの近似的な方法	98
------	-----------------------------------	----

第2章	進行波現象としての考察	101
-----	-------------	-----

第1節	電磁界からの考察	102
-----	----------	-----

1. 1	螺線の中に円筒導体が共軸的にふかれた場合 の位相速度及び波動インピーダンスに関する 考察	102
------	--	-----

1. 2	Poritsky 氏の考察と検討	112
------	------------------	-----

1. 3	等価回路との関係	115
------	----------	-----

第2節	等価回路による考察	119
-----	-----------	-----

2. 1	L, C, K 分布の半無限長巻線に沿う進行波	119
------	-------------------------	-----

(i)	物理的な考察	119
-----	--------	-----

(ii)	複素積分による解	124
------	----------	-----

(iii)	内部振動との関係	125
-------	----------	-----

(iv)	損失による減衰のある場合	128
------	--------------	-----

2. 2	指数函数分布をもつ半無限長巻線に沿う進行波	128
------	-----------------------	-----

(i)	波頭部分の考察	128
-----	---------	-----

(ii)	定積分形で與えた解	131
------	-----------	-----

2. 3	一般的論議	131
------	-------	-----

(i)	両方向に広がっている無限長巻線の場合	132
-----	--------------------	-----

(ii)	半無限長巻線の場合	139
------	-----------	-----

第3章	遅延線発電機巻線の進行波特性	142
-----	----------------	-----

第1節	遅延線(折り返し型)の進行波	142
-----	----------------	-----

第2節	発電機巻線の進行波特性	145
-----	-------------	-----

2. 1	隔極接続の場合	147
------	---------	-----

(i)	自己相巻線の結合だけを考慮したとき	147
-----	-------------------	-----

(ii)	他相巻線との結合を考慮したとき	153
------	-----------------	-----

2. 2	隣極接続の場合	167
------	---------	-----

結 言	172
-----	-----

参考文献	173
------	-----

第1章 内部振動現象としての考察 (変圧器巻線)

緒言及び史的展望

この種の向題に關する研究は、單一送電線の研究と同様に古くから行われて来た。実測面では衝擊電圧試験規程の基礎資料として我が国でも宮本茂業氏⁽⁷⁾(昭14)三浦倫義⁽⁸⁾(昭11)等の研究がある。雷害防護という實際的な立場からは、1921年鳥養博士の創案による非共振変圧器ならびにこれの発展であるWeed氏の並列補正法(1922)によって一応の原理的な解決がみられ、又現在では、過渡現象直視装置により敏速に合理的な設計を行うべき一つの方法がAbetti⁽¹³⁾氏(1954)等により提案されている。又B.B.C.において1942~1946にくわしい実験的研究が行なわれたやうである。

一方内部振動現象の機構の説明には、初期においては、L.C線路で模擬されていたが、1915年K.W. Wagner氏は巻線間の静電容量の導入を提唱し、現象初期における静電的直達分を解明した。これは非共振変圧器考案の一つの基礎的知識を與えたことは勿論である。ついでBlume, Boyajian 両氏は巻線間の電磁的結合が距離の一次函数で與えられるという仮定のもとに空間高調波の分布を考察し、1931年Bewley⁽¹⁾氏がこれをまとめた。これは1.1節でのべる如く実は、近似解であるのであるが、電磁結合を始め導入した点に大きな意義がある。昭和13年小川香吉博士は静電的、電磁的結合を考慮して $e^{i\omega t}$ という定常状態における電位分布を極めて一般的に考察されたが、その一般性のゆえに簡明な結論がでなかつたやうである。昭和19年菅野正雄氏は、さきのBewley氏等の解析が誤謬をおかしている点を指摘され、そのために電磁結合に關するさきの諸結果の信篤性が失なわれ、そのまゝ今日にいたつていようである。

最近A. Hochrainer⁽⁵⁾氏の論文ETZ 74 (1953)があるが別にWagner氏のものと同様に原理的に異なるところはない。又Paritsky⁽²²⁾氏(1953)の研究があるが改めて第二章で考察する。宮本茂業氏のBewley氏との会見記に「非共振変圧器の起きた今日、相互誘導に關する立ち入った論議はあまり必要はないであらう。」というのがあるが、これは当面の技術的向題の解決という意味では當をえていようが、本論文の緒言でのげた如く、この種の向題をやゝ一般的に取り扱おうとする理論的な立場としては、是非ある程度解明されねばならぬ向題である。

本論文の第1節においてはこの電磁結合の問題をとり上げ、さきの *Bewley* 氏等の一次函数分布の解が近似解の意味をもつことを指摘し、ついで電磁結合を表わす近似函数として指数函数を提案し、この場合について考察を行った。事実内部振動の基本周期は、大体 $1\text{KC} \sim 50\text{KC}$ の範囲でこの範囲においては鉄心は直線分布（一次函数分布）で與えられる程強い結合を與えないし結合の強度を任意に與えられる、又進行波現象として取り扱う場合にいろいろの不備を生ずる。指数函数分布として考察した結果は、近似的な表現とすれば簡明な形となり、*Bewley* 氏等の直線分布や *Wagner* 氏等の一様な自己インタフダンス分布の結果を簡明な形で包含し、又実験結果との対応もかなり良好なものと考えられる。一般的論議においては相互誘導函数の *Fourier* 変換可能な偶函数で與えられる一般的な場合について実用的な近似式を出した。又巻線が何箇かのコイル集団をなして、隣接コイル間にだけ結合のある場合について考察した。

第2節においては、一様な自己インタフダンス分布をもつ回路について主として鉄心内の渦流損失が内部振動の減衰に及ぼす効果について考察した。

第3節においては孤立接地等において現われる高周波共振の過渡電位分布やその時定数をしらべた。

第4節においては二巻線変圧器としてその概略の性質を考察し、又一次巻線から二次巻線への移行現象における一つの近似的方法をのべた。

第1節 相互誘導作用を考慮した内部振動

内容梗概

従来相互誘導作用を取り扱ったよく知られた *Bewley* 氏等の⁽¹⁾ 解析に誤謬があるものとして、その所論に疑義をさしはさまれた⁽²⁾ 3の⁽³⁾ 状態になつていた。1, 1節において厳密な演算子解を求め、これから近似操作を行うことによつて *Bewley* 氏の解が近似解の意味をもつことを示した。1, 2 ~ 6節では新たに指数函数を相互誘導函数として提案し、厳密な演算子解および近似解を求め、更に損失の影響を等價的に抵抗素子を入れて近似解を出し、固有振動数分布、波形等を求め、一様な自己インタフダンス分布及び直線的結合を包含することを示し、又実験結果との対比を行なった。又相互誘導の導

入は空心の場合に於いては層巻等の場合に必要であるが、特に変圧器巻線のやうに鉄心をもつ場合、鉄心内の渦流効果や磁化の遅れによる相互誘導の効果の減少はみるが、(1~10 μs の波頭附近の現象に対しては鉄心による結合は空心の結合と同じ程度で減衰を喫える真の空心の場合と異なる。)基本固有周期が1KC~50KCの範囲にあるやうな普通の内部振動の考察、例えは固有振動数スペクトルや波形等の考察に於いては、相互誘導の効果を考慮せねば内部振動現象の重要な諸点は殆んど解明せられないことを示した。又1.3節では鉄心の磁束分布の測定と簡易な考察を行い、更に鉄心を単位電流で磁化したときの磁束増大の時定数の大きさを検討した。1.7節ではその応用として三相変圧器の場合の取り扱いを示した。1.8節では1.1~2節の考察がより解析的にすむたため、これを補うべく多少粗雑ではあるが、物理的な解釈をのべた。1.9節では相互誘導函数が Fourier 変換可能な偶函数で與えられる一般的な場合について物理的な考察を主体として実用的な近似式を導出した。1.10節では $e^{i\omega t}$ という簡単な定常交流現象における電位分布を求めた。1.11節で巻線のいくつかのコイル集団にわかれていて隣接コイル間だけに結合のある場合について考察した。このやうな問題に対して Böhm 氏の考察があるが元来その取り扱いが無理ではつきりした結論がでていない。ここで差分方程式として考察し、相互誘導の固有振動数スペクトルに及ぼす効果について述べた。

1.1 直線分布 (Blume, Boyajian, Bewley 氏の解の検討と厳密解及 ω 近似解)

基本方程式及 ω 假定

Bewley 氏等はその基本方程式を次のやうな仮定のもとに導出している。Fig 1.1 において磁束の漏洩の通路の有効長を $2a$ とし、そのコイルスタックの両側に全巻線を取り囲む相互磁束の全部を充分包含することが出来る長さ a なる鉄心を附加して両端開放した鉄心で代置している。今単位長毎の巻回数を n 、巻線中の電流を i とすると、 y 真に生ずる起磁力は、 $0.4\pi n i dy$ 、これらの起磁力による磁束に対する磁気抵抗は、平均の巻回の長さを l として

$$R = \frac{1}{\mu} \left(\frac{l}{a+l-y} + \frac{l}{a+y} \right) = \frac{l(z+a+l)}{(a+l-y)(a+y)\mu}$$

ただし l は巻線の全長である。又座標 x, y は中性真よりとるものとする。今鉄心の導磁率が十分大きく (μ 無限大と假定し) 磁束は

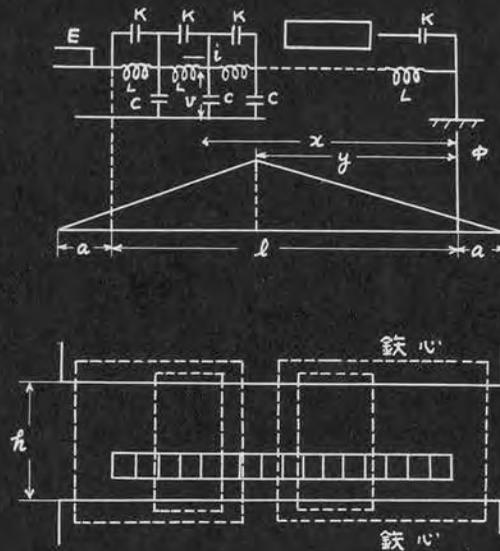


Fig 1.1

鉄心の表面から一様に漏洩し、従つて鉄心内の磁束分布は図のやうに直線的であると仮定すると、 y 点より左側の x 点における巻線要素と鎖交する磁束の割合は

$$\frac{a+l-x}{a+l-y}$$

従つて x 点より右側における全起磁力によつて x 点を鎖交する全磁束は

$$\Phi_1 = \frac{0.4\pi \Delta n}{(2a+l)h} \int_0^l i(y,t)(a+x)(a+l-y) dy$$

となる。同様に x 点の左側における全起磁力によつて x 点を鎖交する磁束は

$$\Phi_2 = \frac{0.4\pi \Delta n}{(2a+l)h} \int_x^l i(y,t)(a+x)(a+l-y) dy$$

となる。従つて x 点における全鎖交磁束は

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

以上の考察の結果、次のやうな基礎方程式を導出することができる。

Fig 1.1 において単位長毎の巻線間の静電容量を K 、対地静電容量を C とし、巻線の全長を l にせらば、中性点から x, y を測定し

たゞのそとると、巻線上の電位 v 、電流 i に關して次の基礎方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{L}{2a+1} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^x (a+1-x)(a+y) i(y,t) dy + \int_x^1 (a+x)(a+1-y) i(y,t) dy \right\} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t} - K \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x^2}$$

$$\text{ただし } L = \frac{0.4\pi \rho n^2}{h}$$

上記の方程式に Laplace 変換を施し

$$V(y,p) = \mathcal{L}^{-1} v(y,t), \quad I(y,p) = \mathcal{L}^{-1} i(y,t)$$

とすると

$$\frac{dV}{dx} = \frac{L}{2a+1} p \left\{ \int_0^x (a+1-x)(a+y) I(y,p) dy + \int_x^1 (a+x)(a+1-y) I(y,p) dy \right\} \quad (1.1')$$

$$\frac{dI}{dx} = CpV - Kp \frac{d^2V}{dx^2}$$

となる。

演算子解

(1.1') を x について微分すると

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{LP}{2a+1} \left\{ - \int_0^x (a+y) I(y,p) dy + \int_x^1 (a+1-y) I(y,p) dy \right\} \quad (1.2)$$

$$\frac{d^3V}{dx^3} = LPI(x,p)$$

従つて (1.1') から次のやうな常微分方程式を得る。

$$\frac{d^4V}{dx^4} - p^2LK \frac{d^2V}{dx^2} + LCP^2V = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{故に } V = \sum_{\nu=1}^4 A_{\nu} e^{\sigma_{\nu} x} \quad (1.4)$$

$$r = r' L \quad \gamma^2 = \frac{P^2 L K \pm \sqrt{P^4 L^2 K^2 - 4 L C P^2}}{2} \equiv \begin{cases} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$(1.1') \text{ から } I = \sum_{\nu=1}^4 \left(\frac{C P}{\delta_{\nu}} - K P \delta_{\nu} \right) A_{\nu} e^{\delta_{\nu} x} + C \quad (1.6)$$

$r = r' L$ A_{ν} , C は積分定数である。(1.3) は (1.1') を三回微分してえられるが (1.1') という微積分方程式の微分に関する階数は2階である。従って (1.3) という解の中に含まれる4箇の積分定数の間には2箇の関係式が存在する筈である。事実 (1.1') (1.2) より

$$x=0 \quad \text{で} \quad \frac{dV}{dx} = a \frac{d^2 V}{dx^2} \quad (1.7)$$

$$x=1 \quad \text{で} \quad \frac{dV}{dx} = -a \frac{d^2 V}{dx^2}$$

という二箇の関係式が成立する。上式と (1.3) から

$$\frac{C P - K P \delta_{\nu}^2}{\delta_{\nu}^2} = -\frac{\delta_{\nu}}{L P}$$

に注意して

$$\sum A_{\nu} (\delta_{\nu} - a \delta_{\nu}^2) = 0 \quad (1.7')$$

$$\sum A_{\nu} (\delta_{\nu} + a \delta_{\nu}^2) e^{\delta_{\nu}} = 0$$

(1.7') は又實際に (1.4) (1.6) を (1.1') に代入して未定係数法によりその成立の必要を直接確かめることができる。Bewley 氏等の計算をこのやうな演算子法による計算過程になおして考えると彼等はこの間の制限 (1.7) を全く顧慮していいいことがわかる

中性負接地

まず次に端子条件として

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \quad \text{で} \quad V=0 \\ x=1 \quad \text{で} \quad V=E \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

という中性負接地単位電圧印加の場合を考える。従って

$$\begin{aligned} \sum A_{\nu} &= 0 \\ \sum A_{\nu} e^{\delta_{\nu}} &= E \end{aligned} \quad (1.8')$$

が成り立つ。

今

$$\begin{aligned}
 A_1' &= A_1 e^{\frac{\alpha x}{2}} & a &= \cosh \frac{\alpha}{2}, & b &= \cosh \frac{\beta}{2}, \\
 & & c &= \sinh \frac{\alpha}{2}, & d &= \sinh \frac{\beta}{2} \\
 m_1 &= \alpha \sinh \frac{\alpha}{2} + a \alpha^2 \cosh \frac{\alpha}{2} \\
 n_1 &= \beta \sinh \frac{\beta}{2} + a \beta^2 \cosh \frac{\beta}{2} \\
 m_2 &= \alpha \cosh \frac{\alpha}{2} + a \alpha^2 \sinh \frac{\alpha}{2} \\
 n_2 &= \beta \cosh \frac{\beta}{2} + a \beta^2 \sinh \frac{\beta}{2}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A_1' \\ m_1 \\ n_1 \\ m_2 \\ n_2 \end{aligned}} \right\} (1.9)$$

と (1.7') (1.8') より

$$\begin{aligned}
 A_1' &= \frac{E}{4} \left(\frac{n_1}{n_1 a - m_1 b} + \frac{n_2}{n_2 c - m_2 d} \right) \\
 A_2' &= \frac{E}{4} \left(\frac{n_1}{n_1 a - m_1 b} - \frac{n_2}{n_2 c - m_2 d} \right) \\
 A_3' &= \frac{E}{4} \left(\frac{m_1}{m_1 b - n_1 a} + \frac{m_2}{m_2 d - n_2 c} \right) \\
 A_4' &= \frac{E}{4} \left(\frac{m_1}{m_1 b - n_1 a} - \frac{m_2}{m_2 d - n_2 c} \right)
 \end{aligned}$$

となり積分定数が決定される。従って求める演算子函数は

$$\begin{aligned}
 V(P) &= \frac{n_1 \cosh(\alpha x - \frac{\alpha}{2}) - m_1 \cosh(\beta x - \frac{\beta}{2})}{n_1 \cosh \frac{\alpha}{2} - m_1 \cosh \frac{\beta}{2}} \frac{E}{2} \\
 &+ \frac{n_2 \sinh(\alpha x - \frac{\alpha}{2}) - m_2 \sinh(\beta x - \frac{\beta}{2})}{n_2 \sinh \frac{\alpha}{2} - m_2 \sinh \frac{\beta}{2}} \frac{E}{2} \\
 &\equiv V_1(P) + V_2(P) \equiv \frac{E}{2} \frac{N_1(P)}{M_1(P)} + \frac{E}{2} \frac{N_2(P)}{M_2(P)}
 \end{aligned}
 \quad (1.10)$$

従って端子に $e^{j\omega t}$ という週期的な電圧を印加したときの定常解は上式に $P=j\omega$ とおけば比較的容易に求められる。又 (1.5) より

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \left. \begin{aligned} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{aligned} \right\} = \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ \begin{aligned} P^2 LK - \frac{C}{K} + O\left(\frac{1}{P^2}\right) \\ \frac{C}{K} - O\left(\frac{1}{P^2}\right) \end{aligned} \right.$$

であるから

$$\lim_{t \rightarrow 0} V(x, t) = \lim_{P \rightarrow \infty} V(x, P) = E \frac{\sinh 2x}{\sinh 2}$$

ただし $\lambda = \sqrt{c/k}$

となつて、初期分布は静電的に定まつて電磁的な結合に関係しない。
又

$$\lim_{p \rightarrow 0} n_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{c}{\beta^2} \left\{ \frac{1}{2} - a + o(\beta) \right\}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} m_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{c}{\alpha^2} \left\{ \frac{1}{2} - a + o(\alpha) \right\}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} n_2 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{c}{\beta^2} \left\{ 1 + o'(\beta) \right\}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} m_2 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{c}{\alpha^2} \left\{ 1 + o'(\alpha) \right\}$$

但し、 $o(\alpha)$, $o(\beta)$ 等はいずれも $p \rightarrow 0$ における無限小である。従つて終局分布は、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = \lim_{p \rightarrow 0} v(x, p) = xE$$

これらは物理的な予想と一致している。即ち初期分布においては巻線中に電流が $t \rightarrow 0$ で流れないため、純静電的結合だけによつて定まる。終局においてはたとえごく小さい損失による振動の減衰を考えると、時間的変化が終局において存在せず、電磁結合の影響の入らないことは明らかである。この場合は減衰が零の場合であるが、減衰を零に極限せしめれば解と一致することが考えられるからである。

過渡解

(1.10) から展開定理によつてその時間函数を求めればよいのであるが、多少複雑となるので先ず形式的に見易い場合、即ち $a=0$, $K=0$ という簡単な場合について考える。

(i) $a=0$ $K=0$ の場合

この場合の解は

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + Lc p^2 v = 0 \quad (1.3')$$

という方程式を満足し (1.7) という条件式つまり

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad \frac{dv}{dx} \Big|_{x=1} = 0 \quad (1.7')$$

と端子条件

$$x=0 \quad z \quad V=0,$$

$$x=1 \quad z \quad V=E$$

これより演算子解は

$$\begin{aligned} V &= \frac{E}{\Delta} \left\{ (\cos \gamma - \cosh \gamma)(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \right. \\ &\quad \left. + (\sin \gamma + \sinh \gamma)(\sin \gamma x - \sinh \gamma x) \right\} \\ &\equiv \frac{N(P)}{M(P)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

但し

$$\Delta = Z(1 - \cos \gamma \cosh \gamma), \quad \gamma^2 = \pm \sqrt{-LCP}$$

さて次に $N(0)/M(0)$ より終局分布を求めるのであるがこの場合は次のやうにして求めるのが簡明である。(1.11) から

$$\begin{aligned} V &= A(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) + \left\{ \frac{E}{\sin \gamma} \right. \\ &\quad \left. - \frac{D \sinh \gamma + A(\cos \gamma - \cosh \gamma)}{\sin \gamma} \right\} \sin \gamma x \\ &\quad + D \sinh \gamma x \end{aligned}$$

ただし A, D は積分定数で A, D を係数として含む項は $\gamma \rightarrow 0$ のときそれぞれ打ち消して、 $\gamma=0$ 即ち $p=0$ は $\frac{V(P)}{P}$ の単極であることをわかる。

$$\therefore \lim_{P \rightarrow 0} V = E x = \frac{N(0)}{M(0)}$$

(1.11) は明らかに一價函数であるから展開定理が適用できる。分母の零点は

$$1 - \cos \gamma \cosh \gamma = 0$$

から求められる。然るに

$$\gamma = \pm \sqrt{\pm j \sqrt{LC} P}$$

となるが、損失を考慮してないのであるから極は $P = j\omega$ (ω 実数) なる虚軸上に存在することわかる。従つて

$$\gamma = \pm \sqrt{\mp \sqrt{LC} \omega} = \begin{cases} \pm j \sqrt{\omega} (LC)^{\frac{1}{4}} = j \gamma' \\ \pm \sqrt{\omega} (LC)^{\frac{1}{4}} = \gamma' \end{cases}$$

いずれにしても

$$\cosh \gamma' \cos \gamma' = 1$$

であつてこれより極端求められる。これから四式的に γ' を求めると

$$\gamma'_n = \pm \left(\frac{2n+1}{2} \pi + \epsilon'_n \right)$$

とおくことができる。ここに ϵ'_n は $n \rightarrow \infty$ のとき $\epsilon'_n \rightarrow 0$ となり、近似的に

$$\epsilon'_n = (-1)^n \operatorname{sech} \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

となる。従つて展開定理を適用すると

$$v(x, t) = E x + Z E \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(\cosh \delta'_n - \cos \delta'_n)(\cosh \delta'_n x - \cos \delta'_n x)}{\delta'_n (\cosh \delta'_n \sin \delta'_n - \sinh \delta'_n \cos \delta'_n)} - \frac{(\sinh \delta'_n + \sin \delta'_n)(\sinh \delta'_n x - \sin \delta'_n x)}{\delta'_n (\cosh \delta'_n \sin \delta'_n - \sinh \delta'_n \cos \delta'_n)} \right] \cos \omega_n t \quad (1.12)$$

この場合は、計算は上述のやうに比較的簡単に行うことができるが、 $a=0$ の場合で（これは 1.2 節で述べる指数函数分布のときは $m \rightarrow \infty$ の場合に当る）一つの極端な場合である。（1.15'）等式のやうにこの場合は Bewley の結果式との偏差が大きくなるが、たゞそれは固有振動数スペクトルが近似的に調波の次数の二乗に比例すること等の傾向はほぼ一致する。

ii) 一般的のとき

扱次に (1.10) に展開定理を適用するのであるが、(1.10) が一價函数であることを確かめよう。

$$a \equiv 2 \sqrt{\frac{c}{L}} \frac{1}{K} \quad b \equiv \sqrt{\frac{LK}{2}}$$

とおくと (1.5) より

$$\alpha = b \sqrt{p} (\sqrt{p+a} + \sqrt{p-a}) \equiv A + B$$

$$\beta = b \sqrt{p} (\sqrt{p+a} - \sqrt{p-a}) \equiv A - B$$

とおくと α と β とを $M_1(p)$ につゞけて (1.9) (1.10) から

$$M_1(p) = a(\beta^2 - \alpha^2) \cosh \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{\beta}{2} + \beta \sinh \frac{\beta}{2} \cosh \frac{\alpha}{2} - \alpha \sinh \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{\beta}{2}$$

$$= -2AB, a(\cosh A + \cosh B) - A \sinh B - B \sinh A$$

$$= AB \times (-\text{偶函数})$$

$N_1(p)$ についても

$$N_1(p) = AB \times (-\text{偶函数})$$

であることがいえるから $\frac{N_1(p)}{M_1(p)}$ は - 偶函数である。 $N_2(p)/M_2(p)$ に関しても同様なことがいえて $V(p)$ は - 偶函数であることがいえるから展開定理が適用できる。従って (1.10) から

$$V(x,t) = Ex + \frac{E}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{n_i} \frac{N_i(p_{n_i})}{p_{n_i} \frac{dM_i(p_{n_i})}{dp_{n_i}}} e^{p_{n_i} t} \quad (1.13)$$

損失項を無視していろのであるから、 $p = j\omega$ (ω 実数) のみで $V(p)$ の極であることがわかる。従って (1.5) より α は実数、 β は虚数となり

$$\beta = j\beta' \quad (\beta' \text{ 実数})$$

とすると $V_1(p)$ の極は

$$-(\beta' \tan \frac{\beta'}{2} + a\beta'^2) = \alpha \tanh \frac{\alpha}{2} + a\alpha^2 \quad (1.14)$$

から決定され、 $V_2(p)$ の極は

$$\beta' \cot \frac{\beta'}{2} - a\beta'^2 = \alpha \coth \frac{\alpha}{2} + a\alpha^2 \quad (1.14')$$

より算定される。(1.5) から

$$\frac{\alpha^2}{\beta'^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \beta'^2} \quad \text{ただし } \lambda^2 = C/K$$

となる。これより α を β' の函数として (1.14) 及 (1.14') を図式的に種々の α, λ を媒介変数として解いた例を Fig 1.2 Fig 1.2' に示す。図によれば

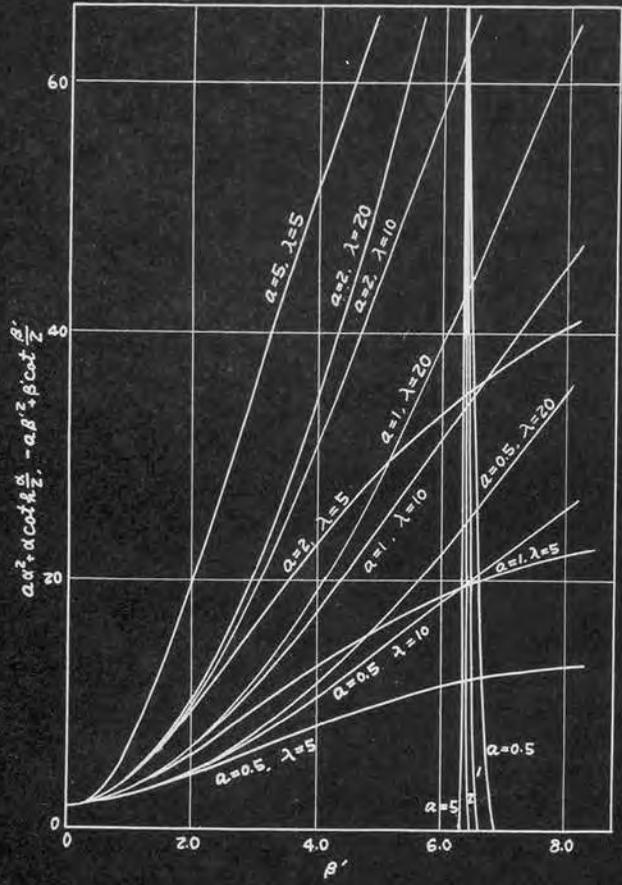


Fig 1.2

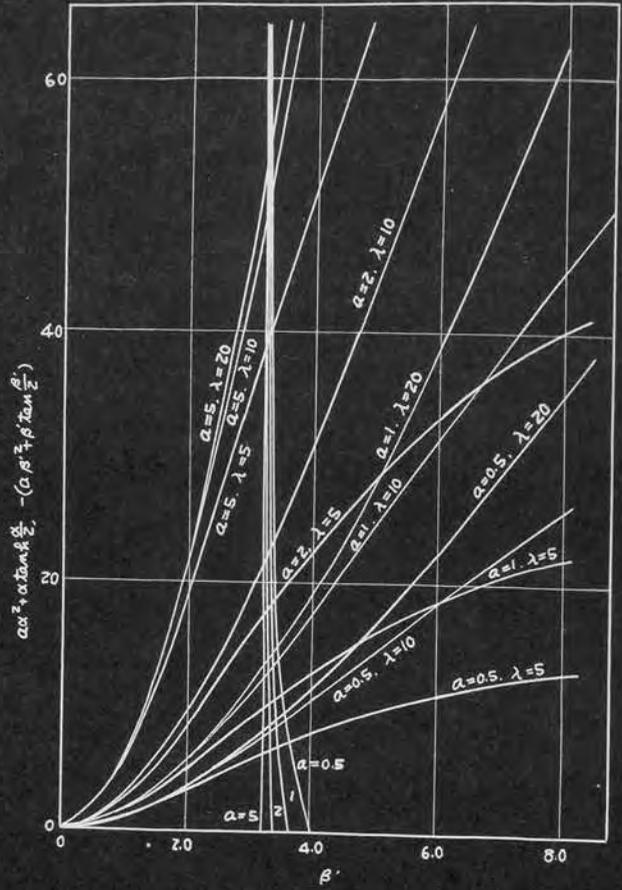


Fig 1.2'

$$\beta_{1n}' = (2n-1)\pi(1 + \epsilon_{1n})$$

$$\beta_{2n}' = 2n\pi(1 + \epsilon_{2n}) \quad n=1, 2, 3 \dots$$

と書くことができる。ここに ϵ_{1n} ϵ_{2n} は $n \rightarrow \infty$ で零に収束するものであるが、Taylor 展開による一次近似でその値を求めると、

$$\epsilon_{1n} = \frac{1}{a \left\{ \frac{\alpha^2}{2} + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{2} \right\} - 1 + \frac{\alpha}{2} \tanh \frac{\alpha}{2}}$$

$$\alpha^2 = \frac{\lambda^2 (2n-1)^2 \pi^2}{\lambda^2 + (2n-1)^2 \pi^2}$$

$$\epsilon_{2n} = \frac{1}{a \left(\frac{\alpha^2}{2} + 2n\pi^2 \right) - 1 + \frac{\alpha}{2} \coth \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{特に } \alpha^2 = \frac{\lambda^2 \cdot 4n^2 \pi^2}{\lambda^2 + 4n^2 \pi^2}$$

上式より a , n 及 α/λ が大きい程、 ϵ_n が小さくなることがわかるが前者に比し後者の影響は小さいことがわかる。 $a=0$, $K=0$ のときにはのべた(i)の場合には β_{1n}' は $(2n-1)\pi$ よりかなりはずれるが、大体の目安をつけるためにしらべると

$$(2n-1)\pi \epsilon_{1n} = \frac{2}{\tanh \frac{(2n-1)\pi}{2} - \frac{2}{(2n-1)\pi}}$$

となり、 $n \rightarrow \infty$ でも 2 という有限の差が残るが相対誤差は勿論零となる。 ϵ_{2n} の場合も同様である。

基本波

$\lambda^2 \backslash a$	0.5	1	2	5
25	3.658	3.440	3.304	3.260
100	3.598	3.406	3.284	3.201
400	3.580	3.396	3.280	3.196

第二高調波

$\lambda^2 \backslash a$	0.5	1	2
25	6.660	6.482	6.396
100	6.592	6.456	6.382
400	6.560	6.436	

Fig 1.2 Fig 1.2' より求めた β' の固有値を上表に示す。要するに固有値 β' に関し z は電磁結合の大小を表わす媒介変数 a が大きい程、又高調波の次数 n が大きい程、Bewley 氏の結果に近づくこととなる。その誤差の大小は、普通の場合基本波を大きくして 10% の

程度で第二, 第三調波に与るにつれて減少する。

次に展開定理により時間函数を求める。(1.5)より

$$\frac{d\alpha}{dP} = \frac{1}{P} \frac{\alpha^3}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \frac{d\beta}{dP} = \frac{1}{P} \frac{\beta^3}{\alpha^2 - \beta^2}$$

従って

$$\begin{aligned} -(\alpha^2 - \beta^2) P_n \frac{dM_1}{dP_n} &= \sinh \frac{\beta}{2} \cosh \frac{\alpha}{2} \left(\beta^3 + \frac{\alpha\beta^5}{2} - \frac{\alpha\alpha^2\beta^3}{2} \right) \\ &+ \cosh \frac{\beta}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} \left(\alpha^3 + \frac{\alpha\alpha^5}{2} - \frac{\alpha\beta^2\alpha^3}{2} \right) \\ &+ \cosh \frac{\beta}{2} \cosh \frac{\alpha}{2} \left(2\alpha\beta^2 + \frac{\beta^4}{2} + \frac{\alpha^4}{2} + 2\alpha\alpha^4 \right) \\ &+ \sinh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\beta}{2} \left(-\frac{\alpha}{2}\beta^3 - \frac{\beta}{2}\alpha^3 \right) \\ &\equiv -(\alpha^2 - \beta^2) \Delta_1 n \end{aligned}$$

$$\Gamma = \Gamma' L \quad \alpha^2 = \frac{\lambda^2 \beta^2}{\lambda^2 + \beta^2}$$

同様にして

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \beta^2) P_n \frac{dM_2}{dP_n} &= \cosh \frac{\beta}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} \left(\beta^3 + \frac{\alpha\beta^5}{2} - \frac{\alpha\alpha^2\beta^2}{2} \right) \\ &+ \cosh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\beta}{2} \left(\alpha^3 + \frac{\alpha\alpha^5}{2} - \frac{\alpha\beta^2\alpha^2}{2} \right) \\ &+ \sinh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta^4}{2} + 2\alpha\beta^4 + \frac{\alpha^4}{2} + 2\alpha\alpha^4 \right) \\ &+ \cosh \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{\beta}{2} \left(-\frac{\beta\alpha^3}{2} - \frac{\alpha\beta^3}{2} \right) \\ &\equiv (\alpha^2 - \beta^2) \Delta_2 n \end{aligned}$$

(1.15₀)

従って求める時間函数は

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \frac{E}{2} \left\{ \frac{N_1(0)}{M_1(0)} + \frac{N_2(0)}{M_2(0)} \right\} + E \sum \frac{N_1(\alpha, \beta)}{P_n \frac{dM_1}{dP_n}} \cos \omega_1 n t \\ &+ E \sum \frac{N_2(\alpha, \beta)}{P_n \frac{dM_2}{dP_n}} \cos \omega_2 n t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E\chi + E\sum \frac{\cos \omega_1 n t}{\Delta_{1n}} \left\{ (\beta_n \sinh \frac{\beta_n}{2} + a\alpha_n^2 \cosh \frac{\beta_n}{2}) \cosh(\alpha_n x - \frac{\alpha_n}{2}) \right. \\
&\quad \left. - (\alpha_n \sinh \frac{\alpha_n}{2} + a\alpha_n^2 \cosh \frac{\alpha_n}{2}) \cosh(\beta_n x - \frac{\beta_n}{2}) \right\} \\
&+ E\sum \frac{\cos \omega_2 n t}{\Delta_{2n}} \left\{ (\beta_n \cosh \frac{\beta_n}{2} + a\beta_n^2 \sinh \frac{\beta_n}{2}) \sinh(\alpha_n x - \frac{\alpha_n}{2}) \right. \\
&\quad \left. - (\alpha_n \cosh \frac{\alpha_n}{2} + a\alpha_n^2 \sinh \frac{\alpha_n}{2}) \sinh(\beta_n x - \frac{\beta_n}{2}) \right\} \\
&\hspace{20em} (1.15)
\end{aligned}$$

上式の如く時間函数は α, β 従って固有値 β' の系列で厳密に求めることのできるが複雑である。それと適當な近似式を求めるべきであるが精度が高くして簡明な近似式は簡單に求められぬ。それで近似を行つて Bewley 代り求めた式と関連をつけることにする。

先ず

$$\beta'_n \cong (2n-1)\pi \quad \text{及} \quad \alpha' \cong \varepsilon^{-\frac{\alpha}{2}} \ll \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}$$

と近似する。

$$\frac{E}{2} \frac{N_1(P)}{P_n \frac{d}{dP_n} M_1(P_n)} \cong \frac{-(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + a\alpha^2) \sinh \beta x}{\beta^3 \{z + a(\beta^2 - \alpha^2)\} - a\beta(\beta^2 + \alpha^2)} E \quad (1.15')$$

同様：

$$\frac{E}{2} \frac{N_2(P)}{P_n \frac{d}{dP_n} M_2(P_n)} \cong \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + a\alpha^2) \sinh \beta x}{\beta^3 \{z + a(\beta^2 - \alpha^2)\} - a\beta(\beta^2 + \alpha^2)} E$$

次に $|\beta|, |\alpha|$ を最小 π の大きさにみつもり、 a がかなり大きくて更に $|\alpha|, |\beta|$ 等を $|\alpha|^2, |\beta|^2$ 等に比して無視するという粗い近似を行ふ。

$$\frac{E}{2} \sum \frac{N_1(P_n)}{P_n \frac{d}{dP_n} M_1(P_n)} E^{P_n t} \cong \sum \frac{-\alpha^2 \sin \beta' x}{\beta'^3} z E \cos \omega_1 t$$

$$\therefore \oint V_1(P) \cong \frac{E}{2} + z E \sum \frac{-1}{\Delta \pi} \frac{\lambda^2 \sin \Delta \pi x}{\lambda^2 + \Delta^2 \pi^2} \cos \omega_1 t$$

$$\Delta = 2n-1 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(1.15'')$$

同様に

$$\frac{E}{2} \sum \frac{N_2(p)}{P_n \frac{d}{dp_n} M_2(p_n)} \varepsilon P_n t \cong \sum \frac{a^2 \sin \beta' x}{\beta^3} Z E \cos \omega t$$

$$\therefore \int V_2(p) \cong \frac{E}{2} + Z E \sum \frac{1}{a \pi} \frac{\lambda^2 \sin \delta \pi x}{\lambda^2 + a^2 \pi^2} \cos \omega t$$

$$\delta = 2n \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

故に

$$V(x, t) = \int V_1(p) + \int V_2(p)$$

$$\cong E x + Z E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^2}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n \pi} \cos \omega_n t \sin n \pi x \quad (1.16)$$

$$\omega_n \cong \frac{n^2 \pi^2}{\sqrt{L(C + n^2 \pi^2)}}$$

このやうにして厳密解 (1.15) より Bewley 氏の解 (1.16) との関聯が
ついたが、その導出の過程を辿るときは結果的にみて (1.16) は基本
波附近で固有振動数及び振幅に 10% 内外の誤差を含み、調波の次数
の増大とともにかなりはやく誤差は減少することがわかる。電力系
統におけるこの種の問題においてその簡明さを思い合わせると上式
(1.16) は実用上差支えない近似式と看せられる。

中性点開放の場合

この場合は、その演算子解は中性点接地の場合の (1.10) のやうに
二項の和の形に分解できず、従つてさきのやうな方法で簡単に求め
ることはできない。しかし $a=0$, $K=0$ の特別な場合は (1.3') (1.11)
のやうに計算が簡単にできる利点があるので先づこの場合について
その解を求める。

$$x=0 \quad \text{で} \quad I=0, \quad x=1 \quad \text{で} \quad V=E$$

という端子条件と (1.7'') という附帯条件式によりこの場合の演算子
解は

$$V(p, x) = \frac{\sin \delta \cosh \delta x + \sinh \delta \cos \delta x}{\sinh \delta \cos \delta + \cosh \delta \sin \delta} E \quad (1.17)$$

$$\text{上式において} \quad \lim_{p \rightarrow 0} V = E$$

で、又 $V(p)$ の極は、 $\gamma = j\gamma'$ (γ' 実数) として

$$\tanh \gamma' + \tan \gamma' = 0 \quad (1.18)$$

より求められる、即ち上式を因式的に解いて

$$\gamma'_n = \frac{(4n-1)\pi}{4} + \epsilon_n$$

$$\epsilon_n \cong e^{-\frac{4n-1}{2}\pi}$$

従って γ'_n に対応する p_n は

$$p_n = j\omega_n = \pm j\sqrt{LC} \left(\frac{4n-1}{4}\pi + \epsilon_n \right)^2 \quad (1.18')$$

となる。展開定理により時間函数を求めると

$$V(x,t) = E + 2E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \gamma'_n \cos \gamma'_n x + \sin \gamma'_n \cosh \gamma'_n x}{\gamma'_n \cosh \gamma'_n \cos \gamma'_n} \cos \omega_n t \quad (1.19)$$

となる。上式は厳密解であるが、 $a=0$

の場合で (1.12) と同様に Bewley 氏の結果式からの偏差はかなり大きい。

$\frac{\omega_n}{\omega_1}$ の周波数スワットル等の傾向は一致する。



Fig 1.3

さて次に $a \neq 0$, $k \neq 0$ の一般的な場合について次のやうな半ば物理的な近似によつて Bewley 氏の解との関連性及び近似性をしらべる。Fig 1.3 のやうに巻線の両端に強制電圧 E が印加されたときの演算子解は

$$V(x,p) = \frac{n_1 \cosh(\alpha x - \frac{\alpha}{2}) - m_1 \cosh(\beta x - \frac{\beta}{2})}{n_1 \cosh \frac{\alpha}{2} - m_1 \cosh \frac{\beta}{2}} E$$

その時間函数は (1.15) (1.15') (1.15'') から近似的に

$$V(x,t) \cong E - \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 \sin n\pi x}{(\lambda^2 + n^2\pi^2)n} \cos \omega_n t \quad (1.20)$$

$$n = 2n-1$$

$$\omega_n \cong \frac{n^2\pi^2}{\sqrt{L(c + kn^2\pi^2)}}$$

上式は (1.15') (1.15'') から a , n が大きい程近似がよくなり、その近似度は (1.15'') と同様である。今長さの単位を $\frac{1}{2}$ に変更し、全長を

2 にえらぶと

$$l \rightarrow 2l \quad x \rightarrow 2x \quad C \rightarrow 2C \quad K \rightarrow \frac{K}{2}$$

となり L は (1.1) から

$$L \rightarrow 4L$$

となる。更に x の原点を巻線の中央にうつすと上式は

$$V(x,t) \cong E + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^2 \cos n\pi x}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} \cos \omega_n t \quad (1.21)$$

$$\omega_n \cong \frac{n^2 \pi^2}{\sqrt{L(C + Kn^2 \pi^2)}} \quad n = \frac{2l - 1}{2}$$

Fig. 1.3 からわかるやうに巻線の両端から強制電圧を加えたのであるから、巻線中央にふいてつまり新しい座標系で

$$x=0 \quad \text{で} \quad I=0$$

となり又

$$x=l \quad \text{で} \quad V=E$$

という端子条件となる。中性共振の条件とちがうところは、 $x=0$ の左右の巻線間の電磁誘導の存在する点であるが、 $x=0$ の近傍では巻線電流値は零であり、従って (1.21) は近似的に中性共振時の解となつていてその近似度は (1.16) とほぼ同様なものと考えられる。

1.2 指数函数分布

1.3 節より 1.6 節にわたつてのべらる如く、巻線間の相互誘導作用は実際上の面から指数函数分布とした方が直線分布とするより妥当であり、又一般的であり殊に内部固有振動のやうな比較的高周波現象では、この事が強調される。又第 2 章で取り扱うやうに無限長巻線の場合直線分布の場合には取り扱ひやうがないが、指数函数分布では適当な解析が可能である。実験的にもかやうな長所は知られていふやうであるが、これを取り入れて解析を行う簡便な方法が従来知られていなかつた。筆者は演算子法を用いてその解析方法を見出したのであるが、⁽⁶⁾ 損失を考慮する場合は近似的方法をとらねば煩雑と

なるので損失のない場合について、演算子法によって解を求める。

この場合の基本方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= M \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 e^{-m|x-y|} i(y,t) dy \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial V}{\partial t} - K \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} (2.1)$$

ただし巻線の全長を 1 にせらる、 x, y なる座標は中性点からとるものとする。上記の方程式に Laplace 変換を施し

$$V(x,p) = \mathcal{L}^{-1} v(x,t), \quad I(x,p) = \mathcal{L}^{-1} i(x,t)$$

とすると

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= MP \left\{ \int_0^x e^{-m(x-y)} I(y,p) dy + \int_x^1 e^{-m(y-x)} I(y,p) dy \right\} \\ \frac{dI}{dx} &= CPV - KP \frac{d^2V}{dx^2} \end{aligned} \right\} (2.1')$$

とすると、(2.1') を x で微分して

$$\frac{d^2V}{dx^2} = mMP \left\{ -\int_0^x e^{-m(x-y)} I(y) dy + \int_x^1 e^{-m(y-x)} I(y) dy \right\} \quad (2.2)$$

$$\frac{d^3V}{dx^3} = mMP \left\{ -ZI(x) + \frac{m}{MP} \frac{dV}{dx} \right\}$$

上式と (2.1') から

$$\frac{d^4V}{dx^4} - \frac{d^2V}{dx^2} (m^2 + ZmMKP^2) + ZmMCP^2V = 0 \quad (2.3)$$

$$\therefore V = \sum_{\gamma=1}^4 A_{\gamma} e^{\gamma x} \quad (2.4)$$

ただし、 A_{γ} は積分定数、 γ は

$$\gamma^2 = \begin{cases} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{cases} = \frac{m^2 + ZmMKP^2 \pm \sqrt{(m^2 + ZmMKP^2)^2 - 8mMCP^2}}{2} \quad (2.5)$$

である。よって求める解は (2.3) の解であるとともに次の附帯条件式を満足せねばならぬ。即ち (2.1') と (2.2) から

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で} \quad m \frac{dV}{dx} &= \frac{d^2V}{dx^2} \\ x=1 \text{ で} \quad m \frac{dV}{dx} &= -\frac{d^2V}{dx^2} \end{aligned} \right\} (2.6)$$

これと端子条件として中性点接地、単位電圧印加の場合を考へる。即ち

$$x = 0 \quad z'' \quad V = 0$$

$$x = 1 \quad z'' \quad V = E$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (2.7)$$

(2.6), (2.7) を書きなおすと

$$\sum A_\nu = 0 \quad (2.8)$$

$$\sum A_\nu e^{\gamma_\nu} = E$$

$$\sum (m \gamma_\nu - \gamma_\nu^2) A_\nu = 0$$

$$\sum (m \gamma_\nu + \gamma_\nu^2) e^{\gamma_\nu} A_\nu = 0$$

即ち A_ν は上式から決定される。しかるに (1.7'), (1.8') と比較すると (2.8) は (1.7') の a の代わりには $\frac{1}{m}$ を代置したものに なっている。従って直線分布の結果 (1.10) を用いて直ちに

$$\begin{aligned} V &= \frac{n_1 \cosh(\alpha x - \frac{\alpha}{2}) - m_1 \cosh(\beta x - \frac{\beta}{2})}{n_1 \cosh \frac{\alpha}{2} - m_1 \cosh \frac{\beta}{2}} \frac{E}{2} \\ &+ \frac{n_2 \sinh(\alpha x - \frac{\alpha}{2}) - m_2 \sinh(\beta x - \frac{\beta}{2})}{n_2 \sinh \frac{\alpha}{2} - m_2 \sinh \frac{\beta}{2}} \frac{E}{2} \\ &\equiv V_1(p) + V_2(p) = \frac{N_1(p)}{M_1(p)} \frac{E}{2} + \frac{N_2(p)}{M_2(p)} \frac{E}{2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

と成る。従って

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha \sinh \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{m} \alpha^2 \cosh \frac{\alpha}{2} \\ n_1 &= \beta \sinh \frac{\beta}{2} + \frac{1}{m} \beta^2 \cosh \frac{\beta}{2} \\ m_2 &= \alpha \cosh \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{m} \alpha^2 \sinh \frac{\alpha}{2} \\ n_2 &= \beta \cosh \frac{\beta}{2} + \frac{1}{m} \beta^2 \sinh \frac{\beta}{2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

これを求める演算子解である。従って α, β は (2.5) と與えられ、直線分布における (1.5) と與えられる α, β と異なり、従って演算子解の内容が異なることに注意せねばならぬ。

その初期分布は

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ 2mMKp^2 + m^2 - \lambda^2 + o\left(\frac{1}{p^2}\right) \right\}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \beta^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \lambda^2 + o\left(\frac{1}{p^2}\right) \right\}$$

∴あるから

$$\lim_{t \rightarrow 0} V(x, t) = \lim_{p \rightarrow \infty} V(x, p) = E \frac{\sinh \lambda x}{\sinh \lambda}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x, t) = Ex$$

次に(2.9)に展開定理を用いてその時間函数を求めるのであるが、まず(2.9)が一價函数であることを確かめておく。(2.5)より

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} \Big\} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2mMKp^2 + \sqrt{8mMcp + m^2}} \pm \sqrt{2mMKp^2 - \sqrt{8mMcp + m^2}} \right) \\ &= A \pm B \end{aligned}$$

∴あるから直線分布の場合と同様に $M_1(p)$, $N_1(p)$, $M_2(p)$, $N_2(p)$ はそれぞれ

$$(AB) \times (-\text{價函数})$$

∴あることが確かめられる。従つて演算子解は p に關する一價函数であるので、展開定理をそのまゝ適用できる。

即ち

$$V(x, t) = \left\{ \frac{N_1(0)}{M_1(0)} + \frac{N_2(0)}{M_2(0)} \right\} \frac{E}{2} + \frac{E}{2} \sum \frac{N_1(p_n) e^{p_n t}}{p_n \frac{d}{dp} M_1(p_n)} + \frac{E}{2} \sum \frac{N_2(p_n) e^{p_n t}}{p_n \frac{d}{dp} M_2(p_n)} \quad (2.11)$$

さて $V_1(p)$, $V_2(p)$ の極 p_n は(1.14) (1.14') と同様に

$$\left. \begin{aligned} -(\beta' \tan \frac{\beta'}{2} + \frac{1}{m} \beta'^2) &= \alpha \tanh \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{m} \alpha^2 \\ \beta' \cot \frac{\beta'}{2} - \frac{1}{m} \beta'^2 &= \alpha \coth \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{m} \alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

$$T \text{ に対し } \beta = j\beta'$$

から決定される。T に対しここに注意せねばならぬのは直線分布の場合、 $\alpha(p)$, $\beta(p)$ が異なり(2.5)から

$$\alpha^2 = \frac{\lambda^2(m^2 + \beta'^2)}{\lambda^2 + \beta'^2} \quad (2.13)$$

とこの関係とよむことである。(2.12)の根はそれぞれ

$$\beta'_{1n} = (2n-1)\pi(1 + \epsilon_{1n}) \quad \beta'_{2n} = 2n\pi(1 + \epsilon_{2n}) \quad (2.14)$$

と與えられる。 $\epsilon_{1n} \ll 1$, $\epsilon_{2n} \ll 1$ を Taylor 展開によつて一次近似とてこれを求めると

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{1n} &= \frac{1}{\frac{1}{m} \left\{ \frac{\alpha_1^2}{2} + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{2} \right\} - 1 + \frac{\alpha_1}{2} \tanh k \alpha_1} \\ \epsilon_{2n} &= \frac{1}{\frac{1}{m} \left(\frac{\alpha_2^2}{2} + 2n^2 \pi^2 \right) - 1 + \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{cath} k \frac{\alpha_2}{2}} \end{aligned} \right\} (2.14')$$

ただし α_1, α_2 は (2.13) に注意して

$$\alpha_1^2 = \frac{\lambda^2 \{ m^2 + (2n-1)^2 \pi^2 \}}{\lambda^2 + (2n-1)^2 \pi^2} \quad \alpha_2^2 = \frac{\lambda^2 (m^2 + 4n^2 \pi^2)}{\lambda^2 + 4n^2 \pi^2}$$

より (2.5) から

$$p \frac{d\alpha}{dp} = \frac{(\alpha^2 - \lambda^2)(\alpha^2 + \beta^2 - m^2)}{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)} \quad p \frac{d\beta}{dp} = -\frac{(\beta^2 - \lambda^2)(\alpha^2 + \beta^2 - m^2)}{\beta(\alpha^2 - \beta^2)}$$

従つて上式及 α (2.9) (2.10) から

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 - m^2} p \frac{dM_1}{dp} &= \sinh \frac{\beta}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} \frac{2\alpha^2 \beta^2 - \lambda^2 (\beta^2 + \alpha^2)}{2\alpha\beta} \\ &\quad + \sinh \frac{\alpha}{2} \cdot \cosh \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\beta^2 2m - \alpha^2}{2m} \frac{\alpha^2 - \lambda^2}{\alpha} \\ &\quad + \cosh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\alpha^2 - 2m - \beta^2}{2m} \cdot \frac{\beta^2 - \lambda^2}{\beta} \\ &\quad - \cosh \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{\beta}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{m} \right) (\alpha^2 + \beta^2 - 2\lambda^2) \\ &\equiv \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 - m^2} \Delta_{1n} \end{aligned} \quad (2.15)$$

同様にして (2.9) (2.10) から

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 - m^2} p \frac{dM_z}{dp} &= \cosh \frac{\beta}{2} \cosh \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2\alpha^2\beta^2 - \lambda^2(\beta^2 + \alpha^2)}{2\alpha\beta} \\
&+ \sinh \frac{\beta}{2} \cdot \cosh \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2 - 2m - \alpha^2}{2m} \frac{\alpha^2 - \lambda^2}{\alpha} \\
&+ \sinh \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha^2 - 2m - \beta^2}{2m} \frac{\beta^2 - \lambda^2}{\beta} \\
&- \sinh \frac{\beta}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{m}\right) (\alpha^2 + \beta^2 + 2\lambda^2) \\
&\equiv \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 - m^2} \Delta_{2m} \quad (2.15')
\end{aligned}$$

従って厳密な解をこの場合について求めると (1.15) と同じ形となる。

ただし Δ_{1m} Δ_{2m} には (1.15₀) の代わりに (2.15) (2.15') を用い、
又 a の代わりに $\frac{1}{m}$ を用いるものとする。

上式において (1.15') (1.15'') の導出の場合と同様な近似を施せば、即ち

$$\beta_n \cong (2n-1)\pi \quad \tanh \frac{\alpha}{2} \cong 1$$

と m のかなり小さく、 $|\alpha|, |\beta|$ 等を $|\alpha|^2, |\beta|^2$ 等に比し無視すると、

$$V(x, t) \cong E x + \frac{2}{\pi} E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^2 \sin n\pi x}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} \cos \omega_n t \quad (2.16)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 + m^2 n^2 \pi^2}{2mMc + 2mKm n^2 \pi^2}} \quad n = 1 \quad (2.17)$$

となる。中性点開放の場合は (1.21) と同様:

$$V(x, t) \cong E + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^2 \cos n\pi x}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} \cos \omega_n t \quad (2.16')$$

ただし $n = \frac{2s-1}{2}$ と ω_n は上の中性点接地の場合の ω_n の n 1:

$$n = \frac{2s-1}{2} \text{ を } 1 \text{ 代入したものに等しい}$$

又巻線の両端から電圧 E が印加されたときは、その演算子解は

$$V = \frac{n_1 \cosh(\alpha x - \frac{\alpha}{2}) - m_1 \cosh(\beta x - \frac{\beta}{2})}{n_1 \cosh \frac{\alpha}{2} - m_1 \cosh \frac{\beta}{2}} E \quad (2.18)$$

となる。ただし n_1, m_1 等は (2.10) と同一である。従ってこの場合の近似解は

$$V \cong E - \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 \sin n\pi x}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} \cos \omega_n t \quad (2.18')$$

ただし $n = 2s-1$

ω は (2.17) で與えられる。

1.3 鉄心内の磁束分布

この節では鉄心内の磁束の空間的分布が周波数に対してどのやうに變化するかということ及び α 単位電流で磁化した場合は磁束がどのやうに増大してゆくかについてしらべ、指数函数分布の根據をしらべた。

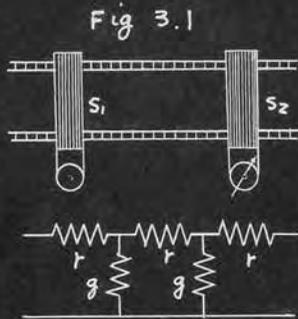
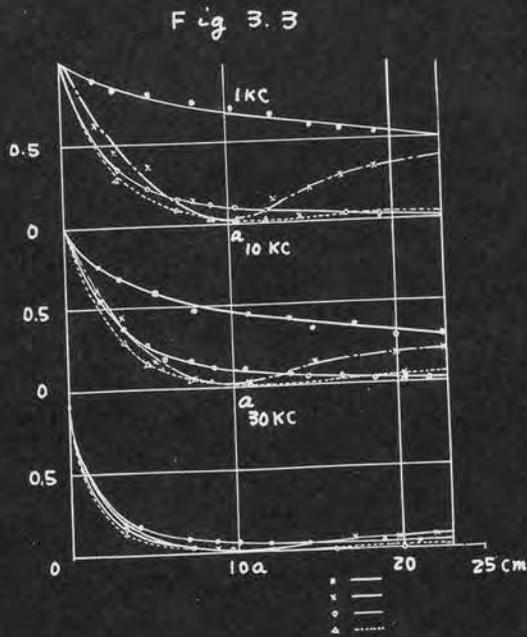


Fig 3.2



磁氣的な相互誘導の效果の程度を知るために Fig 3.1 の如く成層鉄心の上と二次巻線(均一な一重巻)で蔽い、この二次巻線の開放及び短絡の二箇の状態について距離と周波数を変えて搜索線輪 S_2 に発生する電圧を測定した。又成層鉄心を取り除いて木心とした場合にも同様の測定を行った。

尚勵磁コイル S_1 と搜索線輪 S_2 の諸定数はほぼ同じで (2800 回数、巻線直径 0.2 mm ϕ DSC 線輪直径平均約 7 cm)、勵磁用の電源は 15V 一定に保つたが、二次回路の開放、 S_1 と S_2 の距離による變化は殆んど認められず、この場合には殆んど強制電圧と見做すこ

● —	鉄心、二次開放
× —	鉄心、二次短絡
○ —	木心、二次開放
△ —	木心、二次短絡

とすることができる。従つて高周波に於いて、コイルの誘導容量や、インダクタンスの影響による巻線内の電流の減少は、磁束分布を測定する上からは問題にならない。

Fig 3.3 にあいて 1 KC までの特性は殆ど 1 KC の特性と同じである。30 KC で垂下の傾向が目立つてきて、50 KC 以上では木心の場合と殆んど変わらないやうになる。この主な原因の一つとして導磁率 μ の減少と、渦流効果が効いているものと考えられる。勿論この傾向は鉄心の定数や、大きさにより相当変わるものであるから以下その一般的傾向をごく概略に考察することにする。

磁束流中と磁位 V とは Fig 3.2 のやうな等価回路でおきかえられるものと考えられる。

従つて

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = r \phi, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial x} = g V \quad (3.1)$$

但し、 r は成層鉄心の軸方向の単位長当りの磁気抵抗、 $\frac{1}{g}$ は漏洩磁束に対する単位長当りの磁気抵抗である。

今 $x=0$ で起磁力を興え、これによる磁束を

$$x=0 \text{ で } \phi = \phi_0$$

とし鉄心の上下両側長を l とした総軸長の半分の長さに対して磁束の減少がかなり大きいとすると

$$\phi \cong \phi_0 e^{-\sqrt{rg} x} \quad (3.2)$$

よて (3.1) で $r=0$ とすると ϕ は距離 x に対する一次式となり、

Bewley 氏等の考察したものと異なる。(3.2) との関係を見るために少し詳しくしらべてみると (3.1) より

$$x=0 \text{ で } \phi = \phi_0$$

$$x=l \text{ で } \phi = 0$$

とすると

$$\phi = \phi_0 \frac{\sinh \sqrt{rg} (l-x)}{\sinh \sqrt{rg} l}$$

通常 $e^{\sqrt{rg} l} \gg e^{-\sqrt{rg} l}$ であるから

$$\phi \cong \phi_0 e^{-\sqrt{rg} x}$$

これに對して $r \rightarrow 0$ 即ち $\mu \rightarrow \infty$ のときは

$$\phi = \phi_0 \frac{l-x}{l} \quad (3.3)$$

即ち Bewley 氏等の直線分布となる。

扱次に r が鉄心内の渦流損失により周波数によつてどのように変化するかを 2 節 (2.5) の結果を用いて考察すると

$$\phi = \frac{2m\ell\mu ni}{k_2 \sinh k_2 d} (\cosh k_2 d - 1) \quad (3.4)$$

であるから

$$r = \frac{ni}{\phi} = \frac{k_2 \sinh k_2 d}{2m\ell\mu (\cosh k_2 d - 1)} \quad (3.5)$$

$$\text{ここに } k_2 = \sqrt{\mu\sigma p} \quad (3.6)$$

$k_2 d < 1$ のときは、上式は

$$r \cong \frac{1 + \frac{d^2}{6} \mu\sigma p}{\mu m \ell d} \quad (m \ell d: \text{鉄心の断面積}) \quad (3.5')$$

で磁気抵抗は見かけ上リアクタンスの成分をもつ。この近似が成立する周波数乃至初期時間の印電しらへると鉄の場合、薄鉄板の厚さ d を $d \cong 10^{-4} \text{ m}$ とし

$$\mu = a \mu_0 = a \times 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m (ただし } \mu_0 \text{ は真空の導磁率)}$$

$$\sigma = 1.0 \times 10^7 \text{ U/m}$$

(3.7)

であるが所謂 $\mu = a \mu_0$ の値は過渡時及 ω 電流値により変り、はつきりしない。

$$\text{今 } a \cong 1000 \quad \text{とすると } p < 7 \times 10^5$$

$$a \cong 100 \quad \text{とすると } p < 7 \times 10^4$$

従つて大体、現象の初期から約 $10 \mu\text{s}$ 以後の現象及至約 100 KC 以下の現象では、ほゞ上の (3.5') の近似が成立することとなる。

$k_2 d \gg 1$ のときは

$$r \cong \frac{\sqrt{\mu\sigma p}}{2m\ell\mu} \quad (3.5'')$$

なる \sqrt{P} で近似される。

従って (3.5, 5', 5'') (3.2) よりわかる如く大容量の変圧器となる程、磁路の断面積は増加し又 μ が大きい程、 σ が小さい程磁気抵抗 r は減少し磁束は遠方まで達することとなる。

漏洩磁束に対する磁気コンダクタンス g の算出は容易でないが、時間的依存性、即ち演算子 P に關する關係は同様なものと考えられる。これらのことから磁束分布 $e^{-\sqrt{r}x}$ は勿論周波数乃至時間の函数となるが、固有振動数の基本波から第三調波ぐらいまでが大体 100 KC までぐらいにあるときは、近似式 (3.5') に依る第零次近似即ち時間的に一定の値で近似せしめれば、相互誘導の内部振動に及ぼす効果の大意を知ることができるとあらう。

次に二次回路を短絡した場合につき考察する。Rüdenberg⁽²⁾ 氏は二次回路が近似的に短絡状態にあると考えられる場合には、巻線間の相互誘導の効果は小さいとして一様な自己インダクタンス分布を用いている。併し Fig. 3.2 よりこの場合磁束の距離に対する減少は明らか

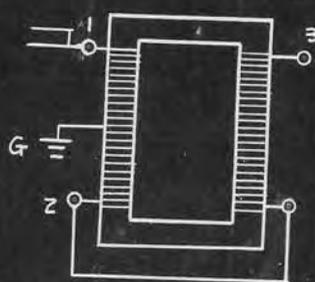


Fig. 3.4

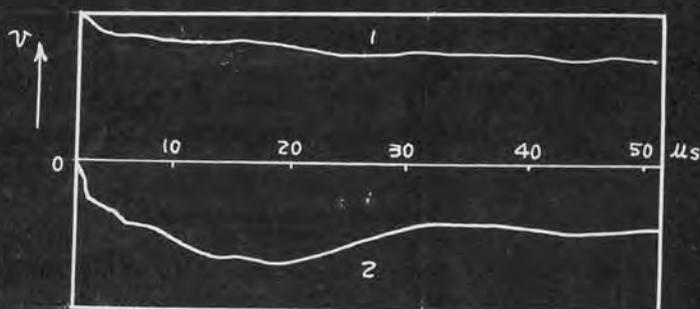


Fig. 3.5

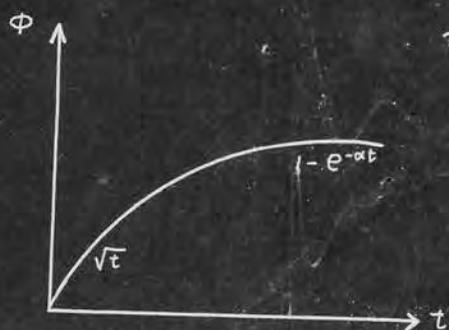


Fig. 3.7

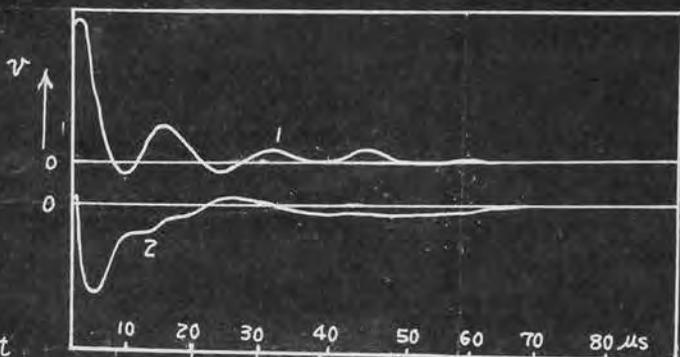


Fig. 3.6

かに現われているが、この場合30 KCくらいまではかなりの距離までその影響のあることがわかる。又、図の如く一度減少して再び増大する傾向の起るのは、励磁線輪 \$S_1\$ による磁束が鉄心全体にわたって巻かれた二次線輪中に発生する逆起電力による短絡電流の作る一定の大きさの磁界により打ち消されるためと考えられる。即ち二次短絡のときは

$$\phi = \phi_0 e^{-\sqrt{rg}x} - \phi_2 \quad (3.8)$$

$$\phi_2 = k \phi_0 \quad k: \text{結合係数}$$

1 KC や 10 KC で Fig 3.3 の \$\alpha\$ 値が零に近らぬのは、二次端子が短絡され、二次側のインピーダンスのリアクタンス成分が大きいためと看せられる。即ち(3.8)の第一項を実数とすると、第二項は複素数で表わされるからであらう。

次に励磁用の線輪に単位電圧及び単位電流を投入してその誘導電圧を見ることにより、過渡時における磁束の増大の状況の概略をみよう。つまり渦流効果や磁気粘性による磁化の遅れが成層鉄心の場合どの程度のものを検討する。Fig 3.4 において 1G 向に強制電圧 \$E\$ を印加したとき 2G 向に誘起される電圧 \$V\$ は

$$V = -p\phi = -pk_e I = -pk_e \frac{E}{Lp+R} \quad (3.9)$$

ただし、1G 向の巻線を集中定数回路とみなし、そのインピーダンスを \$Lp+R\$ で近似する。この際静電容量は大きな影響を與えない。

\$k_e\$ が演算子 \$p\$ に無関係な定数であれば、単位電圧印加と同時に二次電圧がでて爾後逐次下る傾向となる筈である。しかるに(3.7)よりわかる如く 100 KC 以下では大抵(3.5')の如く表わされる。又、100 KC 以上は \$k_e \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{r}}\$ で表わされるが、これを角半実験式として(3.5)(3.5')から

$$\phi = \frac{k_0}{p+\alpha} I \equiv k_1 I \quad (3.10)$$

とする。時定数 \$L/R\$ は約 30 ~ 40 \$\mu\$S の程度であるから、Fig 3.5 から二次電圧の立ち上りの時定数は、約 \$\alpha\$ で決定されるであらうことがわかる。Fig 3.5 より磁化の時定数 \$\alpha\$ は、約 10 ~ 20 \$\mu\$S の程度のもののである。一方半理論式(3.5')より \$\mu \approx 1000 \mu_0\$、\$d \approx 10^{-3}\$ m を入れれば \$\alpha \approx 6 \times 10^4\$、即ち磁化の時定数は約 16 \$\mu\$S となり大体その order が一致する。

尚強制電流を1方向に投入した場合の応答をFig 3.6に示す。このとき2方向に誘起される電圧Vは

$$V = -p\phi = -p l_e I = -\frac{p}{p+\alpha} I \quad (3.11)$$

従ってその戻り方の時定数より、 $\alpha = 10 \sim 20 \mu s$ の程度の値をうる。因みに強制電流で勵磁した場合中の時間的増加の状況を図に説明的に示せばFig 3.7の如きものとなる。

次に所謂この磁化の遅れと、さきの定常交流における磁束中の角周波数 ω に対する関係をしらべる(3.10)より

$$\phi = \frac{k_0 e^{j\omega t}}{\alpha + j\omega} = k_0 \frac{e^{j\omega t - \delta}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

ϕ は ω の増加とともに減少するが、その反曲点は

$$2\pi f = \omega = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

今磁化の遅れの時定数を $20 \mu s$ とすると、減衰の反曲点に対応する周波数は約50 KCとなる、これは、さきの高周波印加の測定において、30 KCで垂下の傾向が顕著となったことと、そのorderにおいて対応している。

1.4 損失による減衰を考慮したとき

1.3節の実験結果及び考察からわかる如く磁束分布は大抵指数函数分布に近いものと考えられる。実際の波形の迹跡は損失がないとすると、級数の収斂が $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$ の程度で10項ぐらゐまでとつても正確でない。しかし実際の損失を考慮すると各調波は指数函数的に減衰し、その時定数はほぼ各調波の次数の二乗に比例して増加するから第四高調波ぐらゐまでとれば、数値計算による誤差はごく波頭部を除いて僅小となる。かやうに波形の数値計算を行う上において損失を考慮することは必要である。

併し損失頭を考へるときは、(2.9)のやうな演算子解から固有値 β を求めることは、 β が複素数となるため、極めて複雑な手数を要することとなる。一方普通の変圧器においては内部振動の基本波振動は6~15 Hz 継続し、この程度の δ/ω (但し、 δ は対数減衰率) に対しては、損失のある場合とない場合との固有振動数の偏差は数%の程度であることが一般的に確かめられる。

又実測上において定常現象である高周波共振法による固有振動

数系列と、過渡現象としての内部振動の波形分析によるそれとは良好一致を示すことが知られて⁽⁷⁾いる。これは上述の如く固有振動数に如する損失の影響の小さいことを裏書している。又上述の程度の減衰を與える損失成分が各調波の振巾に與える影響も小さいことは簡単な場合の検討により推察することができる。損失のない場合の近似解を既に求めているのであるから従つて損失による減衰率の算定を主として行なはばよいこととなる。以下近似的な解を求めその波形の概要をしらべることとする。

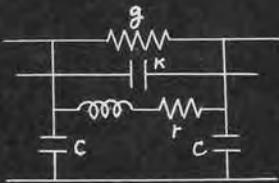


Fig. 4.1

一素子の損失の等價回路を Fig. 4.1 のやうに假定する、これは後に 2 節でのやることからその理由がやゝ明らかになる。即ち r は巻線中の表皮効果、近接効果等による損失の等價的な抵抗を表わし、 g は鉄心中に生ずる渦流損失等による損失の等價的な漏洩コンダクタンスを表わす。基礎方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= r i_1 + M \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 e^{-m|x-y|} i_1(y) dy \\ \frac{\partial i_1}{\partial x} &= C \frac{\partial v}{\partial t} - k \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} \\ i_1 + i_2 &= i \quad i_2 = g \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} (4.1)$$

上式より微分演算を行うことにより次の微分方程式をうる。

$$\begin{aligned} (1 + r k \frac{\partial}{\partial t} + r g) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \{ (k \frac{\partial}{\partial t} + g) (m^2 r + 2 m M \frac{\partial}{\partial t}) + m^2 \\ + r c \frac{\partial}{\partial t} \} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (m^2 r + 2 m M \frac{\partial}{\partial t}) C \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

求める解即ち (4.1) の解は (4.2) の解であると共に (4.1) から (4.2) の演算過程からわかる如く

$$\left. \begin{aligned} x=0 \quad \text{で} \quad m \left(\frac{\partial v}{\partial x} - r i_1 \right) &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - r \frac{\partial i_1}{\partial x} \\ x=1 \quad \text{で} \quad m \left(\frac{\partial v}{\partial x} - r i_1 \right) &= - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - r \frac{\partial i_1}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} (4.3)$$

という附帯条件式を満足せねばならぬ。

現一般に (4.2) の基本解はよく知られてゐるやうに

$$v = \sum C_n e^{r_n x + \alpha_n t} \quad (4.4)$$

という形で表わされる。又、 σ_n と α_n との関係は (4.2) からわかるやうに

$$\begin{aligned} (1+rK\alpha+rg)\sigma^4 - \{(K\alpha+g)(m^2r+2mM\alpha)+m^2 \\ + rC\alpha\}\sigma^2 + (m^2r+2mM\alpha)C\alpha = 0 \end{aligned} \quad (4.2')$$

という関係がある。上式を α について解くと

$$\alpha = -\sigma + j\omega$$

$$\sigma = \frac{mr}{2M} + \frac{r n^2 \pi^2}{2mM} + \frac{g n^2 \pi^2}{C + K n^2 \pi^2} \quad (4.5)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{8mM(C+Kn^2\pi^2)\{(1+rg)n^4\pi^4+(m^2+gm^2r)n^2\pi^2\}-\{m^2Cr+(2mMg+Km^2r+rc)n^2\pi^2+rk n^4\pi^4\}^2}}{4mM(C+Kn^2\pi^2)}$$

よって (4.5) から (4.4) は

$$\begin{aligned} v = f(x) + \sum (A_{1n} \cos \sigma_{1n} x + A_{2n} \sin \sigma_{1n} x + A_{3n} \cosh \sigma_{2n} x + A_{4n} \sinh \sigma_{2n} x) \\ \times (C_{1n} \cos \omega_n t + C_{2n} \sin \omega_n t) e^{-\sigma_n t} \end{aligned} \quad (4.6)$$

の形に書きかえることができる。ここに $f(x)$ は (4.1) を満足する終局分布を表わす函数であり、 A_{1n} , A_{2n} , A_{3n} , A_{4n} は 2 箇の端子条件と (4.3) という附帯条件から定められるのであるが、双曲線函数の成分は三角函数の成分に比して小さくこれを省略しても大過はないから (4.6) から

$$\begin{aligned} v = f(x) + \sum \{(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cos \sigma_n x \\ + C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t\} \sin \sigma_n x \} e^{-\sigma_n t} \end{aligned} \quad (4.6')$$

を得る。

中性良接地の場合

$$\begin{aligned} \text{この場合は} \quad x=0 \quad \text{で} \quad v=0 \\ x=1 \quad \text{で} \quad v=E \end{aligned} \quad (4.7)$$

2'あるから (4.6') の定常解 $f(x)$ は

$$f(x) = Ex$$

又 $t = +0$ におい

$$V = E \frac{\sin k \lambda x}{\sin k \lambda} = E \sum_{s=0}^{\infty} \frac{-2\Delta\pi \cos s\pi}{\lambda^2 + s^2\pi^2} \sin s\pi x \quad (4.8)$$

という初期分布から $A_0 = 0$

(4.7) という境界条件から

$$\gamma_0 = \Delta\pi, \quad B_0 = 0$$

従って (4.6') から

$$V = Ex + \sum_{s=0}^{\infty} (C_s \cos \omega_s t + D_s \sin \omega_s t) e^{-\delta_s t} \sin s\pi x$$

又 (4.5) より

$$\delta_s = \frac{mr}{2M} + \frac{r n^2 \pi^2}{2mM} + \frac{q n^2 \pi^2}{C + kn^2 \pi^2} \quad (4.9)$$

$$\omega_s \cong \sqrt{\frac{n^4 \pi^4 + m^2 n^2 \pi^2}{2mMc + 2mMkn^2 \pi^2}} \quad n = s$$

又 (4.8) という初期条件を再び用いて

$$C_s = \frac{2 \cos s\pi}{\lambda^2 + s^2 \pi^2} \frac{\lambda^2}{s\pi} E$$

又 $t = +0$ には巻線中には伝導電流は流れないから $i_1|_{t=+0} = 0$

故に $t = +0$ 時に $\frac{\partial i_1}{\partial x} = 0$

よって

$$D_s = \frac{\xi_s}{\omega_s} C_s \quad \text{但し } \xi_s = \delta_s + \frac{s^2 \pi^2 q}{C + s^2 \pi^2 k}$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= Ex + 2E \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s\pi} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + s^2 \pi^2} e^{-\delta_s t} (\cos \omega_s t + \frac{\xi_s}{\omega_s} \sin \omega_s t) \sin s\pi x \\ &\cong Ex + \frac{2E}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + s^2 \pi^2) s} \cdot E^{-\delta_s t} \cos \omega_s t \cdot \sin s\pi x \quad (4.10) \end{aligned}$$

但し ω_s, δ_s は (4.9) と與えられる。

中性負開放の場合

$$\left. \begin{aligned} \text{この場合は} \quad x=0 \quad z \quad i=0 \\ \quad \quad \quad \quad x=1 \quad z \quad V=E \end{aligned} \right\} (4.11)$$

であるから定常解は $f(x) = E$

又 $t = +0$ において

$$V = E \frac{\cosh \lambda E}{\cosh \lambda} = E \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{-z \frac{z\sigma-1}{z} \pi (-1)^\sigma}{\lambda^2 + (\frac{z\sigma-1}{z} \pi)^2} \cos \frac{z\sigma-1}{z} \pi x \quad (4.12)$$

という初期条件から $C_0 = 0$

(4.11) という境界条件から

$$\gamma_\sigma = \frac{z\sigma-1}{z} \pi$$

従って (4.6') から

$$V = E + \sum_{\sigma=1}^{\infty} (A_\sigma \cos \omega_\sigma t + B_\sigma \sin \omega_\sigma t) \cos \gamma_\sigma x \cdot e^{-\delta_\sigma t} \quad (4.13)$$

又 (4.5) から

$$\delta_\sigma = \frac{mr}{zM} + \frac{r n^2 \pi^2}{z m M} + \frac{g n^2 \pi^2}{C + K n^2 \pi^2} \quad n = \frac{z\sigma-1}{z} \quad (4.14)$$

(4.12) という初期条件を再び用いて

$$A_\sigma = zE (-1)^\sigma \frac{\lambda^2}{\{\lambda^2 + (\frac{z\sigma-1}{z} \pi)^2\} \frac{z\sigma-1}{z} \pi}$$

$t = +0$ z は巻線中に電流は流れないから $i_1 = 0$

$$\text{これより} \quad \frac{\partial i_1}{\partial x} \Big|_{t=+0} = 0$$

$$\therefore B_\sigma = \frac{A_\sigma}{\omega_\sigma} \left\{ \delta_\sigma - g \frac{(\frac{z\sigma-1}{z} \pi)^2}{C + K (\frac{z\sigma-1}{z} \pi)^2} \right\} \equiv \frac{\xi_\sigma}{\omega_\sigma} A_\sigma$$

$$\text{但し} \quad \xi_\sigma = \delta_\sigma - g \frac{(\frac{z\sigma-1}{z} \pi)^2}{C + K (\frac{z\sigma-1}{z} \pi)^2}$$

$$\therefore V = E + \frac{zE}{\pi} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{(-1)^\sigma \lambda^2}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} (\cos \omega_\sigma t + \frac{\xi_\sigma}{\omega_\sigma} \sin \omega_\sigma t) e^{-\delta_\sigma t} \cos n \pi x$$

$$\cong E + \frac{zE}{\pi} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{(-1)^\sigma \lambda^2}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} e^{-\delta_\sigma t} \cos \omega_\sigma t \cdot \cos n \pi x \quad (4.15)$$

$$\text{但し } m = \frac{2\alpha - 1}{2}$$

1.5 指数函数分布 (m 分布) と自己インダクタンス分布 (L 分布) 及び直線分布 (M 分布) との比較

先ず指数函数分布 $Me^{-m|x-y|}$ の Wagner 氏や, Riidenberg 氏の自己インダクタンス分布 (L 分布) ととのやうな関係にあるかを原理的にしらべる。指数函数分布で M が大きくて同時に m が同程度に大きくなる時は L 分布に近づくであらうことが予想される。ここに $M \rightarrow \infty$ の意味は δ 函数的な意味のもので

$$\int_0^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$x = 0 \quad \text{で} \quad \delta(x) \rightarrow \infty$$

$$x \neq 0 \quad \text{で} \quad \delta(x) = 0$$

従つて $M \rightarrow \infty$ といつても $m \rightarrow \infty$ のために単位長毎のインダクタンスは有限の値に留まることに注意せねばならぬ。即ち指数函数分布のときは傳播定数の $\rightarrow \beta$ は (2.5) より

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left[m^2 + 2mMkp^2 - \sqrt{(m^2 + 2mMkp^2)^2 - 8mMcp^2} \right]$$

$$\text{今 } \frac{2M}{m} \equiv L \quad \text{とおく} \quad (5.1)$$

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \beta^2 = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{2mMcp^2}{m^2 + 2mMkp^2} = \frac{Lcp^2}{1 + Klp^2} \quad (5.2)$$

即ち上式は一樣な自己インダクタンス分布としたときの Wagner 氏等の傳播定数である。一方、 α の方は

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \alpha \rightarrow \infty$$

となり、 α は消滅してしまふことになる。

又基礎方程式において、指数函数分布のとき逆誘起電圧成分は

$$PM \int_0^1 e^{-m|x-y|} I(y) dy$$

である。上式で m が十分に大きいと、積分に貢献する部分は任意

に小さい数 ϵ に訂して $|y-x| < \epsilon$ とすることからできる。従って

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} pM \int_0^1 e^{-m|x-y|} I(y) dy &= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} pMI(x) \left\{ \int_0^x e^{-m(x-y)} dy \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 e^{-m(y-x)} dy \right\} \\ &= p \frac{2M}{m} I(x) = LPI(x) \end{aligned} \quad (5.3)$$

となり L 分布の逆誘起電圧と一致する。

次に固有振動数の分布について比較することにする。宮本氏や毛利氏等の高周波共振法による測定結果は一般に直線分布及び一様な自己インダクタンス分布からかなりは外れてそれらの中間に介在することが知られてくるが、指数函数分布としたときの結果は実験結果と定性的に一致し、又かなりの巾をもつ。

高調波の固有振動数の基本波のそれに対する比と高調波の次数との関係は Wagner 氏等の L 分布では

$$\omega_0 \cong \frac{n\pi}{\sqrt{L(C+n^2\pi^2K)}}$$

Bewley 氏等の分布では

$$\omega_0 \cong \frac{n^2\pi^2}{\sqrt{M(C+n^2\pi^2K)}}$$

(5.4)

指数函数分布のときは

$$\omega_0 \cong \sqrt{\frac{n^4\pi^4 + m^2n^2\pi^2}{2mMC + 2mMKn^2\pi^2}}$$

但し 中性点接地のときは $n = \lambda$

中性点開放のときは $n = (2\lambda - 1)/2 \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots$

上のそれぞれの式から高調波の次数 λ と高調波の固有振動数と基本波の固有振動数との比 ω_0/ω_1 を図示したのが Fig 5.1 である。図よりわかる如く、指数函数分布は $m \geq 1$ では Bewley 氏の M 分布 (鎖線) と L 分布 (点線) との中間に介在しかなりの巾をもつ。序に宮本氏や毛利氏等の高周波共振法による大容量変圧器の振動数分布の二三例を表^(a)に示した $m = 3 \sim 5 \quad \lambda \cong 10$ であり指数函数分布と一致する傾向となる。回路の損失による固有振動数のズレは 1.4 節の始めにのべた如く第 3 調波ぐらいまでは一般に小さいと考えられるから Fig 5.1 がそのまゝ参考となるのである。

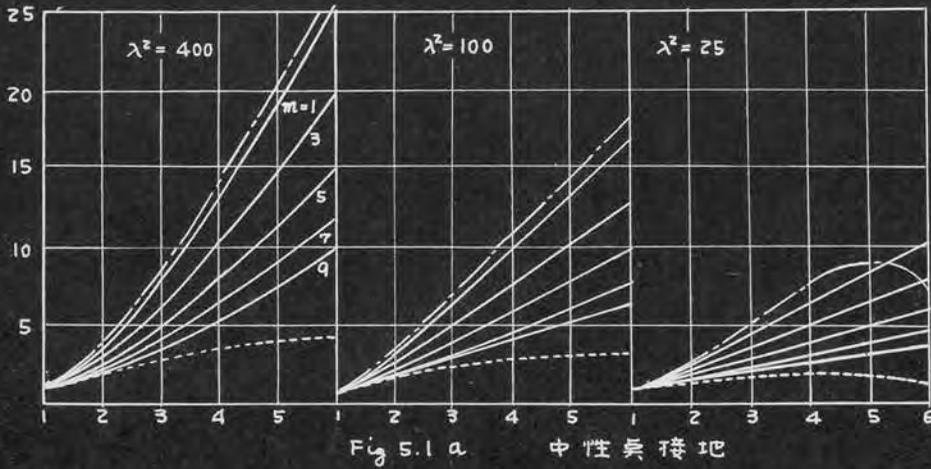


Fig 5.1 a 中性点接地

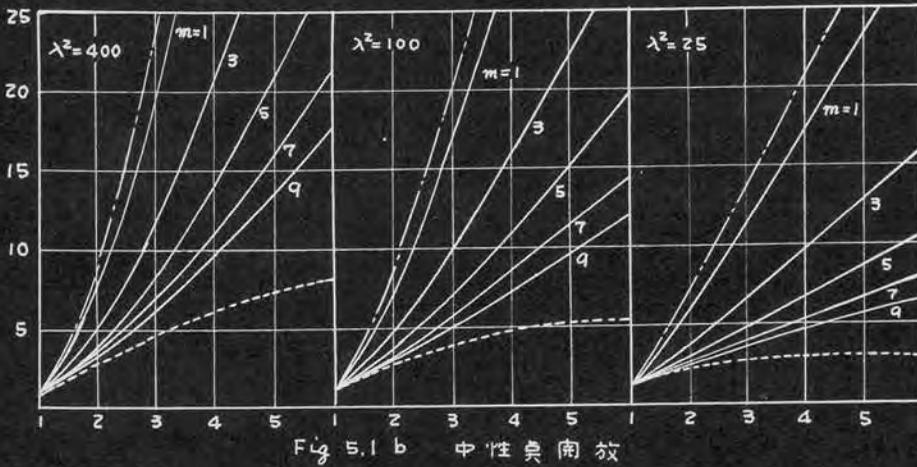


Fig 5.1 b 中性点開放

表 25000 KVA 单相变压器

δ	1	2	3
f KC	25.5	45.5	91.0
f_2/f_1	1.0	1.8	3.5

a. 二次短絡, 一次中性点接地

δ	1	2	3
f KC	17.8	54.0	93.0
f_2/f_1	1.0	3.03	5.02

b. 二次短絡, 一次中性点開放

パルス発生器

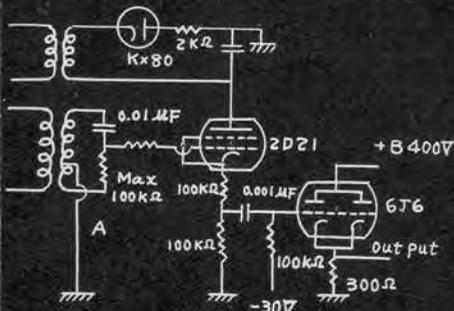


Fig 6.1

1.6 ニ三の実測波形と数値計算例

内部電位振動は比較的多くの實測がなされているにかかわらず、基本的なデータは比較的少ないやうである。即ち完全な閉磁路をもち、基本周期よりはるかに長い波尾をもつ矩形波（單位電圧）をもち、振動波形の % 位置の明瞭なものも比較的少ない。そこで普通の電力用変圧器とは、多少その性質が異なり、理想的なものとはいえないが、高電圧実験室所在の一ニの変圧器についてしらべてみた。

パルス発生装置を Fig. 6.1 にしめす。矩形波発生にサイラトロン ZDZ1 を用いているため矩形波の立ち上りは、 $0.01 \mu s$ 以下でこれに分解能 $0.1 \mu s$ の Du Mont 型オシログラフを用いるときは、初期分布を明瞭にみることができる。

供試変圧器 I.

これは井上電機製作による計器用変成器 (22KV: 100V) で二次側（低圧側）を均一單層に巻きなしたもので次のやうな諸定数をもち、

低圧巻線 630 回数 \times 2 全長 150 m \times 2 0.5 mm ϕ DSC
 高圧巻線 18 stacks (18 箇のコイルブロックより成る)
 2800 回数 \times 18 = 50400 回数 全長 20800 m
 0.2 mm ϕ DSC

静電容量 (彈動檢流計法による)

銅板	}	低圧巻線	—	アース	616 PF
		高圧巻線	—	アース	200 PF
		低圧巻線	—	高圧巻線	604 PF
鉄心	}	低圧巻線	—	アース	1062 PF
		高圧巻線	—	アース	200 PF
		低圧巻線	—	高圧巻線	585 PF

直流抵抗 低圧巻線 25.6 Ω 高圧巻線 1140 Ω

インダクタンス

60 Ω での値をインダクタンス法で測定した。これは空心又は銅板のときは、かなりの信頼性をもつので参考となるが、鉄心が入った場合は、周波数ととよに相當に変化して 100 KC 程度ではその order が異なってくる。

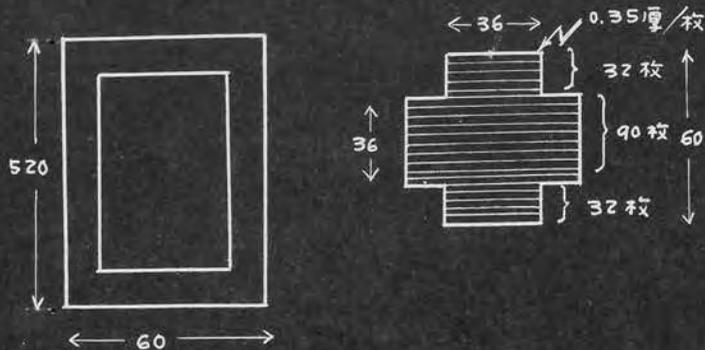


Fig. 6.2

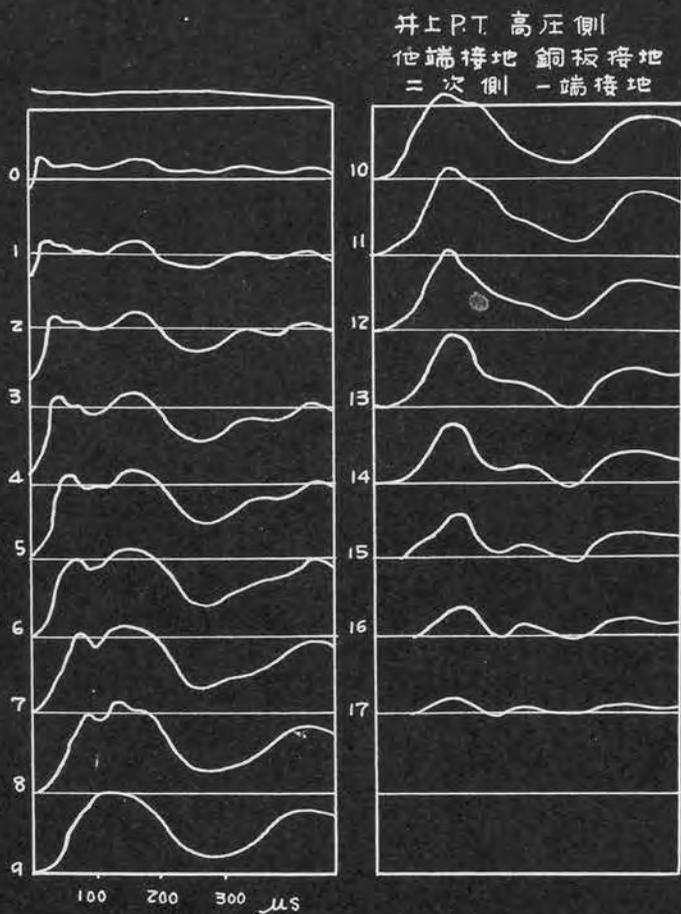


Fig. 6.3 a

井上P.T. 高压側一端開放
銅板開放接地
二次側一端接地

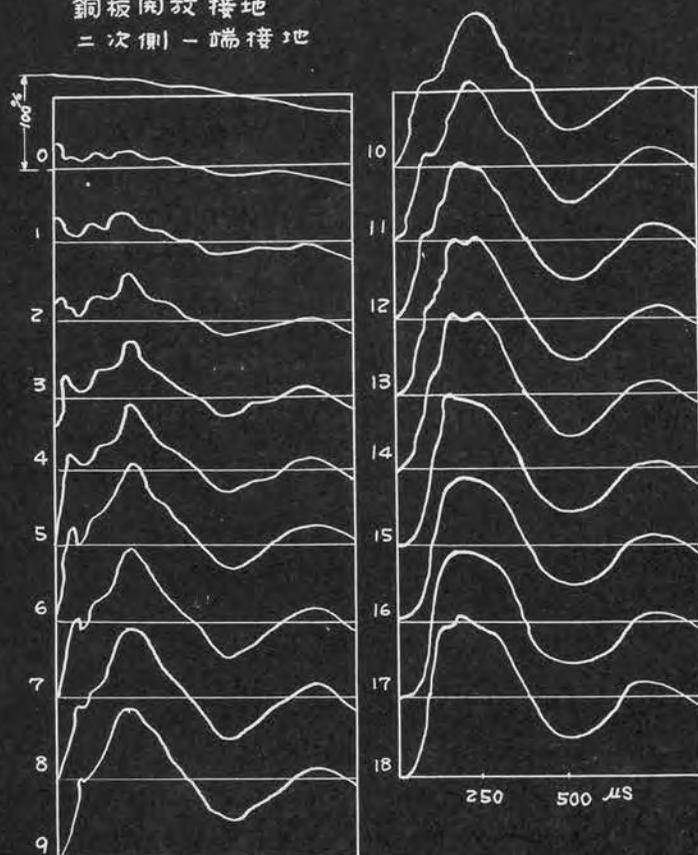


Fig 6.3d

Fig 6.4 a



Fig 6.4 b

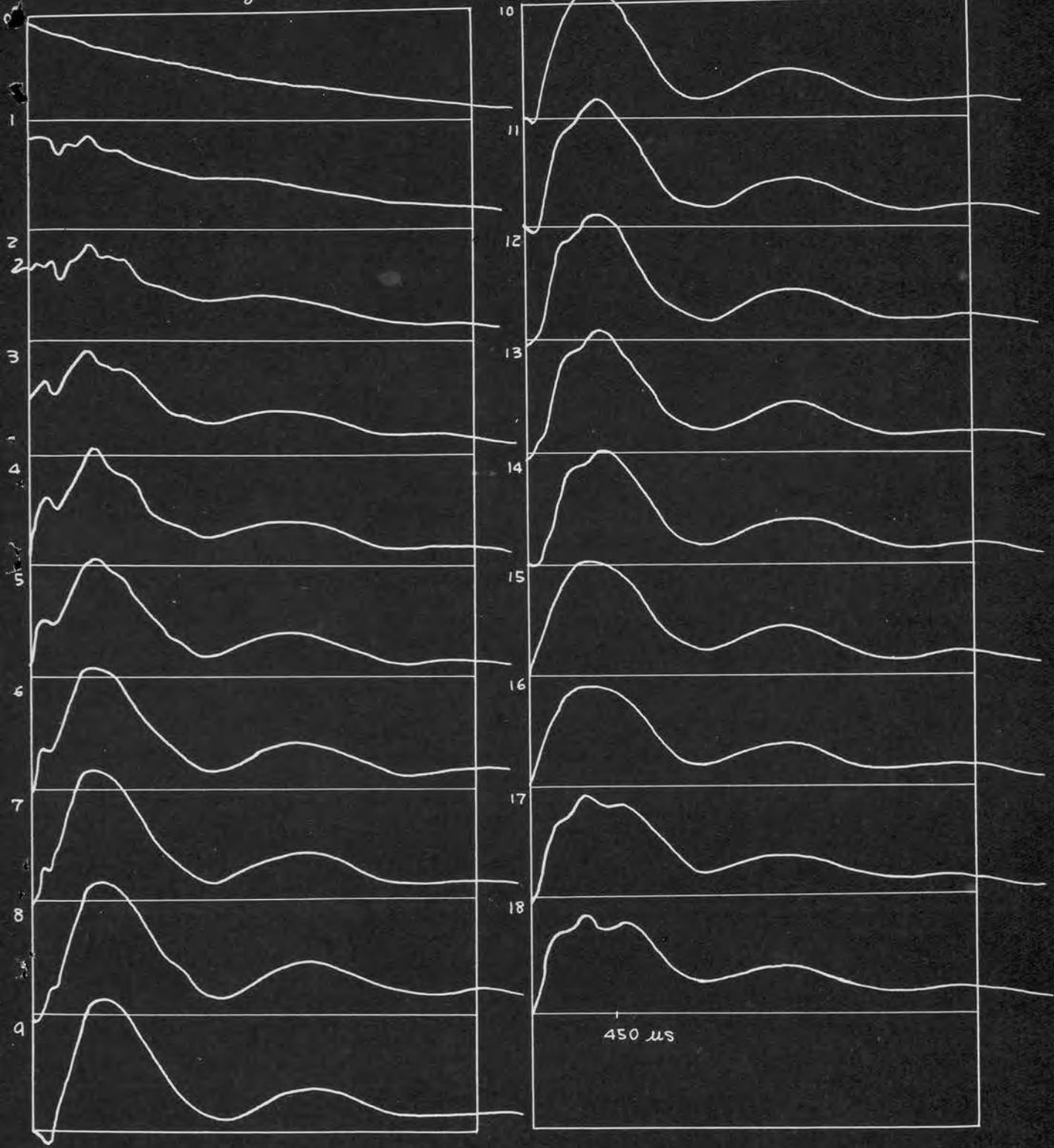
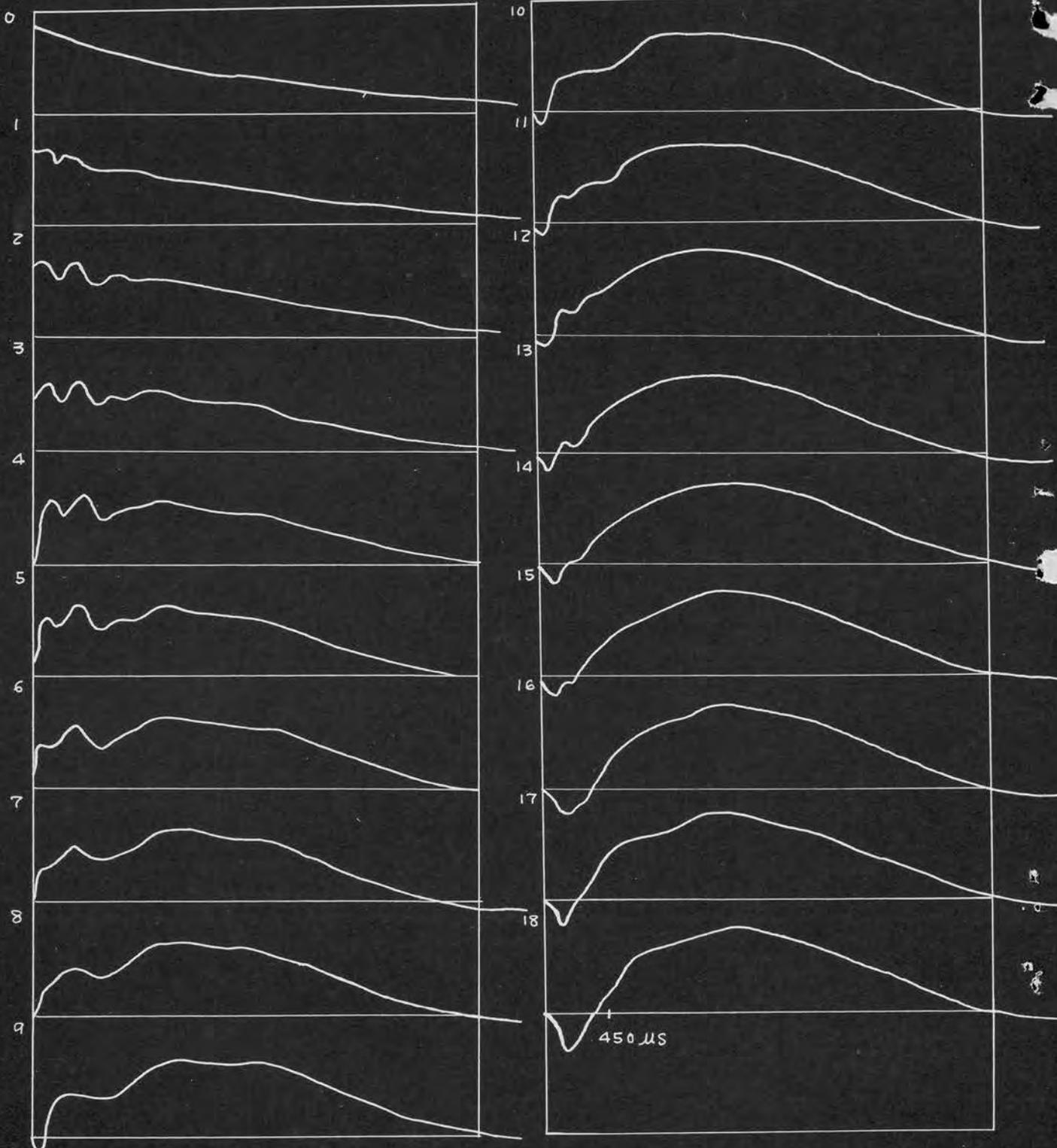


Fig 6.4 C



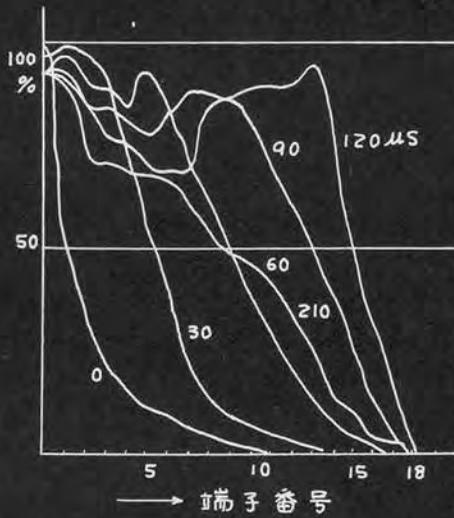


Fig. 6.5a

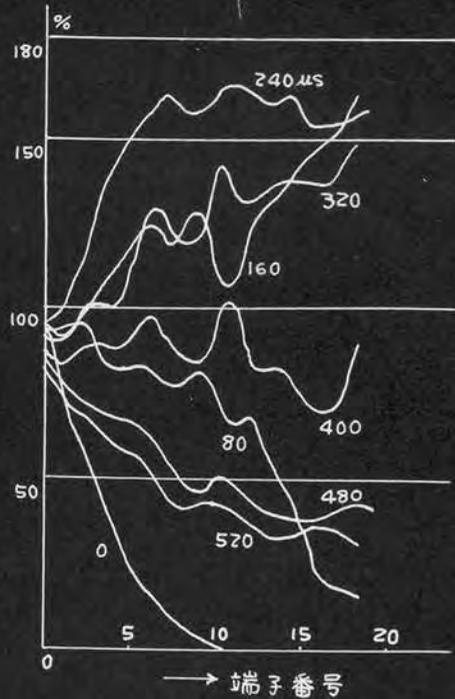


Fig. 6.5b

低圧巻線

空心

スリットをもつ薄層円筒

銅板

} 9.5 mH

肉 ぢ た

鉄心

} 9.6 H

高圧巻線

空心

スリットをもつ薄層円筒

銅板

} 6.9 H

肉 ぢ た

鉄心の構造 薄層鉄板の厚さは 0.35 mm で Fig. 6.2 のやうな構成をもつ。

電磁結合の大きさ m は 1.3 節の測定結果から基本周波数が 1 ~ 10 KC の範囲にあるとして $m = 4 \sim 5$ と考えられる。又初期分布は Fig. 6.3 より $\lambda \approx 10 \sim 20$ の程度の大いさと考えられる。Fig. 6.4 に鉄心をもつ場合、Fig. 6.3 に鉄心の代わりに銅板を使ったときの内部振動の波形を示す。又 Fig. 6.5 に Fig. 6.3 における内部振動を距離分布になおした例を示す。

Fig. 6.3 と Fig. 6.4 とを比べてわかるやうに基本振動数が比較的低いため鉄心を挿入したとき、及ばず挿入しないときとで基本周期が異

る他は、波形及び減衰の状況は余り異ならない。又一次側中性点接地のときは、二次巻線と短絡しても開放しても余り異ならないが、一次側の中性点開放のときは二次開放に於いては Fig. 6.4 C にみよ如く、二次巻線短絡の場合の数倍に周期がのびる。

供試変圧器 2.

大阪変圧器製作の 3000 KVA, 60KV:3KV Core Type の片脚のコイル要素（半径約 60cm）を積み重ねたもので鉄心の代わりに鉄板を丸めて巻線の対地容量を均一にしてみたものである。

その内部振動の波形を Fig. 6.6 a, b に示す。

次に波形を数値計算によつて求めてみよう。1.5 節でのべた如く指数函数分布は自己インダクタンス分布も直線分布も含めてかなり一般性があると考えられるから、種々の媒介変数 λ^2, m, δ の値をいれて粗い数値計算の曲線群を作つておくことは過去、将来のオシログラムを参照、整理する上に必要と考えられる。時間軸の代わりに角度 θ をとると 1.4 節 (4.10) (4.15) より、中性点接地のときは

$$\frac{V}{E} \cong x + \frac{2}{\pi} \sum_{\delta=1}^4 (-1)^{\delta} \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \delta^2 \pi^2) \delta} e^{-\alpha \delta^2 \theta} \cos \left(\sqrt{\frac{\delta^4 \pi^4 + m^2 \delta^2 \pi^2}{\pi^4 + m^2 \pi^2}} \right) \times \sqrt{\frac{\lambda^2 + \pi^2}{\lambda^2 + \delta^2 \pi^2}} \theta \sin \delta \pi x \quad (6.1)$$

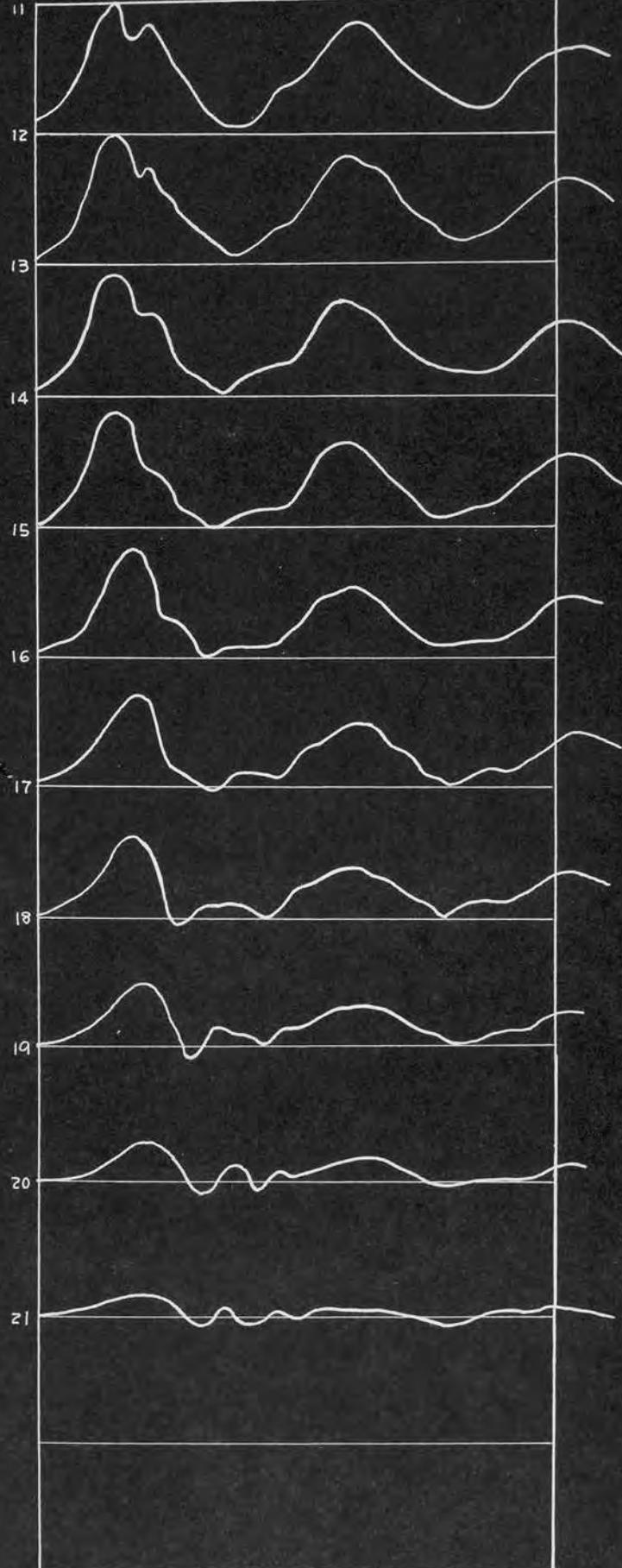
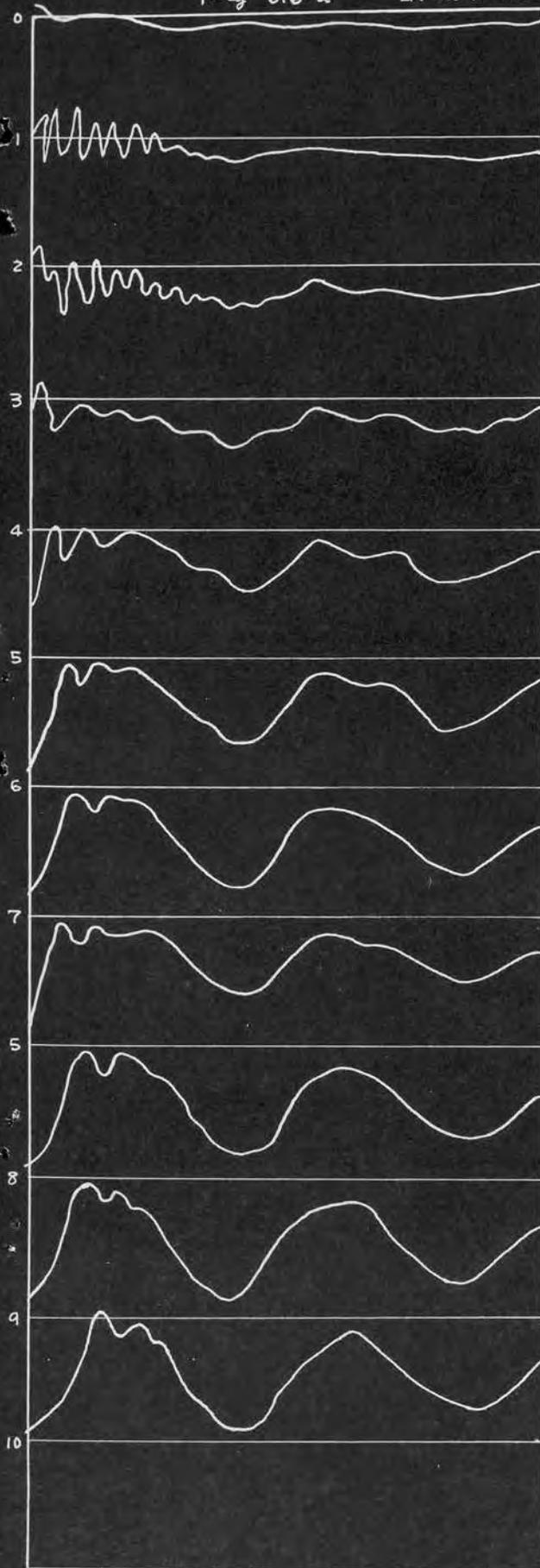
中性点開放のときは

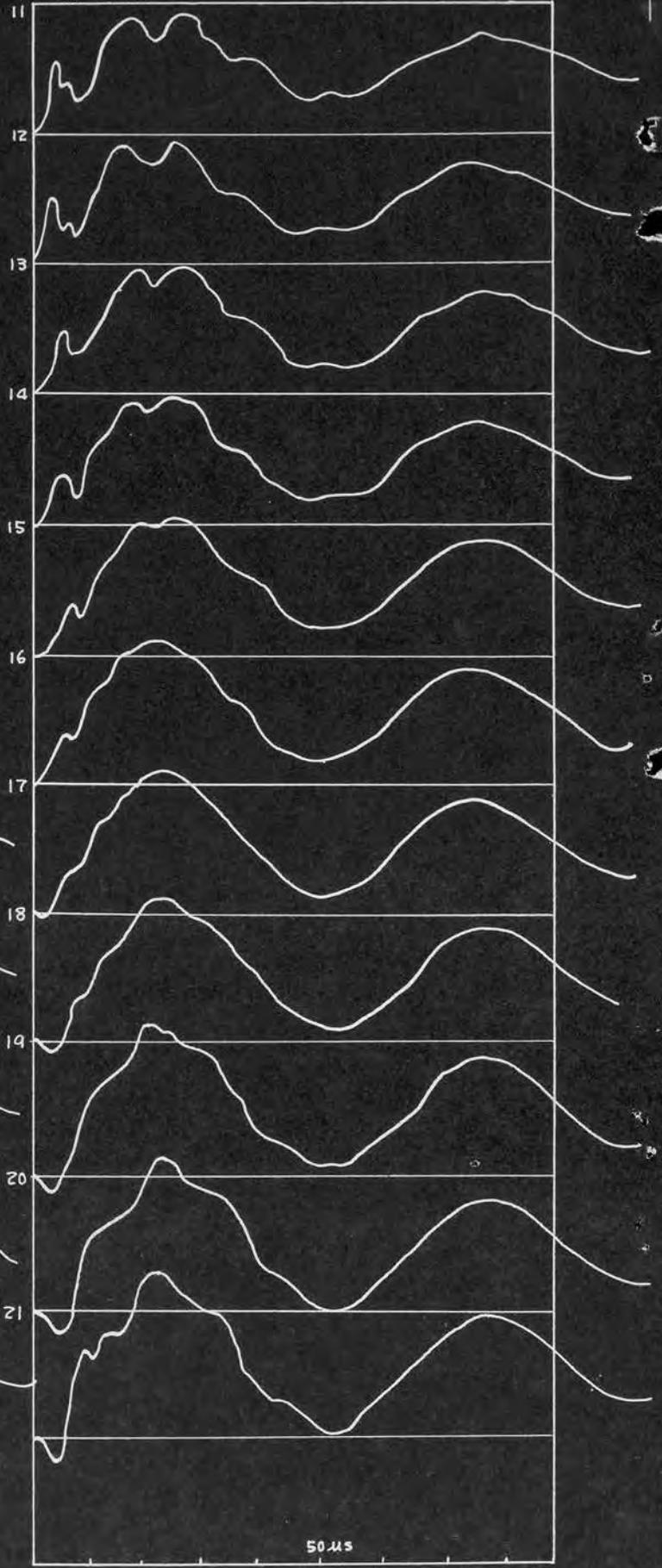
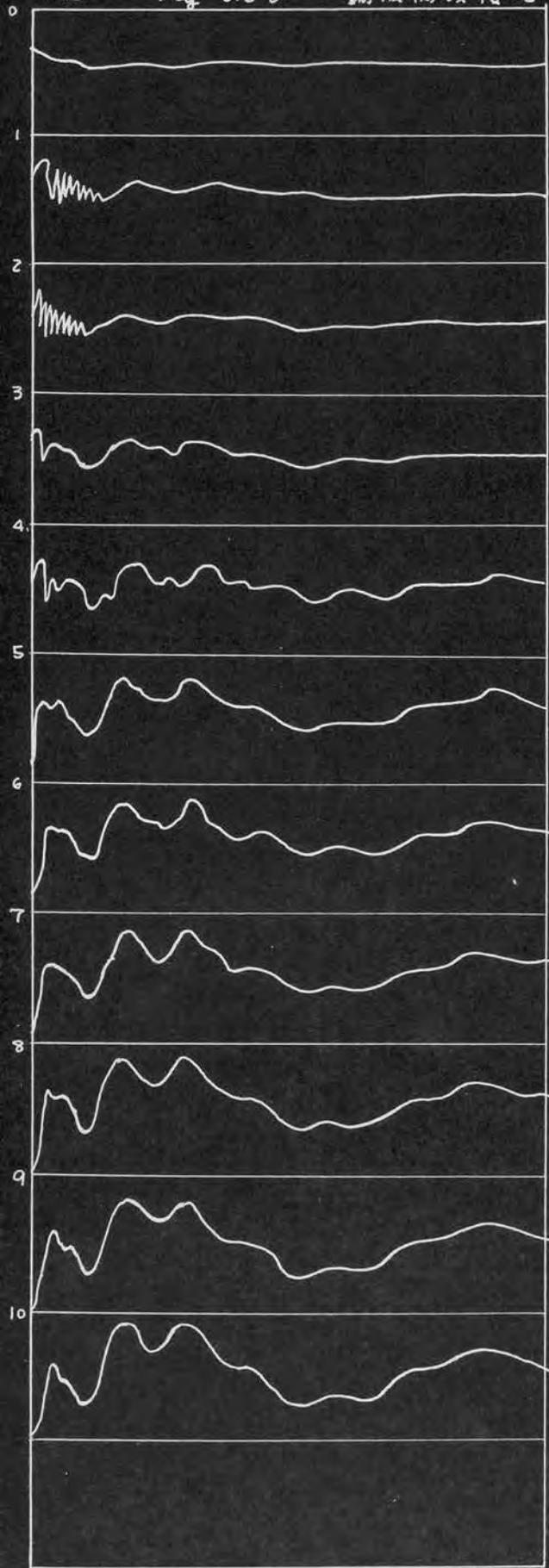
$$\frac{V}{E} \cong 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{\delta=1}^4 (-1)^{\delta} \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + m^2 \pi^2) n} e^{-\alpha n^2 \theta} \cos \left(\sqrt{\frac{n^4 \pi^4 + m^2 n^2 \pi^2}{\pi^4 + \frac{m^2 \pi^2}{4}}} \right) \times \sqrt{\frac{\lambda^2 + \frac{\pi^2}{4}}{\lambda^2 + n^2 \pi^2}} \theta \cos n \pi x \quad (6.2)$$

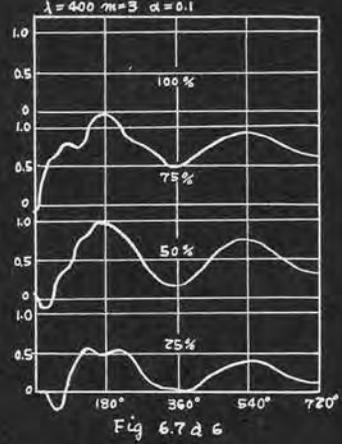
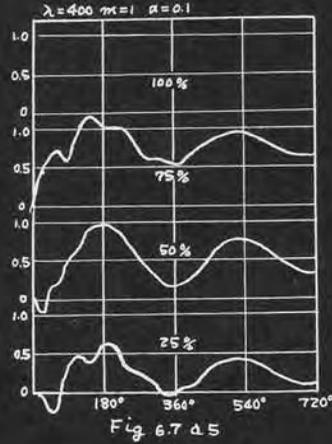
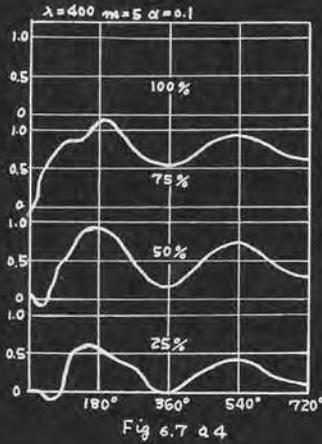
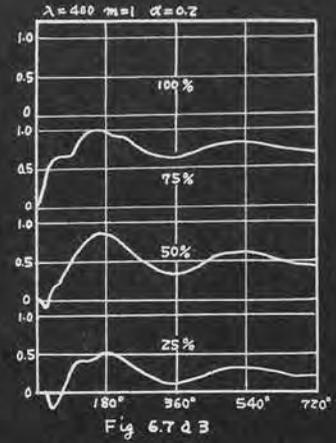
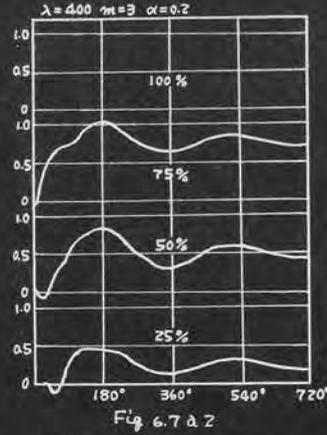
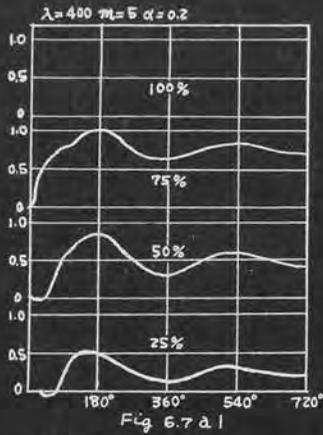
$$\text{但し } n = \frac{2\delta - 1}{2}$$

これを第四高調波までとつて計算を行つた。この計算曲線はごく波頭部分を除けば数値計算による誤差は僅小である。この二三の結果を Fig. 6.7 a, b に示す。

次にこれらの数値計算に基づいて実測波形の二三を比較してみる。さきの計器用変成器の例では、 π に近いやうに約 10 KC 内外では電磁結合の大きい $m=3 \sim 5$ で又 $\lambda=10 \sim 20$ の程度であることを考慮して Fig. 6.3 a, Fig. 6.4 a の中性点接地の実測波







形と Fig. 6.7 a 5, Fig. 6.7 a 6 の計算曲線を比較すると、その波形は相当よく一致している、このことは中性点開放の場合の Fig. 6.3 b, Fig. 6.4 b の実測波形と Fig. 6.7 b 4, Fig. 6.7 b 1 の計算曲線について同様である。

Fig. 6.6 a, Fig. 6.6 b はさきの電力用変圧器の波形で基本周期が中性点接地で約 $15 \mu s$ 、中性点開放で約 $40 \mu s$ で基本周波数がさきの計器用変成器に比べて高く巻回数も少く空心であるが、多層巻で断面半径の軸長に對する比が大きくなるため相互誘導はかなり現われ、 $m=3$ とすると中性点開放の場合 Fig. 6.7 b 4 と大体その傾向が一致する。

実際に鉄心が入った場合は少くとも空心の場合よりは電磁結合が増大するのであるからこの間の事情をほと推察できる。

Fig. 6.8 は日立製作所の三浦⁽²⁾氏による 1000 KVA 単相内鉄型変圧器の中性点開放における電位振動の波形であるが、(基本波の

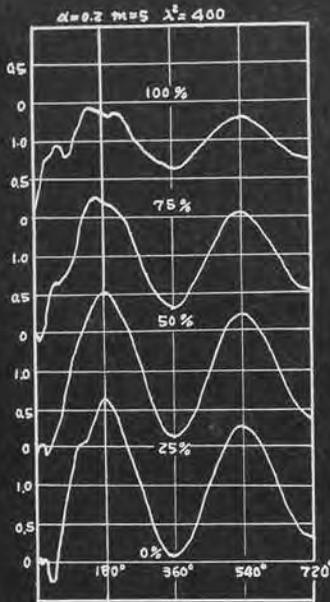


Fig 6.7 b 1

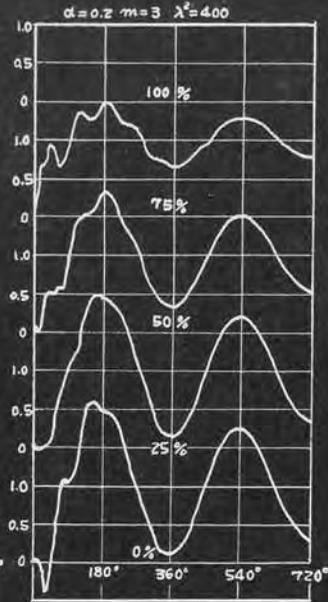


Fig 6.7 b 2

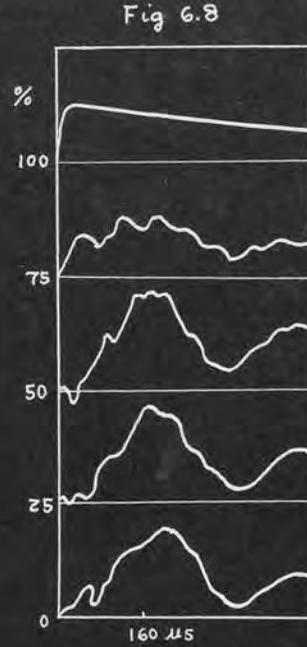


Fig 6.8

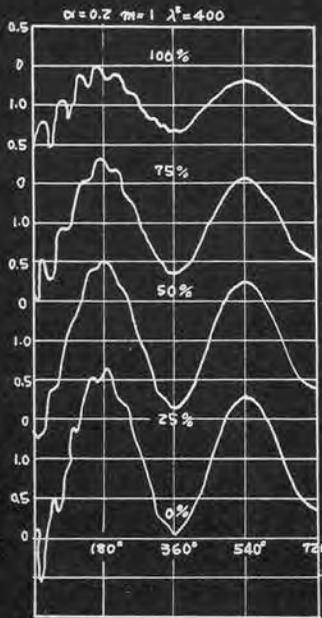


Fig 6.7 b 3

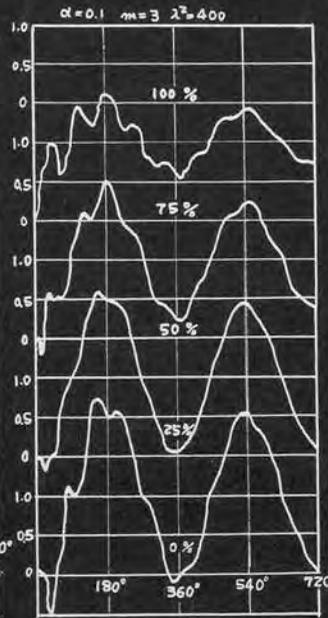


Fig 6.7 b 4

周期約 300 μ s) 特に中性点より 75% のところの Fig 6.7 b 4 の計算曲線とその傾向が相当によく一致している。

その他、比較的数のとほしい既発表の必要なデータのほとんどの内部振動の実測波形の中にはここに行なった二つの数値計算の波形の傾向と一致するものあり、一致しないもの

若干見うける、その原因としては比較的范围(分布も m 分布も含む)な実用式であるが数値計算の波形は比較的狭い範囲の二例であることと巻線方式の相異等が考えられる。

次に Fig 6.9 に自己インダクタンス分布として計算した例を示す。この場合の解は、中性点接地の場合には近似的に

$$\frac{V}{E} \cong x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2)} e^{-\delta n^2 t} \cos \frac{n \pi t}{\sqrt{L(C + n^2 \pi^2 K)}} \sin n \pi x \quad (6.3)$$

上式よりわかる如く高調波の含有率は相当に大きいにもかかわらず、歪みはむしろ矩形的な単調波もので所謂局部的な凹凸は含まない。1.5節で m が大きくなる程、自己インダクタンス分布に近づくことを述べたが Fig. 6.7 で m が大きくなるにつれて波形が単調となる傾向と一致している。この差異は、高調波の固有振動数分布主として第二第三調波の固有振動数の数列の差により生ずるものと考えられる。

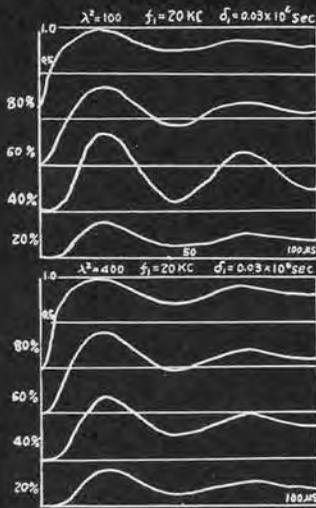


Fig. 6.9 a

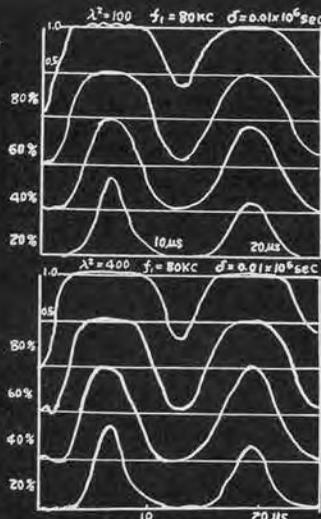


Fig. 6.9 b

指数函数分布の計算例 Fig. 6.7 及び実測例の二三において波頭の立ち上り部分は中性負附近になる程、負の swing から始まって、それから正の立ち上り部分をもつ傾向となる。これは m が小さい程、即ち電磁誘導の大きい方が大きい程、顕著である。波頭附近の計算曲線は誤差がかなり入り、確實なことはわからないが、これを Fig. 6.9 における自己インダクタンス分布の場合と比較すると、定性的に負の swing の存在が予想される。事実、第二章で進行波現象としてしらべると、これは指数函数分布の特性であることがわかる。

従来この種の波形の数値計算は殆んど行なわれず従って種々の提案された算式などのやうな波形を表わすかは、不明であったやうである。ここに行つた数値計算は相互誘導係数が指数函数で與えられる場合及び自己インダクタンス分布の場合の近似式に對する二三例であるが、オシログラフとの二三の対応をえた。尚直線分布の場合の波形は1.5節 Fig. 5.1の固有振動数分布からわかる如く、指数函数分布において $m=1$ とおいたものとほぼ等しいであらうことがわかる。しかしながら損失の時定数は1.4節の(4.5)をそのままとらずに媒介変数の数を小さくするために調波

の減衰の時定数を (6.1) (6.2) にあける如く近似的に調波の次数の二乗に比例してとつた筈や、又元素 (4.10) (4.15) 自身が基本波附近の振動数 振巾ともに 10% 内外の誤差を含む筈において、波形の計算曲線は、その大体の傾向を示すものと考えられる。

1.7 三相変圧器の内部振動

三相変圧器の内部振動の研究は、Elsner 氏や、宮本茂業氏等の主として実験的研究がある。この三相変圧器の^{各相巻線の}との差は各相の巻線間に電磁的相互誘導作用が若干ある筈である。基本振動数の低い三相変圧器では、この他相巻線から電磁的誘導作用は無視することができない。しかしこの種の問題は、これと方程式の中にどのやうに導入し、どのやうに解析すればよいか従来不明であった。ここではこの筈に対して一つの提案を行い、これに従って二三の例題を取り扱う。ここで変圧器を対称三相の構造をもつものと假定し、簡単のために無損失の場合について考察する。

基本方程式及び対称成分の分解

1. 相互誘導係数の距離の指数函数で與えられる場合

巻線 1, 2, 3 上の電位電流をそれぞれ、 v, i に添字を付けて表わすと、一般に磁束流は Fig 7.1 のやうになり、従つて電位電流の演算子函数 $V(x, p)$ $I(x, p)$ に関する基本方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_i}{dx} &= \sum_{j=1}^3 M_{ij} p \left\{ \int_0^x e^{-m_{ij}(x-y)} I_j(y, p) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 e^{-m_{ij}(y-x)} I_j(y, p) dy \right\} \\ \frac{dI_i}{dx} &= Cp V_i - Kp \frac{d^2 V_i}{dx^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

$$i = 1, 2, 3$$

ただし、ここには各相を対称と考へているので

$$M_{ij} = \begin{cases} L & i=j \quad \text{のとき} \\ M & i \neq j \quad \text{のとき} \end{cases}$$

$$M_{ij} = \begin{cases} m & i=j \quad \text{のとき} \\ m' & i \neq j \quad \text{のとき} \end{cases}$$

通常 $m \cong m'$ とあいて L, M を適当にとれば十分と考へられるから $m \cong m'$ とする。

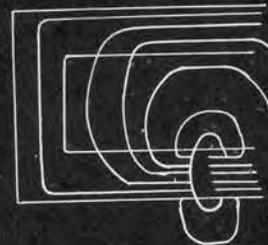


Fig 7.1

対称分には式をわたるため、例をば

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

したがって

$$[S] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad [S]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

という変換を施すと、各対称分に対する方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_{ai}}{dx} &= L_{ai} P \left\{ \int_0^x e^{-m(x-y)} I_{ai}(y, P) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 e^{-m(y-x)} I_{ai}(y, P) dy \right\} \\ \frac{dI_{ai}}{dx} &= CP V_{ai} - KP \frac{d^2 V_{ai}}{dx^2} \\ i &= 0, 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \text{但し零相分に対して} \quad L_{a0} &= L + 2M \\ \text{正逆相分に対して} \quad L_{a1,2} &= L - M \end{aligned} \quad (7.4')$$

2 相互誘導係数が距離の一次関数で與えられるとき
相互誘導作用の大きさから、被誘導相と自己相とで対称的に異なるものとするとき基本方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dx} &= \frac{P}{2a+1} \left\{ \sum_{j=1}^3 \int_0^x (a+1-x)(a+y) L_{ij} I_j(y, P) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 (a+x)(a+1-y) L_{ij} I_j(y, P) dy \right\} \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\frac{dI_i}{dx} = CP V_i - KP \frac{d^2 V_i}{dx^2}$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$\text{したがって} \quad M_{ij} = \begin{cases} L & i = j \text{ のとき} \\ M & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

これを1と同じく対称分に変換すると

$$\begin{aligned} \frac{dV_{ai}}{dx} &= \frac{L_{ai}}{2a+1} \left\{ \int_0^x (a+1-x)(a+y) I_{ai}(y, P) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 (a+x)(a+1-y) I_{ai}(y, P) dy \right\} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\frac{dI_{ai}}{dx} = C_p V_{ai} - K_p \frac{d^2 V_{ai}}{dx^2}$$

$$i = 1, 2, 3$$

但し零相分に対しては

$$L_{a0} = L + 2M$$

正逆相分に対しては

$$L_{a1,2} = L - M$$

(7.6')

二三の端子条件における解

単相変圧器について 1.1, 1.2 節で二三の端子条件における近似解を求めた。この解を用いて三相変圧器の比較的实际に近くて簡単な端子条件の場合の解を求める。さてこの場合変圧器と送電線との複合過渡現象として分布定数回路により正確に計算することは、複雑となって適当でない。しかし例えば Fig. 7.2 a において 1 端子に単位電圧が襲来したとき、2, 3 端子では、これにつながる送電線の他端から反射波が到達する前の現象では、送電線のサーゲイン係数 Z によって接地されることを考えればよい。ところが変圧器のインピーダンスは、一般に送電線のサーゲイン係数よりも相当高いから、2, 3 端子は、強制的に電位零に保たれるものと近似しても、この範囲の現象では十分であらう。

さて (7.4') (7.6') からわかるやうに零相分と正逆相分では L_{ai} の値が異なり、一般に 2 箇の固有振動の系列が存在することとなる。以下においては、解の成分を括弧で示し、括弧内に端子条件を表わし、始めの項で $x=1$ における条件後の項で中性点即ち $x=0$ における条件を表わすことにする。又正逆相分は括弧にプラスと付け、零相分と区別する。又結線図における矢印は座標の取り方を表

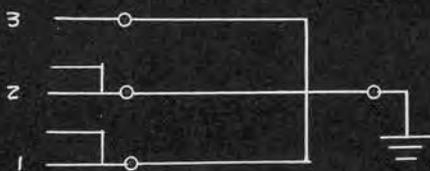


Fig. 7.2 a

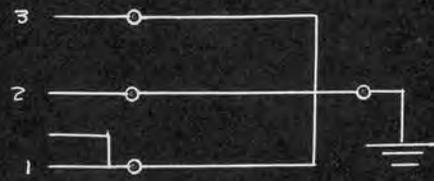


Fig. 7.2 b

ただし、 $x=1$ より $x=0$ へ の方向を示す。又解は、指数函数分布について求めた。

星型結線

中性点接地

a) Fig. 7.2 a について

$$x=1 \text{ 時 } V_1 = V_2 = E, \quad V_3 = 0$$

$$\text{従って } x=1 \text{ 時 } V_{a0} = 2E/3, \quad V_{a1} = E/3, \quad V_{a2} = E/3$$

$$\therefore V_1 = V_2 = \{2(E,0) + (E,0)'\} / 3$$

$$= E x + \frac{2E}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} (2 \cos \omega_{1n} t + \cos \omega_{2n} t)$$

$$V_3 = \{2(E,0) - 2(E,0)'\} / 3$$

$$= \frac{4E}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^2 \sin n\pi x}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} (\cos \omega_{1n} t - \cos \omega_{2n} t)$$

b) Fig. 7.2 b について

$$x=1 \text{ 時 } V_1 = E, \quad V_2 = V_3 = 0$$

$$\text{故に } x=1 \text{ 時 } V_{a0} = \frac{E}{3}, \quad V_{a1} = \frac{2E}{3}, \quad V_{a3} = -\frac{E}{3}$$

$$\therefore V_1 = \frac{1}{3} \{(E,0) + 2(E,0)'\}$$

$$= E x + \frac{2E}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} (\cos \omega_{1n} t + 2 \cos \omega_{2n} t)$$

$$V_2 = V_3 = \frac{1}{3\pi} \{(E,0) - (E,0)'\}$$

$$= \frac{2E}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^2 \sin n\pi x}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} (\cos \omega_{1n} t - \cos \omega_{2n} t)$$

$$\text{但し } \omega_{1n} = \sqrt{\frac{n^4 \pi^4 + m^2 n^2 \pi^2}{2m(L+2M)(C+K n^2 \pi^2)}} \quad (7.7)$$

$$\omega_{2n} = \sqrt{\frac{n^4 \pi^4 + m^2 n^2 \pi^2}{2m(L-2M)(C+K n^2 \pi^2)}}$$



Fig. 7.2 c

c) 中性負荷

Fig. 7.2 c) は、 $I \ll Z$

$$x = 1 \text{ 時 } \quad V_1 = V_2 = E \quad V_3 = 0$$

$$x = 0 \text{ 時 } \quad i_1 = i_2 = i_3 = 0$$

従って

$$V_1 = V_2 = E + \frac{ZE}{3\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cos \frac{ZD-1}{2} \pi x}{\left\{ \lambda^2 + \left(\frac{ZD-1}{2} \right)^2 \pi^2 \right\} \frac{ZD-1}{2}} (2 \cos \omega_{1\nu} t + \cos \omega_{2\nu} t)$$

$$V_3 = \frac{4}{3\pi} E \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \lambda^2 \cos \frac{ZD-1}{2} \pi x}{\left\{ \lambda^2 + \left(\frac{ZD-1}{2} \right)^2 \pi^2 \right\} \frac{ZD-1}{2}} \pi (\cos \omega_{1\nu} t - \cos \omega_{2\nu} t)$$

$$\text{但し } \omega_{1\nu} = \sqrt{\frac{\left(\frac{ZD-1}{2} \pi \right)^4 + m^2 \left(\frac{ZD-1}{2} \right)^2 \pi^2}{2m(L+ZM) \left\{ C + K \left(\frac{ZD-1}{2} \right)^2 \pi^2 \right\}}} \quad (7.7')$$

$$\omega_{2\nu} = \sqrt{\frac{\left(\frac{ZD-1}{2} \pi \right)^4 + m^2 \left(\frac{ZD-1}{2} \right)^2 \pi^2}{2m(L-M) \left\{ C + K \left(\frac{ZD-1}{2} \right)^2 \pi^2 \right\}}}$$

三角結線

d) Fig. 7.2 d) は、 $I \ll Z$

$$x = 1 \text{ 時 } \quad V_1 = E, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 0$$

$$x = 0 \text{ 時 } \quad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = E$$

$$\text{従って } x = 1 \text{ 時 } \quad V_{a0} = \frac{E}{3}, \quad V_{a1} = \frac{2}{3}E, \quad V_{a2} = -\frac{E}{3}$$

$$x = 0 \text{ 時 } \quad V_{a0} = \frac{E}{3}, \quad V_{a2} = -\frac{E}{3}, \quad V_{a3} = -\frac{E}{3}$$

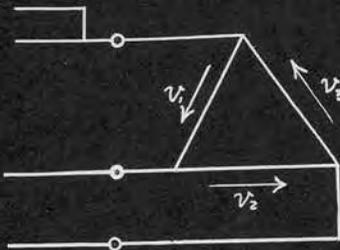


Fig. 7.2 d

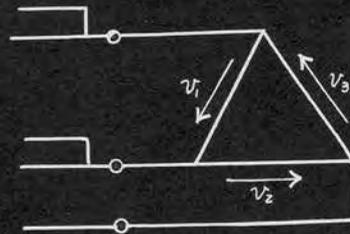


Fig. 7.2 e

$$\begin{aligned} \therefore V_1 &= \left(\frac{E}{3}, \frac{E}{3} \right) + \left(\frac{2}{3}E, -\frac{E}{3} \right)' \\ &= E\alpha + \frac{2E}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 \sin n\pi\alpha}{(\lambda^2 + n^2\pi^2)n} \left\{ \{(-1)^n - 1\} \cos \omega_{1n}t \right. \\ &\quad \left. + \{2(-1)^{n+1}\} \cos \omega_{2n}t \right\} \\ V_2 &= \left(\frac{E}{3}, \frac{E}{3} \right) + \left(-\frac{E}{3}, -\frac{E}{3} \right)' \\ &= \frac{2E}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 \{(-1)^n - 1\}}{(\lambda^2 + n^2\pi^2)n} \sin n\pi\alpha (\cos \omega_{1n}t - \cos \omega_{2n}t) \\ V_3(x, t) &= V_1(1-x, t) \end{aligned}$$

e) Fig 7.2 e 1: $\alpha = 0, 1$

$$\alpha = 1 \text{ の } V_1 = E, \quad V_2 = E, \quad V_3 = 0$$

$$\alpha = 0 \text{ の } V_1 = E, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = E$$

$$\text{従って } \alpha = 1 \text{ の } V_{a0} = \frac{2}{3}E, \quad V_{a1} = \frac{E}{3}, \quad V_{a2} = \frac{E}{3}$$

$$\alpha = 0 \text{ の } V_{a0} = \frac{2}{3}E, \quad V_{a1} = \frac{E}{3}, \quad V_{a2} = -\frac{2}{3}E$$

$$\begin{aligned} \therefore V_1 &= \left(\frac{2}{3}E, \frac{2}{3}E \right) + \left(\frac{E}{3}, \frac{E}{3} \right)' \\ &= E + \frac{2E}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 \{(-1)^n - 1\}}{(\lambda^2 + n^2\pi^2)n} \sin n\pi\alpha (2 \cos \omega_{1n}t + \cos \omega_{2n}t) \\ V_2 &= \left(\frac{2}{3}E, \frac{2}{3}E \right) + \left(\frac{E}{3}, -\frac{2}{3}E \right)' \\ &= E\alpha + \frac{2E}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 \sin n\pi\alpha}{(\lambda^2 + n^2\pi^2)n} \left\{ 2\{(-1)^n - 1\} \cos \omega_{1n}t \right. \\ &\quad \left. + \{(-1)^n + 2\} \cos \omega_{2n}t \right\} \\ V_3(x, t) &= V_2(1-x, t) \end{aligned}$$

したがって、 ω_{1n} 、 ω_{2n} は (7.7) に與えられる。又単相変圧器三基による上記の接続のときは、上の諸例題に於いて $M=0$ とすればよい。

1.8 物理的考察

前節までニ三の形式の相互誘導作用のある場合について考察してきたのであるが、1.1節、1.2節でや、数式に偏しすぎて嫌いがあるので、本節では少しく物理的に多少粗雑になるが考察することにする。尚本節における考察は定在波振動としての物理的考察であり、

Frühau⁽⁷⁾や Bellashi の考察に対する宮本茂業氏の解説に準據してニ三の内部振動の形式について、比較検討したものである。

凡そ、すべての過渡現象は、初期状態と終局状態の差により発生するものであるから、ニ三の状態の差が、過渡現象の初期における大いさを決定する。従って変圧器において巻線間の静電容量と、対地静電容量により定まる初期分布（双曲線函数）とインダクタンス、抵抗により定まる終局分布（一次函数）との差が内部電位振動の発生の原因ととらえられる。即ち初期電位分布により分布静電容量中に貯わえられた充電電荷が、分布インダクタンス中に分流して普通のL.C回路におけるやうな静電、電磁両勢力向の勢力転換を繰り返すのが内部振動の实体である。そしてこの初期分布と終局分布との差は、これを $F\lg$

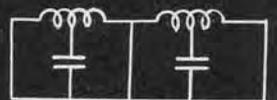
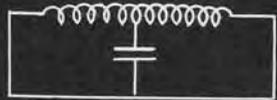


Fig 8.1

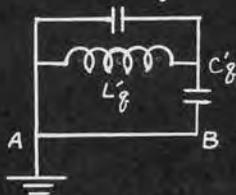
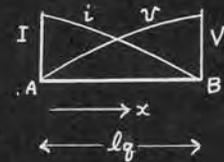


Fig 8.2

8.1のやうに空間的に調波に分解することができ、重ねの定理から各調波は、それぞれ独立した一つの自由度をもつ。すなわち、電位振動の節点毎に巻線B区切り、各電位の節点は、等價的に接地されたものととらえられるので、各空間高調波の1/4波長毎に $F\lg$ 8.1のやうな等價回路がとらえられ、更に巻線間の静電容量を考慮に

入れるときは、 $\frac{1}{4}$ 波長区分毎に Fig. 8.2 のやうな、電圧電流分布及びこれを表わす等価回路をうる。

Fig. 8.2 の l_g は、全巻線長を g 箇の $\frac{1}{4}$ 波長区分に分割したとき、一区分の長さを表わし、(全巻線長を 1 としているから $l_g = \frac{1}{g}$ である。) V 及び I はそれぞれの振動の腹における電位、電流を表わし、 x は電位の節より測つた巻線長である。図において L_g' , C_g' , K_g' は、それぞれこの区間における等价的なインダクタンス、対地静電容量、巻線間の静電容量を表わす。今 ω_g をこの調波に対する固有振動数の 2π 倍とするとたとへば (4.6') から

$$\left. \begin{aligned} v &= V \sin \frac{\pi}{2} g x \cos \omega_g t \\ i &= I \cos \frac{\pi}{2} g x \sin \omega_g t \end{aligned} \right\} (8.1)$$

が成立する。

一方この巻線における実際の幾何学的な構成と直接対応する対地静電容量を C_g 、巻線間の静電容量を K_g とすると、この一区分中の C_g に充電される電荷 Q_{gg} は

$$Q_{gg} = \int_0^{l_g} V \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{l_g} \right) \cdot \frac{C_g}{l_g} dx = \frac{2}{\pi} C_g V$$

又この区間において単位長毎に巻線間静電容量に貯わえられる充電電荷は

$$\frac{\partial v}{\partial x} K_g l_g = \frac{\pi}{2 l_g} \cos \left(\frac{\pi x}{2 l_g} \right) K_g l_g$$

で、 $x=0$ 即ち電位の節より最大値をとり その値は

$$Q_{gg} = \frac{\pi}{2} K_g V$$

従つて電位の節より $x=0$ に流入又は流出する電流、即ちこの区間中の巻線中の電流は Fig. 8.2 から C_g と K_g が並列に接続されていることに注意して

$$I = \omega_g \left(\frac{2}{\pi} C_g + \frac{\pi}{2} K_g \right) V \quad (8.2)$$

となる。今

$$\frac{2}{\pi} C_g = C_g', \quad \frac{\pi}{2} K_g = K_g' \quad (8.3)$$

とあくと

$$I = \omega_g (Cg' + Kg') V \quad (8.4)$$

とびる。従つて Fig 8.2 の等價回路における電位腹点の電位振巾 V とインダクタンス中を通る電流振巾 I が同一の値に保たれるためには、等價回路における集中静電容量は (8.3) における値をとるを要する。このやうにして等價静電容量が決定できる。

次に二三の磁束分布の場合に、つきその等價インダクタンス、固有振動数分布を新しく求めてみる。

1. 自己インダクタンス分布のとき

このとき AB 間に現われる電位差は等價的に

$$V = \omega_g Lg' I_g \quad (8.5)$$

で表わされる、一方分布定数回路と考へて実質的に AB 間に現われる電位差は

$$V = \omega_g \int_0^{l_g} \frac{Lg}{g} I \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{l_g}\right) dx = \frac{2}{\pi} \omega_g Lg I \quad (8.6)$$

$$\text{従つて } Lg' = \frac{2}{\pi} Lg \quad (8.7)$$

とすれば B 点において (8.1) と同じ電位、電流を興えるやうな等價的なインダクタンス Lg' が求められるのである。

さて全巻線にわたる対地静電容量、巻線間の静電容量、インダクタンスをそれぞれ、 C, K, L とすると

$$Lg = \frac{L}{g}, \quad Cg = \frac{C}{g}, \quad Kg = gK$$

であるからこの $\frac{1}{4}$ 波長区間における固有振動数は

$$\omega_g = \frac{1}{\sqrt{Lg'(Kg' + Cg')}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{L}{g} \left(\frac{2}{\pi} \frac{C}{g} + gK \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{\frac{\pi}{2} g}{\sqrt{L\left\{C + \left(\frac{\pi}{2} g\right)^2 K\right\}}} \quad (8.8)$$

従つて中性点接地のときは $g = 2n \quad n = 1, 2, 3, \dots$
であるから

$$\omega_g = \frac{n\pi}{\sqrt{L(C + Kn^2\pi^2)}} \quad (8.8')$$

中性点開放のときは

$$g = \frac{2n-1}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

であるから

$$\omega_g = \frac{\frac{2m-1}{2} \pi}{\sqrt{L \left\{ C + \left(\frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 K \right\}}} \quad (8.8'')$$

となる。

2 指数函数分布の場合

分布定数回路として Fig 8.2 にあいて AB 間に生ずる電位差は (2.1) から中性点接地の場合は次のやうにして求められる。先ず右側電圧 x における電位傾度は

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= \omega_g M \left\{ \int_0^x e^{-m(x-y)} I \cos \frac{\pi q y}{2} dy + \int_x^1 e^{-m(y-x)} I \cos \frac{\pi q y}{2} dy \right\} \\ &= \frac{\omega_g M I}{m^2 + \left(\frac{\pi q}{2} \right)^2} \left\{ 2m \cos \frac{\pi q x}{2} - m e^{-mx} - e^{-m(x-1)} m \cos \frac{\pi q}{2} \right\} \end{aligned}$$

となる。但し q は偶数、中性点開放のときは、電流分布として

$$I \sin \frac{\pi q y}{2} \quad (q \text{ 奇数})$$

をとらねばならぬ。

故に AB 間の電位差は巻線間の電磁結合が比較的大きく、調波の次数が大きいときは

$$V = \int_0^1 \frac{dV}{dx} dx \cong \frac{\omega_g M I}{m^2 + \left(\frac{\pi q}{2} \right)^2} \frac{2}{\pi q} \cdot 2m$$

従つて等価インダクタンス L_g' は

$$L_g' \cong \frac{2mM}{m^2 + \left(\frac{\pi q}{2} \right)^2} \frac{2}{\pi q}$$

中性点開放の場合についても同じ近似式をうる。但し q 奇数従つて $1/4$ 波長区間における固有振動数は

$$\omega_g = \frac{1}{\sqrt{L_g' (C_g' + K_g')}} \cong \sqrt{\frac{\{m^2 + \left(\frac{\pi q}{2} \right)^2\} \left(\frac{\pi q}{2} \right)^2}{2mM \{C + \left(\frac{\pi q}{2} \right)^2 K\}}}$$

但し

中性点接地の場合	q 偶数
中性点開放の場合	q 奇数

1.9 一般的論議

こゝでは、相互誘導函数の Fourier 変換可能な偶函数を與えらるゝ一般的な場合について、半は物理的考察による簡易な近似式を出してあげる。即ち基礎方程式は、

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l L(x-y) i(y,t) dy \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t} - K \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2}$$

無限長巻線の場合はその厳密解が求められるが、その第2章2.3節にのべる結果式を用いて試索的に有限長の内部振動の問題に対して近似式を出そうとするものである。初期分布は静電的に定まり中性と接地のときは、

$$v_{t \rightarrow 0} = \frac{\sinh \lambda x}{\sinh \lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\lambda \pi (-1)^n}{\lambda^2 + n^2 \pi^2} \sin n \pi x \quad (9.2)$$

終局分布は

$$v_{t \rightarrow \infty} = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \pi} \sin n \pi x \quad (9.3)$$

従つて初期分布と終局分布との差は

$$v_{t \rightarrow 0} - v_{t \rightarrow \infty} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 (-1)^n}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} \sin n \pi x \quad (9.4)$$

$$t: t \rightarrow \infty \quad n = n$$

となりこれの内部振動の振巾を決定する。従つて初期分布及び終局分布を満足する函数として

$$v = Ex + \frac{2}{\pi} E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^2}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} \sin n \pi x, F_0(t) \quad (9.5)$$

同様に中性と開放のときは、初期及び終局分布を π の半整数倍の余弦級数に展開することにより

$$v = E + \frac{2}{\pi} E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^2}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} \cos n \pi x, F_0(t) \quad (9.6)$$

$$n = \frac{2n-1}{2}$$

$t: t \rightarrow \infty \quad F_0(t)$ は

$$\begin{array}{ll} t \rightarrow 0 & \text{で} \quad F_0(t) = 1 \\ t \rightarrow \infty & \text{で} \quad F_0(t) \rightarrow 0 \text{ 又は不定} \end{array} \quad (9.7)$$

を満足せねばならぬ。ここで不定という意味は、減衰があるときには、 $t \rightarrow \infty$ で零にならねばならぬが減衰が全くないときには、三角函数の如く永久振動を意味する。

問題は線型であり、各波長区分毎の調和分析により考察していろいろであるから、(9.7)を満足するものとして余弦函数をとる。すなわち

$$F_0(t) = \cos \omega_0 t \quad (9.7')$$

しるに内部振動における定在波は両端子における反射による左右両方向の進行波に分解される。その各調波における進行速度は、(9.5)(9.7)から

$$g_0 = \frac{\omega_0}{n\pi} \quad (9.8)$$

一方無限長巻線の場合の速度成分をここに転用すると第2章2節、(3.17)から

$$g_{n'} = \frac{1}{\sqrt{M^*(n')}} \quad (9.9)$$

$$M^*(n') = \int_{-\infty}^{\infty} M(q) \cos q n' dq \quad (9.9')$$

$$M(q) = CL(q) - KL''(q)$$

で n' は傳播定数の意味をもつ。ただし記号がよからわしいので2章2節(3.16)等を用いる n の代わりに n' と書く。これは無限長のときは連続的な値をもつが有限長のときは高散的な固有値をもつ。その値は(9.5)(9.6)における三角函数の偏角からわかるやうに、中性点接地、ならびに開放に依りて、それぞれ

$$n' = n\pi = \Delta\pi$$

$$n' = n\pi = \frac{2s-1}{2}\pi$$

$g_{n'}$ の添字 n' は各波の成分の番号を指定する数であるから有限長の場合には、 $n' \rightarrow s$ に書きかえて結局

$$g_s = \frac{1}{\sqrt{M^*(n\pi)}} = \frac{\omega_0}{n\pi} \quad (9.10)$$

従つて

$$\omega_0 = \frac{n\pi}{\sqrt{M^*(n)}} \quad (9.10')$$

これより固有振動数が定まり、(9.6)(9.7)と合せて内部振動の全容が近似的に求められた。しかしながらこれはあくまで近似的な簡易な一般式であり、たとえばL, C, K回路のやうな自己インダクタンス分布をもつ特殊な場合を除いては、有限長の場合上式のやうな簡潔な形では正確に表わされない。たとえば指数函数分布を例にとるとその近似式は2節(2.16)(2.16')(2.17)と一致するが、厳密解は(1.15)(2.15)(2.15')にみるやうな形となり、基本波附近においては、普通振巾、振動数ともに10%内外の誤差が含まれることからみても結果的に首肯できる。

1.10 定常交流現象

この節では $e^{j\omega t}$ という定常状態における電位の距離分布をしらべる。(1.5)により直線分布のときは、その傳播定数は $p = j\omega$ とし

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(-\omega^2 LK + \sqrt{\omega^4 L^2 K^2 + 4LC\omega^2})$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}(-\omega^2 LK - \sqrt{\omega^4 L^2 K^2 + 4LC\omega^2})$$

となり α は実数、 β は虚数となる。従つて α 成分 $e^{\alpha x + j\omega t}$ は定在波を表わし、 β 成分 $e^{\beta x + j\omega t}$ は進行波を表わすこととなる。

今 $\beta = j\beta'$ とし (1.10)(1.9)により電位分布を求めると、双曲線函数と三角函数の重畳となる。今 $\beta' = 4\frac{\pi}{2}$ 及 $\alpha = 5\frac{1}{2}\pi$ という非共振状態に對する電位分布を示せば、Fig 10.1の如くなる。ただし α は指数函数分布との関連上、 $\alpha = \frac{1}{3}$ にとつて計算した。図において実線は双曲線函数の成分を示す。図から入りの大きい程、又 β が小さい程、距離分布の中の三角函数の成分が大きくなつていく。

これは巻線間の静電容量によつて側路される量が減少することによる。

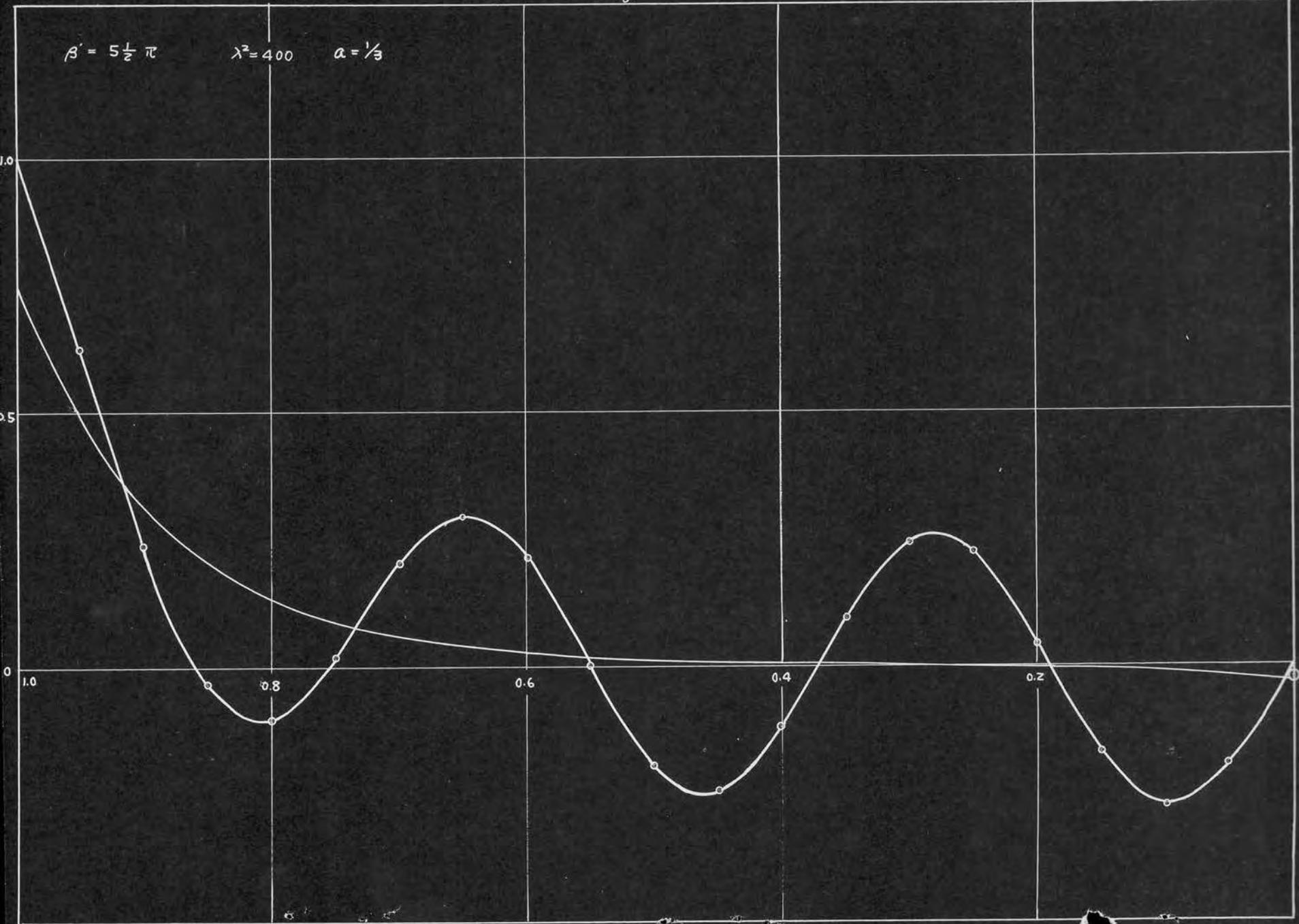
指数函数分布では α と β' との関係が直線分布の場合と異なるため、定量的には Fig 10.1 とや、異なるが三角函数と双曲線函数が重畳される点等においては同様の性質をもつ。

Fig 10.1 e

$$\beta' = 5\frac{1}{2}\pi$$

$$\lambda^2 = 400$$

$$a = \frac{1}{3}$$



$\beta' = 4\frac{1}{2}\pi$ $a = \frac{1}{3}$

$\lambda^2 = 25$
 $\lambda^2 = 100$
 $\lambda^2 = 400$

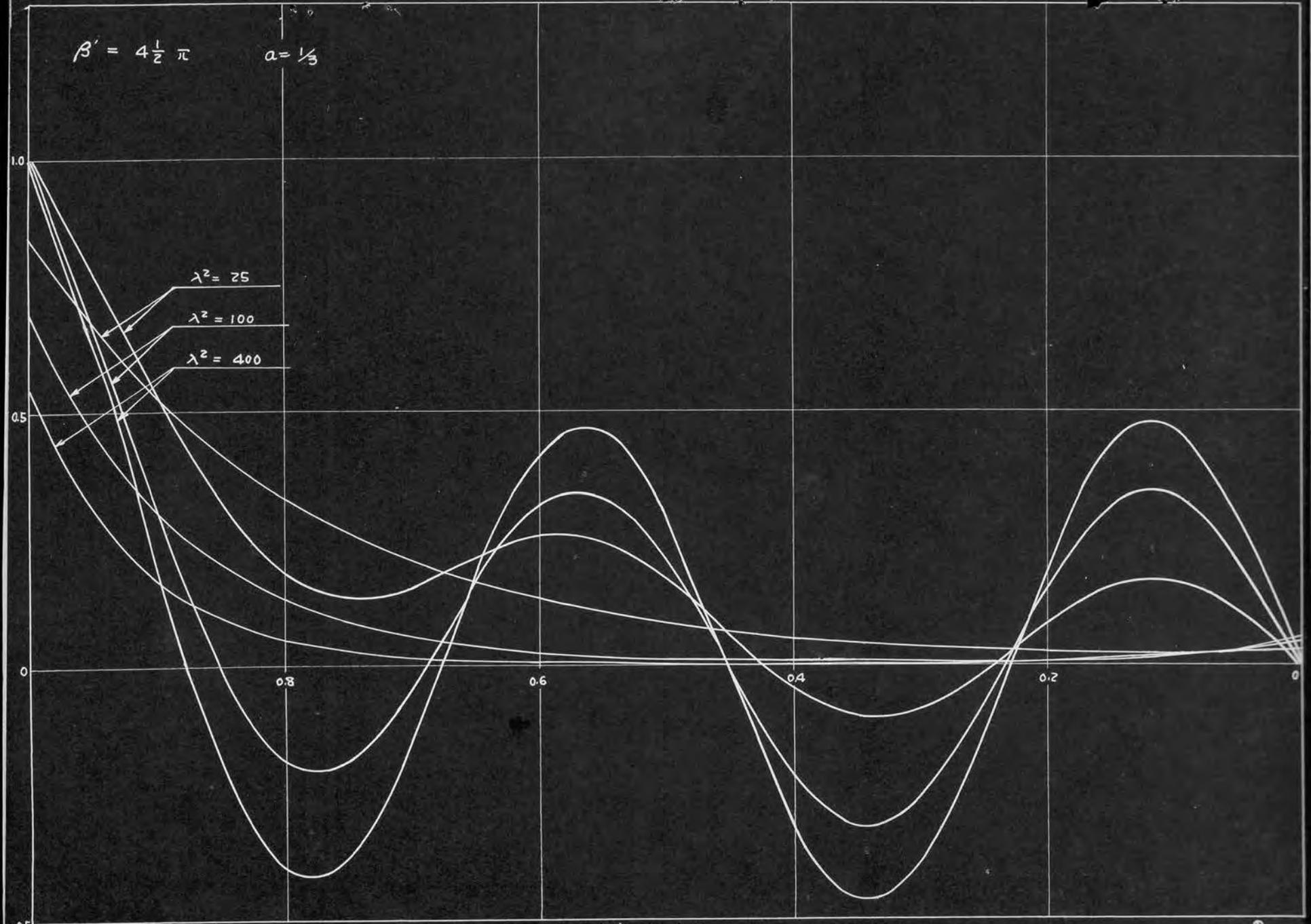


Fig 10.1 a

次に一様な自己インダクタンス分布をしらべると、このときは

$$V = \frac{\sinh \delta x}{\sinh \delta} E e^{j\omega t}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{-LC\omega^2}{1-LK\omega^2}}$$

$$\text{したがって } \omega < \frac{1}{\sqrt{LK}} = \omega_0.$$

即ち臨界周波数以下の周波数では、 δ は純虚数となり電位分布は三角函数となり、双曲線函数の成分は含まれない。又 $\omega > \omega_0$ では δ は実数となり、双曲線函数の成分だけをもつ分布となる。因みに、Bohm 氏の⁽¹⁷⁾実験例では、定常電位分布は三角函数と双曲線函数の重畳の形となつてゐる。

次に指数函数分布の場合に、その位相速度等をしらべる。(2.5) から

$$\left. \begin{array}{l} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{array} \right\} = \frac{m^2 - 2mMK\omega^2 \pm \sqrt{(m^2 - 2mMK\omega^2)^2 + 8mMC\omega^2}}{2}$$

となり、 α は全周波数を通いて実数となるから、波は傳播しない。 β 成分の方は

$$g = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\sqrt{2} \omega}{\sqrt{(m^2 - 2mMK\omega^2)^2 + 8mMC\omega^2 - m^2 + 2mMK\omega^2}^{\frac{1}{2}}}$$

という位相速度で傳播する波を表わす。遮断周波数は存在しない。又上式より m が小さい程、即ち電磁結合が大きい程位相速度が大きい。

1.11 差分方程式としての取り扱い

お互いに隣接するコイル間には電磁的な相互誘導作用があつて、これらのコイルが直列状に集団をなしてゐると考えられるやうな場合は、これを差分方程式として取り扱うのが適當と考へられる。その固有振動数の系列は、相互誘導作用を考へない場合からどのやうにされるか、又指数函数分布のやうな連続的分布と比較してどのやうな關係をもつかは興味ある問題である。隣接間だけの結合を取り入れた考察は、古く Bohm 氏が微分方程として、考察を行つてゐるが、その⁽¹⁸⁾数学上、物理上の概念と方法には多分の疑点があり、又最近の庄司氏の報文にも同様な点がある。ここではこのやうな問題を差分方程式に統一して数学上の難点をなくし、それから適當な近似

式を導くこととする。基礎差分方程式は

$$V_{x+1} - V_x = LpI_x + MPI_{x+1} + MpI_{x-1} \quad (11.1)$$

$$V_{x+1} - V_x = \frac{I_x'}{Kp} \quad (11.1')$$

$$CpV_x + I_{x-1} - I_x + I_{x-1}' - I_x' = 0 \quad (11.1'')$$

上式より

$$I_x(Lp + ZMp) = V_{x+1} - V_x + MCP^2(V_x - V_{x+1}) \\ + MKp^2(V_{x+2} - 3V_{x+1} + 3V_x - V_{x-1})$$

上式を (11.1') に代入すると

$$V_{x+2} - \frac{1}{MKp^2}(ZMKp^2 + MCP^2 - LKp^2 - 1)V_{x+1} \\ - \frac{1}{MKp^2}(Z + LCp^2 - ZMKp^2 + ZLKp^2)V_x \\ - \frac{1}{MKp^2}(ZMKp^2 + MCP^2 - LKp^2 - 1)V_{x-1} \\ + V_{x-2} = 0 \quad (11.2)$$

という四階の差分方程式を得る。よって

$$y_{x+1} + 2ay_x + y_{x-1} = 0 \quad (11.3)$$

の一般解は

$$y_x = Ae^{\sigma x} + Be^{-\sigma x}$$

であり σ を決定する特性方程式は

$$Cosh\sigma + a = 0$$

今 (11.3) という差分方程式を演算記号

$$(\Delta + 2a)y_x = 0$$

で表わすと、四階の対称形の差分方程式

$$y_{x+2} + \beta y_{x+1} + \alpha y_x + \beta y_{x-1} + y_{x-2} = 0 \quad (11.2')$$

は、

$$(\Delta + Za)(\Delta + Zb)y_x = 0$$

の形に、因数に分解され、それぞれ

$$(\Delta + Za)y_x = 0, \quad \text{及} \quad (\Delta + Zb)y_x = 0$$

という方程式を満足する。したがって a, b は

$$Z(Zab + 1) = d$$

$$Z(a + b) = \beta$$

という関係式と (11.2) と (11.2') との比較によつて

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} \Big\} &= \frac{1}{4MKp^2} \left\{ -(2MKp^2 + MCP^2 - LCP^2 - 1) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(2MKp^2 + MCP^2 - LCP^2 - 1)^2 - 4MKp^2(-2 - LCP^2 + 2MKp^2 - 2LKP^2 - 2MKp^2)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

然るに上式より $K \rightarrow 0$ の極限を考へると

$$\lim_{K \rightarrow 0} \left. \begin{aligned} \frac{a}{b} \Big\} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\left(2 - \frac{L}{M} \right) + \frac{Z + LCP^2}{MCP^2 - 1} \right] \\ - \frac{Z + LCP^2}{2(MCP^2 - 1)} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

しかるに $K = 0$ のときについて改めて計算を行なうと結果は二階の階差方程式となり

$$\cosh \delta = \frac{-(Z + LCP^2)}{2(MCP^2 - 1)} \quad (11.5')$$

となる。したがつて a はこれを満足する。故に

$$V_x = A \cosh \delta x + B \sinh \delta x \quad (11.6)$$

$$\cosh \delta = -b$$

となることからわかる。故に (11.4) より

$$p^2 \left\{ LC + 2LK - 2b(2MK + MC - LK) - 4MKb^2 \right\} = -2b - 2$$

従つて

$$p = \frac{\pm j \sqrt{2(b+1)}}{\sqrt{LC + 2LK - 2b(2MK + MC - LK) - 4MKb^2}} \quad (11.7)$$

中性点接地

このときの演算子解は

$$V_x = E \frac{\sinh k \delta x}{\sinh k \delta n} \quad (11.8)$$

従って展開定理により

$$V_x = \frac{E x}{n} + E \sum \frac{(\sinh k \delta x)_{p=p_k}}{p_k \frac{d}{dp_k} (\sinh k \delta n)_{p=p_k}} e^{p_k t} \quad (11.8')$$

上式の極は $\delta n = \pm j k \pi$, 但し $k = 1, 2, \dots, n-1$

今

$$\varphi_k = \frac{k \pi}{2n}$$

よおくと

$$k+1 = 2 \sin^2 \varphi_k$$

であるから

$$p = \frac{\pm j 2 \sin \varphi_k}{\sqrt{LC + 4LK \sin^2 \varphi_k - 8MK \sin^2 \varphi_k (-1 + 2 \sin^2 \varphi_k) - 2MC (-1 + 2 \sin^2 \varphi_k)}}$$

$$\therefore v = \frac{E x}{n} + \frac{E}{n} \sum (-1)^k \cot \varphi_k \frac{LC + 2MC + 16MK \sin^4 \varphi_k}{LC + 2MC (1 - 2 \sin^2 \varphi_k) + 4LK \sin \varphi_k - 8MK \sin^2 \varphi_k (-1 + 2 \sin^2 \varphi_k)} \times \sin 2 \varphi_k x \cdot \cos \omega_k t \quad (11.9)$$

$$\text{但し } \varphi_k = \frac{k \pi}{2n}$$

$$\omega_k = \frac{2 \sin \varphi_k}{\sqrt{LC + 4LK \sin^2 \varphi_k - 8MK \sin^2 \varphi_k (-1 + 2 \sin^2 \varphi_k) - 2MC (-1 + 2 \sin^2 \varphi_k)}} \quad (11.9')$$

中性点開放

このときの演算子解は

$$V = E \frac{\cosh k \delta x}{\cosh k \delta n} \quad (11.10)$$

上式の極は $n \delta = \pm j \frac{2k-1}{2} \pi$

より定まる。従って

$$V = E + \frac{E}{\pi} \sum (-1)^k \cot \varphi_k \frac{LC + ZMC + 16MK \sin^4 \varphi_k}{LC + ZMC(1 - 2 \sin^2 \varphi_k) + 4LK \sin^2 \varphi_k - 8MK \sin^2 \varphi_k (-1 + 2 \sin^2 \varphi_k)} \times \cos 2 \varphi_k x \cdot \cos \omega_k t \quad (11.11)$$

$$\text{但し、} \varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

$$\omega_k = \frac{2 \sin \varphi_k}{\sqrt{LC + 4LK \sin^2 \varphi_k - 8MK \sin^2 \varphi_k (-1 + 2 \sin^2 \varphi_k) - 2MC(-1 + 2 \sin^2 \varphi_k)}} \quad (11.11')$$

今見易いため $K=0$ とすると

$$\omega_k = \frac{2 \sin \varphi_k}{\sqrt{LC + ZMC(1 - 2 \sin^2 \varphi_k)}} \quad (11.12)$$

ただし

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{n} \quad \text{中性良接地}$$

$$= \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad \text{開放}$$

今、 n が十分大きく k が比較的小さいところでは、 $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ してかたつて、このやうなときは、固有振動数スラットル ω_k/ω_1 は $M=0$ のときは近似的に調波の次数 k に比例して増加するが、 $M \neq 0$ のときは、これより急激に増加する。その性質は指数函数分布等の 1.5 節の論議と一致する。

第2節 鉄心の内部振動の減衰に與える影響

さきに第1章 1.4 節において損失による減衰を表わすべく抵抗素子を等價的に導入したが、ここでは一樣な自己インダクタンスをもつ場合に ついて少しく、くわしく考へてみよう。しかしながら減衰の因子として考へられるものは比較的多く、

① 巻線中の表皮効果、及び近接効果

巻線のやうに多くの線が近接して集合してゐるときは、数十 KC 以上の近接効果が表われ、Butterworth 等の損失の空間分布自体に關する研究があるが、高周波では \sqrt{f} 的な減衰特性をもつこと

が予想される。

② 誘導体損失

Debye 及 α Hopkinson 氏の理論によれば、誘電体損失を考えた復素誘電率は

$$\epsilon = \epsilon_{\infty} \left(1 + \frac{K}{1 + j\omega T} \right)$$

の形で與えられる。従つて誘電体損失を考慮に入れた実効的な静電容量としては、 $j\omega \rightarrow P$ として

$$C = C_{\infty} \left(1 + \frac{K}{1 + PT} \right) \quad C_{\infty}, K, T \text{ は定数}$$

というやうな演算子函数を用い、これに対応した傳播定数を用いねばならぬ。

③ 鉄心中の渦流損失及び表皮効果による減衰

鉄心は、その損失を生じないやうに積層されていて商用周波数に於いてはこれで十分であるが、数十 KC となれば減衰に対して最も大なる位置をしめるものと与えられる。

このやうに減衰に與る諸因子は比較的多く、又誘導体損失の如く渦流損失と異なつた周波数特性をもつものがある。従つて各諸因子から減衰に対する総合特性と解析式で與え、これを基礎方程式に導入して内部振動の減衰の周波数特性を出すことは複雑となつて見通しが容易でない。それでは、減衰の大半を決定すると与えられる鉄心の渦流損失について、これが内部振動に與える影響についてしらべることとする。勿論えられた結果は、減衰の大様を素描するにとどまり、定量的には一般にその大きさの一致程度しか期待することはできない。

2.1 ニ三の実験的予想

さきに、1.6 節で計器用変成器の高圧巻線について述べた。この場合は、基本周波数の 1 ~ 10 KC の程度であるから損失による減衰は量的に空心の場合と大差がない。ところが低圧巻線は單層均一巻で長さも短く、基本周波数も高く 100 KC 内外である。Fig 1.1, Fig 1.2 に鉄心のある場合と、その代わりに銅板を代置した場合のこの低圧巻線の内部振動及び第 2 京大法による応答を示す。矩形波印加に対して空心の場合、やはり初期において矩形的であるのに対して

第=京大法

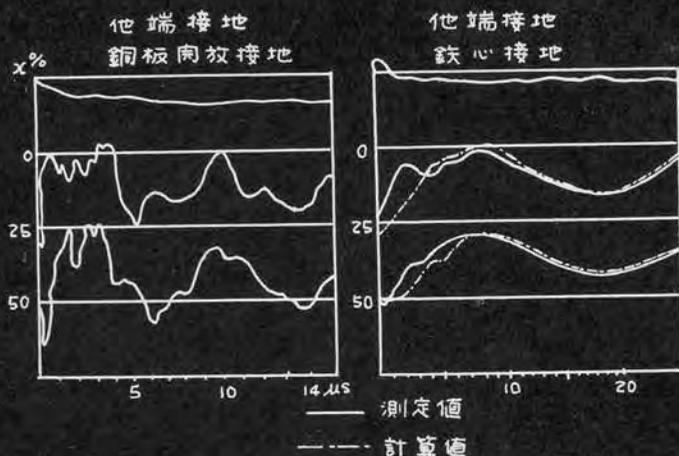


Fig. 1.1 a

Fig. 1.1 b

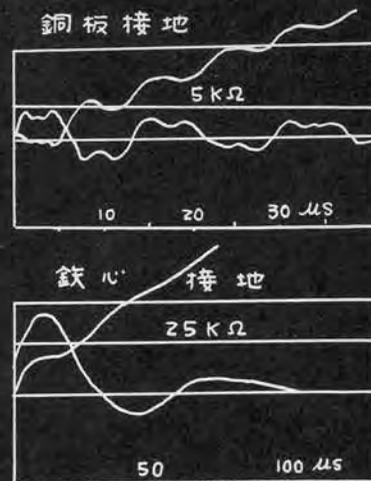


Fig. 1.2

して鉄心の場合には、かなり初期から丸みをもつことがわかる。これによつても周波数が高くなつたとき、(構造の定数により異なるが数十KC以上)他の因子による減衰に比し鉄心のもつ大きな役割の一斑をうかがい知ることが出来る。

尚蛇足のやうであるが空心でこのやうに均一単層になつてゐるものは、相互誘導の影響はかなり小さいとみられる。

即ち、フリッシュ法では、 $L = 9.5 \text{ mH}$, $C = 720 \text{ pF}$ 空心の場合には、 L, C 回路による基本固有周期 $T = 2\sqrt{LC}$ と $2 \sim 5\%$ の程度で一致してゐる。これは単層空心(鉄心の代わりに薄銅板を代置したもの)の場合には巻線間の相互誘導ならびに静電的結合の小さいことを示してゐる。又、これは、集中回路の $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ とは、もとより一致せず、この種の分布定数回路としての取り扱ひの妥当なことを示してゐる。

2.2 磁束に対する渦流効果

鉄心内の磁束分布を、理論的に求めることは、ヒステリシス現象や導磁率 μ の変化等、鉄心のもつ物性的性質の多様性を無視し、電流と磁束との関係を一次的関係で且一價函数としてみ、境界条件が比較的複雑になることから厳密に求めることは困難である。従つてここでは、衝垂波を含む高周波現象において磁束の分布がどのやうに偏向し、そのため見かけ上のインダクタンスや抵抗分がどのやう

に表わせるかを定性的に示らば、等価回路の基礎を示らるための考察を行う。

(i) 漏洩磁束を無視した場合

Fig 2.1 のやうに厚さ d, m , 巾 b, m の断面をもつ薄鉄板が m 枚重なり合つていゝ。磁束が長さ方向 (x 軸方向) に $e^{j\omega t}$ に比例して変化するときの、磁束分布ならぬに全磁束を求めよう。電磁界の基本方程式より

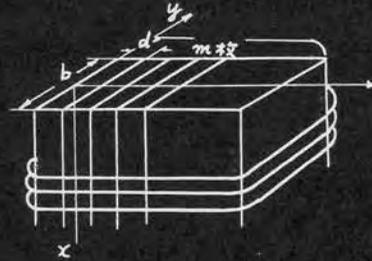


Fig 2.1

$$\text{rot } H = i \quad \text{rot } E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

ただし $i = \sigma E$ (薄鉄板を流れる電流密度)

σ ; 鉄板の導電率

μ ; 鉄板の導磁率

より次の方程式をうる。ただし漏洩磁束はこれを無視する。即ち H_x に比して H_y, H_z は充分に小さいと見なす。又 x 軸方向の磁界の変化 $\frac{\partial H_x}{\partial z}$ は、 y, z 方向のそれに比して充分に小さいとみなすことができるから

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = k^2 H \quad (2.1)$$

$$\text{したがって } H = H_x, \quad k = \mu \sigma p \quad (2.2)$$

更に上式において簡単のため次のやうな一次元近似を行う。即ち、 $b \gg d$ (実際には $b/d > 10^3 \sim 10^4$) であるから、 y 軸方向の磁界の変化は z 軸方向のそれに比して無視することができる。即ち、

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = k^2 H \quad (2.1')$$

この解は

$$H = A \cosh k k z + B \sinh k k d \quad (2.3)$$

これに境界条件として

$$z = (s-1)d \quad \text{及 } z = sd \quad s = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{に於いて } H = ni \quad (2.4)$$

を導入すると

$$H_s = \frac{ni}{\sinh k kd} \left\{ \sinh k k (sd - z) - \sinh k k \{(s-1)d - z\} \right\}$$

故に \$n\$ 番目の薄鉄板中の磁束は

$$\Phi_n = l \int_{(n-1)d}^{nd} \mu H_n dz = \frac{z l \mu n i}{k \sinh k d} (\cosh k l d - 1)$$

となり、各薄鉄板の相対的位置は無関係となる。これは当然予想されるところである。従って全磁束は

$$\Phi = \frac{z m l \mu n i}{k \sinh k d} (\cosh k l d - 1) \quad (2.5)$$

となる。 \$\omega \rightarrow 0\$ に対応しては、上式は

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi = z m d l n \mu i \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x \sinh x} = \frac{\mu n^2 (l m d)}{n} i = \frac{L_0 i}{n}$$

となり、商用周波数におけるインダクタンス \$L_0\$ と一致する。

$$\text{すなわち } k d = \sqrt{\mu \sigma \rho} d$$

\$d\$ は通常 \$10^{-4} m\$ の厚さの鉄心では

$$\left. \begin{aligned} \mu &= a \mu_0 = a \times 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m} & \mu_0; \text{ 真空の導磁率} \\ \sigma (\text{Fe } 99.98\%) &= 1.0 \times 10^7 \text{ } \Omega/\text{m} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

すなわち \$\mu\$ の値は励磁電流値及び過渡時により広範囲に変わり、明瞭でないが、

$$a = 10 \sim 1000$$

とすると

$$|P| < 10^4 \sim 10^5$$

即ち数 \$\times 10^4\$ 以下の現象では

$$k d < 1$$

となる。従ってこのときは (2.5) の双曲線函数の一次近似をとると、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(n \frac{d\phi}{dt} \right) &= \frac{\mu l m n^2 d p}{1 + \frac{d^2}{6} \mu \sigma \rho} I(P) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{L_P} + \frac{1}{r'}} I(P) \end{aligned} \quad (2.5')$$

$$r = r' L \quad L = m n^2 l d \mu \quad r' = \frac{6 l m n^2}{d \sigma} \quad (2.7)$$

実際には漏洩磁束が薄鉄板の $x-y$ 平面を空隙中に横切るとき、 $x-y$ 平面に渦流を生じ、これにより α 損失を増大する。この算定は、困難であるが損失項のインダクタンスに与える関係はほぼ同様と推測されるから、損失項に補正係数 δ を乗じた値 $r = \delta r'$ をとれば、渦流損の内部振動に及ぼす減衰効果の性質をほぼ知るこゝがでさう。

(ii) 漏洩磁束を考慮したとき (均質な媒質)

実際には薄層鉄板を横方向に横切る磁束のため薄層鉄板中に渦流損失を生じ、これの内部振動に與える減衰の程度が厳密な意味ではつきりしない。その取り扱いには Fourier 積分法でその厳密解をある程度求められる。不幸にして、その積分の評価が簡単にできないが、その大略をしらべることとする。簡単のため均質な媒質を取り扱う。

Fig. 2.2 にあいて斜線を施した鉄心の厚さ $2d$ の中で無限に広がって二本の導線が鉄心に平行に張られているものとする。Allendorf 氏⁽¹⁵⁾ に従って、電流を Fourier 積分の成分に分解し、

$$I(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dm \int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda) \cos m(z-\lambda) \times d\lambda \quad (2.8)$$

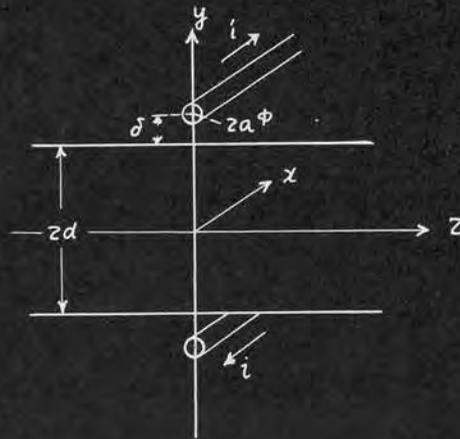


Fig. 2.2

しるはるに

$$\left. \begin{aligned} I(z) &= \frac{i}{2a} & |z| \leq a \\ &= 0 & |z| > a \end{aligned} \right\} (2.9)$$

従つて

$$I(z) = \frac{i}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ma \cos mz}{m} dm = \int dI \quad (2.8')$$

$$|y| > d \quad z \text{ は } \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0 \quad (2.10)$$

$$|y| < d \quad z \text{ は } \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = k^2 E_x \quad (2.10')$$

$$k^2 = \mu \sigma p \quad (2.11)$$

これより

$$\left. \begin{aligned} E_{x1} &= \alpha_1 e^{-my} \cos mz \\ E_{x2} &= (\beta_1 e^{-my} + \gamma_1 e^{my}) \cos mz \\ E_{x3} &= (\delta e^{-\sqrt{m^2+k^2}y} + \epsilon e^{\sqrt{m^2+k^2}y}) \cos mz \end{aligned} \right\} (2.12)$$

ただし $E_{x1,2}$ 等の添字は Fig. 2.2 にあける各層の電界値を示す。又 1, 2, 3 の電界 E_x は, 1', 2', 3' にあける, それと逆対称であるから,

$$\alpha_2 = -\alpha_1, \quad \beta_2 = -\gamma_1, \quad \gamma_2 = -\beta_1, \quad \delta = -\epsilon$$

次に各境界において電界、磁界の公知の諸関係を用い積分定数を求め、(2.8') に留意すると、

$$E_{x3} = \frac{\rho i}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-m\delta + md} \sinh \sqrt{m^2+k^2} y \cdot \cos mz \cdot dm}{\frac{1}{\mu_0} m \sinh \sqrt{m^2+k^2} d + \frac{1}{\mu} \sqrt{m^2+k^2} \cosh \sqrt{m^2+k^2} d}$$

$$\therefore H_z = \frac{1}{\rho \mu} \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\rho i}{\pi \rho \mu} \int_0^\infty \frac{e^{-m\delta} \sqrt{m^2+k^2} \cosh \sqrt{m^2+k^2} y \cos mz \cdot dm}{\frac{1}{\mu_0} m \sinh \sqrt{m^2+k^2} d + \frac{1}{\mu} \sqrt{m^2+k^2} \cosh \sqrt{m^2+k^2} d}$$

故に励磁コイルからなる距離にあける鉄心の断面を過切る磁束は

$$\Phi = 2\mu \int_0^d H_z dy = \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-m\delta} \sinh \sqrt{m^2+k^2} d \cos mz \cdot dm}{\frac{1}{\mu_0} m \sinh \sqrt{m^2+k^2} d + \frac{1}{\mu} \sqrt{m^2+k^2} \cosh \sqrt{m^2+k^2} d} \quad (2.13)$$

上式(2.13)は、この場合の厳密解であるが、その評価が簡単に行きない。それで今、 ρ が充分に大即ち

$$kd = \sqrt{\mu \sigma \rho} d > 1$$

即ち(2.6)から50 KC以上、数十 μ S以下の初期の現象では(2.13)の分母の中での双曲線函数の部分と約して、

$$\Phi \cong \frac{2}{\pi} i \int_0^\infty \frac{e^{-m\delta} \cos mz \cdot dm}{\frac{1}{\mu_0} m + \frac{1}{\mu} \sqrt{m^2+k^2}} \quad (2.13')$$

しかし上式は $\rho \rightarrow 0$ 即ち定常分布に於ては正しくない。

$m \rightarrow 0$ 及び $m \rightarrow \infty$ にあける極限において上式の分母の第零次の項が一致するやうに次のやうに近似する。

$$\frac{m}{\mu_0} + \frac{1}{\mu} \sqrt{m^2 + k^2} \cong \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu}\right)^2 m^2 + \left(\frac{k}{\mu}\right)^2}$$

従って

$$\phi \cong \frac{z}{\pi} i \frac{\mu}{d} \int_0^{\infty} \frac{e^{-m\delta} \cos mz}{\sqrt{m^2 + \frac{k^2}{\alpha^2}}} dm \quad (2.13'')$$

$$\text{但し } \alpha = \frac{\mu}{\mu_0} + 1$$

今特に鉄板と導線との空隙 δ を $\delta = 0$ にすると

$$\phi = \frac{z}{\pi} i \frac{\mu}{\alpha} K_0\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} p z\right) \quad (2.14)$$

従って z が可成り大きいときは、 $K_0(z)$ に対する漸近展開を用いる

$$\phi \sim \frac{z}{\pi} i \frac{\mu}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{z\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} p}} e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} p z} \quad (2.14')$$

又例えば強制電流を投入したときの磁束は

$$\int p K_0(\lambda \sqrt{p}) = \frac{1}{z t} e^{-\lambda^2/4t}$$

であるから

$$\phi \cong \frac{i\mu}{\pi\alpha} \int_0^z \frac{1}{t} e^{-\frac{\sigma}{4t} z^2} dt = \frac{i\mu}{\pi\alpha} \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\sigma z^2}{4} y}}{y} dy \quad (2.15)$$

となつて指数函数積分により初期部の磁束の増大の状況を近似的に知ることが出来る。

空隙 δ が $\delta \neq 0$ のときは、 p 即ち k が相当大きい場合、磁束中の軸長 z 及び時間 t に関する依存性をごく大体しらへるために、(2.13'') より更に次のやうな粗い近似を用いる。これは積分に貢献する部分の $m \sim 0$ の比較的小さい変域に限られるからである。

$$\phi \cong \frac{z i \mu}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-m\delta} \cos mz}{k} dm \cong \frac{z i \mu}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu \sigma p}} \frac{\delta^2}{\delta^2 + z^2}$$

従って以上のありましの考察から 100 KC 前後乃至 10 μ S 以下の現象の初期に対しては漏洩磁束による鉄板の側面の渦流損失は大体 $\sqrt{\quad}$ 的な減衰特性を興えることが予想される。

2.3 内部振動の基本周波数が1KC~50KCにある普通の場合の等価回路及びV, I分布とI₂の解

本節の(2.5')の関係から基本周波数が1~50KCである普通の場合、渦流損に対する減衰を考慮に入れた内部振動の考察に対する等価回路はFig 3.1のやうに表わされるものと考えられる。

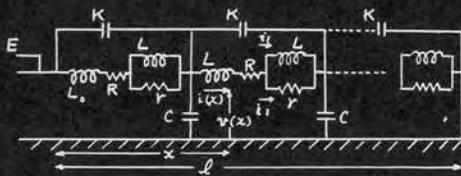


Fig 3.1

図において

- L₀ 空気中だけを通る磁束による漏洩インダクタンス
- R 巻線のレフ実効抵抗
- L 鉄心中を通る磁束による自己インダクタンス
- r 鉄心中の渦流により生ずる損失に対する等価実効抵抗

ただしここでは、巻線間の相互誘導作用は無視し、空気中を通る磁束によるインダクタンスは、鉄心中を通る磁束によるそれに比べて十分に小さいと考えられるから、便宜上、L₀を無視すると、基礎方程式を演算子形で書くと、

$$-\frac{dV}{dx} = RI + \frac{rLP}{Lp+r} I \tag{3.1}$$

$$-\frac{dI}{dx} = CpV - Kp \frac{d^2V}{dx^2}$$

上式より

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \gamma^2 V \quad \text{ただし } \gamma^2 = \frac{p^2(R+r)LC + RrCp}{p^2(R+r)KL + p(L + KRp) + r} \tag{3.2}$$

巻線の長さを l とし線路側から考察点までの距離を x にとり、展開定理により若干の計算を行うと、

中性点接地、強制電圧印加のときは

$$V = E \frac{l-x}{l} + \frac{2}{\pi} E \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{n\pi(l-x)}{l} e^{-\sigma_n t} \frac{\lambda^2}{n(\lambda^2 + n^2\pi^2)} \times \left[\cos \omega_n t + \frac{1}{2\omega_n} \left\{ \frac{Rr}{(R+r)L} - \frac{n^2\pi^2}{(R+r)K(n^2\pi^2 + \lambda^2)} \right\} \sin \omega_n t \right] \tag{3.3}$$

ただし $n = 1$

V 結線や、三角結線などの非接地系で、中性点開放、強制電圧印加のときは、

$$V = E + \frac{Z}{\pi} E \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi(l-x)}{l} \mathcal{E}^{-\delta_0 t} \frac{\lambda^2}{n(\lambda^2 + n^2\pi^2)}$$

$$\times \left[\cos \omega_0 t + \frac{1}{Z\omega_0} \left\{ \frac{Rr}{(R+r)L} - \frac{n^2\pi^2}{(R+r)K(n^2\pi^2 + \lambda^2)} \right\} \sin \omega_0 t \right] \quad (3.3')$$

$\tau = R \cdot L \quad n = \frac{Z\delta - 1}{2}$

次に第二京大法を用いて強制電流 I_0 投入。中性点接地のときは

$$V = l(R+r)\mathcal{E}^{-\frac{\delta}{2}t} * I_0 \left[\frac{l-x}{l} + \frac{Z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi \frac{l-x}{l} \cdot \mathcal{E}^{-\delta_0 t} \frac{\lambda^2}{n(\lambda^2 + n^2\pi^2)} \right]$$

$$\times \left[\cos \omega_0 t + \frac{1}{Z\omega_0} \left\{ \frac{Rr}{(R+r)L} - \frac{n^2\pi^2}{(R+r)K(\lambda^2 + n^2\pi^2)} \right\} \sin \omega_0 t \right] \quad (3.3'')$$

$\tau = R \cdot L \quad n = (Z\delta - 1)/2 \quad * \text{は相乗演算の記号を表わす。}$

ここに減衰率 δ_0 、角周波数 ω_0 は

$$\delta_0 = \frac{Rr}{Z(R+r)L} + \frac{n^2\pi^2}{ZK(\lambda^2 + n^2\pi^2)(R+r)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{r^2 n^2 \pi^2}{(R+r)LK(\lambda^2 + n^2\pi^2)} - \frac{\{n^2\pi^2(KRr - L) + RrC\ell^2\}}{4(R+r)L^2 K^2(\lambda^2 + n^2\pi^2)^2}$$

(3.4)

上式において、強制電圧印加、中性点接地のときは、 $n=0$
 強制電圧印加、中性点開放及び強制電流印加、中性点接地のときは
 $n = \frac{Z\delta - 1}{2}$

上式は(3.1)の厳密解であるが(3.3)(3.3')等の内の $\sin \omega_0 t$ の係数は普通1に比し充分に小さく通常 $\cos \omega_0 t$ の項に比し $\sin \omega_0 t$ の項は無視して差支ない。

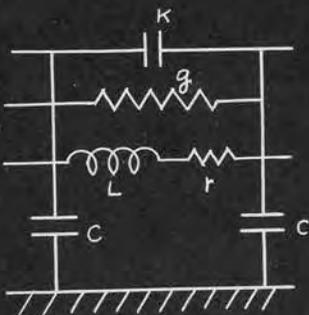


Fig. 3.2

次に抵抗素子として Fig. 3.2 のような構成をもち回路についてその解を求めよう。

基礎方程式は

$$-\frac{dV}{dx} = \frac{1}{Lp+r + g} I$$

$$-\frac{dI}{dx} = CpV - Kp \frac{d^2V}{dx^2}$$

(3.5)

中性点接地、強制電圧印加のときは

$$v = E \frac{l-x}{l} + \frac{2}{\pi} E \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^2}{n(\lambda^2 + n^2 \pi^2)} E^{-\sigma_n t} \sin \frac{n\pi}{l} (l-x) \\ \times \left\{ \cos \omega_n t + \frac{1}{2\omega_n} \left\{ \frac{r}{L} - \frac{g n^2 \pi^2}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) K} \right\} \sin \omega_n t \right\} \quad (3.6)$$

T: F: L

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{r}{2L} + \frac{g n^2 \pi^2}{2K(\lambda^2 + n^2 \pi^2)} \\ \omega_n^2 &= \frac{n^2 \pi^2}{KL(\lambda^2 + n^2 \pi^2)} - \frac{\{(rK - gL)n^2 \pi^2 + rC\}^2}{4K^2 L^2 (\lambda^2 + n^2 \pi^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$n = 1$

Fig 3.2, Fig 3.1 の等価回路からみるにわかるやうに、その高調波の減衰率の調波の次数に対する関係は (3.4) (3.7) からほぼ同様であることがわかる。

2.4 基本周波数が更に高くなったときの渦流損の内部振動に及ぼす減衰効果

例えば送電線に沿う進行波の傳播を考察するとき帰路電流の表皮効果のために波頭部に対しては等价的なインダクタンスは

$$L_0 + \frac{L}{\sqrt{p}} \quad (4.1)$$

で表わされ、この近似に基づいて進行波の波頭部分の評価がなされている。従って有限長のときの連続反射には波頭においてこのことを考慮して重畳すればよい。つまり反射による振動のそれぞれの立ち上り、立ち下りにあいて、その減衰が表われるわけである。さてこれに展開定理を用いるときは、どうなるかを考える。印加電圧を Fourier 積分にわけるとき、その高周波部分、つまり波頭附近の成分は、(擬似的な反射波の波頭部をも含む) $L\sqrt{p}$ に基づく減衰を受けるが、その低周波部分も (4.1) (4.3) による実際よりは苛酷な減衰を受けることとなる。

即ち殆んど大部分の変圧器の内部振動の基本振動数は、 $1 \sim 50$ KC であり (2.6) (4.2) からわかる如く、内部振動の減衰に \sqrt{p} 近似を展開定理を通して用いることは、基本波附近の二、三の調波に対して過大な減衰を與えて正しくない。しかしながら基本振動数が 100 KC 前後にわたる特別な場合や、第 4 ~ 第 5 以上の調波に対しては、(4.2) (4.3) における \sqrt{p} 近似を用いて振動の減衰の状況を見ることは、

妥当であり、又興味のあることである。

(2.5) から

$$\Phi = \frac{2 m b \mu n i}{k e \sin k_e k d} (\cosh k_e k d - 1)$$

$$k_e d = \sqrt{\mu \alpha p} d$$

(2.6) における諸定数を考慮するときは、約 100 KC 内外以上では、上式より

$$\left. \begin{aligned} L &= \alpha L' \\ \alpha &= \sqrt{\frac{1}{\mu \sigma}} \frac{2}{d} \quad L' = n^2 \mu (b m d) \end{aligned} \right\} (4.2)$$

とすると、鉄心中の磁束によるインダクタンスは

$$\frac{L}{\sqrt{P}} \quad (4.3)$$

で表わされる。従って基本方程式は

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dV}{dx} &= (L\sqrt{P} + L_0 P) I \\ -\frac{dI}{dx} &= C P V - K P \frac{d^2 V}{dx^2} \end{aligned} \right\} (4.4)$$

ただし L_0 は空気中だけを通る磁束によるインダクタンスであるが、以下の計算では、鉄心中を通る磁束によるそれと比べて無視する。

$x=0$ で $V=E$, $x=l$ で $V=0$ という中性点接地の場合を考へると

$$V = E \frac{\sinh \gamma (l-x)}{\sinh \gamma l} \quad \text{但し} \quad \gamma = \sqrt{\frac{LCP \frac{3}{2}}{1 + LKP \frac{3}{2}}} \quad (4.5)$$

上式は、 $P=0$ で分岐点を有するから $(0, -\infty)$ に切断を入れて、一価函数とする。このやうにして

$$V = E \frac{l-x}{l} + \sum_{p=p_n} \frac{\sinh \gamma (l-x) E p_n t}{p_n \left(\frac{d}{dP} \sinh \gamma l \right)_{p=p_n}} + (\text{切断に沿う積分}) \quad (4.6)$$

極にあつては

$$\gamma l = j n \pi$$

であるから、極は

$$p_n = p_{0n}, \quad \omega p_{0n}, \quad \omega^2 p_{0n} \quad \left. \right\}$$

∴ $\Gamma = 1$

$$P_{0n} = \left\{ \frac{n^4 \pi^4}{(l^2 LC + n^2 \pi^2 LK)^2} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (4.7)$$

$$W = \frac{-1 + \sqrt{3} j}{2}$$

と與えられる。従つて展開定理によつて

$$V = E \frac{l-x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4E}{3} \cdot \frac{\lambda^2 \sin \frac{n\pi}{l}(l-x)}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n \pi} \left\{ e^{-P_{0n} t} + 2E^{-\frac{1}{2} P_{0n} t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} P_{0n} t \right\} \\ + (\text{切斷に沿う積分}) \quad (4.8)$$

切斷に沿う積分は

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_1 + C_2} \frac{e^{pt}}{p} \frac{\sinh p(l-x)}{\sinh pl} dp = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{-1}{2\pi j} \int_0^{-\infty} \frac{e^{yt}}{y} \frac{\sinh \sqrt{\frac{jLCy^{\frac{3}{2}}}{jLKy^{\frac{3}{2}} + 1}}(l-x)}{\sinh \sqrt{\frac{jLCy^{\frac{3}{2}}}{jLKy^{\frac{3}{2}} + 1}} l} dy$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{-\infty} \frac{e^{yt}}{y} \frac{\sinh \sqrt{\frac{jLCy^{\frac{3}{2}}}{jLKy^{\frac{3}{2}} - 1}}(l-x)}{\sinh \sqrt{\frac{jLCy^{\frac{3}{2}}}{jLKy^{\frac{3}{2}} - 1}} l} dy$$

となる。その積分の評価は簡単に行ふことはできないが、時間的に非振動的になることが予想される。(4.8)の基本振動数 W_n とその減衰率 δ_n を比較すると(4.7)から $\delta_n/W_n = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57$ となるから、基本周期の約半分のところで振動の $\frac{1}{3}$ に減衰し殆ど非振動的になる。

2.5 L, C, K, R 回路の検討

大地を帰路とする送電線上の進行波の減衰の考察にあつても、研究の初期にあつては、所謂 L, C, R 回路が用いられた。変圧器の内部振動の問題には、さきに 2.4 節で述べたやうに \sqrt{p} 近似は周波数が 100 KC 内外の特殊な場合以外は適當でないが、減衰を表現するためには L, C, K, R 回路の時として用いられることがある。それで Fig 5.1 のやうなこの種の等價回路に基いてえられる結果を検討してみよう。

基本方程式は、

$$-\frac{dV}{dx} = (LP+R)I \quad -\frac{dI}{dx} = (CP+G)V - KP \frac{d^2V}{dx^2} \quad (5.1)$$

たとえば中性点接地、強制電圧印加の場合を考えると

$$V = E \frac{\sinh \delta(l-x)}{\sinh \delta l}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{(LP+R)(CP+G)}{1+KP(LP+R)}}$$

従って上式の $V(p)$ の極は

$$p_n = \frac{-\{l^2(RC+LG)+KRn^2\pi^2\} \pm D}{2(l^2LC+KLn^2\pi^2)} = -\delta_n \pm j\omega_n \quad (5.2)$$

$$D^2 = \{l^2(RC+LG)+KRn^2\pi^2\}^2 - 4(l^2LC+KLn^2\pi^2)(l^2RG+n^2\pi^2)$$

通常大地に打する漏洩は無視できるから、 $G=0$ とすると各調波の減衰定数 δ_n は

$$\delta_n = \frac{R}{2L} \quad (5.3)$$

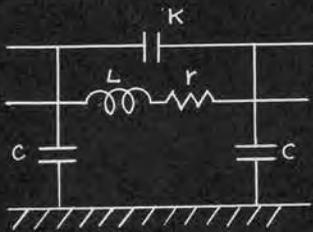


Fig 5.1

となり高調波の次数に関係しない。即ち高調波の含有率が振動の時間全域にわたって、

高調波の次数に因せず一定となることを示している。ところがこの種の殆んどすべての実験結果では高調波の入るのは振動初期の二三回で、後は速やかに減衰して単純な基本波の減衰振動だけが残るのが普通である。従って鉄心をもつ変圧器巻線のやう

な場合には、このやうな等価回路では不充分である。さきに述べた、2.3節の Fig 3.1 Fig 3.2 の等価回路は、精度において十分であり、としども、減衰に関する物理的背景が明瞭であり、又その解析がこの場合と同様に簡明な点において、減衰に関する限り実用上これに代るべき等価回路と考えられる。

参考のために、この L, C, K, R 回路の中性点接地の場合の解を出しておく。

$$V = E \frac{l-x}{l} + \frac{2}{\pi} E \sum (-1)^n \frac{Cl^2}{(l^2C+Kn^2\pi^2)n} e^{-\delta_n t} \sin \frac{n\pi}{l} (l-x) \times (\cos \omega_n t + \frac{\delta_n}{\omega_n} \sin \omega_n t) \quad (5.4)$$

第3節 高周波共振における過渡現象

孤立接地や線路の閉路に伴う閉路サーチの往復反射による高周波振動電圧が変圧器の端子に襲来することがある。これは直垂雷のやうな単一の高電圧のサーチに比して波高値が低いため焼損等の危険は少ないが、直垂雷に對しては、避雷器の一応防護の役割を果たしている。これに對してこの高周波振動のサーチの場合には、避雷器が働かぬやうな波高値をもつ場合でもその周波数が変圧器巻線の内部固有振動数に接近すると、巻線内部において高い対地電位⁽¹⁶⁾ならびに巻線間のストレスを生じ焼損事故を起し我が國でも鯨井氏等の報告がある。

解析的には單位電圧を加えた場合の解に對して相乗定理を用いれば高周波電圧印加の場合の巻線内部の電位は容易に求められるが、従来この種の過渡共振の考察が比較的少い。

高調波共振は、これに對する減衰が比較的大きくて實際上大きな脅威を與えないことと、取り扱ひの簡單のため、この節では基本波共振について計算を行う。

3.1 相乗計算による基本波の勵振状態

減衰を考慮しない場合

始めに見易いために減衰を無視して考察する。たとえば中性点接地、單位電圧印加の場合巻線上の電位は減衰のない場合、近似的に、

$$V \cong E x + Z E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^2}{(\lambda^2 + n^2 \pi^2) n} \sin n \pi x \cos \omega n t \quad (1.1)$$

で表わされる。従つて持続振動 $V = E \cos(\omega t - \varphi)$ が印加されたとき、これによつて基本波かどのやうに勵振されるかを見るために基本波に對して相乗定理を適用すると、(ただしこの節では、基本波の角周波数等に添字 0 を附けて ω_0 等と書く)

$$\begin{aligned} V &= \frac{d}{dt} \int_0^t E \cos \omega_0 (t - \tau) \cos(\omega \tau - \varphi) d\tau \\ &= \frac{E \delta (2 + \delta)}{\omega^2 - \omega_0^2} \omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi) - \frac{E \delta \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \varphi \sin \omega_0 t \\ &\quad + \frac{E \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \{ \cos(\omega t - \varphi) - \cos(\omega_0 t - \varphi) \} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\text{但し } \delta = \frac{\omega^2 - \omega_0}{\omega_0}$$

共振において電圧増大に貢献するのは上式の第三項で、これを V_R とすると、近似的に

$$\begin{aligned} V_R &\cong -\frac{E}{\delta} \sin \frac{\delta \omega_0}{2} t \sin(\omega_0 t - \varphi) \\ &= -\frac{E}{\delta} \sin \frac{\delta \theta}{2} \sin(\theta - \varphi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\text{但し } \theta = \omega_0 t$$

この V_R に対する電圧上昇の過渡状態を巻線の固有振動数と印加電圧の周波数の差 $\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ を媒介変数として示したのが Fig 1.1 である。上式で $\delta = 0$ の場合、即ち印加電圧が内部固有振動と完全に共振するとき $\frac{\omega_0}{2}$ の速さで時間比例して電圧の振巾が増大する。

Fig 1.1

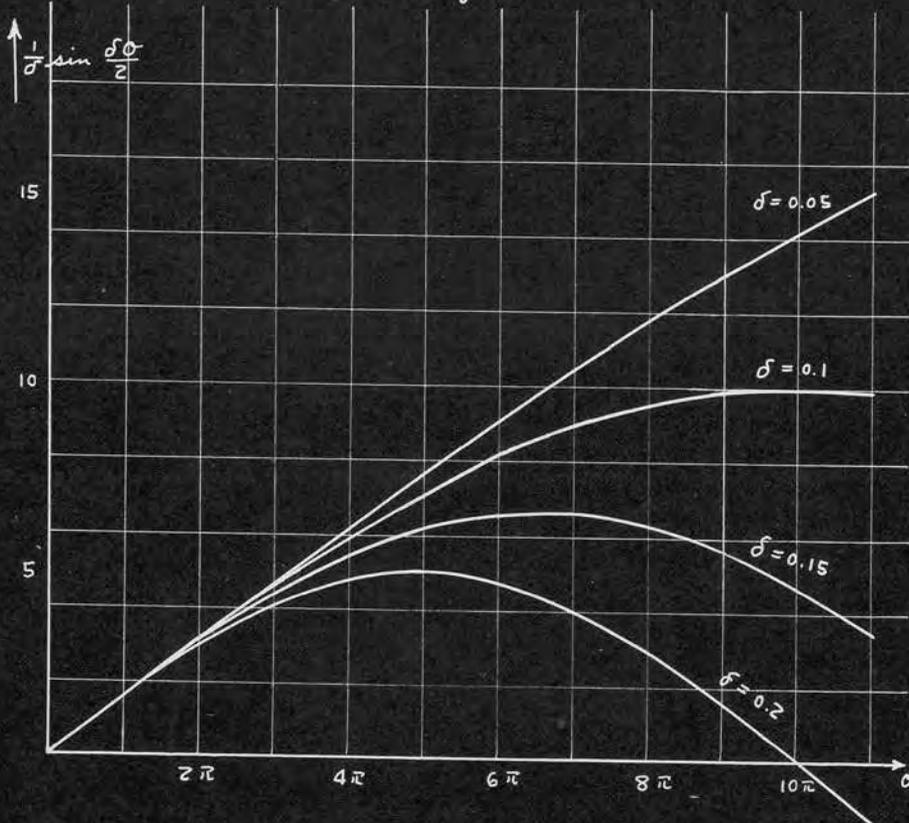
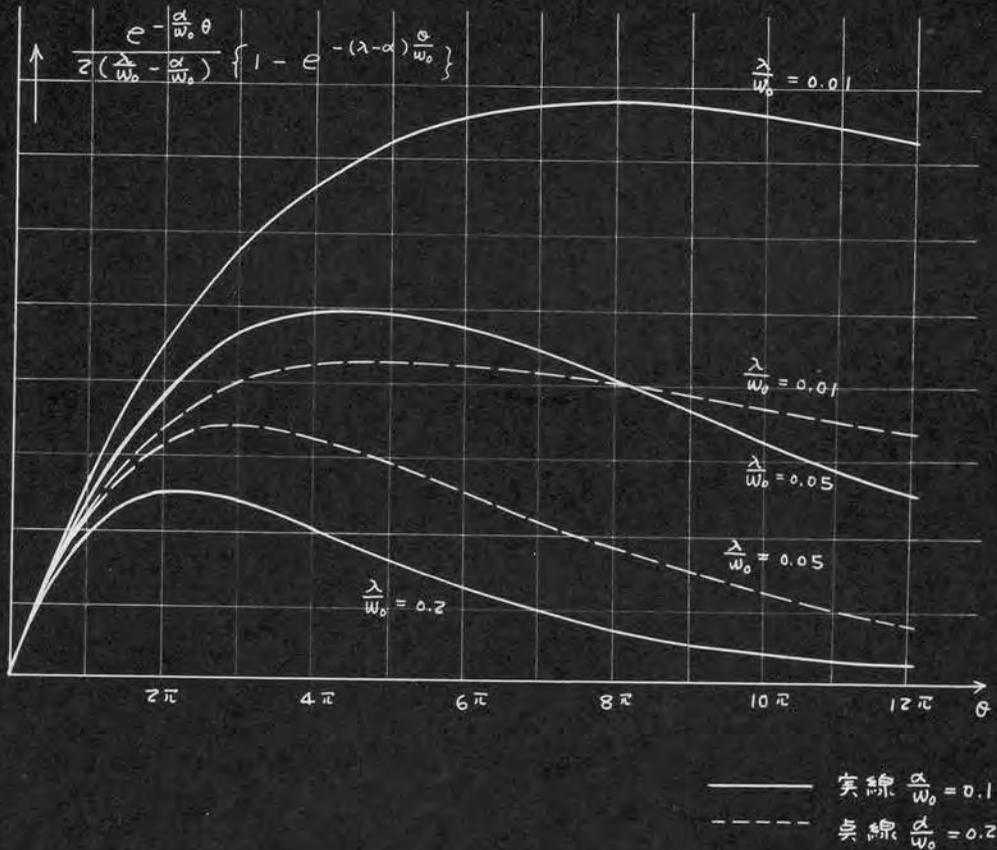


Fig 1.2



減衰を考慮したとき

高周波共振において機器の危険度に関連する電位上昇度は、巻線における減衰率及び印加高周波電圧の減衰率によつて決定されることはいふまでもない。ここではこれを考慮して三つの数値例を示す。巻線内の減衰を考慮したとき単位電圧印加の際の解は

$$V \cong E x + \frac{2}{\pi} E \sum (-1)^n A_n \sin n\pi x \cdot e^{-\lambda n t} \cos(\omega n t + \varphi_n) \quad (1.4)$$

で表わされる。基本波を $e^{-\lambda_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ とし、これに對する勵振の状況をしらべる。減衰振動電圧

$$E e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.5)$$

が変圧器の端子に印加されたとき基本波に對し相乗計算を行つと、

$$\begin{aligned}
V &= \frac{d}{dt} \int_0^t E e^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-\alpha(t-\tau)} \cos\{\omega(t-\tau) - \varphi\} d\tau \\
&= E e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos \varphi_0 \\
&\quad - \frac{\alpha E}{2} \frac{1}{(\lambda-\alpha)^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \left\{ e^{-(\lambda-\alpha)t} \left[-(\lambda-\alpha) \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \varphi) + (\omega_0 - \omega) \sin(\omega_0 t + \varphi_0 - \varphi) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[-(\lambda-\alpha) \cos(\omega t + \varphi + \varphi_0) + (\omega_0 - \omega) \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{\alpha E}{2} \frac{1}{(\lambda-\alpha)^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \left\{ e^{-(\lambda-\alpha)t} \left[-(\lambda-\alpha) \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi) + (\omega_0 + \omega) \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[-(\lambda-\alpha) \cos(\omega t - \varphi_0 - \varphi) - (\omega_0 + \omega) \sin(\omega t - \varphi_0 - \varphi) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{\omega E}{2} \frac{1}{(\lambda-\alpha)^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \left\{ e^{-(\lambda-\alpha)t} \left[-(\lambda-\alpha) \sin(\omega_0 t - \varphi + \varphi_0) - (\omega_0 - \omega) \cos(\omega_0 t - \varphi + \varphi_0) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[-(\lambda-\alpha) \sin(\omega t - \varphi + \varphi_0) - (\omega_0 - \omega) \cos(\omega t - \varphi + \varphi_0) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\omega E}{2} \frac{1}{(\lambda-\alpha)^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \left\{ e^{-(\lambda-\alpha)t} \left[-(\lambda-\alpha) \sin(\omega_0 t + \varphi + \varphi_0) - (\omega_0 + \omega) \cos(\omega_0 t + \varphi + \varphi_0) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[-(\lambda-\alpha) \sin(\omega t - \varphi - \varphi_0) - (\omega_0 - \omega) \cos(\omega t - \varphi - \varphi_0) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

上式に於いて、共振時 $\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 0$ に於いて電圧増大に貢献する項 V_R は

$$\frac{\lambda - \alpha}{(\lambda - \alpha)^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$$

の因数をもつものだけである。即ち

$$V_R = \frac{E}{2} \frac{(\lambda - \alpha) \sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}{(\lambda - \alpha)^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \left\{ e^{-\lambda t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0 - \varphi + \psi) - e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi + \psi) \right\} \tag{1.7}$$

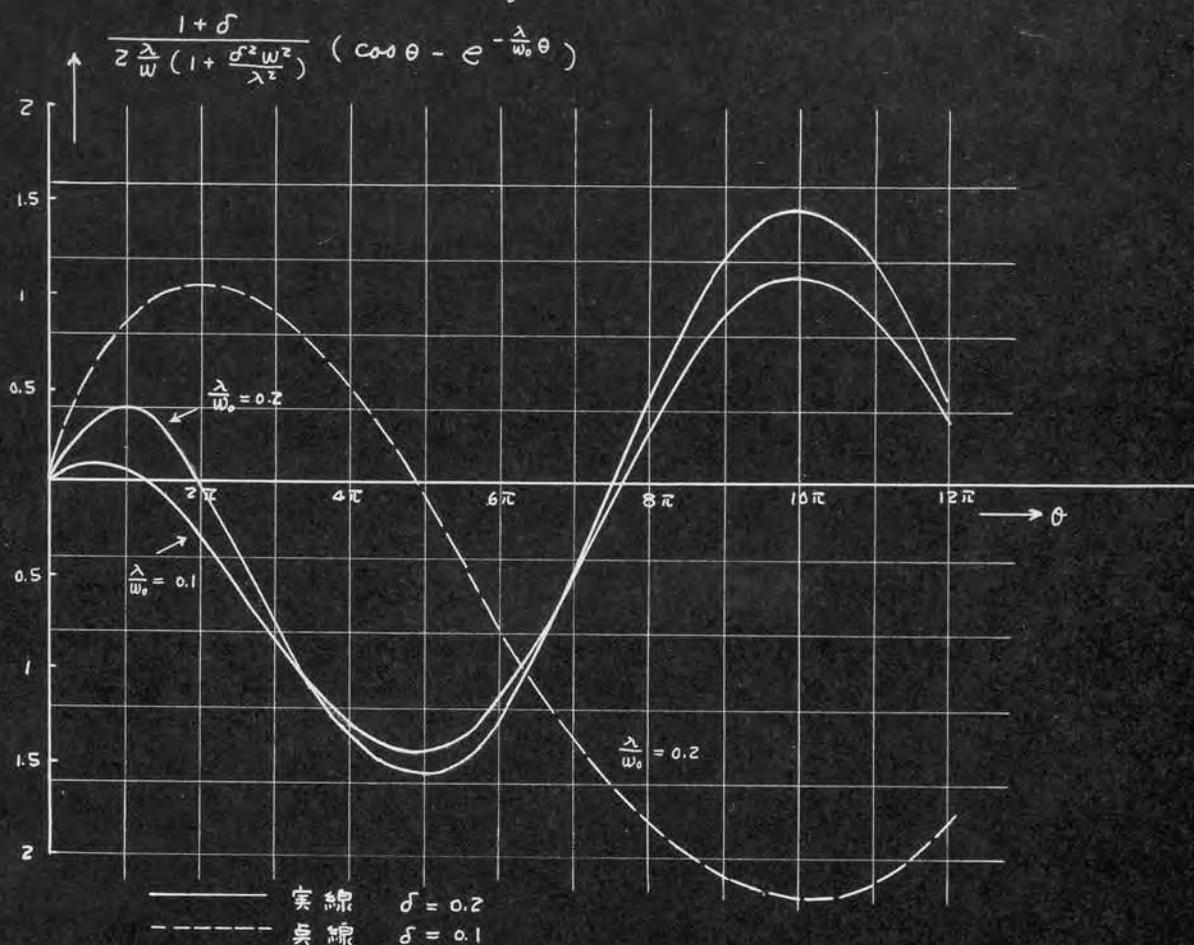
$$\tau: \tau: L \quad \psi = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\omega}$$

次に $\delta = 0$ 即ち完全に共振するとき (1.7) から

$$\frac{\alpha}{\omega_0} \ll 1$$

とすれば

Fig 1.3



$$V_R = -\frac{E\omega_0}{2} \frac{e^{-\frac{\alpha}{\omega_0}\theta}}{\lambda - \alpha} \left\{ 1 - e^{-(\lambda - \alpha)\frac{\theta}{\omega_0}} \right\} \sin(\theta + \varphi_0 - \varphi) \quad (1.8)$$

$$F: F: L \quad \theta = \omega t$$

上式から共振時の振巾の変化を Fig 1.2 に示す。

次に持続振動が加わった場合、近似的に (1.7) から

$$V_R \cong \frac{E\omega(1+\delta)}{2\lambda(1 + \frac{\delta^2 \omega^2}{\lambda^2})} (\cos \theta - e^{-\frac{\lambda}{\omega_0}\theta}) \sin(\theta - \varphi + \varphi_0) \quad (1.9)$$

これの数值例を Fig 1.3 に示す。Fig 1.3 の曲線は、振動電圧の一つの包絡線と與えるもので、各々の曲線は横軸に訂して、訂称の位置にもう一箇の包絡線とせよ。この二箇の曲線の向に振動してゐるのである。これは、さきの Fig 1.1 Fig 1.2 と同じことである。又、さきの Fig 1.2 にみる如く完全に共振の状態になつてゐるときは、包絡線は單調に増加するが、完全な共振からはずれるときは、この

Fig 1.4

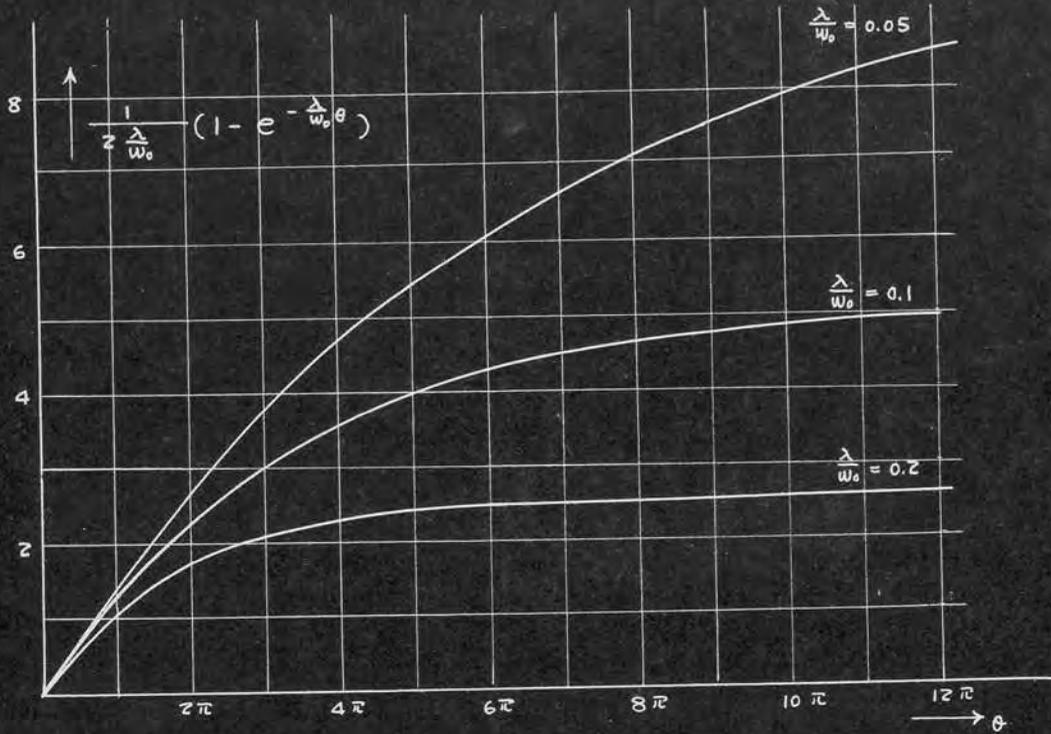


Fig 1.3 にみる如く、その周波数差のためには包絡線自身に唸りを生じる。

次に共振周波数の持続振動を加わった場合、(1.7) から $\alpha = 0$ とし計算した例を Fig 1.4 に示す。減衰の小さい程、電圧の増大は大きいことは明らかであるが、同時に定常値に達する時間が長くなることも図よりわかる。

3.2 実験例

減衰高周波電圧を印加したときの各端子の電圧の波形を Du mont 280 A 型陰極線オシログラフを用いて観測した。即ちオシログラフのトリッカ増幅器の出力電圧を Fig 2.1 の如く 6C6 の制御グリッドに入れ、出力端子に現われる振動電圧を供試変圧器（先の

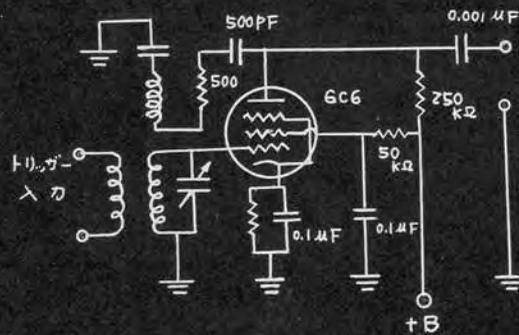
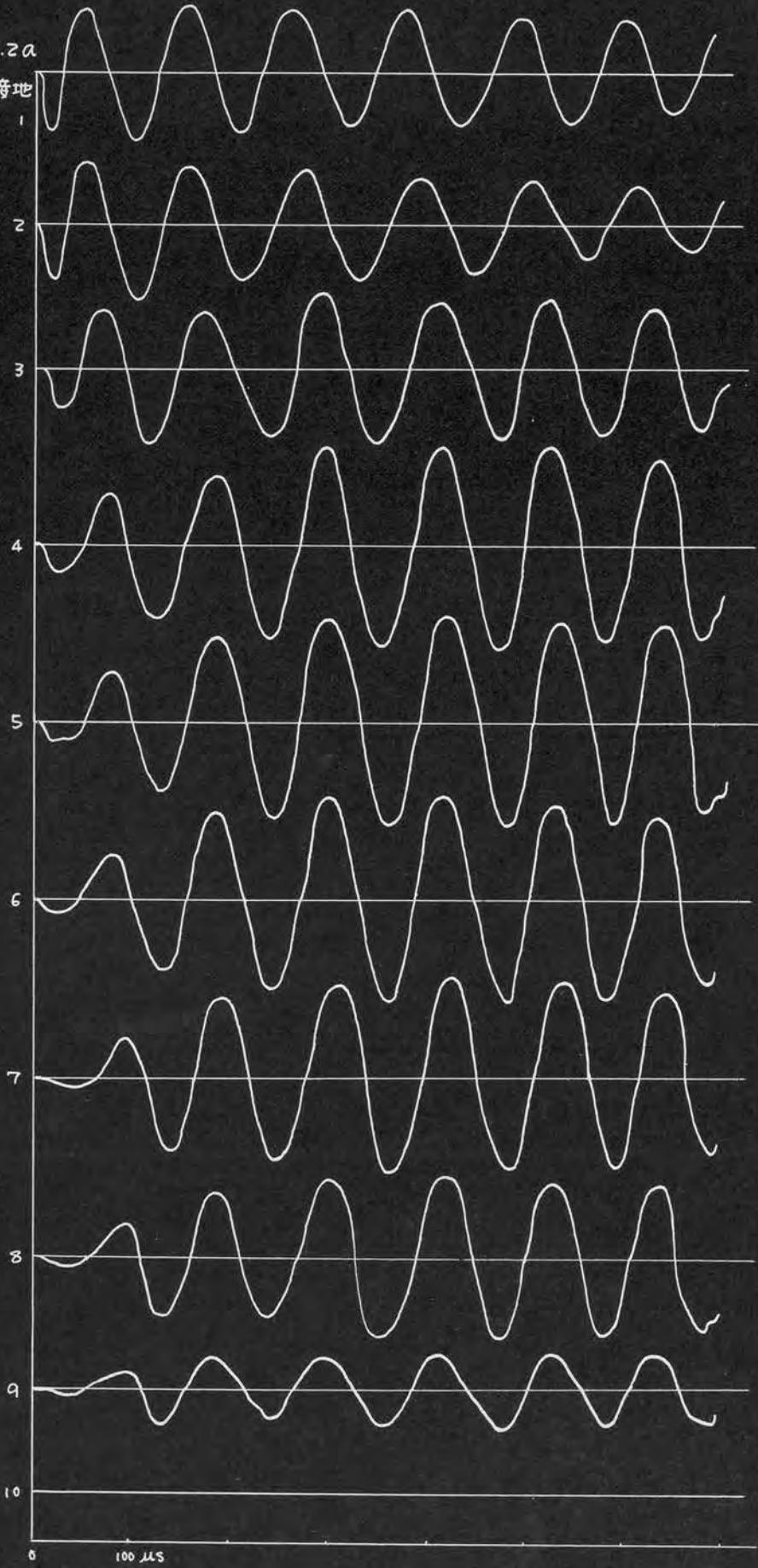


Fig 2.1

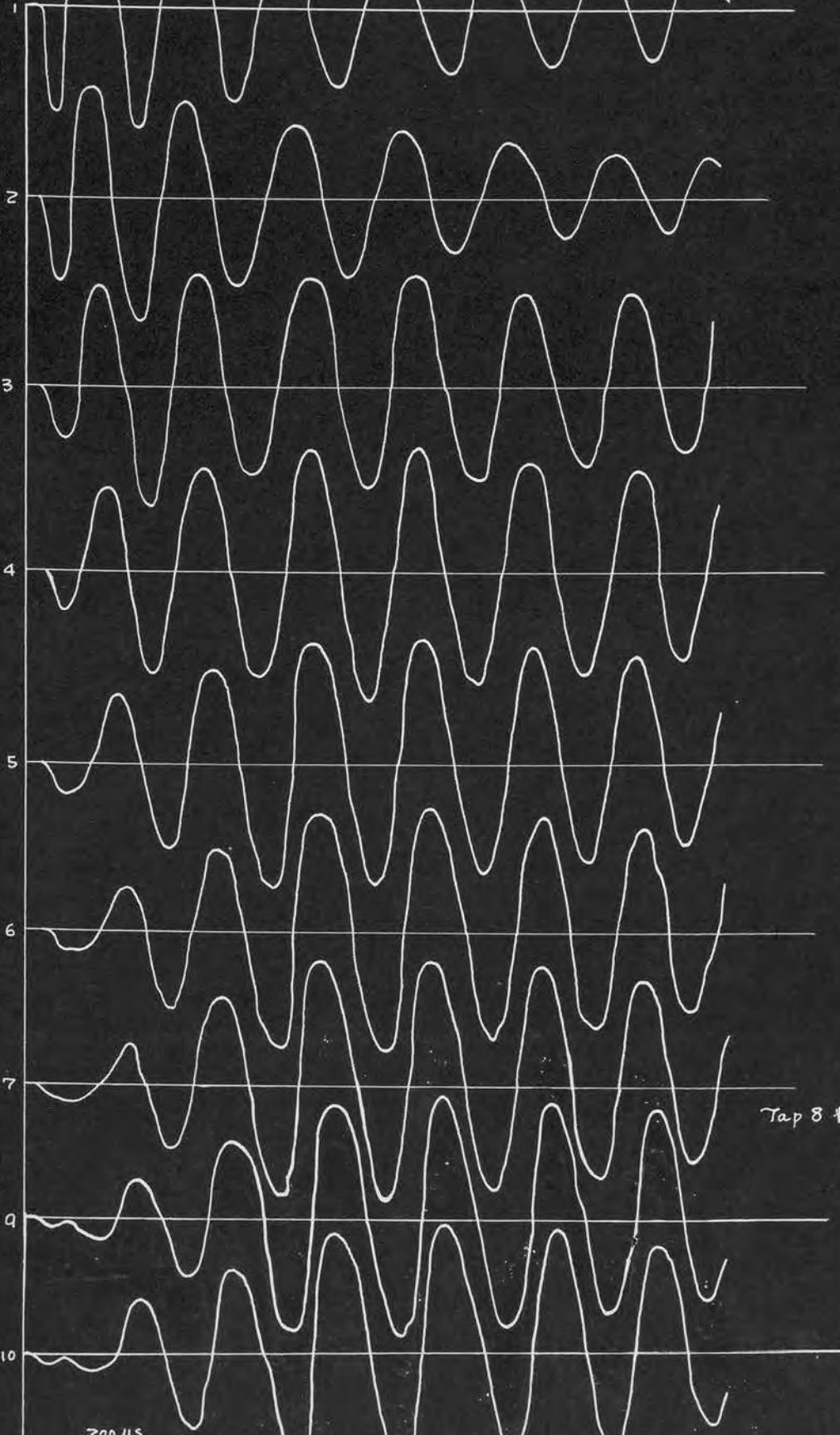
Fig 2.2a

中性点接地



00

Fig. 2.26
中性点
电压



Tap 8 省 <

井上電機製変成器の中の一部のコイルスタッフを用いたもの)に印加する。入力回路の同調インダクタンス、容量を調節して発生同波数を変え、共振状態に近づけたとき、変成器の中向の各端子における電圧波形のオッシログラムは、Fig. 2.2に示す如くである。図からわかるやうに基本波が強調され、高調波は弱く出されない。中性点接地の場合は、その電位分布は(1.1)から

$$V(x,t) \cong E_x \sin \omega t e^{-\alpha t} - \sin \pi x \cdot f(t)$$

で表わされ、巻線中央において最高電位が現われる。中性点開放の場合は

$$V(x,t) \cong E \sin \omega t \cdot e^{-\alpha t} - \cos \frac{\pi x}{2} \cdot f(t)$$

で表わされ、中性点において最高対地電位をみる。

図の例では、約1.5~1.7倍の最高対地電位となつてゐる。尚上式の $f(t)$ は共振に貢献する項をITと近似的にとると(1.8)で與えられる。

第4節 二次巻線と考慮したとき

二次巻線と考慮しても原理的にはその解析方法は同じであるが、たゞ方程式の階数が上り、そのため実際の計算が極めて複雑となる。それで4.1節では、粗雑な近似によつて二巻線変圧器として、その大体の様子下しらへた。実際的な立場としては一次巻線は、二次巻線の状態の影響を受けることは少く、一次巻線から二次巻線への傳達の問題になる。それで4.2節で、この場合の一つの近似法を述べた。

次に多少蛇足を加えるが、端子過渡現象の取り扱いについて若干

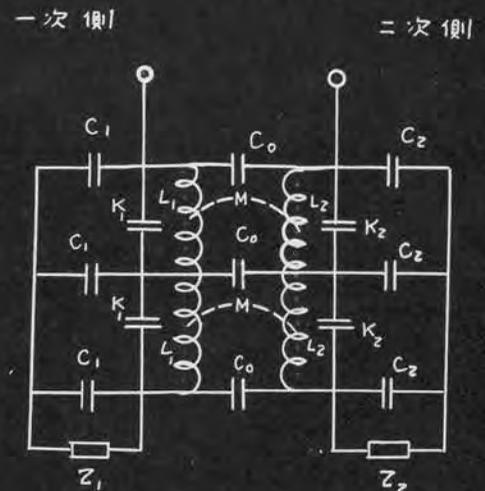


Fig. 1

の考え方の一つ。この問題は巻線内部の問題とは殆んど関係をもたないが、送電線、変圧器、発電機等を一つの系統として進行波の傳達をみるときに派生する。このやうな問題に関し従来は勿論集中定数化を行つてゐるのであるが、更に端子条件及び、その回路の特殊な事情を極端にもらこんで直観的に素子の数を減らして計算を行つてゐる。⁽²⁹⁾このやうな方法をとることは、やむを得ないが、端子条件によつて、その度に変圧器巻線の等価回路が變り、そのために殆んど統一がとれてゐない。統一をはかるためには、少くとも Fig 1 のやうな等価回路による外はないやうに思う。この回路によるときは筆算によるのは困難であるから、多少信頼できる計算は Analog Computer による他に一般には有効な方法はないやうに思う。

4.1 二巻線変圧器としての考察

上述の如くこの問題を分布定数回路として考察を進めることは、微分方程式の階数が上り、原理的には同じことであつても、実際上の取り扱いが極めて複雑困難になるのであるが、形式を整える意味と二三の基本的性質を知るために巻線間の電磁結合を、指数函数で與えた場合について近似を適宜に行つて、その解の形を出して置く。

基本方程式は、一次巻線について演算子函数でかくと

$$\frac{dV_1}{dx} = M_1 p \left\{ \int_0^x e^{-m(x-y)} I_1(y) dy + \int_x^1 e^{-m(y-x)} I_1(y) dy \right\} \\ + M_2 p \left\{ \int_0^x e^{-m(x-y)} I_2(y) dy + \int_x^1 e^{-m(y-x)} I_2(y) dy \right\}$$

$$\frac{dI_1}{dx} = C_1 p V_1 - K_1 p \frac{d^2 V_1}{dx^2} + C p (V_1 - V_2)$$

二次巻線については

$$\frac{dV_2}{dx} = M_2 p \left\{ \int_0^x e^{-m(x-y)} I_2(y) dy + \int_x^1 e^{-m(y-x)} I_2(y) dy \right\}$$

$$\frac{dI_2}{dx} = C_2 p V_2 - K_2 p \frac{d^2 V_2}{dx^2} + C p (V_2 - V_1)$$

(1.1)

が成立する。但し、 C は一次巻線と二次巻線間の静電容量、 M は一次、二次巻線の共通磁束に對する相互インダクタンスである。又、ここには m は一次巻線、二次巻線とも共通にとつた。このことは、近似的に許される。(1.1) より

$$\frac{d^3 V_1}{dx^3} = -Zmp (M_1 I_1 + M I_2) + m^2 \frac{dV_1}{dx}$$

同様にして

$$\frac{d^3 V_2}{dx^3} = -Zmp (M_2 I_2 + M I_1) + m^2 \frac{dV_2}{dx}$$

これより

$$\frac{d^4 V_1}{dx^4} - a_1 \frac{d^2 V_1}{dx^2} + b_1 V_1 = C_1 \frac{d^2 V_2}{dx^2} + d_1 V_2 \quad (1.2)$$

$$\frac{d^4 V_2}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 V_2}{dx^2} + b_2 V_2 = C_2 \frac{d^2 V_1}{dx^2} + d_2 V_1 \quad (1.2')$$

但し

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= m^2 + ZmM_1 K_1 p^2, & b_1 &= ZmM_1 C_1 p^2 + ZmM_1 C p^2 - ZmM C p^2, \\ C_1 &= ZmM K_2 p^2, & d_1 &= ZmM_1 C p^2 - ZmM C_2 p^2 - ZmM C p^2 \\ a_2 &= m^2 + ZmM_2 K_2 p^2, & b_2 &= ZmM_2 C_2 p^2 + ZmM_2 C p^2 - ZmM C p^2 \\ C_2 &= ZmM K_1 p^2, & d_2 &= ZmM_2 C p^2 - ZmM C_1 p^2 - ZmM C p^2 \end{aligned} \right\} (1.3)$$

より結局

$$\begin{aligned} & \frac{d^8 V_1}{dx^8} - \frac{d^6 V_1}{dx^6} (a_1 + a_2) + \frac{d^4 V_1}{dx^4} (b_1 + b_2 + a_1 a_2 - C_1 C_2) \\ & - \frac{d^2 V_1}{dx^2} (a_1 b_2 + a_2 b_1 + C_1 d_2 + C_2 d_1) + V_1 (b_1 b_2 - d_1 d_2) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

V_2 にも関しては同様の方程式を得る。

但し

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= Zm^2 + Zmp^2 (M_1 K_1 + M_2 K_2) \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 - C_1 C_2 &= Zmp^2 \{ M_1 C_1 + M_2 C_2 + C (M_1 + M_2 - ZM) \} \\ & \quad + m^4 + Zm^3 p^2 (M_1 K_1 + M_2 K_2) + 4m^2 K_1 K_2 p^4 (M_1 M_2 - M^2) \\ b_1 b_2 - d_1 d_2 &= 4m^2 p^2 (M_1 M_2 - M^2) (C C_1 + C C_2 + C_1 C_2) \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 + C_1 d_2 + C_2 d_1 &= Zm^3 p^2 \{ M_2 (C_2 + C) + M_1 (C_1 + C) - ZMC \} \\ & \quad + 4m^2 p^4 (M_1 M^2 - M^3) \{ K_1 (C_2 + C) + K_2 (C_1 + C) \} \end{aligned} \right\} (1.3')$$

(1.4)は、 x に関し 8 階、時間 t に関し 4 階の偏微分方程式である。その厳密な解を求めることは演算子法で求めるより他ないが、この方法によっても極めて複雑となる。ここでは次のやうに →

の簡便な近似法によつて、その大体の解のあらましをしらへる。さ
ら一般に(1.4)の基本解は、よく知られてゐる如く、

$$V = \sum C_d e^{\gamma_d x + \alpha_d t}$$

という形で與えられる。 γ_d と α_d との間には

$$\begin{aligned} & \alpha^4 \cdot 4m^2 (M_1 M_2 - M^2) \{ C_1 C_2 + C C_1 + C C_2 - \gamma^2 \{ K_1 (C_2 + C) \\ & + K_2 (C_1 + C) \} + \gamma^4 K_1 K_2 \} + \alpha^2 \{ \{ M_2 (C_2 + C) + M_1 (C_1 + C) \\ & - 2MC \} (-2m^3 \gamma^2 + 2m \gamma^2) + (M_1 K_1 + M_2 K_2) (2m^3 \gamma^2 - 2m \gamma^2) \} \\ & + \gamma^3 - 2m^2 \gamma^4 + m^4 \gamma^4 = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

という α^2 に關する二次方程式が與えられる。今傳播定数 γ' を虚数 $\gamma' = j\gamma$ (γ 実数) とし

$$M_1 + M_2 > 2M, \quad M_1 M_2 > M^2$$

を考慮すると、 α^2 は一般には、2箇の異なる負値をもち α は

$$\alpha = \begin{cases} \pm j\omega_1 \\ \pm j\omega_2 \end{cases}$$

となる。これはこの回路に損失を考慮してゐない結果である。従つて内部振動の空間的な高調波の姿態を與える一つの γ に對して、2箇の固有振動数を與えることとなる。この2箇の固有振動数は、それを近似的に一次巻線に於て及 α 二次巻線に於ての固有振動数に對應してゐるのである。従つて $x=0$ すなわち中性負の電圧を V_m とし、始端 $x=1$ に矩形波 E を印加した場合の解は

$$\begin{aligned} V_1 = & V_{1m} + (E - V_m)x \\ & + \sum \{ (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t) \cos \gamma x \\ & + (B_1 \cos \omega_1 t + B_2 \cos \omega_2 t) \sin \gamma x \\ & + (C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \sin \omega_2 t) \cos \gamma x \\ & + (D_1 \sin \omega_1 t + D_2 \sin \omega_2 t) \sin \gamma x \} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} V_2 = & V_{2m} + x(V_2 - V_{2m}) \\ & + \sum \{ (E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t) \cos \gamma x \\ & + (F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t) \sin \gamma x \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (G_1 \sin \omega_1 t + G_2 \sin \omega_2 t) \cos \delta x \\
 & + (H_1 \sin \omega_1 t + H_2 \sin \omega_2 t) \sin \delta x] \quad (1.6')
 \end{aligned}$$

(1.2) 又 は (1.2') = (1.6) (1.6') を代入すると

$$\begin{aligned}
 & \{ \gamma^4 + (m^2 - 2mM_1 K_1 \omega_1^2) \gamma^2 - 2mM_1 \omega_1^2 (C_1 + C) \} \Sigma_{11} \\
 & + \{ \gamma^4 + (m^2 - 2mM_1 K_1 \omega_2^2) \gamma^2 - 2mM_1 \omega_2^2 (C_1 + C) \} \Sigma_{12} \\
 & = \{ 2mMK_2 \omega_1^2 \gamma^2 - 2m\omega_1^2 (M_1 C - MC_2 - MC) \} \Sigma_{21} \quad (1.7) \\
 & + \{ 2mMK_2 \omega_2^2 \gamma^2 - 2m\omega_2^2 (M_1 C - MC_2 - MC) \} \Sigma_{22}
 \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{11} &= \sum (A_1 \cos \omega_1 t \cos \delta x + B_1 \cos \omega_1 t \sin \delta x \\
 & \quad + C_1 \sin \omega_1 t \cos \delta x + D_1 \sin \omega_1 t \sin \delta x) \\
 \Sigma_{12} &= \sum (A_2 \cos \omega_2 t \cos \delta x + B_2 \cos \omega_2 t \sin \delta x \\
 & \quad + C_2 \sin \omega_2 t \cos \delta x + D_2 \sin \omega_2 t \sin \delta x) \\
 \Sigma_{21} &= \sum (E_1 \cos \omega_1 t \cos \delta x + F_1 \cos \omega_1 t \sin \delta x \\
 & \quad + G_1 \sin \omega_1 t \cos \delta x + H_1 \sin \omega_1 t \sin \delta x) \\
 \Sigma_{22} &= \sum (E_2 \cos \omega_2 t \cos \delta x + F_2 \cos \omega_2 t \sin \delta x \\
 & \quad + G_2 \sin \omega_2 t \cos \delta x + H_2 \sin \omega_2 t \sin \delta x)
 \end{aligned}$$

(1.7) は、任意の t 及び x に關して恒等的に等しくなければならぬから各調波の係数は各個に等しくなければならぬ。従つて一次側の積分定数と、二次側の積分定数の間には次のやうな關係のあることがわかる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{A_1}{E_1} = \frac{B_1}{F_1} = \frac{C_1}{G_1} = \frac{D_1}{H_1} &= \frac{2mMK_2 \omega_1^2 \lambda^2 - 2m\omega_1^2 (M_1 C - MC_2 - MC)}{\gamma^4 + (m^2 - 2mM_1 K_1 \omega_1^2) \gamma^2 - 2mM_1 \omega_1^2 (C_1 + C)} \equiv \frac{1}{f_1} \\
 \frac{A_2}{E_2} = \frac{B_2}{F_2} = \frac{C_2}{G_2} = \frac{D_2}{H_2} &= \frac{2mMK_2 \omega_2^2 \lambda^2 - 2m\omega_2^2 (M_1 C - MC_2 - MC)}{\gamma^4 + (m^2 - 2mM_1 K_1 \omega_2^2) \gamma^2 - 2mM_1 \omega_2^2 (C_1 + C)} \equiv \frac{1}{f_2}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

とある。又 $t = 0$ における (1.6) (1.6') は初期分布に等しくなければならぬ。よつて (1.4) より初期分布は、 $t \rightarrow 0$ となつて $P \rightarrow \infty$

として初期分布を決定する式がえられる。このことばかりより $x \rightarrow +0$ の巻線中に電流が流れず静電容量の分布によつてだけ決定されることと対応してゐる。このやうにして

$$\frac{d^4 V_1}{dx^4} - \frac{d^2 V_1}{dx^2} \frac{K_1(C+C_2)+K_2(C+C_1)}{K_1 K_2} + V_1 \frac{C_1 C_2 + C C_1 + C C_2}{K_1 K_2} = 0$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} V_1 &= A_1^0 e^{\alpha' x} + B_1^0 e^{-\alpha' x} + C_1^0 e^{-\beta' x} + D_1^0 e^{-\beta' x} \\ V_2 &= A_2^0 e^{\alpha' x} + B_2^0 e^{-\alpha' x} + C_2^0 e^{-\beta' x} + D_2^0 e^{-\beta' x} \end{aligned} \right\} (1.9)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \alpha'^2 \\ \beta'^2 \end{aligned} \right\} = \frac{K_1(C_2+C)+K_2(C_1+C) \pm \sqrt{\{K_1(C_2+C)-K_2(C_1+C)\}^2 + 4K_1 K_2 C^2}}{2K_1 K_2}$$

しかるに

$$\frac{A_2^0}{A_1^0} = \frac{B_2^0}{B_1^0} = \frac{C_1 + C - K_1 \alpha'^2}{C}$$

$$\frac{C_2^0}{C_1^0} = \frac{D_2^0}{D_1^0} = \frac{C_1 + C - K_1 \beta'^2}{C}$$

という関係があるから A_1^0, B_1^0 その他の8箇の積分定数は4箇の端子条件から完全に決定される。一方、終局分布は一次側の中性点電圧を V_{1n} 、二次側のそれを V_{2n} = 二次側の線路側の電圧を V_2 とする

と

$$V_1 = V_{1n} + (E - V_{1n}) x$$

$$V_2 = V_{2n} + (V - V_{2n}) x$$

で表わされる。

さて $t=0$ においては (1.6) (1.6') は初期分布に等しくなればよいため (1.6) (1.6') の第1項は終局分布を表わすから

$$\begin{aligned} \left(\lim_{t \rightarrow 0} V_1 \right) - \{ V_{1n} + (E - V_{1n}) x \} \\ = \sum [(A_1 + A_2) \cos \delta x + (B_1 + B_2) \sin \delta x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\lim_{t \rightarrow 0} V_2 \right) - \{ V_{2n} + (V - V_{2n}) x \} \\ = \sum [(E_1 + E_2) \cos \delta x + (F_1 + F_2) \sin \delta x] \end{aligned}$$

一方 (1.6) (1.9) から

$$\begin{aligned} \left(\lim_{t \rightarrow 0} V_1 \right) - \{ V_{1n} + (E - V_{1n}) x \} = \{ A_1^0 e^{\alpha' x} + B_1^0 e^{-\alpha' x} + C_1^0 e^{\beta' x} + D_1^0 e^{-\beta' x} \} \\ - \{ V_{1n} + (E - V_{1n}) x \} \end{aligned}$$

これを Fourier 級数に展開して

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \sin n\pi x + \alpha_n \cos n\pi x) \quad (1.10)$$

同様に

$$\begin{aligned} & \left(\lim_{t \rightarrow 0} v_2 \right) - \{v_{2n} + (V_2 - v_{2n})\} \\ &= (A_2^0 e^{\alpha x} + B_2^0 e^{-\alpha x} + C_2^0 e^{\beta x} + D_2^0 e^{-\beta x}) - \{v_{2n} + (V_2 - v_{2n})x\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n \sin n\pi x + \gamma_n \cos n\pi x) \quad (1.10') \end{aligned}$$

と得る。ここに $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ は初期分布と終局分布の差を Fourier 級数に展開して Fourier 級数である。(1.8) と (1.10) (1.10') の係数と比較して

$$A_1 + A_2 = \alpha_0 \quad f_1 A_1 + f_2 A_2 = \gamma_0$$

$$B_1 + B_2 = \beta_0 \quad f_1 B_1 + f_2 B_2 = \delta_0$$

を得る。これより

$$A_1 = \frac{f_2 \alpha_0 - \gamma_0}{f_2 - f_1} \quad A_2 = \frac{\gamma_0 - f_1 \alpha_0}{f_2 - f_1} \quad B_1 = \frac{f_2 \beta_0 - \delta_0}{f_2 - f_1} \quad B_2 = \frac{\delta_0 - f_1 \beta_0}{f_2 - f_1} \quad (1.11)$$

また $t = +0$ にあつては、巻線中に電導電流は流れない。(1.1) から

$$i_1 = i_{10}(t) + \int \left\{ (C_1 + C) \frac{\partial v_1}{\partial t} - C \frac{\partial v_2}{\partial t} \right\} dx - K_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} \quad (1.12)$$

$$i_2 = i_{20}(t) + \int \left\{ (C_2 + C) \frac{\partial v_2}{\partial t} - C \frac{\partial v_1}{\partial t} \right\} dx - K_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial t} \quad (1.12')$$

同様にして、 $i_{10}(t), i_{20}(t)$ は x を含まない函数である。(1.12) に (1.6)

(1.6') を代入すると、 $t = +0$ で巻線上の電流は $i_1 = i_2 = 0$

と得るから

$$i_{10}(t) = i_{20}(t) = 0$$

及び

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} i_1 = & \sum [(C_1 + C_2) \left\{ (C_1 w_1 + C_2 w_2) \frac{\sin \delta x}{\delta} - (D_1 w_1 + D_2 w_2) \frac{\cos \delta x}{\delta} \right\} \\ & - K_1 \left\{ -(C_1 w_1 + C_2 w_2) \delta \sin \delta x + (D_1 w_1 + D_2 w_2) \delta \cos \delta x \right\} \\ & - C_1 \left\{ (G_1 w_1 + G_2 w_2) \frac{\sin \delta x}{\delta} - (H_1 w_1 + H_2 w_2) \frac{\cos \delta x}{\delta} \right\}] = 0 \end{aligned}$$

上式は x に無関係に成立するから $\sin \delta x$ 及び $\cos \delta x$ の係数は等

し、い、と、あ、い、と

$$\frac{C_1 W_1 + C_2 W_2}{G_1 W_1 + G_2 W_2} = \frac{D_1 W_1 + D_2 W_2}{H_1 W_1 + H_2 W_2} = \frac{C}{C_1 + C + \gamma^2 K_1}$$

と、なる。上式と (1.8) より、 C_1, C_2, D_1, D_2 の間には

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{W_1}{W_2} \frac{f_1 C - C_1 - C - \gamma^2 K_1}{C_1 + C + \gamma^2 K_1 - f_2 C} = p$$

の関係が成立せねばならぬことがわかる。一方 (1.6) (1.6') と (1.12') に代入して同様に計算を行うと

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{W_2}{W_1} \frac{C - f_1 (C_2 + C + \gamma^2 K_2)}{(C_2 + C + K_2 \gamma^2) f_2 - C} = q$$

よって $p \neq q$ であるから

$$C_2 - C_1 p = 0$$

$$C_2 - C_1 q = 0$$

等から C_1, C_2, D_1, D_2 はすべて零でなければならぬことがわかる。従って (1.6) (1.6') から

$$V_1 = V_{1n} + (E - V_{1n}) x$$

$$+ \sum \left\{ (A_1 \cos W_1 t + A_2 \cos W_2 t) \cos \gamma x \right. \\ \left. + (B_1 \cos W_1 t + B_2 \cos W_2 t) \sin \gamma x \right\}$$

$$V_2 = V_{2n} + (V - V_{2n}) x$$

$$+ \sum \left\{ (f_1 A_1 \cos W_1 t + f_2 A_2 \cos W_2 t) \cos \gamma x \right. \\ \left. + (f_1 B_1 \cos W_1 t + f_2 B_2 \cos W_2 t) \sin \gamma x \right\}$$

ただし A_1, A_2, B_1, B_2 は (1.11) で與えられる。

4.2 一次巻線から二次巻線への移行現象における 一への近似的方法

二次移行現象は、従来集中定数回路で静電的移行、電磁的移行の二つの過程にわけて取り扱われてきた。しかしながらこの方面の叙述に比較的くわしい、英口技術協会の *Surge phenomena* の要約⁽²⁹⁾を見てもわかるやうに、この両者が同時に存在する普通の場合には、集中定数回路でも素子の数が多くなって算式が複雑になるため取り

扱われていない。また二次巻線上の電位分布等に関して、内部振動の立場から殆ど考察されてない。そこで、この節では二次巻線と一次巻線の巻数比が比較的小さく、(数分の一以下) 又、二次巻線の状態によつて一次巻線の内部振動の殆んど影響されないという場合について一つの近似法をのべる。上のやうな假定もしくは、条件は、大抵の場合に満足されるものである。

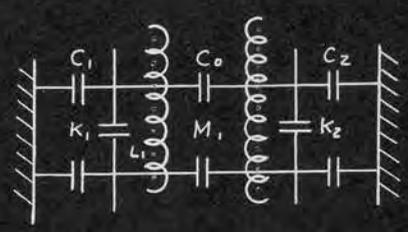


Fig. 2.1

このやうな假定をすれば正攻法において遭遇する傳播定数 γ の固有値の算定という厄介な問題をさけることができ、移行分と、これによつて誘起された二次巻線の固有振動を分離することができ、二次巻線上の電位分布等を近似的に知ることが出来る。以下簡単に、その取り扱い方を示す。

Fig. 2.1 にあいて二次巻線上の電位電流を決定する方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_2}{dx} &= L_2 p I_2 + e \\ \frac{dI_2}{dx} &= C_2 p V_2 - K_2 p \frac{d^2 V_2}{dx^2} + C_0 p (V_2 - V_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ただし V_1 は一次巻線上の電位、 e は一次巻線より電磁誘導によつて二次巻線に表われる電圧で、

$$e = M p I_1 = \frac{M}{L_1} \frac{dV_1}{dx}$$

上式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 V_2}{dx^2} - \gamma_2^2 V_2 &= f(x) & \text{但し } \gamma_2^2 &= \frac{L_2 (C_2 + C_0) p^2}{1 + L_2 K_2 p^2} \\ f(x) &= \frac{1}{1 + L_2 K_2 p^2} \left(-L_2 C_0 p^2 V_1 + \frac{M}{L_1} \frac{d^2 V_1}{dx^2} \right) \\ &\equiv a \cosh \gamma_1 x + b \sinh \gamma_1 x \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ただし移行現象では主として基本波の分布をしらべれば十分であるので簡単のため L, C, K 分布によつて、(2.2) にあいて $f(x)$ の中の V_1 を含む項は、静電的移行分を表わし、 $d^2 V_1 / dx^2$ の項は、電磁的移行分を表わす。(2.2) から

$$V_2 = A \cosh \gamma_2 x + B \sinh \gamma_2 x - \frac{1}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} (a \cosh \gamma_1 x + b \sinh \gamma_1 x) \quad (2.3)$$

上式の積分定数 A, B を含む項は、移行分によつて誘起された二次側の固有振動を表わす。式 (2.3) から二次側の端子が接地又は開放のときは、 γ_2 の値は直ちに定まり原理的には、初等計算により二次巻線上の電位分布を知ることが出来る。たとえば一例として二次側の両端子が接地されているとき、すなわち

$$x=0 \quad \gamma_2 = 0 \quad V_2 = 0 \quad x=1 \quad \gamma_2 = 0 \quad V_2 = 0$$

これより A, B を決定して

$$V_2 = \frac{a}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \cosh \gamma_2 x + \frac{a(\cosh \gamma_1 - \cosh \gamma_2) + b \sinh \gamma_1}{(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \sinh \gamma_2} \sinh \gamma_2 x \\ - \frac{1}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} (a \cosh \gamma_1 x + b \sinh \gamma_1 x)$$

一次側中性点接地。単位電圧印加では

$$a = 0 \quad b = \frac{E}{1 + L_2 K_2 P^2} \frac{1}{\sinh \gamma_1} (-L_2 C_0 P^2 + \frac{M}{L_1} \gamma_1^2)$$

$$\therefore V_2 = -\frac{E}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \frac{-L_2 C_0 P^2 + \frac{M}{L_1} \gamma_1^2}{1 + L_2 K_2 P^2} \frac{\sinh \gamma_1 x}{\sinh \gamma_1} \\ + \frac{E}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \frac{(-L_2 C_0 P^2 + \frac{M}{L_1} \gamma_1^2)}{1 + L_2 K_2 P^2} \frac{\sinh \gamma_2 x}{\sinh \gamma_2}$$

K_1, K_2 は C_1, C_2 に比して小さく二次傳達にあいて、向題によるのは、主として基本波であるのでこれを省略すると

$$V_2 \cong \frac{E}{\pi} \frac{-L_2 C_0 + M C_1}{L_2 C_2 - L_1 C_1} E \left\{ -\frac{\lambda_1^2 \sin \pi x}{\lambda_1^2 + \pi^2} \cos \omega_1 t + \frac{\lambda_2^2 \sin \pi x}{\lambda_2^2 + \pi^2} \cos \omega_2 t \right\}$$

$$\omega_1 \cong \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \omega_2 \cong \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

一次側中性点開放。単位電圧印加では

$$b = 0 \quad a = \frac{E}{1 + L_2 K_2 P^2} \frac{(-L_2 C_0 P^2 + \frac{M}{L_1} \gamma_1^2)}{\cosh \gamma_1}$$

$$\therefore V_2 \cong E \frac{-L_2 C_0 + M C_1}{L_2 C_2 - L_1 C_1} \frac{\cosh \gamma_2 x - \cosh \gamma_1 x}{\cosh \gamma_1} \\ - E \frac{-L_2 C_0 + M C_1}{L_2 C_2 - L_1 C_1} \frac{\cosh \gamma_2 - \cosh \gamma_1}{\cosh \gamma_1} \frac{\sinh \gamma_2 x}{\sinh \gamma_2}$$

上式の分子に M を含む項は、電磁誘導分を表わし、 C_0 を含む項は、静電的傳達ならぬにこれによつて誘起された電圧を表わす。上式は展開定理により、その基本波だけをとれば十分であらう。

第2章 進行波現象としての考察

第1章において、筆者は内部振動の現象として考察した。問題によつては進行波現象として考察せねばならぬ場合があり、この章では進行波現象として考察する。さて内部振動としての現象と進行波現象の差異であるが、これは、前者が後者の進行波としての端子からの反射波を含むこと以外には本質的に両者の現象は同一である。しかしながら、その数学的な取り扱いとはたとえば、演算子解が求められているときは、前者は展開定理によつて空間高調波の形で論ぜられ、その解析がある程度組織化されるのに対し、後者はその演算子解から時間函数を求めるのに際し、分岐点の存在等により解析が複雑化して、広範囲の時間領域にわたり適用できる閉じた形の解を求めるのは一般に困難である。又一方物理的な立場から、内部振動の現象から進行波としての現象を予想することは、送電線の場合にもなされておらず、まして巻線の場合は、静電的な直達分の存在、電磁的な相互誘導の存在からこの事情は錯雑したものととなり、たとえば、有限長の場合の内部振動の解が求められた場合でも、無限長の場合の進行波傳播の状況は、不明とされてきた。

即ち、このやうな事情等から歴史的に進行波現象としての研究は、内部振動としての研究に比して比較的新しく、Pierce氏の単一螺旋回路についての $e^{j\omega t}$ という定常状態における位相速度等に関する基礎的考察や、Rüdenberg氏の L.C.K 回路の進行波現象としての半ば定性的な考察がある他は、殆んど閑置されていまいやうである。

このような現状に対して本章第1節において均一単層巻線回路導体がある理想的な場合について電磁場から基礎的に、その位相速度特性インピーダンスとしらべ、又等価回路との関係をしらべた。第2節では、一様な自己インダクタンス分布及び相互誘導が指数函数で與えられる場合等の等価回路に基づいて、その進行波解を求め、その振舞をしらべた。又内部振動の解と進行波解との関係を明らかにした。又相互誘導函数が Fourier 変換可能な偶函数で與えられた一般的な場合に無限長及び半無限長巻線に沿う厳密な進行波解を求め波動インピーダンスや位相速度、同波数特性等に関する算式を與え、この種の問題の基礎的な性質を明らかにした。

第1節 電磁界からの考察

螺旋的な巻線においては、送電線や、レックナル線とは構造的に異なり、静電的、電磁的な結合による直達分の存在が予想される。1.1節では、細い線が帰路導体の上に単層に巻かれている場合について、その位相速度、波動インピーダンス等を Maxwell の基礎方程式から検討した。1.2節で Poritsky 氏等のこの種の向題に対する考察を批判し、1.1節で筆者のえた結果と比較した。1.3節においては、1.1節の結果から、2節で取り扱う等価回路との関係をしらべた。

尚1.1節における境界条件の理想化については Pierce 氏の方法に従った。それで、その概要を次にのべる。

Pierce 氏の方法の概要

進行波管に現われる帰路円筒導体をもたない単一螺旋に沿う電磁波傳播の向題を、代は螺旋導体を螺旋の平均半径と同一の半径をもつ螺旋の方向に向け、導電性をもつ円筒におきかえて円筒上を軸方向に

$$v = \frac{w}{\beta} \quad (\beta: \text{傳播定数})$$

という位相速度で傳播する軸対称の平面波の重疊によつて螺旋内外の電磁界を求めている。そして境界条件より傳播定数の満足すべき特性方程式を求め、これより位相速度に対する考察を行っている。次の1.1では、この考え方をを用いて螺旋の中に帰路導体として円筒導体共軸的におかれた場合の電磁界及びその傳播について考察する。

1.1 螺旋の中に円筒導体共軸的におかれた場合の位相速度及び波動インピーダンスに関する考察

ここでは緒言にも述べたように、単層均一巻について取り扱う。多層巻等においては単層巻と異つた特性が予想されるが、本節で述べるような解析は困難であるので、1.3節で簡単にしらべられる程度にとどめる。又帰路導体として薄層鉄板や圧粉鉄心のよう磁性体がおかれるが、複雑となるのと進行波現象において重要なMS領域の速い現象では通常、減衰を興える以外は鉄心のための相互誘導の増大は少いと考へられるために、ここではこれを考慮しない。尚、1.3

節の等価回路との関係上、ベクトルポテンシャル A 、スカラーポテンシャル ϕ を用いて考察する。

maxwell 式の基礎方程式は、M.K.S 単位系を用いて

$$\text{rot } H = \dot{i} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{rot } E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\epsilon \text{ div } E = \rho \quad \text{div } H = 0$$

今

$$B = \mu H = \text{rot } A, \quad E = -\text{grad } \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.1)$$

というベクトルポテンシャル A 、スカラーポテンシャル ϕ を導入すると、これらは、

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 A - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu \dot{i} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

という公知の波動方程式及び

$$\text{div } A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.3)$$

という附帯条件式と満足せねばならぬ。

今円筒座標を用いて場の軸対称であるとすると、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (1.2')$$

電導電流、従って導線は円筒面上にだけ存在するのであるから A の成分は A_z と A_ϕ だけである。

A_z については

$$A_z = e^{j(\omega t - \beta z)} A_z(r) \quad (1.4)$$

とすると

$$\frac{d^2 A_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_z}{dr} - \gamma^2 A_z = 0 \quad (1.5)$$

という方程式が成立する。

$$\text{但し } \gamma^2 = \beta^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \beta^2 - \beta_0^2 \quad (1.6)$$

故に領域 I ($b > r > a$) においては (Fig 1.1 参照)

$$A_z = A_1 I_0(\gamma r) + B_1 K_0(\gamma r) \quad (1.7)$$

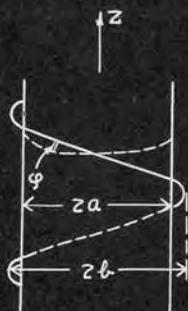


Fig 1.1

領域 II ($b < r$) では $r \rightarrow \infty$ で場が有界に留まることから

$$A_z = B_2 K_0(\gamma r) \quad (1.8)$$

A_φ については

$$\frac{d^2 A_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_\varphi}{dr} - \left(-\gamma^2 - \frac{1}{r^2}\right) A_\varphi = 0 \quad (1.9)$$

が成立する。従って領域 I では

$$A_\varphi = C_1 I_1(\gamma r) + D_1 K_1(\gamma r) \quad (1.10)$$

領域 II では

$$A_\varphi = D_2 K_1(\gamma r) \quad (1.11)$$

次に境界条件より積分定数を決定する。扱っている螺線という幾何学的な特性をどのように導入するかを概説すると、それは上述の如く領域 I, II ともに解を軸対称として求め、次に境界条件として、導線の表面上に螺線状に巻かれた表面上この細線上に電流が流れるものとして、これに Ampère の法則等の条件式を適用するのである。扱った境界条件として

$$r = a \text{ で } E_z = E_\varphi = 0 \quad (1.12)$$

しかるにこの場合は、スカラー・ポテンシャルによる電場は、 E_φ 成分は存在せず、また z 方向の成分は、径方向の成分に比して無視できる。従って (1.1) から

$$A_z = A_\varphi = 0$$

即ち

$$A_1 I_0(\gamma a) + B_1 K_0(\gamma a) = 0 \quad (1.12')$$

$$C_1 I_1(\gamma a) + D_1 K_1(\gamma a) = 0$$

又 $r = b$ で

$$E_{z1} = E_{z2} \quad E_{\varphi 1} = E_{\varphi 2} \quad (1.13)$$

であるから

$$A_1 I_0(\gamma b) + B_1 K_0(\gamma b) = B_2 K_0(\gamma b) \quad (1.13')$$

$$C_1 I_1(\gamma b) + D_1 K_1(\gamma b) = D_2 K_1(\gamma b)$$

さて $r = b$ で導線に直角な方向の磁界の成分は、導線中の電流により Ampère の法則に従って不連続に変化する。即ち

$$\int H d\ell = \int i dS \quad (1.14)$$

であるから

$$\{-H_z \cos \varphi + H_\varphi \sin \varphi\}_{\text{II}} - \{-H_z \cos \varphi + H_\varphi \sin \varphi\}_{\text{I}} = i \quad (1.14')$$

又、導線に平行な磁界の成分は導線内の変位電流を無視すると連続であるから

$$(H_z \sin \varphi + H_\varphi \cos \varphi)_{\text{II}} - (H_z \sin \varphi + H_\varphi \cos \varphi)_{\text{I}} = 0 \quad (1.14'')$$

よって

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \{r K_1(r)\} = -K_0(r)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \{r I_1(r)\} = I_0(r)$$

であることは留意すると

$$H_{z1} = \frac{\sigma}{\mu} \{C_1 I_0(\sigma r) - D_1 K_0(\sigma r)\} \quad (1.15)$$

$$H_{z2} = \frac{-\sigma}{\mu} D_2 K_0(\sigma r)$$

$$H_{\varphi 1} = \frac{-\sigma}{\mu} \{A_1 I_1(\sigma r) - B_1 K_1(\sigma r)\}$$

$$H_{\varphi 2} = \frac{\sigma}{\mu} B_2 K_1(\sigma r)$$

よって、(1.14') (1.14'') から $r = b$ で

$$H_{\varphi 2} - H_{\varphi 1} = i \sin \varphi$$

$$H_{z2} - H_{z1} = i \cos \varphi$$

であるから上式に (1.15) を代入すると

$$B_2 K_1(\sigma b) + \{A_1 I_1(\sigma b) - B_1 K_1(\sigma b)\} = \frac{\mu}{\sigma} i \sin \varphi \quad (1.16)$$

$$-D_2 K_0(\sigma b) - \{C_1 I_0(\sigma b) - D_1 K_0(\sigma b)\} = -\frac{\mu}{\sigma} i \cos \varphi$$

(1.12') (1.13') から

$$B_1 = -\frac{I_0(\delta a)}{K_0(\delta a)} A_1 \quad D_1 = -\frac{I_1(\delta a)}{K_1(\delta a)} C_1$$

$$B_2 = \frac{I_0(\delta b) K_0(\delta a) - I_0(\delta a) K_0(\delta b)}{K_0(\delta a) K_0(\delta b)} A_1$$

$$D_2 = \frac{I_1(\delta b) K_1(\delta a) - I_1(\delta a) K_1(\delta b)}{K_1(\delta a) K_1(\delta b)} C_1$$

これを (1.16) に代入して

$$A_1 = \frac{K_0(\delta b)}{I_0(\delta b) K_1(\delta b) + I_1(\delta b) K_0(\delta b)} \frac{\mu i}{\delta} \sin \varphi$$

$$C_1 = \frac{K_1(\delta b)}{I_1(\delta b) K_0(\delta b) + I_0(\delta b) K_1(\delta b)} \frac{\mu i}{\delta} \cos \varphi$$

かようにして積分定数を電流 i の函数として求めこれを (1.7) (1.10) に代入すると $r=b$ でのベクトルポテンシャル A_z, A_φ は

$$A_z = \frac{I_0(\delta b) K_0(\delta a) - I_0(\delta a) K_0(\delta b)}{I_0(\delta b) K_1(\delta b) + I_1(\delta b) K_0(\delta b)} \frac{K_0(\delta b)}{K_0(\delta a)} \frac{\mu i}{\delta} \sin \varphi \quad (1.17)$$

$$A_\varphi = \frac{I_1(\delta b) K_1(\delta a) - I_1(\delta a) K_1(\delta b)}{I_0(\delta b) K_1(\delta b) + I_1(\delta b) K_0(\delta b)} \frac{K_1(\delta b)}{K_1(\delta a)} \frac{\mu i}{\delta} \cos \varphi$$

として求められる。

次にスカラーポテンシャル ϕ に関して考察する。 A_z と同じく ϕ は

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \delta^2 \phi = 0$$

を満足する。従って領域 I では

$$\phi_1 = \alpha_1 I_0(\delta r) + \beta_1 K_0(\delta r) \quad (1.18)$$

領域 II では

$$\phi_2 = \beta_2 K_0(\delta r) \quad (1.18')$$

境界条件として

$$r=b \quad \phi_1 = \phi_2$$

$$\text{即ち} \quad \alpha_1 I_0(\delta b) + \beta_1 K_0(\delta b) = \beta_2 K_0(\delta b) \quad (1.19)$$

$$r=a \quad \phi_1 = 0$$

$$\therefore \alpha_1 I_0(\delta a) + \beta_1 K_0(\delta a) = 0 \quad (1.20)$$

次に $r = b$ の導線上に自由電荷があるから

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_2 = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\therefore \alpha_1 I_1(\delta b) - \beta_1 K_1(\delta b) + \beta_2 K_1(\delta b) = \frac{\rho}{\delta \epsilon} \quad (1.21)$$

(1.19) (1.20) (1.21) から

$$\alpha_1 = \frac{K_0(\delta b)}{I_0(\delta b) K_1(\delta b) + I_1(\delta b) K_0(\delta b)} \frac{\rho}{\delta \epsilon}$$

$$\beta_1 = \frac{-K_0(\delta b)}{I_0(\delta b) K_1(\delta b) + I_1(\delta b) K_0(\delta b)} \frac{I_1(\delta a)}{K_0(\delta a)} \frac{\rho}{\delta \epsilon}$$

上式を (1.18) に代入して $r = b$ のスカラーポテンシャル Φ は

$$\Phi = \frac{I_0(\delta b) K_0(\delta a) - K_0(\delta b) I_0(\delta a)}{I_0(\delta b) K_0(\delta b) + I_1(\delta b) K_0(\delta b)} \frac{K_0(\delta b)}{K_0(\delta a)} \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.22)$$

として電荷 ρ の函数として求められる。

よって上の演算結果は、又附帯条件式 (1.3) を満足することを示す。
即ち

$$\operatorname{div} A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

であるから

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{-j\omega}{c^2} \Phi$$

$$\text{即ち} \left. \begin{aligned} \frac{\beta}{j\omega \epsilon \mu} \{A_1 I_0(\delta r) + B_1 K_0(\delta r)\} &= \alpha_1 I_0(\delta r) + \beta_1 K_0(\delta r) \quad (= \Phi_1) \\ \frac{\beta}{j\omega \epsilon \mu} B_2 K_0(\delta r) &= \beta_2 K_0(\delta r) \quad (= \Phi_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

が成立せねばならぬが、 $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ のみならず境界条件式 (1.19) (1.20) と A_1, B_1, B_2 のみならず (1.12') (1.13') は同じ条件式であるから

$$A_1 : B_1 : B_2 = \alpha_1 : \beta_1 : \beta_2$$

となり (1.23) 即ち附帯条件式の満足することが示された。

これで準備が整ったから次に導線表面における連続の条件から傳播定数を定める特性方程式を求める。導線表面において電界の連続であることから

$$r = b \text{ のとき}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial l} = -E_l \quad (1.24)$$

但し l は導線に沿う z の長さである。従って

$$-j\beta v \sin \varphi = -j\omega (A_\varphi \cos \varphi + A_z \sin \varphi) \quad (1.24')$$

一方連続の条件式から

$$\operatorname{div} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.25)$$

よるに、今、電磁界が $e^{j(\omega t - \beta z)}$ で変化していると考えられているのであるから \vec{i} , ρ も又これに従って、変化するから

$$\operatorname{div} \vec{i} = \sin \varphi \frac{\partial i}{\partial z}$$

$$\therefore \frac{\rho}{i} = \frac{\beta \sin \varphi}{\omega} \quad (1.25')$$

(1.24') の ϕ , A_φ , A_z に (1.17), (1.22) を代入して

$$\frac{\beta \frac{\rho}{i} \sin \varphi}{\omega \mu_0} = \frac{I_0(\beta b) K_1(\beta a) - I_1(\beta a) K_1(\beta b)}{I_0(\beta b) K_0(\beta a) - K_0(\beta b) I_0(\beta a)} \frac{K_1(\beta b)}{K_1(\beta a)} \frac{K_0(\beta a)}{K_0(\beta b)} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$$

上式に (1.25') を代入すると結局

$$j\omega \frac{I_0(\beta b) K_0(\beta a) - I_0(\beta a) K_0(\beta b)}{I_1(\beta b) K_1(\beta a) - I_1(\beta a) K_1(\beta b)} \frac{K_0(\beta b) K_1(\beta a)}{K_0(\beta a) K_1(\beta b)} = (\beta_0 \cot \varphi)^2 \quad (1.26)$$

という特性方程式を求めることができる。従って上式より傳播定数 β 従って ω に対する位相速度を求めることができる。

又 (1.22), (1.25') より巻線上 $r = b$ に於いて ϕ は

$$\phi = \frac{I_0(\beta b) K_0(\beta a) - K_0(\beta b) I_0(\beta a)}{I_0(\beta b) K_1(\beta b) + I_1(\beta b) K_0(\beta b)} \frac{K_0(\beta b)}{K_0(\beta a)} \frac{\beta}{\delta E} \frac{\sin \varphi}{\omega} i$$

従って角周波数 ω に対する波動インピーダンスは

$$\vec{Z}(\omega) = \frac{I_0(\beta b) K_0(\beta a) - K_0(\beta b) I_0(\beta a)}{I_0(\beta b) K_1(\beta b) + I_1(\beta b) K_0(\beta b)} \frac{K_0(\beta b)}{K_0(\beta a)} \frac{\beta}{\delta E} \frac{\sin \varphi}{\omega} \quad (1.27)$$

次に (1.26), (1.27) の特性式に基づいて位相速度、波動インピーダンスについて若干の考察を行う。電磁場の軸方向即ち z 方向の位相速度を v とすると (1.4) から

$$v = \frac{\beta_0}{\beta} c \quad (1.28)$$

螺線に沿う位相速度を v とすると、

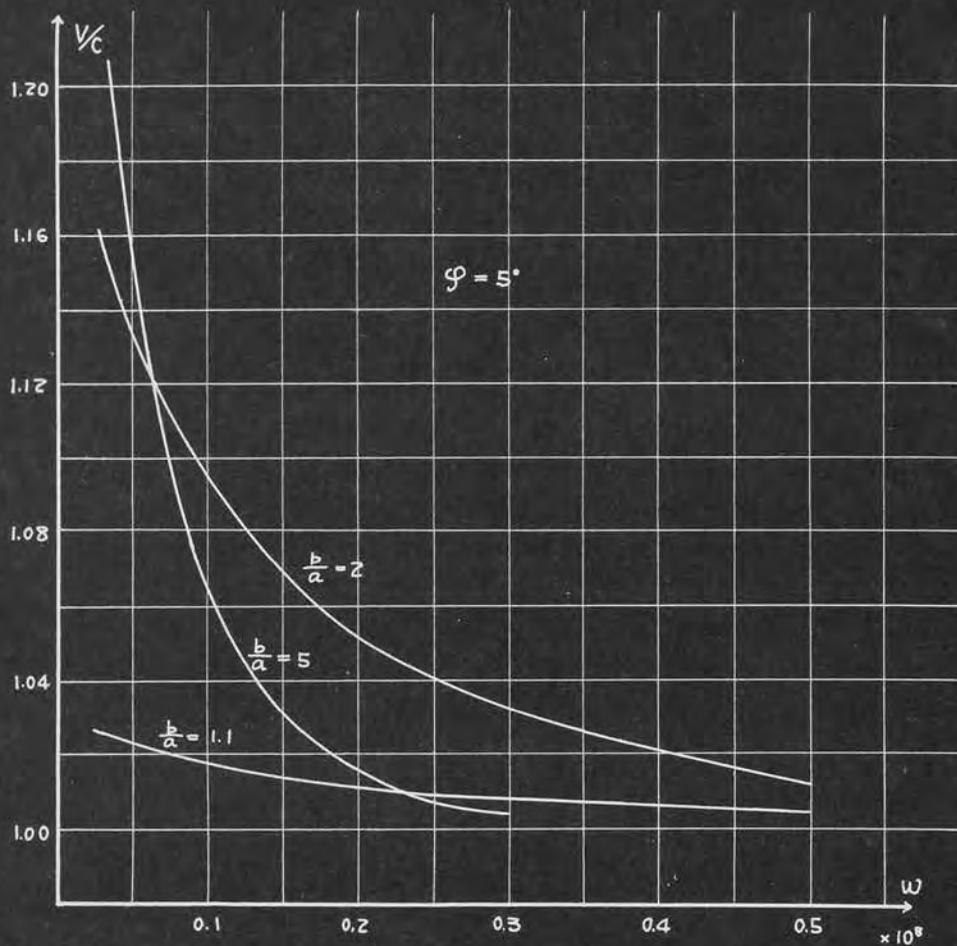
$$V = \frac{\beta_0}{\beta} c \operatorname{cosec} \varphi \quad (1.28')$$

で與えられる。

(1.26)において螺線の平均半径 b と内側の円筒導体の半径の比 b/a を與え、 γa の値を変えて β_0 の値を求め (1.6) (1.28') により V と ω の關係を示せば $\varphi = 5^\circ$ $\varphi = 60^\circ$ の場合にそれぞれ Fig. 1.2 a, Fig. 1.2 b となる。

即ち位相速度その他は、 γa の値で定まる。図から ω が大きくなるにつれて V は減少して光速に落つくことがわかる。 ω が小さくなるにつれて V は光速より大きくなる。このことは、重要な一つの結果で周波数が低くなる程巻線間の電磁的な相互作用が効いてくることとなる。その程度は螺線の幾何学的な大小により変り、又多層巻

Fig. 1.2 a



となると一層その大いさが大きくなることが予想される。

ω が比較的小さい場合の特性は、数表の関係から簡単に求められ
 い。それで今 $\omega \rightarrow 0$ の極限值を求める。

$x \rightarrow 0$ ならば

$$K_0(x) = -\left[\delta_0 + \log \frac{x}{2}\right] + O(x^2) \quad K_1(x) = \left(\delta_0 + \log \frac{x}{2}\right) \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - O(x)$$

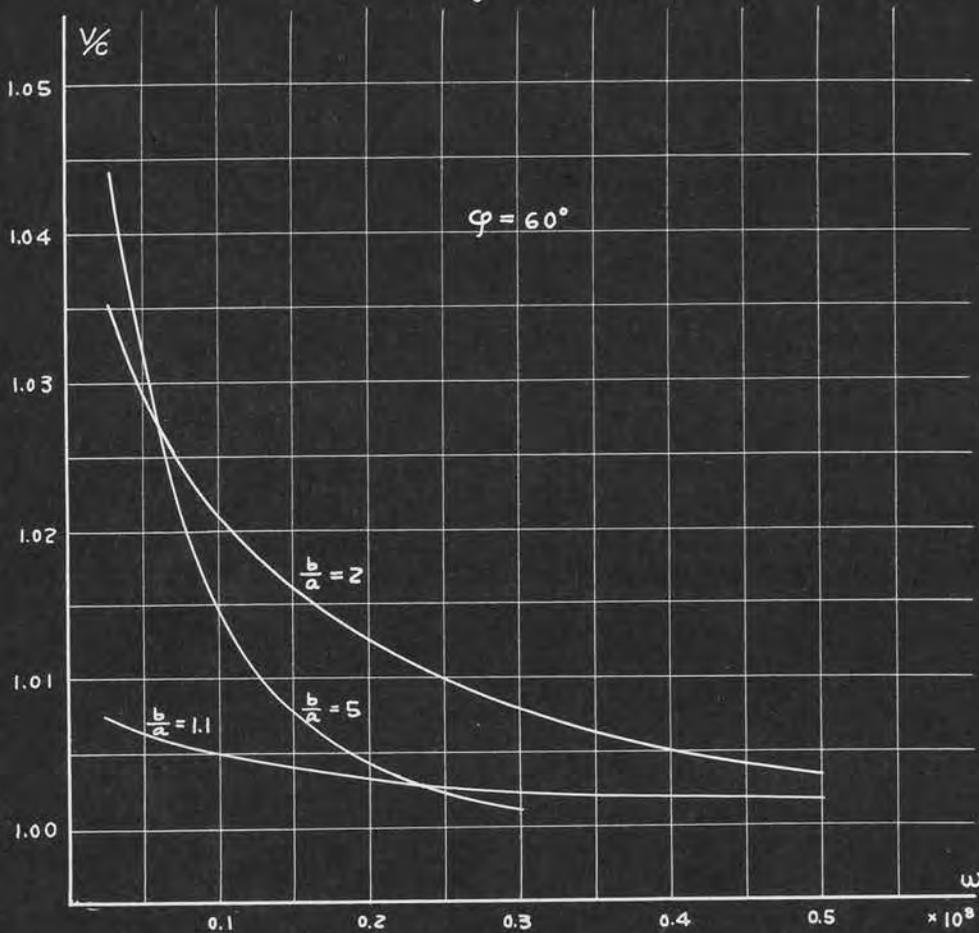
$$I_0(x) = 1 + O\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad I_1(x) = \frac{x}{2} + O\left(\frac{x^3}{16}\right)$$

等の関係を用いて

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta_0^2 = \frac{1}{\cot^2 \varphi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 \frac{I_0(\delta b) K_0(\delta a) - I_0(\delta a) K_0(\delta b)}{I_1(\delta b) K_1(\delta a) - I_1(\delta a) K_1(\delta b)} \frac{K_0(\delta b) K_1(\delta a)}{K_0(\delta a) K_1(\delta b)}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2 \frac{b}{a} \log \frac{b}{a}}{\cot^2 \varphi \cdot \frac{b^2 - a^2}{2ab}} \quad (1.29)$$

Fig. 1.2 b



一方 (1.6) から

$$\beta_0^2 = \omega^2 / c^2$$

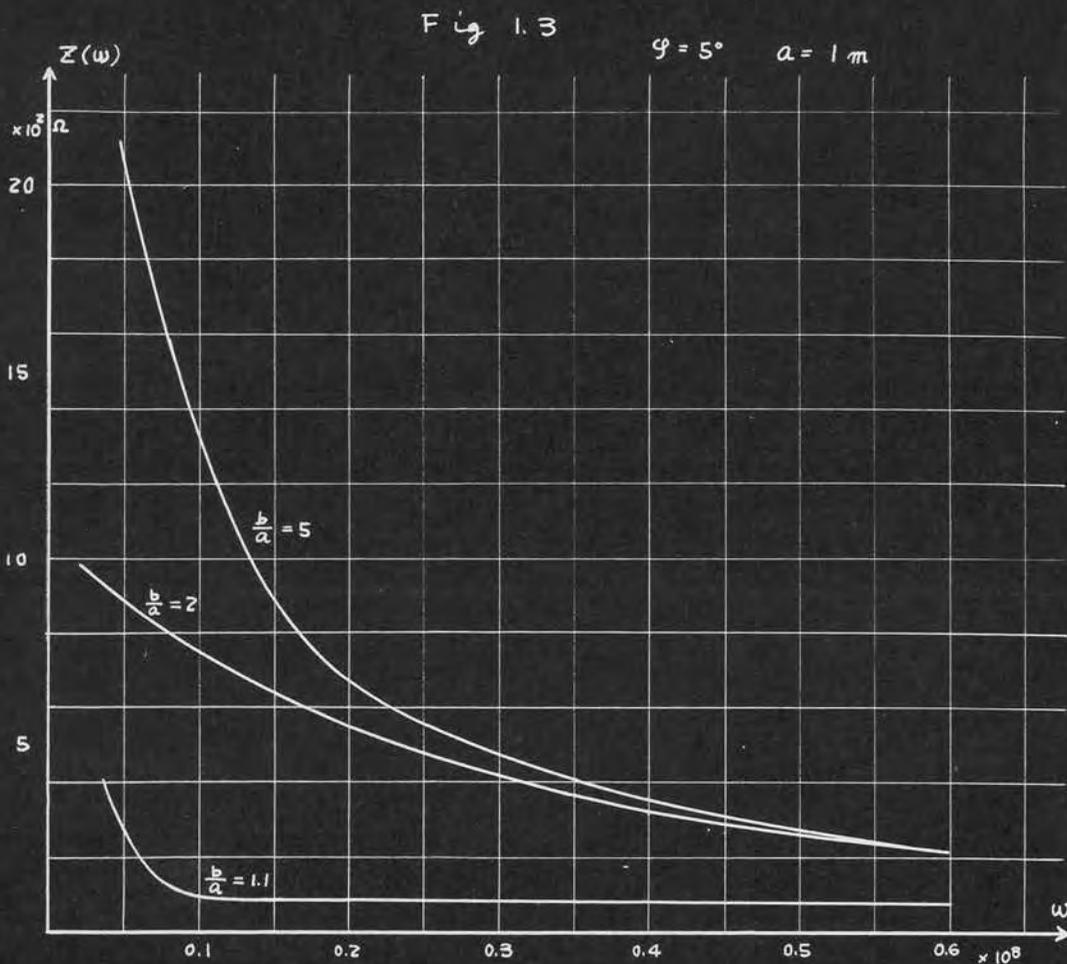
であるから $\omega \rightarrow 0$ は $\gamma \rightarrow 0$ と同じ内容をもち、式 (1.6) より

$$\beta^2 = \gamma^2 + \beta_0^2$$

であるから

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} V = \lim_{\omega \rightarrow 0} V = C \sqrt{\frac{\frac{b}{a} \log \frac{b}{a} \cdot \tan^2 \varphi}{\frac{b^2 - a^2}{2ab} + \frac{b}{a} \log \frac{b}{a} \cdot \tan^2 \varphi}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} V \sin \varphi \quad (1.30)$$

上式より $\frac{b}{a} \rightarrow 1$ のとき



$$\lim_{w \rightarrow 0} V = C \sqrt{\frac{\tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}}$$

で最小で b/a が大きくなるほど $\lim_{w \rightarrow 0} V$ は増大して $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$ となる。

$$\lim_{w \rightarrow 0} V = C \quad (\varphi \neq 0)$$

となる。このことは Fig. 1.2 a, b で $\frac{b}{a}$ が大きい程 $w \rightarrow 0$ で V が大きい値となる傾向と一致している。

次に (1.27) から求めた波動インピーダンスの一例を示す。図より周波数が高くなる程インピーダンスが減少することからわかる。 $w \rightarrow 0$ の状況をしらべると、

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} Z(w) = \lim_{w \rightarrow 0} Z(w) = b \log \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \varphi}{\epsilon} \cdot \frac{\beta}{w}$$

しめるに (1.29) から

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\beta^2}{w^2} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\gamma^2}{w^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{\frac{b^2 - a^2}{2ab} \cot^2 \varphi + \frac{b}{a} \log \frac{b}{a}}{c^2 \frac{b}{a} \log \frac{b}{a}}$$

$$\therefore \lim_{w \rightarrow 0} Z(w) = a \sqrt{\frac{b}{a} \log \frac{b}{a}} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2ab} \cot^2 \varphi + \frac{b}{a} \log \frac{b}{a}} \cdot \frac{\sin \varphi}{c \epsilon} \quad (1.31)$$

となり b/a が大きくなる程 $\lim_{w \rightarrow 0} Z(w)$ は大きくなる。

1.2 Poritsky 氏の考察と検討

1.1 節で基本的な考察を行った。これに対して同様な問題を取り扱ったものとして Poritsky 氏等の考察があるので、ここにこれを簡単に紹介し、その検討を加えよう。

氏は Fig. 2.1 にあけるように巻線の内側及び外側に遮蔽板として金属導体を同軸にあいた場合について考察している。この場合の特性は Fig. 2.2 にあけるようである。これを 1.1 節で求めた Fig. 1.2 Fig. 1.3 と比較すると特性インピーダンスの傾向は両者一致しているが、位相速度の特性は逆になっている。(即ち Fig. 2.2 で

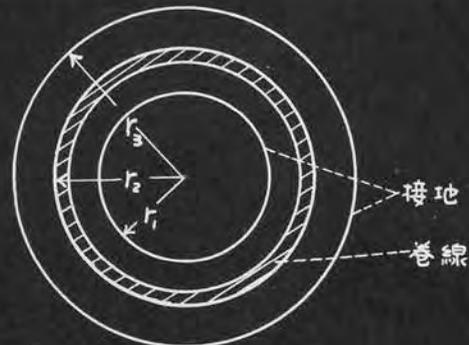
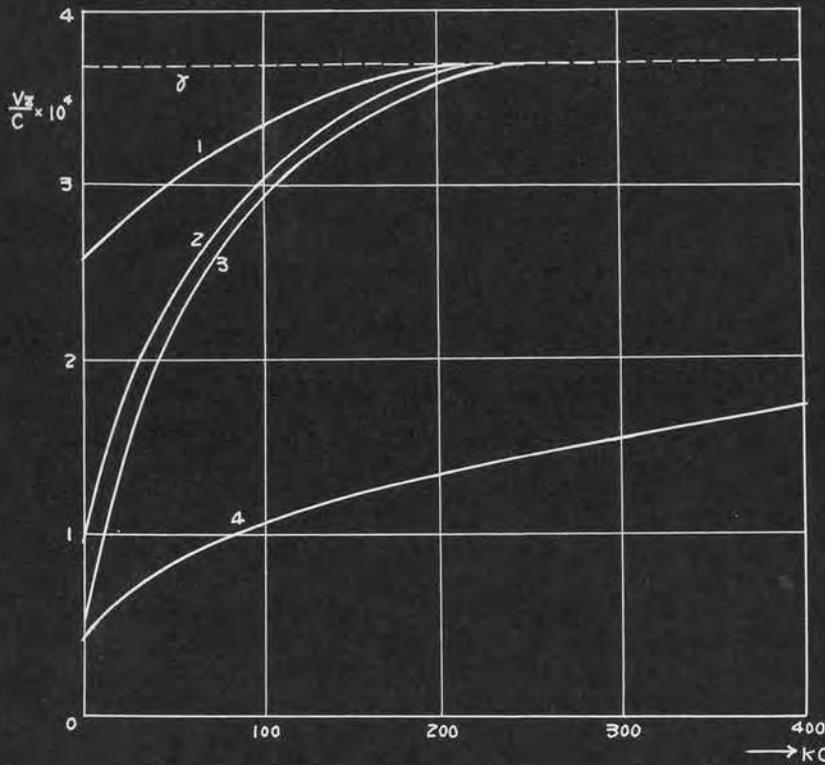


Fig. 2.1



1. 空心 $r_1 = 6.4 \text{ inch}$
 $r_3 = 17.68 \text{ inch}$
2. 内側に同心鉄心
3. 内側及び最外部に同心鉄心
4. 空心 $r_1 = 11.4 \text{ inch}$
 $r_3 = 12.36 \text{ inch}$

は周波数の減少と共に速度も減少し、周波数がある値以上になると一定速度となる。) これは 1.1 節の場合と異なり外側に更に遮蔽板をもつたにもよるが問題の取り扱いは前節で述べた方法と異なる点があるので、この点について述べる。Gauß 単位系を用いると場が $e^{j\omega t - \beta z}$ で変化しているとして、スカラーポテンシャル中は

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$$

$$k = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{c}$$

更に場の軸対称であることから

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}$$

$$- \beta^2 \phi = 0$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$$

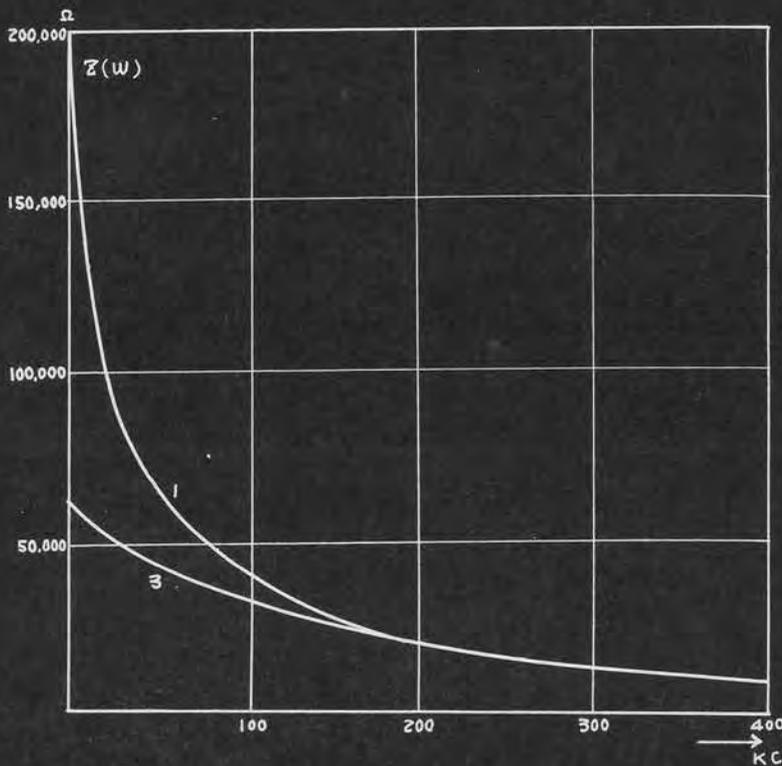


Fig 2.2

境界条件として $r=r_1$ とき $\phi=0$, $r=r_3$ とき $\phi=0$

$$r=r_2 \text{ とき } \Delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \Big|_{r_2} = -4\pi\sigma$$

より $r=r_2$ とき

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{4\pi j \alpha \sigma}{\beta k} \quad (2.1)$$

$$E_z \text{ に対し } K = \frac{\begin{vmatrix} I_1(\beta r_2) & -K_1(\beta r_2) \\ I_0(\beta r_3) & K_0(\beta r_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_0(\beta r_3) & K_0(\beta r_3) \\ I_0(\beta r_2) & K_0(\beta r_2) \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} I_1(\beta r_2) & -K_1(\beta r_2) \\ I_0(\beta r_1) & K_0(\beta r_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_0(\beta r_1) & K_0(\beta r_1) \\ I_0(\beta r_2) & K_0(\beta r_2) \end{vmatrix}}$$

次にベクトルポテンシャル A の計算を行っているが、巻線が密に巻かれている場合だけを考え、ピッチ角 α が非常に小さく A の成分として A_θ だけを計算している。さて A_θ は

$$\frac{d^2 A_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_\theta}{dr} - \left(\beta^2 + \frac{1}{r^2} \right) A_\theta = 0$$

から決定される。境界条件として $r=r_2$ とき巻線上に電流が流れていることから Ampère の法則に従って

$$\Delta \left(\frac{dA_\theta}{dr} \right) \Big|_{r=r_2} = -4\pi I \quad (2.1')$$

さて次に r_1, r_3 における境界条件であるが、その遮蔽板は渦流が流れないやうに軸方向に分割されていると仮定してベクトルポテンシャル A を考える場合には遮蔽板の存在を無視できるとして

$$\left. \begin{array}{l} r \leq r_2 \text{ とき } A_\theta = CI_1(\beta r) K_1(\beta r_2) \\ r > r_2 \text{ とき } A_\theta = CK_1(\beta r) I_1(\beta r_2) \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

(但し C は (2.1') から決定される)

この点で 1.1 節での取り扱いと異なる一つの点がある。遮蔽板を完全導体とすると遮蔽板に細隙が入れられても導体上ではポテンシャルは零となり、この結果磁界の遮蔽板の透過は困難となる。しかし、この事を細かく取り扱うのは困難であるから解析の方法としては、上述のように磁界が全部遮蔽板を透過する場合と 1.1 節のように全く透過しないという場合の二通りが考えられる。変圧器巻線のような構成の場合には近似的に前者に属し、巻線型の遅延線等では後者の場合に近い。(1.2) から

$$r=r_2 \text{ とき } E_\theta = -\frac{j\omega}{c} A_\theta = -j \frac{4\pi I \omega}{\beta c} N(\beta r_2) \quad (2.3)$$

$$\text{但し } N(u) = u I_1(u) K_1(u)$$

次に軸方向の傳播定数を定める特性方程式を求めるために、(2.1)のポテンシャル σ を導入している。導線上において電荷電流の連続式から

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = - \frac{\partial I}{\partial z}$$

$$\text{よって } \frac{\partial I}{\partial z} = \sin \delta \frac{\partial I}{\partial z} = -j \alpha \delta I$$

$$\therefore \frac{\sigma}{I} = \frac{\alpha \delta c}{\omega}$$

導線上 $r = r_2$ で合成電界は導線に垂直であるから

$$E_\theta + \delta E_z = 0 \quad (2.4)$$

上式の E_θ 、 E_z に (2.1) (2.3) を代入して傳播定数に對する特性方程式

$$\frac{\alpha^2 \delta^2 c^2}{\omega^2} = N K \quad (2.5)$$

とされている。(2.4)における E_z は (2.1) からわかるように、スカラーポテンシャル中の z 方向の波動項のために生じたもので、これは、今考えている電磁場の波長が巻線向の距離と同程度にならぬときいてこむ。さきの 1.1 節では (2.4) のやうな考えからは特性方程式を求めないが E_z としはじめからポテンシャル σ を考え、軸方向のベクトルポテンシャル A_z を求め、これらによる電場 E_z を (1.17) (1.14') にみるように特性方程式の決定に用いている。この点、さきの 1.1 節と取り扱ひ方のちがう筈である。

導線の太さが小さく、且単層巻としている今の問題において、 E_z としベクトルポテンシャル A_z による部分を無視したこのやうな方法をえた結論には、若干の疑義を生ずる。

1.3 等價回路との関係

1.1 節においては、電磁界の計算を行つてこれから傳播定数等の回路としての基本量を出した。しかしこの場合は均一な単層巻で導線の太さが無限に小さいと假定した場合であつた。導線の太さが螺旋線半径に比して無視できない場合とか、多層巻等の場合は 1.1 節のやうな方法で考察を進めることは容易でない。又巻線上の電位、電

流の過渡的な状態を表わすことは直接にはできない。しかしながら一方 Poisson の解を用いて回路としての基礎方程式を導くことができる。それで 1.1 節の結果を用いて 2 節で考察する等価回路の基礎を三三検討しよう。

さて (1.24) より巻線上の電位傾度は、

$$\frac{\partial v}{\partial l} = - \frac{\partial}{\partial t} A l \quad (3.1)$$

しかしながら一方ベクトルポテンシャル A は Poisson 積分により

$$A = \int \frac{i' e^{-\alpha r}}{r} d\tau$$

で表わされる。然るに 10^{-7} 秒ぐらいの現象 (軸向距離 数 m) では軸向距離に対する現象の遷延は無視できず

$$A = \int \frac{i'}{r} d\tau$$

今螺線が密に単層に巻かれ、又螺線の太さが螺線の直径 $2a$ に比して無視できるときは、

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int i(x') dx' \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos(\theta - \theta') d\theta}{\sqrt{4a^2 + (x - x')^2 - 2a \cos(\theta - \theta')}} \\ &= \int i(x') M(x - x') dx' \quad (3.2) \end{aligned}$$

次に核函数 $M(x - x') \equiv M(c)$ についてしらべてみよう。上式の如く Neumann の積分に従って計算すると、公知の如く

$$M = \mu_0 a \left\{ \left(\frac{2}{h} - h \right) K(h) - \frac{2}{h} E(h) \right\}$$

で表わされる。但し

$$K(h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{第一種完全楕円積分}$$

$$E(h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - h^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \text{第二種完全楕円積分}$$

$$h^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + c^2}$$

今これを級数に展開すると

$$h^2 \equiv c^2 + 4a^2$$

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi^2 a^4}{(c^2 + 4a^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + 3 \frac{a^2}{h^2} + \frac{75}{8} \frac{a^4}{h^4} + \dots \right)$$

従つて $c \gg 2a$ 即ち直径に比べて十分に軸向距離が大きい場合は、相互インダクタンス M は軸向距離 c の三乗に逆比例して減少する。一方軸向距離 c が $2a$ に比べて小さいときは

$$M = \mu_0 a \left(\log \frac{8a}{c} - 2 \right)$$

で表わされる。従つて $c \rightarrow 0$ のときは、 M は対数的に無限大となる。この c の小さくなる限度は導線の太さ（多層巻のときは、その断面半径）でおさえられる。一方導線の断面の半径 r_0 、環の半径 a なる円形の環状導体の自己インダクタンスは

$$L = \mu_0 a \left(\log \frac{8a}{r_0} - 2 \right)$$

として表わされる。上述の如く M は $c < \delta$ では対数的に大になり $r_0 \rightarrow 0$ 従つて $c \rightarrow 0$ にできるときは、即ち導線が細いときは

$\lim_{c \rightarrow 0} M(c) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} L(r_0)$ で対数的に無限大となり $c > \delta$ では c^3 に逆比例して減少するから

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(c) dc$$

に寄與する部分は大体 $c < \delta$ と考えられる。従つて

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} M(c) dc &\cong 2 \int_0^{\delta} M(c) dc = 2\mu_0 a \delta (\log 8a - 2) - \int_0^{\delta} \log c \cdot dc \\ &= 2\mu_0 a \cdot \delta (\log \frac{8a}{\delta} - 1) \end{aligned}$$

従つて螺旋線の太さが螺旋線の直径に比して充分に小さいときは近似的な意味において $M(c)$ は、 δ 函数的な性質をもつ。即ち (3.2) より

$$\begin{aligned} A &= \int i(x') M(x-x') dx' \\ &= \int M(x-x') \left\{ i(x) + \frac{i'(x)}{1!} (x-x') + \frac{i''(x)}{2!} (x-x')^2 + \dots \right\} dx' \\ &= Li(x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

これに対し、導線の太さ r_0 が a に比して余り小さくないときは、対数的な無限大は現われず磁束は隣接巻線にまである広がりをもち、

従つて相互インダクタンスの自己インダクタンスに對して占める割合が大きくなる。このことは多層巻の場合にもいえるのであつて、

線輪の平均半径を R_0 、断面の幾何学的平均距離を R_d 、巻回数 N とし自己インダクタンスは、

$$L = \mu_0 R_0 N^2 \left(\log \frac{8R}{R_d} - 2 \right)$$

特に断面が半径 a という円であるときは、

$$L = \mu_0 R N^2 \left(\log \frac{8R}{a} - \frac{7}{4} \right)$$

軸間距離 C だけ離れた同じコイルに對する相互インダクタンスは、

$$M = \mu_0 R N^2 \left(\log \frac{8R}{C} - \frac{7}{4} \right)$$

但し $C > a$

となる。従つてこのやうなときは、相互インダクタンスの占める割合が自己インダクタンスに比し無視できなくなるかも知れる。

又巻線間の静電容量は巻線の太さが小さくなるにつれて無視でき、一方逆に巻線の太さが太く、又は多層巻になつていようなときは、その影響は無視できなくなるであらうと考えられる。上述の考察と (3.1) (3.2) (1.25) とから損失を無視すれば一般に

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int M(x-y) i(y) dy \\ \frac{\partial i}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial t} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \right\} (3.4)$$

となることが予想される。但し上の第一式は、もっと一般的に

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \int K(x-x') \{v(x) - v(x')\} dx'$$

となるが、簡単のため隣接間だけの影響を考えた。静電的結合の抗がりは、電磁的結合に比し遮蔽効果等のために小さく、初期分布の実測結果によつてモ一様な K 分布として満足な結果がえられる。又 (3.4) に於いて特に導線が細くて単層巻のときは、近似的に (3.3) から

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} L \int \delta(x-y) i(y) dy = L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned}$$

という LC 線路で表わされることが予想される。

第2節 等價回路による考察

本章1節でのべたのは、理想的な場合の定常状態についての基礎的な考察で、多層巻の場合や過渡的なモードは、等價回路によつて電位電流について考察するのが便利である。一方等價回路によつてこれまで展開定理による内部振動の形で論ぜられて来た、實際有限長の場合の所謂内部振動においては、単純なLC線路を除けば所謂進行波の連続反射として重畳してゆく方法よりも展開定理で考察する方が便利なおことがある。しかしながらこれだけではLC線路における進行波との関連性を見出すことは困難である。又實際問題として波頭附近の考察は展開定理による方法では、級数の収斂がおそれいため困難である。歴史的には、このやうな進行波としての取り扱いは、Rüdenberg 氏の L.C.K 回路について定性的に考察している外は殆んどない。

それで本節では二つの等價回路について、その擬似的な進行波を求めた。ここでいう進行波の意味は現象が媒質中を有限の速さで傳播するという本来の意味をやり、無限長のCRケーブルや熱傳導の問題における $e^{-\alpha x}$ のやうな、従つて周波数によつては無限に速い速度成分をも含む、一方向への現象の傳播をも含めていつたものである。

本節の2.1節ではL.C.K回路の進行波解に因する物理的考察を行い、又有限長の場合の内部振動との解との関連性をしらべた。2.2節では、電磁結合が指数函数で與えられた場合について、主として波頭部分の状況を明らかにした。2.3節では、電磁結合がFourier変換可能な偶函数で與えられる一般的な場合について傳播速度、波動インピーダンス等を導出した。又波頭及び波尾を含む閉じた形の進行波解も、定積分の形で與えることができた。その積分の評価は容易でないが数値積分又は電子計算器によつて定積分を求めれば、その波形をも求めることができるであろう。

2.1 L.C.K分布の半無限長巻線上の進行波

(i) 物理的な考察

ここでは均一な自己インダクタンス分布で近似できる場合について考察する。基礎方程式は、

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t} - K \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2}$$

で表わされる。有限長のときは Wagner 位以来普通よく用いられる公知のものである。上式より

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + LK \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 \quad (1.2)$$

上式にあいて

$$V(x, t) = X(x) T(t)$$

とあいて変数分離により (1.2) の解を求めると、その要素解は

$$T(t) = e^{\pm j\Omega t} \quad X(x) = e^{\pm \alpha x}$$

となる。ここは

$$\Omega^2 = \frac{\alpha^2}{LC + LK\alpha^2} \quad \alpha^2 = \frac{LC\Omega^2}{1 - LK\Omega^2} \quad (1.3)$$

$$\text{ここより } \beta^2 = \frac{1}{LK} \quad \lambda^2 = \frac{C}{K}$$

とあくと $|\Omega| < \beta$ ときは

$$\alpha = \frac{\lambda \Omega}{\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}} \quad (1.3')$$

となり $|\Omega| = \beta$ にあいては、波の密度は無限大となり、波の位相速度は零となる。これを Rüdénberg 位の極限周波数と名付けているところのものである。

$|\Omega| > \beta$ ときは、波の密度 α は虚数となり、従って各要素波は進行しない。即ちこの場合は、

$$\alpha = \frac{\lambda \Omega}{\sqrt{\Omega^2 - \beta^2}} \quad (1.3'')$$

とする。このときの解要素は

$$T(t) = e^{\pm j\Omega t}$$

$$X(x) = e^{-\alpha x}$$

となる。従って進行波型の解とせず、

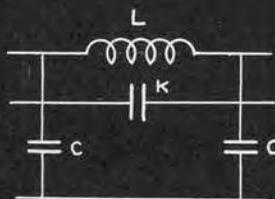


Fig 1.1

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{1}{j\pi} \int_0^\beta F_1(\Omega) \left(e^{j\Omega t} e^{-j\frac{\lambda\Omega}{\sqrt{\beta^2-\Omega^2}}x} - e^{-j\Omega t} e^{j\frac{\lambda\Omega}{\sqrt{\beta^2-\Omega^2}}x} \right) d\Omega \\
 &+ \frac{1}{j\pi} \int_\beta^\infty F_2(\Omega) e^{-\frac{\lambda\Omega}{\sqrt{\Omega^2-\beta^2}}x} \left(e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t} \right) d\Omega \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\beta F_1(\Omega) \sin\left(\Omega t - \frac{\lambda\Omega x}{\sqrt{\beta^2-\Omega^2}}\right) d\Omega \\
 &+ \frac{2}{\pi} \int_\beta^\infty F_2(\Omega) \sin\Omega t e^{-\frac{\lambda\Omega x}{\sqrt{\Omega^2-\beta^2}}} d\Omega \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

のやうな形をとるものと仮定する。

上式で $x=0$, $t=0$ なる $v=E$ という端子条件を満足するた
めには、

$$F_1(\Omega) = F_2(\Omega) = \frac{E}{\Omega}$$

即ち各周波数成分の振幅は、振動数に逆比例するやうにせらるゝと、

$$v = \frac{2E}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\Omega t}{\Omega} d\Omega = \begin{cases} E & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -E & t < 0 \end{cases}$$

であるから (1.4) から、

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{2E}{\pi} \int_0^\beta \frac{1}{\Omega} \sin\left(\Omega t - \frac{\lambda\Omega x}{\sqrt{\beta^2-\Omega^2}}\right) d\Omega + \frac{2E}{\pi} \int_\beta^\infty \frac{1}{\Omega} \sin\Omega t e^{-\frac{\lambda\Omega x}{\sqrt{\Omega^2-\beta^2}}} d\Omega \\
 &\equiv v_1 + v_2 \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

を得る。ところで v_1 は、その三角函数の偏角が負となれば零と規約
する。このことは、 t と x は $K=0$ とすると

$$v_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{2E}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\Omega} \sin\left(\Omega t - \frac{\Omega x}{g}\right) h\left(t - \frac{x}{g}\right) d\Omega \\
 &= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\Omega} \sin\Omega\left(t - \frac{x}{g}\right) d\Omega = E h\left(t - \frac{x}{g}\right)
 \end{aligned}$$

となることと対応している。

(1.5) の初期条件を満足するの否かを調べる。 v_1 は

$$\sqrt{\frac{\beta^2-\Omega^2}{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{K}{C}\Omega^2}$$

という速さで進行する波の要素から成り立っているのであるから、

$$\lim_{t \rightarrow 0} V_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ZE}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t - \frac{\lambda \Omega x}{\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}}) d\Omega \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{一方} \quad \lim_{t \rightarrow 0} V_2 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ZE}{\pi} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin \Omega t}{\Omega} e^{-\frac{\lambda \Omega x}{\sqrt{\Omega^2 - \beta^2}}} d\Omega \\ &= \frac{ZE}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} e^{-\lambda x} d\theta = E e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

従つて初期条件を満足している。次に終局分布を考える。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ZE}{\pi} \int_0^{\beta t} \frac{1}{\theta} \sin(\theta - \frac{\lambda \theta x}{t \sqrt{\beta^2 - (\frac{\theta}{t})^2}}) d\theta = E$$

$$\text{又} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ZE}{\pi} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} e^{-\frac{\lambda \theta x}{t \sqrt{(\frac{\theta}{t})^2 - \beta^2}}} d\theta = 0$$

従つて(1.5)が求める進行波解であることがわかる。

(1.5)において V_1 の方は普通の進行波を表わし、 V_2 の方は、C.K.による直達分を表わしているが、これは進行しない停止波である。従つて初期分布は、 V_2 により興えられ、終局分布は、 V_1 が決定される。初期分布と終局分布とを balance させるために、 V_1 が進行波となつて傳播する。

そこで次に波形の数値計算を容易にし、その大略を知るために次のような近似を行う。先ず V_1 においては各要素はそれぞれ

$v = \sqrt{\frac{\beta^2 - \Omega^2}{\Omega}}$ という異つた進行速度で巻線上を傳播するが、一方波の

振中は周波数に逆比例して減少する。従つてすべての周波数に対して、その進行速度を

$$v_0 = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

で表わされる一様な速度で傳播するものとして近似する。これは各要素波の速さの差による分散効果を見殺したことになる。

次に V_2 は $|\Omega| > \beta$ なる場合に電圧の減衰は、 $e^{-\frac{\lambda \Omega x}{\sqrt{\Omega^2 - \beta^2}}}$ で周波数によつて異なるが、

$$e^{-\lambda x} = e^{-\sqrt{\frac{C}{K}} x}$$

という一様な減衰をなすものとして近似を行うと、

$$\begin{aligned} V &= \frac{ZE}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\sin \Omega(t - \frac{\lambda x}{\beta})}{\Omega} d\Omega + \frac{ZE}{\pi} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin \Omega t}{\Omega} e^{-\lambda x} d\Omega \\ &= \frac{ZE}{\pi} \int_0^{\beta t - \lambda x} \frac{\sin y}{y} dy + \frac{ZE}{\pi} e^{-\lambda x} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\beta t} \frac{\sin y}{y} dy \right) \quad (1.5') \end{aligned}$$

上式によつて数値計算を行い、 $x = 30 \text{ m}$, 300 m , 3000 m の各
 点において波頭の立ち上りの状態を比較したのが Fig. 1.2 Fig. 1.3
 である。但し $\lambda = 5 / \text{km}$, $\beta = 1.5 \times 10^6 / \text{km}$ である。即ち印加電
 圧より充分に離れた点においては極限周波数以上の波による電圧成分
 即ち直達波は (1.5') の第 2 項 $e^{-\lambda x}$ により消滅し従つて進行波だけ
 となる。

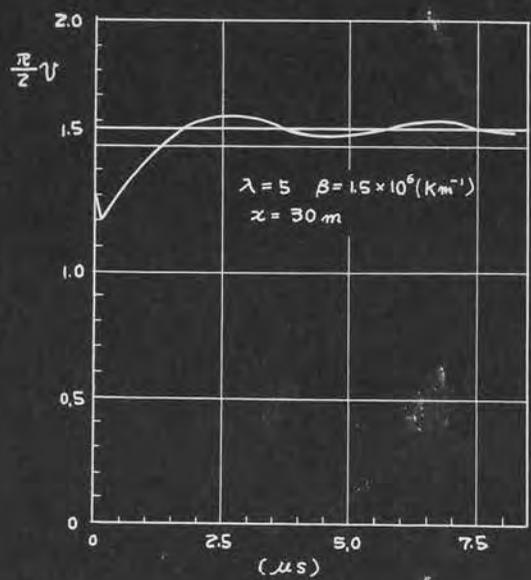


Fig. 1.2 a

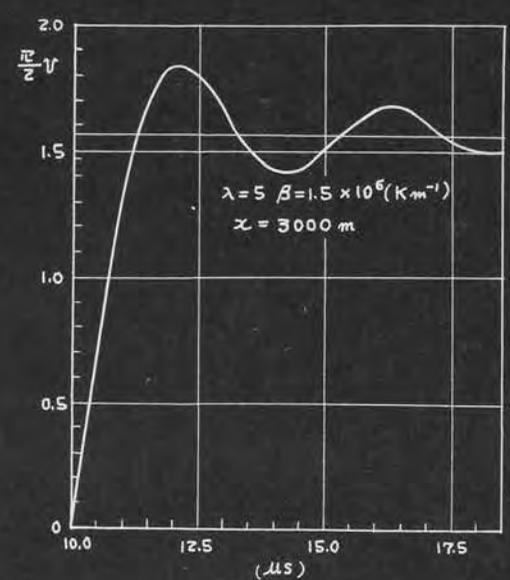


Fig. 1.2 c

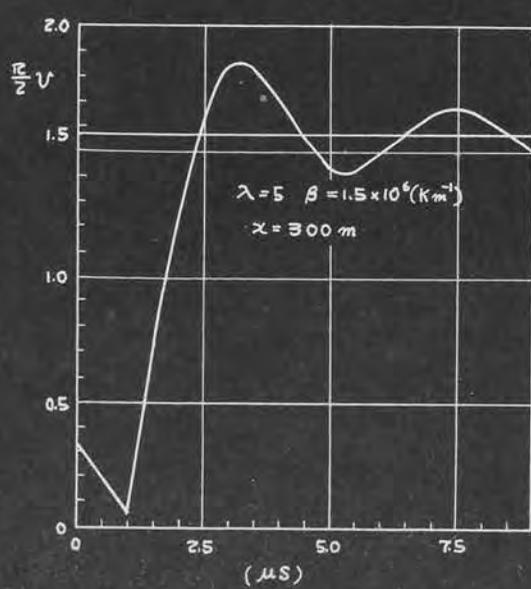


Fig. 1.2 b

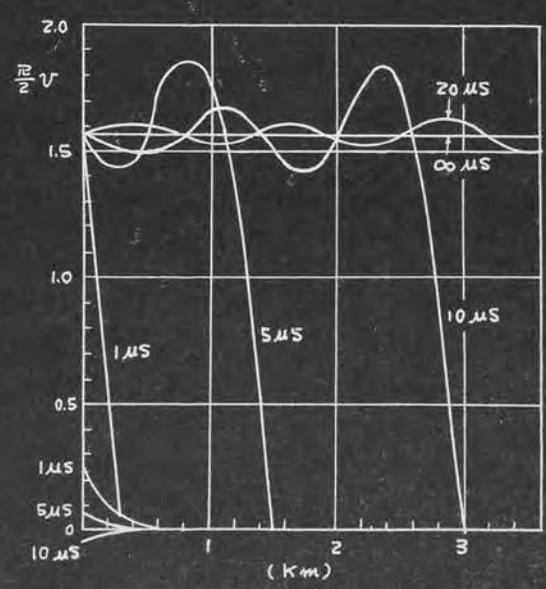


Fig. 1.3

Fig. 1.2 の進行波の立ち上りについて (1.5') の第一項は

$$\beta \left(t - \frac{\lambda x}{\beta} \right) \leq 5$$

のとす。即ち波の到来直後の範囲にふいては

$$S_i \left\{ \beta \left(t - \frac{\lambda x}{\beta} \right) \right\} \cong \beta \left(t - \frac{\lambda x}{\beta} \right)$$

従つて波頭の峻度を波の到着点にふいて引いた接線と来つと波の上昇するに要する時間とは

$$\tau = \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\pi}{2} \sqrt{KL} \quad (1.6)$$

即ち電圧上昇の速さは全く極限周波数 β によつて決定される。Fig. 1.2 では $\beta = 1.5 \times 10^6 / \text{km}$ としているが、これを (1.6) より求めると $\tau = 1.05 \mu\text{s}$ となり図より求めた実際の上昇時間 $\tau = 1.2 \mu\text{s}$ と大体一致している。Fig. 1.2 よりわかる如く、その矩形波と巻線中の波とを比べると、極限周波数の存在のためもとの波頭は平滑となる。しかし電圧は一時的にもとの値より 18% 高くなる。

次に波形を空間的に表わしたのが Fig. 1.3 である。これより進行しない直達波は印加点の近くに減衰分布し、 $\lambda = 51 \text{ km}$ 、 $\beta = 1.5 \times 10^6 / \text{km}$ のときは、印加点より 1 km 以内の範囲に定在する。他方極限周波数以下の進行波は、緩やかな波頭を巻線内で進行してゆく。この波頭の空間的波頭長 H_0 は

$$H_0 = v_0 \tau = \frac{\pi}{2} \frac{v_0}{\beta} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{K}{C}} \quad (1.7)$$

従つて巻線間の静電容量は、結局原波形より急峻な部分を切り取つて、波頭を緩やかにする作用をなすものであることがわかる。

(ii) 復素積分による解

ここでは、演算子解から復素積分により数学的にその解を求めよう。その結果えられる解は厳密解であるが、その物理的意味は (i) と異なり、明瞭を欠く。

$x=0$ で単位電圧印加の場合の解は

$$V = e^{-\delta x} \quad \delta = \sqrt{\frac{LCP^2}{1+LKP^2}} = \frac{\lambda P}{\sqrt{\beta^2 + P^2}}$$

従つて、 $V(P)/P$ は $P = \pm j\beta$ で分岐点をもち、 $P=0$ で極をもつ。それら

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{e^{-\frac{\lambda p x}{\sqrt{\beta^2 + p^2}} + pt}}{p} dp \quad (1.8)$$

において積分路 $\int_{C-j\infty}^{C+j\infty}$ の代わりに Fig 1.4 のやうに $-\infty$ から実軸の下部と実軸に沿い、原点で小円弧で $-\frac{\pi}{2}$ 方向を變じ、 $\mp j\beta$ の分岐点を廻り再び $-\infty$ に実軸に沿うて帰るやうな積分路をえらび、

先ず実軸に沿う積分があるが、これは2箇の分岐点 $\mp j\beta$ を廻った後の積分路 C_{r2} 上の β の値は、もとの C_{r1} 上における β の値と同じであり、又往きと帰りの積分値の符号が逆となるので消滅する。

次に虚軸に沿う積分をしらべる。先ず C_{i3} 上においては、第1象限にあるから β の値は $\frac{j\lambda y}{\sqrt{\beta^2 - y^2}}$ (y , 実数) であるが、分岐点 $+j\beta$ を廻った後の C_{i4} 上の β の値は $\frac{-j\lambda y}{\sqrt{\beta^2 - y^2}}$ となる。符号が逆となる。 C_{i1} , C_{i2} についても同様なことおこる。今、 r_0 , r_{b1} , r_{b2} 等の特異点周辺の円弧の半径を零に極限せしめるとき、虚軸に沿う積分 I_i は、

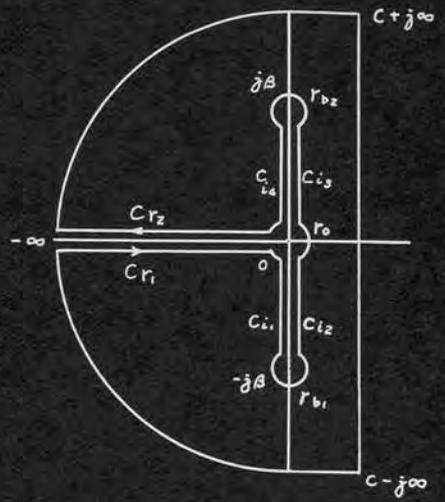


Fig 1.4

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{C_{i1} + C_{i2} + C_{i3} + C_{i4}} = \int_{C_{i1}} + \int_{C_{i4}} + \int_{C_{i2}} + \int_{C_{i3}} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^\beta \frac{e^{-\frac{j\lambda y}{\sqrt{\beta^2 - y^2}} x + jyt}}{y} dy + \frac{1}{2\pi j} \int_\beta^0 \frac{e^{-\frac{-j\lambda y}{\sqrt{\beta^2 - y^2}} x + jyt}}{y} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^\beta \frac{\sin \frac{\lambda y}{\sqrt{\beta^2 - y^2}} x}{y} e^{jyt} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\beta \frac{\sin \frac{\lambda y x}{\sqrt{\beta^2 - y^2}}}{y} \cos yt \, dy \end{aligned}$$

原点の周りの積分は、小円の半径 r_0 を零に近迫せしめるときは

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi j} \int r e^{j\theta} \frac{e^{-\frac{\lambda p x}{\sqrt{\beta^2 + p^2}}}}{p} r e^{j\theta} j d\theta = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} j d\theta = 1$$

分岐点の周りの積分は、小円の半径 r_{b1} , r_{b2} を零に近迫せしめると、零に収斂する。従つて求める時間函数 $v(x,t)$ は、

$$v(x,t) = \int v(x,p) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\beta \frac{\sin \frac{\lambda \Omega x}{\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}}}{\Omega} \cos \Omega t \, d\Omega \quad (1.9)$$

(iii) 内部振動との関係

有限長の場合には、展開定理によつて空向高調波の形で内部振動が論ぜられてゐる。今巻線の長さを充分に長くすれば半無限長の解つまり他端からの反射の重疊しない解即ち進行波解がえられる筈である。これは解析的には、Fourier級数の周期 T の無限大への極限移行を行つてFourierの積分に達するのと同様であらうが、このよふ操作によつても内部振動と進行波現象との一つの関係がみられるであらう。所謂L.C.K回路のとき、端子条件として

$$x=0 \quad v=1 \quad x=l \quad v=0$$

のときの解は

$$v = \frac{l-x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\frac{n\pi}{l}(\lambda^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2})} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{\frac{n\pi}{l}t \cdot \beta}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}}} \cdot \frac{\pi}{l} \quad (1.10)$$

ここで $l \rightarrow \infty$ とすると進行波解がえられる筈である。但し $\lambda^2 = \frac{C}{K}$ 、 $\beta^2 = \frac{1}{KL}$ 、 $\Delta \frac{\pi}{l} = \Delta \tau$ とおくと

$$\lim_{l \rightarrow \infty} v(x, t) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \sin \tau x \cos \frac{\beta \tau t}{\sqrt{\lambda^2 + \tau^2}}}{\tau (\tau^2 + \lambda^2)} d\tau \quad (1.11)$$

上式は、先ず $x=0$ で $v=1$ という端子条件を満足する。

又 $t \rightarrow 0$ で

$$\lim_{t \rightarrow 0} v(x, t) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \sin \tau x}{\tau (\lambda^2 + \tau^2)} d\tau = e^{-\lambda x}$$

という初期条件を満足する。又終局分布は、 $\tau t = \theta$ として

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \sin \frac{\theta}{\tau} x \cos \frac{\beta \theta}{\sqrt{\lambda^2 + (\frac{\theta}{\tau})^2}}}{\lambda^2 + (\frac{\theta}{\tau})^2} \frac{d\theta}{\theta} = 1$$

従つて(1.11)の条件に適する解であることがわかる。(1.10)の代わりに他端開放の場合の解を用いても(1.11)をえらことは、いうまでもない。其次に

$$\Omega = \frac{\beta \tau}{\sqrt{\lambda^2 + \tau^2}}$$

に変数を変換すると

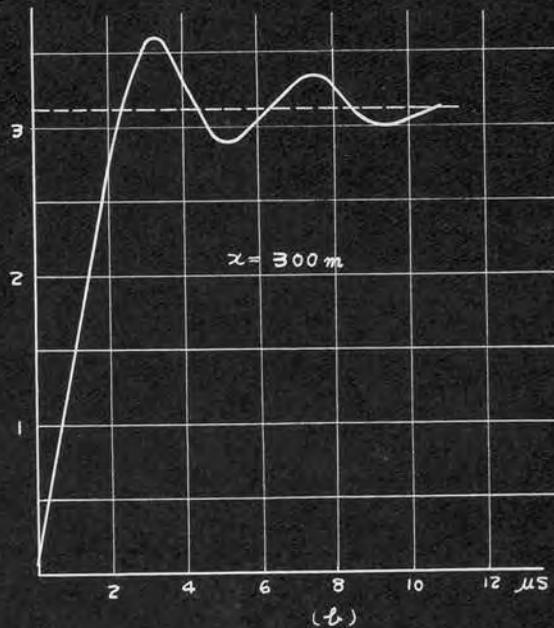
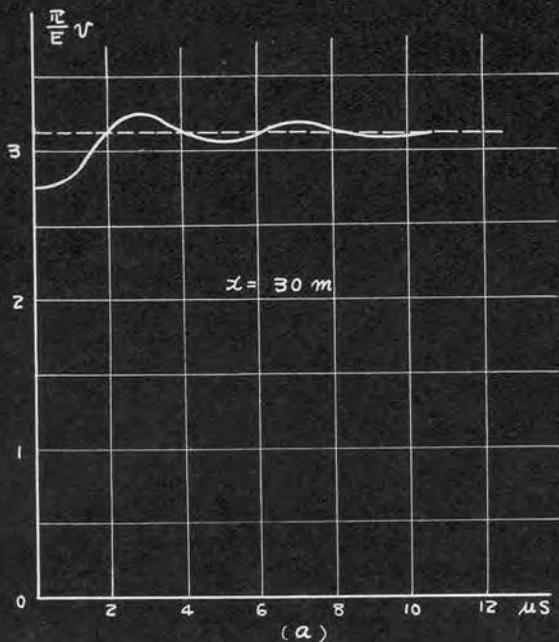
$$v = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\sin \frac{\lambda \Omega x}{\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}} \cos \Omega t}{\Omega} d\Omega \quad (1.12)$$

上にえた解は、(1.5)と異なり厳密な解で(1.9)及び2.3節の(3.26)と一致する。しかしながらその解自身の物理的意味は、必ずしも明瞭でない。上の積分解の評価は直ちにほ行えないので(i)と同じ

く正弦積分に近似してみよう。即ち

$$v = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\sin \frac{\lambda \Omega x}{\beta} \cos \Omega t}{\Omega} d\Omega \quad (1.12')$$

(1)の結果と比較するため定数を、 $\lambda = 5/\text{km}$, $\beta = 1.5 \times 10^6/\text{km}$ にとり、 $x = 30, 300, 3000 \text{ m}$ の各値について描いたものが Fig 1.5 であるが、直達分の様子も若干異なっている外は *overswinging* の現象



等、その大要は Fig 1.2 と大同小異である。

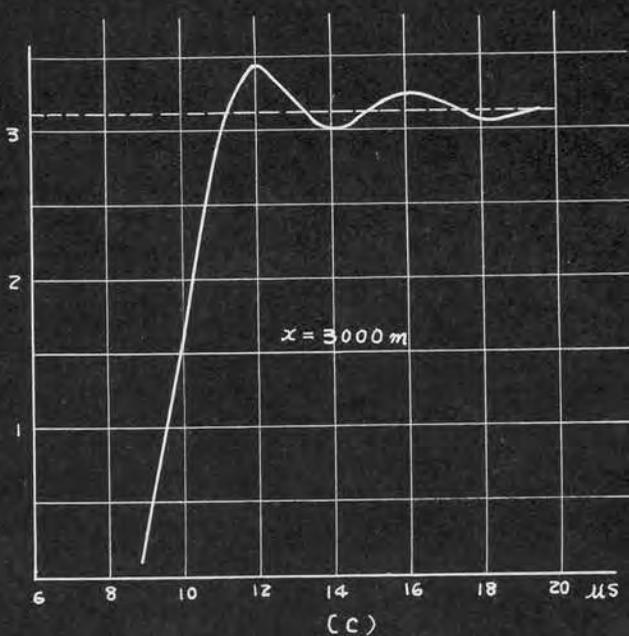


Fig 1.5

(iv) 損失による減衰がある場合

帰路導体として薄層鉄板等を用いられていて、進行波現象における波頭部を主に考察する場合には損失を表わすものとして \sqrt{P} 近似を用いねばならぬが、銅板等を用いられていて損失による減衰を表わすものとして直列抵抗を等価せられる場合について、さきの (iii) と同様にしてその解を求め、その大体の性質をしらべる。

有限長で $x=0$ で $v=1$, $x=l$ で $v=0$ のとき

$$v = \frac{l-x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{l} x}{\frac{n\pi}{l} (\lambda^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2})} e^{-\delta t} \frac{\pi}{l} \times \left(\cos \omega_n t + \frac{\delta}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \quad (1.13)$$

$$\text{但し } \omega_n = \sqrt{\frac{\beta^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}{\lambda^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}} - \delta^2}$$

従って $\Delta \tau = \frac{\pi}{l}$ として、進行波解は

$$\begin{aligned} v &= \lim_{l \rightarrow \infty} v(x, t, l) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 e^{-\delta \tau} \sin \tau x}{\tau (\tau^2 + \lambda^2)} \left\{ \cos \Omega(\tau) t + \frac{\delta}{\Omega(\tau)} \sin \Omega(\tau) t \right\} d\tau \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau_0} \frac{\lambda^2 e^{-\delta \tau} \sin \tau x}{\tau (\tau^2 + \lambda^2)} \left\{ \cosh \sqrt{-\Omega^2} t + \frac{\delta}{\sqrt{-\Omega^2}} \sinh \sqrt{-\Omega^2} t \right\} d\tau \\ &\quad - \frac{2}{\pi} e^{-\delta \tau_0} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\lambda^2 \sin \tau x}{\tau (\tau^2 + \lambda^2)} \left\{ \cos \Omega(\tau) t + \frac{\delta}{\Omega(\tau)} \sin \Omega(\tau) t \right\} d\tau \end{aligned}$$

$$\text{ただし } \Omega(\tau) = \sqrt{\frac{\beta^2 \tau^2}{\lambda^2 + \tau^2} - \delta^2} \quad \tau_0 = \frac{\lambda \delta}{\sqrt{\beta^2 - \delta^2}}$$

通常 $\tau_0 \ll 1$ であるから、上式は近似的に

$$v(x, t) \cong 1 - \frac{2}{\pi} e^{-\delta t} \int_0^{\beta} \frac{\sin \frac{\lambda \Omega x}{\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}}}{\Omega} (\cos \Omega t + \frac{\delta}{\Omega} \sin \Omega t) d\Omega \quad (1.14)$$

従って、 β とおぼし上式を (1.12') におけるやうに正弦積分に近似した場合、Fig. 1.5 における *overswinging* の現象は減衰のために減少し、早く消滅する。

2.2 指数函数^{分布}をもつ半無限長巻線に沿う進行波

(i) 波頭部分の考察

先づ、この場合の演算子解を求め波頭部に関し若干の考察を行う。
基礎方程式は

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dV}{dx} &= MP \int_0^{\infty} e^{-m|x-y|} I(y) dy \\ -\frac{dI}{dx} &= CPV - KP \frac{d^2V}{dx^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

上式より

$$\frac{d^2V}{dx^2} = mMP \left\{ -\int_0^x e^{-m(x-y)} I(y) dy + \int_x^{\infty} e^{-m(y-x)} I(y) dy \right\} \quad (2.2)$$

$$\frac{d^3V}{dx^3} = mMP \left\{ -2I(x) + \frac{m}{MP} \frac{dV}{dx} \right\}$$

上式と (2.1) から

$$\frac{d^4V}{dx^4} - \frac{d^2V}{dx^2} (m^2 + 2mMKP^2) + 2mMCP^2V = 0 \quad (2.3)$$

という微分方程式をえる。従ってその演算子解は

$$V = Ae^{-\alpha x} + Be^{-\beta x} + Ce^{\alpha x} + De^{\beta x} \quad (2.4)$$

この進行波解は $x \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$ で零に等らねばならぬから

$$V = Ae^{-\alpha x} + Be^{-\beta x}$$

積分定数 A, B は (2.1) (2.2) から導かれる次の附帯条件式

$$x=0 \text{ で } m \frac{dV}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2} \quad (2.5)$$

及び源泉における単位電圧印加の端子条件

$$x=0 \text{ で } V = E h(t) \quad (2.6)$$

により決定される。従って求める演算子解は

$$V = \frac{E}{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha+m)} \left\{ \beta(\beta+m)e^{-\alpha x} - \alpha(\alpha+m)e^{-\beta x} \right\} \quad (2.7)$$

但し傳波定数 α, β は

$$\left. \begin{aligned} \alpha \\ \beta \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[m^2 + 2mMKP^2 \pm \sqrt{(m^2 + 2mMKP^2)^2 - 8mMCP^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2mMKP^2 + \sqrt{8mMCP^2 + m^2}} + \sqrt{2mMKP^2 - \sqrt{8mMCP^2 + m^2}} \right]$$

こゝに $e^{-\beta x}$ は、これより定性的に普通に知られているもの、つまり

り。L, C, K回路の進行波の傳播と関連をもちているものである。
即ち $t \rightarrow 0$ において

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \beta = \lambda - \frac{\lambda}{2LKp^2} - 0 \left(\frac{1}{p^2} \right) \quad (2.9)$$

で $t = +0$ で、C, Kによる直達分を含む。但し、 $\lambda^2 = \frac{C}{K}$, $L = \frac{2M}{m}$ である。一方先のL, C, K分布では、傳播定数 γ は

$$\gamma = \sqrt{\frac{LCP^2}{1+LKP^2}} = \lambda - \frac{\lambda}{2KLP^2} - 0 \left(\frac{1}{p^2} \right)$$

となるから波頭の立ち上り部分は所謂L, C, K分布のそれと同様である。又、Kが無視できる程小さく、mMが大きいときは

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \beta = \frac{1}{2} (\sqrt{8mMCP + m^2} - \sqrt{-8mMCP + m^2}) = \sqrt{LC} p$$

となり、LC線路との対応がわかる。

(2.7)の第1項の $e^{-\alpha x}$ という項は、この回路に新しく導入されたものである。

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha = pm\sqrt{LK} + \frac{1}{p} \left(\frac{m}{\sqrt{LK}} - \frac{1}{2m} \frac{\lambda^2}{\sqrt{LK}} \right) + \dots \quad (2.10)$$

となり $\frac{1}{m\sqrt{LK}}$ という速さで傳播する波を表わす。

次に波頭部分について考察する。

$$e^{-\alpha x} = e^{-pm\sqrt{LK}x} \left\{ 1 - \frac{1}{p} \left(\frac{m}{\sqrt{LK}} - \frac{1}{2m} \frac{\lambda^2}{\sqrt{LK}} \right) + \dots \right\}$$

$$e^{-\beta x} = e^{-\lambda x} \left\{ 1 + \frac{1}{2KLP^2} + \dots \right\}$$

等から(2.7)に(2.9)(2.10)を代入して計算すると

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} v &= E e^{-\lambda x} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2 + \lambda m}{p^2 m^2 LK} + \dots \right\} \\ &= E \frac{\lambda^2 + m\lambda}{p^2 m^2 LK} e^{-pm\sqrt{LK}x} \left\{ 1 - \frac{1}{p\sqrt{LK}} \left(1 + m - \frac{\lambda^2}{2m} \right) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

上式からも明らかのように β 波の方は、静電的な直達分を表わしその立ち上りは正である。 α 波の方は波頭の $\frac{1}{m\sqrt{LK}}$ の速さで進行する波を表わすがその立ち上りは負から始まることかわかる。この成分は m^2 , $\frac{2M}{m}$, Kが小さい程甚だしく電磁結合を表わす指数 m のこの現象にも大きな役割を果していることがわかる。これは、例えば従来不明であった変圧器巻線の中性点近く(この部分では初期における β 波成分は小さい)に表われる負性先行電圧の実験結果ならぬに1章1.6節 Fig. 6.7の内部振動の計算波形における初期の負の

偏振 (swing) を定性的に説明しているものと考えられる。

次にサ-キインピーダンスを求める。(2.1)から

$$I = \frac{A}{Z\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{B}{Z\beta} e^{-\beta x}$$

$$\text{従って } Z\alpha = \frac{-2mMP}{\alpha(\alpha^2 - m^2)}$$

$$Z\beta = \frac{-2mMP}{\beta(\beta^2 - m^2)}$$

(ii) 定積分形との與えられた解

1章 1.2節 (2.16) の結果から有限長で中性良接地における解は近似的に

$$V(x, t) \cong E \frac{l-x}{l} - 2 \frac{E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}) \frac{n\pi}{l}} \frac{\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \omega_n t \quad (2.12)$$

但し $x=0$ での $V = E h(t)$, $x=l$ での $V = 0$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{n^4 \pi^4}{l^4} + m^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}{2mMC + 2mKM \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}}$$

解

上式から 2.1節 iii の方法に従って進行波を求めるとあるが、上式は高調波の次数が大である程、急激に近似度が高くなるのであるから、波頭附近では上式を基礎とした進行波解は相当によい近似を與えることが予想される。

$$\Delta \tau = \frac{\pi}{l}, \quad \tau = \frac{n\pi}{l} \quad \text{として}$$

$$V = \lim_{l \rightarrow \infty} V(x, t, l) = E - \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \sin \tau x \cos \sqrt{\frac{\tau^4 + m^2 \tau^2}{2mMC + 2mM\tau^2}} t}{(\lambda^2 + \tau^2) \tau} d\tau \quad (2.13)$$

上式は、端子条件及び初期条件を満足するが、この結果は Fourier 積分で求めた 2.3節 (3.27) の結果と一致する。従ってこれは両方の解であるが、その積分の評価を簡単に行うことができない。しかしながら数値積分又は電子計算器によれば解の全貌を知ることが出来る。

2.3 一般的論議

相互誘導作用の効果についてこれまでしらへて来たのは、核函数が限られた形の函数でこれについてや、技巧的に特殊的に解析を進めたのである。勿論この特殊な函数即ち、指数函数、一次函数は幸いにも實際に近く理論的にも使い易い函数であるから、少くとも螺旋的の巻線の問題に關しては、やゝ一般的立場から考察を進めることができた。ここでは電磁誘導を表わす函数が Fourier 変換可能な偶函数で與えられるやゝ一般の場合について考察を広げる。即ち光の巻線が両方向に無限に広がっている場合について、D'Alembert 的の解を求める。このやうな解析は Steidiger 氏の特殊な場合について解を求めた。ここでは巻線間の静電容量も考慮に入れて初期分布を與えてその完全解を求め種々の相互誘導分布函数に對して解を求めた。次にこの結果を用いて、半無限長巻線に單位電圧を印加した場合の解を求めた。次に無限長巻線の位相速度の式を用いて有限長巻線の内部振動の近似解を求めることができるこれは既に第 1 章においてのべた。

(i) 両方向に広がっている無限長巻線の場合

今巻線上 x 点における電位を $v(x, t)$ 電流を $i(x, t)$ とし、 $x \sim \xi$ 間の相互誘導函数を $L(x - \xi)$ とすると基礎方程式は

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{\infty} L(x - \xi) \frac{\partial i(\xi, t)}{\partial t} d\xi \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial v}{\partial t} - K \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} \end{aligned} \right\} (3.1)$$

但し $L(x - \xi)$ は $x - \xi$ の偶函数で Fourier 変換が可能であるとす

上式より電流 $i(x, t)$ に關して

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = C \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - K \frac{\partial^4 v}{\partial t \partial x^3}$$

即ち

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \{ CL(x - \xi) - KL''(x - \xi) \} \frac{\partial^2 i(\xi)}{\partial t^2} d\xi \quad (3.2)$$

$L(x - \xi)$ が

$$L(x - \xi) = L_0 \delta(x - \xi)$$

という δ 函数のときはよく知られた L, C, K 回路の基礎微分方程式となる。何故やら δ 函数の性質により、部分積分によつて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(x-\xi) i(\xi) d\xi = \frac{d^2 i(x)}{dx^2}$$

が成立するから (3.2) は

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t} - KL_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2 \partial x^2}$$

とあるからである。極 (3.2) にふいて

$$i(x, t) = f(x)g(t) \quad \text{とすれば} \quad g(t) = e^{j\omega t}$$

となり

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \{CL(x-\xi) - KL''(x-\xi)\} f(\xi) d\xi \quad (3.3)$$

とある。次に v に關する方程式をたてる。(3.1) から

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} L'(x-\xi) \frac{\partial i(\xi, t)}{\partial t} d\xi \\ &= -\left[L(x-\xi) \frac{\partial i(\xi)}{\partial t} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} L(x-\xi) \frac{\partial^2 i(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} d\xi \end{aligned}$$

今巻線の無限長のときは

$$\left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_{\xi=\pm\infty} = 0$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\int_{-\infty}^{\infty} L(x-\xi) \frac{\partial^2 i(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} d\xi \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left(C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - K \frac{\partial^2 v}{\partial t^2 \partial \xi^2} \right) L(x-\xi) d\xi \end{aligned}$$

上式の第一項を部分積分して

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

に留意すると

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = C \int_{-\infty}^{\infty} L(x-\xi) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\xi - K \int_{-\infty}^{\infty} L''(x-\xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi \quad (3.2')$$

このやうにして (3.2) と同一の方程式とみる。

極次に (3.3) に基づいて考察を進める。今核函数を

$$M(x-\xi) \equiv CL(x-\xi) - KL''(x-\xi) \quad (3.4)$$

とみると $L(x-\xi)$ が偶函数であるから $M(x-\xi)$ も偶函数である。

(3.3) より

$$f''(x) = -\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} M(x-\xi) f(\xi) d\xi \quad (3.5)$$

先ず核函数 $M(x-\xi)$ を Fourier 積分で表わすと

$$M(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M^*(k) \cos kz dz \quad (3.6)$$

ここに

$$M^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} M(q) \cos(qk) dq \quad (3.6')$$

である。これを (3.5) に代入して

$$f''(x) = -\frac{\omega^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} M^*(k) \cos k(x-\xi) dk \quad (3.7)$$

然るに Fourier 積分定理より

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos[k(x-\xi)] d\xi$$

であるから

$$f''(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos k(x-\xi) d\xi \quad (3.8)$$

従って (3.7) と (3.8) とより

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{k^2 - \omega^2 M^*(k)\} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(x-\xi) k d\xi = 0$$

簡単のため

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos[k(x-\xi)] d\xi$$

とすると

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{k^2 - \omega^2 M^*(k)\} \Phi(k) dk = 0$$

従って

$$\left. \begin{array}{ll} k = n & \text{のとき} & n^2 = \omega^2 M^*(n) \\ k \neq n & \text{のとき} & \Phi(k) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

従って $f(x)$ は 直交函数系を作ることをわがさる。即ち

$$f(x) \equiv \text{const} \cdot e^{inx} \quad (3.10)$$

上式の正しいことは、次のやうにしてわがさる。即ち (3.10) を (3.5)

に代入して

$$-n^2 e^{inx} = -\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} M(x-\xi) e^{in\xi} d\xi$$

$$\therefore n^2 = \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} M(x-\xi) e^{in(x-\xi)} d\xi$$

であるから

$$n^2 = \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} M(q) e^{-inq} dq = \omega^2 M^*(n)$$

このやうにして (3.9) を証明された。

従つて (3.2) (3.2') と同形の方程式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} M(x-\xi) \frac{\partial^2 F(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi$$

の解は, Cauchy の形式に従うときは,

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A(\alpha) e^{in(\alpha-x-\frac{t}{\sqrt{M^*(n)}})} \right. \\ \left. + B(\alpha) e^{in(\alpha-x+\frac{t}{\sqrt{M^*(n)}})} \right\} dn d\alpha \quad (3.11)$$

で表わされる。但し $A(\alpha)$ $B(\alpha)$ は、初期条件により決定される任意の函数である。次に

$$t=0 \text{ のとき } F(x) = f(x), \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \varphi(x) \quad (3.12)$$

という初期条件を満足するやうに $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ を決定してみよう。(3.11) から

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A(\alpha) e^{in(\alpha-x-\frac{t}{\sqrt{M^*(n)}})} \right. \\ \left. - B(\alpha) e^{in(\alpha-x+\frac{t}{\sqrt{M^*(n)}})} \right\} \frac{n}{\sqrt{M^*(n)}} dn d\alpha \quad (3.13)$$

とある。(3.11) を

$$A(\alpha) + B(\alpha) = f(\alpha)$$

とすると

$$F(x, t)_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dn \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos n(\alpha-x) d\alpha = f(x)$$

同様に

$$-\frac{in}{\sqrt{M^*(n)}} [A(\alpha) - B(\alpha)] = \varphi(\alpha)$$

と試索的にあくと、(3.13)から

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi(x)$$

となる。従って

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{2} \left[f(\alpha) + \frac{i\sqrt{M^*(n)}}{n} \varphi(\alpha) \right] \\ B(\alpha) &= \frac{1}{2} \left[f(\alpha) - \frac{i\sqrt{M^*(n)}}{n} \varphi(\alpha) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

とえらぶと(3.11)は初期条件を満足する。従って(3.11)に(3.14)を代入すれば

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dn \int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \cos n \left(\alpha - x + \frac{t}{\sqrt{M^*(n)}} \right) d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dn \int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \cos n \left(\alpha - x + \frac{t}{\sqrt{M^*(n)}} \right) d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^\infty \cos n(\alpha - x) \sin \frac{nt}{\sqrt{M^*(n)}} \frac{\sqrt{M^*(n)}}{n} dn \end{aligned} \quad (3.15)$$

但し、 $M^*(n)$ は(3.4)(3.6')から

$$M^*(n) = CL^*(n) - KL^{*''}(n) \quad (3.16)$$

(3.15)より

$$\omega = \frac{n}{\sqrt{M^*(n)}} \quad \omega; \text{角周波数} \quad (3.17)$$

であることがわかる。又各々の角周波数成分の位相速度は、

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{M^*(n)}} \quad (3.18)$$

となる。(3.15)は、初期分布(3.12)が、與えられたときの電流又は電位に関する完全解である。

今、電位に関する初期条件が與えられた

$$V(x, t) \equiv F(x, t)$$

とするとき(3.1)に(3.15)を代入して

$$\begin{aligned} i &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dn}{\sqrt{M^*(n)}} (c + \kappa n^2) \int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \cos n \left(\alpha - x - \frac{t}{\sqrt{M^*(n)}} \right) d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dn}{\sqrt{M^*(n)}} (c + \kappa n^2) \int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \cos n \left(\alpha - x + \frac{t}{\sqrt{M^*(n)}} \right) d\alpha \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C + Kn^2}{n} \cos \frac{nt}{\sqrt{M^*(n)}} \sin n(\alpha - x) dn \quad (3.19)$$

従つて、これより $\varphi(\alpha) = 0$ のときを考へると、各々の波要素即ち角周波数 ω に對する波動インピーダンスは、

$$Z(\omega) = \frac{\sqrt{M^*(n)}}{C + Kn^2} \quad (3.20)$$

となることを示す。

例1. LC線路

このとき $K = 0$ であり、又 $L(q) = L_0 \delta(q)$

従つて (3.16) より

$$M^*(n) = CL^*(n) = L_0 C \int_{-\infty}^{\infty} \delta(q) \cos qn dq = L_0 C = \frac{1}{g^2}$$

従つて (3.15) より D'Alembert の解

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \{ f(x - gt) + f(x + gt) \} + \frac{1}{2} \int_{x-gt}^{x+gt} \varphi(\alpha) d\alpha$$

を得る。

例2. L, C, K回路

この場合は $M(q) = CL_0 \delta(q) - KL_0 \delta''(q)$

(3.6') より

$$M^*(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ CL_0 \delta(q) - KL_0 \delta''(q) \} \cos(qn) dq$$

示すに:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) dx = -f'(0)$$

であるから

$$M^*(n) = CL_0 + KL_0 n^2$$

$$\therefore g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{M^*(n)}} = \frac{1}{\sqrt{CL_0 + KL_0 n^2}}$$

$$\therefore \omega = \frac{n}{\sqrt{CL_0 + KL_0 n^2}}$$

より

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{1 - kL_0 \omega^2}{CL_0}}$$

又波動インピーダンスは (3.20) から

$$\bar{z}(\omega) = \sqrt{\frac{L_0(1 - kL_0 \omega^2)}{C}}$$

例3. mC回路

$$M(q) = e^{-m|q|} \quad \text{であるから}$$

$$M^*(n) = \frac{2mCm}{m^2 + n^2}$$

各々の波要素の速度成分 $g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{M^*(n)}}$ は, $m=0$ のとき, 無限大となる. 又 $m \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ である. $\frac{2M}{m} = L_0$ の有限確定値をもちきよは例1の D'Alembert の解となることかわかる。

例4. m, C, K回路

$$M(q) = M e^{-m|q|} - k \frac{\partial^2}{\partial q^2} M e^{-m|q|}$$

$$\begin{aligned} \therefore M^*(n) &= \frac{2Mm}{m^2 + n^2} - KM \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} e^{-m|q|} \right) \cos qn dq \\ &= \frac{2Mm(C + Kn^2)}{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

上式で $m \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ である. $L_0 = \frac{2M}{m}$ という確定値が存在することよは例2に帰着する. 次に傳播定数 n の角周波数 ω に対する関係をしらべてみる. (3.17) から

$$\omega^2 = \frac{n^2(m^2 + n^2)}{2Mm(C + Kn^2)}$$

$$\therefore n^2 = \frac{-(m^2 - 2mMK\omega^2) \pm \sqrt{(m^2 - 2mMK\omega^2)^2 + 8mMC\omega^2}}{2} \quad (3.21)$$

これは先にも本章2.2節(2.8)で述べた結果と一致する. 又位相速度及波動インピーダンスは

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2Mm(C + Kn^2)}}$$

$$\bar{z}(\omega) = \sqrt{\frac{2Mm}{(C + Kn^2)(m^2 + n^2)}}$$

と與えられる. (3.21) により $g(\omega)$, $\bar{z}(\omega)$ を ω の函数とすると

これらは、夫々二値函数に分れる。

例5 $L(q) = M_0 e^{-mq^2}$ で與えられるとき

この場合は

$$L^*(n) = M_0 \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{-\frac{n^2}{4m^2}}$$

であるから

$$M^*(n) = M_0 \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{-\frac{n^2}{4m^2}} (c + kn^2)$$

よて

$$\omega = \frac{n}{\sqrt{M^*(n)}}$$

であるから、これから ω と n との関係が定まり (3.18) (3.20) から $g(\omega)$, $z(\omega)$ 等の周波数特性を算定することが出来る。

例6. $L(q) = \frac{M_0}{1 + (\alpha q)^2}$ で與えられるとき

このときの特性量 $M^*(n)$ は

$$M^*(n) = M \frac{\pi}{\alpha} e^{-|\frac{n}{\alpha}|} (c + kn^2)$$

で與えられる。

(ii) 半無限長巻線の場合

さきの (i) に於ける (3.17) (3.18) (3.20) から角周波数 ω に對する傳播定数、位相速度、波動インピーダンス等の基本的な量を求めることができたが、一方その過渡解は (3.15) の如く二重積分の形で複雑である。それで初期条件として單位函数的な分布を與え、見易い形になおすと、これは同時に半無限長の場合の解を與える。單位函数的な初期分布をいって、静電的な C, K による直達分の存在に注意せねばならぬ。即ち $t \rightarrow +0$ に於ける分布を改めて求めねばならぬ。よて基本方程式 (3.1) に於いて $t = +0$ でインテグレーションの中には電流は流れないから第二式について考察すればよい。今 $t = -0$

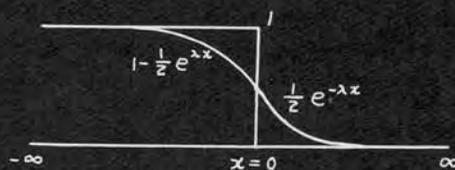


Fig 3.1

いふに $x < 0$ を一定電圧に充電してあり、 $t = 0$ において $x > 0$ を充電するに $x = 0$ に用意されたスイッチを閉じると $t \rightarrow +0$ で

$$\left. \begin{aligned} x < 0 \quad \text{で} \quad C p V - K p \frac{d^2 V}{d x^2} &= C p \\ x > 0 \quad \text{で} \quad C p V - K p \frac{d^2 V}{d x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (3.22)$$

が成り立つ。これと、 $x \rightarrow \pm \infty$ で場が有界にととまらねばならぬことから

$$\begin{aligned} x < 0 \quad \text{で} \quad V_l &= A e^{\lambda x} + 1 \\ x > 0 \quad \text{で} \quad V_r &= B e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

$x = 0$ で電位及電位傾度が連続であることから

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \text{で} \quad V_l &= V_r \\ \frac{d V_l}{d x} &= \frac{d V_r}{d x} \end{aligned}$$

従って

$$\left. \begin{aligned} x < 0 \quad \text{で} \quad V &= -\frac{1}{2} e^{\lambda x} + 1 \\ x > 0 \quad \text{で} \quad V &= \frac{1}{2} e^{-\lambda x} \end{aligned} \right\} (3.23)$$

である。(3.23)を(3.15)に代入し、且、 $\varphi(\alpha) = 0$ とすると

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dn \int_{-\infty}^0 (1 - \frac{1}{2} e^{\lambda \alpha}) \cos n(\alpha - x - \frac{t}{\sqrt{M^*(n)}}) d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dn \int_{-\infty}^0 (1 - \frac{1}{2} e^{\lambda \alpha}) \cos n(\alpha - x + \frac{t}{\sqrt{M^*(n)}}) d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dn \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\lambda \alpha} \cos n(\alpha - x - \frac{t}{\sqrt{M^*(n)}}) d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dn \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\lambda \alpha} \cos n(\alpha - x + \frac{t}{\sqrt{M^*(n)}}) d\alpha \\ &= F_{11} + F_{12} + F_{21} + F_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{21} + F_{22} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dn \left\{ \frac{\lambda}{\lambda^2 + n^2} \cos nx \cos \frac{nt}{\sqrt{M^*(n)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{\lambda^2 + n^2} \sin nx \cos \frac{nt}{\sqrt{M^*(n)}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{11} + F_{12} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dn \left\{ \frac{\lambda}{\lambda^2 + n^2} \cos nx \cos \frac{nt}{\sqrt{M^*(n)}} \right. \\
 & \left. - \frac{n}{\lambda^2 + n^2} \sin nx \cos \frac{nt}{\sqrt{M^*(n)}} \right\} \\
 & + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dn}{n} \sin nx \cos \frac{nt}{\sqrt{M^*(n)}}
 \end{aligned}$$

故に

$$v(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{n(n^2 + \lambda^2)} \sin nx \cos \frac{nt}{\sqrt{M^*(n)}} dn \quad (3.25)$$

上式が求める解である。上式は又、半無限長巻線に沿う進行波を表現している。即ち $x=0$ とすると $t>0$ で常に $\frac{1}{2}$ という一定電位に保たれ、又 $x>0$ では、 $t \rightarrow +0$ で $\frac{1}{2} e^{-\lambda x}$ という初期分布となつていく。大いさの $\frac{1}{2}$ となつていくのは、両方向に無限に広がつていくからである。

例1. L.C.K回路

(3.17)より

$$\Omega = \frac{n}{\sqrt{M^*(n)}} = \frac{n}{\sqrt{LC + LKn^2}}$$

とあつた変数を变换し、 $\beta^2 = \frac{LK}{LC}$ とおくと

$$v(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\sin \frac{\lambda n}{\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}} x}{\Omega} \cos \Omega t d\Omega \quad (3.26)$$

これは、第2章2.1節(1.9)(1.12)と一致し、 $\beta/2\pi$ の遮断周波数と呼ばれるものである。

例2 指数函数分布

$$M^*(n) = \frac{2Mm(C + Kn^2)}{m^2 + n^2}$$

従つて

$$v(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \sin nx}{n(n^2 + \lambda^2)} \cos \frac{nt}{\sqrt{\frac{2Mm(C + Kn^2)}{m^2 + n^2}}} dn \quad (3.27)$$

上式は、第2章2.2節(2.13)と一致する。

第3章 遅延線, 発電機巻線の進行波特性

ここにいう遅延線とは Fig. 1.1 のやうな折り返し型の遅延線であり、発電機巻線は、二層重巻方式のものを取り扱う。両者の進行波特性は異なるが構造上は定性的に共通なところがある。即ち両者とも一本の線であるが、自己導線中においてお互いに結合をもつ点である。その結果として現われる進行波特性を一、二の方法でしらべた。

第1節 遅延線

これは、導体平面の上を一本の導線が導体平面と平行に等間隔の巾で何回も折り返されたもので Fig. 1.1 のやうな構成をもつている。

その実測結果は波形は傳播によつて殆ど崩れぬいが、その導線に沿うたの傳播速度は光速の1.3倍ぐらいに達する。取り扱いとしては、相隣接する導線間に行つた電磁的・静電的結合の影響を考慮し、差分微分方程式として考察する。

Fig. 1.1 を展開し Fig. 1.2 のやうに各折線要素に始端から番号 n を附し、各折線要素毎に位置座標 x をとるものとする。次に隣接折線要素間の結合は Fig. 1.2 にあけるやうに同一の位置座標の微小要素間に存在するものと近似する。すると基礎方程式として、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial v_n}{\partial x} &= L \frac{\partial i_n}{\partial t} - M \frac{\partial i_{n-1}}{\partial t} - M \frac{\partial i_{n+1}}{\partial t} \\ -\frac{\partial i_n}{\partial x} &= C \frac{\partial v_n}{\partial t} + K \frac{\partial v_{n-1}}{\partial t} + K \frac{\partial v_{n+1}}{\partial t} \end{aligned} \right\} (1.1)$$

が成り立つ。ただし、 M の符号が負になっているのは、Fig. 1.1 を

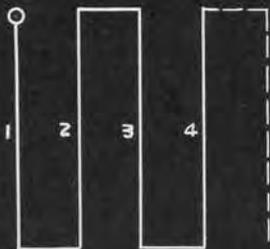


Fig. 1.1

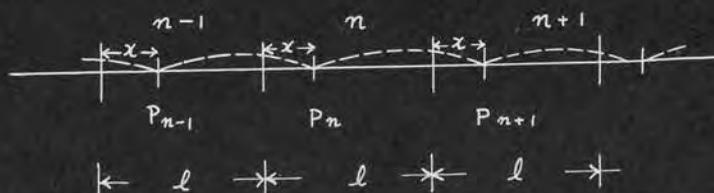


Fig. 1.2

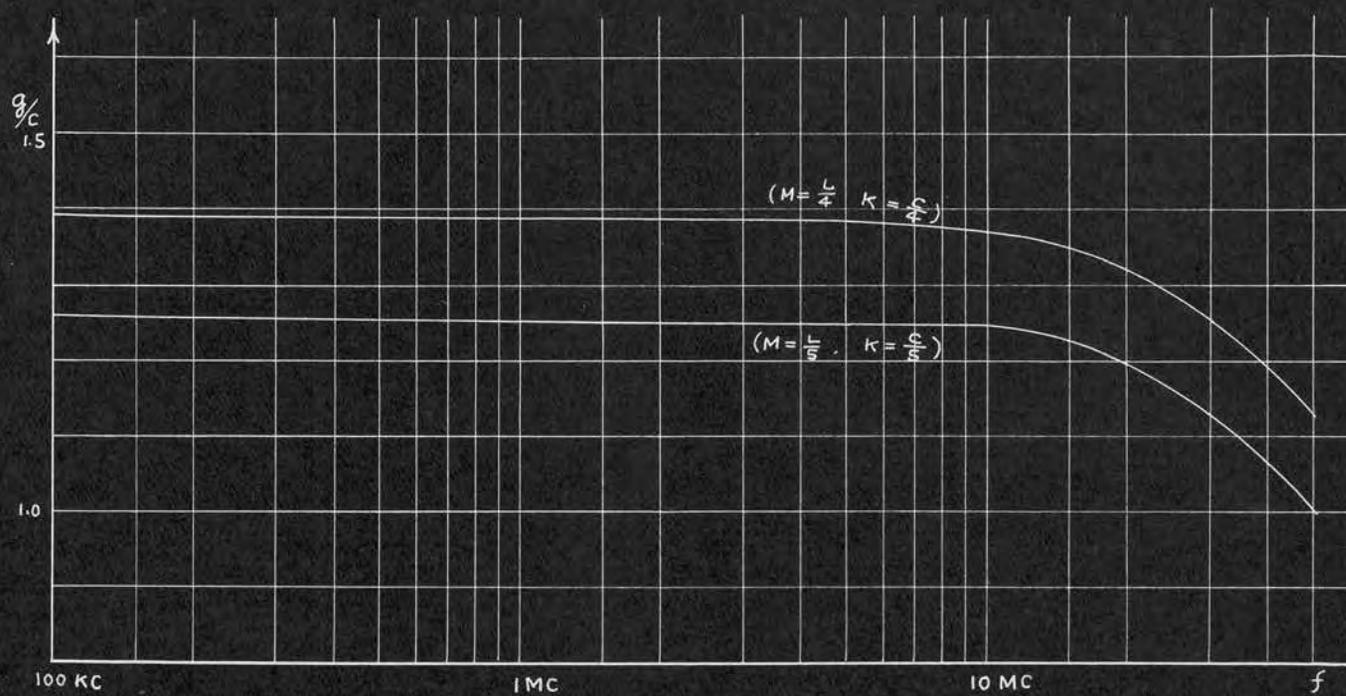


Fig 1.3

Fig. 1.2 に展開したとき Fig. 1.1 において相隣接する電流の方向が逆方向のため、これによる誘導電圧が加算的（正符号）になるからである。(1.1) から i_n , i_{n+1} , i_{n-1} を消去して

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} &= (LC + 2LK + 2MK) \frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2} \\ &\quad - (LK + MC + 2MK) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (V_{n+1} + V_{n-1}) \\ &\quad + MK \frac{\partial^2}{\partial t^2} (V_{n+2} + V_{n-2}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

そこで、進行波型の解として

$$e^{\gamma(nl+x) + pt} \quad (1.3)$$

という形を假定すると

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= (LC + 2LK + 2MK)p^2 - (LK + MC + 2MK)p^2 \cdot 2 \cosh \gamma l \\ &\quad + MKp^2 \cdot 2 \cosh 2\gamma l \end{aligned} \quad (1.4)$$

という傳播定数を決定する方程式をうる。

まず $e^{j\omega t}$ という定常状態において ω に対する位相速度等の関係を求めてみる。上式において

$$p = j\omega, \quad \gamma = j\gamma' \quad (\text{但し } \omega, \gamma' \text{ 実数}) \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} \gamma'^2 / \omega^2 &= LC + 2LK + 2MK - (LK + MC + 2MK) 2 \cos \gamma' l \\ &\quad + MK \cdot 2 \cos 2\gamma' l \end{aligned} \quad (1.4')$$

この式より γ' を求めれば位相速度 g は $g = \omega / \gamma'$ より求めることができる。そこで実際の遅延線に於いて線の直径、線間距離、高さを測定して L, C, M, K を計算すると

$$L = 7.157 \times 10^{-9} \text{ henry/m}$$

$$M = 1.721 \times 10^{-9} \text{ henry/m}$$

$$C = \frac{1}{c^2} \times 0.1482 \times 10^9 \text{ farad/m}$$

$$K = \frac{1}{c^2} \times 0.039 \times 10^9 \text{ farad/m}$$

上述の数値例からわかるやうに M は L の $\frac{1}{4} \sim \frac{1}{5}$ の間にある。そして K も C に對して同様の範囲内にあるから (1.4') から ω に對する位相速度を求めれば Fig. 1.3 のやうになる。ただし $l \cong 1 \text{ m}$ であ

る。Fig. 1.3 から $g(\omega)$ は $10 MC$ 以下では、大体光速の 1.3 倍にあることがわかる。

(1.4) から近似的に演算子解を求め、その時間函数を一応出しておく。現象初期の $1 \mu s$ は $P \sim 2\pi \times 10^6$ に対応しているという通常いわれている評価に従うときは (1.4) の双曲線函数は、約 $0.3 \sim 0.5 \mu s$ より後の現象では、二項近似ができて、

$$\gamma^2 \cong \frac{C(L-ZM)P^2}{1+P^2l^2(LK+MC-ZMK)} \quad \text{ただし } |P| < 10^7 \times 2\pi \quad (1.5)$$

となる。今、

$$\lambda^2 = \frac{C(L-ZM)}{l^2(LK+MC-ZMK)} \quad \beta^2 = \frac{1}{l^2(LK+MC-ZMK)}$$

とすると、第2章2.1節(1.9)から

$$v/E = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\beta \frac{\sin \frac{\lambda \Omega (nl+x)}{\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}}}{\Omega} \cos \Omega t d\Omega \quad (1.6)$$

ただし上式は、約 $0.5 \mu s$ 以下の現象初期においては、演算子函数の近似式(1.5)の制限から正確でない。

(1.6) より角周波数 ω に対する傳播速度は

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{1 - l^2(LK+MC-ZMK)\omega^2}{C(L-ZM)}}$$

従って、 $f = \frac{\omega}{2\pi} < 10^7$ では $g(\omega) \cong 1.3 C$ となる。

このことは Fig. 1.3 とともに先に述べた実験結果をほぼ説明している。

第2節 発電機巻線の進行波特性

発電機巻線に沿う進行波傳播の機構は、その巻線方式が複雑で解析的な手がかりがえられなかったために従来殆んど説明されてはいない。このことは又實際上発電機が変圧器を通じて送電線に接続されるために、サージによる脅威を直接受けることが少ないことによる。

しかしながら元来絶縁強度の弱い発電機において高電圧、大容量の発電機製作への傾向と、雷害防護の研究の進展により衝撃波実験が行なわれ、二、三の特異な特性が見出され、その機構についてこの方面において関心をもちられるやうになった。蓋し、その機構の理解なくしては、巻線内部の電位分布等について、各場合について

網羅的に実測して帰納するより外ないからである。本節では、この発電機巻線の進行波特性を解析することにする。

発電機巻線の巻線方式には、単層巻と二層巻の二通りある。単層巻は、鎖型巻又は波巻におけるやうに一溝の中に丁度一本の巻線要素が入つてゐるものである。溝中で鉄心は溝中の巻線要素に対して丁度大地帰路のやうな役割をし、巻線はこれに対して対地静電容量及び自己インダクタンスをもつたものである。異溝中の巻線要素同士の結合は、鉄心による磁路が開いてゐる或はアンペアターンの不足線間距離数 μs 領域における鉄心の磁化の遅れ等から一般には向題にならない。従つて単一な LC 線路に鉄心の渦流損失ならびに表皮効果による \sqrt{f} 近似を送電線に於いて使用されてゐる通りに適用すればよい。このことは初期における実験によつて同時に知られてゐたことである。

しかしながら現在運転中及至今後製作されるものの多くは二層重ね巻方式のものも多く又大容量、高電圧の傾向をとりつゝあるやうである。この方式のものは、同一の溝の中に二本の巻線要素が入り、それらが自己相同志の場合や、異相間同志の場合がある。そしてそれらが狭い溝の中に極めて近接して並置されるのであるから、これらの間の結合は相當に大きいことが予想される。しかしながらその巻線要素の配置乃至接続は、詳細にみれば極めて複雑で、進行波の立場からその接続を述べるときは、全く不規則と考へられる場合が出現する。単層巻の場合に比へて實際上重要性が大きいにもかかわらず、このためこの同一の溝中の巻線要素間の結合を考慮に入れた解析は殆んど行なわれず、実験データの整理には、単一な LC 線路の立場からの類推的な考察が行なわれるにとどまつてゐたやうである。

筆者等は電力中央研究所 上之園親佐氏の貴重なる資料に基づいて、この二層重ね巻方式の一つの巻線方式である隔極接続の場合について簡単な等価回路によつて比較的満足に考察することができた。

二層重ね巻方式の巻線要素接続法には大別して、隔極接続と隣極接続の二通りがある。隣極接続の場合には、隔極接続の場合にのべるやうな解析方法を固守するとき、相當に複雑となるので極めて大まかな等価回路によつてその特性の傾向を測定結果と比較対照してゐる。

2.1 隔極接続の場合

表 1

11KV 1000 KVA
1Y 隔極接続

U 相		U 相	
1	31 u	31	1 u
2	9 w	32	33 v
3	2 v	33	58 w
4	11 w	34	35 v
5	4 v	35	60 w
6	60 u	36	30 u
7	55 u	37	25 u
8	15 w	38	39 v
9	8 v	39	32 w
10	17 w	40	41 v
11	10 v	41	34 w
12	54 u	42	24 u
13	49 u	43	19 u
14	21 w	44	45 v
15	14 v	45	38 w
16	23 w	46	47 v
17	15 v	47	40 w
18	48 u	48	18 u
19	43 u	49	13 u
20	27 w	50	51 v
21	20 v	51	44 w
22	29 w	52	53 v
23	22 v	53	46 w
24	42 u	54	12 u
25	37 u	55	7 u
26	33 w	56	57 v
27	26 v	57	50 w
28	35 w	58	59 v
29	28 v	59	52 w
30	36 u	60	6 u

(i) 自己相巻線間だけの結合を考慮したとき

表 1 に一重星型結線の場合のこの種の巻線要素の接続例を示す。その大要を記すと 1 番目の線輪から 15 番目の線輪まで固定子を一回りし、16 番目の線輪から 30 番目の線輪までは固定子を逆に一回りするのである。表 1 にあいて例えば U 相の巻線辺を U 相の始端から数えた巻線辺の数と相を示す U なる文字によつて 1u, 2u, 3u etc の如く表わす。表 1 の右の欄には同一の溝の中に納められている他の巻線要素を示す。表より自己相同志の結合は、巻線の両端にあいて若干の順序の乱れはあるが、大体 Fig 2.1 で表わされる。

Fig 2.1

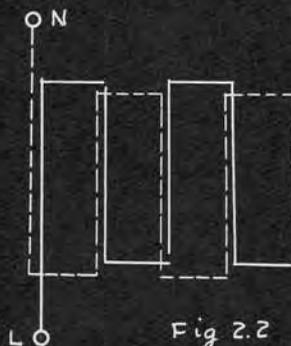


Fig 2.2

又 Fig. 2.2 は線間の電磁結合の方向を示す。このやうな巻線に生ずる進行波現象を取り扱う方法はいろいろあるが上述の観察から多導線の L.C 線路で取り扱うことは取り扱いが簡明であり又かなりの近似度をもつことが予想される。今この種の巻線のもつ基本的な特性を見るために自己相巻線間での結合を考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} LP & -MP \\ -MP & LP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \\ -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} CP & KP \\ KP & CP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

表 2.3 は、二重星型構造をもつ隔極接続の発電機の巻線配置の一例である。これは各相にフレッドニ本の巻線が並列になつてゐるもので、Fig. 2.3 にその概略図を示し、九印同志及び〇印同志の間に溝の中で結合をもつ。即ち表より自己相での結合を抽出すれば Fig. 2.4 のやうな等価回路をうる。これを方程式で書くと

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2' \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} L & -M \\ -M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2' \end{bmatrix} & -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2' \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} C & K \\ K & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2' \end{bmatrix} \\ -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2 \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} L & -M \\ -M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2 \end{bmatrix} & -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2 \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} C & K \\ K & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

しかしながら発電機においては、これらの並列二導線は常に端子及び中性点において接続され、又対称な構造をもつから

$$V_1 \equiv V_1' \quad V_2 \equiv V_2'$$

従つて基礎方程式としては、この場合にも簡単な (2.1) に帰着する。

次によく知られた方法に従つて (2.1) を解いてその基本的な性質を明らかにしよう。電流電位に対称座標変換を施して、

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

ただし

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [S]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とすると

表 2

11KV, 11000 KVA
ZY 隔極接續

u_1		u_2	
1	3 u_2	1	3 u_1
2	3 v_1	2	9 w_2
3	1 u_2	3	1 u_1
4	96 u_2	4	96 u_1
5	93 u_2	5	2 v_2
6	9 v_1	6	94 u_1
7	2 w_1	7	93 w_2
8	92 u_2	8	13 w_2
9	89 u_2	9	91 u_1
10	88 u_2	10	13 w_2
11	8 w_1	11	87 u_1
12	86 u_2	12	10 v_2
13	85 u_2	:	:
14	17 v_1	:	:
15	83 u_2	80	18 u_1
16	82 u_2	81	
17	12 w_1	82	16 u_1
18	80 u_2	83	15 u_1
:	:	84	91 w_2
:	:	85	13 u_1
87	11 u_2	86	12 u_1
88	91 v_1	87	84 v_2
89	86 w_1	88	10 u_1
90	10 u_2	89	9 u_1
91	9 u_2	90	95 w_2
92	95 v_1	91	88 v_2
93	7 u_2	92	8 u_1
94	6 u_2	93	5 u_1
95	90 w_1	94	5 w_2
96	4 u_2	95	94 v_2
		96	4 u_1

表 3

11KV,
20000 KVA
ZY
隔極接續

w_1	
1	3 w_2
2	11 u_1
3	1 w_2
4	108 w_2
5	2 v_1
6	106 w_2
7	105 w_2
8	17 u_1
9	103 w_2
10	102 w_2
11	100 w
:	:
:	:
97	15 w_2
98	107 u_1
99	13 w_2
100	12 w_2
101	98 v_1
102	10 w_2
103	9 w_2
104	5 u_1
105	7 w_2
106	6 w_2
107	104 v_1
108	4 w_2

Fig 2.3

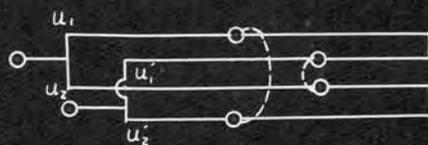


Fig 2.4

$$\frac{d^2 V_a}{dx^2} = \gamma_a^2 V_a$$

$$\frac{d^2 V_b}{dx^2} = \gamma_b^2 V_b$$

この解は

$$V_a = A e^{-\gamma_a x} + B e^{\gamma_a x}$$

$$I_a = \frac{1}{Z_a} (A e^{-\gamma_a x} - B e^{\gamma_a x})$$

$$V_b = C e^{-\gamma_b x} + D e^{\gamma_b x}$$

$$I_b = \frac{1}{Z_b} (C e^{-\gamma_b x} - D e^{\gamma_b x})$$

(2.3)

ここで

$$\gamma_a = P \sqrt{(L-M)(C+K)} = P \sqrt{(L-M)C_1}$$

$$\gamma_b = P \sqrt{(L+M)(C-K)} = P \sqrt{(L+M)(C_1 + 2C_0)}$$

$$Z_a = \sqrt{\frac{L-M}{C+K}} = \sqrt{\frac{L-M}{C_1}}$$

(2.4)

$$Z_b = \sqrt{\frac{L+M}{C-K}} = \sqrt{\frac{L+M}{C_1 + 2C_0}}$$

ただし、 C_1 は対地静電容量、 C_0 は線間の静電容量である。

上式において、 L と M は $\frac{L}{M} = \frac{C_1}{C_0} = 2.4$ にとると、 $\gamma_b/\gamma_a = 2.4$ となり、実質的に多速度性が表われることとなり、これによる波形の変歪と生ずる。換言すれば分波現象が顕著に現われることが予想される。

さて $x=l$ において 2 箇の導線は内部接続されているから

$$x=l \quad V_1 = V_2, \quad I_1 = -I_2$$

$$\therefore \text{このから} \quad B = A e^{-2\gamma_a l} \quad D = -C e^{-2\gamma_b l}$$

を得る。以下二つの場合に分けて考察する。

(a) 中性負開放 強制電流印加

この場合は $x=0$ で $I_1 = I, \quad I_2 = 0$ であるから

$$A = \frac{Z_a I}{1 - e^{-2\gamma_a l}} \quad C = \frac{-Z_b I}{1 + e^{-2\gamma_b l}}$$

従って印加点 $x=0$ において V_1 は

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\bar{z}_a I (1 + e^{-2\gamma_a l})}{z (1 - e^{-2\gamma_a l})} + \frac{\bar{z}_b I (1 - e^{-2\gamma_b l})}{z (1 + e^{-2\gamma_b l})} \\
 &= \frac{\bar{z}_a I}{z} (1 + z e^{-2\gamma_a l} + z e^{-4\gamma_a l} + z e^{-6\gamma_a l} + z e^{-8\gamma_a l} + z e^{-10\gamma_a l} + \dots) \\
 &\quad + \frac{\bar{z}_b I}{z} (1 - z e^{-2\gamma_b l} + z e^{-4\gamma_b l} - z e^{-6\gamma_b l} + z e^{-8\gamma_b l} - z e^{-10\gamma_b l} + \dots)
 \end{aligned}$$

(b) 中性点接地 強制電流印加

この場合: $x = 0$ $I_1 = I$ $V_2 = 0$ であるから

$$A = \frac{z I (1 - e^{-2\gamma_b l})}{\frac{1}{\bar{z}_a} (1 - e^{-2\gamma_a l}) (1 - e^{-2\gamma_b l}) + \frac{1}{\bar{z}_b} (1 + e^{-2\gamma_a l}) (1 + e^{-2\gamma_b l})}$$

$$B = A e^{-2\gamma_a l}$$

$$C = -\frac{1 + e^{-2\gamma_a l}}{1 - e^{-2\gamma_b l}} A$$

$$D = -C e^{-2\gamma_b l}$$

故に始端 $x = 0$ にあつて電位は

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{1}{z} (A + B - C - D) \\
 &= z I \frac{\frac{\bar{z}_a \bar{z}_b}{\bar{z}_a + \bar{z}_b} (1 + e^{-2\gamma_a l}) (1 - e^{-2\gamma_b l})}{1 + \alpha e^{-2\gamma_a l} + \alpha e^{-2\gamma_b l} + e^{-2\gamma_a l - 2\gamma_b l}}
 \end{aligned}$$

∴ $\alpha =$

$$\alpha = \frac{\bar{z}_a - \bar{z}_b}{\bar{z}_a + \bar{z}_b}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore V_1 &= \frac{z I \bar{z}_a \bar{z}_b}{\bar{z}_a + \bar{z}_b} \left\{ 1 + e^{-2\gamma_a l} (1 - \alpha) - e^{-2\gamma_b l} (1 + \alpha) - e^{-2(\gamma_a + \gamma_b)l} \cdot z (1 - \alpha^2) \right. \\
 &\quad - e^{-4\gamma_a l} \alpha (1 - \alpha) + e^{-4\gamma_b l} \alpha (1 + \alpha) + e^{-4(\gamma_a + \gamma_b)l} (z - 3\alpha^2 + 6\alpha^4) \\
 &\quad + e^{-2(2\gamma_a + \gamma_b)l} (1 - 3\alpha)(\alpha^2 - 1) + e^{-2(\gamma_a + 2\gamma_b)l} (1 - \alpha^2)(1 + 3\alpha) \\
 &\quad + e^{-6\gamma_a l} \alpha^2 (1 - \alpha) - e^{-6\gamma_b l} \alpha^2 (1 + \alpha) + e^{-2(3\gamma_a + \gamma_b)l} \cdot z \alpha (\alpha^2 - 1)(2\alpha - 1) \\
 &\quad \left. - e^{-8\gamma_a l} \alpha^3 (1 - \alpha) + e^{-10\gamma_a l} \cdot \alpha^4 (1 - \alpha) + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

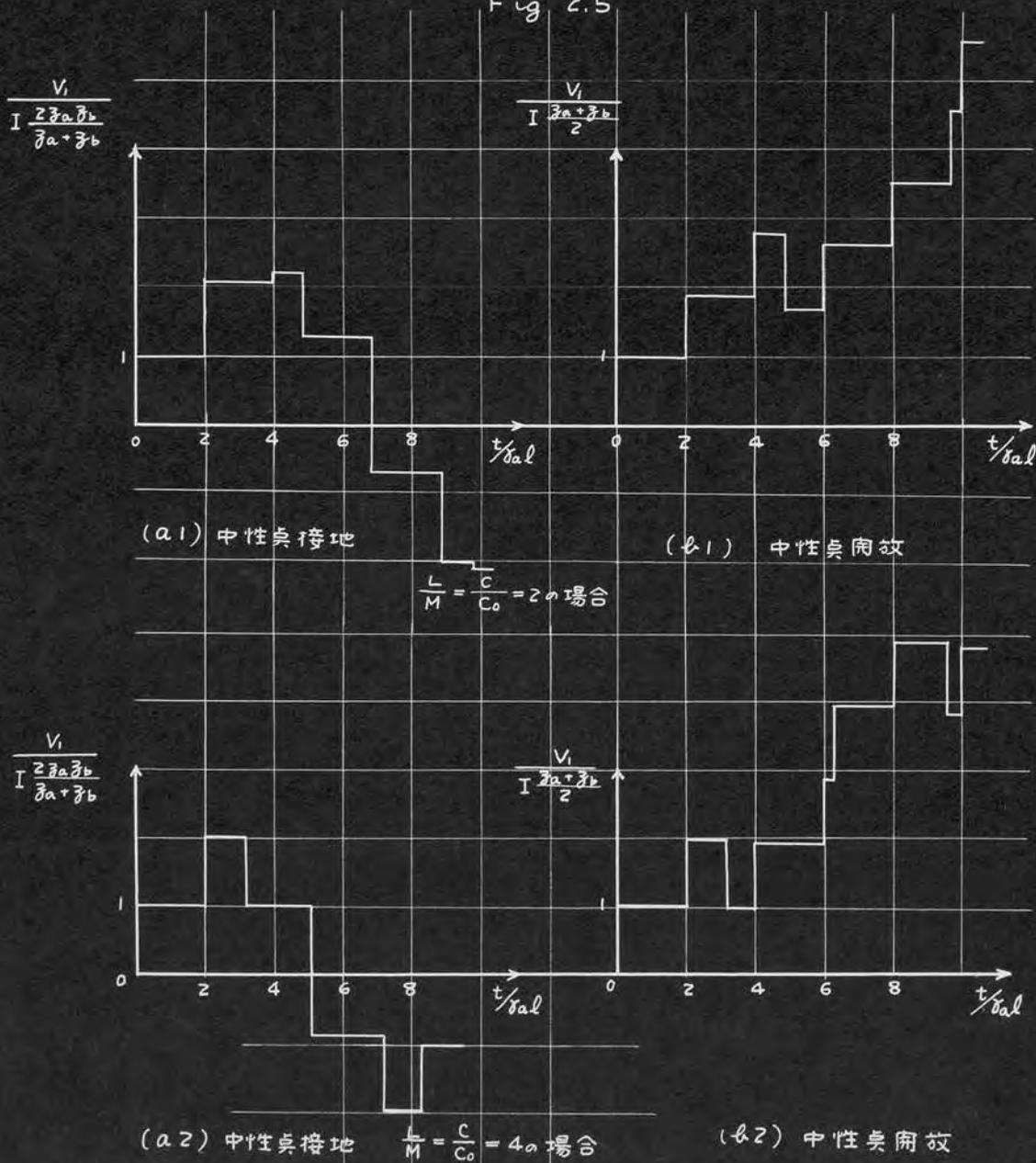
を得る。 $\frac{L}{M} = \frac{C}{C_0}$ を 2.4.6 にとつて計算した結果を Fig. 2.5 にしめす。

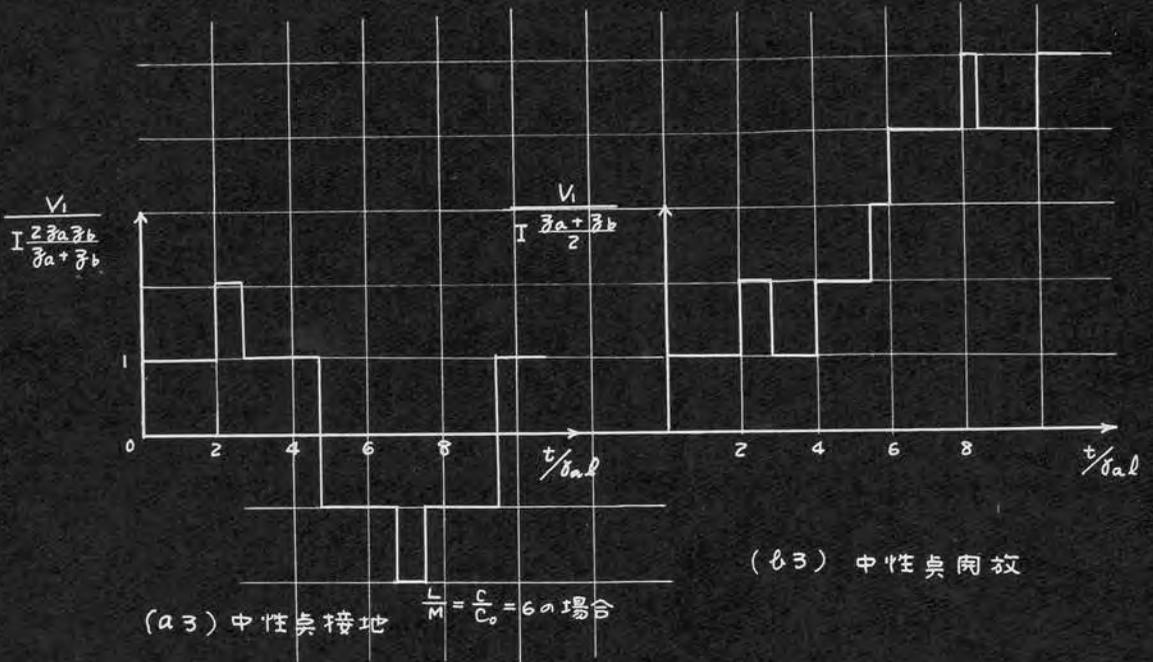
よつて上式の物理的意味は、普通の二導線系の場合と同様であるが、

結合係数が大きく且電磁結合の方向が負、($M < 0$) のため特に傳播速度の差が顯著である。静電誘導分、電磁誘導分、共に極性が正のため中性点における(第一主)反射がかわるまでに極性正の誘導波分が印加点に達することがその一つの長である。尚波形の詳細は図にみる如く結合係数の値によつても異なる。

又サーゲインポーズは、中性点開放時と接地の場合とで原理

Fig 2.5





的に異なり、その差は

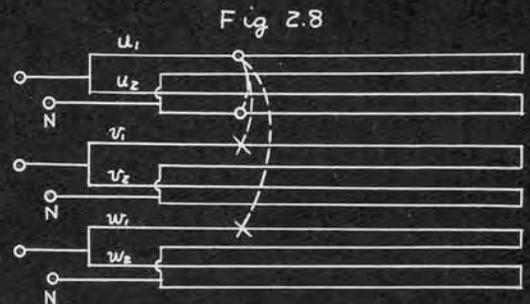
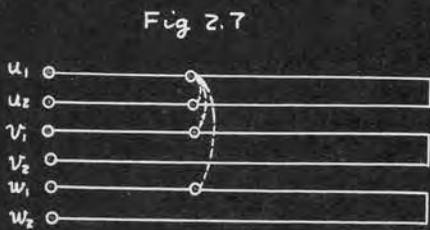
$$\frac{Z_a + Z_b}{2} - \frac{2Z_a Z_b}{Z_a + Z_b} = \frac{(Z_a - Z_b)^2}{2(Z_a + Z_b)}$$

となり一般には開放時の方が大きくなる。式(2.4)からわかるやうに $Z_a \approx Z_b$ であるのでその差は僅小で実測上では殆ど現われまい。

表2、表3の(a.1)及び(b.1)は実測波形 Fig. 2.10' と相当によく類似している。

(ii) 他相巻線との結合を考慮したとき

(i)では、この種の巻線の特性を簡明に把握するため自己相対的の結合を考慮して考察した。しかしたとえは表1における発電機では自己相の巻線と結合するのと殆ど同率に他相との結合をもつ



ている。整数巻よりは分数巻の方が一般に多く用いられ、他相との結合をもちこは一般的なことである。これを考慮するときは、傳播定数が4箇の異なった値に分れて、その連続反射をしらべることが、やゝ煩雜となる。表1より一重星型の隔極接続の巻線に對して Fig 2.7 のやうな等價回路及び次のやうな基礎方程式をえら。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_u \\ V_v \\ V_w \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_u \\ I_v \\ I_w \end{bmatrix} \\ -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I_u \\ I_v \\ I_w \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} C & K & K \\ K & C & K \\ K & K & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_u \\ V_v \\ V_w \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (2.5)$$

但し、ゴシックで書いた量は行列を表わし

$$\begin{aligned} V_u &= [V_u] = \begin{bmatrix} V_{u1} \\ V_{u2} \end{bmatrix} & [I_u] &= \begin{bmatrix} I_{u1} \\ I_{u2} \end{bmatrix} \\ L &= [L] = \begin{bmatrix} L & -M \\ -M & L \end{bmatrix} & M &= [M] = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \\ C &= [C] = \begin{bmatrix} C & K \\ K & C \end{bmatrix} & K &= [K] = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \end{aligned}$$

表2. 表3における二重星型の構成のものでは、Fig 2.8のやうな等價回路となり基礎方程式として、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_u \\ V_v \\ V_w \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_u \\ I_v \\ I_w \end{bmatrix} \\ -\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I_u \\ I_v \\ I_w \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} C & K & K \\ K & C & K \\ K & K & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_u \\ V_v \\ V_w \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (2.6)$$

ただし

$$\begin{aligned} V_u &= \begin{bmatrix} V_{u1} \\ V_{u2} \\ V_{u1} \\ V_{u2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ua} \\ V_{ub} \end{bmatrix} \text{ etc} & L &= \begin{bmatrix} [L] & 0 \\ 0 & [L] \end{bmatrix}, & [M] &= \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [M] \end{bmatrix} \\ & & [L] &= \begin{bmatrix} L & -M \\ -M & L \end{bmatrix}, & [M] &= \begin{bmatrix} -M' & 0 \\ 0 & -M' \end{bmatrix} \text{ etc} \end{aligned}$$

しかるに、さきの二導線としての考察において速くたやうに、 V_{ia} と

V_{ib} は ($i = u, v, w$) 対称構造及び同一の端子条件から

$$V_{ia} \equiv V_{ib} \quad I_{ia} \equiv I_{ib}$$

従って結局一重星型の場合の (2.5) の 6 導線系に帰着する。

よって表 1 の場合は $M = M'$ である。この場合についてニミの Initial response を求める。今 U を 2 次の単位行列として

$$[S] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} U & U & U \\ 2U & -U & -U \\ -U & 2U & -U \end{bmatrix} \quad [S]^{-1} = \begin{bmatrix} U & U & 0 \\ U & 0 & U \\ U & -U & -U \end{bmatrix}$$

によつて V_u, V_v, V_w と

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} V_u \\ V_v \\ V_w \end{bmatrix}$$

に変換すると、次の 3 箇の 2 導線系にわかれる。即ち零相分に対しは

$$-\frac{d}{dx} [V_{a0}] = P \begin{bmatrix} L - 2M & -M \\ -M & L - 2M \end{bmatrix} [I_{a0}]$$

$$-\frac{d}{dx} [I_{a0}] = P \begin{bmatrix} C + 2K & K \\ K & C + 2K \end{bmatrix} [V_{a0}]$$

正逆相分に対しは

$$-\frac{d}{dx} [V_{ai}] = P \begin{bmatrix} L + M & -M \\ -M & L + M \end{bmatrix} [I_{ai}]$$

$$-\frac{d}{dx} [I_{ai}] = P \begin{bmatrix} C - K & K \\ K & C - K \end{bmatrix} [V_{ai}]$$

が成立する。次に各々の 2 導線系 z

$$[S^*] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad [S^*]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

によつて V_{ai} ($i = 0, 1, 2$) と

$$\begin{bmatrix} V_{i\xi} \\ V_{i\eta} \end{bmatrix} = [S^*] \begin{bmatrix} V_{a1i} \\ V_{a2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a0i} + V_{a0z} \\ -V_{a0i} + V_{a0z} \end{bmatrix}$$

に 変換すると

$$\frac{d^2 V_{i\xi}}{dx^2} = \gamma_{i\xi}^2 V_{i\xi} \quad \frac{d^2 V_{i\eta}}{dx^2} = \gamma_{i\eta}^2 V_{i\eta}$$

$$\text{但し } \gamma_{0\xi} = P \sqrt{(L-3M)(C_1-2C_0)}$$

$$\gamma_{0\eta} = P \sqrt{(L-M)C_1}$$

$$\gamma_{i\xi} = P \sqrt{L(C_1+C_0)} \equiv \gamma_\xi$$

$$\gamma_{i\eta} = P \sqrt{(L+2M)(C_1+3C_0)} \equiv \gamma_\eta$$

C_1 は巻線の対地静電容量, C_0 は結合巻線間の静電容量とする。従つてその解は

$$V_{i\xi} = A_{i\xi} e^{\gamma_{i\xi} x} + B_{i\xi} e^{-\gamma_{i\xi} x}$$

$$I_{i\xi} = -\frac{A_{i\xi}}{\gamma_{i\xi}} e^{\gamma_{i\xi} x} + \frac{B_{i\xi}}{\gamma_{i\xi}} e^{-\gamma_{i\xi} x} \quad (i=0, 1, 2)$$

となる。 $V_{i\eta}$, $I_{i\eta}$ についても同じ式の成立する。ここに

$$\beta_{0\xi} = \sqrt{\frac{L-3M}{C_1-2C_0}}$$

$$\beta_{0\eta} = \sqrt{\frac{L-M}{C_1}}$$

$$\beta_{i\xi} = \sqrt{\frac{L}{C_1+C_0}}$$

$$\beta_{i\eta} = \sqrt{\frac{L+2M}{C_1+3C_0}} \quad (\text{この場合 } i=1, 2)$$

従つて外部端子条件の箇と内部端子条件の箇とから 12 箇の積分定数 A, B が定まることとなる。先ず内部接続の条件から

$$x=l \text{ で } V_{u1} = V_{u2} \quad I_{u1} = -I_{u2}$$

等が成立するから

$$B_{i\xi} = A_{i\xi} e^{2\gamma_{i\xi} l}, \quad B_{i\eta} = -A_{i\eta} e^{2\gamma_{i\eta} l}$$

を得る。以下二三の場合についてしらべることとする。

U 相 中性点接地 強制電流印加 他相浮遊

$$\text{即ち } x=0 \text{ で } I_{u1} = I \quad V_{u2} = 0$$

$$I_{v1} = 0 \quad I_{v2} = 0$$

この場合は、構造の対称性及び同一の端子条件から W 相巻線上の電位電流は、V 相のそれらと同一である。このときの解は

$$V_{u1} = \frac{2}{3} I \beta_{0\xi} \frac{(\beta_{0\eta}' \tanh \delta_{0\eta} l + \beta_{1\eta}' \tanh \delta_{1\eta} l)(\coth h \delta_{0\xi} l + \beta_{1\xi}' \coth h \delta_{1\xi} l)}{\coth h \delta_{0\xi} l + \beta_{0\eta}' \tanh \delta_{0\eta} l + \beta_{1\xi}' \coth h \delta_{1\xi} l + \beta_{1\eta}' \tanh \delta_{1\eta} l}$$

$$\text{但し } \beta_{0\eta}' = \frac{\beta_{0\eta}}{\beta_{0\xi}} = \sqrt{\frac{L-M}{C_1} \frac{C_1-2C_0}{L-3M}}$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'_{\xi} &= \frac{Z\bar{\gamma}_{\xi}}{\bar{\gamma}_{0\xi}} = Z\sqrt{\frac{L(C-2C_0)}{(C_1+3C_0)(L-3M)}} \\ \bar{\gamma}'_{\eta} &= \frac{Z\bar{\gamma}_{\eta}}{\bar{\gamma}_{0\xi}} = Z\sqrt{\frac{(L+2M)(C_1-2C_0)}{(C_1+3C_0)(L-3M)}} \\ \bar{\gamma}'_{0\eta} &= \frac{\bar{\gamma}_{0\eta}}{\bar{\gamma}_{0\xi}} = \sqrt{\frac{(L-M)C_1}{(L-3M)(C_1-2C_0)}} \\ \bar{\gamma}'_{\xi} &= \frac{\bar{\gamma}_{\xi}}{\bar{\gamma}_{0\xi}} = \sqrt{\frac{L(C_1+C_0)}{(L-3M)(C_1-2C_0)}} \\ \bar{\gamma}'_{\eta} &= \frac{\bar{\gamma}_{\eta}}{\bar{\gamma}_{0\xi}} = \sqrt{\frac{(L+2M)(C+3C_0)}{(L-3M)(C_1-2C_0)}} \end{aligned}$$

次に上の V_{u1} の展開式を示す。但し

$$Z = \frac{Z}{1 + \bar{\gamma}'_{0\eta} + \bar{\gamma}'_{\xi} + \bar{\gamma}'_{\eta}} \quad Z_{\xi} = \frac{1}{1 + \bar{\gamma}'_{\xi}} \quad Z_{\eta} = \frac{1}{\bar{\gamma}'_{0\eta} + \bar{\gamma}'_{\eta}}$$

$$V_{u1} = \frac{2}{3} I \bar{\gamma}_{0\xi} \frac{(1 + \bar{\gamma}'_{\xi})(\bar{\gamma}'_{0\eta} + \bar{\gamma}'_{\eta})}{1 + \bar{\gamma}'_{0\eta} + \bar{\gamma}'_{\xi} + \bar{\gamma}'_{\eta}} \left[1 + \sum e^{-(\text{傳播定数})l} \times (\text{反射量}) \right]$$

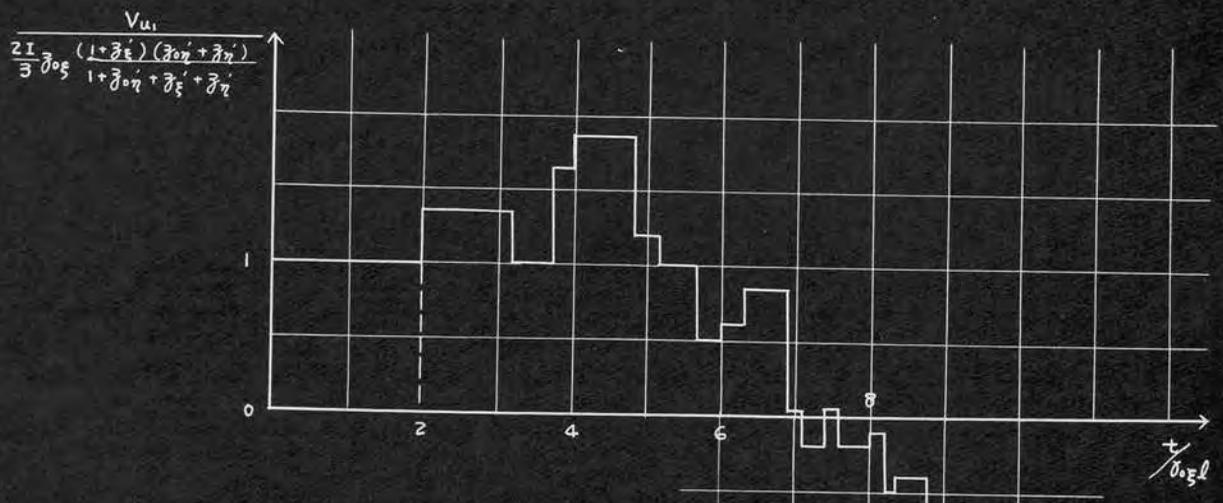


Fig 2.9 u相中性点接地 強制電流印加
他相浮遊

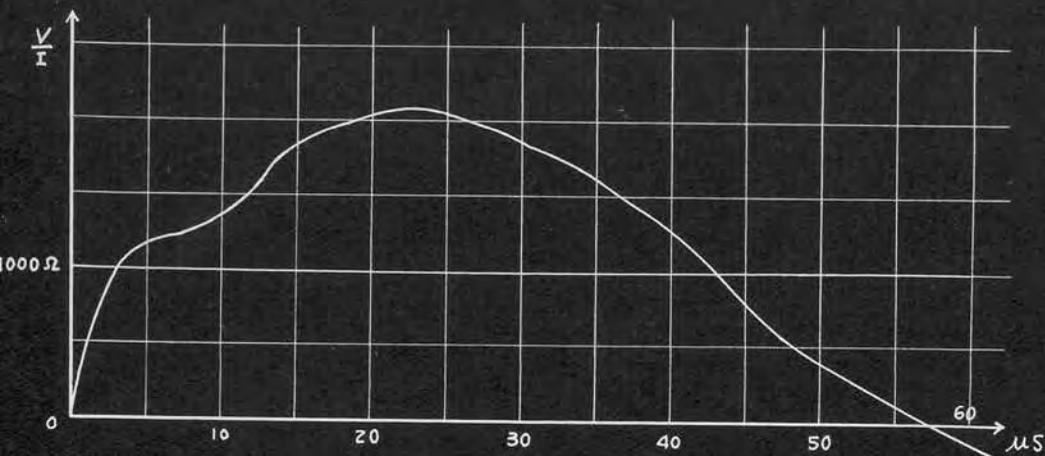


Fig 2.10 11 KV 1000 KVA 1Y

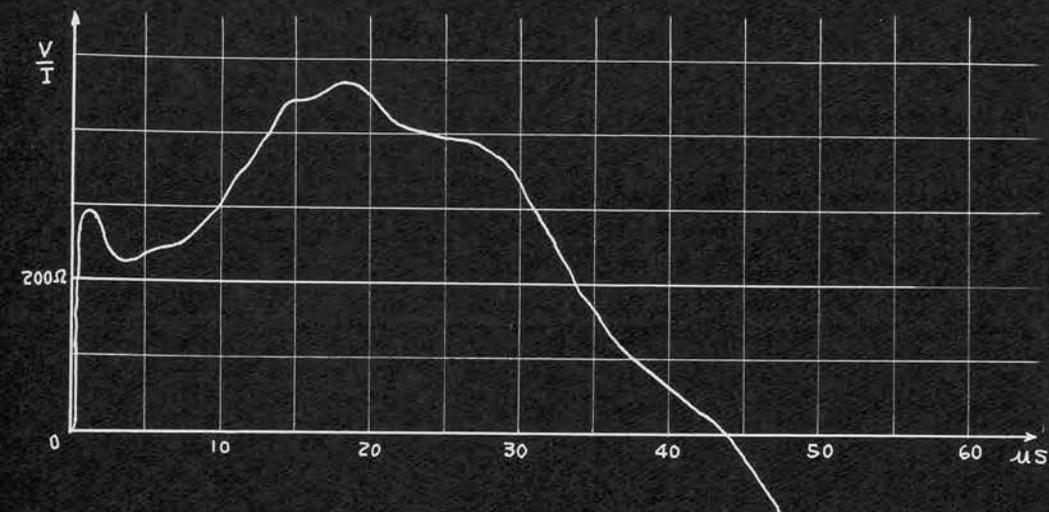


Fig 2.10' 11 KV 11000 KVA

各変移点 (跳躍点) とそれに对する反射量と下を示す。

	反 射 量
$2 \delta_{0\xi}$	$z z_{\xi} - z$
$4 \delta_{0\xi}$	$(1-z)(z z_{\xi} - z)$
$6 \delta_{0\xi}$	$(1-z)^2(z z_{\xi} - z)$
$8 \delta_{0\xi}$	$(1-z)^3(z z_{\xi} - z)$
$10 \delta_{0\xi}$	$(1-z)^4(z z_{\xi} - z)$
$2 \delta_{0\eta}$	$\beta_{0\eta}' (z - z z_{\eta})$
$4 \delta_{0\eta}$	$\beta_{0\eta}' (\beta_{0\eta}' z - 1)(z - z z_{\eta})$
$6 \delta_{0\eta}$	$\beta_{0\eta}' (\beta_{0\eta}' z - 1)^2 (z - z z_{\eta})$
$2 \delta_{\eta}$	$\beta_{\eta}' (z - z z_{\eta})$
$4 \delta_{\eta}$	$\beta_{\eta}' \{ \beta_{\eta}' z^2 - (z - z z_{\eta}) \}$
$2 \delta_{\xi}$	$\beta_{\xi}' (z z_{\xi} - z)$
$4 \delta_{\xi}$	$\beta_{\xi}' (1 - \beta_{\xi}' z)(z z_{\xi} - z)$
$2(\delta_{0\xi} + \delta_{0\eta})$	$-z \beta_{0\eta}' \{ (z - z_{\xi})(z - z_{\eta}) + z_{\xi} z_{\eta} \}$
$2(\delta_{\eta} + \delta_{0\xi})$	$-z \beta_{\eta}' \{ (z - z_{\xi})(z - z_{\eta}) + z_{\xi} z_{\eta} \}$
$2(\delta_{0\eta} + \delta_{\xi})$	$-z \beta_{0\eta}' \beta_{\xi}' \{ (z - z_{\xi})(z - z_{\eta}) + z_{\xi} z_{\eta} \}$
$2(\delta_{\eta} + \delta_{\xi})$	$-z \beta_{\eta}' \beta_{\xi}' \{ (z - z_{\xi})(z - z_{\eta}) + z_{\xi} z_{\eta} \}$
$2(\delta_{0\xi} + \delta_{\xi})$	$-\beta_{\xi}' z (z z_{\xi} - z)$
$2(\delta_{\eta} + \delta_{0\eta})$	$z \beta_{0\eta}' \beta_{\eta}' z (z - z z_{\eta})$
$2(\delta_{0\xi} + 2\delta_{0\eta})$	$\beta_{0\eta}' \{ z z_{\xi} (\beta_{0\eta}' z - 1)(z - z z_{\eta}) + z z_{\eta} z (z \beta_{0\eta}' z - 1) - z^2 (3 \beta_{0\eta}' z - 2) \}$
$2(\delta_{0\eta} + 2\delta_{0\xi})$	$\beta_{0\eta}' \{ -z z_{\eta} (1-z)(z z_{\xi} - z) + z z_{\xi} z (1-z z) + z^2 (3 z - 2) \}$
$2(\delta_{\eta} + 2\delta_{0\xi})$	$\beta_{\eta}' \{ -z z_{\eta} (1-z)(z z_{\xi} - z) + z z_{\xi} z (1-z z) + z^2 (3 z - 2) \}$
$2(\delta_{\xi} + 2\delta_{0\xi})$	$\beta_{\xi}' z (3 z - 2)(z z_{\xi} - z)$
$2(\delta_{0\xi} + 2\delta_{\xi})$	$\beta_{\xi}' z (3 \beta_{\xi}' z - 2)(z z_{\xi} - z)$
$2(\delta_{0\eta} + 3\delta_{0\xi})$	$z \beta_{0\eta}' \{ z_{\xi} z^2 (3 \beta_{0\eta}' z - 1) - z_{\eta} (1-z)^2 (z z_{\xi} - z) + z z_{\xi} (1-z z) \}$
$2(\delta_{\xi} + 3\delta_{0\xi})$	$z \beta_{\xi}' z \{ z (1+z z^2) + z_{\xi} (1-z)(4 z - 1) \}$
$2(\delta_{0\xi} + \delta_{0\eta} + \delta_{\xi})$	$\beta_{0\eta}' \beta_{\xi}' z \{ z^2 - 8 z_{\xi} z - 4 z_{\eta} z + 8 z_{\xi} z_{\eta} \}$

$\frac{L}{M} = \frac{C_1}{C_0} = 6$ とし計算した例は Fig. 2.9 に示す。又 Fig. 2.10
Fig. 2.10' に、これに対応する二例の実測例を示す。

U 相中性点開放、強制電流印加他相浮遊

この場合 $x = 0$ と

$$I_{u_1} = I, \quad I_{u_2} = 0, \quad I_{v_1} = 0, \quad I_{v_2} = 0$$

これから積分定数も定め、演算子解を求めると、

$$V_{u1} = \frac{\bar{z}_{0\xi} I}{6} [\coth \delta_{0\xi} l + \bar{z}_{0\eta} \tanh \delta_{0\eta} l + \bar{z}'_{\xi} \coth \delta_{\xi} l + \bar{z}'_{\eta} \tanh \delta_{\eta} l]$$

$$V_{u1} = \frac{\bar{z}_{0\xi} I}{6} [\coth \delta_{0\xi} l + \bar{z}_{0\eta} \tanh \delta_{0\eta} l - \bar{z}''_{\xi} \coth \delta_{\xi} l - \bar{z}''_{\eta} \tanh \delta_{\eta} l]$$

但し $\bar{z}'_{\xi} = \frac{\bar{z}_{\xi}}{\bar{z}_{0\xi}}$ $\bar{z}''_{\eta} = \frac{\bar{z}_{\eta}}{\bar{z}_{0\xi}}$

上式を展開すると

$$V_{u1} = \frac{\bar{z}_{0\xi} I}{6} (1 + \bar{z}_{0\eta} + \bar{z}'_{\xi} + \bar{z}'_{\eta}) \{ 1 + Z \{ e^{-2\delta_{0\xi} l} + e^{-4\delta_{0\xi} l} + e^{-6\delta_{0\xi} l} + e^{-8\delta_{0\xi} l} + e^{-10\delta_{0\xi} l} - \bar{z}_{0\eta} e^{-2\delta_{0\eta} l} + \bar{z}_{0\eta} e^{-4\delta_{0\eta} l} - \bar{z}_{0\eta} e^{-6\delta_{0\eta} l} + \bar{z}'_{\xi} e^{-2\delta_{\xi} l} + \bar{z}'_{\xi} e^{-4\delta_{\xi} l} - \bar{z}'_{\eta} e^{-2\delta_{\eta} l} + \bar{z}'_{\eta} e^{-4\delta_{\eta} l} - \dots \} \}$$

但し $Z = \frac{2}{1 + \bar{z}_{0\eta} + \bar{z}'_{\xi} + \bar{z}'_{\eta}}$

$$V_{u1} = \frac{\bar{z}_{0\xi} I}{6} (1 + \bar{z}_{0\eta} - \bar{z}''_{\xi} - \bar{z}''_{\eta}) \{ 1 + Z' \{ e^{-2\delta_{0\xi} l} + e^{-4\delta_{0\xi} l} + e^{-6\delta_{0\xi} l} + e^{-8\delta_{0\xi} l} + e^{-10\delta_{0\xi} l} + \dots - \bar{z}_{0\eta} e^{-2\delta_{0\eta} l} + \bar{z}_{0\eta} e^{-4\delta_{0\eta} l} - \bar{z}_{0\eta} e^{-6\delta_{0\eta} l} + \dots - \bar{z}''_{\xi} e^{-2\delta_{\xi} l} - \bar{z}''_{\xi} e^{-4\delta_{\xi} l} + \bar{z}''_{\eta} e^{-2\delta_{\eta} l} - \bar{z}''_{\eta} e^{-4\delta_{\eta} l} + \dots \} \}$$

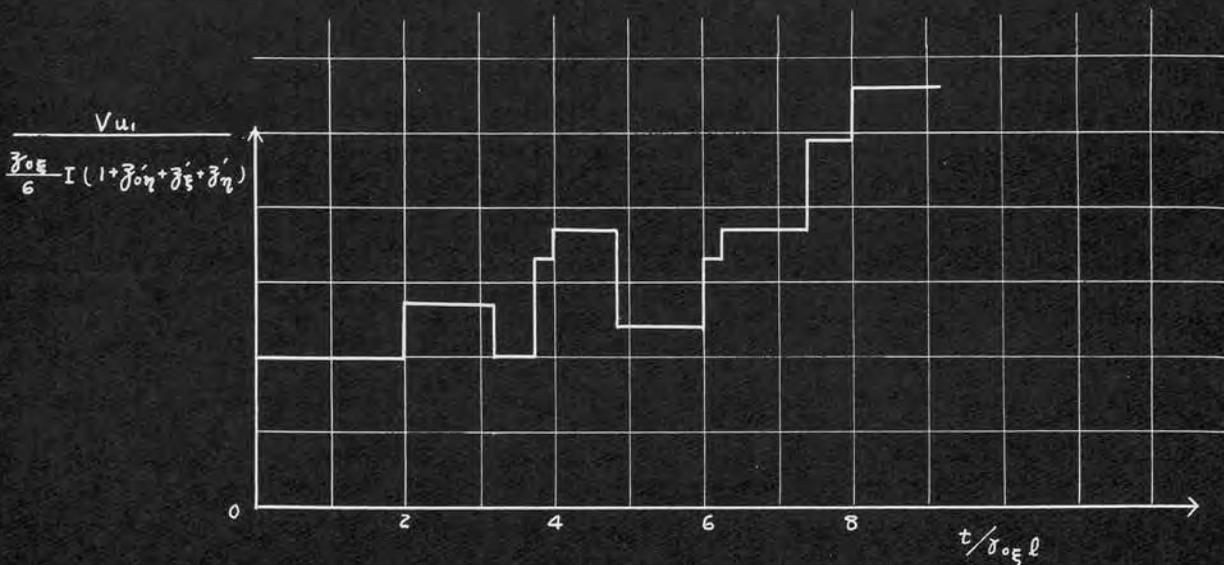


Fig 2.11 u相中性点開放、強制電流印加 他相浮遊
u相のレスポンス

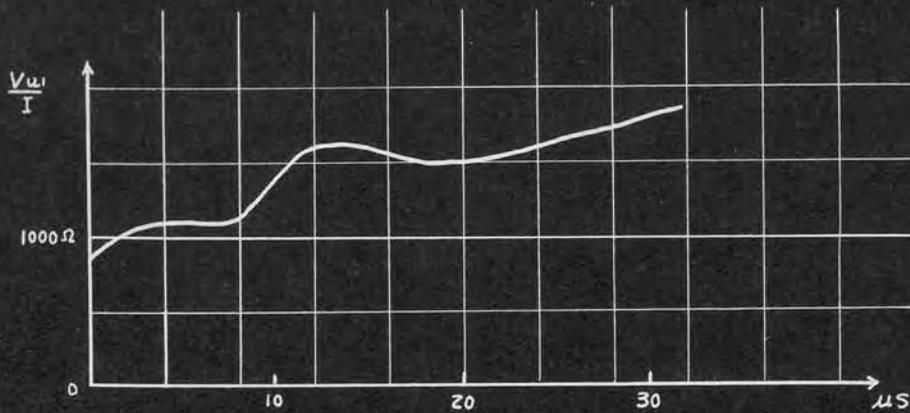


Fig 2.12 11KV 1000 KVA 1Y

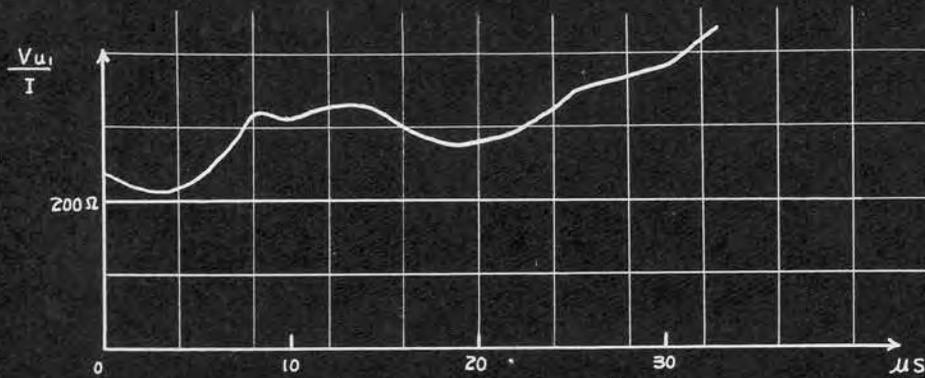


Fig 2.12' 11KV 11000 KVA 2Y

$$\text{但し } Z' = \frac{Z}{1 + \bar{z}_{0n}' - \bar{z}_{\xi}'' - \bar{z}_n''}$$

Fig 2.11 Fig 2.13 にこの場合の計算例、及び Fig 2.12 Fig 2.12' Fig 2.14 Fig 2.14' に実測例を示す。

三相一括強制電流印加

中性点開放

$$\begin{aligned} V_{u1} &= \frac{I \bar{z}_{0\xi}}{6} (\coth \gamma_{0\xi} l + \bar{z}_{0n}' \tanh \gamma_{0n} l) \\ &= I \frac{\bar{z}_{0\xi}}{6} (1 + \bar{z}_{0n}') \left[1 + \frac{Z}{1 + \bar{z}_{0n}'} (e^{-2\gamma_{0\xi} l} + e^{-4\gamma_{0\xi} l} + e^{-6\gamma_{0\xi} l} + e^{-8\gamma_{0\xi} l} \right. \\ &\quad \left. + e^{-10\gamma_{0\xi} l} - \bar{z}_{0n}' e^{-2\gamma_{0n} l} + \bar{z}_{0n}' e^{-4\gamma_{0n} l} - \bar{z}_{0n}' e^{-6\gamma_{0n} l} + \dots) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{V_{r1}}{\frac{\beta_{0\beta}}{6} I (1 + \beta_{0\eta} - \beta_{\xi} - \beta_{\eta})}$$

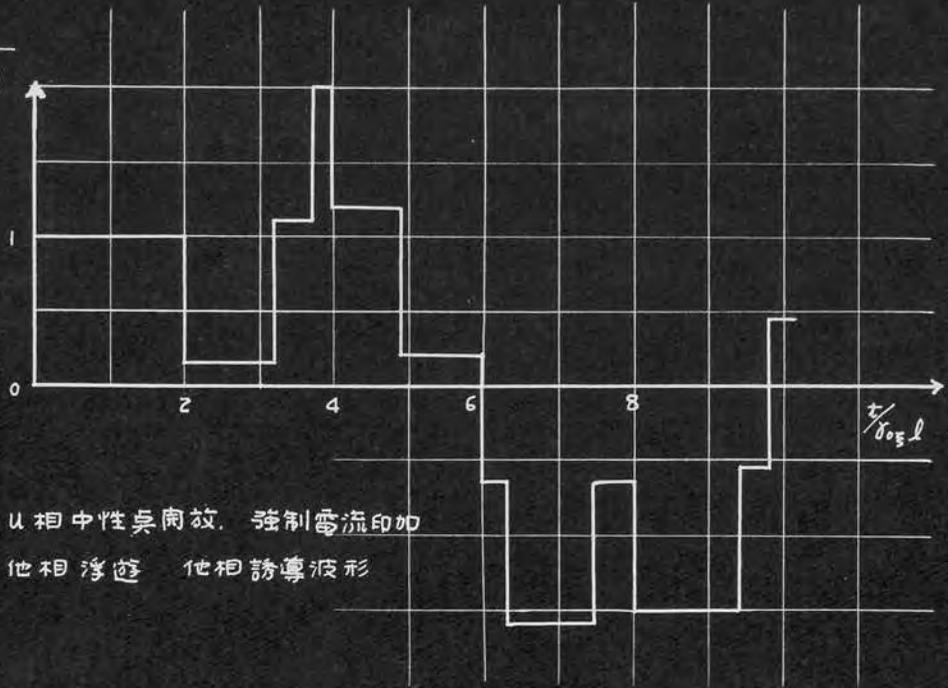


Fig 2.13 U相中性点開放，強制電流印加
他相浮遊 他相誘導波形

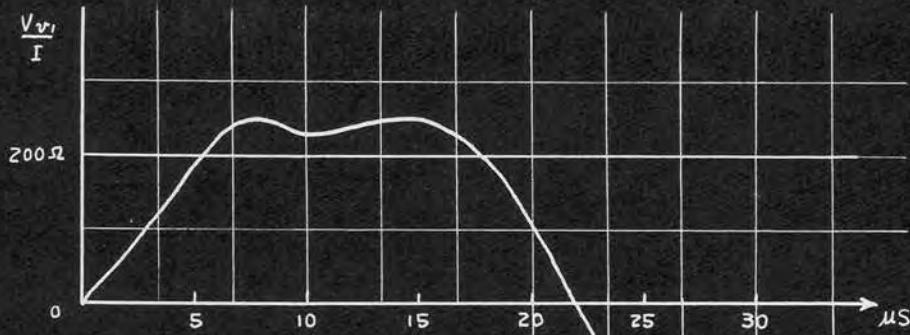


Fig 2.14 11KV, 1000 KVA 1Y

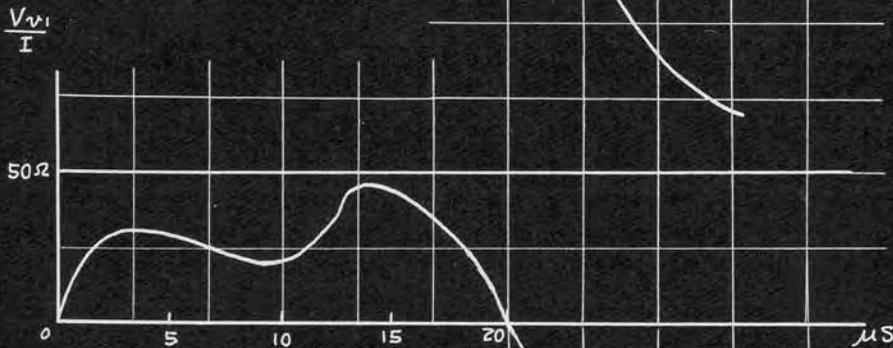
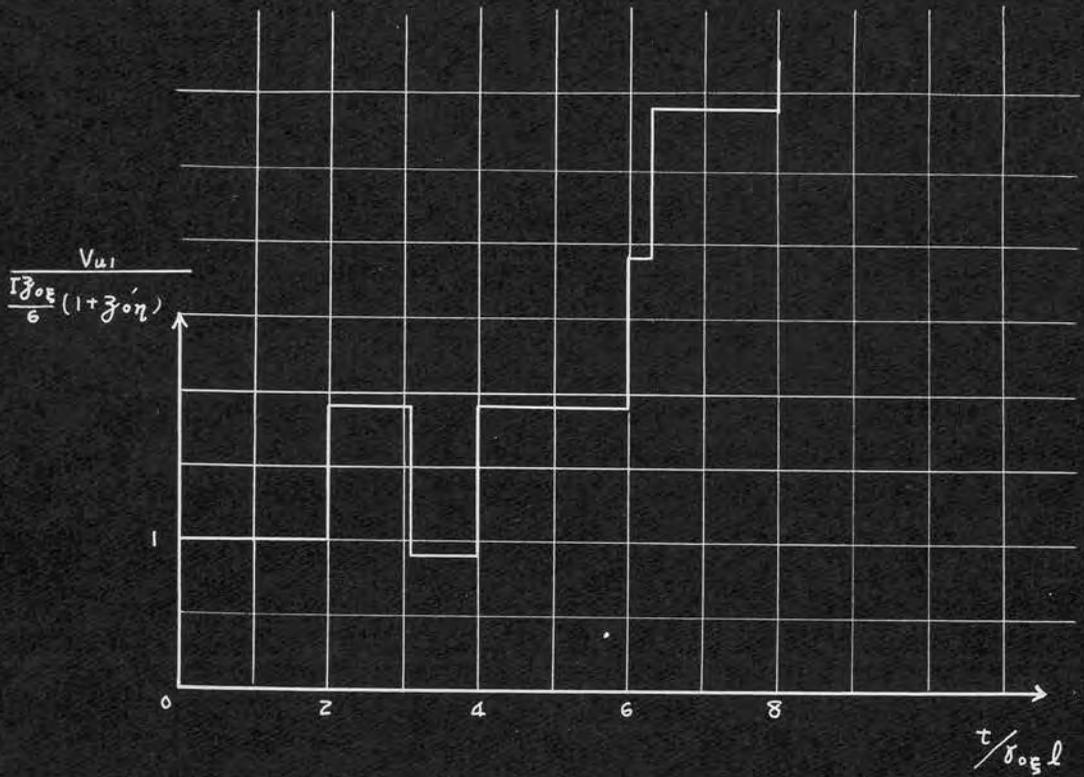


Fig 2.14' 11KV 11000 KVA 2Y

Fig 2.15 三相一桥 中性点电压



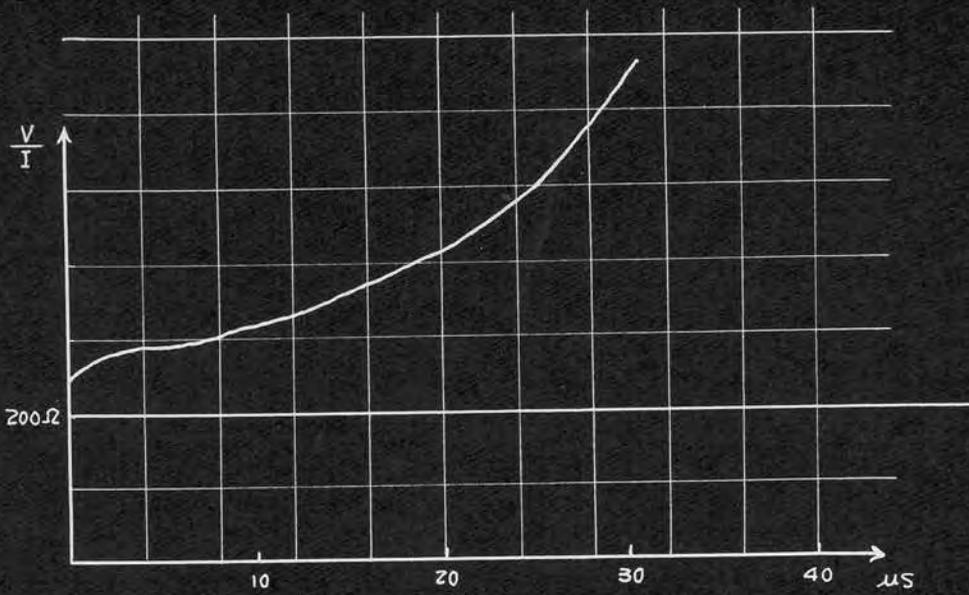


Fig 2.16 11 kV 1000 kVA 1Y

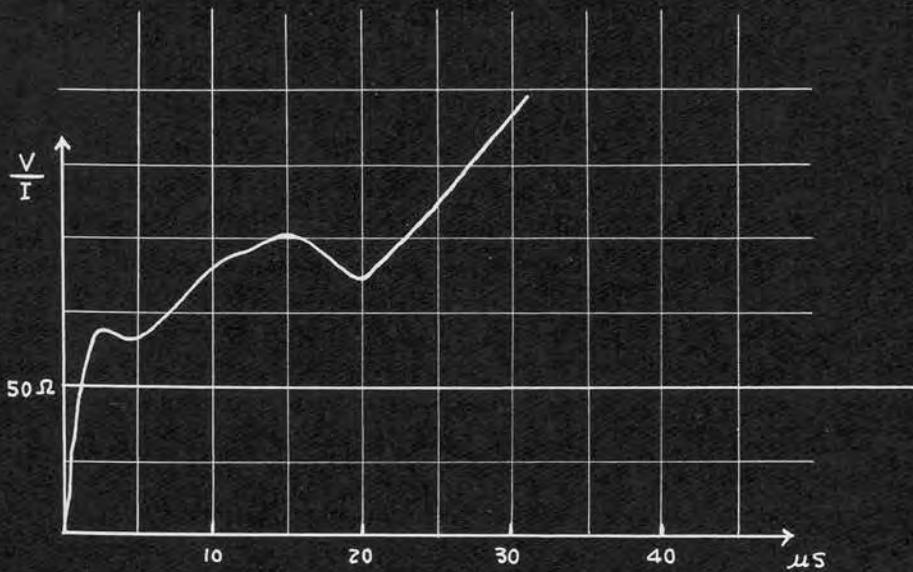


Fig 2.16' 11 kV 11000 kVA 2Y

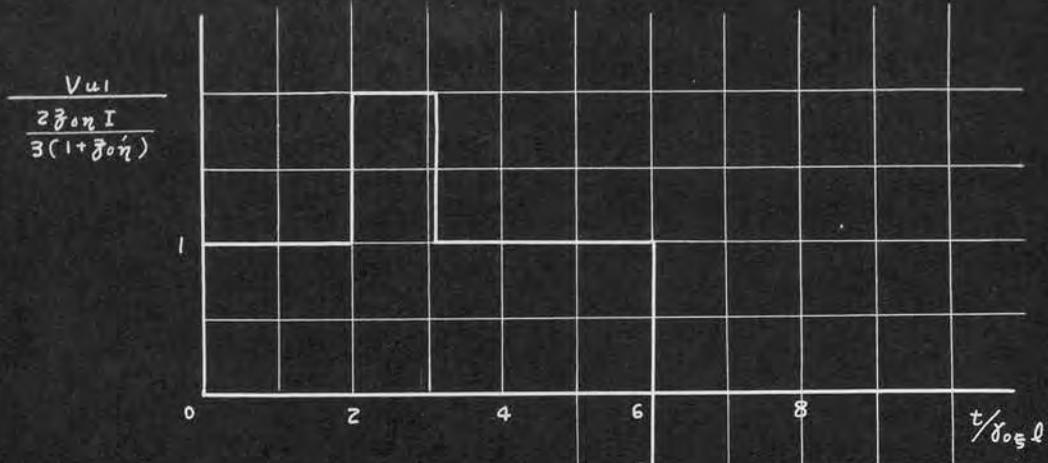


Fig 2.17 三相-一括 中性点接地

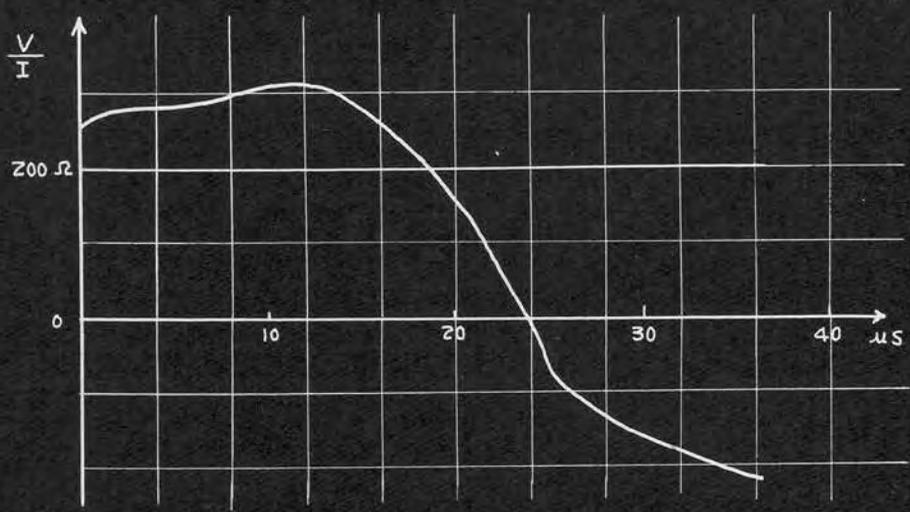


Fig 2.18 11KV 1000 KVA

脚註
 計算曲線は主として $L/M = C_1/C_0 = 6$ としたもので、この値を適當にとると実測波形のもっとよい対応がえられることが予想される。

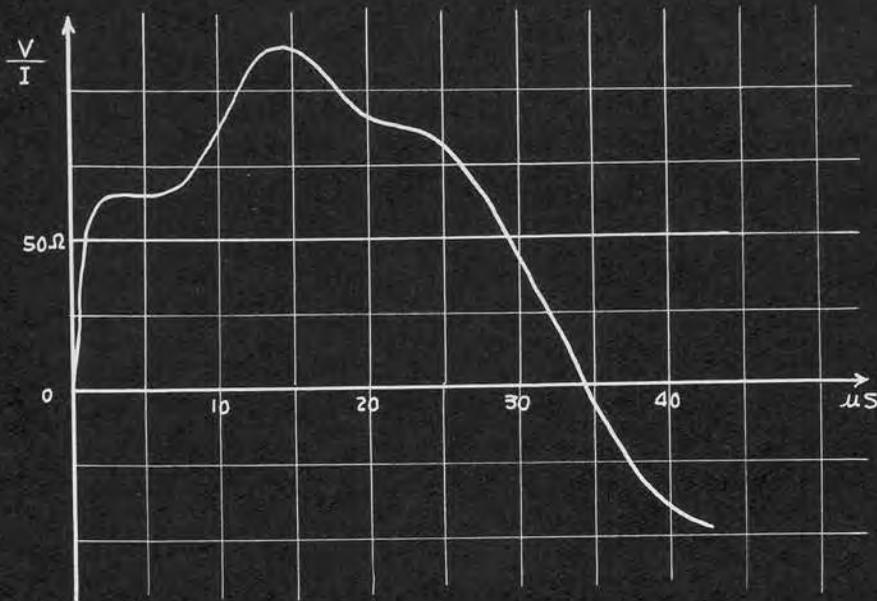


Fig 2.18' 11 KV 11000 KVA ZY

中性点接地

$$\begin{aligned}
 V_{u1} &= \frac{Z \bar{z}_{0n} I}{3} \frac{1}{\bar{z}_{0n} \tanh \delta_{0\xi} l + \coth \delta_{0n} l} \\
 &= \frac{Z \bar{z}_{0n} I}{Z(1+\bar{z}_{0n})} \left[1 + e^{-2\delta_{0\xi} l} \bar{z}_{0n} z'' + e^{-4\delta_{0\xi} l} \bar{z}_{0n} z'' (\bar{z}_{0n} z'' - 1) \right. \\
 &\quad + e^{-6\delta_{0\xi} l} \bar{z}_{0n} z'' (\bar{z}_{0n} z'' - 1)^2 + e^{-8\delta_{0\xi} l} \bar{z}_{0n} z'' (\bar{z}_{0n} z'' - 1)^3 \\
 &\quad + e^{-10\delta_{0\xi} l} \bar{z}_{0n} z'' (\bar{z}_{0n} z'' - 1)^4 - e^{-2\delta_{0n} l} z'' - e^{-4\delta_{0n} l} z'' (1-z'') \\
 &\quad - e^{-6\delta_{0n} l} z'' (1-z'')^2 - e^{-2(\delta_{0\xi} + \delta_{0n}) l} Z \bar{z}_{0n} z''^2 - e^{-2(\delta_{0\xi} + 2\delta_{0n}) l} \\
 &\quad \times \bar{z}_{0n} z''^2 (z - 3z'') + e^{-2(2\delta_{0\xi} + \delta_{0n}) l} \bar{z}_{0n} z''^2 (z - 3z'') \\
 &\quad \left. - e^{-2(3\delta_{0\xi} + \delta_{0n}) l} \cdot Z \bar{z}_{0n} z''^2 (1 + Z \bar{z}_{0n} z''^2) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{但し } z'' = \frac{z}{1 + \bar{z}_{0n}}$$

上式より $L/M = C_1/C_0 = 6$ とし計算すれば、Fig 2.15 Fig 2.17
 である。尚、この場合の实例例は Fig 2.16 Fig 2.16' Fig 2.18 Fig
 2.18' に示す。

2.2 隣極接続の場合

表 4
2800 KVA 3.5 kV
2Y
隣極接続

U_2	
1	3 U_1
2	5 W_2
3	1 U_1
4	7 W_2
5	8 V_1
6	14 U_2
7	10 V_1
8	12 U_2
9	17 U_2
10	5 V_1
11	15 U_2
12	8 U_2
13	10 W_2
14	6 U_2
15	11 U_2
16	19 W_2
17	9 U_2
18	21 W_2
19	2 V_2
20	28 U_2
21	4 V_2
22	26 U_2
23	23 U_1
24	13 V_2
25	21 U_1
26	22 U_2
27	24 W_2
28	20 U_2

この場合の結線方式の二三の例を示すと表 4 の如くなる。

この表から巻線の接続関係の大意を等価回路で表現すると、

Fig. 2.19 のやうになる。但し Fig. 2.19 において真線の部分は接続関係を示すた

けで長さをも有しないと考える。この様に巻線は大体において自己巻線の始めの部分と溝中において結合を有し、これを数回ジグザク状に繰り返しながら中性点に至る。上記のやうな等価回路によつても N 型の結合回路が数個縦続的に接続されている場合について計算することは複雑となるので一つの要素だけを抽出して、不完全ではあるがその特性の傾向を実測の結果と比較する。

この場合、内部接続の点において

$$(V_1)_{x=l} = (V_2)_{x=0}$$

$$(I_1)_{x=l} = (I_2)_{x=0}$$

が成立している。従つて (i) の場合と同様にして上の端子条件をみたす解を求めるとよいわけである。

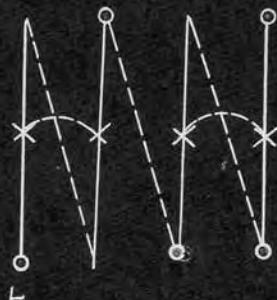


Fig. 2.19

中性点接地，强制电流印加

$$\frac{V_1}{I} = A \frac{1 + A_1 e^{-\delta a l} + A_2 e^{-\delta b l} + A_3 e^{-2\delta a l} - A_3 e^{-2\delta b l} - A_2 e^{-2(\delta a + \delta b)l} - A_1 e^{-(\delta a + 2\delta b)l}}{1 + B_1 e^{-\delta a l} - B_1 e^{-\delta b l} + B_2 e^{-2\delta a l} - B_2 e^{-(\delta a + \delta b)l} - B_1 e^{-(2\delta a + \delta b)l} + B_1 e^{-(\delta a + 2\delta b)l}}$$

$$\text{但し } A = 4 \bar{z}_a \bar{z}_b \frac{K_1}{K_2} \quad K_1 = \frac{1}{\bar{z}_a} + \frac{1}{\bar{z}_b} \quad K_2 = 6 + \frac{\bar{z}_a}{\bar{z}_b} + \frac{\bar{z}_b}{\bar{z}_a}$$

$$A_1 = -\frac{2}{\bar{z}_a K_1} \quad B_1 = -\frac{\bar{z}}{K_2}$$

$$A_2 = \frac{2}{\bar{z}_b K_1} \quad B_2 = \left(6 - \frac{\bar{z}_a}{\bar{z}_b} - \frac{\bar{z}_b}{\bar{z}_a}\right) / K_2$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{\bar{z}_a} - \frac{1}{\bar{z}_b}\right) / K_1$$

上式を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{I} = & A \left[1 + (A_1 - B_1) e^{-\delta a l} + (A_2 + B_1) e^{-\delta b l} + (A_3 - B_2 - A_1 B_1 + B_1^2) e^{-2\delta a l} \right. \\ & + (-B_1 + A_1 B_1 - A_2 B_1 - 2 B_1^2) e^{-(\delta a + \delta b)l} + (A_2 B_1 - A_3 + B_2 + B_1^2) e^{-2\delta b l} \\ & + (B_1^3 + 2 B_1 B_2 + A_2 B_2 - A_3 B_1 + A_2 B_1^2) e^{-3\delta b l} + (-A_1 - B_1 - 2 B_1 B_2 \\ & - 2 B_1^2 - 3 B_1^3 + A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_3 B_1 + A_1 B_1^2 - 2 A_2 B_1^2) e^{-(2\delta b + \delta a)l} \\ & + (-A_2 + B_1 + 2 B_1^2 - 2 B_1 B_2 + 3 B_1^3 - A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_1 + A_2 B_1^2 \\ & - 2 A_1 B_1^2) e^{-(\delta b + 2\delta a)l} + (-B_1^3 + 2 B_1 B_2 - A_1 B_2 - A_3 B_1 \\ & + A_1 B_1^2) e^{-3\delta a l} + (B_2^2 + 3 B_1^2 B_2 + B_1^4 - A_3 B_2 - A_3 B_1^2 + A_2 B_1^3 \\ & \left. + 2 A_2 B_1 B_2) e^{-4\delta b l} + \dots \right] \end{aligned}$$

これをいれる。

中性点開放，强制电流印加

$$\frac{V_1}{I} = A' \frac{1 + A_1' e^{-\delta a l} - A_1' e^{-\delta b l} + A_2' e^{-2\delta a l} + A_2' e^{-2\delta b l} + A_1' e^{-(\delta a + \delta b)l} - A_1' e^{-(2\delta a + \delta b)l} + A_1' e^{-(\delta a + 2\delta b)l}}{1 + B_1' e^{-\delta a l} + B_2' e^{-\delta b l} + B_3' e^{-2\delta a l} - B_3' e^{-2\delta b l} - B_2' e^{-(\delta a + \delta b)l} - B_1' e^{-(\delta a + 2\delta b)l}}$$

$$\text{但し } A' = \bar{z}_a \bar{z}_b \frac{K_1'}{K_2'} \quad K_1' = \frac{1}{2} \left(7 + 7 \frac{\bar{z}_a}{\bar{z}_b} + \frac{\bar{z}_b}{\bar{z}_a} + \frac{\bar{z}_a^2}{\bar{z}_b^2}\right)$$

$$K_2' = 2 \left(\frac{\bar{z}_a}{\bar{z}_b} + \frac{\bar{z}_b}{\bar{z}_a} + 2\right)$$

$$A_1' = -\frac{4}{K_1'} \left(1 + \frac{\bar{z}_a}{\bar{z}_b}\right) \quad B_1' = -\frac{4}{K_2'} \left(1 + \frac{\bar{z}_a}{\bar{z}_b}\right)$$

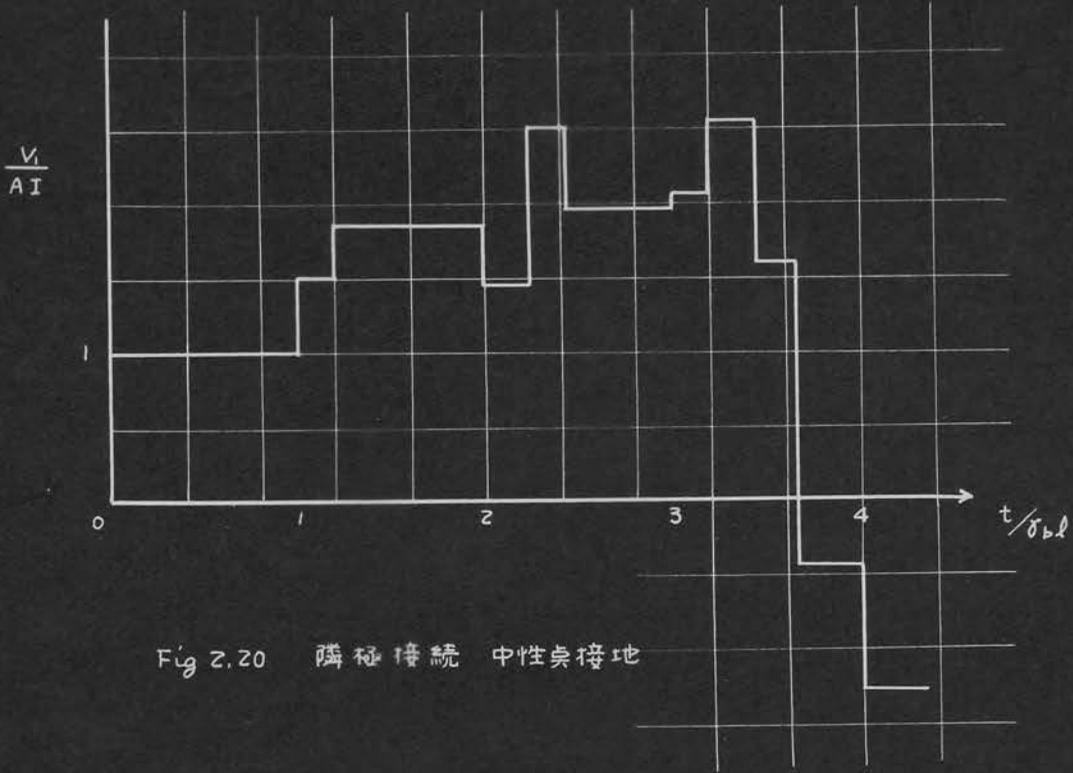


Fig 2.20 隣相接続 中性点接地

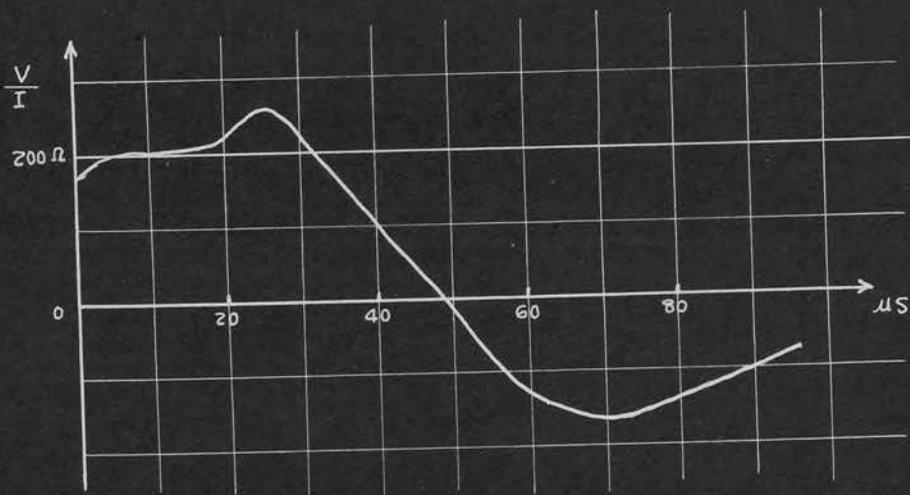


Fig 2.21 11KV 15000KVA 3Y

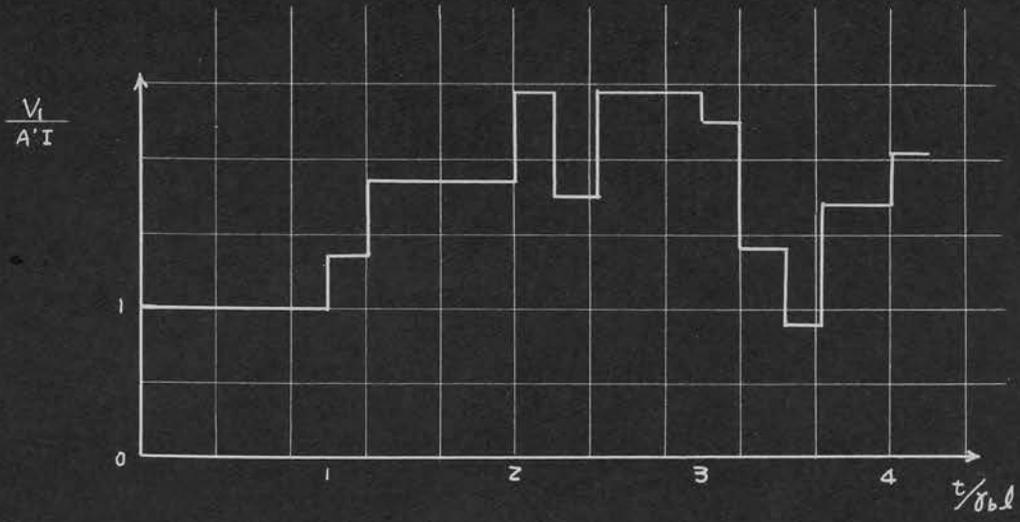


Fig 2.22 隣極接続 中性点開放

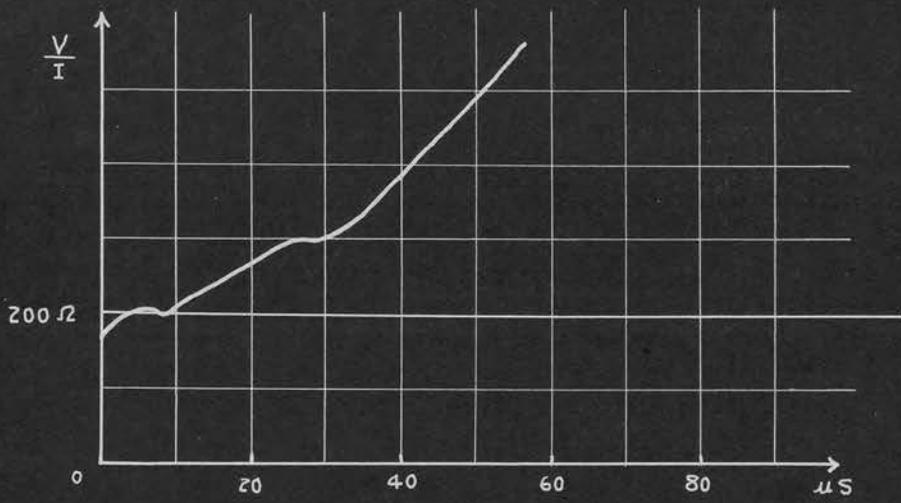


Fig 2.23 11KV 15000 KVA 3Y

$$A'_2 = \frac{1}{2K_1} \left(5 + 5 \frac{\gamma_a}{\gamma_b} - \frac{\gamma_b}{\gamma_a} - \frac{\gamma_a^2}{\gamma_b^2} \right), \quad B'_2 = \frac{4}{K_2} \left(1 + \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \right)$$

$$B'_3 = \frac{2}{K_2} \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_b} - \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \right)$$

上式を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{I} = & A'_1 \left[1 + (A'_1 - B'_1) e^{-\gamma_a l} - (A'_1 + B'_1) e^{-\gamma_b l} + (-A'_1 B'_1 + A'_2 - B'_3 \right. \\ & + B'_2) e^{-2\gamma_a l} + (A'_1 B'_2 + A'_1 B'_1 + A'_1 + 2B'_1 B'_2) e^{-(\gamma_a + \gamma_b) l} \\ & + (A'_1 B'_2 + A'_2 + B'_3 + B'_2) e^{-2\gamma_b l} + (-B'_2^3 - 2B'_2 B'_3 - A'_1 B'_3 - A'_2 B'_2 \\ & - A'_1 B'_2) e^{-3\gamma_b l} + (A'_1 + B'_1 - 2B'_1 B'_3 - 3B'_2^2 B'_1 + A'_1 B'_3 - A'_2 B'_1 - A'_1 B'_2 \\ & + A'_1 B'_2^2 - 2A'_1 B'_1 B'_2) e^{-(\gamma_b + \gamma_a) l} + (-A'_1 + B'_2 + 2B'_2 B'_3 - 3B'_1^2 B'_2 \\ & + A'_1 B'_3 - A'_2 B'_2 - A'_1 B'_1 - A'_1 B'_1^2 + 2A'_1 B'_1 B'_2) e^{-(\gamma_b + 2\gamma_a) l} \\ & + (-B'_1^3 + 2B'_1 B'_3 - A'_1 B'_3 - A'_2 B'_1 + A'_1 B'_1^2) e^{-3\gamma_a l} + (B'_3^2 + 3B'_2^2 B'_3 \\ & \left. + B'_2^4 + A'_2 B'_3 + A'_2 B'_2^2 + A'_1 B'_2^3 + 2A'_1 B'_2 B'_3) e^{-4\gamma_b l} + \dots \right] \end{aligned}$$

Fig. 2.20, 2.22 にこの場合の計算例を示す。又 Fig. 2.21, 2.23 はこの種の隣極巻の実測例であるが、隔極接続の場合と同じく、正極性の誘導波が重畳した形となる点等において傾向を—にしている。

以上、隔極接続ならびに隣極接続の各場合について計算を行った。形式的な取り扱い方としては、通常が多導線系の場合と同様であるが、物理的には、電磁結合の符号等において多少より特殊な性質をもちている。尚実測波形との比較により明らかになることは、渦流損及び誘電体損等に基づく減衰が相当に大きく、些細な反射乃至跳躍が明瞭に出ないことである。

隔極接続の場合には、さきの等価回路の近似度は良好であるので必要に応じて巻線上の電位分布、巻線間の電位傾度とかなりの程度まで計算によって求めることができるであらう。

隣極接続の場合には、一つの粗い試みを示したにとり、今後、もっと近似度のよい考察がなされることが期待される。

結 言

本論文を終るに当り簡単に結言をのべる。

第1章においては、主として巻線間の電磁誘導作用が内部振動に與える影響について述べた。変圧器巻線の場合、鉄心中の渦流効果ならびに表皮効果によつて商用周波時の磁束とくらべると、いちどるしく鉄心中の磁束は減少するが、基本周波数が1KC~60KCにある普通の内部振動においては、巻線間の電磁誘導作用を除外すれば固有振動数スペクトル、波形等内部振動としての重要な諸点が殆んど説明せられぬであらうことを述べた。

指数函数分布における電磁結合の強度 m は周波数の函数であるが基本波附近の m の値をとれば内部振動に影響を及ぼすのは第3~4調波までであるから大体充分と考えられる。又1.9節では相互誘導函数が、Fourier変換可能な偶函数である一般の場合について実用的な近似式を求めた。

損失による減衰は、種々因子が多く複雑であるが、基本周波数の1KC~50KCにある普通の内部振動の場合には \sqrt{P} 近似は適當でなく、1章2節Fig.3.1, Fig.3.2のやうな抵抗素子をもつ回路が比較的合理的であることを述べた。

第2章においては、進行波現象としての種々の基本的性質を明らかにした。又一般的な場合について嚴密な進行波解を定積分の形で與えた。これに対する評價は、定性的な事柄をしらへるとき以外には行つていぬいが今後必要に応じて行なわれるべき数値計算には、電子計算器による方法が考えられる。

第3章においては二層重ね巻の発電機巻線に沿う進行波現象を考察し特に隔極接続の場合については比較的満足な取り扱ひと結果をえた。

本論文においては、電気機器巻線を対象として考察したが、巻線一般のこの種の問題に適用できるもので、結合をこつ分布系の取り扱ひに對する一つの基礎を與えるものと思う。

参 考 文 献

- (1) L.V. Bewley; *Traveling Waves on Transmission System* 1933
- (2) R. Rüdenberg; *EE* 59 1940
- (3) 菅野正雄; *電気工学論文集* 昭19
- (4) 小川春吉 *電学誌* 昭13
- (5) A. Hochrainer *ETZ* A 74 1953
- (6) 林 西田 *京大工学研究所彙報* 第3, 4, 5輯 昭28, 29
- (7) 宮本茂榮 *東芝レビュー* 18 昭14
- (8) 三浦倫義 *電学誌* 昭11.10
- (9) 毛利正登 *日立評論* 昭14.4
- (10) Allibone *EE* 80 1937
- (11) *B.B.C. Mitt* Bd 29, 30, 33 1942 ~ 1946
- (12) A. Roth *Hochspannungstechnik* 3 Aufl
- (13) P.A. Avetti, H.B. Bleck *EE* 73 1954
- (14) Butterworth *Phil Trans. Royal Soc London. Series A* 222. 1921
- (15) Ollendorf *Erdströme* 1915
- (16) 鯨井恒太郎 *電学誌* 昭29.9
- (17) Otto Böhm *Archiv für Elek Tech* 1917
- (18) 庄司七三郎 *電学誌* 昭29.9
- (19) Pierce *Traveling Wave Tube* *I.R.E* 1947
- (20) Solfrey *J.A. Phys* July, 1951
- (21) R.S. Phillips *App math* 8 1950
- (22) Poritsky *AI EE* 72 II 1953
- (23) Steidiger *Archiv für Elek Tech* 13 1924
- (24) 林 奥田 *電気三学会支部大会講演論文集* 昭28.10
- (25) 山打 *電気三学会支部大会講演論文集* 昭29.10
- (26) 林 西田 *電気評論* 昭30.1
- (27) 林 西田 *電気三学会連合大会講演論文集* 昭30.5
- (28) 上之園 *電力技術研究所報告* 昭30.2
- (29) E. R. A *Surge phenomena* 1941