

フェイルセーフ交番論理系および自己修復
系による高信頼性システムに関する研究

昭和47年6月

山本 英雄

緒 言

一つのシステムを設計する際、その機能の実現と同時に、それに必要とされる信頼性をどのようにして確保するかが重要な課題になる。このための直接的かつ基本的な方法は、そのシステムの構成要素に十分に高い信頼性のあるものを使用して、そのシステムを単体として必要な信頼性を確保できるように構成することである。しかし、システムの故障の確率はそれを構成している要素の故障の確率の積として表わされるために、システムの規模が大きくなり含まれる構成要素の数が増大すると、入手可能な最高の信頼性を持つ部品や材料を構成要素としても、なおかつ必要とされるシステムの信頼性を確保できない場合が少なくない。こうして、信頼性を確保するための第2の方法として、いわゆる冗長法あるいは冗長方式（第Ⅱ部の文献〔S〕、および〔Sh〕のpp・107-109など）の考え方が利用されることになる。これは、構成要素の信頼性の不十分さを、構成要素を余分に用いることによって補なおうという考え方である。この冗長方式とその信頼性に関する諸問題については、1952年の von Neumannの確率的論理に関する研究（第Ⅱ部の文献〔N〕）を端緒として今日まで多数の研究が進められてきた。それらの成果は、これまでシステムの高信頼性設計の技術として大きな貢献をしている。しかしながら、現在または今後予想される一層大規模で複雑なシステムへの要求を考えると、その信頼性確保のためには、冗長方式の新しい方向を求める努力はなお重要である。

本論文は、このような事情を背景として、高信頼性システム設計のための冗長方式に関連する二つの理論的な問題をとりあげて検討する。第一は、筆者等が交番論理系と名付けた時間冗長システムのフェイルセーフ構成の問題であり、第Ⅰ部で述べる。第二は、予備系に定期的な保守を行なり自己修復系（self-repairing system）の信頼度解析の問題であり、第Ⅱ部で論ずる。

さて、電子計算機システムに代表されるように、大規模な論理系を設計しようとするとき、その故障検査の手順が極めて複雑かつ莫大になり、それが系の高信頼性実現の障害となることがしばしば生ずる。これに対し、ある程度の冗長性を許しても、所与の論理系をあらかじめ故障検査が容易なように構成する試

みがある。交番論理系はこのような考えに沿う故障検査容易な論理系の一つである。論理系の故障は、その故障検査の立場からは、多くの場合、系の構成要素が正常時にとるべき（二値の）信号値が1か0のいずれか一方の値に固定してしまふ状態と見なすことができる。いわゆる stuck-at-1または stuck-at-0故障がこれである。したがって、このような故障状態と明確に分離できる何らかの動的な状態で正常時の論理動作を行なう論理系を想定すると、その系の故障検査は容易であろうと予想される。第I部で議論する交番論理系は、このような発想に基づく時間的相補二重系であり、二値論理値1と0とを、それぞれ時系列としての対信号 $\langle 1, 0 \rangle$ と $\langle 0, 1 \rangle$ とで表わし、他方、故障状態を $\langle 1, 1 \rangle$ と $\langle 0, 0 \rangle$ とで表わす。その結果、系の故障を、その出力信号が $\langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ であるかどうかを監視することだけによって検出できることが期待される。このような考えは、早く、Bark等（1953）によって pulse position modulation の論理系の故障検出への応用として提唱され、また高橋等（1960）によっても、直流消去形エサキダイオード論理回路の無直流性成立の検査のために用いられた。最近では上林等（1969）による双方向性論理回路の故障検査にも同様の考えが応用されている。

ところで、この交番論理系において、故障表示信号として使用する $\langle 1, 1 \rangle$ と $\langle 0, 0 \rangle$ とを検出することによって、系の故障検査が有効に遂行できるためには、本来 $\langle 1, 0 \rangle$ または $\langle 0, 1 \rangle$ であるべき系の出力信号が、生じた故障によってそれぞれ他方に誤まるような事態が発生しないことが必要である。筆者は、この問題の重要性に留意し、そのような事態が生じないという条件によって、交番論理系にフェイルセーフ性の概念を導入し、与えられた論理系をフェイルセーフな交番論理系として構成するという問題に着目した。このフェイルセーフ性の考え方は、渡辺の提唱した非対称誤まり素子を用いるフェイルセーフ論理系におけるフェイルセーフ性の概念の拡張であり、また一方、浦野等による ϕ フェイルセーフ性の一つの現実的モデルとなっている。第I部では、まず交番論理系を定式化し、それを物理的に実現する手段としての交番回路の構成法を体系的に述べる。つづいて、上に述べたフェイルセーフ性を定式化し、所与の交番回路をフェイルセーフに実現するための一般的諸条件を明らかにす

る。またそれに基づいて、素子の任意の単一故障に関してフェイルセーフである交番回路の構成法、素子の多重故障に関するフェイルセーフ交番回路の実現可能条件、さらに順序回路へのフェイルセーフ交番回路の応用について論ずる。

第Ⅱ部でとりあげる自己修復系とは、複数個の動作ユニットと複数個の予備ユニット、および、動作ユニットの故障を検出して自動的に正常な予備ユニットに切り換える機能を有する切換器とを持つようなシステムを意味し、その非常に簡単な場合として、従来使用されている待機冗長系や並列冗長系を包含する。このようなシステムの信頼度、MTTF (平均寿命: mean time to failure), 稼働率 (availability) などの信頼性尺度を決定する主要因は、予備ユニットの数と予備ユニットに対する保守あるいは補給の方法である。信頼度解析の研究の端緒も先に述べた von Neumann の研究であり、その後多数の研究が行なわれ、通常の待機冗長系や並列冗長系はもとより、かなり複雑なシステムについても結果は確立されている。研究のアプローチの主流は待ち行列理論の応用であり; これによれば、システムの故障過程はマルコフ過程として一つの連立微分方程式系で表わされる。上に述べたような自己修復系に関しても、このような方法によって、系の始動後予備の保守を行なわない場合や、予備数が一定値以下になったときにその予備の保守を行なう場合についてはよく研究されている。これに対して本論文第Ⅱ部は、予備系に一定の周期で、予め定めてある時点だけで保守を行なう場合を検討するものである。本論文では、このような保守方式を“定時保守”と呼ぶことにする。自己修復系に対するこのような保守方式は實際上重要な意味がある。というのは、高い信頼性を必要とするシステム、あるいは24時間運用を要求されるシステムでは、従来、故障発生時ただちに修理にかかる保守態勢をとることが一般的であり、このため保守要員の24時間配置が必要とされるという困難さがあるが、これに対し、一定時に保守を行なう系では、保守要員の配置はより容易であり、能率の良い保守態勢をとることができると期待されるからである。この定時保守方式をとる自己修復系を設計しようとするれば、予備ユニット数、保守の間隔、保守に要する時間などの信頼性に及ぼす影響を詳細に知る必要がある。しかし、このような系は、その始動からシステム故障に到る過程を一つの微分方程式系で連続

的に表わすことが難かしいという事情があるため、これまであまり検討されていない。

この問題に対して、第Ⅱ部では、複数個の同一の動作ユニットの直列システムである動作システムと複数個の予備ユニットからなる自己修復系において、その予備に一定の間隔で点検を行ない、故障したユニットが発見されれば一定時間でその修理を完了するというモデルを設定し、その信頼度を検討する。まず、このモデルに対して信頼度の厳密な表示式を導く。結果は、保守時間が零でない場合、行列積を含む式で表わされ数値解析が困難であり実用的でない。そこでつぎに、保守時間が保守間隔に較べて非常に小さいという実際的な条件を与えてその実用的な近似式を得る。これに基づいて、モデルのMTTF、および、このモデルで予備に対する保守をしないとして求められるMTTFに対するモデルのMTTFの延び率の表示式を導く。これらの結果にもとづいて、予備ユニット数、動作ユニット数、各ユニットの故障率、保守間隔、保守時間などのシステム変数とその信頼性にどのように影響するかを論ずる。

これらの結果は、このような自己修復系の信頼性設計のための基礎資料となるものである。

目 次

緒 言

第 I 部 フェイルセーフ交番論理系の構成	1
第 I 部の記号表	1
第 1 章 第 I 部の序論	3
1.1 フェイルセーフ交番論理系に関連する諸研究	3
1.2 第 I 部の研究の目的と概要	10
1.3 予備定義と記法	13
1.3.1 論理記号	13
1.3.2 集合, 関係, 写像	14
1.3.3 論理代数, 論理関数	15
1.3.4 グラフ, 道	18
第 2 章 交番論理系	21
2.1 交番関数	21
2.1.1 予備定義と記法	21
2.1.2 交番関数	22
2.2 交番関数の実現—交番回路—	25
2.2.1 交番回路	25
2.2.2 自己双対回路による交番回路	26
2.2.3 自己双対素子による交番回路	28
第 3 章 交番論理系のフェイルセーフ構成	30
3.1 フェイルセーフ交番回路とその一般的性質	30
3.1.1 フェイルセーフ性の定義	30
3.1.2 故障検出可能性	33
3.1.3 自己双対回路におけるフェイルセーフ条件	35
3.2 単一故障に関するフェイルセーフ条件	39
3.2.1 フェイルセーフ条件	39
3.2.2 入力誤まりに関するフェイルセーフ性	42

DOC

1972

16

電気系

3.2.3	交番素子交番回路のフェイルセーフ性	43
3.2.4	フェイルセーフ交番回路の構成条件	44
3.2.5	フェイルセーフ交番回路の構成法	47
3.3	多重故障に関するフェイルセーフ条件	51
3.3.1	入力誤まりに関するフェイルセーフ条件	52
3.3.2	素子の多重故障に対するフェイルセーフ交番回路	54
3.4	非対称故障素子によるフェイルセーフ交番回路の構成	55
3.4.1	非対称故障	55
3.4.2	フェイルセーフ交番回路の構成	56
3.4.3	非対称入力誤まりに関するフェイルセーフ条件	59
第4章	交番論理系の応用	65
4.1	交番順序回路網	65
4.1.1	交番順序回路網の定義	65
4.1.2	フェイルセーフ条件	67
4.2	フェイルセーフ交番論理系による自己修復 機能を持つ二重系の構成	71
4.3	実用性に関する議論	73
4.3.1	交番論理系の冗長度	73
4.3.2	故障検出可能性	75
第5章	第I部の結論	77
第II部	予備に定時保守を行なう自己修復系の信頼度解析	81
第II部の記号表		81
第6章	第II部の序論	83
6.1	自己修復系とその信頼度解析に関する諸研究	83
6.2	第II部の研究の目的と概要	86
6.3	予備定義	88
第7章	信頼度解析	91
7.1	モデルの説明	91

7.2	定時保守を行なわない場合の信頼度とMTTF	93
7.2.1	信頼度	93
7.2.2	MTTF	96
7.3	定時保守下の信頼度とMTTF	96
7.3.1	信頼度	96
7.3.2	$\alpha \ll 1$ の場合の信頼度の近似式	99
7.3.3	MTTF	101
7.4	定時保守の効果	102
7.4.1	MTTFの伸び率	102
7.4.2	信頼度に対する定時保守の効果	108
7.5	稼働率	109
7.6	議論	110
第8章	第II部の結論	113
謝辞		114
参考文献		115
付録		129

第 I 部 フェイルセーフ交番論理系

の構成

第 I 部の記号表

第 I 部で全般的に使用される記号をここに一括して挙げておく。

- \forall : 全称記号。
 \exists : 存在記号。
 $+$: 論理和を表わす演算記号。
 \cdot : 論理積を表わす演算記号 (通常, 省略)。
 \geq : 論理関数 (P. 16) あるいは対変数 (P. 22) の半順序関係。
 \neq : 比較不能 (p. 16)。
 \bar{x} : 論理変数 x の否定。
 \cup : 集合和を表わす演算記号。
 \cap : 集合積を表わす演算記号。
 $-$: 集合差を表わす演算記号。
 \supseteq : 集合の包含関係。
 $1, 0$: 二値論理値, 真および偽。
 $\langle a, b \rangle$: a, b をそれぞれ第 I, 第 II 成分とする時系列としての 2-tuple, すなわち, 対信号, 対変数, 対関数などを表わす。
 $\{a, b, \dots\}$: a, b, \dots を要素とする集合。
 $\{a : P\}$: 性質 P をもつ要素全体の集合。
 $a \in A$: 要素 a は集合 A に含まれる。
 $a \notin A$: 要素 a は集合 A に含まれない。
 S : 集合 $\{1, 0\}$ 。
 S^n : 集合 S の n 次の直積。
 D : 対信号の集合, すなわち $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle\}$ 。
 D_A : 交番信号の集合, すなわち, $\{\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle\}$ 。
 D^n : 集合 D の n 次の直積。
 D_A^n : 集合 D_A の n 次の直積。
 $x, y, \text{ など}$: 論理変数。

x, y , など: 対変数。

x^j ($j=I$ または II): x の第 j 成分, すなわち $x = \langle x^I, x^{II} \rangle$ 。

X : (x_1, x_2, \dots, x_n) のベクトル表現。

\bar{X} : $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ のベクトル表現。

X : (x_1, x_2, \dots, x_n) のベクトル表現。

X^j ($j=I$ または II): X の第 j 成分, すなわち $X^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j)$ 。

$f(X), A(X)$ など: X を変数とする論理関数。

f^D : 論理関数 f に双対な論理関数。

F : 対関数, あるいは交番関数。

F_f : 論理関数 f に対する交番関数, すなわち $F_f = \langle f, f^D \rangle$, あるいは f の交番回路。

F_f^* : 論理関数 f に対する対関数。

f^j ($j=I$ または II): 対関数 F の第 j 成分, すなわち, $F = \langle f^I, f^{II} \rangle$ 。

$\varphi(c, X)$: 交番回路 F_f を実現する自己双対回路の関数, すなわち,

$$\varphi(c, X) = c f(X) + \bar{c} f^D(X)。$$

C : 交番回路。

C : C を実現している自己双対回路。

N : 交番回路網。

N : N を実現している自己双対回路網。

M : 順序回路網。

M : M に対する交番順序回路網。

e : 故障。

f_e : 故障 e による f に対する故障論理関数。

$F_{(e)}$: 故障 e による F に対する故障対関数。

L : 一つの素子の出力線全体の集合。

L_e : 故障 e の原因となる L の部分集合。

第1章 第I部の序論

1.1 フェイルセーフ交番論理系に関連する諸研究

近年、さまざまな分野において、電子計算機に代表される大規模かつ複雑なデジタルシステム（論理系）が重要な役割を果たすようになってきた。そのような場合、システムに一旦故障が発生すると、システムの複雑さのためにその原因究明に非常に手間どり、それが重大な経済的損失を惹起することが少なくない。そのような損失を少なくするためには故障が発生したときにその影響が広がらないよう、できるかぎり速やかにその故障を検出できるようにシステムを構成しておくことが肝要である。このために従来使用されている技術の代表的なものとして、

- (i) システムを並列二重化、あるいは三重化して出力の比較検査を行なう方法、
- (ii) パリティチェック、あるいはより一般的な誤り検出符号、誤り訂正符号の利用、
- (iii) 予かじめ用意したテスト入力を故障したと思われるシステムに加え、その出力をシステムの正常時の出力と比較して故障の検出や深知を行なう方法、いわゆる故障診断、

を挙げることができる。これらについては電子計算機の誕生以来多数の研究が続けられてきた。現在ではそれらを体系的にまとめた文献

（〔CMM〕、〔P〕、〔SHB〕など）も少なくないのでここで立ち入るとは避ける。(i)、(ii)、(iii)の技術は、実際非常に効果的で広く実用されているが、今後予想されるシステムの一層の大規模化、高集積化、高度の複雑化を考えるとそれだけでは十分とはいえない。たとえば、(i)はシステム動作時の故障検出の方法として非常に有効であるが、そのためにだけ利用するには冗長度が大きすぎる。(ii)は符号が高度になるに従って、符号の検査回路が複雑かつ大きくなり、それ自身の故障が無視できなくなる。(iii)は故障検査のための最も一般的な方法であるが、対象とするシステムが大きくなると必要な検査の数が莫大となり、そのため時間を要

し、特に動作時の故障検査には不向きである。

このような事情を背景として、近年、論理回路あるいは論理素子の設計に際し、予かじめ積極的にその故障検査や保守が容易になるような構造を実現しようとする研究が行なわれるようになった。これは、大規模な論理系を設計する場合にしばしば経験される故障時の検査や保守の困難さの本質的な原因が、機能本位に偏った従来の論理回路の構造にあるという反省の上に立っていると思われる。新しく目ざす論理素子や論理回路は従来のものと比較して機能本位に見ると冗長部分を含むことになるであろうが、それによって期待される保守手順の容易さを考慮すると、経済的にも十分ひきあう場合が少なくないと考えられるのである。この第 I 部で検討しようとするフェイルセーフ交番論理系もこのような考えに沿った故障検査容易な論理系の一つである。以下では、この研究に密接な関係を持つ、従来のフェイルセーフ論理系に関する諸研究を中心に、故障検査容易な論理系に関する研究動向の概観を試み、また交番論理系の古典的な試みについての紹介を行なう。なお、ここで言う“故障検査容易な”論理系とは、具体的には、故障検査のために特別な検査入力を要せず、その出力において、定められている特定の故障表示信号の検査だけを行なえばよいような論理系、あるいは、検査入力を要してもその数が非常に少ないか、あるいは、その検査入力が非常に簡単に求められるような論理系を意味している。

まず、近年のフェイルセーフ論理系の研究を見る。これは故障を本質的に避けえないものとして、その故障状態をそれによる被害が最小になるような状態に封じ込めようという考えに立脚している。よく知られている例に交通信号機の制御装置のフェイルセーフ設計がある。この例では、装置に故障が発生した場合に、本来青である信号が、停止信号である赤に誤まることを許しても、その逆の事態が発生しないようにできるだけの手段が取られる。つまり、この場合には、まず交通の停止を行なうことが最も安全あるいは損失が少ないと考えられている。このようにフェイルセーフ設計の思想は素朴で、またかなり古いものであるが

(〔H〕,〔BCC〕,〔Nk〕,〔Tak〕,〔L〕),これを論理設計上の新しい問題として取り上げたのは1965年の渡辺,高橋の〔WT1〕が最初である。その中で彼等は故障が生じた時の誤り出力値が1,0のいずれか一方だけに定まっている(二値の)論理回路を“フェイルセーフ”論理回路と定義し,フェイルセーフ論理回路は,故障したときの故障出力値が1,0のいずれか一方だけに定まっているような論理素子を用いて実現できることを示し,さらにそのような回路例も示した。本論文では以後,このような論理素子を“非対称故障素子”と呼ぶことにするが,従来は,フェイルセーフ基本回路(〔WU2〕)や,非対称誤まり素子(〔HTK1〕)などとも呼ばれている。渡辺等が示した非対称故障素子はダイオードトランジスタ論理回路によるNANDとNOR回路であり,回路内の構成部品レベルでの二重化によって,どの構成品の単一故障に対しても,そのときの誤まり出力値が1か0かのいずれか一方に限られるようにしたものである。以後,非対称故障素子の具体的実現について様々の提案が行なわれた。駒宮等は発振現象の特徴に着目し,回路内の任意の故障の結果が発振停止に帰するようにした閾値発振回路とダイオード論理回路を組み合わせて,exclusive-OR,OR,NOT回路を構成した(〔KTM〕,〔KMT〕,〔TuKM〕,〔TuM〕)。同じ考えに従って,土屋等は,異なる入力毎に異なる周波数の閾値発振器を用意し,ミクサによって全入力の和周波数成分を出力として取り出すようにして,3入力,4入力のAND回路を実現した(〔MuT〕,〔KaT〕)。発振に基づくフェイルセーフ論理回路で上記のものはトランスを用いているがトランスレス化の試みもいろいろ行なわれた(〔Tu1〕,〔Tu2〕,〔TSN〕,〔NWTF〕,〔NWTH〕,〔NW2〕)。コア・トランジスタ論理回路を応用したものもある(〔F〕,〔NaIH〕)。渡辺等は従来のパラメトロンにフェイルセーフ化のためのバイアス入力を付け加えたフェイルセーフパラメトロンを提案している(〔WU1〕)。これは国鉄の信号制御装置として実際に用いられた(〔ON〕)。この他の非対称故障素子の試みとして〔NW1〕,〔N〕,〔FA〕がある。

非対称故障素子によってフェイルセーフ論理回路をいかにして構成するかという、フェイルセーフ論理回路の構成理論も並行的に研究されてきた。基本的な考え方は渡辺と高橋の最初の報告〔WT1〕, および〔WU2〕に述べられているが、数学的に厳密な定式化は、三根, 古賀〔MK1〕,〔MK2〕, 橋本, 都倉, 嵩〔HTK1〕,〔HTK2〕, 平山, 渡辺, 浦野〔HWU〕で完成したといえる。これらの結論を要約すると、非対称に誤まる入力と非対称故障素子によって構成できるフェイルセーフ論理回路が実現する論理関数はユネイト関数(項1.3.3参照)であること、また、実現すべき論理関数がユネイト関数でない場合、反対方向に誤まる2種の非対称誤まり入力あるいは誤まりなしの入力と素子の二重化によってフェイルセーフ論理回路を実現できるということになる。フェイルセーフ論理回路を実現する素子の論理関数の満たすべき条件については筆者の研究がある〔Y〕。上の構成理論では素子として1に故障する素子と0に故障する素子をどちらも自由に使うことを前提としているが、一方のみを使う場合についても研究されている〔TKO2〕,〔M〕。通常素子による四重化論理〔P〕のchapter V)と同様の意味で、故障訂正機能のある論理回路を非対称故障素子回路の二重化によって実現する試みもある〔WT2〕,〔KUH〕,〔HTK2〕。

フェイルセーフ論理回路の考え方を順序回路に適用するという最初の試みも渡辺等によって為された〔WTE〕。フェイルセーフな順序回路は、その故障時の出力が1か0かの一方に限定されるという条件の上に、回路のとり状態を正常時と故障時で区別できるように構成できる。このため状態の監視を許せば、その故障検査は非常に簡単に行なえる。フェイルセーフ順序回路ではその状態割り当ての方法が主要な問題であるが、これについては都倉等が詳しく研究してk out of n 符号が有効なことを示している〔TKO1〕。

高岡, 茨木によるより一般的な研究もある〔Ta11〕,〔Ta12〕。また、宮田等はより広い意味でのフェイルセーフ論理回路について研究している〔MF〕。なおフェイルセーフ順序回路を、その状態遷移回

路に、非対称故障素子でない在来の素子を用いて構成する試みも当麻等によって研究されている（〔To1〕,〔To2〕,〔TOS〕）。ただし、この場合対象となる故障は素子の単一故障である。

以上に述べたフェイルセーフ論理回路は、故障時の誤まり出力値を正常時の二つの出力値1と0のいずれか一方に定めるものであった。このような回路は、その定められた故障出力値をシステムの安全側の動作に対応させることによって、実際的にフェイルセーフなシステムを実現するのに有用であるが、故障検査の困難さについては在来の論理回路と変わる所はない。これに対して、故障時の出力値が正常時の出力値1,0と区別できる値（ここでは、浦野（〔UH1〕）に従って“ ϕ ”と書く）に限定されるという意味での3値（1,0, ϕ ）レベルでのフェイルセーフ論理回路が考えられるようになった。その最初の考えは、渡辺、浦野の〔WU1〕の中に見られる。浦野、平山等は、これを ϕ フェイルセーフ系と名付けて、その一般的な構成理論を発表している（〔UHW〕,〔HWU〕,〔UH1〕,~〔UH4〕）。 ϕ フェイルセーフ系では、出力信号の1と0とは常に正しい値として信頼でき、一方、 ϕ を検出するだけで、特別の入出力検査をすることなく故障の検出を行なうことができる。さらに、一般的な故障診断も簡単になる（〔YW1〕）。その意味で、 ϕ フェイルセーフ系は一つの故障検査容易なシステムである。前述の ϕ フェイルセーフ系の構成理論によれば、この系はそれ自身の故障出力値が ϕ であり、図1.1の真理値表に示すような三値論理としてのAND,OR,NOTを実行する素子を用いて構成できる。そのような素子を実現しようとする試みもある（〔YW2〕,〔WY〕）。

高岡等は、 ϕ フェイルセーフ系と等価なNフェイルセーフ系を提唱し、それが非対称故障素子論理回路の相補的二重系として実現できることを示し、その代数的理論を展開している。（〔MT〕,〔Ta1〕,〔Ta2〕,〔TaM〕）。

土屋等は ϕ フェイルセーフ系と似た考え方で、否定素子と遅延素子をループ状に接続したベル形の発振回路を用いて0フェイルセーフ回路を

図 1.1 ϕ フェイルセーフ系における基本関数
(AND, OR, NOT) の真理値表

	0	ϕ	1
0	0	0	0
ϕ	0	ϕ	ϕ
1	0	ϕ	1

(a) AND

	0	ϕ	1
0	0	ϕ	1
ϕ	ϕ	ϕ	1
1	1	1	1

(b) OR

	1
0	1
ϕ	ϕ
1	0

(c) NOT

提案した ([Tu3], [Tu4])。このフェイルセーフ系の構成理論については向殿の研究がある ([MuT1], [MuT2], [Mu1], [Mu2])。Cフェイルセーフ系の論理素子は、その故障出力が ϕ になると共に、正常時に入力に一つでも ϕ が加わるとその出力値も必ず ϕ になる機能を持つ。そのため、Cフェイルセーフ系では、入力または素子に一つでも故障が存在すると系の出力は ϕ になり、故障検出は完全なものになる。

フェイルセーフ論理回路と似た考え方で、Carter等は self-testable circuit を提唱している ([CS], [BCDR])。これは誤り検出符号、あるいは誤り訂正符号の解読回路に利用されるもので、解読回路自身に故障が生じたときの出力信号が正常時の故障表示信号に一致するという特徴をもつ。これは二重誤り検出符号を利用した電子

計算機のメモリ読み出し回路の符号解読器に利用されている ([CJW])。

これまでに述べた諸研究は、主として、予らかじめ定められた特定の故障表示信号だけをシステムの出力において監視するだけで、特別な検査入力を使わないで、その動作中の故障検査が可能なシステムを扱っている。つぎに、検査入力の数が少なくなるように、あるいは、検査入力が簡単に求められるように論理回路を構成する試みについて述べる。

まず、市川、渡辺は、NAND の樹枝状冗長構成による方法を提唱している ([IW1], [IW2])。同様の思想で、山本、樹下は故障検査が容易になるよう特別に構成したモジュールを樹枝状に結合して任意の論理回路を構成する方法を提唱している ([YaK1], [YaK2])。坂内、猪瀬は機能変換回路による故障検査容易なシステムについて研究している ([SI1], [SI2], [SI3], [IS])。順序回路に対する研究もいくつか見られる ([KL], [MKO])。

故障診断の分解能に着目して回路の検査容易な構造を論じたものもある ([R], [Tks])。

上林、矢島は多数決素子に基づく双方向性論理回路の応用として、その一方の機能で与えられた論理演算を実行すると同時に、逆方向の機能でその回路の故障検査が可能なことを示した ([KY1], [KY2])。その故障検査は回路の自己双対性を利用することにより非常に簡単になっている。これも一つの故障検査容易なシステムの例である。

最後に交番論理系に関連する二つの古典的研究を紹介する。

Bark と Kinne は 1953 年に論理回路の動作中の故障検査の方法として pulse position modulation が有効であることを示した ([BK])。これは二値論理変数の値 1 と 0 とを、それぞれ時系列としての対信号 $\langle 1, 0 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$ で表わし、他方対信号のとり他の値 $\langle 1, 1 \rangle$, $\langle 0, 0 \rangle$ を回路の故障表示に使おうという考えである。 \langle, \rangle 内の 1, 0 は具体的にはパルスの有無に対応している。このような回路の具体的実現の方法としては AND, OR, NOT 素子による自己双対回路を使っている (節 2.2 参照)。

高橋，後藤，石田は1960年に変圧器結合直流消去形エサキダイオード論理回路において，無直流性の維持のために二値論理変数をBark，Kinneと同じように時系列としての対信号 $\langle 1, 0 \rangle$ と $\langle 0, 1 \rangle$ とで表わす方法を取った（〔TGI〕）。この場合 $\langle \rangle$ 内の1と0はそれぞれ相捕的なパルス（正パルスと負パルス）を表わしている。彼等も対信号 $\langle 1, 1 \rangle$ と $\langle 0, 0 \rangle$ との監視によって回路の異常（無直流性の破たん）を検出できることを指摘している。また，多数決素子と否定（変圧器を用いる）による任意の論理回路がそのままこの方式の回路として利用できること，また，この方式が順序回路にも応用できることを示している。

以上，これまでに行なわれている故障検査容易な論理系に関する諸研究について概観した。それらの中で，特に，フェイルセーフ論理回路の考え方とBark等や高橋等の古典的な交番論理の試みは本論文第I部の研究に直接的につながるものである。次節で述べるように，これら二つの考え方がそれぞれ拡張された意味で結合され，それがこの第I部のフェイルセーフ交番論理系構成論の核となっている。

さて，ここに概観した故障検査容易な論理系に関する諸研究は，より一般的立場から見ると，いわゆる fault-tolerant computing designや自己診断形計算機（self-diagnosable computer）設計のための基礎技術を担当していると言えよう。それらについてのより一般的な諸研究の経緯については〔I3E1〕によくまとめられており，最近の研究成果は〔I3E2〕や〔I3E3〕にあつめられている。

1.2 第I部の研究の目的と概要

前節で見たように，故障検査が容易な論理回路の新しい構造を求めて様々の研究が行なわれている。しかしその大部分は実用の技術としては完成しておらず，なお，発展の途上にあると言ふべきである。現在各種の分野で進行している電子計算機応用システムの大規模化，高度集積化，要求される信頼度水準の高度化の傾向を考慮すると，“故障検査容易な”

論理系の考え方は、論理系の設計のために必須の考え方であり、なお一層、新しい試みも必要と思われる。

一般に、論理系の故障検査に関する問題に対しては、論理系の故障は、系の構成要素が正常時にとるべき（二値）の信号値が1か0のいずれか一方の値に固定してしまいう状態と見なせることが多い（〔CMM〕のP.9、〔SHB〕のP.11など）。いわゆる stuck-at-1 や stuck-at-0 故障がそれである。したがって、このような故障状態と明確に分離できる動的な状態で、正常時の論理動作を遂行する論理系を想定すると、このような系の故障検査は容易であろうと期待される。筆者はこのような考えに立って、故障検査容易な論理系の設計の手法として、二値の論理値1と0とが、それぞれ時系列としての対信号 $\langle 1, 0 \rangle$ と $\langle 0, 1 \rangle$ とで表わされるような時間的相補二重系に着目した。このような二重系では対信号のとり得る他の値 $\langle 1, 1 \rangle$ と $\langle 0, 0 \rangle$ （これらは静的な対信号である）とを故障表示信号として使用できると期待されるからである。この場合、 $\langle 1, 0 \rangle$ と $\langle 0, 1 \rangle$ とはその成分が1から0にあるいはその逆に交番する信号であるといつてよい。筆者等はこの二重系を、それが交番する信号に基づいているという意味で“交番論理系

(alternating logic design)”と名付けた（〔YWU1〕,〔YWU2〕）。すでに明らかなように、交番論理系はBarkとKinneによるPPM方式（〔BK〕）、高橋、後藤、石田による無直流性論理方式（〔TGI〕）そのものである。しかしながら、両研究では回路の故障原因と対信号 $\langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ とが出力される状態との間の因果関係などについてあまり立ち入った検討はなされていない。

筆者は、この交番論理系において、出力に現われる $\langle 1, 1 \rangle$ と $\langle 0, 0 \rangle$ とを検出することだけによってこの系の完全な故障検査ができるためには、本来 $\langle 1, 0 \rangle$ または $\langle 0, 1 \rangle$ であるべき対信号が故障によって“その一方から他方に変わることがない”ことが必要である事実に着目して、交番論理系にフェイルセーフ性の概念を導入した（〔YWU2〕）。もちろん、このフェイルセーフ性は従来のフェイルセイ

フ論理回路の研究，特に ϕ フェイルセーフ系におけるフェイルセーフの考え方に合致している。実際，交番論理系はそのフェイルセーフ性が実現されているときにかぎり，出力の対信号 $\langle 1, 0 \rangle$ と $\langle 0, 1 \rangle$ とを常に正しい値として信頼でき，一方 $\langle 1, 1 \rangle$ と $\langle 0, 0 \rangle$ との検出だけで系の完全な故障検査ができる。この場合には本来 $\langle 1, 0 \rangle$ または $\langle 0, 1 \rangle$ であるべき対信号が，故障によって変化を受けるとすれば，その結果は $\langle 1, 1 \rangle$ か $\langle 0, 0 \rangle$ に限られるのである。したがって $\langle 1, 1 \rangle$ と $\langle 0, 0 \rangle$ とを故障表示の ϕ とみなせば，フェイルセーフな交番論理系は等価的に一つの ϕ フェイルセーフ系を表わしている。これまでに ϕ フェイルセーフ系を具体的に実現する方法として実際的なものは見られないが，フェイルセーフな交番論理系はその実際的な一つの実現モデルであるとも言えよう。

任意の論理関数に対してそれを実行する交番論理系が自己双対回路を使って実現できることはBark等，高橋等の研究に示されている（〔BK〕，〔TGI〕）。しかしそのようにして実現される交番論理系は必ずしもフェイルセーフにはならない。

以上の事情を背景として第I部は，フェイルセーフな交番論理系を実現するための条件が何かを問題とし，論理設計上の立場からこれに体系的な解答を与えることを目的としている。

以下，第I部の構成と概要について述べる。

まず，次節で本論文を展開するに必要な若干の数学的用語の説明を行ない本題に入る。

第二章では交番論理系について一般的な定式化を行なう（節2.1）。ついでそれを物理的に実現する手段としての交番回路を定義し，それが自己双対回路によって実際に構成できることを示す（節2.2）。この章の内容はBark等や高橋等が試みた方法を体系化して述べるものである。

第三章では，最初に交番論理系のフェイルセーフ性を交番回路を対象として厳密に定義する。この定義に基づいてフェイルセーフ性が実現されるための必要十分条件を導き，その一般的性質を論ずる（節3.1）。

つぎに、交番回路の故障として、素子の単一故障（定義18参照）を取りあげ、それに対するフェイルセーフ条件を明らかにし、任意の論理関数に対して単一故障に関するフェイルセーフな交番回路を構成できることを示す（節3.2）。つづいて、素子の多重故障に関するフェイルセーフ条件（節3.3）、非対称故障素子を使う場合のフェイルセーフ条件（節3.4）についても検討する。

第四章では、まず、フェイルセーフな交番論理系の順序回路への応用について述べる（節4.1）。つぎに、フェイルセーフな交番論理系の二重化によってある種の自己修復系が構成できることを示す（節4.2）。最後に交番論理系の時間的および、空間的（ハードウェアの）冗長度、および故障検出可能性に関して若干の議論を行なう（節4.3）。

第五章において、第二章から第四章までに得た結果の主要な結論を要約する。

前節で見たように、従来のフェイルセーフ系に関する研究の多くは非対称故障素子など故障状態に特別の制限のある素子を前提としている。それに対し、第I部の議論の主要部分は故障状態にそのような制限のない通常の論理素子を前提とするものであることを注意しておく。

なお、第I部の内容は〔YWU1〕,〔YWU2〕,〔UY〕,〔YU〕,〔YUW1〕,〔YUW3〕をまとめたものであり、主要部分は〔YUW2〕としてまとめて発表されている。

1.3 予備定義と記法

ここでは、第二章以降の議論の中で使用する、論理記号、集合、論理関数、グラフなどに関する用語の意味とそれらの記法について説明する。

1.3.1 論理記号（〔Ha〕のp.2参照）

表現の簡単化のために以下に示す論理記号を適宜使用する。なお、 P 、 Q は任意の二つの命題、 x は任意の一つの変数を表わす。

$$\begin{aligned} "P \implies Q" & : P \text{ならば} Q。 \\ "P \iff Q" & : P \text{と} Q \text{が等価, すなわち,} \\ & P \implies Q \text{ かつ } Q \implies P。 \end{aligned}$$

" $\forall x$ " : 全称記号, すなわち, "すべての x に対して" と読む。

" $\exists x$ " : 存在記号, すなわち, "少なくとも一つの x が存在する" と読む。

1.3.2 集合, 関係, 写像 ([Ha] の chapter 1 参照)

(i) 集 合

"集合 (set)" とその "要素 (element)" の意味は既知であるとしてここではそれらは説明なしに使用する。特に, 要素の数が有限である集合を "有限集合" という。

集合の表現に関してつぎの記法を用いる。

" $\{a, b, \dots\}$ ": a, b, \dots を要素とする集合。

" $\{a : P\}$ " : 性質 P を満足する要素 a 全体の集合。

なお, P が複合命題 P_1 , かつ P_2 かつ \dots , P_n なるときは,

$\{a : P_1, P_2, \dots, P_n\}$ のように略記するものとする。

" \emptyset " : 空集合

" $a \in A$ " : 要素 a は集合 A に含まれる。

" $a \notin A$ " : 要素 a は集合 A に含まれない。

ここで, A, B を任意の二つの集合とする。このとき, $a \in A \Rightarrow a \in B$ であるならば, A を B の "部分集合" と言い, " $A \subseteq B$ (あるいは, $B \supseteq A$)" と書く。また,

" $A = B$ " $\iff A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B$

とする。二集合 A, B に同時に含まれる要素の集合を A, B の "積" 集合, A の要素と B の要素を合わせた集合を A, B の "和" 集合, A に含まれるが B に含まれない要素の集合を A, B の "差" 集合と言い, それぞれを " $A \cap B$ ", " $A \cup B$ ", " $A - B$ " で表わす。すなわち,

$$A \cap B = \{ a : a \in A, a \in B \}$$

$$A \cup B = \{ a : a \in A \text{ または } a \in B \}$$

$$A - B = \{ a : a \in A, a \notin B \}$$

(ii) 直 積

n 個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n の “直積” を “ $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ” と書く。これはつぎのような n 個の要素の順序づけられた組からなる集合である。

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \\ a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n \}$$

なお、同一の集合の直積に関しては、

$$\overbrace{A \times A \times \dots \times A}^{n \text{ 個}} = A^n$$

と書くことにする。

(iii) 関係, 写像

任意の二つの集合を A, B とするとき、直積 $A \times B$ の任意の部分集合を “ A と B との間の関係” と言う。また、 $A \times A$ の任意の部分集合を “ A の上での関係” と言う。さて、“ A から B への写像” とはつぎの二つの条件を満足する関係 $R (\subseteq A \times B)$ のことである。

$$\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in R$$

$$(a, b_1) \in R \text{ かつ } (a, b_2) \in R \Rightarrow b_1 = b_2$$

1.3.3 論理代数, 論理関数 ([Ha] の chapter 2 参照)

(i) 論理代数 (boolean algebra)

論理代数の基本体系 ([Ha] の p. 46 など) は既知であるとして進む。その二つの論理値 (logical value または truth value), および基本演算である, 論理和, 論理積, 論理否定を表わすのにつぎの記法を採用する。

1 : 真。

0 : 偽。

+ : 論理和 (OR)。

• : 論理積 (AND), ただし慣用にしたがって、あいまいさのないかぎり省略。

\bar{x} : 論理変数 ((ii)参照) x の論理否定 (NOT)。

(ii) 論理変数

それのとり値が1または0のいずれかである変数を“論理変数”と言う。以下、単に“変数”と言うとき、それは論理変数を意味するものとする。

(iii) 論理関数

n 個の変数、 x_1, x_2, \dots, x_n の“論理関数” f とは、順序づけられた変数の組 (x_1, x_2, \dots, x_n) とのり値全体の集合 $\{1, 0\}^n$ から集合 $\{1, 0\}$ への写像であり、変数を明示するときは

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と書く。以下、単に“関数”と言うとき、それは論理関数を意味するものとする。なお、論理関数はそれ自身論理変数である。

(iv) 順序(半順序)関係： \leq

二つの論理値1と0の間には慣行により、つぎの順序関係があるものとする。

$$1 > 0 \text{ (あるいは, } 0 < 1 \text{)}$$

したがって、任意の二つの論理変数 x, y の間にはそれぞれのとり値により、 $x > y, x = y$, または $x < y$ のいずれかの関係が生ずる。

これにより二つの論理関数

$$f \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n), g \equiv g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

の間の等価関係(=)と半順序関係(\geq)がつぎのように定義される。

$$"f = g" \iff \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{1, 0\}^n, f = g$$

$$"f \geq g" \text{ (あるいは } g \leq f \text{)} \iff \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{1, 0\}^n, f \geq g \text{ または } f = g$$

なお、 f と g の間に $f \geq g$ も $f \leq g$ も成立しないとき、 f と g とは“比較不能”と言い、

$$"f \sim g"$$

と書く。

上の定義は、 f, g が異なる変数を持つ場合であっても、 f や g を形式的に両者の変数全体の関数とみなして、そのまま適用できる。

[例] $f_1(x, y, z) = xy + yz + zx,$

$f_2(x, y) = x + y,$

$f_3(x, y) = \overline{xy},$

とすれば, $f_1 \leq f_2, f_2 \approx f_3.$

なお, 個々の変数は, それ自身, 関数と考えてよいから, 半順序関係 \geq は当然それらにも適用される。ただし, この場合, 任意の二変数 x, y の間には必ず, $x \geq y$ または $x \leq y$ のいずれかの関係が生ずることになる。

半順序 \leq の定義から, つぎの二つの定理は自明である。

[定理 A]

$$f \geq g \text{ かつ } f \leq g \iff f = g$$

[定理 B]

$$f \geq g \iff f + g = f,$$

$$\iff f \cdot g = g,$$

$$\iff \overline{f} \cdot g = 0$$

(V) 正関数, 負関数, ユネイト関数

関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が “変数 x_i について正 [負]” であるとは, f がつぎの条件を満たすことである。

$$x'_i \geq x''_i \implies \forall (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in$$

$$\{1, 0\}^{n-1}, f(x_1, x_2, \dots, x'_i, \dots, x_n)$$

$$\geq [\leq] f(x_1, x_2, \dots, x''_i, \dots, x_n)$$

これにより, そのすべての変数について正 [負] である関数を “正関数 [負関数]” と言う。また, ある関数が, その各変数について正または負のいずれかであるとき, その関数は “ユネイト” であると言ひ, またその関数を “ユネイト関数” と言う。

[定 理 C] 関数 f がその任意の一つの変数 x について正〔負〕であるための必要十分条件は、

$f = xP + Q [\bar{x}P + Q]$, ここに、 P, Q は x に依存しない関数、と表わされることである。

(証明) [Ha] の p. 189, theorem 5 参照。

[例] $f(x, y, z) = x + \bar{y}z$

$g(x, y) = xy + \bar{x}\bar{y}$

f は x と z について正、 y について負、よってユネイトである。 g はユネイトではない。

(vi) 双対関数、自己双対関数

任意の関数 $f \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して、

$\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ で表わされる関数を“ f に双対”な関数と呼び f^D で表わす。すなわち、

$f^D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$

関数 f が、 $f = f^D$ であるとき、それを“自己双対関数”と言う。

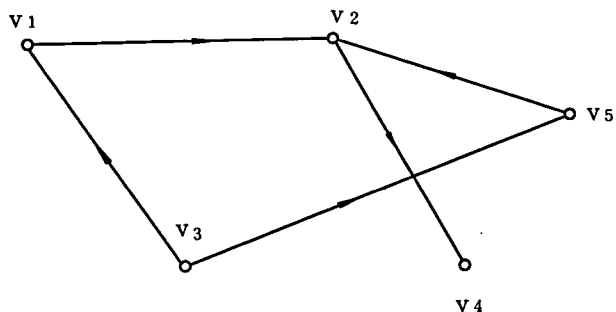
1.3.4 グラフ (有向グラフ), 道 ([B] 参照)

“グラフ” G とはある有限集合 V であって、その各要素の間に1つの関係 $R (\subseteq V \times V)$ が規定されているものをいひ、

$G = (V, R)$

のように表わす。各要素 $v \in V$ をグラフ G の“節点”, 各要素 $b = (v_1, v_2) \in R (v_1, v_2 \in V)$ を G の“枝”と言う。各枝は二つの節点の順序づけられた対であるから方向性をもつ。これを明確にする場合は、枝 $b = (v_1, v_2)$ は節点 v_1 から“出て”, 節点 v_2 に“入る”と呼び、また v_1, v_2 をそれぞれ枝 b の“始点”, “終点”と呼ぶ。この方向性を強調して G を“有向グラフ”とも言う。任意のグラフは節点を表わす“点”と、各枝に対応して点と点を結ぶ“方向をもった線”によって図式的に表わされる。一例を図 1.2 に示す。逆にそのような図そのものがグラフといってもよい。

グラフ G における節点 v_I から v_T に向かう“道” P とは、 v_I から出る枝に始まり v_T に入る枝に終わるような枝の系列であって、隣り合う枝



$$G = (V, R), \quad V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$R = \{ (v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_3, v_5), (v_3, v_5), (v_5, v_2) \}$$

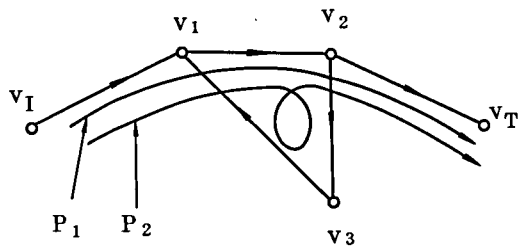
図 1.2 グラフの例 (グラフ G とその図)

が一つの節点を共有するものを言う。

途中に表われる節点を v_1, v_2, \dots, v_n とすれば道 P は

$$P = (v_1, v_1) (v_1, v_2) (v_2, v_3) \cdots (v_{n-1}, v_n) (v_n, v_T)$$

のように表わされる。図の上で、道はある点から他のある点に到る線
 の方向に沿った経路，すなわち常識的な意味での“道”に対応している。
 例を図 1.3 に示す。



$$G = (V, R), \quad V = \{v_I, v_1, v_2, v_3, v_T\}$$

$$R = \{ (v_I, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_2, v_T) \}$$

v_I から v_T に向かう道の例

$$P_1 = (v_I, v_1) (v_1, v_2) (v_2, v_T)$$

$$P_2 = (v_I, v_1) (v_1, v_2) (v_2, v_3) (v_3, v_1) (v_1, v_2) (v_2, v_T)$$

図 1.3 グラフにおける道の例

第 2 章 交番論理系

本論の主題である交番論理系のフェイルセーフ構成を議論する準備として、ここでは、交番論理系を通常の二値論理系（ブール代数系）に同形な時間的相補二重系として定式化する。また、それを具体的に実現する方法としての交番回路について述べる。

2.1 交番関数

2.1.1 予備定義と記法

〔定義 1〕 時間的に順序づけられた 2 つの論理変数の組 (2-tuple) を “対変数” と呼び、

$$\mathbf{x} = \langle x^I, x^{II} \rangle$$

と表わす。ここに、 x^I, x^{II} は通常の二値論理変数であり、 \langle, \rangle 内の位置がそれぞれの生起の順序に対応するものとする。この意味で、 x^I [x^{II}] を対変数 \mathbf{x} の “第 I [第 II] 信号 (あるいは成分)” と呼ぶ。また、対変数のとる値 $\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle$ を “対信号” と呼び、前二者を特に “交番信号”，後二者を “故障信号” と名づける。

記述の簡単化のために以下のような集合および記法を用いる。

(i) 二値論理値の集合：

$$S = \{1, 0\}$$

(ii) n 個の論理変数の組のとる値の集合：

$$S^n = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in S, x_2 \in S, \dots, x_n \in S\}$$

(iii) 対信号の集合：

$$D = \{\mathbf{x} = \langle x^I, x^{II} \rangle : x^I \in S, x^{II} \in S\}$$

(iv) 交番信号の集合：

$$D_A = \{\mathbf{x} = \langle x^I, x^{II} \rangle : x^I = \overline{x^{II}}, \mathbf{x} \in D\}$$

(V) n 個の対変数のとる値の集合 :

$$D^n = \{ \mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in D, \\ x_2 \in D, \dots, x_n \in D \}$$

(VI) n 個の対変数のとる交番信号の集合 :

$$D_A^n = \{ \mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in D_A, x_2 \in D_A, \\ \dots, x_n \in D_A \}$$

集合 D^n の元 \mathbf{X} について, その各成分 x_1, x_2, \dots, x_n の第 I [II] 信号だけからなる n 個の論理変数の組を X^I [X^{II}] と書く。すなわち,

$$X^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j), \quad j = I, II$$

これにより,

$$\mathbf{X} = \langle X^I, X^{II} \rangle$$

とも表わす。

つきに, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して,

$$\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

と表記する。また, 任意の論理関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を $f(\mathbf{X})$ と略記する。

ここで, 論理値 1 と 0 との間の順序関係 $1 > 0$ によって対変数の間の順序関係をつぎのように定義する (項 1.3.3 (VI) 参照)。

[定 義 2] 任意の二つの対変数 $\mathbf{x} = \langle x^I, x^{II} \rangle$,

$\mathbf{y} = \langle y^I, y^{II} \rangle$ に対して,

" $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ (あるいは $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$) "

$$\iff x^I \geq y^I \quad \text{かつ} \quad x^{II} \geq y^{II}$$

2.1.2 交番関数

[定 義 3] D^n から D への任意の写像 F を "対関数" と言う。

その変数 $\mathbf{X} \in D^n$ を示す場合には $F(\mathbf{X})$ と表わす。

〔定義 4〕 $F(D_A^n) \subseteq D_A$ を満たす任意の対関数 F を “交番関数” と定義する。

すなわち、交番関数は交番信号が入力であるとき、交番信号を出力とする対関数である。

一つの対関数 F に対して、2つの論理関数 f^I, f^{II} をつぎのように決定できる。

$$\forall X \in S^n \text{ に対して, } f^I(X) = F^I, f^{II}(\bar{X}) = F^{II}$$

$$\text{ここに, } \langle F^I, F^{II} \rangle = F(\langle X, \bar{X} \rangle)$$

この F を交番関数とすれば、その定義によって、

$$F^I = \overline{F^{II}} \text{ となる。これにより,}$$

$$f^I(X) = \overline{f^{II}(\bar{X})} = (f^{II}(X))^D$$

でなければならない。この逆も明らか。したがって次の命題が成立する。

〔命題 1〕 対関数 F が交番関数であるためには、上記の意味で F が決定する関数 f^I, f^{II} がたがいに双対、すなわち、

$$f^{II} = (f^I)^D \text{ であることが必要十分である。}$$

〔定義 5〕 交番関数 F が上記の意味で決定する関数 f^I, f^{II} が、関数 f に対して $f^I = f, f^{II} = f^D$ となっているとき、 F を “ f に対する交番関数” と呼び、 F_f と表わす。

ある f に対する F_f は $D^n - D_A^n$ の上での値のとり方により多数存在するが、それらを区別しないで同一とみなせば、通常の論理関数と交番関数とは一対一に対応づけられる。

本論文では、通常の論理系における、変数 x 、定数 $1, 0$ に対変数 $\langle x, \bar{x} \rangle$ 、対信号 $\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle$ 、また関数 f に交番関数 F_f を対応させる時間的な相補二重系を考え、これを “交番論理系” と名づける。

交番関数 F_f が物理的に実現されると、関数 f の計算は F_f として実現

できる。交番論理系では、故障信号 $\langle 1, 1 \rangle$ と $\langle 0, 0 \rangle$ とは冗長であるが、前章で触れたように系が物理的に実現された際、そこに生ずる故障の表示信号として有用になる。

任意の二つの関数 f^I, f^{II} が与えられると、それらから一つの対関数 F をつぎのように定義できる。すなわち、

$$F(\mathbf{X}) = \langle f^I(X^I), f^{II}(X^{II}) \rangle, \text{ for } \mathbf{X} = \langle X^I, X^{II} \rangle \in D^n$$

このような対関数 F は入力対変数の第 I, 第 II 信号にそれぞれ独立に f^I, f^{II} を作用させて、出力対変数の第 I, 第 II 信号を与えることになる。 F は入力の第 I, 第 II 信号に同期してその機能が f^I から f^{II} に交番する“可変な論理関数”といえよう。このような対関数を以後、

$$F = \langle f^I, f^{II} \rangle$$

と表わす。 F が交番関数であるためには命題 1 から明らかなように f^I と f^{II} が互いに双対であることが必要十分である。関数 f に対する交番関数 F_f は、この場合、

$$F_f = \langle f, f^D \rangle$$

と表わされる (図 2.1)。明らかに、この F_f は f に対して唯一に ($D^n - D_A^n$ 上の値を含めて) 定まる。

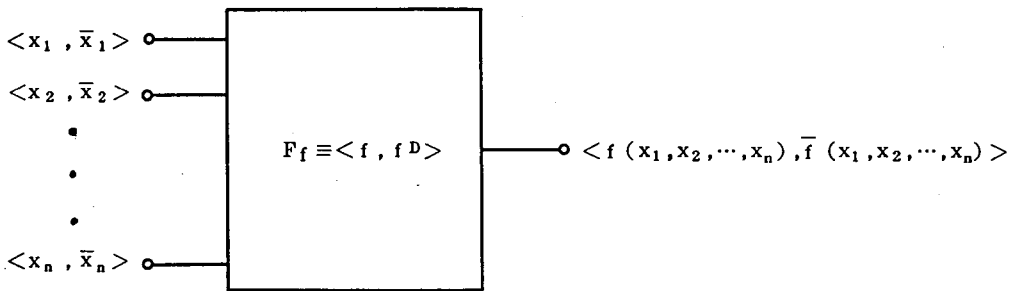


図 2.1 関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対する交番関数

次節で述べるように、交番関数を物理的に実現する現実的手段は自己双対関数回路を用いることであるが、その場合、実現される交番関数は

可変な関数となる。本論文の以下の議論は現実性を考慮して主にそのような場合にかぎる。

2.2 交番関数の実現 — 交番回路 —

2.2.1 交番回路

〔定義 6〕 交番関数を（物理的に）実現する回路を“交番組合せ論理回路”（以下，“交番回路”と略称）と定義し，交番関数 F_f を実現する交番回路を“関数 f の交番回路”と呼び同じ記号 F_f で表わす。また複数個の交番関数を同時に実現する多出力回路を“交番回路網”と呼ぶ。

交番関数を前節で述べた可変な関数とすれば、それをいわゆる可変論理回路（〔FN〕）として実現することが容易に考えられる。すなわち，入力対信号の第 I，第 II 信号に同期して出力関数を f から f^D に換えられる可変論理回路が得られれば，それを交番回路 F_f として利用できる。このような可変論理回路として，自己双対関数を実行する通常の組合せ回路（以下，“自己双対回路”）を使うことができる。この試みは文献〔TGI〕と〔BK〕にすでに見られる。後者では，AND，OR，NOT 素子を構成素子とする場合，前者では，多数決素子と否定素子などに代表されるそれ自身が自己双対関数を実行する素子（以下，“自己双対素子”）を構成素子とする場合が述べられ，それぞれにおいて任意の関数に対して，その交番回路が構成できることが示されている。以下では，それらの結果を本論文の立場から統一的に述べる。

もちろん，交番回路を実現する手段として自己双対回路は唯一ではない。直接的には，対関数の定義（定義 3）によって，一入力変数ごとに 1bit の記憶をもつような順序回路として交番回路を構成することができる。そうすることによって交番関数の $D^n - D_A^n$ 上の値を都合のよいように（入力故障の検出などに）定められる利点もある。しかし，必要とされる回路の複雑さ，そのために要するコストを考えると保守容易な論理系

として実際的とは考えられない。このことを考慮して本論文の交番回路のフェイルセーフ構成の議論は、交番回路が自己双対回路で実現される場合だけを扱おう。

2.2.2 自己双対回路による交番回路

関数 $f(X)$ が自己双対である場合、それを実行する任意の自己双対回路は、その入力変数のおのをおのに対応する対変数に変えることによって交番回路 F_f となる (図 2.2)。

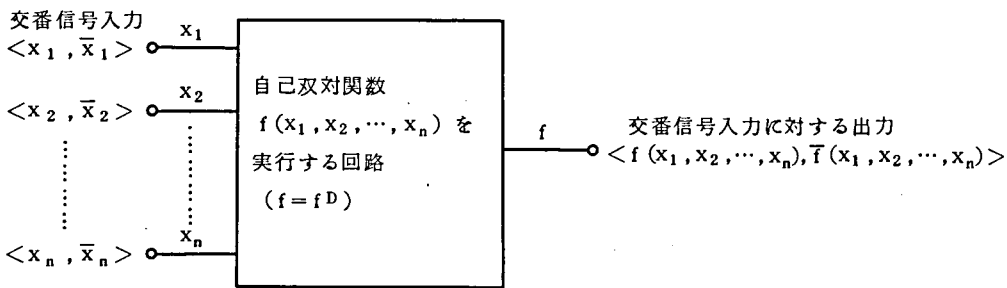


図 2.2 自己双対関数 f の交番回路の実現

つぎに、関数 $f(X)$ は自己双対ではないとする。この場合、新たな一つの変数 c を導入して、 $(n+1)$ 変数関数、

$$\varphi(c, x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \varphi(c, X) = cf(X) + \bar{c}f^D(X)$$

を作ると、 φ は自己双対であり、

$$\varphi(1, X) = f(X)$$

$$\varphi(0, X) = f^D(X)$$

したがって φ を実行する自己双対回路 (図 2.3) は変数 c をその機能の交番を制御する制御信号として、前述の可変論理回路として働き、各入力変数 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を対応する対変数 $x_i = \langle x_i, \bar{x}_i \rangle$ に変え、かつ、それと同期して制御入力に定数としての交番信号 $\langle 1, 0 \rangle$ [$\langle 0, 1 \rangle$] を加えることにより交番回路 F_f [F_f^D] となる。

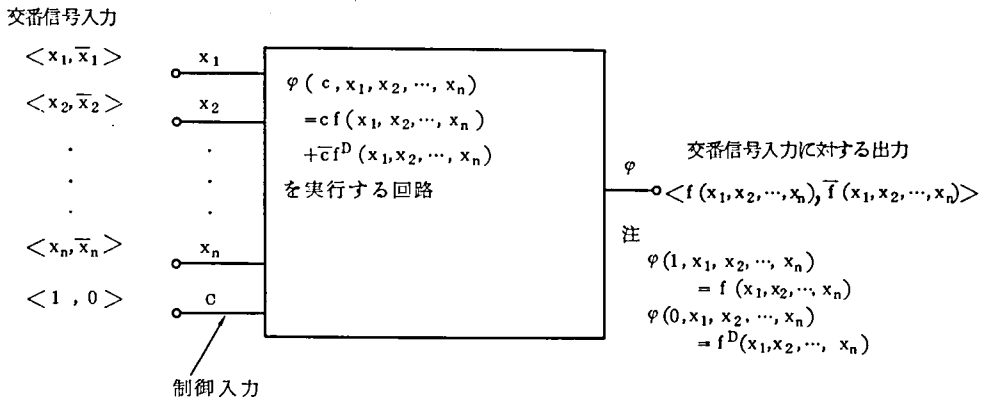


図 2.3 自己双対でない関数 f の交番回路の実現

以上の結果をまとめて、

[命題 2] 任意の n 入力交番回路は (必要なら制御信号として一つの入力変数を付け加えて)、たかだか $(n + 1)$ 入力の自己双対回路として実現される。

逆に、 n 入力の自己双対回路は、入力の 1 つを制御信号とするかしないかによって、 $(n + 1)$ 個の異なる交番回路となる。これらに対して、

[定義 7] 一つの自己双対回路 C が上記の意味で実現する交番回路を “自己双対回路 C による交番回路” と呼ぶ。

[定義 8] 自己双対回路 C が実現する交番回路で制御信号を有しないもの、すなわち、 C の出力関数 (自己双対関数) の交番回路を “自己双対交番回路” と呼ぶ。

つぎに、交番回路網の構成について付言する。

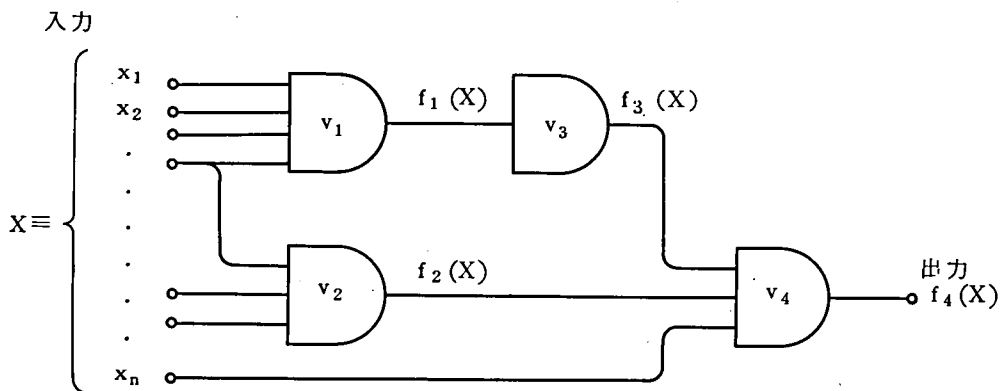
[定義 9] すべての出力関数が自己双対である多出力組合せ回路を “自己双対回路網” と呼ぶ。

明らかに、任意の交番回路網は一つの自己双対回路網 (必要なら、その一つの入力を制御信号化することによって) で実現される。

2.2.3. 自己双対素子による交番回路

〔定義 10〕 交番回路を構成する素子で、それ自身の機能が交番関数であるものを“交番素子”と呼ぶ。また、すべての構成素子が交番素子である交番回路を“交番素子交番回路”と呼ぶ。

いま、自己双対素子（その持つ機能が自己双対関数である論理素子）だけで構成された、内部にフィードバックループを持たない任意の回路を考える。説明の便宜上、図 2.4 の回路に着目する。



$v_i, i = 1, 2, 3, 4$ は自己双対素子、このとき $f_i(X) = f_i^D(X)$

図 2.4 自己双対素子を用いた回路例

その各素子、 v_i がすべて自己双対素子であるならば、合成関数としての各出力関数 $f_i(X)$ がすべて自己双対関数になることが確かめられる。この事実は一般的に成立する（〔Th〕，あるいは付録 2.1）。すなわち、このような回路は、それ自身自己双対回路であるだけでなく、その任意の部分がすべて自己双対回路である。ゆえに、この回路（その出力関数を f とする）は、その各入力を対応する交番信号に換えるだけで交番回路 F_f となる。回路の素子の一部は定数入力を持つ場合があり得るが、その場合もちろん、その定数入力 1 あるいは 0 を制御信号として扱いかい、それぞれを定数交番信号 $\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle$ に換える。こうして得られる交番回路では、その任意の部分回路がすべて交番回路であり、各構

成素子はすべて交番素子として働らくことになる。当然，回路内部に現われる対信号はすべて交番信号である。

以上のように，自己双対素子による任意の回路は入力を交番信号化するだけで交番素子交番回路となる。もちろん，交番素子がより一般的に実現される場合（交番回路について項 2.2.1 で述べたように）にも，正常時の動作は，自己双対素子による場合と同じであることは明らかである。上述の結論をつぎのようにまとめておく。

〔命題 3〕 交番素子交番回路の任意の部分回路は交番回路である。

交番素子交番回路は，その出力対信号と同様に内部の対信号を故障検査に利用することができ，またフェイルセーフ性についても次章で明らかにする特別な利点があるなどの特徴を持つ（項 3.2.3，定理 7 参照）。なお，自己双対素子の実例としては，パラメトロン，エサキダイオード対論理回路，また最近提案された可変 AND-OR 回路（〔YoM〕，〔YoMK〕），および IC による閾値論理素子（〔W〕）がある。

第3章 交番論理系のフェイルセーフ構成

最初に述べたように、本論文で議論するフェイルセーフ性の直観的な意味は、交番論理系（それを構成する交番回路とその入力）に何らかの故障が生じて、本来 $\langle 1, 0 \rangle$ [$\langle 0, 1 \rangle$]である出力交番信号は、けっして他方の交番信号 $\langle 0, 1 \rangle$ [$\langle 1, 0 \rangle$]に変わることがないということである。換言すると、変わる場合には、故障信号 $\langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ になる。したがって、フェイルセーフな交番論理系では、その出力対信号が故障信号であるかどうかを監視することによって、その動作時に故障検出ができる。他方、交番信号を出力しているかぎり、その信号は正しい値として信頼してよいであろう。ここではまず、このフェイルセーフ性を交番回路を直接の対象として定式化し、その実現条件を一般的に検討する。つぎに、その条件を交番回路の構成素子の単一故障の場合に適用し、実際的なフェイルセーフ交番回路の構成法を明らかにする。さらに、構成素子の多重故障の場合と非対称故障素子を用いた場合の交番回路のフェイルセーフ性についても論ずる。

3.1 フェイルセーフ交番回路とその一般的性質

3.1.1 フェイルセーフ性の定義

フェイルセーフ性の定義の前に、その対象となる故障が何を意味するかを明確にしなければならない。ここでは、それを交番回路が正常でない出力を発生する状態であると考え、この原因には、交番回路に異常がある場合と、入ってくる入力に誤まっている場合とが考えられる。両者を一括して、本論文で対象とする故障をつぎのように定義する。

〔定義 11〕 交番回路の構成要素および入力変数の一部あるいは全部のとり対信号が $\langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ の値に固定する状態を“故障”と定義する。特に、その故障の要因が入力変数に限られるとき、それを“入力誤まり”，また、要因が回路の構成要素に限られるとき、それを“回路故障”と呼ぶ。

この定義は、本節の議論を有効にする範囲で一般的に与えたものであり、回路故障については、議論を進めるに際し、後にさらに限定した定義を与える。

ここに定義した故障は、通常の論理回路において、その構成素子や入力のとる信号値が1または0に固定する、いわゆる stuck-at-1, stuck-at-0 の故障に対応している。すなわち、その場合の故障出力値を対信号として表わせば、それぞれ、 $\langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ となるのである。換言すれば、本論文においては、回路の構成要素が正常時にとる本来 $\langle 1, 0 \rangle$ あるいは $\langle 0, 1 \rangle$ であるべき交番信号が、一方の値から他方の値に誤まるような故障は無視することになる。しかし、このことは、以下に導く結論の一般性をそれほどそこなりものではない。というのは、故障検査に関しては、論理回路に生ずる永久故障は実際上、回路の構成要素の stuck-at-1 または stuck-at-0 故障とみることができ（〔CMM〕の p.9, 〔SHB〕の p.11）、それは定義 11 に含まれている。無視される故障は、いわば、対信号の二つの成分が同時に誤まるような一時性故障である。一方、対信号の成分のいずれか一方だけが誤まるような一時性故障は、故障した要素のとる対信号が“一時的に” $\langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ に固定する状態と考えると、定義 11 に含めて考えることができる。

実際、以下で導かれるフェイルセーフ性に関するすべての結論は、故障検出可能性に関する部分を除いて（故障が検出されるためには、それが発生した後、少なくとも故障信号が出力されるような入力加わるまで、その故障が持続する必要がある）、そのような一時性故障に対しても明らかに有効である。

つぎに交番回路のフェイルセーフ性を、回路故障と入力誤まりの2つの場合に分けて定義する。

(1) 回路故障に対するフェイルセーフ性

着目している任意の n 変数交番回路 C に対して、その入力変数を

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とし、その正常時の出力対関数（交

番関数である)を $F(\mathbf{X})$, また, ある回路故障 e が発生した場合の出力対関数 (以下, “故障対関数” と呼ぶ) を $F_{(e)}(\mathbf{X})$ と表わすことにする。このとき,

[定 義 12] $\forall \mathbf{X} \in D_A^n$ に対して, $F_{(e)}(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X})$ か, さもないければ, $F_{(e)}(\mathbf{X}) = \langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ であるならば, 交番回路 C は “故障 e に関してフェイルセーフ” であると定義する。

この定義はフェイルセーフ条件としてつぎのように定式化できる。

[定 理 1] 交番回路 C が故障 e に関してフェイルセーフであるための必要十分条件は,

$\forall \mathbf{X} \in D_A^n$ に対して,

$$F_{(e)}(\mathbf{X}) \geq F(\mathbf{X}) \quad \text{または} \quad F_{(e)}(\mathbf{X}) \leq F(\mathbf{X})$$

となることである。

(証明) 自明。

交番回路が多出力である場合, すなわち交番回路網のフェイルセーフ性については定義 12 をつぎのように適用する。

[定 義 13] 交番回路網 N に生ずるある回路故障を e とする。このとき, N が “ e に関してフェイルセーフ” であるとは, N の各出力がすべて定義 12 の条件を満たして故障 e に関してフェイルセーフであることと定義する。

同様の定義の拡張をつぎに述べる入力誤まりの場合にも適用するものとする。

与えられた交番回路 (あるいは, 交番回路網) C において, 対象とする故障の全体が, 集合 E として定められているとする。このとき, C が任意の故障 $e \in E$ に関してフェイルセーフであるならば, C は “ E に関してフェイルセーフ” あるいは “ E に関するフェイルセーフ交番回路

(あるいは、交番回路網) ” と言うことにする。なお、Eが何であるかが明らかな場合は“Eに関して”や“Eに関する”を省いて使うことも許す。後節では、このような故障の集合として、構成素子の“単一故障の全体”や“多重故障の全体”，あるいは“非対称故障の全体”などを考えることになる。

(2) 入力誤まりに対するフェイルセーフ性

上記の交番回路 C について、各入力端子を v_{I_i} , $i = 1, 2, \dots, n$ と表わし入力端子 v_{I_i} に入力変数 x_i が加わっているとす。いま入力誤まりとして、 x_i の値が $\langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ に固定しているとしよう。この場合、この状態に替えて、 x_i の値は正常として、入力端子 v_{I_i} の出力が、それぞれ $\langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ であるような回路故障を考えても、交番回路 C の出力に対する影響はまったく同じである。すなわち、フェイルセーフ性に関する議論のためには、入力誤まりを、誤まっている入力の加わっている入力端子の故障（回路故障である）に置き換えて扱かうことができる。この事実に留意して、入力誤まりに対するフェイルセーフ性をつぎのように定義する。

[定 義 14] 任意の入力誤まり e に対して、誤まった入力に加わった入力端子の出力が、加わっている入力と同じ値に固定する回路故障を e' とする。このとき、交番回路 C が“入力誤まり e に関してフェイルセーフ”とは、 C が回路故障 e' に関してフェイルセーフであることと定義する。

上の議論に示されたように、入力誤まりに関するフェイルセーフ性についての問題は、すべて回路故障に関するものであるとして議論することができる。以下そのような立場に立って検討を進めることにする。

3.1.2 故障検出可能性

前項におけると同様に、着目した任意の交番回路 C に対して、その入力を X ，その正常な出力対関数を $F(X)$ と表わすことにする。よって故

障 e が発生したときの C の故障対関数は $F_{(e)}(\mathbf{X})$ である。

[定 義 15] n 入力交番回路 C において、そこに発生する故障 e が“検出可能”とは、 $\exists \mathbf{X} \in D_A^n$ に対して、

$$F_{(e)}(\mathbf{X}) = \langle 1, 1 \rangle \text{ または } \langle 0, 0 \rangle$$

であることと定義する。

この定義は、出力対信号が故障信号 $\langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ であるかどうかを検査するだけで ($F(\mathbf{X})$ と $F_{(e)}(\mathbf{X})$ の出力比較をすることなしに) 故障を検出できることを意味している。

一般に、論理回路内の故障を入出力応答の検査によって検出できるということは、その正常な出力関数と故障時の出力関数が相違することを前提としている。一方、定義 11 のように、回路の故障をその回路の構成要素の故障として定義すると、そのような故障が存在しても、故障出力関数が正常な出力関数とたまたま同じであるという場合があり得る。しかし、通常そのような故障の生ずる要素は冗長な (不要な) 部分であるといえる。この点に留意して、

[定 義 16] 交番回路 C が“非冗長交番回路”であるとは、それに生ずる任意の故障 e に対して、

$$F_{(e)}(\mathbf{X}) \neq F(\mathbf{X})$$

であることと定義する。

[定 理 2] 非冗長交番回路がある故障 e に関してフェイルセーフであれば、故障 e は検出可能である。

(証明) 定理の条件より、所与の非冗長交番回路の故障対関数

$F_{(e)}(\mathbf{X})$ は交番関数ではありえない。よって、 $F_{(e)}(\mathbf{X}) = \langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ となる入力 $\mathbf{X} \in D_A^n$ が存在する。(終り)

交番回路がフェイルセーフでない場合、故障対関数 $F_{(e)}(\mathbf{X})$ が交番関数になる場合が生ずる。その際には故障 e を定義 15 の意味

で検出することはできない。したがってフェイルセーフ性は交番論理系において、故障信号が故障表示信号として実質的な意味を持つための必要条件である。

上の議論は交番回路網の場合にもつぎのように適用できる。まず故障検出可能性を、回路網の出力の少なくとも一つで定義 15 の条件が成立することとする。また、非冗長性についても同様に、回路網の少なくとも一つの出力で定義 16 の条件が成立することとする。このとき、定理 2 は交番回路を交番回路網と読み換えてそのまま成立する。

3.1.3 自己双対回路におけるフェイルセーフ条件

前に(項 2.2.1)で述べたように本論文で扱かう交番回路は、自己双対回路で実現されているものとした。しかし前項(項 3.1.1~3.1.2)までにはその条件は入っていない。したがってその結果は各定義の条件が満たされるかぎり一般的に正しい。ここでは、交番回路を実現している自己双対回路の性質を具体的に導入する。

いま、着目している n 入力交番回路 C は自己双対交番回路ではないとしよう。さすれば、 C は一つの入力を制御信号入力とする $(n+1)$ 入力の自己双対回路として実現されていることになる(命題 2)。この制御信号に換えて、新たな $(n+1)$ 番目の変数入力を加えるものとすれば、その自己双対回路は、 $(n+1)$ 入力の自己双対交番回路 C' となる。同一の自己双対回路によるこれらの交番回路 C, C' において両者で発生する故障は同一視できる。すなわち、 C に発生する故障 e は C' でも故障であり、その逆も正しい。この事実を考慮すると二つの交番回路のフェイルセーフ性についてつぎの定理として表わされる等価性が成立する。

〔定 理 3〕 $(n+1)$ 入力自己双対回路による任意の n 入力交番回路 C と $(n+1)$ 入力自己双対交番回路 C' において、それらに生ずる任意の故障 e に関して C' がフェイルセーフであれば C もフェイルセーフ、またその逆も成立する。

(証明) 定理の前半は明らかであるから、後半が成立することを示す。

自己双対回路の出力関数を $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ とし、 C および C' の出力交番関数をそれぞれ F, F' とする。 C においては、自己双対回路の入力変数 x_{n+1} が制御信号であるとする、 $\forall \mathbf{x} \in D_A^n$, $\forall x_{n+1} \in D_A$ に対して、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \langle f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1), \\ &\quad f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, 0) \rangle \in D_A, \\ F'(\mathbf{x}, x_{n+1}) &= \langle f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ &\quad f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \rangle \in D_A \end{aligned}$$

と表わされる。一方、故障 e によって f が f_e に変わったとすれば、 $\forall \mathbf{x} \in D_A^n$, $\forall x_{n+1} \in D_A$ に対して、

$$\begin{aligned} F(e)(\mathbf{x}) &= \langle f_e(x_1, x_2, \dots, x_n, 1), \\ &\quad f_e(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, 0) \rangle, \\ F'(e)(\mathbf{x}, x_{n+1}) &= \langle f_e(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ &\quad f_e(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \rangle. \end{aligned}$$

C が e に関してフェイルセーフとすれば、定理 1 によって、

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n \text{ に対して、}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) &= f_e(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, 0) &= f_e(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, 0) \end{aligned}$$

の少なくとも一方が成立する。これは $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^{n+1}$ に対して、

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= f_e(x_1, x_2, \dots, x_n, \\ &\quad x_{n+1}) \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) &= f_e(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \\ &\quad \bar{x}_{n+1}) \end{aligned}$$

の一方が成立することと等価である。よって、 C' に対しても定理 1 の条件が満たされる。(終り)

定理 2 と定理 3 とを組み合わせれば、故障検出可能性についても同様の等価性が成立することを証明できる。定理 3 によれば一つの自

己双対回路による各交番回路のフェイルセーフ性は、その自己双対回路の構造だけによって決定され、どの入力を制御信号とするかには依存せぬことが明らかである。結局、交番回路のフェイルセーフ構成の問題は、それを実現している自己双対回路の構造を、対象とする任意の故障に対して定理 1 の条件を満たすように定めることに帰結される。定理 1 の適用に際して、その自己双対回路によるどの交番回路に着目しても同じ結果になるから、以下では、一般性を損なうことなく、自己双対交番回路だけに着目して議論を進める。

与えられた自己双対回路 C の出力関数を f 、 C による自己双対交番回路 C の出力交番関数を F とすると、

$$F(\mathbf{X}) = \langle f(X^I), f(X^{II}) \rangle \quad (3.1)$$

ここに、 $\mathbf{X} = \langle X^I, X^{II} \rangle \in D^n$ 、また f は自己双対関数、すなわち、 $f(\mathbf{X}) = f^D(\mathbf{X})$ 。

C に発生する故障 e は、実は C の故障であることに留意して、 C の故障出力関数を f_e と表わすと、 C の故障対関数 $F(e)$ は、

$$F(e)(\mathbf{X}) = \langle f_e(X^I), f_e(X^{II}) \rangle \quad (3.3)$$

このとき、フェイルセーフ条件としてつぎの定理を得る。

[定 理 4] 交番回路 C が故障 e に関してフェイルセーフであるための必要十分条件は、

$$f_e(\bar{X}) \bar{f}_e(X) f(X) \bar{f}(\bar{X}) = 0 \quad (3.4)$$

が成立することである。

(証明) 定理 1 の条件は、それに式 (3.1) と式 (3.3) を代入すると、

$$\left. \begin{array}{l} \forall X \in S^n \text{ に対して,} \\ f_e(X) \leq f(X) \text{ かつ } f_e(\bar{X}) \leq f(\bar{X}) \\ \text{または} \\ f_e(X) \geq f(X) \text{ かつ } f_e(\bar{X}) \geq f(\bar{X}) \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

と表わされる。式 (3.5) は定理 B (項 1.3.3) によってつぎの式

(3.6) と同値である。

$$\forall X \in S^n, (f_e(X) \bar{f}(X) + f_e(\bar{X}) \bar{f}(\bar{X})) (\bar{f}_e(X) f(X) + \bar{f}_e(\bar{X}) f(\bar{X})) = 0 \quad (3.6)$$

これを展界して整理すると,

$$\forall X \in S^n, f_e(X) \bar{f}_e(\bar{X}) \bar{f}(X) f(\bar{X}) + \bar{f}_e(X) f_e(\bar{X}) f(X) \bar{f}(\bar{X}) = 0 \quad (3.7)$$

式 (3.7) は,

$$\forall X \in S^n, f_e(X) \bar{f}_e(\bar{X}) \bar{f}(X) f(\bar{X}) = 0 \quad (3.8)$$

かつ

$$\forall X \in S^n, f_e(\bar{X}) \bar{f}_e(X) \bar{f}(\bar{X}) f(X) = 0 \quad (3.9)$$

と表わされるが式 (3.8) と式 (3.9) は明らかに同値である。ゆえに式 (3.7) は式 (3.9) と同値であり、これは定理の条件そのものである。(終り)

上の証明には自己双対条件、式 (3.2) がまったく関与していないことに注意する。式 (3.2) に留意すれば、つぎの系は明らかである。

[系 1] 交番回路 C が故障 e に関してフェイルセーフであるための必要十分条件は、

$$f_e(\bar{X}) \bar{f}_e(X) f(X) = 0 \quad (3.10)$$

が成立することである。

定理 4 と系 1 は、フェイルセーフな交番回路を実現するために自己双対回路が満たさねばならぬ最も基本的な条件を与えるものである。

3.2 単一故障に関するフェイルセーフ条件

本節では、実際的な問題として、交番回路の素子あるいは入力が一時に唯一つだけ故障する場合、すなわち単一故障の場合における交番回路のフェイルセーフ構成のための諸条件を導く。その結果により、任意の論理関数に対して、任意の単一故障に関してフェイルセーフな交番回路を構成できることが明らかになる。

3.2.1 フェイルセーフ条件

故障の一般的な定義(定義11)にしたがうものとして、ここでは、“素子の”故障をつぎのように規定する。

〔定義 17〕 交番回路 C における“素子 v ”の故障とは、 C を実現している自己双対回路を構成している、ある素子 v の出力線の一部または全部の信号値が、共に 1、または、共に 0 に固定する状態とする。故障値を区別する場合には、それぞれを、 v の“1故障”“0故障”と呼ぶ。

本節では、交番回路の唯一つの素子が、この定義に規定された故障を起こす場合を取りあつかうわけである。同時に二つ以上の素子がこのような故障を起こす場合については 3.3 節と 3.4 節で検討する。

さて、交番回路 C の任意の一つの素子 v に着目し、その出力線の数を k とする。さすれば、それらの出力線のどの一部分（あるいは全部）が故障するか、また、その故障が 1 故障であるか 0 故障であるかによって v の故障としては $2 \times (2^k - 1)$ 個の異なる状態を考えることができる。この事実留意して、素子の故障に関するフェイルセーフ性をつぎのように定義する。

〔定義 18〕 交番回路（あるいは、交番回路網） C が素子 v の任意の故障に関してフェイルセーフであるならば、 C は“ v の故障に関してフェイルセーフ”と言う。また、 C がその任意の一つの素子の故障に関してフェイルセーフであるならば、 C を“単一故

障に関するフェイルセーフ交番回路(あるいは、交番回路網)と言う(ただし、本節内では“単一故障に関する”を省略する)。

さて、任意の一つの n 入力自己双対交番回路 C について考えよう。 C を実現している自己双対回路 C に着目してその入力変数を $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とする。また、変数 $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ に対応する入力端子を v_{Ii} で表わす。ここで、 C を構成している任意の一つの素子 v に着目する。 v の出力線全部の集合 L を考え、その任意の一つの部分集合 $L_e (\subseteq L)$ を取る。 L_e に属する出力線をすべて v から切断し、まとめて新たな一つの入力端子とみてその入力変数を t で表わす。この場合の C の、外部入力 X と t に対する出力関数を h とすると、

$$h(X, t) = A(X)t + B(X)\bar{t} \quad (3.11)$$

と書ける。ここに、 $A(X), B(X)$ は t に依存しないある関数である。素子 v と自己双対回路 C の正常時の出力関数を、それぞれ、 $g(X), f(X)$ と表わすものとすれば、

$$f(X) = h(X, g(X)) = A(X)g(X) + B(X)\bar{g}(X) \quad (3.12)$$

なお、 f は自己双対関数であるから、

$$f(X) = f^D(X) = \bar{f}(\bar{X}) \quad (3.13)$$

を満足しなければならない。

ここで、対象とする故障を、 L_e に属する出力線の信号値がすべて α ($\alpha = 1$ または 0 、以後 α を論理変数としてあつかう) に固定する状態とし、 e_α で表わす。これにより、故障 e_α が発生しているときの、 C の故障出力関数を f_{e_α} とすれば、

$$f_{e_\alpha}(X) = h(X, \alpha) = A(X)\alpha + B(X)\bar{\alpha} \quad (3.14)$$

以上を前提として、

〔定 理 5〕 交番回路 C が故障 e_0 と e_1 の両者に関してフェイルセーフであるための必要十分条件は、

$$[g(X)g(\bar{X}) + \bar{g}(X)\bar{g}(\bar{X})] A(X)\bar{A}(\bar{X})\bar{B}(X)B(\bar{X}) = 0 \quad (3.15)$$

が成立することである。

(証明) 式 (3.12) と式 (3.14) を定理 4 の条件, 式 (3.4) に代入することによつて, C が e_a に関してフェイルセーフである必要十分条件がつきのように表わされる。

$$\forall X \in S^n, (A(\bar{X})\alpha + B(\bar{X})\bar{\alpha}) \overline{(A(X)\alpha + B(X)\bar{\alpha})} (A(X)g(X) + B(X)\bar{g}(X)) \cdot \overline{(A(\bar{X})g(\bar{X}) + B(\bar{X})\bar{g}(\bar{X}))} = 0$$

展界して整理すると,

$$\forall X \in S^n, A(X)\bar{A}(\bar{X})B(\bar{X})\bar{B}(X)g(X)g(\bar{X})\bar{\alpha} + A(\bar{X})\bar{A}(X)B(X)\bar{B}(\bar{X})g(\bar{X})\bar{g}(X)\alpha = 0 \quad (3.16)$$

C が e_0 と e_1 の両者に関してフェイルセーフであるためには, 式(3.16) が $\alpha = 0, 1$ の両者について成立することが必要十分である。すなわち,

$$\forall X \in S^n, A(X)\bar{A}(\bar{X})B(\bar{X})\bar{B}(X)g(X)g(\bar{X}) = 0 \quad (3.17)$$

かつ,

$$\forall X \in S^n, A(\bar{X})\bar{A}(X)B(X)\bar{B}(\bar{X})g(\bar{X})\bar{g}(X) = 0 \quad (3.18)$$

しかるに, 式 (3.18) は,

$$\forall X \in S^n, A(X)\bar{A}(\bar{X})B(\bar{X})\bar{B}(X)g(\bar{X})\bar{g}(X) = 0 \quad (3.19)$$

と同値である。したがって、定理の条件は, 式 (3.17) かつ式 (3.19) と表わされるが, これは式 (3.15) に一致する。(終り)

定理 5 での自己双対条件, 式 (3.15) はつきのように簡単に表現することもできる。

〔系 2〕 定理 5 の条件, 式 (3.15) は

$$A(X)\bar{A}(\bar{X})B(\bar{X})\bar{B}(X) = 0 \quad (3.20)$$

と等価である。

(証明) “式 (3.20) \Rightarrow 式 (3.15)” は明らかであるから, “式 (3.15) \Rightarrow 式 (3.20)” を示す。

二つの集合 Q, R をつきのように定義する。

$$Q = \{X : g(X) = g(\bar{X}), X \in S^n\}$$

$$R = \{X : g(X) = \bar{g}(\bar{X}), X \in S^n\}$$

明らかに, $Q \cup R = S^n$ 。

$\forall X \in Q$ に対しては、 $g(X)g(\bar{X}) + \bar{g}(X)\bar{g}(\bar{X}) = 1$ であるから、式 (3.15) によって式 (3.20) が成立する。

よって、 $\forall X \in R$ に対して式 (3.20) が成立することを示せば証明は終わる。そのため、“式 (3.20) が成立しない、”

すなわち、

$$\exists X \in R, A(X)\bar{A}(\bar{X})B(\bar{X})\bar{B}(X) = 1$$

と仮定する。これは

$$\exists X \in R, A(X) = \bar{A}(\bar{X}) = B(\bar{X}) = \bar{B}(X) = 1 \quad (3.21)$$

と同値である。一方、自己双対条件、式 (3.13) によって、

$$\forall X \in S^n, A(X)g(X) + B(X)\bar{g}(X) = \bar{A}(\bar{X})g(\bar{X}) + \bar{B}(\bar{X})\bar{g}(\bar{X}) \quad (3.22)$$

式 (3.21) と式 (3.22) に代入すると、

$$\exists X \in R, g(X) = g(\bar{X})$$

となるが、 R の定義によって、これは矛盾である。(終り)

定理 5 と系 2 は、素子の単一故障に関するフェイルセーフ性を論ずるための基本的な条件を与えている。

なお、系 2 の条件は定理 5 の条件に較べて簡単ではあるが、以下に示されるように、実用的なフェイルセーフ条件を導くには定理 5 の条件の方が有用である。

定理 5 により、交番回路は、任意の素子についてその出力線の任意の一部分に関して式 (3.15) の条件を満たしているときフェイルセーフ交番回路となる。

3.2.2 入力誤まりに関するフェイルセーフ性

交番回路 C の各入力端子を素子とみなす。任意の入力端子 v_{I_i} に着目し、それが故障しているとする。この場合、定理 5 において、

$$g(X) = x_i, \quad g(\bar{X}) = \bar{x}_i,$$

すなわち、

$$g(X)g(\bar{X}) + \bar{g}(X)\bar{g}(\bar{X}) = 0$$

が成立する。このことは回路の内部の構造に関係なく、また、出力関数 $f(X)$ に関係なく定理 5 の条件、式 (3.15) が成立することを意味する。

これより，つぎの補題は明らかである。

〔補題 1〕 任意の交番回路（あるいは交番回路網）は，その任意の一つの入力端子の故障に関してフェイルセーフである。

〔定義 19〕 一時には唯一つの入力に定義 11 に定めた故障の状態にあるとき，それを“単一入力誤まり”と呼ぶ。

補題 1，定義 14，定義 19 によって入力誤まりに関してつぎの結論は明らかである。

〔定理 6〕 任意の交番回路（あるいは、交番回路網）は，その任意の単一入力誤まりに関してフェイルセーフである。

3.2.3 交番素子交番回路のフェイルセーフ性

交番回路 C のある素子 v の出力関数 $g(X)$ が自己双対，すなわち， $g(X) = \overline{g(\overline{X})}$ であるとする。このとき，

$$g(X)g(\overline{X}) + \overline{g(X)}\overline{g(\overline{X})} = 0$$

が成立する。これは，素子 v の出力線のどの一部分が故障するかには無関係である。したがって補題 1 と同様につぎの補題 2 は明らかである。

〔補題 2〕 交番回路 C において，素子 v の出力関数 $g(X)$ が自己双対であれば， C は v の故障に関してフェイルセーフである。

ここで交番素子交番回路（あるいは，交番回路網）（定義 10）に着目する。命題 3 によって，その任意の素子の，入力 X に対する出力関数は自己双対である。この事実と補題 2 によってつぎの結論を得る。

〔定理 7〕 任意の交番素子交番回路（あるいは，交番素子交番回路網）は，その任意の一つの素子の故障に関してフェイルセーフである。

(証明) 自明。

すなわち、任意の交番素子交番回路は、その出力関数や回路の内部構造とは無関係に例外なくフェイルセーフ交番回路である。

3.2.4 フェイルセーフ交番回路の構成条件

前項に示したように交番素子交番回路は無条件にフェイルセーフ交番回路である。しかし、一般のゲイト形素子を用いた交番回路をフェイルセーフに構成するためには、各素子の故障について定理5の条件を満足するよう回路構造にある制限条件が課せられる。ここではその条件を論ずる。

まず、定理5より、つぎの補題は明らかである。

定理5に関する記法をそのまま用いる。

[補題 3] 交番回路 C において、素子 v の出力線の任意の一部分、 $L_e \subseteq L$ に対して、式 (3.11) における $A(X)$ と $B(X)$ が、恒等的に、

$$\bar{A}(X) B(X) = 0 \quad (3.23)$$

$$A(X) \bar{B}(X) = 0 \quad (3.24)$$

のいずれか一方を満たすとき、 C は v の故障に関してフェイルセーフである。

(証明) 定理5によって明らか。

定理の条件、式 (3.23) [(3.24)] が満たされるとき、式 (3.11) は $P(X)$ と $Q(X)$ を t に依存しない適当な論理関数として、

$$h(X, t) = tP(X) + Q(X) \quad [\bar{t}P(X) + Q(X)]$$

と表わされることに注意する。すなわち、 h は素子 v の故障出力変数 t についてユニートである (項 1.3.3 定理 C 参照)。また、この逆も成立する。

ここで、議論を簡単にするために現実的立場を強めて、交番回路 C に使用する素子を、多数決素子、AND、OR、NOT、NAND、NOR を実行する素子に限定する。^{*} 便宜上、前三者を“正素子”，後三者を“負素子”と呼ぶ。正素子は論理否定を含まない関数、負素子はそれを含む関数の演算を実行する素子である。

いま、交番回路 C の構造を有向グラフ（項 1.3.4 参照）で表わすこととし、入出力端子および素子を節点、入出力端子および素子を結ぶ信号線を、信号の流れの方向に一致する方向を持つ枝で表わす（図 3.1 参照）。

この場合、つぎの補題が知られている。

[補題 4] ([HTK1] の補題 1)

論理回路の出力関数を f ，その中の素子 v の出力を表わす変数を x と表わす。素子 v から出力端子に向かう各道に含まれる負素子の数が、すべて偶数のとき、

$$f = xP + Q$$

すべて奇数のとき、

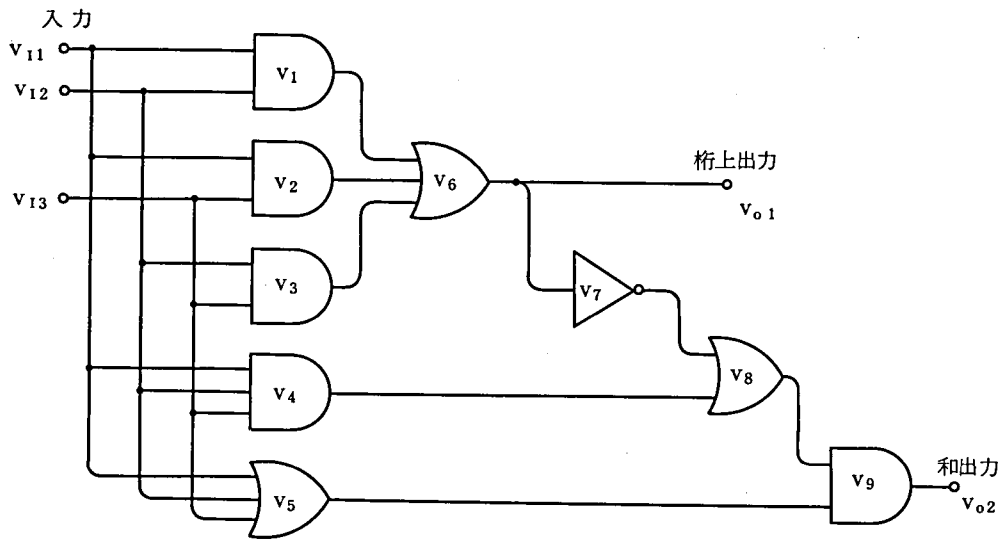
$$f = \bar{x}P + Q$$

と表わされる。ここに、 P ， Q は x に依存しない論理関数である。

補題 3，4 によって、実際的なフェイルセーフ条件として定理 8 が得られる。

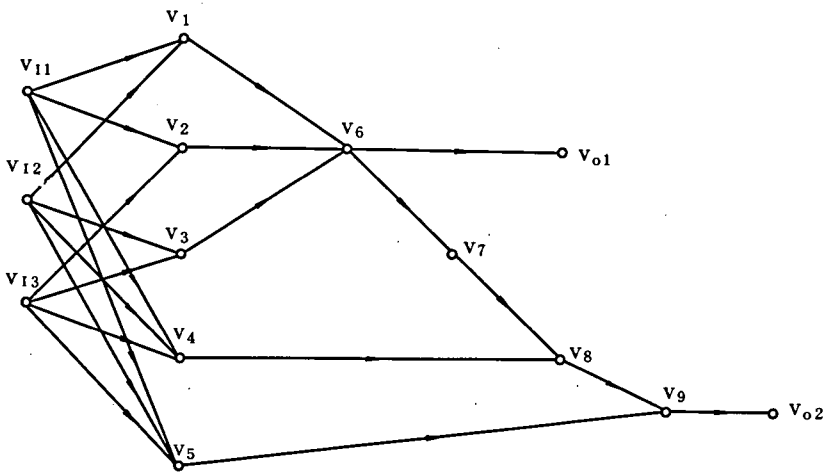
[定理 8] 交番回路 C において、素子 v から出力端子に向かう各道に存在する負素子の数が、すべて偶数、またはすべて奇数であるとき、 C は v の故障に関してフェイルセーフである。

* 結果は一般のユニテ素子（[HTK1]）の場合に拡張可能である。



汎例 \square : AND, \cup : OR, \triangle : NOT

(a) 回路例 - 加算器



(b) (a)のグラフ表示

図 3.1 回路のグラフ表示

フェイルセーフ交番回路あるいは交番回路網を実現するには、その各出力と各素子の全てに関して定理 8 の条件が満たされるような回路構造を実現すればよい。この実現は容易であり、そのいくつかの解を次項 3.2.5 で示す。補題 3、あるいは定理 8 のフェイルセーフ条件は、実は、非対称故障素子によるフェイルセーフ論理回路の構成条件（〔MK2〕、〔HTK1〕、〔HWU〕）と同じである。したがって、その場合に得られているフェイルセーフ回路の構成法を交番回路の場合に利用することができる。ただし、非対称故障素子による場合の条件がその多重故障に対して有効であるのに対し、フェイルセーフ交番回路では、その条件は素子の単一故障に対してのみ有効であることを注意する。

3.2.5 フェイルセーフ交番回路の構成法

任意のフェイルセーフでない交番回路網 C が与えられたとき、非対称故障素子によるフェイルセーフ論理回路の 2 重化による構成法

（〔HTK1〕の定理 4）をそのまま適用して、 C と同じ機能を持つフェイルセーフ交番回路 C' をつきのように構成できる（図 3.2 参照）。

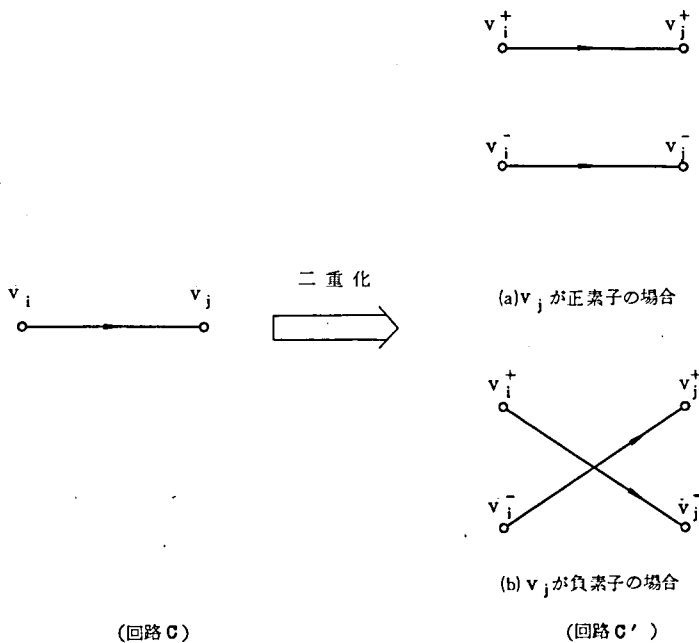


図 3.2 二重化の方法

- (i) C の素子 v_i に C' の二つの素子 v_i^+ , v_i^- を対応させる。
- (ii) C において、素子 v_i の出力線が素子 v_j に入力されているとき、 v_j が正素子〔負素子〕であれば、 C' において、 v_i^+ , v_i^- の出力線を、それぞれ、 v_j^+ 〔 v_j^- 〕、 v_j^- 〔 v_j^+ 〕に入力させる。
- (iii) C' では出力端子 v_0^+ , v_0^- の一方は不要であるから、不要とする端子 v_0^β および、それから出るすべての道が v_0^β だけに向かう素子を除去する ($\beta = +$, または $-$)。

この二重化法における v^+ 素子、 v^- 素子は、〔HTK1〕においては、素子 v と同じ機能をもつ非対称故障素子（定義 2.1 参照）を意味しているが、ここでは素子 v と同じものであり、 $+$ 、 $-$ は単に C' における接続条件を区別するための目印である。

このように構成した交番回路網 C' はその各出力端子および各素子について定理 8 の条件を満たす。これによって、任意のフェイルセーフでない交番回路をたかだかその 2 倍の数の素子を用いることによってフェイルセーフ交番回路にできることが分かる。

任意の論理関数に対して、そのフェイルセーフ交番回路の構造を直接に導くことも容易である。まず、負素子が入力端子だけに直結されている回路（〔MK2〕）、また、NAND あるいは NOR だけの 3 段以内の回路（〔YUW1〕）として構成されている自己双対回路による交番回路は、それぞれ、定理 8、補題 3 の条件を満たしてフェイルセーフ交番回路である。明らかに、このような回路で任意の論理関数を実現できる。

図 3.3 に全加算器の和出力の交番回路を例として示す。

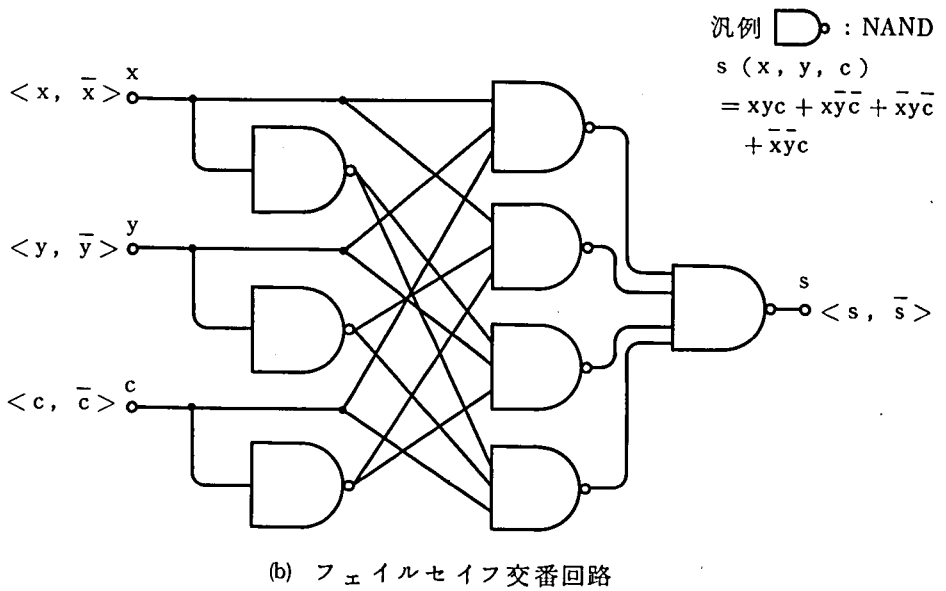
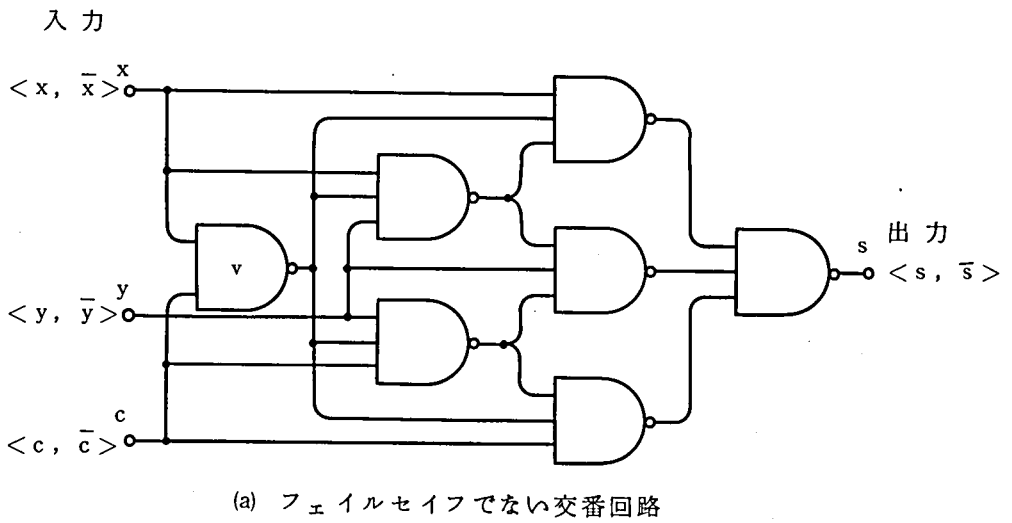


図 3.3 交番回路の例

この出力は自己双対関数であるから、それを実行する任意の回路をそのままその交番回路として使うことができる(項 2.2.2)。図中、(a) は NAND による最簡回路 ([H1]) であるが、これはフェイルセーフ交番回路ではない。たとえば、この交番回路は素子 v の故障に関してフェイルセーフではない。このことは、出力関数 s とその故障関数を定理 4 の式 (3.4) に代入したものが恒等的に零にならないことにより容易に確かめることができる。一方、(b) に示した回路は、その任意の素子について定理 8 の条件を満たしておりフェイルセーフ交番回路となる。

定理 8 の条件は満たさないが、定理 5 の条件を満たしてフェイルセーフである交番回路も実際に構成できる。その一例を図 3.4 に示す。この

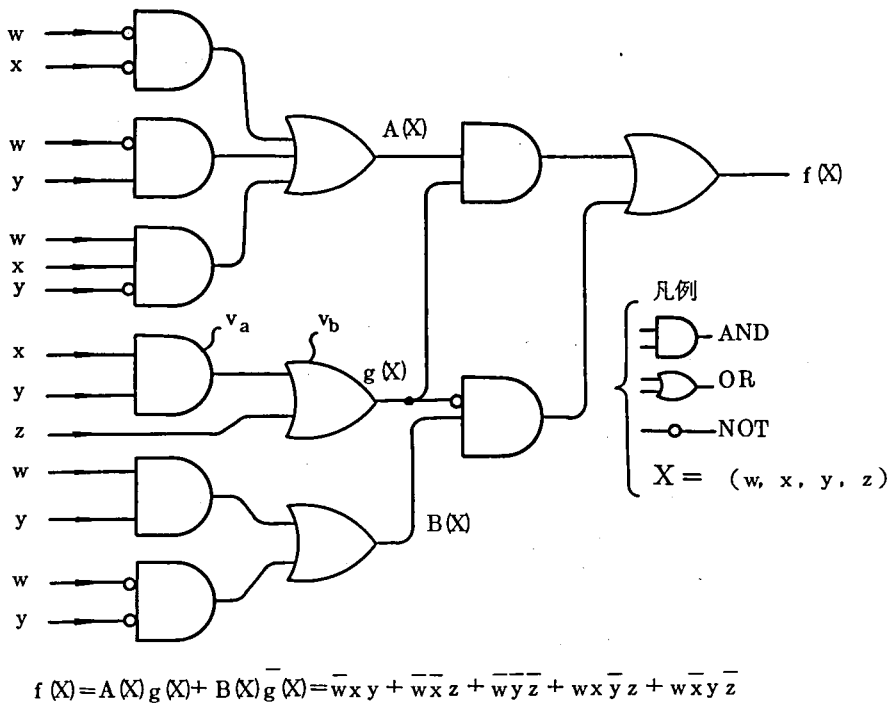


図 3.4 フェイルセーフ交番回路の例

自己双対回路による交番回路が、 v_a, v_b 以外のすべての素子の故障、および素子 v_b の二つの出力線の一方の故障に関してフェイルセーフであ

ることは、定理 8 によって明らかである。素子 v_b の二つの出力線が同時に故障する場合、定理 5 における、 $A(X)$ 、 $B(X)$ 、 $g(X)$ は

$$A(X) = \bar{w}\bar{x} + \bar{w}y + wx\bar{y}, \quad B(X) = wy + \bar{w}\bar{y}, \\ g(X) = xy + z$$

と表わされ、これらは定理 5 の条件、式 (3.15) を満たす。したがって、これによる交番回路は素子 v_b の故障に関してもフェイルセーフである。一方、素子 v_a の故障は素子 v_b の故障に包含されており、素子 v_b に関するフェイルセーフ性から、素子 v_a に関するフェイルセーフ性も明らかである。すなわち、これによる交番回路はフェイルセーフ交番回路である。

以上、この節では、任意の論理関数に対して、その、単一故障に関するフェイルセーフ交番回路が実現できることを論じた。当然つぎには、一時に二つ以上の素子が故障する場合（素子の多重故障）に対して、フェイルセーフ性がどの程度実現されるかが問題になる。

次節では、この問題を論ずる。

3.3 多重故障に関するフェイルセーフ条件

ここでは、同時に二つ以上の素子あるいは入力に故障する場合のフェイルセーフ条件を検討する。個々の素子の故障は前節で定義 17 によって規定されたものとする。

いま、同時に n 個の素子あるいは入力に故障する状態を、それぞれの“ n 重故障”と言うことにし、任意の n (≥ 2) に対する総称として、“多重故障”を当てることにする。

前節で単一故障に対して定理 5 を導いた方法をそのまま拡張適用して、任意の n 重故障に対するフェイルセーフ条件を導くことは可能である（付録 (3.1) に例として二重故障に対するフェイルセーフ条件を示す）。しかし、得られる条件は複雑であって、それに基づいて多重故障に関するフェイルセーフ交番回路の構造を一般的に論ずることは実際上不可能にみえる。このため本節では特別な二つの問題を扱っている。まず、多重の入力誤まり（あるいは入力端子故障）に関するフェイルセーフ交

番回路が存在しえないことを示す。つぎに、入力誤まりと入力端子故障を除外すれば、あるクラスの関数に対しては、素子の任意の多重故障に関してフェイルセーフな交番回路が構成できることを示す。

3.3.1 入力誤まりに関するフェイルセーフ条件

任意の自己双対交番回路 C を取り、それを実現している自己双対回路 C に着目する。 C の入力変数を $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とし、その出力関数を $f(X)$ とする。また、個々の入力変数 x_i に対応する入力端子を v_{1i} , $i = 1, 2, \dots, n$ と表わす。このとき、

〔補題 5〕 交番回路 C が入力端子 v_{1i} , v_{1j} における二重入力誤まりに関してフェイルセーフであるためには、 P, Q, R, S を x_i と x_j に依存しない関数として、

$$f(X) = x_i P + x_j Q + \bar{x}_i R + \bar{x}_j S \quad (3.25)$$

と表わされることが必要である。

(証明) 入力変数ベクトル X の成分から x_i, x_j を除いたものを X_{ij} と表わす。 $f(X)$ が自己双対関数であることを考慮すると、

$$f(X) = x_i x_j A(X_{ij}) + x_i \bar{x}_j B(X_{ij}) + \bar{x}_i x_j B^D(X_{ij}) + \bar{x}_i \bar{x}_j A^D(X_{ij}) \quad (3.26)$$

のように表わすことができる。ここに、 $A(X_{ij})$ と $B(X_{ij})$ は x_i, x_j に依存しない適当な関数である。考えている入力誤まりを、対応する入力端子の故障とみて (定義 14 参照) e で表わす。故障 e に対する v_{1i}, v_{1j} の故障出力値をそれぞれ、 α, β とすると故障出力関数 f_e は、

$$f_e(X) = \alpha \beta A(X_{ij}) + \alpha \bar{\beta} B(X_{ij}) + \bar{\alpha} \beta B^D(X_{ij}) + \bar{\alpha} \bar{\beta} A^D(X_{ij}) \quad (3.27)$$

式 (3.26), (3.27) を系 1 の条件、式 (3.10) に代入すると、

$$\begin{aligned}
& (\alpha\beta A(\bar{X}_{ij}) + \alpha\bar{\beta} B(\bar{X}_{ij}) + \bar{\alpha}\beta B^D(\bar{X}_{ij}) + \bar{\alpha}\bar{\beta} A^D(\bar{X}_{ij})) \\
& \cdot (\alpha\beta \bar{A}(X_{ij}) + \alpha\bar{\beta} \bar{B}(X_{ij}) + \bar{\alpha}\beta \bar{B}^D(X_{ij}) + \bar{\alpha}\bar{\beta} \bar{A}^D(X_{ij})) \\
& \cdot (x_i x_j A(X_{ij}) + x_i \bar{x}_j B(X_{ij}) + \bar{x}_i x_j B^D(X_{ij}) + \\
& \quad \bar{x}_i \bar{x}_j A^D(X_{ij})) = 0. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

式 (3.28) が $\alpha = 0, 1$ かつ $\beta = 0, 1$ に対して、恒等的に成立するためには;

$$\left. \begin{aligned}
& \bar{A}(X_{ij}) \bar{A}^D(X_{ij}) B(X_{ij}) = 0 \\
& \bar{A}(X_{ij}) \bar{A}^D(X_{ij}) B^D(X_{ij}) = 0 \\
& A(X_{ij}) \bar{B}(X_{ij}) \bar{B}^D(X_{ij}) = 0 \\
& A^D(X_{ij}) \bar{B}(X_{ij}) \bar{B}^D(X_{ij}) = 0
\end{aligned} \right\} \tag{3.29}$$

が同時に成立しなければならない。これによって式 (3.26) を再整理すると、

$$\begin{aligned}
f(X) = & x_i A(X_{ij}) B(X_{ij}) (B^D(X_{ij}) A^D(X_{ij}) \\
& + \bar{B}^D(X_{ij}) \bar{A}^D(X_{ij})) + x_j A(X_{ij}) B^D(X_{ij}) \\
& \cdot (B(X_{ij}) A^D(X_{ij}) + \bar{B}(X_{ij}) \bar{A}^D(X_{ij})) \\
& + \bar{x}_j B(X_{ij}) A^D(X_{ij}) (A(X_{ij}) B^D(X_{ij}) \\
& + \bar{A}(X_{ij}) \bar{B}^D(X_{ij})) + \bar{x}_i B^D(X_{ij}) A^D(X_{ij}) \\
& \cdot (A(X_{ij}) B(X_{ij}) + \bar{A}(X_{ij}) \bar{B}(X_{ij})) \tag{3.30}
\end{aligned}$$

と表わされる (付録 3.2 参照)。(終り)

交番回路 C が、その任意の二重入力誤まりに関してフェイルセーフであるとしよう。これは、補題 5 が x_1, x_2, \dots, x_n の中の任意の二つの変数について成立しなければならぬことを意味する。これにより、 f が

$$\begin{aligned}
f(X) = & x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n + \bar{x}_1 Q_1 + \bar{x}_2 Q_2 + \dots \\
& + \bar{x}_n Q_n \tag{3.31}
\end{aligned}$$

と表わされねばならぬことが導かれる。ここに、 $P_i, Q_i, i=1, 2, \dots, n$ は定数 1 または 0 である。

一方、 f は自己双対関数でなければならないが、式 (3.31) の形で可能な自己双対関数は、一変数関数 x_i か \bar{x}_i だけである。このことは、冗長な入力変数を含まない、真の n 変数 ($n \geq 2$) 自己双対回路による交番回路は、その任意の二重入力誤まりに関してフェイルセーフにはなりえないことを意味する。この結果をより一般的につぎの定理としてまとめておく。

〔定理 9〕 任意の多重入力誤まりに関してフェイルセーフであるような自己双対回路による交番回路は、自明なもの (冗長入力を含むもの) を除いて、実現できない。

3.3.2 素子の多重故障に対するフェイルセーフ交番回路

交番回路 C を実現している自己双対回路の構造が、図 3.5 に示される

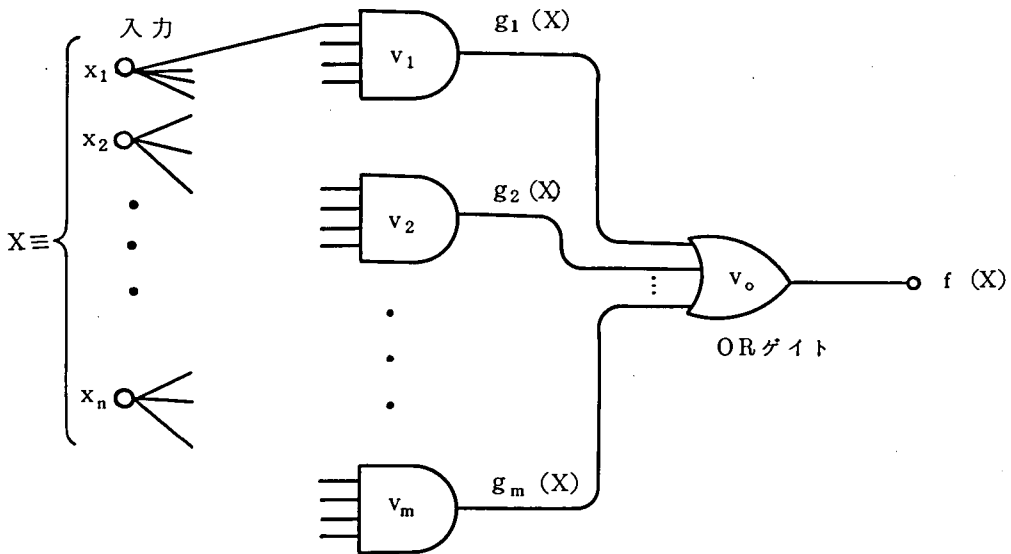


図 3.5 素子の多重故障に関してフェイルセーフな交番回路の構造例

ようなものである場合に注目する。素子 v_i の出力関数が $g_i(X)$, $i=1, 2, \dots, m$, 出力素子 v_o は OR 素子であるから回路の出力関数 f は、

$$f(X) = g_1(X) + g_2(X) + \dots + g_m(X) \quad (3.32)$$

と表わされる。

ここで、考えられる素子の多重故障を以下のように類別する。

E_1 : 故障した素子の中に v_0 が含まれている。

E_2 : v_0 は正常、かつ故障した素子はすべて 0 故障である。

E_3 : v_0 は正常、かつ故障した素子の中に 1 故障のものがある。

明らかに、 E_1, E_2, E_3 は入力端子を除外して、起り得る素子の多重故障の全部を尽くしている。このとき、 $\forall e_1 \in E_1, \forall e_2 \in E_2, \forall e_3 \in E_3$ に対して各故障出力関数 $f_{e_1}, f_{e_2}, f_{e_3}$ はつぎの条件を満たす。

$$f_{e_1}(X) = \text{定数} (v_0 \text{ の故障値に等しい})$$

$$f_{e_2}(X) \leq f(X)$$

$$f_{e_3}(X) = 1$$

いずれの場合にも定理 4 の条件が満たされていることは明らかである。すなわち、図 3.5 のような構造の自己双対回路による交番回路は、入力端子を除外すれば、その素子の任意の故障に関してフェイルセーフである。図 3.5 において、出力素子 v_0 の機能を NOR, AND, NAND, あるいは、より一般的に、AND, OR の任意の同族関数に換えてまったく同じ結論が導かれる。現実性を考えて、入力段の素子として AND, OR, NAND, NOR だけを使用できるものとする、交番回路を実現する自己双対回路の出力関数が正関数、あるいは負関数になるときは、その交番回路を上記のようにフェイルセーフに構成できる。また、各入力変数について、それと共にその否定入力が見られる場合には、任意の論理関数に対して、そのようなフェイルセーフ交番回路を実現することができる。

3.4 非対称故障素子によるフェイルセーフ交番回路の構成

3.4.1 非対称故障

最初に (節 1.1) 紹介したように非対称故障は数年来よく知られている概念なので、本論文中でもこれまでことわりなしに使ってきた。ここ

では、それを、以下の議論の備準として本論文の立場に合わせて再定義する。もちろん、これは従来の概念に合致している。

〔定義 20〕 定義 11 で定めた故障において、交番回路の各要素、あるいは各入力の故障時にとる対信号の値が、 $\langle 1, 1 \rangle$ または $\langle 0, 0 \rangle$ のいずれか一方に定まっているとき、その故障を“非対称故障”と呼ぶ。またそのような入力誤まりを“非対称入力誤まり”と呼ぶ。

〔定義 21〕 定義 17 で定めた素子の故障において、故障値が 1 または 0 のいずれか一方だけに定まっているとき、そのような素子を“非対称故障素子”と呼び、各非対称故障素子について、定まっている故障値をその“非対称故障値”と呼ぶ。

この節では、交番回路は非対称故障素子だけで構成した自己双対回路によって実現されているものとして、そのフェイルセーフ構成のための条件を検討する。また、非対称入力誤まりに関するフェイルセーフ条件を明らかにする。

3.4.2 フェイルセーフ交番回路の構成

節 3.2 で論じたフェイルセーフ交番回路は、素子の単一非対称故障に対して、当然フェイルセーフ交番回路である。なお、補題 3 のフェイルセーフ条件は、素子の故障を非対称故障に制限したからといってゆるやかになることはない。ゆえにそれに基づいて導かれるフェイルセーフ交番回路に較べて、より簡単な構造のフェイルセーフ交番回路が、ここで検討しようとする単一非対称故障に対して得られるということはない。したがって、問題になるのは素子の任意の多重故障に関するフェイルセーフ性である。しかし、これをフェイルセーフ性の一般的条件（定理 4）に基づいて論ずることは、前節（節 3.3）におけると同様複雑すぎて難かしい。そこで以下では、一つの十分条件として、定理 8 の条件を満たして任意の一つの素子の故障に関してフェイルセーフであるような交番回路が、非対称故障の場合には、素子の任意の多重故障に関して

フェイルセーフになり得ることを示す。

〔定義 22〕 その各素子について定理 8 の条件を満たしている交番回路，すなわち，各素子について，それから出力端子に向かう（いくつかの）道に存在する負素子の数がすべて偶数か，すべて奇数かに定まっている交番回路において，そのような負素子の数が偶数〔奇数〕である素子を“ p 素子”〔“ n 素子”〕と呼ぶ。

そのすべての素子が定理 8 の条件を満たし，かつ非対称故障素子である自己双対交番回路 C をとり，それを構成している自己双対回路 C に注意する。その中の二つの素子 v_1, v_2 に着目し，それが p 素子であるか n 素子であるかを，それぞれ，論理変数 p_1, p_2 で表わす。ここに，それらの取る値 0, 1 をそれぞれ p 素子， n 素子に対応させる。また， v_1, v_2 の定まっている故障値を，それぞれ， α_1, α_2 とする。ここで， v_1, v_2 の出力線の一部（または全部）を切断し，それぞれをまとめて新たな二つの入力端子とみなして，入力 t_1, t_2 を加えると考える。この場合の C の出力関数を h とすると補題 4 によってつぎの表現が得られる。

$$h(X, t_1, t_2) = \left\{ \begin{array}{l} A(X) t_1 t_2 + B(X) t_1 + C(X) t_2 \\ + D(X), \text{ for } p_1 = p_2 = 0, \\ A(X) \bar{t}_1 \bar{t}_2 + B(X) \bar{t}_1 + C(X) \bar{t}_2 \\ + D(X), \text{ for } p_1 = p_2 = 1, \\ A(X) t_1 \bar{t}_2 + B(X) t_1 + C(X) \bar{t}_2 \\ + D(X), \text{ for } p_1 = 0, p_2 = 1, \\ A(X) \bar{t}_1 t_2 + B(X) \bar{t}_1 + C(X) t_2 \\ + D(X), \text{ for } p_1 = 1, p_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

素子 v_1, v_2 の入力 X に対する正常な出力関数を，それぞれ， g_1, g_2 とし，回路 C の正常な出力関数を f とすれば，

$$f(X) = h(X, g_1(X), g_2(X)) \quad (3.34)$$

また、 $t_1 = \alpha_1, t_2 = \alpha_2$ となる素子の二重故障を e と表わすと、故障出力関数 f_e は、

$$f_e(X) = h(X, \alpha_1, \alpha_2) \quad (3.35)$$

式(3.33)～(3.35)からつぎの関係が成立することが分かる。

$$(1) \quad p_1 = p_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$(2) \quad p_1 = p_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$(3) \quad p_1 = \bar{p}_2 = 0, \alpha_1 = \bar{\alpha}_2 = 0$$

$$(4) \quad p_1 = \bar{p}_2 = 1, \alpha_1 = \bar{\alpha}_2 = 1$$

$$\text{以上の各場合に対して, } f(X) \geq f_e(X). \quad (3.36)$$

$$(5) \quad p_1 = p_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$(6) \quad p_1 = p_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$(7) \quad p_1 = \bar{p}_2 = 0, \alpha_1 = \bar{\alpha}_2 = 1$$

$$(8) \quad p_1 = \bar{p}_2 = 1, \alpha_1 = \bar{\alpha}_2 = 0$$

$$\text{以上の各場合に対して, } f(X) \leq f_e(X). \quad (3.37)$$

式(3.36)あるいは式(3.37)が成立するとき、定理4のフェイルセーフ性の条件が満たされることは明らかである。すなわち、上記の場合(1)～(8)について、交番回路 C は故障 e に関してフェイルセーフになる。各場合を吟味すると、このフェイルセーフ性が成立する条件を、

$$p_1 = p_2 \text{ かつ } \alpha_1 = \alpha_2, \quad (3.38)$$

$$\text{または, } p_1 \neq p_2 \text{ (すなわち } p_1 = \bar{p}_2) \text{ かつ } \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ (すなわち } \alpha_1 = \bar{\alpha}_2) \quad (3.39)$$

のように要約できることが分かる。つまり、素子 v_1, v_2 から出力端子に向かう道に存在する負素子の数の偶奇性がたがいに一致するときには、両素子の非対称故障値を一致させ、偶奇性がたがいに逆であるときには、それぞれの非対称故障値もたがいに逆にすることができれば、両素子の非対称故障に関してその交番回路はフェイルセーフになる。上の結論は、その議論の過程から、3個以上の素子の任意の多重故障に関するもそのまま有効であることは明らかである。この結論をつぎの定理にまとめておく。

(定理 10) 各素子が p 素子, n 素子のいずれかであり, かつ非対称故障素子である交番回路は, 各素子の非対称故障値を p 素子同志, n 素子同志はそれぞれ同じにし, p 素子と n 素子の間では逆になるように選ぶことにより, 素子の任意の非対称 (多重) 故障に関してフェイルセーフにできる。

上の結果は従来明らかにされている非対称故障素子によるフェイルセーフ論理回路の構成条件 ([HTK1], [MK2], [HWU]) と同じである。この事実は両者におけるフェイルセーフ性の基礎条件 — 本論文の定理 8 と [HTK1] の定理 3 — が同じことに注意すれば当然の結果である (ただし, 定理 8 が本論文の場合には一つの十分条件であるに対し, フェイルセーフ論理回路の場合にはほとんど必要条件でもある)。したがって, [HTK1] におけるフェイルセーフ論理回路の構成方法は, フェイルセーフ交番回路の構成法としてそのまま適用することができる。すなわち, 任意のフェイルセーフでない交番回路網 C に対して, 項 3.2.5 で述べた二重化法を適用して得られる交番回路網 C' は, C' の v^+ 素子, v^- 素子それぞれにおいて非対称故障値を統一し, かつ両者間ではそれが逆になるようにすれば, 各出力毎に, すべての素子について定理 10 の条件が成立してフェイルセーフであることを示すことができる。要約すれば, 任意の交番回路網は, 入力端子を除外した, 回路内部の素子の任意の非対称故障に関してフェイルセーフであるように構成できる。なお, このようなフェイルセーフ交番回路網では, 各出力毎にそこに現われる故障信号が $\langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle$ のいずれか一方に定まる。

3.4.3 非対称入力誤まりに関するフェイルセーフ条件

前項で述べたように, 回路の内部の素子の非対称故障に関しては, 任意の論理関数に対してフェイルセーフ交番回路を構成できることが明らかになった。その議論の過程から, 結果を入力端子したがって入力誤まりに拡張できることも明らかである。すなわち, 各入力端子が p 素子か n 素子のいずれかである交番回路は, その入力端子の非対称故障値を定

理 10 を満たすようにできるならば（これは入力誤まりの方向を限定することを意味する），その非対称故障に関してフェイルセーフになる。この条件は，しかし，交番回路を実現する自己双対回路の出力関数の形を制限する。実際，入力端子について定理 10 の条件を満たす交番回路では，その自己双対回路の出力関数 $f(X)$ はユニイト関数だけが許される。逆に， $f(X)$ がユニイト関数であれば，回路の内部構造を論ずるまでもなく， $f(X)$ に正〔負〕に含まれる入力の入力端子を， p 素子〔 n 素子〕として定理 10 を成立させ得ることは明らかである。すなわち，自己双対回路の出力関数がユニイトであるならば，それによる交番回路は非対称入力誤まりに関してフェイルセーフになる。この自己双対回路のユニイト性は，実は，それによる交番回路の非対称入力誤まりに関するフェイルセーフ性の必要条件でもあり，つぎの定理が成立する。

〔定 理 11〕 交番回路 C がその任意の非対称入力誤まりに関してフェイルセーフであるための必要十分条件は， C を実現している自己双対回路の出力関数がユニイト関数であることである。

（証明） 十分性は上の議論によって明らかであるから，必要性を証明すればよい。しかるに，定理 6 によって任意の交番回路は，任意の単一入力誤まりに関しては無条件にフェイルセーフであることが明らかになっている。したがって，ユニイト性の必要性が問題になるのは，二つ以上の入力の非対称入力誤まりに対してである。以下，その必要性を背理法によって証明する。

交番回路 C を実現している自己双対回路の入力を

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

とする。記述の簡単化のため，ここでは便宜上，入力変数のベクトル表現である X を集合 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ としてとり扱おうことを許し，また逆に，そうした場合の集合 X の任意の部分集合，および X の任意の部分集合の要素である変数がとる特定の値を要素とする集合を，それぞれの要素のベクトル表現としてとり扱か

うことを許すことにする。

また、変数の集合、たとえば X の任意の分割 Y, Z (すなわち、 $Y \cup Z = X, Y \cap Z = \phi$) に対して、

$$f(X) = f(Y, Z) \quad (\text{あるいは } f(Z, Y))$$

のように表わすことにする。なお、この分割 Y, Z において、 $Y = \{x_i\}$ ならば、このとき $Z = X_i$ と書くことにする。

ここで、背理法の仮定として、 $f(X)$ をユニイトでない自己双対関数であると仮定する。この仮定によって、少なくとも一つの変数 (x_i とする) について $f(X)$ は、

$$f(X) = x_i P(X_i) + \bar{x}_i P^D(X_i) \quad (3.40)$$

$$\text{ここに、} P(X_i) \neq P^D(X_i) \quad (3.41)$$

と書くことができる (定理 C, 項 1.3.3 参照)。いま、 X_i のとる値の二つの集合 S_a, S_b をつぎのように定義する。

$$S_a = \{X_i : P(X_i) = 0, P^D(X_i) = 1, X_i \in S^{n-1}\}, \quad (3.42)$$

$$S_b = \{X_i : P(X_i) = 1, P^D(X_i) = 0, X_i \in S^{n-1}\} \quad (3.43)$$

集合 S_0 と S_1 によって式 (3.41) の条件は、

$$S_a \neq \phi \quad \text{かつ} \quad S_b \neq \phi \quad (3.44)$$

と表わされる。

各入力 x_i の (したがって、それに対応する入力端子の) 非対称故障値を α_i としてそのベクトル表現を、

$$C_x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (3.45)$$

とする。また、 $\forall Y \subseteq X$ に対して、

$$C_Y = \{\alpha_i : x_i \in Y\} \quad (3.46)$$

のように表わし、これをまたベクトル表現としてとり扱かうことを許す。

ここで、 X_i の任意の一つの分割 U, V (すなわち、 $U \cup V = X_i, U \cap V = \phi$) に着目して、 x_i と U の要素であるすべての変数の値

が、それぞれ定められている非対称故障値に同時に固定する故障を考慮して、それを e で表わす。この場合の故障出力関数 $f_e(X)$ は、

$$\begin{aligned} f_e(X) &= f(x_i, U, V) \Big|_{x_i = \alpha_i, \text{ かつ } U = C_U} \\ &= f(\alpha_i, C_U, V) \\ &= \alpha_i P(C_U, V) + \bar{\alpha}_i P^D(C_U, V) \end{aligned} \quad (3.47)$$

と表わされる。 $f(X)$ が実現する交番回路が故障 e に関してフェイルセーフであるためには、式 (3.40) の f と式 (3.47) の f_e が系 1 の条件を満たすことが必要である。

すなわち、

$$\begin{aligned} f_e(\bar{X}) \bar{f}_e(X) f(X) &= (\alpha_i P(C_U, \bar{V}) + \bar{\alpha}_i P^D(C_U, \bar{V})) \\ &\quad \cdot (\alpha_i \bar{P}(C_U, V) + \bar{\alpha}_i \bar{P}^D(C_U, V)) \\ &\quad \cdot (x_i P(U, V) + \bar{x}_i P^D(U, V)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

この条件を $\alpha_i = 1$ と $\alpha_i = 0$ の二つの場合に分けて吟味する。まず、 $\alpha_i = 1$ の場合について考えよう。

式 (3.48) が $\forall x_i \in \{1, 0\}$, $\forall X_i = (U, V) \in S_0, S_1$ について成立しなければならないが、そのためには、

$$\bar{P}(C_U, V) P(C_U, \bar{V}) = 0, \quad \text{for } \forall (U, V) \in S_0, S_1 \quad (3.49)$$

いま、 S_a の一つの要素 X_{ia} をとり、 C_{X_i} と値の一致する変数の集合を U_a 、一致しない変数の集合を V_a とすれば、

$$\begin{aligned} X_i &= (U_a, V_a) \\ X_{ia} &= (C_{U_a}, \bar{C}_{V_a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \quad C_{U_a} &= \{\alpha_i : x_i \in U_a\} \\ C_{V_a} &= \{\bar{\alpha}_i : x_i \in V_a\} \end{aligned}$$

また、 S_a の定義により、

$$P(X_{ia}) = P(C_{U_a}, \bar{C}_{V_a}) = 0 \quad (3.50)$$

ここで、 x_i と U_a の全変数が故障する場合を考えると、式 (3.49) が、 $C_U = C_{U_a}$, $V = \bar{C}_{V_a}$ に対して成立することが必

要である。すなわち、

$$\bar{P}(C_{U_a}, \bar{C}_{V_a}) P(C_{U_a}, C_{V_a}) = 0$$

$$\text{よって、 } P(C_{X_i}) = P(C_{U_a}, C_{V_a}) \leq P(C_{U_a}, \bar{C}_{V_a}) \quad (3.51)$$

式 (3.50) と式 (3.51) により、

$$P(C_{X_i}) = 0 \quad (3.52)$$

つぎに、 S_b の一つの要素 X_{ib} をとり C_{X_i} と値の一致する変数の集合を U_b 、一致しない変数の集合を V_b とすると、

$$X_i = (U_b, V_b)$$

$$X_{ib} = (C_{U_b}, \bar{C}_{V_b}),$$

$$\text{ここに、 } C_{U_b} = \{\alpha_i : x_i \in U_b\}$$

$$\bar{C}_{V_b} = \{\bar{\alpha}_i : x_i \in V_b\}$$

また、 S_b の定義により、

$$P(\bar{X}_{ib}) = \bar{P}^D(X_{ib}) = P(\bar{C}_{U_b}, C_{V_b}) = 1 \quad (3.53)$$

ここで、 x_i と V_b の全変数が故障する場合を考えると式 (3.49) が $C_U = C_{V_b}$ 、 $V = C_{U_b}$ に対して成立することが必要である。すなわち、

$$\bar{P}(C_{V_b}, C_{U_b}) P(C_{V_b}, \bar{C}_{U_b}) = 0$$

$$\text{よって、 } P(C_{X_i}) = P(C_{U_a}, C_{V_a}) \geq P(C_{V_b}, \bar{C}_{U_b}) \quad (3.54)$$

式 (3.53) と式 (3.54) により

$$P(C_{X_i}) = 1 \quad (3.55)$$

しかるに式 (3.52) と式 (3.55) は矛盾である。同一の矛盾が $\alpha_i = 0$ の場合にも導かれる。明らかにこの矛盾は S_a と S_b を共に空でないとしたことから生じている。ゆえに、 f をユネイト関数でないとした仮定は否定される。

(終り)

自己双対でない関数 $f(X)$ の交番回路に対して、上の定理が言う非対称入力誤まりは制御信号を含んでいて良いことを注意する。この場合、 $f(X)$ の交番回路がこの定理の条件を満たすためには、 $f(X)$ はどのような関数であれば良いかが問題になる。これについてつぎの系が得られる。

〔系 3〕 自己双対でない関数 $f(X)$ の交番回路が定理 11 の条件を満たすためには、 $f(X)$ がユニテイト関数であり、かつ、 $\forall X \in S^n, f(X)f(\bar{X}) = 0$ 、または $\forall X \in S^n, \bar{f}(X)\bar{f}(\bar{X}) = 0$

$$(3.56)$$

となることが必要十分である。

(証明) 必要性： $f(X)$ がユニテイト関数でないとするれば、その交番回路を実現する自己双対回路の関数、

$$\varphi(c, X) = cf(X) + \bar{c}\bar{f}(\bar{X}) \quad (3.57)$$

もユニテイト関数ではない(付録 3.3(a))。ゆえに、 f はユニテイト関数であることが必要。この時、 φ がユニテイト関数であるためには、 φ は c について正か負でなければならない。そのためには、

$$\forall X \in S^n, f(X) \leq \bar{f}(\bar{X}), \text{ または } \forall X \in S^n, f(X) \geq \bar{f}(\bar{X}) \quad (3.58)$$

が必要十分。これは式 (3.56) と同値である。

十分性： $f(X)$ がユニテイト関数であれば $\varphi(c, X)$ は X の各成分変数については正または負である(付録 3.3(b))。また、式 (3.56) によって φ が c について正または負であることも明らか。

(終り)

この証明の過程からつぎの系は明らかである。

〔系 4〕 自己双対でない関数 f の交番回路が、制御信号入力は誤まりなしとして、他の任意の非対称入力誤まりに関してフェイルセーフであるためには、 f がユニテイト関数であることが必要十分である。

第 4 章 交番論理系の応用

4.1 交番順序回路網

組合せ回路網を対象とする前章までの議論は、その拡張として順序回路網にも適用される。

4.1.1 交番順序回路網の定義

順序回路網Mのモデルとして、組合せ回路網 N_1 と単位の遅延時間をもつ遅延素子からなる遅延回路網 N_2 より構成されるものを考える(図 4.1 (a))。

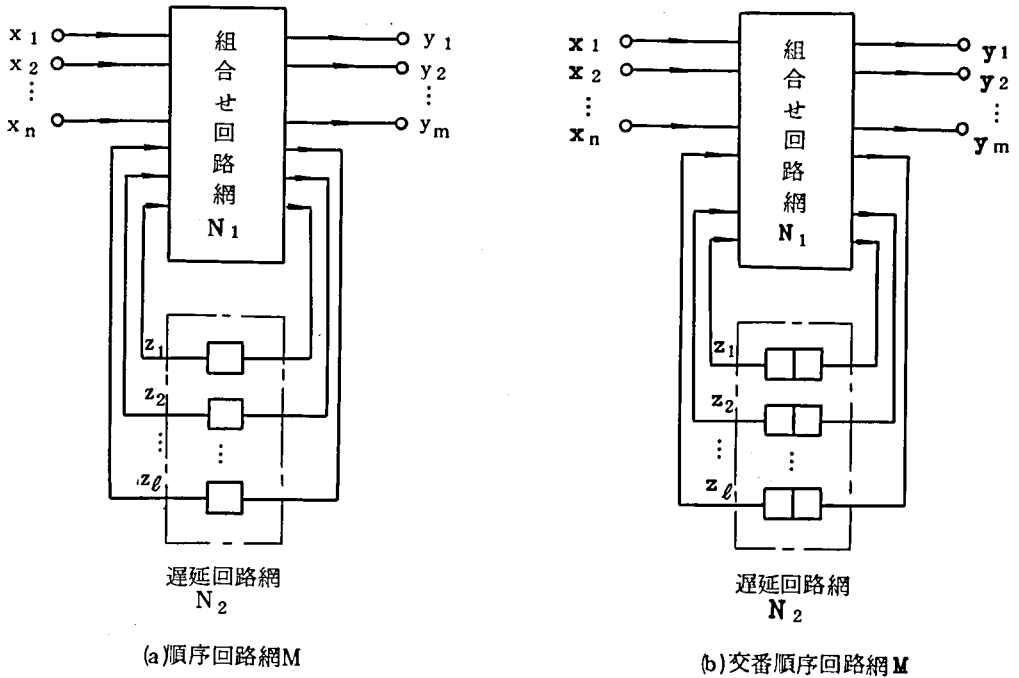


図 4.1 交番順序回路網

時刻 t における順序回路網Mの入力, 出力, 状態変数をそれぞれ,

$$X_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}) \quad (4.1)$$

$$Y_t = (y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{m,t}) \quad (4.2)$$

$$Z_t = (z_{1,t}, z_{2,t}, \dots, z_{l,t}) \quad (4.3)$$

と表わし、 M の出力関数、状態遷移関数を、それぞれ

$$y_{j,t} = f_j(Z_t, X_t), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.4)$$

$$z_{k,t+1} = h_k(Z_t, X_t), \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.5)$$

と表わす。

以上を前提として、

[定義 23] 順序回路網 M に対応する“交番順序回路網” M を任意の時点 t において、交番入力 $X_t = \langle X_t, \bar{X}_t \rangle$ に対して、交番信号出力 $Y_t = \langle Y_t, \bar{Y}_t \rangle$ を与える順序回路網と定義する。

交番順序回路網 M は図 4.1 (b)に示す回路網として実現される。 N_1, N_2 は順序回路網 M における N_1, N_2 にそれぞれ対応する対関数回路網と遅延回路網である。遅延回路網 N_2 は各状態変数が2単位の遅延時間をもつ遅延素子より構成されることを注意する。対関数回路網 N_1 は、 N_1 によって与えられる f_j, h_k に対応する対関数 $F_{f_j}^*, F_{h_k}^*$ を実現する。各対関数は次式によって定義されたものとする。

$$F_{f_j}^*(Z_t, X_t) = y_{j,t} \in D_A, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.6)$$

$$F_{h_k}^*(Z_t, X_t) = z_{k,t+1} \in D, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.7)$$

この交番順序回路網では、状態変数 $z_{k,t}$ に対する対変数 $z_{k,t}$ は交番信号とはかぎらない。したがって対関数 $F_{f_j}^*, F_{h_k}^*$ も交番関数とはかぎらない。しかしながら、状態対変数 $z_{k,t}$ の成分である $z_{k,t}^I, z_{k,t}^{II}$ はすべての入力 $X_t \in D_A^n$ に対して、

$$\text{関係 A : } z_{k,t}^I = z_{k,t}^{II} = z_{k,t}, \text{ または}$$

$$\text{関係 B : } z_{k,t}^I = \bar{z}_{k,t}^{II} = z_{k,t}$$

を満たさねばならないことを示すことができる(付録4.1)。ここで、すべての k について関係 B が成立する交番順序回路網を、その出力と状態変数がすべて交番信号だけをとることから、“完全交番順序回路網”と呼ぶことにする。この場合には、対関数 $F_{f_j}^*$, $F_{h_k}^*$ はすべて交番関数、したがって N_1 は交番回路網となる。なお、ある k について関係 A が存在している場合、対関数 $F_{f_j}^*$, $F_{h_k}^*$ を実際的に実現する手段が存在するかどうかについてこれまで何も述べていない。しかし交番関数を自己双対回路で実現した方法を少し拡張するだけで、通常の組合せ回路によってそれらの対関数を実現することは容易であり(付録4.1)、また、交番回路で適用したフェイルセーフ性をそのような対関数回路に拡張適用することも可能である。以下、 N_1 はそのように実現されているものとする。

4.1.2 フェイルセーフ条件

交番回路のフェイルセーフ性の定義を拡張して、交番順序回路網のフェイルセーフ性を以下のように定義する。ただし、故障については三章の定義をそのまま用いることにし、対象とする素子の中に遅延素子を含める。

[定 義 24] 交番順序回路網 M の“ある出力 y が故障 e に関してフェイルセーフ”であるとは、 M に故障 e が存在するときの任意の時点 t において出力 y の値が、故障 e が存在しないとした場合の値に等しいか、さもなければ故障信号 $\langle 0, 0 \rangle$, $\langle 1, 1 \rangle$ のいずれかであることとする。また、 M の各出力が故障 e に関してフェイルセーフであるとき、“ M は故障 e に関してフェイルセーフ”と呼ぶ。

ここでは、任意一つの素子(外部からの入力端子を除く)の故障に関してフェイルセーフな交番順序回路網を構成する一つの十分条件を示す。

まず、交番順序回路網 M の構造を、入出力端子と素子を“節点”，入出力端子および素子を結ぶ信号線を信号の流れの方向に一致する方向を

もつ“枝”とする有向グラフと見る（項 1.3.4 参照）。なお，対関数回路網 N_1 を構成する素子は項 3.2.4 で述べた正素子と負素子に限定する。このとき交番回路における定理 8 がそのままの形で成立する。すなわち，

〔定 理 12〕 交番順序回路網 M において，素子 v からある出力端子 v_0 に向かう各道に存在する負素子の数が，すべて偶数，またはすべて奇数であるとき， v_0 における出力は素子 v の故障に関してフェイルセーフである。

（証明）まず，定理 8 のフェイルセーフ条件が，交番回路が自己双対回路によって実現されているという事実には直接には依存しておらず，その条件により，回路の出力関数が着目している素子の変数について正あるいは負（項 1.3.3 参照）になるという事実だけによって，着目している素子の故障に関するフェイルセーフ性を保証するものであることに注意する。実際， M における対関数回路網 N_1 の出力 $y_j, j=1, 2, \dots, m$ のように，それに対する入力必ずしも交番信号ではない場合でも，正常時の対信号出力が交番信号に限られるような対回路網に対しては，それが通常の組み合わせ回路として構成されているかぎり，定理 8 はそのまま適用できる。ただし，この場合フェイルセーフ性の意味は，定義 12 の D_A^n を正常時に加えられる対信号の集合に置き換えたものとして解釈することになり，これはまた定義 24 のフェイルセーフ性にも矛盾しない。定理 8 をこのような意味で解釈するならば，定理 8 と本定理 12 との相違は，定理 12 においては v から v_0 に向かう道の中に，遅延回路網 N_2 を経由して入力にフィードバックするものがあり得るということだけである。よって，以下ではその場合にもフェイルセーフ性が成立することを示す。

以下，素子 v を p 素子（定義 22 参照）と仮定して議論を進めるが n 素子としても同じ結論が得られる。

素子 v から出力端子に向かう道の中の一つが， N_2 の中のある遅延素子 v_D を経由しているものとする。対関数回路網 N_1 をそれを実現してい

る組合せ回路網と見て、時刻 t における素子 v 、および出力 v_0 の変数をそれぞれ、 u_t, y_t と書き、遅延素子 v_D の入力側 (N_1 における) での変数を z_t と表わす。定理の条件によって、 v_D は v_0 に対して p 素子か n 素子のいずれかでなければならないが、いま p 素子 [n 素子] とすれば、補題 4 によって、

$$y_t = Pu_t z_t + Qu_t + Rz_t + S [Pu_t \bar{z}_t + Qu_t + R\bar{z}_t + S] \quad (4.8)$$

ここに、 P, Q, R, S は u_t, z_t に依存しない論理関数、と表わされる。この場合、 v_D を仮想的に出力端子とみたとすると、 v はそれに対しては p 素子 [n 素子] でなければならない。この事実と v_D が 2 単位時間の遅延を行なうことに注意すると、

$$z_t = P'u_{t-2} + Q' [P'\bar{u}_{t-2} + Q'] \quad (4.9)$$

ここに、 P', Q' は u_{t-2} に依存しない論理関数、と表わされる。式 (4.8)、(4.9) によって、いつでも

$$y_t = P''u_t u_{t-2} + Q''u_t + R''u_{t-2} + S'' \quad (4.10)$$

ここに、 P'', Q'', R'', S'' は u_t, u_{t-2} に依存しない論理関数、と表わされる。素子 v の 1 故障 ($u_t = u_{t-2} = 1$) [0 故障 ($u_t = u_{t-2} = 0$)] を e_1 [e_0] とし、それに対する故障出力を y_{te1} [y_{te0}] とすれば式 (4.10) によって、外部からの入力値とは無関係に恒等的に (任意の時点 t で)、

$$y_t \geq y_{te0} [y_t \leq y_{te1}] \quad (4.11)$$

が成立する。明らかに、 v から N_2 を経由して v_0 に向かう道が 2 以上存在しても式 (4.11) と同じ結果が導かれる。さて、 v_0 における対信号出力 y は、上の記法をそのまま用いると適当な t に対して

$y = \langle y_t, y_{t+1} \rangle$ のように書くことができる。この y が、正常時には交番信号であることと、式 (4.11) とによって、定義 24 のフェイルセ

イフ条件を満たすことは明らかである。(終り)

この条件は知られている非対称故障素子によるフェイルセーフ順序回路の構成条件([HTK1])と本質的に同じである。上の証明の過程から分かるように、 M における素子の単一故障は等価的に、 N_1 における素子の多重故障になる。実はこれらの多重故障は定理12の条件が満たされるときには、定理10の条件を満たす非対称多重故障となっているのである。与えられた交番順序回路網 M を項3.2.5で述べた橋本等の二重化法によって、その任意の出力、任意の素子について定理12の条件を満たしてフェイルセーフにできることも交番回路の場合と同様である。そのように、任意の一つの素子の故障に関してフェイルセーフに構成した交番順序回路網の各素子を、同じ機能をもつ非対称故障素子に(定理10の条件を満たすようにして)置き換えたものが、その任意の素子の多重非対称故障に関してフェイルセーフになることも上の議論によって明らかである。

さて、任意の交番回路は単一入力誤まりに関して無条件にフェイルセーフであった。この事実は交番順序回路網においては成立しない。それが成立するためには、任意の入力に対して定理12を満たしていることが十分である。任意の順序回路をそのように構成できるかという問題があるが、正順序回路として構成するという解答が存在する([TaI1], [TaI2])。

最後に、より実用的な交番順序回路網として、完全交番順序回路網で、その部分である組合せ回路網がフェイルセーフであるものを指摘しておく。これは、一般にはフェイルセーフではないが、出力変数とともに状態変数のほうも故障信号検出の対象とすることによって、誤った交番信号が出力される以前に、任意の素子の故障の検出を可能にする。この意味で、この完全交番順序回路網は、“実用的に”フェイルセーフということができよう。

4.2 フェイルセーフ交番論理系による自己修復機能を

持つ二重系の構成

第2章で述べたように、任意の論理関数 f の交番回路 F_f は、その各対変数入力をそれに対応している通常の変数入力に切り換えることによって、 f を実行する通常の論理回路として働かせることができる。このように働いている状態を便宜上、交番回路 F_f の“非交番動作”と言うことにする。この特徴を利用して、二つの同じ交番回路による二重系として、以下に述べるような一種の自己修復系を構成することができる。

すなわち、所与の関数 f の二つのフェイルセーフ交番回路 F'_f, F''_f の二重系すなわち並列二重化回路を構成し、故障の有無によってつぎのような二つの動作モードを取れるようにしておく（図 4.2 参照）。

- (i) F'_f, F''_f が共に正常であるとき両系を共に同期して非交番動作させ、故障検査のために両系の出力の一致検査を行なう（モード1）。
- (ii) モード1動作中、いずれか一方に故障が生じて出力の不一致が検出されたとき、その検出信号により両系を共に正常な交番回路動作に切り換え、かつ両系においてそれぞれ独立に故障信号の検査を行ない、それが検出された方の系を切り離し、正常な系だけを働かせる（モード2）。

ここで、両系がフェイルセーフ交番回路であることから、モード2動作に切り換わった後、最初の故障信号が検出されるまでは、両系の出力はいずれをとっても故障の有無にかかわらず正しい値として使うことができることを注意しておく。他方、故障した系はできるかぎり速やかに切り離して修理などの処置をとることが望まれるが、つぎのようにすれば、この切り離しはモード1からモード2への切り換えの直後に実行され得る。いま、モード1動作中故障 e の発生により、入力 X_a ではじめて不一致が検出されたとしよう。これによりモード2に切り換わったとき、新たな入力を加える前に X_a の交番入力 $\langle X_a, \bar{X}_a \rangle$ を加えるようにするのである。故障している方の出力の第 i 成分 $f_e(X_a)$ は正しい値 $f(X_a)$ とは一致しなかったのであるから、故障した系の出力 $\langle f_e(X_a),$

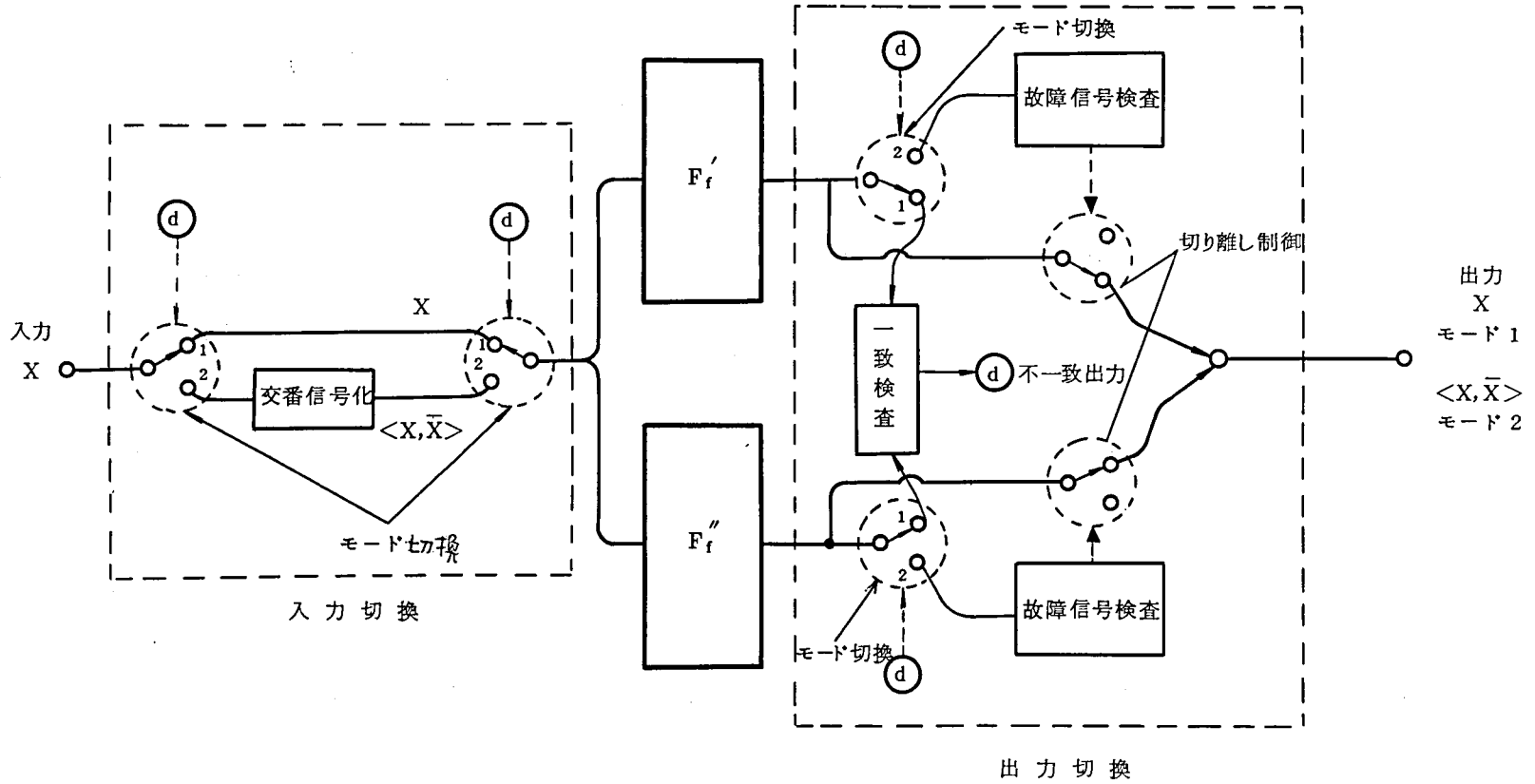


図 4.2 フェイルセーフ交番論理系の二重系の構成例

$f_e(\bar{X}_a) >$ は当然故障信号の $\langle 1, 1 \rangle$ か $\langle 0, 0 \rangle$ である。これにより故障した系をモード2に切り換わった直後に切り離すことができることになる。

この二重系は、通常二重系と異なりモード1からモード2に切り換わったあと、それ自身で正常に動作している系を判別し、しかも単一系となったあともフェイルセーフ交番回路として、モード1におけると同等の故障検出能力を回復している。この意味で、この二重系は、一方の系の故障に対して自己修復機能を持つと言ってよいであろう。

もちろんモード1（非交番動作）からモード2（交番動作）に移ることにより、系の演算実行速度が $1/2$ に落ちる（外部からの入力速度を系自身で制御できるものとして）というコストを払うことはやむをえないことである。

なお、同様の二重系をフェイルセーフな交番順序回路網によって構成できることはいうまでもないが、この場合モード1からモード2への切り換えには、入力の交番信号化だけでなく、遅延回路網の構造の（遅延時間を2倍にするための）切り換えが必要になる（項4.1.1参照）。

4.3 実用性に関する議論

第二章から前節まで論理設計上の問題としてフェイルセーフ交番回路の構成法とその応用について述べてきた。ここではその主題から少しはずれるが、交番論理系の実用に際して基本的な問題となる冗長度と故障検出能力について若干の考察を加える。

4.3.1 交番論理系の冗長度

交番論理系では、既に明らかにしたように、ある論理関数の計算を遂行するためにその関数とそれに双対な関数の計算を引き続き遂行する。したがって、通常非冗長回路に較べて同じ関数の計算に二倍の時間を要する。同じことが交番順序回路網についてもいえる。単一故障に対する故障検出能力についていえば、フェイルセーフな交番回路は、空間的な二重系（ハードウェアの二重系を構成して出力の比較検査で故障検査

を行なうシステムを想定する)と同等である。したがって、実用上は交番回路を構成するために通常の非冗長回路に対して余分に必要になるハードウェアの冗長度が、空間的二重系より少ないことが一つの必要条件となろう。この冗長度は、論理回路の構成に使用する素子の機能および論理関数の種類に大きく依存する。理想的な例は、多数決素子と否定回路で構成されるような自己双対素子による論理回路への交番回路の適用である。この場合には、与えられた回路の入力を対応する交番信号に換えるだけで余分のハードウェアを要せず、その回路がそのまま交番回路になり、しかもそれは必ず単一故障に関してフェイルセーフである(定理7)。一方、AND, OR, NOT, NAND, NORなどのブールゲートを基礎とする現在の一般的な半導体素子回路についていえば、交番回路の冗長度(与えられた論理関数 f を実行する回路に対して、 $\phi = cf + \bar{c}f^D$ を実行する回路を作るに要する余分のコスト)は一般的にはかなり大きい。もちろん、対象とする論理関数が自己双対である場合、非冗長回路がそのまま交番回路として使えることは言うまでもない。ただ、与えられた非冗長回路をフェイルセーフ化するために余分のコストを考慮することが必要であるが、これは実際上あまり問題にしないで良い。よく知られているQuineの意味での論理関数の最簡式([Ha]のP.111)に基づく論理回路は定理8の条件を満たして素子の単一故障に関してフェイルセーフであることを示すことができる。

したがって、在来のブールゲートを用いる論理回路では、交番論理系は、全加算回路、奇数入力 of 奇偶検査回路などの自己双対回路に部分的に適用することが有効である。

最初に述べたように、交番論理系をシステム全般に効果的に適用できるのは、回路の構成素子として自己双対素子が使われる場合であるが、そのような自己双対素子として今後の発展の可能性を持つと思われるものに、最近具体的に検討されはじめた可変AND-OR回路([YoM], [YoMK]), 機能変換論理回路([SI1], [IS]), ICによる閾論理素子([W])などがある。

交番回路の時間的冗長度が演算速度に関して許されない場合、交番回路を平常は時間的繰返しなしに使用し（これは、対信号入力を通常の単信号入力に切り換えるだけで実行できる）、あらかじめ定めた故障検査時間だけ交番論理動作させるという方法も考えられる。ただしこの手段は交番順序回路では、入力の切換だけでなく遅延回路網の構造の切換も必要のためやや複雑になるであろう。

4.3.2 故障検出可能性

任意の論理関数に対して単一故障に関するフェイルセーフ交番回路を構成することができる。しかし、これは二重以上の故障に関してはフェイルセーフではない。

一応、同時に二つ以上の素子が故障する確率を無視すれば、ある一つの素子 v の故障が発生したあと、つぎに他の素子が故障するまでに v の故障を検出してその修理にとりかかる保守態勢をとることによって、この交番回路を實際上フェイルセーフなシステムとして使用することができる。その際考慮しなければならない要点は、フェイルセーフ交番回路は冗長でなくても、故障発生時にそれがただちに検出されるとは限らないということである。定理2はこの問題について、交番回路が冗長でなくフェイルセーフであればその任意の故障に対して、出力に故障信号を生ぜしめる入力少なくとも一つ存在することを述べている。いま、任意の素子の単一故障に対して故障信号を生ぜしめる入力の集合を“検査入力集合”と呼ぶことにしよう。一つの素子の故障が第二の素子の故障の発生までに検出されるためには、その間に加えられる入力全体の中に検査入力集合が含まれていることが必要である。もし、入力の統計的性質として回路素子の故障についての平均故障間時間 (MTBF) に比べて十分短い時間内に生ずる入力の中に、検査入力集合が含まれていることが知っているなら、その交番回路は上記の条件を実質的に（1に近い確率で）満足することになる。さもなければ、単一故障に関するフェイルセーフ交番回路を実際的なフェイルセーフシステムとして使用するためには、平均故障間時間に較べて十分短い間隔で強制的に検査入力を加え

るという手段をとることが必要になるであろう。

第 5 章 第 I 部の結論

複雑な診断手段をとることなく、たんにその出力信号を監視するだけで、正常動作の確認と故障の検出を行なうことができるという意味で、故障診断の容易な論理回路を構成するための時間冗長方式である交番論理系に着目してそのフェイルセーフ構成を論じた。

まず第 2 章において、交番論理系を通常の論理値 1 と 0 をそれぞれ時系列としての対信号 $\langle 1, 0 \rangle$ と $\langle 0, 1 \rangle$ とで表わす時間的相補二重系とし定式化し、その物理的な実現方法（交番回路）として、自己双対回路による可変論理回路（その出力関数が一つの関数からその双対関数に交番できる）が有効なことを述べた。また、自己双対素子によって構成される任意の論理回路は、その各入力を対応する交番信号入力に換えるだけで、余分の金物を使うことなく、交番素子交番回路となることを指摘した。これらは従来、Bark 等（〔BK〕）、高橋等（〔TGI〕）によって試みられていたものを体系的にまとめたものである。

第三章では、最初に交番回路の内部あるいは入力にある故障が生じた際に、出力の対信号 $\langle 1, 0 \rangle$ と $\langle 0, 1 \rangle$ とは一方から他方に誤まることのないという意味での、交番回路のフェイルセーフ性を定義した。このフェイルセーフ性の考え方は、筆者とその共同研究者によって独自に定義されたものである。交番論理系が最初に述べた意味での故障診断容易な論理系となる、すなわち、出力信号の $\langle 1, 0 \rangle$ と $\langle 0, 1 \rangle$ とを常時正しい値として信頼でき、 $\langle 1, 1 \rangle$ と $\langle 0, 0 \rangle$ との検出だけで生じる故障を完全に検出できるためには、このフェイルセーフ性の実現が必須の条件である。これは、最初に渡辺・高橋（〔WT1〕）によって提唱された非対称故障素子による論理回路におけるフェイルセーフ性の拡張概念とみなすことができ、また浦野等による ϕ フェイルセーフ（〔UHW〕）系の現実的モデルでもある。なお、従来のフェイルセーフ性の議論が、非対称故障素子、 ϕ 故障素子など故障の様態に強い制約のある素子の存在を前提しているのに対し、本論文はそのような制約のない一般的な素子を包含する議論であることを注意する。

上のフェイルセーフ性の定義に基づいて第三章で導かれた主要な結果をつぎにあげる。

- (i) 交番回路がある故障に関してフェイルセーフであるための一般的な必要十分条件を定式化した (定理 1)。
- (ii) 交番回路に生ずる故障を故障信号の監視だけによって検出できるためには、その回路が非冗長回路であると共に、フェイルセーフであることが必要なことを示した (定理 2)。
- (iii) 一つの自己双対回路が実現するいくつかの交番回路は、そのフェイルセーフ性、故障検出可能性について全く等価であることを示した (定理 3)。これによって、交番回路のフェイルセーフ性は、それを実現している自己双対回路の構造だけによって決まることが明らかになった。
- (iv) 交番回路がある故障に関してフェイルセーフであるための、それを実現している自己双対回路が満たすべき必要十分条件を明らかにした (定理 4)。
- (v) 交番回路が、その構成素子の任意の一つの故障に関してフェイルセーフであるための必要十分条件を明らかにした (定理 5)。
- (vi) 上の結果により、任意の交番回路 (あるいは交番回路網) が、その任意の一つの入力端子故障に関して無条件にフェイルセーフであることを示した。これにより、任意の交番回路が任意の単一入力誤まりに関してフェイルセーフであることが結論された (定理 6)。
- (vii) 定理 5 に基づいて、任意の交番素子交番回路 (あるいは交番回路網) が、その任意の素子の単一故障に関して無条件にフェイルセーフであることを示した (定理 7)。
- (viii) 通常論理素子 (AND, OR, NOT, NAND, NOR) を用いた交番回路において、ある一つの素子の故障に関してその交番回路がフェイルセーフであるための回路構造についての実用的な十分条件を与えた (定理 8)。また、これが橋本等 ([HTK1]) によって示されている非対称故障素子によるフェイルセルフ論理回路の条件に一致することを指摘した。また、その事実により、橋本等の二重化法が単一故障に関するフェイルセーフ交番回路の構成にも有効であることを指摘した。

(ix) 定理 8 により、任意の論理関数に対して、その単一故障に関するフェイルセーフ交番回路を実用的に構成する方法を示した (NAND だけ NOR だけを用いた三段以内の回路、負素子が入力端子だけに直結されている回路など)。

また、素子および入力の多重故障に関するフェイルセーフ条件についても検討してつぎの結果を得た。

(X) 入力の任意の二重誤りに関してフェイルセーフな交番回路は、自明なものを除いて実現できないことを示した (定理 9)。

(xi) 入力誤まりと入力端子故障を除外すれば、回路内部の素子の任意の多重故障に関してフェイルセーフである交番回路が存在する。その回路構成上の一つの十分条件を与えた (項 3.3.2)。

交番回路の構成素子として非対称故障素子を用いる場合についても検討した。

(xii) 各素子各出力について定理 8 の条件を満たして、素子の単一故障に関してフェイルセーフである交番回路は、素子の任意の多重非対称故障に関してフェイルセーフできる。その条件を与えた (定理 10)。また、この条件が非対称故障素子を用いる従来のフェイルセーフ交番回路の構成条件

(〔HTK1〕,〔MK2〕,〔HWU〕)と本質的に同じであることを指摘した。

(xiii) 入力誤まりに関するフェイルセーフ条件は、交番回路を構成できる論理関数の形を制限する。これについて、任意の多重非対称入力誤まりに関してフェイルセーフな交番回路を実現できるための論理関数の満たすべき必要十分条件を明らかにした (定理 11, 系 3, 系 4)。

第四章では、まず、交番論理系を順序回路にも拡張適用し、与えられた順序回路網に対し一つの交番順序回路網を定義できることを示した。また、その素子の単一故障に関するフェイルセーフ実現の十分条件として、交番回路に対して得た定理 8 がこの場合にも有効なことを示した (定理 12)。

ついで、交番論理系の一つの二重系について検討し、単位になる交番論理系が共にフェイルセーフである場合、その二重系は一方に故障が生じても自らそれを判別し、出力情報に損失を受けることなく他方の正常な系で同じ機能 (演

算速度は半減する)を維持できることを示した(節4.2)。

交番論理系は、必然的に対応する非冗長系に較べて、同じ論理関数を計算するのに少なくとも二倍の時間を必要とする。最後に、この時間的冗長度と交番回路を構成するために余分に要する金物の冗長度を対比しつつ、実用的立場からの得失を論じた(節4.3)。交番論理系は、演算速度よりも確実な故障検査を要求されるような系、あるいは、部分系において実際的な有用性を発揮するものと思われる。

第II部 予備に定時保守を行なう
自己修復系の信頼度解析

第Ⅱ部の記号表

第Ⅱ部で全般的に使用する記号を一括して挙げておく。なお、ことわりのないものはすべて自己修復系のシステムモデルに関するものである。

- N : 動作ユニット数。
 L : 予備ユニット数。
 λ_w : 動作ユニットの故障率。
 λ_s : 予備ユニットの故障率。
 T : 定時保守の間隔。
 τ : 一回の定時保守の所要時間。
 s : λ_s / λ_w 。
 α : τ / T 。
 t : システムの始動後の経過時間。
 $R(t)$: 時点 t における信頼度。
 $Q(t)$: 時点 t における不信頼度。
 M : MTTF。
 $R_B(t)$: システムモデルで保守を行なわないとした場合の時点 t における信頼度。
 $Q_B(t)$: システムモデルで保守を行なわないとした場合の時点 t における不信頼度。
 M_B : システムモデルで保守を行なわないとした場合のMTTF。
 m : MTTFの延び率, すなわち $m = M / M_B$ 。
 A : 稼働率 (availability)。
 x : 正規化時間, すなわち $x = N\lambda_w t$ 。
 X : 正規化保守間隔, すなわち $X = N\lambda_w T$ 。
 $\Phi(x)$: $R(x / N\lambda_w)$ 。
 $\Omega(x)$: $Q(x / N\lambda_w)$ 。
 $h(x)$: $h(x / N\lambda_w)$ 。
 $P_i^1(t)$: 始動時の正常な予備ユニット数が1で, 時点 t で i ユニットが

故障している確率。

$R_i(t)$: 時点 t で i ユニットが故障している確率。

$R_{ij}(t)$: 時点 0 で j ユニットが故障しているという条件下で、時点 0 で定時保守を開始し、その完了後の時点 t で i ユニットが故障している確率。

$\mathbf{r}(t)$: $R_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, L$ を要素とするベクトル。

$\mathbf{R}(t)$: $R_{ij}(t)$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, L$ を要素とする行列。

$\varphi(s, L)$: p. 96 に示す式。

$\psi(s, L)$: p. 96 に示す式。

${}_{N+L}C_i$: p. 95 に示す式。

$h(t)$: p.100 に示す式。

$g(x)$: p. 99 に示す式。

第6章 第Ⅱ部の序論

6.1 自己修復系とその信頼度解析に関する諸研究

自己修復系 (self-repairing systems or computers) とは、系 (システム) の一部分に故障が生じて、あらかじめ組みこまれた何らかの冗長手段によってその故障が自動的に補償されて、系の正常な機能が維持されるようなシステムを言う ([W], [CoB], [A1])。最近ではこのような自己修復系を実現するための諸技術をシステム (特にデジタルシステム) の高信頼度技術としてより一般的立場から把握し、"fault-tolerant computing design" の名のもとに組織化する動きもある ([A2], [R])。

システムを自己修復系として構成しようとする設計技術は、個々の信頼性が十分でなかったリレーや真空管を回路素子として使用した初期の計算機から不可決のものであった。回路素子として、トランジスタ、IC、LSIなどが使用できるようになり、その信頼性は飛躍的に向上してきたが、一方で各種のオンラインシステムやTSSをはじめとして大規模な電子計算機システムが社会の多方面で重大な役割を担う傾向が年々増大し、それらに対する信頼性要求もまた一層厳しくなっている。実際、公衆通信の電子交換機的设计などに見られるように、現在得られる高信頼度の素子を用いてもなおかつ必要な信頼性を実現できないことがしばしば生ずる [Ko]。また、人工衛星に搭載されるシステムに対するより厳しい信頼性要求もある ([CB] の 1.2, [Te] の p. 15)。

自己修復系を実現する諸技術は大きく二つに分けることができる。第一は、fault-masking 技術 ([CoB])、第二は、切替予備を持つ待機冗長法 (stand-by, [S]) である。前者は故障出力を回路に組み込まれた冗長性によって自動的に訂正するもので、von Neumann の提唱 ([N]) に始まる、多数決による誤まり再生回路を持つ多重化論理方式が基本的な技術である。これは一般的には並列冗長法 ([S]) ということができる。具体的なものとして TMR (Triple Modular

Redundancy)についてよく研究されている ([N], [LV], [MA])。特殊な四重化論理回路として quadded logic ([T], [P] の chapter V) は有名である。似たものに非対称誤り素子による二重化回路 ([HTK1]) がある。誤り訂正符号 ([Pe]) もこの範ちゅうに入ると考えられる。

待機冗長方式の最初の実用の試みは米国空軍のオンラインリアルタイムシステムである SAGE といわれるが ([CB] の § 1.2), 一システムに一予備システムを用意する通常の待機冗長システムは現在でも基本的な冗長方式の一つである。待機冗長システムでは, 自動的な故障検出と診断, および予備との自動切り換えが必須の技術である。前者のためには種々のハードウェアの故障検出方式 ([SHB]) と共にソフトウェアによる故障診断技術 ([CMM], [Mc]) が使われる。

最近では, 上述の種々方法を統合してより高度の自己修復系を実現する試みが盛んに行なわれている ([EB], [DK], [AGMR], [CJWS])。

なお, 自己修復系に関する最近までの諸研究は [A1], [A2], [CB], [R] などに詳しくまとめられている。

このような自己修復系の信頼度に関する研究もまた 1952 年に行なわれた von Neumann の確率的論理に関する一連の講演 ([N]) に始まるといわれる。彼は其中で, 多重化論理と多数決による誤り再正機能をオートマトンの構成に適用し, 論理回路網の信頼度を回路の構成素子の信頼度の関数として表わした。また, それによって, そのような多重化と誤り再生機能によって実質的に信頼度が改善される条件も明らかにした。1956 年に Moore と Shannon とは, 同様の発想でリレー回路における多重化構成による信頼度高上について研究している ([MS])。上の二つの研究における信頼度は一時的誤りを生ずる素子によって構成されたシステムの正しい動作をする確率である。多重化によるシステムの信頼性改善の程度は, 多重化がそのどの程度の大きさのサブシステムを単位として適用されるかに依存するが, この問題を最初に扱ったのは Flehinger である ([F1])。1958 年に Dickinson と Walker が,

このような信頼度の考え方をシステムに生ずる永久故障を対象とする理論へと拡張した ([DW])。この場合、システムの信頼度は、始動後のある時点において、それが生存している (正常動作を続けている) 確率を意味する。以後このような立場で各種の冗長システムについて研究が行なわれてきた。それらの重要な結果はシステムの信頼性理論として

[FO], [S] などに体系的にまとめられている。現在ではこのような問題を扱った教科書も少なくない ([B], [BP], [Sh], [Ic])。

冗長システムの信頼度解析の基本的な問題は、単一システムの信頼度を基礎として冗長構成されたシステムの信頼度を明らかにすることである。具体的には対象とする冗長システムに対してその故障過程 (場合によっては保守過程を含めて) を表わす数学的モデルを設定し、信頼度, MTBF (平均故障間時間: mean time between failures), MTTF (平均寿命: mean time to failure), 稼働率

(availability) などの各種の信頼性の尺度 (節 6.3 参照) を導くことを問題とする。この解法の手段として最も一般的なものは待ち合せ理論の応用 ([Ic] の第 4 章, [Sh] の第 6 章) である。これによれば、システムの故障過程をマルコフ過程とみなしてその状態遷移を表わす Kolmogorov 方程式 ([F] の p. 423) を解くことによってそのシステムの各種の信頼性尺度を導くことができる。第 II 部の研究も基本的にはこの範ちゅうに入る。この他の解析手段として、保守を行なうシステムを問題とする交換理論 (renewal theory, [BP] の chapter 3, [Ic] の p. 208), また待ち合わせ理論と交換理論を含む、より一般的な方法としてセミマルコフ過程 (semi-Markov processes) の理論 ([BP] の chapter 5) などがある。

さて、最初に述べた自己修復系は信頼度解析のモデルとして一般的には、複数個のユニットから成る動作システムと、それに対する複数個の予備ユニット、および各ユニットの故障を自動的に検出し予備との切り換えを行なう切換器、とから成る一般化した待機冗長系 (あるいは一般複式装備系, [FO]) として把握することができる ([K1])。このよ

りなシステムの信頼性尺度として重要なものは信頼度と共に、システムの始動後、予備を使いつくした後に生ずるシステム故障に到るまでのMTTFである。これらの信頼性尺度の値を決定する主要因は、予備ユニットの数と、予備に対して行なり保守あるいは補給の方法である。このような保守をまったく行なわない場合については、[Fu]が一般的な結果を与えている。予備に対する保守を行なり場合についての主要な解析例としては[T]、[C]、[FO]、[Ic]の第四章、などがある。保守、無保守の両場合についてシステムの予備ユニットの数とそのMTTFの関係を詳しく検討した研究もある([K1])。上記の諸研究を含めて、これまでの研究の多くは保守の方法として、故障発生直後、あるいは予備ユニット数が一定値以下になったときに保守に着手する場合を扱っている。その場合に、可能な保守の回数が有限回だけ許される場合を扱ったものもある([M])。

また、システムの信頼度に関する切換器の信頼度の影響を論じた研究もいくつか見られる([Re]、[IIF1]、[IIF2]、[FL])。

なお、最近、Carter等は、高度の自己修復系の設計の基礎となる信頼性の一般的モデルを提案している([BCJR])。

上に見た、自己修復系の信頼性に関する諸研究に対して、本論文第Ⅱ部は、従来あまり研究されていない、予備に予定した一定の周期で保守を行なり場合を検討するものである。次節で触れるように、最近、この場合の信頼性解析の必要性が実際の問題として現われることも少なからず見られる。

6.2 第Ⅱ部の研究の目的と概要

前節で触れたように、第Ⅱ部では自己修復系に対して、予備にあらかじめ定めた一定の周期で点検保守を行なり場合（以下、“定時保守”と言う）の信頼度解析を行なり。この問題はつぎに述べるような実際的な問題に関連している。すなわち、公衆通信網における交換機や中継器にみられるような、24時間休止の許されないシステムや、あるいは特に高い

信頼度を必要とされるシステムでは、通常、自動切換機構を持った待機冗長系や並列冗長系といった自己修復系が使用され、その部分系の故障に際してはその発生時直ちに修理にかかるという保守方式が採用されている。しかし、このためには保守要員の24時間配備が必要とされるという困難さがある。これに対して、もし、予定された一定の周期で保守を行なうことによって、必要な信頼性を確保できるならば、そのような保守要員配備の問題は非常に容易になるであろうと予想される。また、一例として最近、国際通信における短波の送受信所はしだいに無人化され中央局から遠隔操作されるようになってきているが、多くの場合それらが遠隔地にあるため、故障時の即時保守はより難かしい問題であり、ここに扱おうような定時保守方式を採用できることが望ましい。送受信所では、複数個の同種の送受信器が並行して（異なる相手方に対して）働いていることが少なくないから、この場合には、それらに対して複数個の共通の予備を置き、それらに定時保守を行なうような自己修復系が考えられる。また、遠隔地に置かれる衛星通信用地上局などにおいても、その将来の無人化の方向を考えると、その端局装置や中継器にも同様の自己修復系の採用が考えられる。

ところで、このような保守方式をとる自己修復系を実際に設計するためには、その信頼度予測ができなければならない。従来、このような周期的保守方式は交換理論によって扱われているが（〔Ic〕の p. 214,〔BP〕の p. 61など）、それらにおいては、ここで扱うような自己修復系の構造は考慮されていないし、また保守時間の影響なども考慮されていない。

このような事情を背景として、本論文第Ⅱ部では、複数個の同種のユニットの直列システムである動作システムと、動作システムのユニットが故障したときそれと交換されるべき複数個の予備ユニットから構成される自己修復系の一般的なモデルを考え、その予備に一定の周期で定期的に保守を行なうとし、かつ、各保守の所要時間は一定であるとして、この場合の信頼度を検討する。

モデルに含まれるシステム変数は、動作ユニット、予備ユニットの数とそれぞれの故障率（定数）、および保守の間隔とその所要時間であり、各保守区間に繰り返し従来の待ち行列理論を適用するという方法によって、それらの変数に対するモデルの信頼度、MTTF、および稼働率の様態を明らかにする。

以下、第Ⅱ部の構成と概要について述べる。

まず、次節において第Ⅱ部で使用する信頼性理論における若干の専門用語の説明を行ない、本題（第7章）にはいる。最初に、自己修復系と定時保守方式およびその故障過程に対してシステムモデルを定め、信頼度解析の前提を明らかにする（節7.1）。つぎに、そのモデルにおいて保守を行なわないとした場合の信頼度とMTTFの表示式を導く（節7.2）。これは以降の議論の準備である。つづいて、定時保守下の信頼度とMTTFの表示式を導く（節7.3）。それらの結果に基づき、主に定時保守下のシステムのMTTFが無保守時に較べてどれだけ延びるかにより、このシステムモデルの信頼度を定量的に明らかにする（節7.4）。ここまでの議論は最初のシステム故障までを対象としたものであるが、つぎに定時保守をシステム故障時の保守に拡張してその場合の稼働率を明らかにする（節7.5）。最後にモデルの妥当性に関連して若干の議論を示す（節7.6）。

第8章において第7章で得た結果を要約し第Ⅱ部を終える。

なお、第Ⅱ部の内容は〔YWK〕、〔YD〕、〔Y1〕をまとめたものであり、主要な結果は〔Y2〕としてまとめた形で発表されている。

6.3 予備定義

第Ⅱ部で用いるいくつかの信頼性尺度（評価関数）についてその意味を説明しておく。これは〔Sh〕に基づくものである。

- (i) 信頼度 (reliability) : システムが規定の条件で規定の期間、規定どおりの機能を故障なく遂行する確率。本論ではより具体的には、システムの始動後のある時点 t でシステムが規定どおりの機能

を遂行している確率である（以下、 $R(t)$ ）。このように信頼度を時間の関数として表わしたとき、それを信頼度関数と言うこともある。また、 $1 - R(t)$ は不信頼度と呼ばれる。

- (ii) 故障率：単位時間あたりの故障発生の確率。システムの信頼度が $R(t)$ であれば、その故障率 ($\lambda(t)$ と書く) は、

$$\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} = -\frac{d \ln R(t)}{dt} \quad (6.1)$$

したがって、

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right) \quad (6.2)$$

の関係がある。特に $\lambda(t) = \lambda$ (定数) の場合には、

$$R(t) = \exp(-\lambda t) \quad (6.3)$$

- (iii) MTTF (mean time to failure), MTBF (mean time between failures) : 保守あるいは修理を行なわないシステムで始動時から“システム故障” (システムの規定の機能が失なわれる状態) に到る無故障動作時間の平均値を“MTTF”, 保守あるいは修理を行なうシステムにおいて、あるシステム故障からの復旧時点から、次のシステム故障時までの無故障動作時間の平均値を“MTBF”と言う。

いずれのシステムにおいても始動後あるいは復旧後の、時点 t でシステムが動作している確率 (すなわち信頼度) を $R(t)$ とすると

$$\text{MTTF (MTBF)} = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (6.4)$$

と表わされる ([Sh] の p. 113)。

- (iv) MTTR (mean time to repair) : 保守あるいは修理を行なうシステムにおいて、システム故障時点から保守によってシステムが復旧するまでの所要時間の平均値。
- (v) 稼働率 (availability) : 保守あるいは修理を行なえるシステムの広義の信頼性の尺度で、“システムがある規定の条件下で使用されたとき、任意の時点において満足に動作する確率”と定義される。稼働率も一般的には時間関数として扱われ、場合により各種

の表現がとられる。ここでは最も一般的に定常稼働率 (A と書く) として,

$$A = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} \quad (6.5)$$

で定義されるものを考える ([Sh] の p. 131)。

第7章 信頼度解析

7.1 モデルの説明

検討する自己修復系のモデルを図7.1に示す。

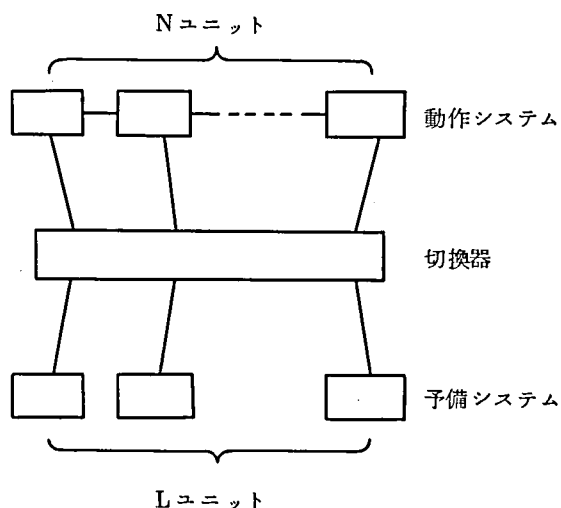


図 7.1 システムモデル

システムは動作システム、予備システム、切換器の三つのサブシステムから成る。動作システムはN個のユニットの直列システム（それが動作するために全ユニットが動作していることが条件となるようなシステム、

[B] の p. 85参照) であり、予備システムはL個のユニットを含む。

動作システム、予備システムの各ユニットを、それぞれ、動作ユニット、予備ユニットと呼ぶ。各ユニットは、動作および予備の両者にわたって、すべて機能的に同一であるとする。すなわち、任意の動作ユニットは、任意の予備ユニットと交換できる。切換器は各ユニットの状態を監視し、動作ユニットが故障すると、ただちにそれを正常な予備ユニットに切換えるものとする。切換えに要する時間は十分短かくて無視できるものとし、またその信頼度は完全であると考え。すなわち、このモデルでは切換器の故障は考えない。

ここで対象とする故障はユニットの故障であり、これに関してつぎの仮定を設ける。

〔仮定1〕 各ユニットの故障はたがいに独立である。

〔仮定2〕 各ユニットの故障は（負の）指数分布にしたがう。
すなわち、その故障率は定数である。

各動作ユニット、および各予備ユニットの故障率は、それぞれにおいてたがいに等しいとし、それぞれを、 λ_w 、 λ_s と表わす。なお、実際的条件として、

$$\lambda_w \geq \lambda_s \geq 0$$

とする。動作ユニットの故障により、ある予備ユニットが切換えられて動作ユニットになるときは、その故障率も λ_s から λ_w に変わると考える。

システムの使命は動作システムが果たす。切換器の作用によって、システムが活着しているかぎり、故障したユニット（以下、故障ユニットと言ひ）は必らず予備システムに見出されることになる。

定時保守として、保守要員は、システムの始動後一定時間 T ごとに予備システムを点検し、故障ユニットが発見されたらただちに修理を行なう。修理は一定時間 τ 経過後に完了するものとする。すなわち、もし点検時点で u 個の故障ユニットが発見されたとすれば、それら u ユニットを直ちに予備システムから切り離し、修理をほどこす。そして、点検後時間 τ を経過した時点において、修理の完了したそれら u 個のユニットを同時に予備システムに復帰させると考える。この点検修理中、動作システムは止めず、また、その間新たに故障するユニットは次回の定時保守時まで放置する。なお、このモデルではシステムの始動後、それがシステム故障（すなわち、動作システムが停止する状態）に到らぬかぎり、この定時保守以外は、その他のいかなる保守もほどこさないものとする。また、実際的な条件として $\tau \ll T$ を仮定する。

システムは各ユニットがすべて正常な状態で始動させる。その後何度目かの保守と保守の間で $L+1$ 個のユニットが故障したときシステム故

障の状態になるものとする。したがって、このシステムモデルの信頼度は、ある時点 t における故障ユニット数が L 以下である確率として定義される。以降、この信頼度と MTTF をそれぞれ $R(t)$ と M で表わす。

このモデルは $\lambda_s = 0$ のとき通常の待機冗長システム、 $\lambda_s = \lambda_w$ のとき並列冗長システム (N out of $N+L$ のシステム) を表わす。

なお、便宜上、二次的なシステム変数として、

$$\alpha = \frac{\tau}{T}, \quad s = \frac{\lambda_s}{\lambda_w}, \quad X = N\lambda_w T$$

を適宜用いる。 $\tau \ll T$, $\lambda_w \geq \lambda_s \geq 0$ と仮定したことから、

$$\alpha \ll 1, \quad 1 \geq s \geq 0 \quad (7.1)$$

となる。また、 X は 動作システムの MTTF すなわち $1/N\lambda_w$ で正規化した保守間隔を意味している。

7.2 定時保守を行なわない場合の信頼度と MTTF

ここでは前節のモデルにおいて定時保守を行なわないとした場合の信頼度 ($R_B(t)$ と書く) と MTTF (M_B と書く) の表示式を導く。これらは新しい結果ではないが、次節以降で定時保守下の信頼度を議論するための基礎となる。

7.2.1 信頼度: $R_B(t)$

このシステムの故障の状態は着目した時点における故障ユニットの数によって決まる。これにより、 i ユニットが故障している状態を E_i と表わす。したがってシステムの始動時の状態は E_0 、また、システム故障の状態は E_{L+1} と表わされる。ユニットの故障に関する仮定によって、このシステムの故障過程は図 7.2 の状態遷移図で示される pure birth process ([F] の p. 400, [Ic] の p. 158 など参照) として扱うことができる。図中、矢印に添えた記号は状態遷移の (単位時間当たりの) 確率 (transition rate) を示す。

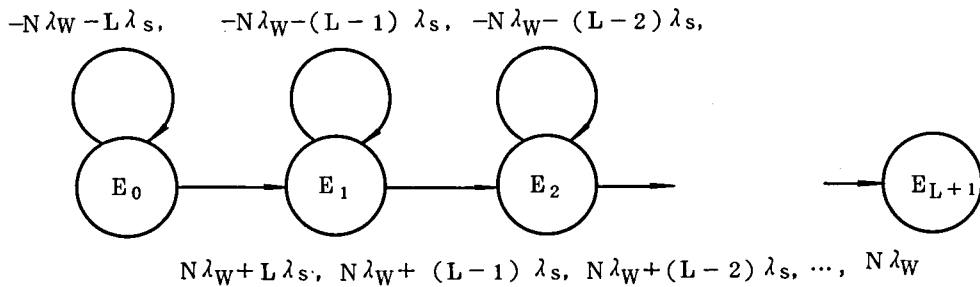


図 7.2 故障状態遷移図

いま，始動時の正常な予備ユニットの数 L が一つのパラメータであることに特に留意して，始動後の時点 t で i 個のユニットが故障している確率を $P_i^L(t)$ と書くことにする。この $P_i^L(t)$ は換言するとシステムの状態 E_i での滞在確率である。システムの信頼度 $R_B(t)$ は時点 t において故障ユニット数が L 以下である確率であり，一方，各状態 E_i はたがいに排反事象であるから，

$$R_B(t) = \sum_{i=0}^L P_i^L(t) \quad (7.2)$$

を得る。

さて，故障過程が図 7.2 に示した pure birth process であることから，各 $P_i^L(t)$ はつぎの連立微分方程式を満たす（付録 7.1）。

$$\left. \begin{aligned} (P_0^L(t))' &= -(N\lambda_W + L\lambda_S) P_0^L(t) \\ (P_i^L(t))' &= -\{N\lambda_W + (L-i)\lambda_S\} P_i^L(t) \\ &\quad + \{N\lambda_W + (L-i+1)\lambda_S\} P_{i-1}^L(t), \\ &\quad \text{for } i=1, 2, \dots, L \end{aligned} \right\} (7.3)$$

初期条件は，システムの始動条件によって，

$$P_0^L(0) = 1, \quad P_i^L(0) = 0, \quad \text{for } i=1, 2, \dots, L$$

であり，これによって方程式 (7.3) の解が次式で与えられることは容易に確かめられる。

$$P_i^L(t) = N/s + L C_i (\exp(s\lambda_W t) - 1)^i \exp(-N\lambda_W t (1 + \frac{s}{N}L)),$$

$$\text{for } i=0, 1, \dots, L \quad (7.4)$$

ここに,

$$N/s+L C_i = \frac{\left(\frac{N}{s}+L\right)\left(\frac{N}{s}+L-1\right)\cdots\left(\frac{N}{s}+L-i+1\right)}{i!}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (7.5)$$

$$\begin{array}{l} \text{for } i=1, 2, \dots, L \\ = 1, \text{ for } i=0 \end{array}$$

この結果と式 (7.2) によって, 信頼度は,

$$R_B(t) = \exp\left(-N\lambda_W t \left(1 + \frac{s}{N}L\right)\right) \sum_{i=0}^L N/s+L C_i \{ \exp(s\lambda_W t) - 1 \}^i \quad (7.6)$$

と表わされる。上式において N/s の値は一般的には 1 以上の任意の実数値を取る。しかし, $R_B(t)$ は s に関しては明らかに単調減少関数であり, N/s が整数になるような飛び飛びの s の値だけを考えても, $R_B(t)$ に対する s の影響を議論するのに大きな支障はない。この事実に着意して, 以下では議論の簡単化のために s の値は N/s が整数になる値だけに限定する。こうすると, 式 (7.6) はつぎのようにも書ける (付録 7.2)。

$$R_B(t) = 1 - \exp\left(-N\lambda_W t \left(1 + \frac{s}{N}L\right)\right) \cdot \sum_{i=L+1}^{N/s+L} N/s+L C_i \{ \exp(s\lambda_W t) - 1 \}^i \quad (7.7)$$

これは不信頼度 $Q(t) = 1 - R(t)$ の評価に便利である。

式 (7.6) は $s=0, s=1$ に対して,

$$R_B(t) = \exp(-N\lambda_W t) \sum_{i=0}^L \frac{(N\lambda_W t)^i}{i!}, \text{ for } s=0 \quad (7.8)$$

$$R_B(t) = \sum_{i=0}^L N+L C_i \{ \exp(-\lambda_W t) \}^{N+L-i} \{ 1 - \exp(-\lambda_W t) \}^i, \text{ for } s=1 \quad (7.9)$$

となるが, 両式はそれぞれ知られている L 個の予備を持つ待機冗長システム (冷予備系), N out of $N+L$ の並列冗長システム (完全熱予備系)

の信頼度を示す ([FO] の式 (5 a) など)。

高信頼度時間帯 ($N\lambda_w t \ll 1$ を満たす時間帯) では式 (7.7) は

$$R_B(t) \cong 1 - \varphi\left(\frac{s}{N}, L\right) \frac{(N\lambda_w t)^{L+1}}{(L+1)!} \quad (7.10)$$

と近似できる。ここに,

$$\varphi\left(\frac{s}{N}, L\right) = \left(1 + \frac{s}{N}L\right) \left(1 + \frac{s}{N}(L-1)\right) \cdots \left(1 + \frac{s}{N}\right) \quad (7.11)$$

7.2.2 MTTF : M_B

MTTF は式 (6.4) によってこの場合

$$M_B = \int_0^\infty R_B(t) dt \quad (7.12)$$

と表わされるが, この場合には式 (7.6) によって,

$$M_B = \psi\left(\frac{s}{N}, L\right) / N\lambda_w \quad (7.13)$$

を得る。ここに,

$$\psi\left(\frac{s}{N}, L\right) = \frac{1}{1 + \frac{s}{N}L} + \frac{1}{1 + \frac{s}{N}(L-1)} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{s}{N}} + 1 \quad (7.14)$$

7.3 定時保守下の信頼度と MTTF

信頼度 $R(t)$ の表示式をまず $\alpha \leq 1$ に対して導く。その結果は厳密であるが行列積を含むため解析が困難である。そこでつぎに, 条件 $\alpha \ll 1$ を課して実用的な近似式を求める。また, その結果に基づいてこの場合の MTTF の表示式を導く。

7.3.1 信頼度 : $R(t)$

節 7.1 で規定したようにシステムモデルの信頼度 $R(t)$ は, システムの始動後のある時点 t において, 故障ユニット数が L 以下である確率である。いま, 時点 t で i 個のユニットが故障している確率を $R_i(t)$ と書くことにすると,

$$R(t) = \sum_{i=0}^L R_i(t) \quad (7.15)$$

システムの始動後、時点 t までに完了している（遂行中のものは数えないで）定時保守の回数を k とすると、 $R_i(t)$ は時点 kT でシステムが生存している確率（すなわち、信頼度）と、その時点における保守の直前での故障ユニットの数、保守の方法、およびユニットの故障率によって決まる。ここで、 $R_i(t)$ を求めるために、保守の過程を含めた関数として、時点 kT での故障ユニットの数が j であるとして、保守完了後の時点 t ($kT + \tau \leq t < (k+1)T + \tau$) における故障ユニットの数が i である確率を $R_{ij}(t - kT)$ と書くことにする。保守の方法は毎回同じであり保守は T 時間内に完了するから、 R_{ij} は上記のように、保守時点からの経過時間 $t - kT$ に依存する。一方、時点 kT での故障ユニットの数が j である確率は $R_j(kT)$ と表わされるから、

$$R_i(t) = \sum_{j=0}^L R_{ij}(t - kT) R_j(kT),$$

for $kT + \tau \leq t < (k+1)T + \tau,$

$i = 0, 1, \dots, L$ (7.16)

ここで、 $R_i(t)$ を成分とするベクトルを $\mathbf{r}(t)$ 、 $R_{ij}(t)$ を成分とする行列を $\mathbf{R}(t)$ と書く。すなわち、

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R_0(t) \\ R_1(t) \\ \vdots \\ R_L(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} R_{00}(t), R_{01}(t), \dots, R_{0L}(t) \\ R_{10}(t), & & R_{1L}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{L0}(t), & \dots & R_{LL}(t) \end{pmatrix}$$

これらを用いると式 (7.16) は,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t - kT) \mathbf{r}(kT), \text{ for } kT + \tau \leq t < (k+1)T + \tau \quad (7.17)$$

となる。ここで、 $t = (k+1)T$ と置くと,

$$\mathbf{r}((k+1)T) = \mathbf{R}(T) \mathbf{r}(kT) \quad (7.18)$$

これは k についての漸化式であり繰り返して用いるとつぎの結果に至る。

$$\mathbf{r}(kT) = \{\mathbf{R}(T)\}^k \mathbf{r}(0) \quad (7.19)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t - kT) \{\mathbf{R}(T)\}^k \mathbf{r}(0), \quad \text{for } kT + \tau \leq t < (k+1)T + \tau \quad (7.20)$$

ここに $\mathbf{r}(0)$ は初期状態であり、システムの始動の条件によって、その各成分は,

$$R_0(0) = 1, R_i(0) = 0, \text{ for } i = 1, 2, \dots, L \quad (7.21)$$

さて R_{ij} の具体的な形を導こう。あきらかに R_{ij} は各保守区間で全く同じである。したがって、 $\tau \leq t < T + \tau$ に対して $R_{ij}(t)$ を得れば、同じ関数を任意の保守区間に使って良い。

よっていま、時点 0 において j ユニットが故障しているとする。したがってそのとき正常なユニットの数は $L - j$ である。故障している j 個のユニットは、修理が完了する時点 τ で一斉にシステムに復帰させられる。この修理中新たに故障するユニットの数を u と書くと、修理完了直後の正常なユニットの数は $L - u$ である。ところで、始動時 (時点 0) での正常な予備ユニットの数が 1 で、その後の時点 t までに新たに i ユニットが故障する確率は節 7.2 の結果によって $P_i^1(t)$ (式 (7.4) 参照) と表わされることが分かる。上の議論から、時点 τ を新たな始動時点とみなして、

$$R_{ij}(t) = \sum_{u=0}^{m_{ij}} P_u^{L-j}(\tau) P_{i-u}^{L-u}(t - \tau), \quad \text{for } \tau \leq t < T + \tau \quad (7.22)$$

ここに m_{ij} は i と $L - j$ のいずれか小さい方を表わす。すなわち、

$$m_{ij} = \min. (i, L-j)$$

上式で u に関する和の上限が m_{ij} と表わさなければならないのはつぎの事情による。まず、 $i \leq L-j$ の場合、時点 τ までに i ユニットが故障してもシステムの生存には支障がない。したがって u の上限は i までとって良い。一方、 $i > L-j$ の場合、修理時間中システムが生存するためには、その間に故障するユニットの数は高々 $L-j$ でなければならない。

以上、式 (7.4), (7.22), (7.20), (7.15) によって提出したモデルに対する信頼度の厳密な表示式が完結した。

7.3.2 $\alpha \ll 1$ の場合の信頼度: $R(t)$ の近似式

まず、式 (7.18) の近似を導く。式 (7.4) を式 (7.22) に代入し、 $t = T$ かつ $\tau/T = \alpha$ と置く。 α について展開しその二次以上の項を無視することにより次式が導かれる (付録 7.3)。

$$\left. \begin{aligned} R_{ij}(T) &\cong P_i^L(T) \left[1 + j\alpha \left\{ s\lambda_w T - i \frac{1}{\frac{N}{s} + L} g(s\lambda_w T) \right\} \right], \\ &\text{for } j = 0, 1, \dots, L-1 \\ &= P_i^L(T) \{ 1 + \alpha \{ sL\lambda_w T - ig(s\lambda_w T) \} \}, \text{ for } i = L \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

ここに、

$$g(x) = \frac{x \exp(x)}{\exp(x) - 1} \quad (7.24)$$

この R_{ij} を式 (7.16) に代入し、式 (7.15) を用いることによって時点 kT における信頼度として次の結果が導かれる (付録 7.4)。

$$R(kT) \cong \left\{ \sum_{i=0}^L P_i^L(T) \right\} \{ 1 - \alpha h(T) \} R((k-1)T) \quad (7.25)$$

ここに、

$$h(T) = \frac{\varphi\left(\frac{s}{N}, L\right)}{1 + \frac{s}{N}L} \frac{(N\lambda_w T)^L}{L!} \{g(s\lambda_w T) - s\lambda_w T\}$$

$$\cdot \frac{\sum_{i=0}^L iP_i^L(T)}{\left\{\sum_{i=0}^L P_i^L(T)\right\}^2} \exp\left(-N\lambda_w T \left(1 + \frac{s}{N}L\right)\right) \quad (7.26)$$

式(7.25)は式(7.18)に代わる漸化式である。これを繰り返して用い、 $\sum_{i=0}^L P_i^L(T) = R_B(T)$ となることに留意すると、

$$R(kT) \cong \{R_B(T) (1 - \alpha h(T))\}^k \quad (7.27)$$

これが $\alpha \ll 1$ の場合の時点 kT における信頼度の近似式である。ここで $\alpha = 0$ と置くと、

$$R(kT) = \{R_B(T)\}^k \quad (7.28)$$

となるが、これは修理時間が0の場合の信頼度である。修理時間が0であれば、システムは各保守時に瞬時に始動時の状態に復する。この事実注意到すれば式(7.28)の結果は自明と言えよう。式(7.27)と式(7.28)とを比較すれば、修理時間が0でない場合の信頼度は、0の場合に較べて各保守間ごとに $1 - \alpha h(T)$ の率だけ余分に低下することが分かる。

任意の時点 t における近似式は、式(7.20)を導いたのと同様にして次式で表わされる。

$$R(t) = R_B(t - kT) \{1 - \alpha h(t - kT)\} \{R_B(T) (1 - \alpha h(T))\}^k,$$

$$\text{for } kT + \tau \leq t < (k+1)T + \tau \quad (7.29)$$

上の結果から明らかのように、定時保守下の信頼度が十分長期にわたって1近くに保たれるためには、

$$Q_B(T) = 1 - R_B(T) \ll 1 \quad (7.30)$$

になるように、保守の間隔 T を選ぶことが必要である。そのための十分条件としては、

$$N\lambda_w T \ll 1 \quad (7.31)$$

であるように T を定めればよい。この場合には式 (7.28), (7.29) はつぎのような簡明な式で表わすことができる。

$$R(kT) \cong \left[1 - \{1 + \alpha(L+1)\} \varphi\left(\frac{s}{N}, L\right) \frac{(N\lambda_w T)^{L+1}}{(L+1)!} \right]^k \quad (7.32)$$

$$R(t) \cong \left[1 - \{1 + \alpha(L+1)\} \varphi\left(\frac{s}{N}, L\right) \frac{\{N\lambda_w(t-kT)\}^{L+1}}{(L+1)!} \right] \cdot \left[1 - \{1 + \alpha(L+1)\} \varphi\left(\frac{s}{N}, L\right) \frac{(N\lambda_w T)^{L+1}}{(L+1)!} \right]^k, \\ \text{for } kT + \tau \leq t < (k+1)T + \tau \quad (7.33)$$

7.3.3 MTTF : M

式 (7.29) に基づいて MTTF の表示式を導く。したがって結果は $\alpha \ll 1$ の場合に有効である。

さて、式 (6.4) から、

$$M = \int_0^\infty R(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT+\tau}^{(k+1)T+\tau} R(t) dt + \int_0^\tau R(t) dt \quad (7.33)$$

ここで $R(t)$ として式 (7.29) を代入し級数が収束することに注意すると、

$$M \cong \frac{1}{1 - R_B(T) \{1 - \alpha h(T)\}} \int_{\alpha T}^{(1+\alpha)T} R_B(t) \{1 - \alpha h(t)\} dt + \int_0^{\alpha T} R_B(t) dt \quad (7.34)$$

実際的な条件 $Q_B(T) = 1 - R_B(T) \ll 1$ が成立している場合、上式の M は微小量となる第一項の分母の大きさで決まり、

$$M \cong \frac{T}{Q_B(T) + \alpha h(T)} \quad (7.35)$$

と表わすことができる。

7.4 定時保守の効果

定時保守の効果をも一般的に表わすものは信頼度 $R(t)$ 自身よりも、むしろその時間積分である $MTTF$ と考えられる。そのためここでは主に、システムモデルの $MTTF(M)$ の無保守の場合の $MTTF(M_B)$ に対する延び率 (m で表わす) に着目して、それに対する各システム変数の影響について論ずる。ついで、実際の立場から高信頼度時間帯に着目して信頼度に対する定時保守の効果をはっきりさせる。

7.4.1 $MTTF$ の延び率: m

以下まず、 m の一般的な表示式を導く。後で示すように m に対して修理時間の影響は副次的であることを考慮して、つぎに $\alpha = 0$ の場合について m の評価を行なう。最後にそれに対して α がどの程度影響するかを示す。

(1) m の表示式の導出

上の説明によって、

$$m = \frac{M(\text{式(7.34)})}{M_B(\text{式(7.13)})} \quad (7.36)$$

ここで、 $N\lambda_W t = x$ なる変数変換を行ない、 $N\lambda_W T = X$ であることに注意すると、つぎの結果を得る。

$$m \cong \frac{1}{\psi\left(\frac{s}{N}, L\right)} \left\{ \frac{\int_0^{(1+\alpha)X} \mathfrak{R}(x) \{1 - \alpha h(x)\} dx}{1 - \mathfrak{R}(X) \{1 - \alpha h(X)\}} + \int_0^{\alpha X} \mathfrak{R}(x) dx \right\} \quad (7.37)$$

ここに、

$$\mathfrak{R}(x) = R_B(x/N\lambda_W) = \exp\left(-x\left(1 + \frac{s}{N}L\right)\right) \cdot \sum_{i=0}^L N/s + L C_i \left\{ \exp\left(\frac{s}{N}x\right) - 1 \right\}^i \quad (7.38)$$

$$h(x) = h(x/N\lambda_w) = \frac{\varphi\left(\frac{s}{N}, L\right)}{1 + \frac{s}{N}L} \frac{x^L}{L!}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^L N/s+L C_i \left\{ \exp\left(\frac{s}{N}x\right) - 1 \right\}^i}{\left[\sum_{i=0}^L N/s+L C_i \left\{ \exp\left(\frac{s}{N}x\right) - 1 \right\}^i \right]^2}$$

$$\cdot \left\{ g\left(\frac{s}{N}x\right) - \frac{s}{N}x \right\} \quad (7.39)$$

なお、 x は動作システムのMTTFすなわち $1/N\lambda_w$ による正規化時間を意味する。

式(7.37)によって、延び率 m は N, L, X, s, α に依存することがわかる。この内、 N と s は常に s/N として表われている。したがって、 $N > 1$ であるシステムの m の値は、その s を s/N で置きかえ、かつ $N = 1$ としたシステムと同一である。これにより、以下では議論を $N = 1$ の場合に限るが、これは結果の一般性をそこなうものではない。結局、 m は L, X, s, α の関数となる。 m は、 X, s, α について単調減少、 L について単調増加、また $m > 1$ であって、 $X \rightarrow \infty$ に対して $m \rightarrow 1$ 、 $X \rightarrow 0$ に対して $m \rightarrow \infty$ となる。

(2) 修理時間が0 ($\alpha = 0$) の場合

式(7.37)で $\alpha = 0$ 、 $N = 1$ として次式を得る。

$$m = \frac{1}{\psi(s, L) \Omega(X)} \int_0^X \Re(X) dx \quad (7.40)$$

ここに、

$$\Omega(X) = 1 - \Re(X) = \exp(-X(1+sL))$$

$$\cdot \sum_{i=L+1}^{1/s+L} 1/s+L C_i \left\{ \exp(sX) - 1 \right\}^i \quad (7.41)$$

Lがあまり大きくなく、Xが1程度の大きさのときのmを上式によって計算したものが図7.3である。これは $\Omega(X)$ が比較的大きい場合に相当する。実際的なシステムは $\Omega(X) \ll 1$ なるように設計されると考えられるが、この条件は式(7.41)によって、

$$sX \ll 1 \quad \text{かつ} \quad X \ll L \quad (7.42)$$

に相当することが示される。このとき、

$$m \cong \frac{(L+1)! \exp(X)}{\varphi(s, L) \psi(s, L) X^L} \quad (\text{付録 7.5}) \quad (7.43)$$

特に、 $s=0$ 、 $s=1$ の場合に対しては、

$$m \cong \frac{L! \exp(X)}{X^L}, \quad \text{for } s=0 \quad (7.44)$$

$$m \cong \frac{1}{\psi(1, L) X^L}, \quad \text{for } s=1 \quad (7.45)$$

式(7.44)と(7.45)はそれぞれ式(7.43)のsの値に関する上限と下限を与えている。

図7.3および式(7.43)～(7.45)によって、mの値に及ぼす定時保守の効果をつぎのように要約できる。すなわち、mはXの減小と共に増大するが、 $X < 1$ で急増し、特に $X \ll 1$ になると $1/X^L$ の大きさがその値を支配する。またmはLと共に増大するが、その程度はsの値によって大きく変わり $s=0$ で最大、 $s=1$ で最小になる

(図7.3参照)。Lを1つ増加することによって(LをL+1にする)、mの大きさは、 $s=0$ のときには $(L+1)/X$ 倍になるのに対し、 $s=1$ のときにはおよそ $1/X$ 倍になるだけである(この場合、 $L \gg 1$ とすると $\psi(1, L) \cong \log L + C$ (Cはオイラーの定数)で、この増加率は $1/X$ に対しては無視できる)。すなわち、予備ユニットを増加することによって得られるmの増加は、システムが待機システム(冷予備系)であるか並列システム(熱予備系)であるかによって著しい差が生ずる。

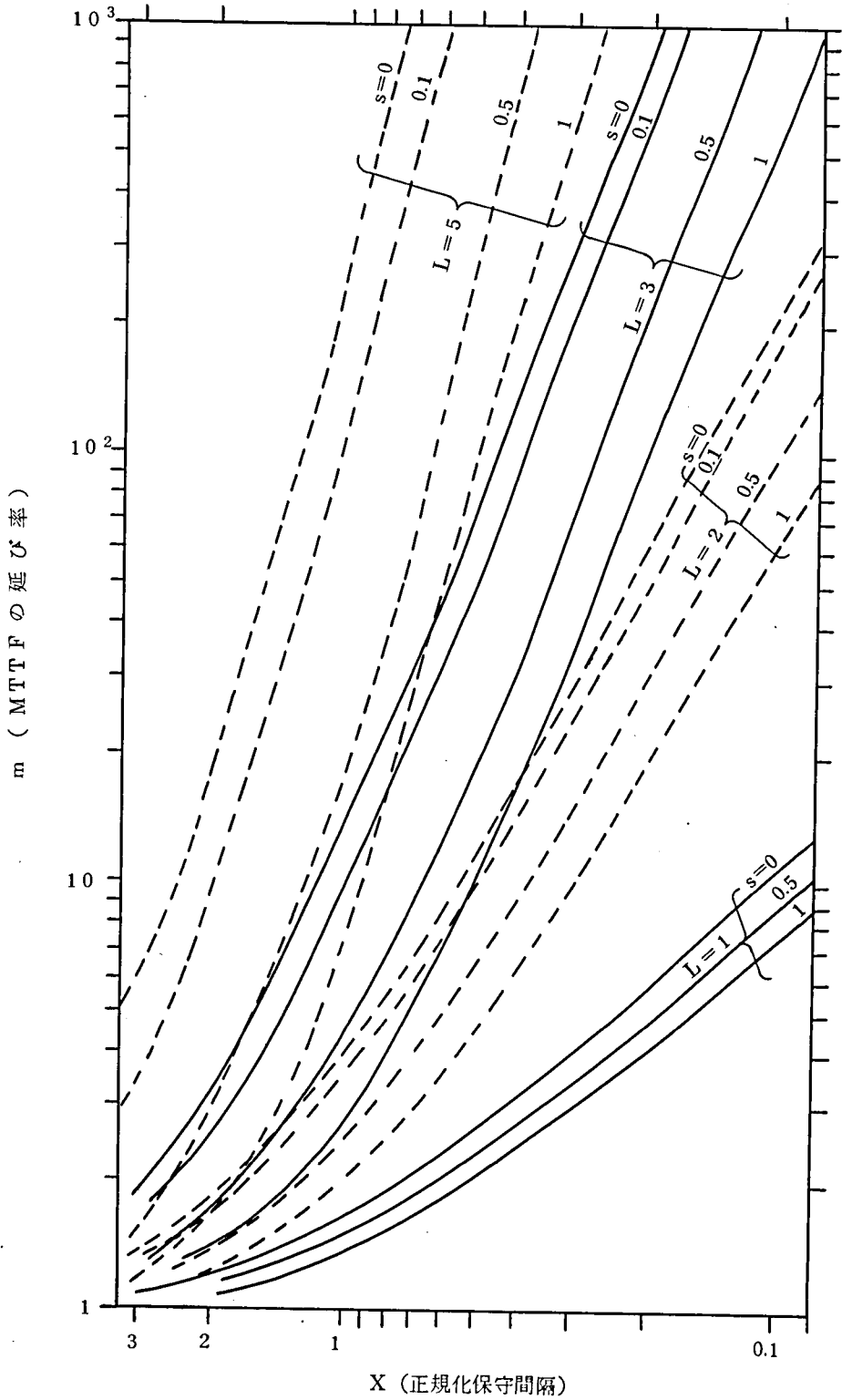


図 7.3 MTTFの延び率

上述のように、定時保守の効果を上げるには正規化保守間隔 X をできるだけ 1 より小さくする必要がある。他方、経済的観点からは X は大きいほうが有利であるが図 7.3 に示されているように、 $s = 0$ のときには非較的小さい予備ユニット数で $X \cong 1$ に対して大きな m を実現できる可能性を示している。

上の議論より、適当な保守間隔と予備ユニット数を選べば、定時保守によって MTTF は無保守の場合に較べて著しく改善されることが分った。しかしながら、一般には信頼度の低下が著しくなるために、MTTF が示す全時間をシステムの使命時間として使用することはできない。MTTF が示す時間のどれだけの部分が使命時間として有効であるかを定めるためには、その時間の信頼度を知ることが必要であるが、以下では、それに対して簡単な評価式を導く。

実際的な条件として、 $\Omega(X) \ll 1$ の場合について考える。始動後時点 M (MTTF) での定時保守の回数を k_M と書くと、

$$k_M = \frac{M}{T} \cong \frac{1}{\Omega(X)} \quad (7.46)$$

が導かれる (付録 7.6)。

これと式 (7.28) とから、時点 M での信頼度 $R(M)$ として、

$$R(M) = (R_B(T))^{k_M} = (1 - \Omega(X))^{\frac{1}{\Omega(X)}} \quad (7.47)$$

$$\cong e^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \Omega(X)\right) \quad (7.47 a)$$

$$\cong 0.36 \quad (7.47 b)$$

を得る。より一般的に、時点 δM ($0 \leq \delta \leq 1$) での信頼度 $R(\delta M)$ に対しても、

$$R(\delta M) = (1 - \Omega(X))^{\frac{\delta}{\Omega(X)}} \quad (7.48)$$

$$\cong e^{-\delta} \left(1 - \frac{1}{2} \delta \Omega(X)\right) \quad (7.48 a)$$

$$\cong 1 - \delta, \text{ for } \delta \ll 1 \quad (7.48 b)$$

が導かれる。すなわち、このモデルの MTTF とその時点での信頼度との関係は $\Omega(X) \ll 1$ の条件下で近似的に単一ユニットの MTTF と信頼度の関係 ([S_h] の p. 59) と同じである。

(3) 修理時間の影響 (α の影響)

式 (7.37) から m に対する α の影響は α $\eta(X)$ の大きさによることがわかる。 $\eta(X)$ の大きさは式 (7.39) によって、たかだか L 程度であるので (付録 7.7), α が十分小さく $\alpha L \ll 1$ 程度になればその影響は無視できる。ところで、修理時間を一定と考えると保守間隔が長いほど、したがって X が大きいほど α は相対的に小さくなる。換言すると、 α の影響に注意しなければならないのは一般に X が小さい場合である。この事情を考慮して以下では、

$$X \ll 1 \quad (7.49)$$

の場合について考察を進める。このとき、 $0 \leq x \leq X$ に対して、

$$\Omega(x) = 1 - \frac{\varphi(s, L) x^{L+1}}{(L+1)!} \quad (7.50)$$

$$\eta(x) = \frac{(L+1)\varphi(s, L)x^{L+1}}{(L+1)!} \quad (7.51)$$

と近似でき、これらを式 (7.37) に代入することによって、

$$m \cong \frac{(L+1)!}{\varphi(s, L)\psi(s, L)X^L\{1+\alpha(L+1)\}} \quad (7.52)$$

を得る。これにより、 α の影響は $1+\alpha(L+1)$ の項で表わされることが分かる。この場合の m の値はほとんど $1/X^L (\gg 1)$ の大きさで決まる。したがって、それに対して αL の大きさが特に大きくなり 1 程度以下であれば、 α の影響は無視できる。なお、 $L \gg 1$ とすると、 $1+\alpha(L+1) \cong (1+\alpha)^L$ となるが、このとき式 (7.52) は、

$$m \cong \frac{(L+1)!}{\varphi(s, L)\psi(s, L)\{X(1+\alpha)\}^L} \quad (7.53)$$

となる。これは α の影響が修理時間が 0 で、一方保守間隔が $(1+\alpha)X$

になった場合に等価であることを示す。

7.4.2 信頼度：R(t)に対する定時保守の効果

最初に述べたように、ここでは高信頼度時間帯 $N\lambda_w t \ll 1$ (したがって、 $N\lambda_w k T \ll 1$) における信頼度について論ずる。この場合、式 (7.32) は

$$R(kT) = 1 - \{1 + \alpha(L+1)\} \varphi\left(\frac{s}{N}, L\right) \quad (7.54)$$

$$\cdot \frac{(N\lambda_w k T)^{L+1}}{(L+1)!} \cdot \frac{1}{k^L}$$

と表わすことができる。これを保守を行なわない場合の信頼度 $R_B(kT)$ (式 (7.10)) と比較すると、その違いは式 (7.54) の $\alpha(L+1)$ と $1/k^L$ の項である。前者は保守時間の影響を表わし、 $\alpha(L+1)$ が 1 程度以下であれば無視してよいことは前項の m に関する場合と同様である。 $1/k^L$ の項が定時保守の効果を表わすものである。換言すれば、 $N\lambda_w t \ll 1$ を満たす使命時間においては、その間 k 回の保守を行なうことによってその不信頼度 ($Q(t) = 1 - R(t)$) を $1/k^L$ に減少させることができる。

また、立場を変えて使命時間中の信頼度として一定の限界 $1 - \delta$ ($\delta \ll 1$) が要求されたとする。この場合、無保守および保守を行なう場合の上の信頼度限界を満たす動作時間をそれぞれ t_A, t_B と書くと、式 (7.10), (7.54) によって ($\alpha = 0$ とする),

$$\delta = \frac{(N\lambda_w t_A)^{L+1}}{(L+1)!} = \frac{(N\lambda_w t_B)^{L+1}}{k^L (L+1)!} \quad (7.55)$$

の関係が成立する。これより、

$$\frac{t_B}{t_A} = k^{\frac{L}{L+1}} \quad (7.56)$$

を得る。すなわち可能な動作時間は k 回の保守により、予備ユニットが一個の場合で \sqrt{k} 倍、予備ユニットが多いときにはほぼ k 倍まで延ばせると言うことができる。

7.5 稼働率：A

前節までは、システムの始動後から最初のシステム故障までを問題とした。実際のシステムでは多くの場合システムは修理されて再び始動せられる。このような場合の信頼性尺度としては稼働率が問題である。ここでは先に定めたモデルにおいて、システム故障が生じたときには修理をほどこして繰返して動作させるものとしてその稼働率（定常稼働率、以下Aと書く）の評価式を導く。いま、システム故障時のMTTRを τ_{SD} とする。MTBFは前節までに論じたMTTF(M)と同じであるからこの場合のAは式(6.5)によって、

$$A = \frac{M}{M + \tau_{SD}} \quad (7.57)$$

と表わされる。実際的な条件として

$$M \gg \tau_{SD} \quad (7.58)$$

を仮定すると、

$$A \approx 1 - \frac{\tau_{SD}}{M} \quad (7.59)$$

Aの具体的な評価式を導くにはシステム故障時の保守の方法を定めなければならない。ここでは定時保守を拡張適用して、システム故障時にはその後で予定していた定時保守時まで修理にかかるものとし、修理時間も同様に τ と考える。こうすると、

$$\tau \leq \tau_{SD} \leq T + \tau \quad (7.60)$$

これは τ_{SD} の上限と下限を与える。それはまたAの上限と下限を定める。それぞれ A_u , A_l と書くと、

$$A_l < A < A_u \quad (7.61)$$

ここに、

$$A_l \approx 1 - \frac{T + \tau}{M} = 1 - (1 + \alpha) \frac{T}{M} \quad (7.62)$$

$$= 1 - \frac{(1 + \alpha)X}{m\psi(s, L)} \quad (7.62)'$$

$$A_u \approx 1 - \frac{\tau}{M} = 1 - \alpha \frac{T}{M} \quad (7.63)$$

$$= 1 - \frac{\alpha X}{m\psi(s, L)} \quad (7.63)'$$

MTTFの延び率 m は前節で具体的に求められているからこれによって A を評価できる。特に実際的な条件 $\Omega(X) \ll 1$ の場合を考えると式(7.46)によって、

$$\frac{T}{M} \approx \Omega(X)$$

であるから、

$$A_l \approx 1 - (1 + \alpha) \Omega(X) \quad (7.64)$$

$$A_u \approx 1 - \alpha \Omega(X) \quad (7.65)$$

が得られる。システムの稼働率の設定値としては下限 A_l を基準にするのが妥当である。式(7.64)はこれが修理時間の影響を除いて信頼度 $R(T)$ ($= \mathfrak{R}(X) = 1 - \Omega(X)$)に一致することを示している。

7.6 議 論

ここでは、まず前節までに明らかにされた信頼度解析の結果を現実のシステムの信頼度予測に適用する際に注意すべき問題点についてのべる。つづいて、定時保守方式の経済性に関して若干の議論を行なう。

さて、本論の結論を現実のシステムに適用する場合に注意すべき問題点としてつぎの三点が挙げられる。

- (i) ユニットの故障分布を指数分布とした仮定は妥当か。
- (ii) 故障修理時間を一定(τ)とした仮定は妥当か。
- (iii) 切換器の信頼度を完全とした仮定は妥当か。

最初の問題については、対象とするシステムが十分に複雑であれば(その構成要素の数が多ければ)その故障時間分布は指数分布で近似できることが証明されている([Ic]のp. 132)。現実のかなりの規模をもつシステムのユニットにそのような複雑さを前提とすることは通常妥当と考えられる。

その意味で第1の仮定は実際的なものと言うことができよう。

故障修理時間は多くの場合対数正規分布に従うといわれている
([S_n]の p.127)。そのかぎりでは第二の問題における仮定は満たされない。しかしながら、故障修理時間は現実のシステムでは故障間時間に比べて桁違いに短かく設計するのが常であり、またそうしなければシステムの信頼度の確保は困難になろう。したがって、定時保守を前提とするシステムにおいて、修理時間がいかなる分布に従うにせよ“実質的に修理を完了するのに必要な時間が保守間隔 T に比較して十分に短い”と仮定することは現実的と考えられる。本論文で用いた τ を、そのように実質的に修理を完了するのに必要な時間の上限を示すものと考えると、本論文で導かれた結果は、修理時間の影響の最大限界を示していることになる。なお、 τ を一定とする仮定は本論の解析の過程では $R_{ij}(t)$ (項 7.3.1) を導く際に用いただけである。 τ に適当な分布を仮定して $R_{ij}(t)$ を導くように解析を拡張することはもちろん可能である。実際、 τ に指数分布を仮定した試みもある ([YWK])。

第三の問題は三つの中で一番重大である。完全な切換器は現実には存在しえないから、本論文の結果は、現実のシステムで到達できる信頼度の上限を示したことになる。

実際問題として、切換器の信頼度が前節までに導いた結果にどの程度の影響があるかを知ることが望まれる。以下それについて大ざっぱなものであるが一つの目安を示す。

まず、切換器の故障率を一定と仮定し λ_{sw} と書く。

すなわち、その信頼度 ($R_{sw}(t)$ と書く) は、

$$R_{sw}(t) = \exp(-\lambda_{sw}t)$$

このシステムモデルは、信頼度に関しては、故障率 $1/M$ の単一システムと見なせる (項 7.4.1)。すなわち、その信頼度は

$$R(t) \approx \exp\left(-\frac{t}{M}\right)$$

ここで完全でない切換器を有するシステムを、切換器と信頼度 $R(t)$

のユニットとの直列システムとみなす。その信頼度を $R_{tot}(t)$ と書くと、

$$R_{tot}(t) = \exp\left(-\left(\lambda_{sw} + \frac{1}{M}\right)t\right)$$

を得る。またこの場合のMTTF (M_{tot} と書く) は、

$$M_{tot} = \frac{1}{\lambda_{sw} + \frac{1}{M}}$$

以上の結果から、現実のシステムで定時保守が有効に行なわれるためには切換器の故障率が高々 $1/M$ 以下でなければならないと結論される。さもなければ、システムの信頼度は切換器の信頼度によって決まってしまうことになる。

最後に、定時保守方式を経済的観点から若干吟味してみる。

システムの効用を、簡単に、MTTF に比例すると考える。 $X \ll 1$ の場合に限るとそれは $1/X^L$ に比例する。一方、このシステムが対応する非冗長システム (モデルにおける動作システムだけのシステムとする) に対して余分に要する費用は、予備ユニット数に比例する初期投資と、 L/X に比例すると考えられる定時保守の費用の和である。したがって、 L が十分大きければ、システムの効用は予備と定時保守の費用を常に償い得る。しかし、この結論は、現実のシステムでは切換器の信頼度で強く制約される。というのは、切換器の複雑さは L とともに増大し、その実現可能な信頼度が制限されるからである。

さて、節 7.4 以降 $N = 1$ のシステムを対象とした。

$N > 1$ のシステムではMTTF の延び率 m は N とともに増加する。これは、動作システムの規模を一定と考えたとき N がその分割数であり、 N の増加が等価的に予備ユニットの故障率を下げるためである。システムの分割が自由にできる場合は予備ユニットの規模を小さくできる、したがってその費用を小さくできる点で、 N は大きいほど有利である。しかしこの場合にも L の増加の場合と同様に切換器の信頼度が制約となって、 N が一定値を越えるとシステムの信頼度は低下することになる。

第8章 第Ⅱ部の結論

予備に一定の周期で点検保守を行なう場合の自己修復系の信頼度解析を試みた。

ここで言う自己修復系は待機予備システムを一般化したものであり、解析の対象であるシステムのモデルを構成するパラメータは、動作ユニットの数 (N) とその故障率 (λ_w)、予備ユニットの数 (L) とその故障率 (λ_s)、保守の間隔 (T)、保守に要する時間 (τ , $\tau \ll T$) である。なお、 λ_w , λ_s , τ は定数、また各ユニットの故障を検出し切り換えを行なう切換器の信頼度は1と仮定している。以下に、導かれた主要な結果を挙げる。

(i) 各保守区間における故障発生過程を pure birth process として、 α ($= \tau/T$) ≤ 1 に対して信頼度 $R(t)$ の厳密な表示式を与えた (式 (7.4), (7.22), (7.20), (7.15))。

しかしながらこの結果は行列積を含んでおり、モデルの予備ユニット数が少し大きくなると数値計算も困難であり解析も容易でない。そこで、

(ii) $\alpha \ll 1$ ($\tau \ll T$) に対して $R(t)$ の近似式を与えた (式 7.29)。これは $\alpha = 0$ の場合の信頼度と、 α による信頼度の低下を示す項との積の形をしており非常に簡明で使い易い。

(iii) (ii) の結果に基づいて MTTF の表示式を導いた (式 (7.34))。

(iv) システムモデルで予備に定時保守をしない場合の MTTF に対する、モデル自身の MTTF の延び率 (m) を定義し、その表示式 (式 (7.37)) を与えた。また、その実用的な近似式、および近似が有効でない場合について数値例を与えた。

また、その結果に基づいて定時保守の効果を明らかにした。 m は、 X ($= N\lambda_w T$: 正規化保守間隔), L , s/N ($s = \lambda_s/\lambda_w$), α に依存し、モデルからただちに予想されるように、 X , s/N , α の増加と共に減小、 L の増加と共に増加する関数で、 $m > 1$ である。定時保守の効果を得るには X をできる限り1より小さくすることが必要で、 $X \ll 1$ とすれば m の値はほとんど $1/X^L$ で定まる。なお、 α の影響はほとんど無視できる。

(V) システム故障時も定時保守を拡張適用してシステムの修復を行なうとしてその場合の稼働率を定義しその評価式を得た(式(7.62)、(7.63))。これによれば、稼働率の下限を信頼度 $R(T)$ とみてよいことが分かる。

最後に、システムのモデルの妥当性と定時保守の経済評価について若干の議論を行なった。またそこで、モデルでは完全と仮定した切換器の信頼度の影響の程度についての評価も示した。

ここで与えた信頼度に関する各種の評価式はいずれも簡明で計算し易く、モデルに沿うシステムの信頼性設計に際して非常に有用であると思われる。

謝 辞

本論文を終わるに当たり、この研究の機会を与えて頂きかつ研究遂行中、心強い御支持を頂いた国際電信電話株式会社取締役研究所長 大島信太郎博士、研究所次長 中込雪男博士、同情報処理研究室長 井上誠一博士、ならびにこの研究に対して直接の御指導を頂いた同電子回路研究室長 渡辺昭治博士に心からの感謝の意を表す。同情報処理研究室 浦野義頼博士には、本論文第 I 部の研究に関し、終始有益な御討論と御助言を頂いた。また同社長室審議担当第二課長 小関康雄氏には情報処理研究室に御在任中、種々有益な御教示を頂いた。両氏に厚くお礼申し上げます。また、この研究中終始御支援と御協力を頂いた同情報処理研究室各位に感謝申し上げます。

本論文をまとめるに際しては、京都大学教授 前田憲一博士から御激励ならびに種々御助言を頂いた、また同大学教授矢島脩三博士には、終始にわたり懇切なる御教示ならびに御激励を頂いた。ここに両先生に深甚の謝意を表す。

参 考 文 献

第 I 部の参考文献

- [B] C. Berge : " The theory of graphs " , John Wiley & Sons Inc , New York , (1966) .
- [BCC] T. Businaro , I. L. Conti , I. M. Conti : " Fail-Safe circuits for nuclear protective systems " , 64-70 , (1964-04) .
- [BCDR] W. G. Bouricius , W. C. Carter , K. A. Duke , J. P. Roth , P. R. Schneider : " Interactive design of self-testing circuitry " , Proc. The symposium on information processing , sponsored by the School of Electrical Engineering , Purdue University , (April 28-30 , 1969) .
- [BK] A. Bark and C. B. Kinne : " The application of pulse position modulation to digital computers " , Proc. National Electronics Conference , pp. 656-664 (1953-09) .
- [CJW] W. C. Carter , D. C. Jessep , A. Wadia , " Error-free decoding for failure-tolerant memories " , Proc. 1970 IEEE International Computer Group Conference , pp. 229 - 236 (1970 - 06) .
- [CMM] H. Y. Chang , E. Manning , G. Metze : " Fault diagnosis of digital systems " , Wiley-Interscience (1970) .
- [CS] W. C. Carter and P. R. Schneider : " Design of dynamically checked computers " , Proc. IFIPS 68 , PP. 878-883 (1968 - 08) .
- [F] 吹抜敬彦 : " 単極性コアトランジスタ論理要素による Fail-

- Safe 構成の検討” 43 年電四連大 No. 2670 (1968).
- [FA] 吹抜敬彦, 阿知葉征彦: “2 重化冗長構成による Fail-Safe 素子と誤り訂正系について”, 43 年電四連大 No. 2672 (1968).
- [FN] 福井憲一, 苗村憲司: “回路の標準化”, 信学誌, 49, 4, p. 630 (1966-04).
- [H] D. H. Hardy: “Fail-safe logic using multi-aperture ferrite core”, British Communication and Electronics, pp. 180-184, (1962-03)
- [Ha] M. A. Harrison: “Introduction to switching and automata theory”, McGraw-Hill, New York, (1965).
- [H1] L. Hellerman: “A Catalog of three-variable Or-invent and And-invent logical circuits”, IEEE Trans. on Electronic Computers, pp. 198-223 (1963-06).
- [HTK1] 橋本昭洋, 都倉信樹, 嵩忠雄: “非対称誤り素子によるフェイルセーフ論理回路と2重化論理”, 信学誌, 50, 4, pp. 170-177 (1967-04).
- [HTK2] ……………, ……………, ……………: “非対称誤り素子による論理回路網の信頼度向上について” 信学会オートマトン研資 (1966-04)
- [HWU] 平山博, 渡辺昭治, 浦野義頼: “Fail-Safe 論理系の構成理論” 信学論 (C), 52-C, 1, pp. 33-40 (1969-01).
- [I3E1] IEEE: Computer, 4, 1 (1971 January/February).
- [I3E2] ………: 71C 6-C Digest 1971 International Symposium on Fault-Tolerant Computing (March 1-3, 1971).
- [I3E3] ………: Transactions on Computers, C-20, 11 (1971-11).
- [IS] 猪瀬博, 坂内正夫: “機能変換方式による故障診断容易な論理回路の構成 (その1)”, 信学会電子計算機研資, EC71-23

- (1971-09).
- [IW1] 市川忠男, 渡辺昭治: "NAND回路を用いた診断容易な論理系の構成法", 信学会電子計算機研資, EC68-11 (1968-06).
- [IW2], : "Failure-Operable冗長NAND論理系", 信学論(C), 52-C, 8, pp. 474-481 (1969-08).
- [KL] Z. Kohavi, P. Lavallee: "Design of sequential machines with fault-detection capabilities", IEEE Trans., EC-16 (1967-08).
- [KaT] 柿倉正義, 土屋誠治: "4入力フェイルセーフ論理積回路", 42年電四連大No. 2751 (1967).
- [KMT] 駒宮安男, 森沢一栄, 土屋誠治: "Fail-Safe基本回路", 41年電四連大No. 1987 (1966).
- [KTM], 土屋誠治, 森沢一栄: "フェイルセーフ論理回路概要", 41年電四連大No. 1986 (1967).
- [KUH] 小林俊雄, 浦野義頼, 平山博: "非対称誤りをもつ論理系の高信頼度化について", 42年電四連大, No. 2743 (1967-04).
- [KY1] 上林彌彦, 矢島脩三: "双方向論理回路を用いた故障検査", 信学会オートマン研資A67-27 (1967-09).
- [KY2], : "双方向論理回路の応用", 信学論(C), 52-C, 14, pp. 743-750 (1969-11).
- [L], : "続物理の散歩道", 岩波書店, (1964-06).
- [M] 宮田昌近: "一方向誤り素子によるフェイルセーフ論理回路の構成法", 信学論(C), 52-C, 6, p. 362 (1969-06).
- [MF], 藤岡旭: "広義の多値フェイルセーフ順序回路", 信学論(C), 54-C, 2, pp. 101-108 (1971-02).
- [MK1] 三根久, 古賀義亮: "Fail-Safe論理の基本的性質と一般的構成法", 信学会オートマン研資 (1966-05).
- [MK2], : "Basic properties and a construction method for fail-safe logical systems",

IEEE Trans. on EC, vol. EC-16, pp. 282-289,
(1967-06).

- [MKO] 村上伸一, 樹下行三, 尾崎弘: "故障検査を考慮した順序回路の構成法", 信学論(C), 51-C, 10 (1968-10).
- [MT] 三根久, 高岡忠男: "非対称故障論理回路を用いた2重系の一構成法", 信学会オートマトン研資(1967-09).
- [Mu 1] 向殿政男: "C形論理関数の一性質について", 信学会電子計算機研資, EC68-28 (1968-12).
- [Mu 2] ……………: "C形Fail-Safe論理の数学的構造について", 信学論(C), 52-C, 12, p. 812 (1969-12).
- [Mu T] ……………, 土屋誠治: "3入力フェイルセーフ論理積回路", 42年電四連大, No. 2750 (1967).
- [Mu T 1] ……………, ……………, 駒宮安男: "C形フェイルセーフ論理回路の数学的構造について(1)", 信学会電子計算機研資, EC67-30 (1968-02).
- [Mu T 2] ……………, ……………, ……………: "C形フェイルセーフ論理回路の数学的構造について(2)", 信学会電子計算機研資, EC68-6 (1968-05).
- [N] 中道松郎: "フェイルセーフ論理回路とその無接点継電器系への応用", 制御工学, 13, 2 (1969).
- [Na IH] 奈良明直, 猪山忠男, 平野睦房: "磁気パルス直流変換器によるコアトランジスタフェイルセーフ論理系の改良", 43年電四連大, No. 2671 (1968).
- [Nk] "信頼性管理便覧", 日刊工業, (1964)
- [NW1] 中道松郎, 渡辺優: "トランスレスフェイルセーフ基本回路の2, 3の構成法", 電学支大, No. 43 (1967-10).
- [NW2] ……………, ……………: "入力相互の混触を許したフェイルセーフ基本回路の提案", 42年信学全大, No. 100 (1967).
- [NWT F] ……………, ……………: 高橋昭房, 二瓶武男: "RC結合マルチバイ

- ブレードを応用したフェイルセーフ論理回路（その2）”，42年電四連大，No. 2753（1967）。
- [NWTH] 中道松郎，渡辺優，高橋進，平野隆久：“トランスレスフェイルセーフ基本論理回路の一方式とその特性”，43年電四連大，No. 2669（1968）。
- [ON] 奥村 ， 中山 ： “パラメトロンを用いた鉄道信号用連動装置”，信学電子計算機研資，EC67-5（1967-05）。
- [P] W. H. Pierce：“Failure-tolerant computer design”，Academic Press，New York & London（1965）。
- [R] C. V. Ramamoothy：“A structural theory of machine diagnosis”，Proc. SJCC，p. 743（1967）。
- [SHB] F. F. Sellers, Jr., M. HSIAO, L. W. Bearnsen，“Error detecting logic for digital computers，” McGraw-Hill，New York，（1968）
- [SI1] 坂内正夫，猪瀬博：“機能変換可能な素子を使用した故障診断容易な論理回路の構成”，46年信学全大，No. 111（1971）。
- [SI2] ……………，……………：“機能変換方式による故障診断容易な論理回路の構成”，信学電子計算機研資，EC71-36（1971-11）。
- [SI3] ……………，……………：“部分情報法(消去)による故障診断のための論理回路分割”，45年信学全大，No. 50（1970）。
- [Ta1] 高岡忠雄：“多値論理に対するフェイルセーフシステムの構成”，信学論（C）54-C，1，pp. 41-49（1971-01）。
- [Ta2] ……………：“あるFail-Safe論理系について”，京都大学数理科学講究録81（多重論理およびその応用研究会報告集），pp. 290-312（1970-03）。
- [TaI1] ……………，茨木俊秀：“冗長入力をもつフェイルセーフシステム”，信学オートマトン・インホメーション研資，A70-30（1970-09）。

- [TaI2] 高岡忠雄, 茨木俊秀: "フェイルセーフマシンの最簡形式", 信学オートマトンインホメーション研資, A70-87 (1971-01).
- [TaM] ……………, 三根久: "N-Fail-Safe Logical Systems", IEEE Trans. C-20, 5, pp. 536-542 (1971-05).
- [Tak] 武谷三男: "安全性の考え方", 岩波新書, 644 (1967-05).
- [TGI] 高橋秀俊, 後藤英一, 石田晴久: "変圧器結合直流消去形エサキダイオード論理について", 信学会電子計算機専門委資, (1960-12).
- [Th] 高橋秀俊: "パラメترون計算機", p. 259, 岩波書店, 東京 (1968).
- [TKH] 都倉信樹, 嵩忠雄, 橋本昭洋: "Fail-Safe Logic Nets", IEEE Trans. C-20, 3, pp. 323-330 (1971-03).
- [TKO1] ……………, ……………, 尾崎弘: "フェイルセーフ順序回路について", 信学オートマトン研資 (1966-06).
- [TKO2] ……………, ……………, ……………: "一方向にのみ誤まる素子によるフェイルセーフ回路について", 43年電四連大, No. 2673 (1968)
- [Tks] 武末勝: "論理回路の診断分解能と回路構造", 信学論 (C), 54-C, 10, pp. 877-884 (1971-10).
- [To1] Y. Tohma: "Realization of fail-safe sequential machines using flip-flops", Kyoto International Conference on Circuits and Systems Theory, E-1-3 (1969).
- [To2] ……………: "フリップフロップを用いたフェイルセーフ順序機械の一構成法", 信学論 (C), 54-C, 2, p. (1971-02).
- [TOS] ……………, Y. Ohyama, R. Sakai: "Realization of fail-safe sequential machines by using a k out-of-n code", IEEE Trans. C-20, 11, pp. 1270-1275 (1971-11).

- [TSN] 寺島久憲, 佐藤雅生, 中道松郎: "RC 結合マルチパイプレータを応用したフェイルセーフ論理回路(その1)", 42年電四連大, No. 2752 (1967).
- [Tu1] 土屋誠治: "トランスレス全波整流回路とフェイルセーフ論理回路への応用", 42年信学連大, No. 99 (1967).
- [Tu2]: "抵抗一半導体による Fail-Safe 論理演算発振器" 43年信学連大 No. 2667 (1968).
- [Tu3]: "抵抗一半導体発振器によるフェイルセルフ3値論理-C形 FSL-回路" 信学電子計算機研資, EC 67-25 (1968-01).
- [Tu4]: "C形フェイルセーフ論理の応用", 信学電子計算機研資, EC 67-31 (1968-02).
- [TuKM], 駒宮安男, 森沢一栄: "Fail-Safe形論理演算発振器" 41年度四連大, No. 1988 (1966).
- [TuM], 森沢一栄: "フェイルセーフ論理回路の動特性", 42年信学連大, No. 2749 (1967).
- [UH1] 浦野義頼, 平山博: "多値論理と ϕ 型 Fail-Safe 論理系", (20-1001) 信学全大, No. 967, (1968-10).
- [UH2],: "Fail-Safe ϕ -故障論理系", 信学全大, No. 1003, (1967-10).
- [UH3],: " ϕ 型 Fail-Safe 論理系の構成", 信学電子計算機研資, EC 6-34, (1969-01).
- [UH4],: "3値閾値論理関数と ϕ 型 Fail-Safe 論理形", 電四連大, No. 2969 (1969-03).
- [UHW],, 渡辺昭治: " ϕ 型 Fail-Safe 論理系", (18-1101) 信学オートマトン研資, A 67-41 (1967-11).
- [UY],: "交番論理系と ϕ 形フェイルセーフ論理系", 44年信学全大, No. 43 (1969).
- [W] R. O. Winder: "Threshold logic will cut costs,

- especially with boost from LSI”, Electronics, 41, pp. 94-103 (1968-05).
- [WT1] 渡辺昭治, 高橋泰司: “フェイルセーフ形論理系の一構成法”, 信学全大, No. 72 (1965-11).
- [WT2] ……………, ……………: “Fail-Safe 論理系と誤り訂正機能のある二重系の一構成法”, 信学電算機研資 (1966-01)。
- [WTE] ……………, ……………, 榎本肇: “フェイルセーフ順序回路の一構成法”, 41年電四連大, No. 1984 (1966)。
- [WU1] ……………, 浦野義頼: “パラメترونによる準Fail-Safe 論理系”, 信学電子計算機研資 (1966-12)。
- [WU2] ……………, ……………: “Fail-Safe 論理系”, 信学誌, 50, 2, pp. 290-291 (1967-2)。
- [WY] 渡辺昭治, 山本英雄: “非対称入力による Φ 形論理回路”, 44年電四連大, No. 2970 (1969)。
- [Y] 山本英雄: “フェイルセーフ論理回路を実現する素子の条件について”, 信学論 (D), 55-D, 1, p. 68 (1972-01)。
- [YaK1] 山本勝, 樹下行三: “モジュールを用いた論理回路とその故障検査”, 信学論 (C), 54-C, 9, pp. 804-810 (1971-09)。
- [YaK2] ……………, ……………: “……………”, 信学電子計算機研資. (1970-09)。
- [YU] 山本英雄, 浦野義頼: “交番論理系と Φ 故障検出”, 44年信学全大, No. 43 (1969)。
- [YUW1] ……………, ……………, 渡辺昭治: “交番論理系の故障検出可能性”, 信学電子計算機研資, EC70-20 (1970-09)。
- [YUW2] ……………, ……………, ……………: “交番論理系のフェイルセーフ性”, 信学論 (C), 54-C, 12 pp. 1079-1086 (1971-12)。
- [YUW3] ……………, ……………, ……………: “交番論理系のフェイルセーフ構成”, 47年信学全大, シンポジウムS1-2 (1972)。
- [YW1] ……………, 渡辺昭治: “識別できる故障値を出す論理系の性質”,

43年電四連大, No. 2680 (1968).

- [YW2] ……………, ……………: "2 閾値論理による ϕ Fail-Safe 論理方式", 43年信学全大, No. 37 (1968).
- [YWU.1] ……………, ……………: 浦野義頼: "交番論理系とその故障検出への応用", 信学電子計算機研資, EC69-15 (1969-07).
- [YWU.2] ……………, ……………, ……………: "Alternating logic and its application to fault detection", Proc. 1970 IEEE International Computer Group Conference, pp. 220-228 (1970-06).
- [YoM] 米山正雄, 三木容彦: "可変論理回路を用いた加算回路の例", 45年信学全大, No. 829 (1970).
- [YoMK] ……………, ……………, 菊川健: "変形DCTL可変AND-OR回路", 44年信学全大, No. 842 (1969).

第II部の参考文献

- [A1] A. Avizienis: "Design of fault-tolerant computers", Proc. FJCC, pp. 733-743 (1967).
- [A2] ……………: "Fault-tolerant computing, on overview", COMPUTER (by IEEE Computer Society), 4, 1 (1971-01/02).
- [AGMR] ……………, G. C. Gilley, F. P. Mathur, D. A. Rennels, J. A. Rohr, D. K. Rubin: "The STAR (Self-Testing And Repairing) computer: an investigation of the theory and practice of fault-tolerant computer design", IEEE Trans. C-20, 11, pp. 1312-1321 (1971).
- [B] Igor Bazovsky: "Reliability theory and practice", Maruzen, Tokyo (1963).
- [BCJR] W. G. Bouricius, W. C. Carter, D. C. Jessep, P. R.

- Schneider, A. B. Wadia, "Reliability modeling for fault-tolerant computers", IEEE Trans. C-20, 11, pp. 1306-1311 (1971).
- [BP] R. E. Barlow, F. Proschan: "Mathematical theory of reliability", John Wiley & Sons, Inc (1965).
- [C] D. J. Creasey: "Reliability predictions for repairable systems containing redundancy", Microelectronics and Reliability, Vol. 6, pp. 135-142.
- [CB] W. C. Carter, W. G. Bouricius: "A survey of fault-tolerant architecture & its evaluation", COMPUTER (by IEEE Computer Society), 4, 1 (1971-01/02).
- [CJWS], D. C. Jessep, A. B. Wadia, P. R. Schneider, W. G. Bouricius: "Logic design for dynamic and Interactive recovery", IEEE Trans. C-20, 11, pp. 1300-1305 (1971).
- [CMM] 第I部での [CMM] と同一.
- [CoB] F. B. Cole, W. V. Bell: "Self-repair techniques in digital systems", Proc. SJCC, pp. 509-514 (1968)..
- [DK] E. J. Dieterich, L. C. Kaye: "A compatible airborne multiprocessor", Proc. FJCC, pp. 347-357 (1969).
- [DW] W. E. Dickinson, R. M. Walker: "Reliability improvement by the use of multiple-element switching circuits", IBM Journal, pp. 142-147 (1957-04).
- [EB] F. D. Erwin, E. Bersoff: "Modular computer

- architecture strategy for long term missions", Proc. FJCC, pp. 337-344 (1969).
- [F] W. Fellow: "An introduction to probability theory and its applications", John Wiley & Sons, Inc. (1960).
- [F1] B. J. Flehinger: "Reliability improvement through redundancy at various system levels", IBM Journal pp. 148-158 (1958-04).
- [FO] 藤木正也, 大野清次郎: "システム(信頼性特集記事)", 信学誌, 47, 11, pp. 1601-1608 (1964-11).
- [Fu] 藤木正也: "無保守複式装備系の信頼度と機器故障間隔", 信学信頼性研資 (1964-06).
- [HTK1] 第I部の[HTK1]と同一.
- [Ic] 市田嵩: "保全性工学入門" 日本科学技術連盟 (1968).
- [IIF1] 伊藤誠, 稲垣康善, 福村晃夫: "誤まり指示器の故障を考慮した自己修理系の信頼度" 電四連大, No. 2744 (1967).
- [IIF2] ……………, ……………, ……………: "誤まり指示器の故障を考慮した自己修理系の信頼度", 信学全大, No. 97 (1967).
- [K1] E. J. Kletsky: "Upper bounds on mean life of self-repairing systems", IRE Trans. on RQ pp. -48 (1962-10)
- [Ko] 小池恒彦: "DEX-1号電子計算機の復旧に関する考察", 研究実用化報告 (NTT), 18, 5, pp. 1127-1137 (1969).
- [LV] R. E. Lyons, W. Vanderkulk: "The use of triple-modular redundancy to improve computer reliability", IBM Journal, pp. 200-209 (1962-04).
- [M] E. J. Muth: "Reliability of a system having stand by spare plus multiple-repair capability",

- IEEE Trans. R-15, 2, pp. 76-81 (1966-08).
- [MA] F. P. Mathur, A. Avizienis: "Reliability analysis and architecture of a hybrid-redundant digital system: Generalized triple modular redundancy with self repair", Proc. SJCC, pp. 375-383 (1970).
- [Mc] E. J. McCluskey: "Test and Diagnosis procedures for digital networks", COMPUTER (by IEEE Computer Society), 4, 1, (1971-01/02).
- [MM] 松岡行雄, 真島健一: "故障と解析" 信学誌, 47, 11, pp. 1618-1624 (1964-11).
- [MS] E. F. Moore, C. E. Shannon: "Reliable circuits using less reliable relays (part I, II)", J. the Franklin Institute, vol. 262, pp. 191-208 (1956-09), pp. 281-297 (1956-10).
- [N] J. von Neumann: Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components", Automata Studies, Princeton University Press (1956).
- [P] 第I部での [P] と同一。
- [Pe] W. W. Peterson: "Error correcting codes", M. I. T. Press (1961).
- [R] C. V. Ramamoorthy: "Fault-Tolerant Computing: an introduction and an overview", IEEE Trans. C-20, 11, pp. 1241-1244 (1971).
- [Re] C. S. Repton: "Fault indicators and the unavailability of redundant circuits", Microelectronics and Reliability, vol. 8, pp. 215-234 (1969).

- [S] 佐佐木正文：“冗長性（信頼性特集記事）”，信学誌，47，11，
pp. 1609-1617（1964-11）。
- [Sh] 塩見弘：“信頼性工学入門”，丸善，（1967）。
- [SHB] 第I部での〔SHB〕と同一。
- [T] R. Teoste：“Design of repairable redundant
computer”，IRE Trans. EC-11，5，pp. 643-649
（1962-10）
- [Te] I. Terris：“Investigation and simulation of a
self-repairing digital computer”，a doctoral
dissertation of UCLA（1965）。
- [Tr] J. G. Tryon：“Quadded logic”，Redundancy
Techniques for Computing Systems, Spartan
Books, pp. 205-228（1962）。
- [W] M. V. Wilkes：“Self-repairing computers”，IRE
Trans. EC-20，1（1961-03）。
- [Y1] 山本英雄：“予備系に定時保守を行なう待機冗長系の信頼度”，
電四連大，No. 2849（1970）。
- [Y2] ……………：“予備に定時保守を行なう自己修復系の信頼度”，信
学論（C），54-C，12，pp. 1087-1093（1971-12）。
- [YD] ……………, D. Debonneil：“Reliability of a
generalized stand-by system with regular
maintenance”，Technical Note, No. 58, KDD
Research & Development Lab.,（1969）。
- [YWK] ……………, 渡辺昭治，小白井敏明：“自己修復系における定期保
守の効果”，信学信頼性研資 R68-5（1968-05）。

128 項欠

付 録

内 容 目 次

(第 I 部の付録)

2.1 自己双対素子によって構成された任意の組合せ回路が 自己双対回路であることの証明例	131
3.1 素子の二重故障に対するフェイルセーフ条件	133
3.2 補題5の証明の補足	135
3.3 系3の証明の補足	136
4.1 交番順序回路網の状態変数について関係AまたはBの いずれか一方が成立することの証明	137

(第 II 部の付録)

7.1 方程式 (7.3) の導出	141
7.2 式 (7.7) の導出	143
7.3 $\alpha \ll 1$ の場合の $R_{ij}(T)$ の近似式 (7.23) の算出	144
7.4 式 (7.25) の導出	146
7.5 式 (7.43) の導出	149
7.6 式 (7.46) の導出	150
7.7 $g(X) < L$ の証明	151

130 項欠

付録 2.1 自己双対素子によって構成された任意の組合せ回路 が自己双対回路であることの証明例

証明に先だって対象とする回路の構造を定める。与えられた回路は内部にフィードバックループを持たない n 段回路とし、各構成素子に対して識別番号を与え、回路中 k 段の i 番目にある素子を v_{ki} と書く (図 A.1 参照)。“ k ”

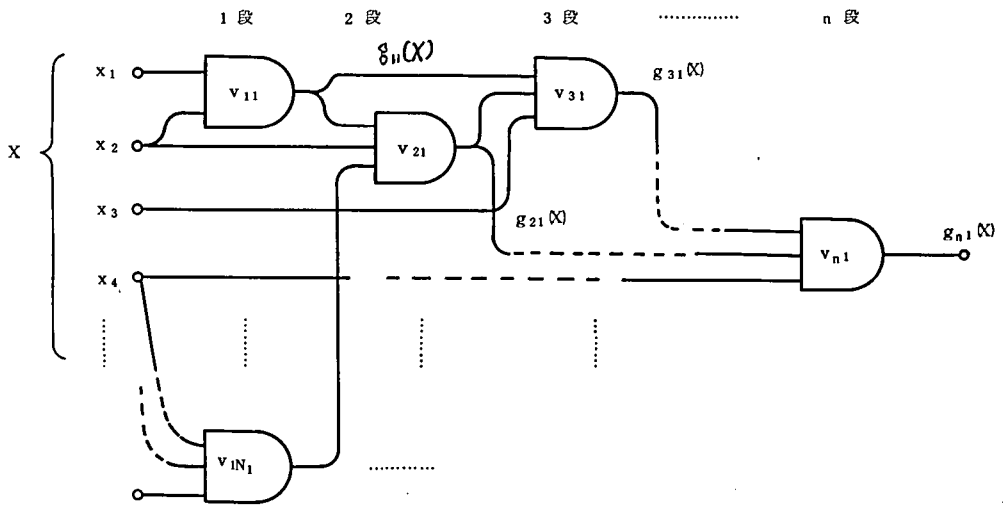


図 A.1 回路例

の意味は以下のように定義する。

- (i) 外部からの入力だけを入力とする素子について $k = 1$ とする。
- (ii) 外部からの入力および $k \leq r$ の素子の出力だけを入力とする素子について $k = r + 1$ とする。

外部からの入力を $X (= (x_1, x_2, \dots, x_n))$ ，素子 v_{ki} 自身の機能 (自己双対関数) を f_{ki} と書き、それが同時に v_{ki} の出力変数を表わしているとすると、定義(i)(ii)によって一般に

$$f_{ki} \equiv f_{ki}(X, f_{11}, f_{12}, \dots, f_{(k-1)N_{k-1}}), \text{ここに, } N_{k-1} \text{ は } (k-1) \text{ 段にある素子数,} \quad (1)$$

と表わされる。つぎに、素子 v_{ki} の外部入力 X に対する出力関数を g_{ki} と書

くと(1)によって,

$$g_{ki}(X) = (X, g_{11}(X), \dots, g_{(k-1)N_{k-1}}(X)) \quad (2)$$

回路の出力は n 段の素子 v_{n1} ($N_n = 1$ とする) の出力でありその出力関数は $g_{n1}(X)$ である。

以上により証明すべき命題は,

$$g_{n1}(X) = g_{n1}^D(X) \equiv \overline{g_{n1}}(\overline{X}) \quad (3)$$

が任意の n ($= 1, 2, \dots$) について成立することとなる。

これを n に関する帰納法によって証明する。

(証明)

(i) $n = 1$ については明らか。

(ii) $n \leq r$ について(2)が成立すると仮定する。

(2)によって,

$$g_{(r+1)1}(X) = f_{ni}(X, g_{11}(X), g_{12}(X), \dots, g_{rN_r}(X))$$

しかるに f_{ni} の変数である $g_{ki}(X)$ をそれぞれ独立した回路とみなせば, $k \leq r$ であるから仮定により

$$g_{ki}(\overline{X}) = \overline{g_{ki}}(X)$$

である。よって

$$g_{(r+1)1}(\overline{X}) = f_{(r+1)1}(\overline{X}, \overline{g_{11}}(X), \overline{g_{12}}(X), \dots, \overline{g_{rN_r}}(X))$$

一方 f_{ni} が自己双対であるから,

$$g_{(r+1)1}(\overline{X}) = \overline{f_{(r+1)1}}(X, g_{11}(X), g_{12}(X), \dots, g_{rN_r}(X))$$

すなわち,

$$g_{(r+1)1}(X) = \overline{g_{(r+1)1}}(\overline{X}) = g_{(r+1)1}^D(X)$$

よって, (3)は $n = r$ についても成立する。(証明終り)

付録 3.1 素子の二重故障に対するフェイルセーフ条件

自己双対交番回路 C を対象として、定理 5 に用いたものと同じ記法を用いる。 C の二つの素子 v_1, v_2 に着目する。素子 v_1, v_2 から、それぞれの出力線の一部または全部を切断し、それぞれをまとめて新たな二つの入力端子とみて、それぞれの変数を s, t と書く。この時の C の出力関数を $h(X, s, t)$ と表わすと、

$$h(X, s, t) = A(X)ts + B(X)t\bar{s} + C(X)\bar{t}s + D(X)\bar{t}\bar{s} \quad (1)$$

と書ける。 A, B, C, D は t, s に依存しない論理関数である。 v_1, v_2 の入力 X に対する正常な関数を、それぞれ、 $g(X), h(X)$ とすると C の出力関数 $f(X)$ はつぎのようになる。

$$f(X) = A(X)g(X)h(X) + B(X)g(X)\bar{h}(X) + C(X)\bar{g}(X)h(X) + D(X)\bar{g}(X)\bar{h}(X) \quad (2)$$

故障 e を $s = \alpha, t = \beta$ ($\alpha, \beta = 1$ または 0) となる二重故障とすると、

$$f_e(X) = A(X)\alpha\beta + B(X)\alpha\bar{\beta} + C(X)\bar{\alpha}\beta + D(X)\bar{\alpha}\bar{\beta} \quad (3)$$

(2) により、

$$\bar{f}(X) = \bar{A}(X)g(X)h(X) + \bar{B}(X)g(X)\bar{h}(X) + \bar{C}(X)\bar{g}(X)h(X) + \bar{D}(X)\bar{g}(X)\bar{h}(X) \quad (4)$$

(3) より、

$$\bar{f}_e(X) = \bar{A}(X)\alpha\beta + \bar{B}(X)\alpha\bar{\beta} + \bar{C}(X)\bar{\alpha}\beta + \bar{D}(X)\bar{\alpha}\bar{\beta} \quad (5)$$

(2)~(5) を定理 4 の条件に用いると、この場合のフェイルセーフ条件 (必要十分) が得られる。結果を α, β の値によって四場合に分けて示す。表現の簡単化のため、 $A(X) = A, \bar{A}(\bar{X}) = A^D$ のように表わす。

(i) $\alpha = \beta = 1$ の場合

$$\bar{A}\bar{A}^D (g\bar{h}B + g\bar{h}C + g\bar{h}D) (g^D h^D B^D + g^D h^D C^D + g^D h^D D^D) = 0 \quad (6)$$

(ii) $\alpha = \beta = 0$ の場合

$$\bar{D}\bar{D}^D (g\bar{h}A + g\bar{h}B + g\bar{h}C) (g^D h^D A^D + g^D h^D C^D + g^D h^D D^D) = 0 \quad (7)$$

(iii) $\alpha = \bar{\beta} = 1$ の場合

$$\bar{B}\bar{B}^D (g\bar{h}A + g\bar{h}C + g\bar{h}D) (g^D h^D A^D + g^D h^D C^D + g^D h^D D^D) = 0 \quad (8)$$

(iv) $\alpha = \bar{\beta} = 0$ の場合

$$\bar{C}\bar{C}^D (ghA + g\bar{h}B + g\bar{h}D) (\bar{g}^D\bar{h}^D A^D + \bar{g}^D h^D B^D + g^D h^D D^D) = 0 \quad (9)$$

素子 v_1, v_2 の二重故障についてフェイルセーフであるための必要十分条件はそれぞれの任意の出力線について(6)~(9)が同時に成立することが必要十分である。

いま, A, B, C, D からできる16項の最小項の中で, " $ABCD$ 以外のものがすべて恒等的に零" という条件を考える。このとき, (6)~(9)は同時に成立し, 他方, (2)は

$$h(X, s, t) = ABCD(t+s) \quad (10)$$

と表わされる。すなわち, h が t, s についてはORであることが二素子 v_1, v_2 の二重故障に関するフェイルセーフ性の一つの十分条件である。この結果は, 実は本論, 項3.4.2の結果に対応している。

付録 3.2 補題 5 の証明の補足

本論の式 (3.29) は恒等的に成立。よって X_{ij} を \bar{X}_{ij} に換えても成立しなければならぬ。これにより、式 (3.29) から

$$\left. \begin{array}{l} A^D A \bar{B}^D = 0 \\ A^D A \bar{B} = 0 \\ \bar{A} B^D B = 0 \\ \bar{A}^D B^D B = 0 \end{array} \right\} (A(X_{ij}) = A \text{ のように略記}) \quad (1)$$

を得る。すなわち、式 (3.29) が恒等的に成立することは、(1)、したがってまた (1) と式 (3.29) が同時に恒等的に成立することと同値である。いま、 A, A^D, B, B^D からなる 16 項の最小項について式 (3.29) と (1) の条件を考えると恒等的に零でないものは、つぎの 6 個である。

$$\bar{A}\bar{B}\bar{B}^D\bar{A}^D, \bar{A}\bar{B}B^DA^D, \bar{A}B\bar{B}^DA^D, \bar{A}B\bar{B}^DA^D, \bar{A}B\bar{B}^D\bar{A}^D, \bar{A}B\bar{B}^DA^D$$

これに留意して式 (3.26) の A, B, B^D, A^D をそれぞれ最小項展開し、同一の最小項毎に整理すると、

$$f(X) = \bar{A}\bar{B}\bar{B}^D\bar{A}^D + \bar{A}\bar{B}B^DA^D x_i + \bar{A}B\bar{B}^DA^D x_j + \bar{A}B\bar{B}^D\bar{A}^D x_i + \bar{A}B\bar{B}^DA^D x_j$$

これを再整理すると本文の式 (3.30) になる。

付録 3.3 系 3 の証明の補足

(a)

$f(X)$ をユネイト関数でないとすれば、 X の一つの成分変数 x_i が存在して、
 適当な関数 P, Q を用いて、

$$f(X) = x_i P(X_i) + \bar{x}_i Q(X_i), \quad (1)$$

$$\text{ここに, } X_i = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (2)$$

$$\text{および, } P(X_i) \not\sim Q(X_i) \quad (3)$$

(1) によって

$$f^D(X) = \bar{f}(\bar{X}) = \bar{x}_i \bar{P}(\bar{X}_i) + x_i \bar{Q}(\bar{X}_i) \quad (4)$$

(1), (2) によって、

$$\begin{aligned} \varphi(c, X) &= x_i (cP(X_i) + \bar{c}\bar{Q}(\bar{X}_i)) \\ &\quad + \bar{x}_i (cQ(X_i) + \bar{c}\bar{P}(\bar{X}_i)) \end{aligned} \quad (5)$$

(3) によって $P(X_{ia}) = 1, Q(X_{ia}) = 0$ である X_{ia} と $P(X_{ib}) = 0, Q(X_{ib}) = 1$ である X_{ib} が必ず存在する。これと(5)により、

$$\varphi(c, X) = \begin{cases} x_i, & \text{for } c=1, X_i=X_{ia} \\ -x_i, & \text{for } c=1, X_i=X_{ib} \end{cases} \quad (6)$$

であることが分かる。すなわち、 φ は x_i について正でも負でもない、よってユネイト関数ではない。

(b)

$f(X)$ が X の任意の一つの成分変数 x_i について正 (単調増加) であるとすると、適当な関数 P, Q を用いて

$$f(X) = x_i P(X_i) + Q(X_i) \quad (7)$$

と表わされる (X_i は(2)と同じ)。これより、

$$f^D(X) = \bar{f}(\bar{X}) = x_i \bar{Q}(\bar{X}_i) + \bar{P}(\bar{X}_i) \bar{Q}(\bar{X}_i) \quad (8)$$

(7)~(8) によって $\varphi(c, X)$ も x_i について正であることは明らか。 f が x_i について負としても同様の結果が得られる。

付録 4.1 交番順序回路網の状態変数について関係 A
 または B のいずれか一方が成立することの証明

説明の簡単化のため、1 出力、1 状態変数の交番順序回路網 M に着目するが、以下の議論を多出力、多状態変数の場合に拡張できることは明らかである。なお、 M の対回路網 N_1 は、交番回路の場合にしたがって応通常の組合せ回路網であると仮定する（議論の最後にそれが実際に可能であることを示す）。図 A.2 に示すように、出力関数を φ 、状態遷移関数を ψ とする。

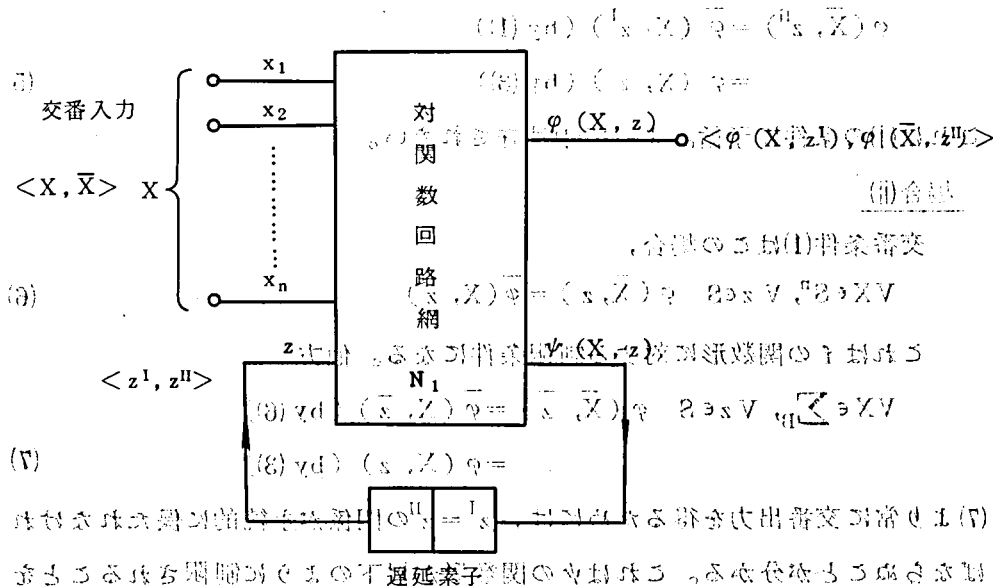


図 A.2 交番順序回路網 M

交番入力 $\langle X, \bar{X} \rangle$ 、対状態 $\langle z^I, z^{II} \rangle$ に対して、対出力 $\langle \varphi(X, z^I), \varphi(\bar{X}, z^{II}) \rangle$ が交番する条件は、

$$\forall X \in S^n, \varphi(\bar{X}, z^{II}) = \bar{\varphi}(X, z^I) \quad (1)$$

- (e) $\langle z^I, z^{II} \rangle$ の成分の関係について三場合が考えられる。
- (i) z^{II} は z^I と無関係；すなわち、与えられた z^I に対し、 $\forall z^{II} \in S$ に対して (1) が成立する。
 - (ii) $z^{II} = z^I$ (= \bar{z}^I)
 - (iii) $z^{II} = \bar{z}^I$ (= \bar{z}^I)

集合 Σ_A, Σ_B を以下のように定める。

$$\Sigma_A = \{X : \varphi(X, 1) = \varphi(X, 0), X \in S^n\} \quad (2)$$

$$\Sigma_B = \{X : \bar{\varphi}(X, 1) = \varphi(X, 0), X \in S^n\} \quad (3)$$

ここで $f(X, z)$ は冗長な変数を含まないものに限る。すなわち、

$$\Sigma_B \neq \emptyset \quad (4)$$

以下各場合について吟味する。

場合(i)

$\forall X \in \Sigma_B$ に対して、

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{X}, z^{\text{II}}) &= \bar{\varphi}(X, z^{\text{I}}) \quad (\text{by (1)}) \\ &= \varphi(X, \bar{z}^{\text{I}}) \quad (\text{by (3)}) \end{aligned} \quad (5)$$

これは(i)の条件に矛盾。よって(i)は許されない。

場合(ii)

交番条件(1)はこの場合、

$$\forall X \in S^n, \forall z \in S, \varphi(\bar{X}, z) = \bar{\varphi}(X, z) \quad (6)$$

これは f の関数形に対する制限条件になる。他方

$$\begin{aligned} \forall X \in \Sigma_B, \forall z \in S, \varphi(\bar{X}, \bar{z}) &= \bar{\varphi}(X, \bar{z}) \quad (\text{by (6)}) \\ &= \varphi(X, z) \quad (\text{by (3)}) \end{aligned} \quad (7)$$

(7)より常に交番出力を得るためには、 $z^{\text{I}} = z^{\text{II}}$ の関係が永続的に保たれなければならぬことが分かる。これは ψ の関数形が以下のように制限されることを意味する。

$$\forall X \in S^n, \forall z \in S, \psi(\bar{X}, z) = \psi(X, z) \quad (8)$$

場合(iii)

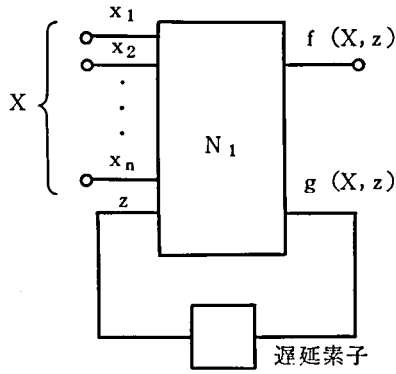
場合(ii)の場合と同様の議論により、 φ と ψ とが以下のように制限されることが分かる。

$$\forall X \in S^n, \forall z \in S, \varphi(\bar{X}, \bar{z}) = \bar{\varphi}(X, z) \quad (9)$$

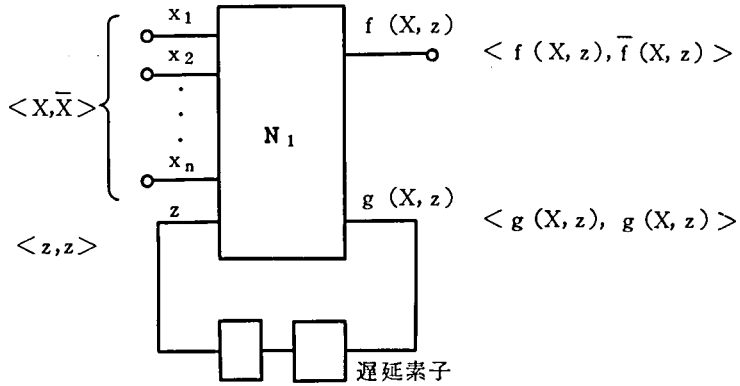
$$\text{''} \quad , \psi(\bar{X}, \bar{z}) = \bar{\psi}(X, z) \quad (10)$$

すなわち、 φ, ψ とともに自己双対関数でなければならない。

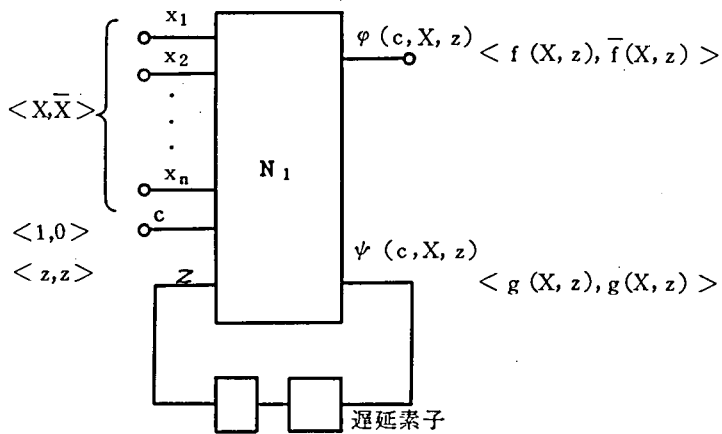
つぎに図 A. 3(a) に示した順序回路 M に対する交番順序回路 M の対回路網 N_1 の構成法を、上記の(ii), (iii) の各場合について述べる。



(a) 順序回路 M



(b) M に対する 交番順序回路 M-1



(c) M に対する 交番順序回路 M-2

図 A.3 順序回路 M に対する 交番順序回路

まず、(iii)の場合、 N_1 をそのまま f, g の交番回路 N_1 とすればよいことは明らかである。つぎに、(ii)の場合、 f, g が、それぞれ、(7), (8)を満たす関数であれば、 N_1 として N_1 をそのまま使えばよい (図 A. 3(b))。さもなければ、制御入力 c を加えて f, g に対して、

$$\varphi(c, X, z) = cf(X, z) + \overline{c}\overline{f}(\overline{X}, z) \quad (11)$$

$$\psi(c, X, z) = cg(X, z) + \overline{c}\overline{g}(\overline{X}, z) \quad (12)$$

それぞれ、を実行する組合せ回路を作ればよい (図 A. 3(c))。

φ, ψ は確かに条件(7), (8)を満たしている。

付録 7.1 方程式 (7.3) の導出

システムの始動時を時点 0 とし、その後の連続する二つの時間区間 $(0, t)$ と $(t, t+dt)$ に着目する。いま $1 \leq i \leq L$ とすると $(0, t+dt)$ の間に i ユニットの故障する過程としてはつぎの三通りの排他的な過程を考えることができる。

- (i) $(0, t)$ 間に i ユニットの故障し、 $(t, t+dt)$ 間には故障が生じない。
- (ii) $(0, t)$ 間に $i-1$ ユニットの故障し、 $(t, t+dt)$ 間に 1 ユニットの故障する。
- (iii) $(0, t)$ 間に $i-x$ ($x \geq 2$) ユニットの故障し、 $(t, t+dt)$ 間に x ユニットの故障する。

さて、一つの動作ユニット、また予備ユニットが $(t, t+dt)$ に故障する確率は故障率の定義 (節 6.3 参照) によって、それぞれ、 $\lambda_w dt$, $\lambda_s dt$ と表わされる。したがって、 $(t, t+dt)$ 間に x 個のユニットが故障する確率は $(dt)^x$ に比例する。 dt に対して $(dt)^2$ 以上の項が無視できることに注意すると、まず過程 (iii) は他の二つに対して無視できる。さらに、 $(0, t)$ 間で y ($y \leq L$) ユニットの故障しており、 $(t, t+dt)$ 間で残っている N 個の動作ユニットおよび $L-y$ 個の予備ユニットの中のいずれか一つが故障する確率が、

$$\{N\lambda_w + (L-y)\lambda_s\} dt \quad (1)$$

また、いずれもが故障しない確率が、

$$1 - \{N\lambda_w + (L-y)\lambda_s\} dt \quad (2)$$

と表わされることが分かる。一方 $(0, t)$ 間で y ユニットの故障する確率が $P_y^L(t)$ と表わされるから、過程 (i), (ii) の発生する確率は、それぞれ、 $y = i$, $i-1$ として、

$$P_i^L(t) \{1 - \{N\lambda_w + (L-i)\lambda_s\} dt\} \quad (3)$$

$$P_{i-1}^L(t) \{N\lambda_w + (L-i+1)\lambda_s\} dt \quad (4)$$

となる。両過程は排他的であるから結局、

$$P_i^L(t+dt) = P_i^L(t) \{ 1 - \{ N\lambda_W + (L-i)\lambda_S \} dt \} \\ + P_{i-1}^L(t) \{ N\lambda_W + (L-i+1)\lambda_S \} dt, \quad (5)$$

すなわち,

$$(P_i^L(t))' = \frac{P_i^L(t+dt) - P_i^L(t)}{dt} = - \{ N\lambda_W + (L-i)\lambda_S \} P_i^L(t) \\ + \{ N\lambda_W + (L-i+1)\lambda_S \} P_{i-1}^L(t), \\ \text{for } 1 \leq i \leq L \quad (6)$$

を得る。

他方, $i=0$ の場合, 上の議論で過程(i)だけが許されることから明らかに,

$$(P_0^L(t))' = - \{ N\lambda_W + L\lambda_S \} P_0^L(t) \quad (7)$$

(6), (7)が求める微分方程式 (7.3) である。

付録 7.2 式 (7.7) の導出

$N/s + L$ が正整数であることに留意すると二項定理によって、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\frac{N}{s}+L} \frac{N}{s} + L C_i \{ \exp(s\lambda_{wt}) - 1 \}^i \\ &= \{ \{ \exp(s\lambda_{wt}) - 1 \} + 1 \}^{\frac{N}{s}+L} \\ &= \exp(N\lambda_{wt} (1 + \frac{s}{N}L)) \end{aligned} \quad (1)$$

ゆえに、

$$\exp(-N\lambda_{wt} (1 + \frac{s}{N}L)) \sum_{i=0}^{\frac{N}{s}+L} \frac{N}{s} + L C_i \{ \exp(s\lambda_{wt}) - 1 \}^i = 1 \quad (2)$$

結局、

$$\begin{aligned} R_B(t) &= \exp(-N\lambda_{wt} (1 + \frac{s}{N}L)) \sum_{i=0}^L \frac{N}{s} + L C_i \{ \exp(s\lambda_{wt}) - 1 \}^i \\ &= 1 - \exp(-N\lambda_{wt} (1 + \frac{s}{N}L)) \\ &\quad \cdot \sum_{i=L+1}^{\frac{N}{s}+L} \frac{N}{s} + L C_i \{ \exp(s\lambda_{wt}) - 1 \}^i \end{aligned} \quad (3)$$

付録 7.3 $\alpha \ll 1$ の場合の $R_{ij}(T)$ の近似式 (7.23) の算出

式 (7.4) によって次式が導かれる。

$$P_u^{L-j}(\tau) P_{i-u}^{L-u}(T-\tau) = P_i^L(T) g_u(\alpha) \quad (1)$$

ここに,

$$g_u(\alpha) = \frac{\pi \binom{L-j}{u} \pi \binom{L-u}{i-u}}{\pi \binom{L}{i}} \exp(j\alpha\beta + u\beta(1-\alpha)) \cdot \frac{i!}{u!(i-u)!} \alpha^u (1-\alpha)^{i-u} \left\{ \frac{\exp(\alpha\beta) - 1}{\alpha\beta} \right\}^u \cdot \left\{ \frac{\exp(\beta(1-\alpha)) - 1}{\beta(1-\alpha)} \right\}^{i-u} \left(\frac{\beta}{\exp(\beta) - 1} \right)^i \quad (2)$$

$$\pi \binom{L}{i} = \begin{cases} \left(1 + \frac{s}{N}\right) \left(1 + \frac{s}{N}(1-1)\right) \cdots \left(1 + \frac{s}{N}(1-i+1)\right), & \text{for } 1 \leq i \leq l \\ 1, & \text{for } i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\beta = s \lambda_W T \quad (4)$$

したがって式 (7.22) は

$$R_{ij}(T) = P_i^L(T) \sum_{u=0}^{m_{ij}} g_u(\alpha) \quad (5)$$

と表わされる。 $\alpha \ll 1$ に対しては(2)によって $g_u(\alpha) \propto \alpha^u$ であることが分かる。したがって α の一次の項の影響を評価するには(5)において $g_0(\alpha)$ と $g_1(\alpha)$ の項だけをとれば十分である。もちろん $m_{ij} = \min(i, L-j) = 0$ の場合には $g_1(\alpha)$ の項は不要である。このことから,

$$R_{ij}(T) \cong P_i^L(T) (g_0(\alpha) + g_1(\alpha)), \quad \text{for } i \geq 1 \text{ \& } j \leq L-1 \quad (6)$$

$$R_{ij}(T) = P_i^L(T) g_0(\alpha), \quad \text{for } i=0 \text{ or } j=L \quad (7)$$

さて(2)によって,

$$g_0(\alpha) = \exp(j\alpha\beta) \left(\frac{\exp(\beta(1-\alpha)) - 1}{\exp(\beta) - 1} \right)^i \quad (8)$$

$\alpha \ll 1$ に注意すると,

$$\exp(\beta(1-\alpha)) \cong (1-\alpha\beta) \exp(\beta) \quad (9)$$

とかける。(6), (7)によって,

$$g_0(\alpha) \cong 1 + j \alpha \beta - i \alpha g(\beta) \quad (10)$$

ここに $g(\beta)$ は式 (7.24) で定義されたものである。

また,

$$g_1(\alpha) = \frac{1 + \frac{L-j}{N} s}{1 + \frac{L}{N} s} \exp(j \alpha \beta + \beta (1-\alpha)) i \alpha (1-\alpha)^{i-1} \cdot \frac{\exp(\alpha \beta) - 1}{\alpha \beta} \left(\frac{\exp(\beta (1-\alpha)) - 1}{\beta (1-\alpha)} \right)^{i-1} \left(\frac{\beta}{\exp(\beta) - 1} \right)^i \quad (11)$$

これを α について展開し, 二次以上の項を無視することによって,

$$g_1(\alpha) \cong i \alpha \left(1 - j \frac{s}{N+L} \right) g(\beta) \quad (12)$$

(10)(12)より,

$$g_0(\alpha) + g_1(\alpha) \cong 1 + j \alpha \left\{ \beta - \frac{i s}{N+L} g(\beta) \right\} \quad (13)$$

$i = 0$ のとき $g_0(\alpha) = g_0(\alpha) + g_1(\alpha)$ であることに注意すると(6)と(13), (7)と(10)とによって最終的につぎの結果を得る。

$$R_{ij}(T) = \left\{ \begin{array}{l} P_i^L(T) \left[1 + j \alpha \left\{ \beta - i \frac{1}{\frac{N}{s} + L} g(\beta) \right\} \right], \text{ for } j \leq L-1 \\ P_i^L(T) \left\{ 1 + \alpha (L\beta - i g(\beta)) \right\}, \text{ for } j = L \end{array} \right\} \quad (14)$$

これが式 (7.23) である。

付録 7.4 式 (7.25) の導出

記述の簡単化のために

$$\beta = s \lambda_{WT} \quad (1)$$

とする。式 (7.16) に式 (7.23) を代入すると、

$$\begin{aligned} R_i(kT) &= \sum_{j=0}^L R_{ij}(T) R_j((k-1)T) \\ &= \sum_{j=0}^L P_i^L(T) \left(1 + j\alpha\beta - ij\alpha \frac{s}{N+Ls} g(\beta)\right) \\ &\quad \cdot R_j((k-1)T) - i\alpha \left(1 - \frac{Ls}{N+Ls}\right) g(\beta) P_i^L(T) \\ &\quad \cdot R_L((k-1)T) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= P_i^L(T) R((k-1)T) \\ &\quad + \alpha \left(\beta P_i^L(T) - \frac{s}{N+Ls} g(\beta) i P_i^L(T)\right) \\ &\quad \cdot \sum_{j=0}^L j R_j((k-1)T) - i\alpha \left(1 - \frac{s}{N+Ls}\right) g(\beta) \\ &\quad \cdot P_i^L(T) R_L((k-1)T) \end{aligned} \quad (2)'$$

また、

$$\begin{aligned} R(kT) &= \sum_{i=0}^L R_i(kT) \\ &= \left(\sum_{i=0}^L P_i^L(T)\right) R((k-1)T) \\ &\quad + \alpha \left\{ \beta \sum_{i=0}^L P_i^L(T) - \frac{s}{N+Ls} g(\beta) \sum_{i=0}^L i P_i^L(T) \right\} \\ &\quad \cdot \sum_{j=0}^L j R_j((k-1)T) - \alpha \left(1 - \frac{Ls}{N+Ls}\right) g(\beta) \\ &\quad \cdot R_L((k-1)T) \cdot \left(\sum_{i=0}^L i P_i^L(T)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=0}^L P_i^L(T) \right) R((k-1)T) \\
&+ \alpha \sum_{j=0}^L j R_j((k-1)T) \varphi\left(\frac{s}{N}, L-1\right) \frac{s}{N} \frac{(N\lambda_w T)^{L+1}}{L!} \\
&\cdot \exp\left(-X\left(1 + \frac{s}{N}L\right)\right) - \alpha \left(1 - \frac{Ls}{N+Ls}\right) g(\beta) \\
&\cdot R_L((k-1)T) \left(\sum_{i=0}^L i P_i^L(T) \right) \tag{3}
\end{aligned}$$

(2)'より,

$$R_i(kT) \cong P_i^L(T) R((k-1)T) (1 - O(\alpha)) \tag{4}$$

(3)により,

$$R(kT) \cong \left(\sum_{i=0}^L P_i^L(T) \right) R((k-1)T) (1 - O(\alpha)) \tag{5}$$

ここに $O(\alpha)$ は α の一次以上の項を集めたものとする。

(4), (5)により,

$$R_i(kT) \cong \frac{P_i^L(T)}{\sum_{i=0}^L P_i^L(T)} R(kT) (1 - O(\alpha)) \tag{6}$$

(6)を(3)に代入し α の二次以上の項を無視することにより,

$$\begin{aligned}
R(kT) &= \left(\sum_{i=0}^L P_i^L(T) \right) R((k-1)T) \\
&+ \alpha \frac{\sum_{j=0}^L j P_j^L(T)}{\sum_{i=0}^L P_i^L(T)} \varphi\left(\frac{s}{N}, L-1\right) \frac{s}{N} \frac{(N\lambda_w T)^{L+1}}{L!} \\
&\cdot \exp\left(-X\left(1 + \frac{s}{N}L\right)\right) R((k-1)T) \\
&- \alpha \left(1 - \frac{Ls}{N+Ls}\right) g(\beta) \frac{P_L^L(T) \sum_{j=0}^L j P_j^L(T)}{\sum_{i=0}^L P_i^L(T)} R((k-1)T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=0}^L P_i^L(T) \right) \left\{ 1 - \alpha \frac{\sum_{j=0}^L j P_j^L(T)}{\left(\sum_{i=0}^L P_i^L(T) \right)^2} \frac{\varphi\left(\frac{s}{N}, L\right)}{1 + \frac{s}{N} L} \right. \\
&\quad \cdot \frac{(N \lambda_W T)^L}{L!} (g(\beta) - \beta) \exp\left(-N \lambda_W T \left(1 + \frac{s}{N} L\right)\right) \left. \right\} \\
&\quad \cdot R((k-1)T) \tag{7}
\end{aligned}$$

これが式 (7.25) である。

付録 7.5 式 (7.43) の導出

式 (7.42) の条件が成立すると $\Omega(X)$ (式 (7.41)) はその $i = L + 1$ の項だけで近似できる。すなわち,

$$\begin{aligned}\Omega(X) &\cong \exp(-X(1+sL)) \frac{1}{s^{L+1}} C_{L+1} (\exp(sX) - 1)^{L+1} \\ &= \exp(-X(1-s)) \frac{\varphi(s, L)}{(L+1)!} \left(\frac{\exp(sX) - 1}{s \exp(sX)} \right)^{L+1} \\ &\cong \exp(-X) \frac{\varphi(s, L)}{(L+1)!} X^{L+1} \quad (\because sX \ll 1)\end{aligned}\quad (1)$$

一方,

$$\int_0^X \Omega(x) dx \cong X \quad (2)$$

(1), (2) を式 (7.40) に代入すれば式 (7.43) が得られる。

付録 7.6 式 (7.46) の導出

延び率 m と無保守の場合の MTTF M_B とを用いて,

$$\begin{aligned}
 M &= m M_B \\
 &= m \frac{\psi(s, L)}{N \lambda_W}, \quad (\text{式 (7.13) による}) \\
 &= m \frac{\psi(s, L)}{X} T \quad (1)
 \end{aligned}$$

ゆえに,

$$k_M = \frac{M}{T} = m \frac{\psi(s, L)}{X} \quad (2)$$

しかるに式 (7.40) より, $\Omega(X) \ll 1$ であれば

$$m \cong \frac{X}{\psi(s, L) \Omega(X)} \quad (3)$$

(2), (3) によって

$$k_M \cong \frac{1}{\Omega(X)} \quad (4)$$

付録 7.7 $\eta(X) < L$ の証明

式 (7.39) ($N=1$ とする) において,

$$\frac{1}{1+sL} < 1 \quad (1)$$

$$g(sX) - sX < 1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^L \frac{1}{s^{1+L}} C_i i (\exp(sX) - 1)^i \\ < L \sum_{i=0}^L \frac{1}{s^{1+L}} C_i (\exp(sX) - 1)^i \end{aligned} \quad (3)$$

であることに注意すると,

$$\eta(X) < \varphi(s, L) \frac{X^L}{L!} \frac{L}{\sum_{i=0}^L \frac{1}{s^{1+L}} C_i (\exp(sX) - 1)^i} \quad (4)$$

一方,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^L \frac{1}{s^{1+L}} C_i (\exp(sX) - 1)^i \\ > \frac{1}{s^{1+L}} C_L (\exp(sX) - 1)^L \\ = \frac{\varphi(s, L)}{L!} \left(\frac{\exp(sX) - 1}{s} \right)^L > \frac{\varphi(s, L)}{L!} X^L \end{aligned} \quad (5)$$

(4), (5) によって,

$$\eta(X) < \varphi(s, L) \frac{X^L}{L!} \frac{L}{\frac{\varphi(s, L)}{L!} X^L} = L$$

すなわち,

$$\eta(X) < L \quad (6)$$

なお, $X \rightarrow \infty$ において,

$$\eta(X) \longrightarrow \begin{cases} L, & \text{for } s=0 \\ 0, & \text{for } s \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

となることを注意しておく。