インパルス応答の測定とそのデータ処理に関する研究

１９７３年
４　月

兼　田　雅　弘

目　　　次

第1章　序論

§1.1　動特性測定とインパルス応答

近年適応制御系に関する研究が種々の方面から進められている。制御系の環境などに大きな変動があり，これにともなって制御対象が時間と共に変動するパラメータを有し，その動特性が刻々変動するようなプロセスの制御を行なうためには，オン・ラインの動特性測定がどうしても必要になってくる。線形系の動特性測定の技術は種々あるが，大別して周波数領域で伝達関数を求める方法と，時間領域で動特性を求める方法（その中でもインパルス応答を求める方法が多い）の２通りがある。

また，オン・ラインの動特性測定には系の動作を大きくみださないで，十分な精度の得られる相関関数を用いる相関法の技術が非常に有力であることが知られている。[1),2),3),27),28)]

これらの中でも特に，不規則信号を探索信号として用いる方法がよく使われている。この場合，最も簡単に得られる結果がインパルス応答である。不規則信号としては白色信号は理論的解析が明解になるが，完全な白色雑音を実現することは不可能であるので，白色雑音的な不規則信号を作る研究も種々行なわれている。[7),18),43)] その中で特に，信号が実際に作り易く，相関関数を簡単に作ることが出来るなどの理由から，Huffman[7)] によって見い出されたM系列符号(maximum length sequence code)がよく用いられている。これを用いた動特性測定（特に，インパルス応答の測定）に関する研究は古田，伊沢ら[15),17),19)]を始めとして数多く発表されている。[16),20)] このM系列信号を用いれば，不規則信号ではないので，探索

信号の統計的ゆらぎによる結果のバラツキがないこと，M系列符号の発生機構を工夫すれば遅延装置すら省略出来て簡単に相関関数が測定出来るなどの特長があり，理論的には非常に有力な方法であるとされている。

しかし，一つには最大周期や，パルス間隔をいかに決定するかという問題がある。また，一方，B. P. Keltman[4]らによるM系列以外の極性相関を利用したインパルス応答の測定に関するものや，藤井，赤沢[21]による平均応答法によるもの，さらには森下[22]による信号波形から適当にサンプルしたデータを単に平均することによって相関関数を得る方法等[23]が発表されている。ところで，M系列などの探索信号を制御系に外部から加えるような方法は，これを実際に使用するとなると，系に余分な信号を入れられてはこまるという現場の技術者の要求が強いので使用対象が限定されているようである。そのような場合には，系の内部で発生する雑音を利用して動特性を測定するような方法が必要になる。

本論文の前半(3章まで)はこのような立場から，系にもともとある雑音を探索信号に使える可能性もある極性相関によるインパルス応答の測定原理とそれを実現するための装置についての研究である。[22,33,35,36]

ところで，インパルス応答がこのようにして実際に得られても，それは関数形として得られるのではなくて，いくつかのサンプル値が数値的に与えられるだけである。したがって，これを直接用いて制御することは困難な場合が多いので何らかの意味で(広い意味でのパターン認識の問題として)，そのデータ処理が必要になる。この方面の研究はいがいに少ないようである。[20]

これには従来，系のパルス伝達関数を仮定して，そのパラメータを線形回帰モデルとして，最小2乗法により求める方法がR. E. Kalman[6]によって提唱されてから，

鈴木ら[24),25),26)]による最小2乗法による線形プロセスの動特性推定に関する研究がいくつか発表されている。また、これらいくつかの方法の比較を行なった茅ら[29),30)]の研究もある。

本論文の後半（4章以後）では、系のパルス伝達関数を2次系で近似し、そのパラメータを推定する新しい方法を提案している。[37)~41)] この方法は最小2乗法ほどは数学的意味は明確ではないがデータ処理がはるかに簡単であるのでオン・ライン動特性測定に適している。さらに、この方法はノイズに対しても強いという利点をもっている。

また、2次系で近似すると無理が生じるような高次系や、遅れの大きい系に対しても適用出来るように系のパルス伝達関数を（2次系）＋（遅れ要素）で近似した場合について考察した。このような方法は化学プロセスなどでよく遭遇する高次の系を近似するのにしばしば使われ、有効であることが知られている。[50)~53)]

§1.2 本論文の梗概

本論文では、適応制御系に適用することを主な目的として、動特性の測定法、および、それにもとづくデータ処理法について議論した。すなわち、線形制御系のオン・ライン動特性測定に関しては特に、極性相関法[4)]によるインパルス応答の測定における誤差に関して検討した。また、そのインパルス応答を実際に測定する目的で2値信号を利用した簡易型相関関数測定装置を設計、試作した。

さらに、それらの方法により得られたインパルス応答をもとにして、系の伝達関数をclosed formで求めるためのデータ処理に関する研究を行なった。

本論文はこれらの研究をまとめたもので、以下にそれら各部分についてあらましを述べる。

第2章では，極性相関法によるインパルス応答の測定原理と，そのときの誤差に関する検討，および，探索信号について述べ，さらに，遅延時間の適当な分割幅，必要なデータの長さ等の測定時のパラメータ決定の目安についても述べている。[32)]

第3章では，極性相関の測定に必要な機器の構成，および，その試作結果について述べている。それには2値信号の可変遅延装置が必要であるがその記憶媒体としては低価格で容量の大きな磁歪遅延線を使った。この試作装置の特長は，インパルス応答の測定に便利なように一本の磁歪遅延線でサンプリングのタイミングを工夫することにより，遅延時間の異なる複数個の遅延出力が同時に得られるように工夫したものである。

また，探索信号用として，ランダム・テレグラフ・ノイズ発生器を試作した。これは，ノイズ源としては Zener Diode から出る物理雑音を用いているが，得られる2値雑音の統計的性質を改善するために，対称形 Flip-Flop を利用している。

そして，これらの装置を用いて，測定対象はアナコンで模擬し，第2章で述べた測定条件を用いて実験を行ないその有効性を確かめた。

第4章では，制御対象のパルス伝達関数を2次系で近似して，そのパラメータをインパルス応答の測定値より推定する方法について述べている。[37)~39)] ここでは，インパルス応答のサンプル値に重畳するノイズに注目したとき，最小2乗法によるパラメータ推定法が，そのパラメータを出来るだけ正確に推定するという意味では必ずしも最適とはいえないことを明らかにした。そして，最小2乗法にかわるものとして新しい推定法を提案し，最小2乗法との推定機構としての良さの比較を行なった。この方法は最小2乗法ほどは数学的意味は明確ではないがデータ処理が簡単で，

しかもノイズに対してもかなり強いという特徴をもっている。

第5章では，4章で提案した方法で使われているパラメータ推定における重み付平均の重みのもつ数学的意味について，少し一般的に論じたものである。[10]

第6章では，実際の系は連続系であるが，測定が離散的であるため，推定によって得られた結果は等価的離散値系のパルス伝達関数であるという Continuous-Discrete System の問題を非常に簡単な一例について論じた。動特性推定問題は本来，単に推定値が真値にどれほど近いかというよりも，それによって得られた情報により，どれほどよりよい制御性能が得られるかという制御の問題まで含めて議論する必要があり，それによる比較を行なった。そして，その結果はパラメータのみによる比較とほぼ一致することを述べている。

第7章では，高次系とか遅れの大きい系にも4章で提案した新しい推定法が適用できるように，系のパルス伝達関数を(2次系)+(遅れ要素)で近似した場合について検討した。

第2章　インパルス応答の測定法

§2.1 序

自動制御系においてはプロセスを制御する場合、そのプロセスの動特性を知っていなければそれを制御することは出来ない。したがって動特性を知るための手続きが必要である。これをアイデンティフィケーション（同定）と呼んでいる。特に最近の適応制御系においてはこのアイデンティフィケーションは、系が動作状態にある場合の動特性を知る必要がある。

これを実現する方法としては相関関数を用いる相関法の技術が非常に有力である。[1),2),3),27),28)]

これらの中でも特に、不規則信号を探索信号として用いる方法がよく用いられている。ところで相関法によれば相関関数を求める操作が必ず必要となるわけであるが、従来のアナログ量で取扱う相関関数の測定では、アナログ量の遅延装置や掛算器の操作が非常に複雑、あるいは困難であり、また、データ処理が膨大なものになる。

そこで最近このアナログ信号を、$\pm a$の2値信号に変換して相関を取る方法、いわゆる"極性相関"の名で呼ばれる方法がいくつか提案されている。[3),5)]
本章もこれに関するものである。

アナログ信号を$\pm a$の2値信号に変換して相関を取れば遅延装置も2値の遅延装置でよいし、掛算器もリレーで行なうことが出来、また、データ処理も非常に簡単であるが、情報がそれだけ少なくなっているので当然誤差が生ずると考えられる。

そこでその誤差がどの程度のものであるか、また、探索信号の選び方、相関の取り方等を考えれば、その誤差をどの程度少なくすることが出来るか等を検討している。

なお、このような2値の不規則信号を用いて、プロセスのインパルス応答を求める方法として、シフト・レジスターを用いたM系列擬似ランダム・ノイズによる方法

が提案されている。[15)~20)]

これは，特に遅延装置を必要としないこと，確定的信号であるため入力の不規則性による推定値のバラツキがないことなどいくつかの長所があるがここでは制御系自身に内在する不規則信号を探索信号として用い，特に探索信号を用いないような場合の適用も考えているので問題が少し異なっている。

§2.2 零交叉波について

任意のランダムプロセス $\xi(t)$ というものを考え，これを *infinite clip* して，あるいはリレーに通して得られるような２値信号 $x(t)$ を零交叉波と呼んでいる。[8)~12)]
この章で考えている零交叉波 $x(t)$ は，定常確率過程であるとしている。この零交叉波の中で特に零点の分布がポアソン分布に従うような信号を *random telegraph noise* と呼んでいる。[14)] この信号で表われる物理的なプロセスとしてはショットノイズがある。[13),14)]

実際のランダム・プロセスは普通厳密にはこの信号では表わされないのであるが，物理的に考えて，それほど妥当性を失わないことと，数学的取扱いが非常に楽であることからしばしば実際のプロセスがこの信号で表わされると仮定しているようである。

以下この *random telegraph noise* [8)~14),44)] について考える。

次式で与えられるような $x(t)$ を考える。

$$\begin{cases} x(t) = a & \text{if } \xi(t) \geq 0 \\ x(t) = -a & \text{if } \xi(t) < 0 \quad , \quad (a>0) \end{cases} \tag{2-1}$$

$x(t)$ の零点はポアソン分布に従うと仮定しているので，その零点間の間隔は指数分布に従い，また単位時間内に落ちる零点の個数を α とすると，時間間隔 $(0,T)$

間に k 個落ちる確率は周知のように次式で与えられる。

$$P(k) = \frac{(\alpha T)^k}{k!}\cdot \exp(-\alpha T) \tag{2-2}$$

次に積 $x(t)\cdot x(t+\tau)$ の平均値、即ち、$x(t)$ の自己相関関数を求めると、

$$E[x(t)\cdot x(t+\tau)] = a^2\cdot \exp(-2\alpha|\tau|) \tag{2-3}$$

又、このパワー・スペクトラムは、

$${}_1S_{xx}(j\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4a^2\alpha}{\omega^2+4\alpha^2} \tag{2-4}$$

ところで random Telegraph noise にはもう一つの型[13]がある。それは時間をある小さな値 h で分割し、そのそれぞれの区間の値を他の区間の値とは独立に $+a, -a$ の値を等確率でランダムに与えたような関数 $x(t)$ がそれである。

このx(t)の自己相関関数と、そのパワー・スペクトラムは次式で与えられる。

$${}_2R_{xx}(\tau) = a^2(1-\tau/h) \qquad (0\le\tau\le h) \tag{2-5}$$

$${}_2S_{xx}(j\omega) = \frac{h}{\pi}\cdot\left\{\frac{a\cdot\sin(\pi f h)}{\pi f\cdot h}\right\}^2 \qquad (\text{ただし、} 2\pi f=\omega) \tag{2-6}$$

ここで(2-4)式と(2-6)式を比較するために $\alpha = 1/h$ とおくと(2-4)式は次のように書き直すことが出来る。

$${}_1S_{xx}(j\omega) = \frac{h}{\pi}\cdot a^2\left\{1-(\pi f h)^2+(\pi f h)^4-(\pi f h)^6+\cdots\right\} \tag{2-4'}$$

又(2-6)式は

$${}_2S_{xx}(j\omega) = \frac{h}{\pi}\cdot a^2\left\{1-\frac{2}{3}(\pi f h)+\frac{23}{45}(\pi f h)^4-\frac{44}{105}(\pi f h)^6+\cdots\right\} \tag{2-6'}$$

これから明らかなように、(2-6)式で与えられる $_2S_{xx}(j\omega)$ は $\alpha = 1/R$ とおくと、(2-4)式で与えられる $_1S_{xx}(j\omega)$ とほぼ同じような性質をもっていることがわかる。

次に零交叉波のもう一つの代表例として、正規性雑音を *infinite clip* したものを考える。$\xi(t)$ を正規性確率過程とし、その正規自己相関関数を $\rho(\tau)$ とする。又 $\xi(t)$ を *infinite clip* したものを $x(t)$ とする。

$$\begin{cases} x(t) = 1 & \text{if } \xi(t) \geq 0 \\ x(t) = -1 & \text{if } \xi(t) < 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}7)$$

この $x(t)$ の自己相関関数は、

$$R(\tau) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin^{-1} \rho(\tau) \qquad (2\text{-}8)$$

この結果は *arcsine low*[45] として知られている。

§2.3 相関法による線形系の動特性の測定について

〔3-1〕正規性雑音を探索信号として用いた場合

図(2-1)において、未知のプロセス $G(S)$ の周波数伝達関数 $G(j\omega)$

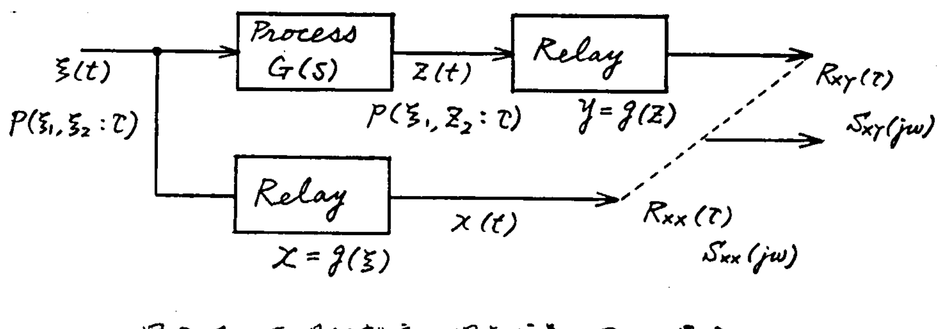


図 2-1. 正規性雑音を探索信号に用いる場合.

を知ろうとする時、相関法による場合は次のような手順をとる。先ず探索信号 $\xi(t)$ の

自己相関関数 $R_{\xi\xi}(\tau)$, 及び $\xi(t)$ とプロセス $G(s)$ の出力 $z(t)$ との相互相関関数 $R_{\xi z}(\tau)$ を求め, 次にそれらのフーリエ変換をとって, パワー・スペクトラム $S_{\xi\xi}(j\omega)$, $S_{\xi z}(j\omega)$ を作る。この $S_{\xi\xi}(j\omega)$ と $S_{\xi z}(j\omega)$ より, 次のよく知られた関係式から $G(j\omega)$ を得ることが出来る。

$$G(j\omega) = S_{\xi z}(j\omega) / S_{\xi\xi}(j\omega) \qquad (2-9)$$

この方法では，理論的には推定誤差は出ないけれども, 相関関数 $R_{\xi\xi}(\tau)$, $R_{\xi z}(\tau)$ を実際に求めることが非常にやっかいな仕事であること, 又理想掛算器を必要とすること等より, 実用的な方法ではない。そこで次のような方法を考える。先ず $\xi(t)$ と $z(t)$ をそれぞれリレーに通して 2値信号の零交叉波 $x(t)$, $y(t)$ を得る。そこでこの $x(t)$, $y(t)$ を用いて相関関数 $R_{xx}(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ を求め, それらをフーリエ変換して $S_{xx}(j\omega)$, $S_{xy}(j\omega)$ を作る。次にこの $S_{xx}(j\omega)$, $S_{xy}(j\omega)$ を用いて (2-9)式にならって, 次式を得る。

$$\hat{G}(j\omega) = S_{xy}(j\omega) / S_{xx}(j\omega) \qquad (2-10)$$

こうして得られた $\hat{G}(j\omega)$ は $G(j\omega)$ と同じような性質をもっていることはわかるので, この $\hat{G}(j\omega)$ でもって, $G(j\omega)$ を推定しようという方法である。

（極性相関の名で呼ばれる相関法がいくつか提案されているが[15)~17), 19), 20), 23)], このように $\xi(t)$ も $z(t)$ も両方とも2値信号に変換してしまう方法は提案されていない。）しかし $\hat{G}(j\omega)$ は非線形要素のリレーを通して得られたものであるから, 厳密には $G(j\omega)$ とは少し異なるものであろうと思われる。そこで以下に $G(j\omega)$ を $\hat{G}(j\omega)$ で推定した場合の誤差について検討している。

今, 探索信号 $\xi(t)$ を平均値0の定常正規性確率過程の一標本関数であるとすると, $\xi(t)$ の確率密度関数は次のように表わされる。

$$P(\xi_1, \xi_2 : \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2\sqrt{1-\rho_1^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2-2\rho_1(\tau)\cdot\xi_1\cdot\xi_2}{2\sigma_1^2(1-\rho_1^2)}\right\} \tag{2-11}$$

次に伝達関数 $G(j\omega)$ が線形であるので、$z(t)$ も又平均値 0 の定常な正規性確率過程の一標本関数になる。そこで $\xi(t)$ と $z(t)$ との同時確率密度関数は次のように表わされる。

$$P(\xi_1, z_2 : \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\sqrt{1-\rho_2^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho_2\frac{\xi_1\cdot z_2}{\sigma_1\cdot\sigma_2} + \frac{z_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} \tag{2-12}$$

但し、σ_2^2 は $z(t)$ の分散、$\rho_2(\tau)$ は $\xi(t)$ と $z(t)$ の正規相互相関関数であって、これらは $\xi(t)$ の σ_1, ρ_1 と $G(j\omega)$ が与えられればすぐに求まるものである。この (2-11), (2-12) 式を用い非線形要素のフーリエ変換法[14),44)]により、$R_{xx}(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ を求める。

$$R_{xx}(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1\cdot x_2\cdot P(x_1, x_2 : \tau)\, dx_1\cdot dx_2 \tag{2-13}$$

ところで、$x_1 = x(t) = g(\xi_1)$, $x_2 = x(t+\tau) = g(\xi_2)$ であるから、

$$R_{xx}(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1)\cdot g(\xi_2)\cdot P(\xi_1, \xi_2 : \tau)\, d\xi_1\cdot d\xi_2$$

$g(\xi)$ のフーリエ変換をとって

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{(2\pi j)^2}\cdot\int_C f(w_1)\, dw_1 \cdot \int_C f(w_2)\cdot dw_2 \times \iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi_1, \xi_2 : \tau)\cdot\exp(w_1\xi_1 + w_2\xi_2)\, d\xi_1\cdot d\xi_2 \tag{2-14}$$

このように変換すると (2-14) 式の右辺はすべて求まるものであるから、計算出来て、

$$\therefore\ R_{xx}(\tau) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k:\text{odd})}}^{\infty} \frac{\rho_1^k(\tau)}{k!}\cdot\frac{2^{k+2}\cdot\Gamma^2(k/2)}{\pi^2} \tag{2-15}$$

同様にして、

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k:\,odd)}}^{\infty} \frac{\rho_2^k(\tau)}{k!} \cdot \frac{2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2)}{\pi^2} \qquad (2\text{-}16)$$

これらをそれぞれフーリエ変換して $S_{xx}(j\omega)$, $S_{xy}(j\omega)$ を求めると、

$$S_{xx}(j\omega) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k:\,odd)}}^{\infty} \frac{{}_kS_1(j\omega)}{k!} \cdot \frac{2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2)}{\pi^2} \qquad (2\text{-}17)$$

$$S_{xy}(j\omega) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k:\,odd)}}^{\infty} \frac{{}_kS_2(j\omega)}{k!} \cdot \frac{2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2)}{\pi^2} \qquad (2\text{-}18)$$

但し、

$${}_kS_i(j\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_i^k \cdot \exp(-j\omega\tau)\,d\tau \quad (i=1,2)$$

(2-10), (2-17), (2-18) 式より $\hat{G}(j\omega)$ を求めると、

$$\hat{G}(j\omega) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k:\,odd)}}^{\infty} \frac{{}_kS_2(j\omega)}{k!} \cdot 2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2) \Big/ \sum_{\substack{k=1 \\ (k:\,odd)}}^{\infty} \frac{{}_kS_1(j\omega)}{k!} \cdot 2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2) \qquad (2\text{-}19)$$

上式の分母,分子の第1項だけを考えたものを $\hat{G}_1(j\omega)$ とすると、

$$\hat{G}_1(j\omega) = {}_kS_2(j\omega) \big/ {}_kS_1(j\omega) = (\sigma_1/\sigma_2) \cdot G(j\omega) = K \cdot G(j\omega) \qquad (2\text{-}20)$$

この式より $\hat{G}_1(j\omega)$ は $G(j\omega)$ の定数 (σ_1/σ_2) 倍になっていることがわかる。したがって分母,分子の第2項以後が推定誤差の原因となる。

分母.分子の第k項目の係数 β_k は

$$\beta_k = 2\pi\left\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (k-2)\right\}^2 \big/ k! \qquad (\text{for } k \geq 3)\ (k:\,odd)$$

$$\beta_1 = 2\pi \qquad (2\text{-}21)$$

さらに又, ${}_kS_2(j\omega)$, ${}_kS_2(j\omega)$ はKの増加とともに減少していくので $\rho_1(\tau)$ をうまく

選べば即ち、$\xi(t)$ を適当に選べば $\hat{G}(j\omega)$ で $G(j\omega)$ を近似的に推定することが出来る。

$\rho_1(\tau)$ の形が $\tau=0$ の点で δ 関数に近い程推定誤差は小さいようである。δ 関数の場合は $\xi(t)$ が白色雑音の場合になる。従って $\xi(t)$ としては出来るだけ相関の少ないものを選ぶ必要がある。

〔3-2〕探索信号として random telegraph noise を用いる場合.

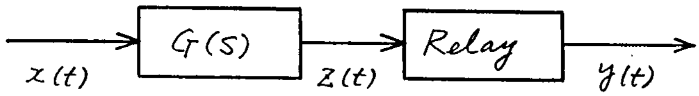


図 2-2. Relay の影響

先ず最初に図2-2. について考える。

$G(S)$ が線形であれば次の良く知られた関係式が成り立つ。

$$S_{zz}(j\omega) = |G(j\omega)|^2 \cdot S_{xx}(j\omega) = G(j\omega)\cdot G^*(j\omega)\cdot S_{xx}(j\omega) \qquad (2\text{-}22)$$

さて、$x(t)$ が定常正規性確率過程の一標本関数であって、$G(j\omega)$ が線形であれば $z(t)$ も又定常正規性確率過程の一標本関数になるので、平均値が 0 であると仮定すると、$z(t)$ の確率密度関数は次式で与えられる。

$$p(z_1, z_2 : \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}}\cdot \exp\left\{-\frac{z_1^2+z_2^2-2\rho(\tau)\cdot z_1\cdot z_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\} \qquad (2\text{-}23)$$

次に $z(t)$ と $y(t)$ の相互相関関数を求めると.

$$R_{zy}(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} z_1\cdot y_2\cdot p(z_1, z_2 : \tau)\, dz_1\cdot dy_2$$

これを、$y_2 = y(t+\tau) = \mathrm{sgn}(z_2)$ であることを考えて変形し、さらに $p(z_1, z_2 : \tau)$

として，(2-23)式を代入して計算すると

$$R_{zy}(\tau) = \frac{2\sigma\rho(\tau)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot R_{zz}(\tau) \qquad (2-24)$$

これをフーリエ変換して

$$S_{zy}(j\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot S_{zz}(j\omega) \qquad (2-25)$$

次に $x(t)$ と $y(t)$ との相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ を求める。これは直接求めることは困難なので，$R_{zy}(\tau)$ を仲介として求める。

$$R_{zy}(\tau) = E[z(t)\cdot y(t+\tau)]$$
$$= E\left[\int_0^\infty h(\lambda)\cdot x(t-\lambda)\,d\lambda\cdot y(t+\tau)\right]$$
$$= \int_0^\infty h(\lambda)\cdot R_{xy}(\lambda+\tau)\,d\lambda$$

上式をフーリエ変換して

$$S_{zy}(j\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j\omega\tau)\,d\tau\cdot\int_0^\infty h(\lambda)\cdot R_{xy}(\lambda+\tau)\,d\lambda$$
$$= \pi\cdot G^*(j\omega)\cdot S_{xy}(j\omega) \qquad (2-26)$$

(2-22)，(2-25)，(2-26)式より，

$$G(j\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}\cdot\pi\cdot\sigma}{2}\cdot\left\{S_{xy}(j\omega)\middle/S_{xx}(j\omega)\right\} \qquad (2-27)$$

次に図2-3.において，$x(t)$ が random telegraph noise の場合を考える。$G(j\omega)$ が低域沪波特性を持つ線形系の場合 $x(t)$ の平均反転時間 $1/\alpha$ が系の等価時定数 T_a に比べて非常に小さい場合は，中心極限定理により系の出力 $z(t)$ は正規性推率過程になることがわかっている。

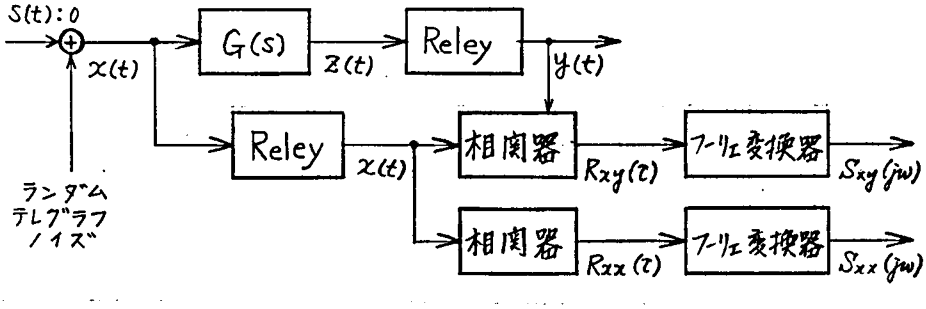


図2-3．random telegraph noise を探索信号に用いる場合

ところで (2-27)式は，$z(t)$が正規性確率過程であって，$G(j\omega)$が線形でありさえすれば成立する式であるから，図2-3．の場合にも又成立する。従って

$$\hat{G}(j\omega) = S_{xy}(j\omega) / S_{xx}(j\omega) \qquad (2-28)$$

で得られる $\hat{G}(j\omega)$ でもって $G(j\omega)$ を推定する場合，パワー・スペクトラムに関するかぎり，ゲイン以外のすべての情報は失なわれないことがわかる。

このことから定常ゲインは他の何らかの方法で測定すれば $\hat{G}(j\omega)$ でもって，$G(j\omega)$ を完全に知ることが出来る。但しこれは $G(j\omega)$ が低域沪波特性をもち，$x(t)$ の平均反転時間 $1/\alpha$ が系の等価時定数 T_a に比べ非常に小さい場合（少なくとも10分の1以下）に限る。

§2.4 測定時のパラメータ決定

実際に相関関数を次のような式に従って求める場合，データの長さTや，最大遅延時間τ_mは無限大には出来ず，必ずある値で打切ることになるがその場合，打切りによる誤差をある値以下にするためには，どのくらいの値に選べばよいかということ，又遅延時間

の分割幅$\Delta\tau$をどの程度まで小さくすれば十分であるか等の目安について検討している。

〔4−1〕 遅延時間の分割幅$\Delta\tau$について

普通$\Delta\tau$の大きさの目安はサンプリング定理によっている。即ち信号$x(t)$に含まれる最大周波数をf c/s とすると，$\Delta\tau = 1/2f$ に選べばよいことが知られている。しかし、実際にはこのfの値はわからない場合が多い。そこで次のような方法を考える。

一般に$G(j\omega)$は低域沪波特性を持つものを考えているので等価的に一次系と考え，$G(j\omega)=1/(1+S\cdot T_a)$ と仮定する．（図 2−4.参照）。又，$x(t)$は第2節で取り扱った random Telegraph noise を考えると．$G(j\omega)$の出力$y(t)$の正規パワー．スペクトラムは

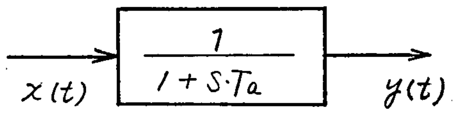


図 2−4． 一次系

$$S_{yy}(j\omega) = \frac{4\alpha\cdot(1+2\alpha T_a)}{\pi\cdot(1+\omega^2 T_a^2)(4\alpha^2+\omega^2)} \qquad (2-29)$$

但し$1/\alpha$は random Telegraph noise の平均反転時間，図 2−5. において，ω_0より大きな角周波数成分の$S_{yy}(j\omega)$に及ぼす影響を検討するために次のような$\delta(\omega_0)$を考える。

$$\delta(\omega_0) = \int_0^\infty S_{yy}(j\omega)\,d\omega - \int_0^{\omega_0} S_{yy}(j\omega)\,d\omega$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1-2\alpha T_a}\cdot$$

$$\times\left\{-2\alpha T_a\cdot\tan^{-1}\omega_0 T_a + \tan^{-1}\omega_0/2\alpha\right\} \qquad (2-30)$$

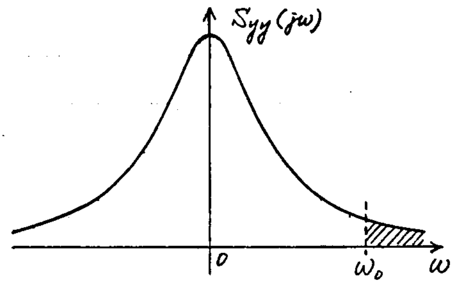


図 2−5. ω_0以上の角周波数成分の影響

この式は$\alpha\cdot T_a$の関数になっているが実際的な場合を考えて，

○ $\alpha \cdot T_a = 20$ とすると，（$1/\alpha$ が T_a の $1/10$ 以下なら $x(t)$ が $G(j\omega)$ を通った出力 $z(t)$ が十分正規性確率過程と見なせる）$\delta(\omega_0) \leqq 0.01$ とするためには，

$$\Delta\tau = 1/2f_0 = \pi/\omega_0 \leqq 1/8 \cdot T_a \tag{2-31}$$

○ $\alpha \cdot T_a = 10$ の場合，同じく $\delta(\omega_0) \leqq 0.01$ に対して

$$\Delta\tau \leqq 1/5.5 \cdot T_a \tag{2-31)'$$

○ $\alpha \cdot T_a = \infty$ の場合，即ち $x(t)$ が白色雑音の場合，同じく，$\delta(\omega_0) \leqq 0.01$ に対して，

$$\Delta\tau \leqq 1/20 \cdot T_a \tag{2-31)''$$

従って実際には，$\Delta\tau = \frac{1}{10} \cdot T_a$ ぐらいに選んであげればよい。

[4-2] 最大遅延時間 τ_m について

図2-4. において，$x(t)$, $y(t)$ の相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ は

$$R_{xy}(\tau) = \frac{4\alpha T_a}{4\alpha^2 T_a^2 - 1} \cdot exp(-\tau/T_a) - \frac{1}{2\alpha T_a - 1} \cdot exp(-2\alpha\tau) \qquad (\tau \geqq 0)$$

$$= \frac{1}{2\alpha T_a + 1} \cdot exp(2\alpha\tau) \qquad (\tau < 0)$$

(2-32)

[4-1] における $\Delta\tau$ の目安を求めたのと同じように，図2-6. において $|\tau_m|$ より大きい $|\tau|$ の $R_{xy}(\tau)$ におよぼす影響を検討するため次の $\varepsilon(\tau_m)$ を考える。

$$\varepsilon(\tau_m) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)d\tau - \int_{-\tau_m}^{\tau_m} R_{xy}(\tau)d\tau \right\} \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)d\tau \tag{2-33}$$

(2-32) 式を代入して

$$\varepsilon(\tau_m) = \frac{4\alpha T_a \{T_a \cdot exp(-\tau_m/T_a) - (1/2\alpha) \cdot exp(-2\alpha\tau_m)\}}{4\alpha T_a^2 - 1/\alpha} \tag{2-34}$$

$\alpha \cdot T_a \gg 1$ を考えると

$$\varepsilon(\tau_m) = \exp(-\tau_m / T_a) \qquad (2\text{-}34)'$$

$\varepsilon(\tau_m) \leqq 0.01$ にするためには

$$\tau_m \geqq 5 \cdot T_a \qquad (2\text{-}35)$$

$\varepsilon(\tau_m) \leqq 0.001$ にするためには

$$\tau_m \geqq 7 \cdot T_a \qquad (2\text{-}35)'$$

でよいことがわかる。

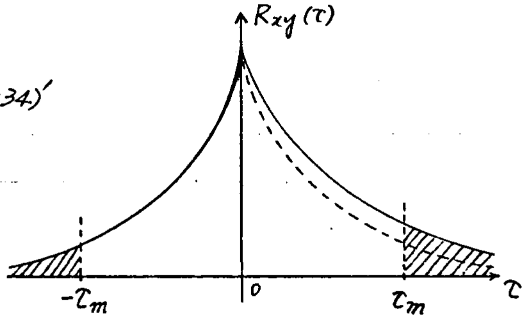


図2-6. τ_m 以上の成分の影響

[4-3] データの長さTについて

図2-2. においてデータの長さT[31]を決定する場合、$R_{xy}(\tau)$について考えなければならないのであるが、[3-2]節で検討したこと即ち(2-24)式、(2-26)式等から、$R_{xy}(\tau)$の代りに$R_{zz}(\tau)$について考えてもよいことが分るので以下$R_{zz}(\tau)$について考える。

今 $x(t)$が random Telegraph noise であって $G(j\omega)$が低域ろ波特性をもっていて、$z(t)$が正規性確率過程の一標本関数であると考えられる場合について以下検討する。

次の式で表わされる $\Phi_{zz}(\tau)$は集合$\{z(t)\}$から取り出される一標本関数$z(t)$に依存するので $\Phi_{zz}(\tau)$も又確率過程である。

$$\Phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T z(t)\cdot z(t+\tau)\,dt \qquad (2\text{-}36)$$

$$E[\Phi_{zz}(\tau)] = \frac{1}{T}\int_0^T E[z(t)\cdot z(t+\tau)]\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T R_{zz}(\tau)\,dt = R_{zz}(\tau) \qquad (2\text{-}37)$$

正規化した $\Phi_{zz}(\tau)$ の $R_{zz}(\tau)$ のまわりの分散を考える。

$$\varepsilon^2(\tau) = E\left[\left\{\frac{\Phi_{zz}(\tau)}{R_{zz}(0)} - \frac{R_{zz}(\tau)}{R_{zz}(0)}\right\}^2\right]$$

$z(t)$ が正規性確率過程であることを考えると，上式は次のように表わされる。

$$\varepsilon^2(\tau) = \frac{2}{R_{zz}^2(0)\cdot T}\int_0^T (1-t/T)\cdot\left[R_{zz}^2(t) + R_{zz}(t+\tau)\cdot R_{zz}(-t+\tau)\right]dt \qquad (2\text{-}38)$$

さらに $R_{zz}(\tau)$ はこの場合次のように表わせるので，

$$R_{zz}(\tau) = \frac{a^2}{4\alpha^2 T_a^2 - 1}\cdot\left\{2\alpha T_a\cdot \exp\left(-|\tau|/T_a\right) - \exp\left(-2\alpha|\tau|\right)\right\} \qquad (2\text{-}39)$$

(2-39)式を(2-38)式に代入して，$T \gg T_a$，$T > \tau$，$2\alpha T_a \gg 1$ と考え整理すると，

$$\varepsilon^2(\tau) = \frac{1}{(2\alpha T_a+1)^2}\cdot\left(\frac{4\alpha^3 T_a^3}{T} - \frac{8\alpha T_a^2}{T(2\alpha T_a+1)} + \frac{1}{2\alpha T}\right)$$

$$- \frac{4\alpha T_a^2}{T(2\alpha T_a+1)^2(2\alpha T_a-1)}\cdot\left\{\exp(-2\tau/T_a) + \exp(-4\alpha\tau)\right\} \qquad (2\text{-}40)$$

いま，$\alpha T_a = 10$，$\exp(-4\alpha\tau) \ll \exp(-2\tau/T_a)$ と置くと，

$$\varepsilon^2(\tau) = \frac{0.90\,T_a}{T} - \frac{T_a}{200\,T}\cdot\exp(-2\tau/T_a) \qquad (2\text{-}40)'$$

$\varepsilon^2(\tau)$ の最大値を $\varepsilon^2_{max}(\tau)$ とおくと，

$\varepsilon^2_{max}(\tau) \leqq 0.01$ にするためには，

$$T \geqq 90\cdot T_a \qquad (2\text{-}41)$$

又, $\alpha T_a = 20$ とおいた場合は同じく $\varepsilon^2_{max}(\tau) \leq 0.01$ に対して,

$$T \geq 95 \cdot T_a \qquad (2-41)'$$

なお, $x(t)$ が白色雑音の場合については, 椹木. 他[31] がデータ長の T の目安として同じ評価に対して求めており, $T \geq 200\,T_a$ である。

第3章　相関関数測定のための装置

§3-1　序

適応制御系においては、系の動特性をオンラインで測定する必要がある。それには、相関法が有効である。[28] 相関関数を求める方法は種々提案されているが、遅延要素を用いる方法は最も直接的である。アナログ遅延要素としては、磁気テープ、コンデンサ、磁心などが考えられるが、いずれにしても、記憶すべき情報量が多いので高価なものになる。

ところで、相関関数を求めるには、一方の信号を2値信号に変換してもあまり大きな誤差は出ないことが知られており、また特に、Gauss過程では一方を2値信号にしても正しい相関関数の得られることが分かっている。[33,43,44]

しかるに、2値信号であれば相関関数の計算に必要な遅延装置は、アナログ信号に対するそれに比べて非常に簡単かつ、信頼性の高いものが作れるはずである。本章では、このような観点から2値信号の遅延装置を試作し、また、探索信号用のランダム・ノイズ発生器（coin tossing type の random telegraph noise を発生する装置[43]）を試作して、Analog Computer と組合わせていくつかの相関関数の測定を行なった。[36]

§3-2　2値信号の多出力可変遅延装置

3-2-1　2値信号による相関関数の測定原理

2変数 x, y の共分散は図3-1.(a)で測定できるが、これを同図(b)のように、

一方の信号を2値信号に変換した場合，結果がどうなるかを一般的な場合について議論するのは困難であるので，x, y が2次元の

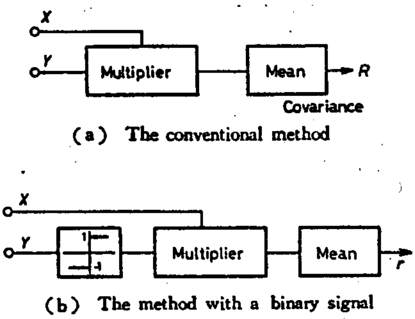


図 3-1. 2変数 x, y の共分散の測定

Gauss 分布に従がう場合について考える.[33]

まず記号を次のように定める.

$$
\begin{cases}
\sigma_x^2,\ \sigma_y^2 : & \text{それぞれ } x, y \text{ の分散} \\
R : & x, y \text{ の共分散} \\
\rho : & x, y \text{ の相関係数} \\
f(x,y) : & x, y \text{ の同時確率密度関数}
\end{cases}
$$

図 3-1. (b) の出力 r は,

$$
r = \int_0^{\infty} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x \cdot f(x,y) - \int_{-\infty}^{0} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x \cdot f(x,y) \tag{3-1}
$$

で与えられるが，$f(x, y)$が対称であると仮定すると，

$$\Gamma = 2\cdot\int_0^{\infty} dy\cdot\int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot x\cdot f(x, y) \tag{3-2}$$

となる。いま，x, yが2次元のGauss分布に従うと仮定したので，

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\cdot\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(x/\sigma_x)^2 - 2\rho xy/(\sigma_x\cdot\sigma_y) + (y/\sigma_y)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \tag{3-3}$$

であるから，(3-2)式に代入すると，

$$\Gamma = \frac{2}{2\pi\sigma_x\cdot\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\int_0^{\infty} dy\cdot\exp(-y^2/2\sigma_y^2)$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot x\cdot\exp\left\{-\frac{(x/\sigma_x - \rho y/\sigma_y)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \tag{3-4}$$

積分を実行して，

$$\Gamma = \sqrt{2/\pi}\cdot\sigma_x\cdot\rho \quad = \sqrt{2/\pi}\cdot R/\sigma_y \tag{3-4$'$}$$

となる。すなわち，σ_x, σ_yが一定であれば，Γは相関係数ρ，したがって，共分散Rに比例することが分かる。x, yとして，確率過程$x(t), y(t-\tau)$を考えると，両者の共分散Rが相関関数$\phi_{xy}(\tau)$を与えるので，

$$\phi_{xy}(\tau) = \sqrt{\pi/2}\cdot\sigma_y\cdot r \qquad (3\text{-}5)$$

以上の議論から，x, y が Gauss 過程で，Ergode 性を満していると仮定すると，図 3-2. のようにして相関関数が測定できることが分かる。したがって，このような場合には，相関関数を求めるための遅延装置としては，2値信号のみを遅延させ得るものであればよいといえる。

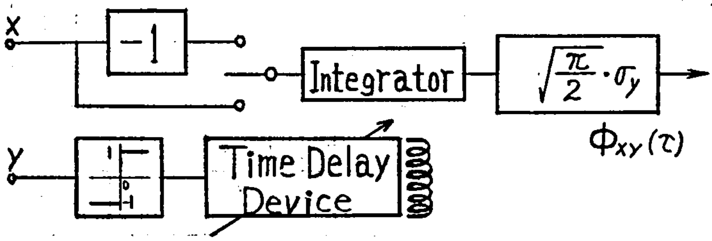


図 3-2. 2値信号を用いた相互相関関数の測定

ただし，この方法が有効であるのは，平均値0の Gauss 過程の場合であり Gauss 過程でなければ，平均値0で対称な分布をもっていても，必ずしも (3-5)式は成立しない。

3-2-2 2値信号の可変遅延装置の構成[33),35),36),46),47)]

この装置の遅延要素としては，比較的安価に大きな記憶容量の得られる磁歪遅延線を用いた。ところで，必要な遅延時間に比して，遅延線自体の遅延時間が非常に短かいので，入力信号を何回か繰返してこの遅延線に通すことにより，所定の遅延時間 τ を得

る方式をとっている。したがって、遅延時間τの設定は、この遅延線に何回通したものを出力として取り出すかという回数の指定、すなわち、書込み、読出しのTimingの制御により行なうことができる。以下これについて説明する。

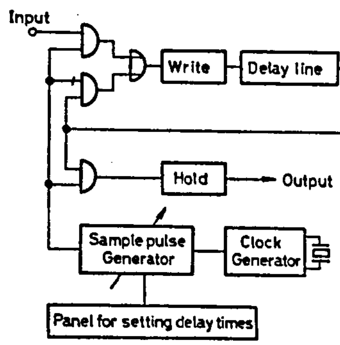


図3−3. 2値信号の可変遅延装置の構成図

本装置の基本的構成を図3−3.に示す。入力記号は周期T(m クロック)でサンプルされ、遅延線に書込まれる。サンプリングパルスが印加されない時は、遅延線に書込まれた情報が読出回路を通して読出され、直ちに書込み回路に送られて、再び遅延線に書込まれる。サンプリングパルスが加わった時には、新しい情報が書込まれると同時に、読出回路の出力は出力サンプリング回路を通して、遅延出力として取出される。この出力信号は最初遅延線に書込まれてから何回か遅延線を通過して、ちょうど所定の時間τ経過したものでなければならない。

そのためには、以下にあげる条件が満足されなければならない。

1) 所定の遅延時間τだけ経過した情報が正しく出力として取出されること。

2) 新しい情報を書込む位置にある情報は不要のものであること、すなわち、所定の

遅延時間 τ 以上経過したものであること。

3) 遅延線の記憶容量を最大限有効に使用すること。

4) 遅延時間 τ をパネル面上で任意に指定できること。(ただし、遅延時間 τ の取り得る値は適当に量子化されていてよい。)

以下これを実現する方法を述べる。まず、記号を次のように定める。

S : クロックパルスの繰り返し周期 (μ sec)

d : 磁歪遅延線の遅延時間 (μ sec)

n : クロックパルス S で働かせた場合の遅延線の記憶容量 (bit) ($d = n \cdot S$)

T : サンプリングパルスの繰返し周期 (μ sec)

m : S を単位として測ったサンプリングパルスの間隔 ($T = m \cdot S$)

最初に、n と m とは互いに素でなければならないことを説明する。入力信号がサンプルされて遅延線に書込まれ、それが取出されるまでの時間は一般に、$k \cdot n \cdot S$ (k: 整数) でなければならない。この間に入力をサンプルする回数は $[k \cdot n \cdot S / T] = [k \cdot n / m]$ 回であるから、必要な記憶容量 l (bit) は、

$$l = [\, k \cdot n / m \,] \qquad (3-6)$$

ただし、[ ] はガウス記号を表わす。

ところで、遅延線の記憶容量は n (bit) であるから、

$l \leq n$, したがって、

$$k \leq m \qquad (3-7)$$

が成立しなければ、サンプルされた情報を全部記憶出来なくなる。したがって、書込まれた

信号は(3-7)式を満足するkの範囲で出力として取出す必要がある。また，遅延線の記憶容量を最大限有効に利用する上からは，$k=m$とするのがよい。これは書込まれてから，$m \cdot n \cdot s$ 後に取出すことになる。ところで，ある情報が遅延線をm回まわる途中で，その位置に新たなサンプル入力が書込まれると，もとの情報は消されてしまうので，これを防止するためには，$k \cdot n \cdot s \neq j \cdot \tau$，すなわち，

$$k \cdot n \neq j \cdot m \tag{3-8}$$

（ただし，j：整数，$k=1, 2, \cdots, m-1$）

でなければならない。これはnとmとが互いに素であることを意味する。

ところで，$k=m$とすると，遅延時間τは，

$$\tau = m \cdot n \cdot s = m \cdot d \tag{3-9}$$

で与えられる。クロックの周期sは遅延線の分解能の許す範囲内で，記憶容量nをできるだけ大きくするようにある値に固定するのが便利であり，かつ遅延線の遅延時間dも一定であるから，τを可変にするためにはmを可変にする必要がある。

それで，1) nとmとは互いに素，2) mは可変，という二つの条件を満足させるために，まずnを素数に選ぶと，

$$m = i \cdot n \quad (i：整数) \tag{3-10}$$

の場合だけ避ければ，mを任意に選んでもmとnとは互いに素となる。

(3-10)式が成立する場合は正常な動作が行なわれないので，遅延時間設定パネルを工夫して，(3-10)式の関係にあるm，すなわち，τを指定できないようにしている。

実際の装置では, $d=500\,\mu\,sec$ ($\pm 2\,\mu\,sec$), 分解能約 $1\,\mu\,sec$ の磁歪遅延線を用いたので, $s \fallingdotseq 1\,\mu\,sec$ とすると, $n \fallingdotseq 500$ (bit) となる。その付近で素数をさがすと, 499, 503 がある。いま, m (したがって, τ) を順次大きくした場合, (3.2.10)式の不都合が最初に起こるのは, それぞれ, $m=499$, $m=503$ においてである。したがって, $n=503$ にとれば, $m=500$ ($\tau=250\,m\,sec$) までは大丈夫である。$\tau=250\,m\,sec$ 以上は, τ のきざみ巾を $1\,m\,sec$ の整数倍を単位にして順次大きくとれば (3-10)式の不都合はさけられる。

実際には人間との interface を考えて, 3 桁の有効数字(偶数のみ)と倍率(10進)をパネル面上で設定できるようにしている。

3-2-3 遅延時間の相異なる複数個の出力を同時に取出す工夫

3-2-2 で述べた装置では, 一つの遅延出力しか得られないので, 相関関数を測定する場合, 1回の測定で1点の値しか求めることが出来ない。そのため, 相関関数全体を測定するには, かなりの測定回数が必要となる。そこでこの装置の出力のサンプリングパルスの位相を適当に選ぶことにより, 遅延時間の異なる複数個の出力が同時に得られるようにした。以下その方法について述べる。

出力としては, 遅延時間が $k\cdot\tau/g$ ($k=1,2,\cdots,g$) の g 個の出力を得る場合を考える。ただし, g は磁歪遅延線の記憶容量 n (bit) より大きくはない整数で, 入力のサンプリングパルスの間隔 m の約数でなければならない。

まず初めに, 遅延線の出力を $m_0 = m/g$ (m: クロック s を単位として

測った入力サンプリングパルスの間隔，m_0：整数）クロックの間隔で，入力サンプリングパルスに同期してサンプルすれば，τ/g（τ：遅延時間設定パネル面上で指定される遅延時間）の整数倍の遅延信号が得られることを示す。

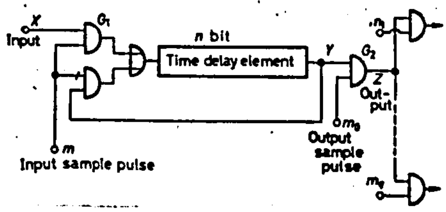


図3−4. タップ出力可変遅延装置の基本構成図

図3−4.を参照し，ゲートG_1でサンプルされた入力信号が遅延線に書込まれてから，Y点に現われるのは，nクロック毎である。一方，ゲートG_2は，m_0クロック毎に開く。ところで，nとmとは互いに素に選んであるので，nとm_0も互いに素になる。したがって，出力Zには，$n\cdot m_0$クロック毎にしか信号は出ない。すなわち，そのサンプル信号の$n\cdot m_0\cdot s$，$2n\cdot m_0\cdot s$，----，$g\cdot n\cdot m_0\cdot s$だけ遅延した信号が順次出力Zに現われる。そして，$g\cdot n\cdot m_0$クロック（時間にすれば，$n\cdot m\cdot s=\tau$）遅延した信号が取出されると同時に，新しい入力がその場所に書込まれる。以下同じことが繰返される。

それで，入力信号の$k\cdot\tau/g$（$k=1,2,\cdots,g$）だけ遅延した信号を得るためには，Zに現われる信号を適当なゲートを設けてふるい分ければよい。

いま、そのためのゲートパルスとしては、入力のサンプリングパルスと同じパルス間隔で、その位相が、$i\cdot m_0/q$ $(i=1,2,\cdots,q)$ クロックだけ異なるパルス(このパルスを簡単のためパルス m_i $(i=1,2,\cdots,q)$ とよぶ。)を用いればよい。これを図3-5.によって説明しよう。パルス m_i $(i=1,2,\cdots,q)$ に

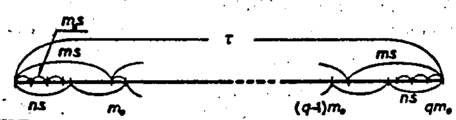


図3-5. 遅延時間τの分割

よってゲートされた出力が $k\cdot\tau/q$ $(k=1,2,\cdots,q)$ の遅延時間をもつ出力であるためには、τを $m_0\cdot s$ で分割していった場合の $(q\cdot j+i)$ 番目の点と、$n\cdot s$ で分割していった場合の $k\cdot m_0$ 番目の点とが一致しなければならない。それで次の関係式を得る。

$$(q\cdot j+i)\cdot m_0\cdot s = k\cdot m_0\cdot n\cdot s \qquad (3-11)$$

(ただし、j:整数) したがって、

$$q\cdot j+i = k\cdot n \qquad (3-12)$$

ところで、$n=n_0\cdot q+n_1$ (n_0:整数, n_1:q未満の正の整数) として、(3-12)式に代入し、整理すると、

$$g(j - n_0 \cdot k) + i = n_1 \cdot k \tag{3-13}$$

ここで、i, k は g 以下の正整数であるので、

$$i \equiv k \cdot n_1 \pmod{g} \tag{3-14}$$

と同値である。

(3-14)式において、n_1 と g とは互いに素であるから、i と k とは1対1に対応する。したがって、この式中には m, m_0 がないので、サンプリングパルスの間隔、即ち、遅延時間 τ の値に無関係に、$k \cdot \tau / g$ の遅延時間を持つ出力は、各々それに対応するゲートから得られることが分かる。

g の値は n 以下であれば原理的にはいくらでもよいが、実際の装置製作上の便利さと、入力のサンプリングパルスの間隔 m が g の倍数でなければならないこと、すなわち、指定しうる遅延時間の制約などから、本装置では、$g = 10$ に選んで、10個の遅延時間の異なる出力が同時に取出せるようにしてある。

$g = 10$, $n = 503$ の場合の k と i との関係を表3-1に示す。

表3-1. k（遅延時間 $k\tau/10$ に対応する）と出力サンプルゲートの番号 i（m_i の位相は入力サンプルパルスと $i\tau/10$ だけ異なる）との関係

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	3	6	9	2	5	8	1	4	7	10

（遅延線の記憶容量：$n = 503$）

§3.3. ランダム ノイズ発生器[43)]

このランダムノイズの発生原理は図3-6に示すように、ノイズ源としてはノイズの大きなZener Diodeを用い、この物理的に発生した雑音電圧を増幅し、帯域フィルターに通して増幅したものをシュミット回路に通して矩形波に直し、これでFlip-Flopをたたいて2つの値を等確率でとるような2値ランダム信号をつくり、これを、その平均反転時間より十分長いサンプリング周期のパルスでサンプル・ホールドして coin tossing type の random telegraph noise を発生させている。

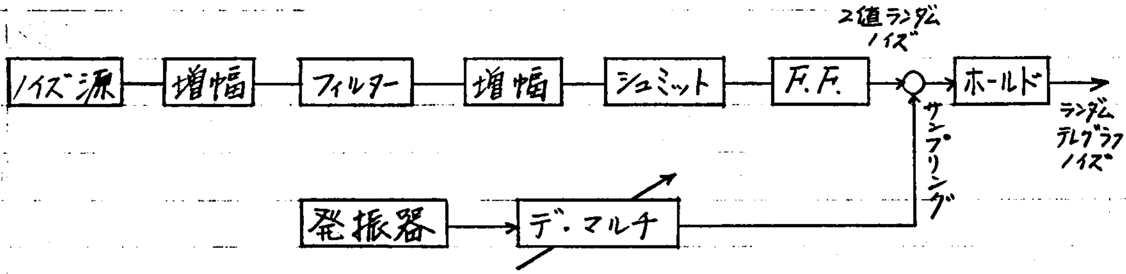


図3-6. ランダムノイズ発生器の構成図

本装置で発生するノイズはアナログコンピューターとの組合せを想定しているので、サンプリング周波数の種類としては、1, 1/2, 1/8, 1/16 KHz が利用出来るように構成している。この装置の設計の際、特に重要な条件は、次の2点である。

(1) 出力信号の平均値が零であること。

(2) サンプリングされた値に関して"白色"であること。すなわち、出力信号のサンプリング周期以上はなれた値は互いに無相関であること。

このため，まず(1)の条件を満たすように図3-7に示す如く，F.F.（対称形Flip-Flop）を挿入した．F.F.を用いるとその入力がたとえzero meanでなくても，F.F.の出力はzero meanになることは図3-7．に示す如く明らかである。

しかし，このF.F.を通すことにより相関が生じ，(2)の条件が問題になってくる。ところで，F.F.の入力の零点分布を仮に単位時間に落ちる零点の個数がαのpoissonとすると，McFadden，J.A.によればその出力の相関は$F(\tau)=\exp(-\alpha|\tau|)\cdot\cos\alpha\tau$になっている。また，サンプリング周波数の最高は$1^{KHz}$であることを考慮すると，F.F.の入力の平均反転時間は$100\,\mu$Sec以下にとれば実用的には十分無相関と考えられる。（付録I参照）

F.F.は2SC269を用いた飽和型回路で立上り，立下り時間が共に約70nsecになり，200nsec間隔で加わるパルスに対しては完全に応答する。

したがって，シュミット回路の出力をPoissonと仮定すると，その平均反転時間が

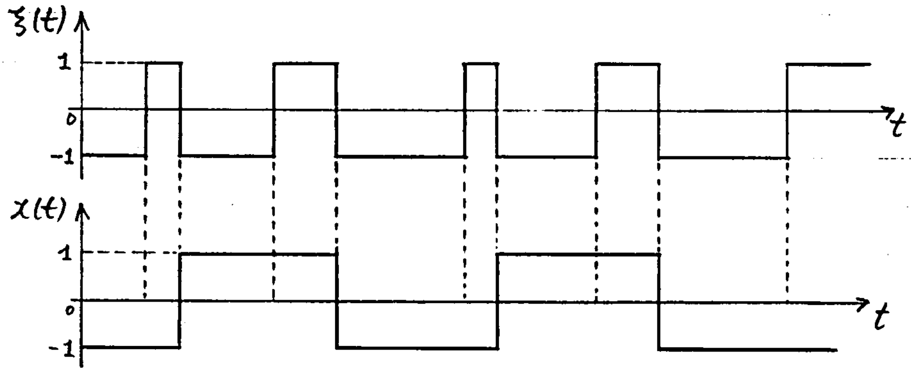


図3-7.　zero meanのためのFlip-Flopの効果

（ξ(t)：Flip-Flopの入力
x(t)：Flip-Flopの出力）

1μsec 以上であれば、パルス間隔が 200nSec 以下になる確率は 18%程度におさえられる。

一方, Noise 源としては Zener Diode を用いているので, その出力は非常な高周波成分までかなりのレベルで含んでいて, それを増幅する際, そのままではゲインが小さくても振幅は非常に大きくなり, すぐに飽和してしまう。そこで上述のシュミットの平均反転時間を 1μSec 程度にすることも考慮に入れて, cut off 周波数が 1MHz 程度のフィルターを挿入した。なお, このフィルターの回路構成としてはミラー積分回路を用いた。シュミット回路は F.F. の反転を確実にさせるために挿入した。また, F.F. が完全に対称でないと, 平均値に偏りを生ずるおそれがあるので, F.F. の回路構成でも, トランジスタや抵抗などの構成素子を出来るだけ特性のそろったものを用い, 反転レベルが等しくなるようにした。

なお, 出力の平均値を零にするには, F.F. を用いないでも, 出力の平均値で feed back をかける方法によっても実現できる。その場合についても検討したが, その時には出力信号の白色性を保証することがむずかしいので, F.F. による方法を採用した。

この装置で発生した random telegraph noise の自己相関関数の実測値のグラフが 図3-9. である。このグラフから, ほぼ設計通りの noise を発生させていることが分かる。また, zero mean, 連の検定でも十分よい結果を得ている。

§3-4　本装置を用いた相関関数の測定

本装置とアナコン（日立 ALS-1010型）およびノイズ発生器[32]（coin tossing 型の random telegraph noise を発生する装置）を使用し、図3-8.に示すような測定回路で実験を行なった。

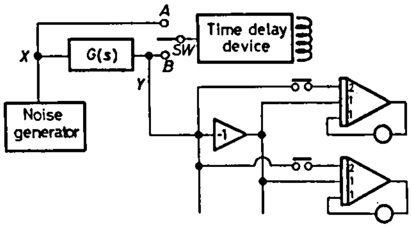


図3-8. 相関関数測定のブロック・ダイヤグラム

SW をAに接続すると、x, y の相互相関関数が、Bに接続すると、y の自己相関関数が、また、$G(s) = const.$ とすると x の自己相関関数が得られる。

1) ノイズの自己相関関数

図3-9.に、試作したノイズ発生器の出力の自己相関関数の測定例を示す。3本のグラフは、測定したノイズが、サンプリング間隔がそれぞれ 4m sec, 8m sec, 16m sec の2値ノイズであることに対応する。この型のノイズの自己相関関数は、h をサンプリング間隔とすると、

$$\left.\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= a^2 \cdot (1 - |\tau|/h) \qquad (|\tau| \leq h) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad (|\tau| > h) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}15)$$

で与えられる。測定結果は十分満足すべきものである。

2) 1次遅れ系の相互相関関数

図3-10. および 図3-11. に，1次遅れ系の入出力間の相互相関関数の測定結果を示す。図3-10. は，入力がサンプリング間隔が 16m sec で，random Telegraph noise である場合の平均反転時間は約 25m sec であって，1次遅れ系を通った出力との相互相関関数の理論値は，

$$R_{xr} \cong a^2 \cdot \{\exp(-8.76\tau) - 0.55\exp(-80\tau)\} \quad (\tau \geq 0)$$

$$\cong 0.45\, a^2 \cdot \exp(80\tau) \quad (\tau < 0) \qquad (3-16)$$

である。上式右辺の exp(−80τ) の項が exp(−8.76τ) に比べて無視できず，その影響で単一の指数関数のグラフからかなりずれている。

一方，図3-11. は，入力がサンプリング間隔が 4m sec の random Telegraph noise で，その平均反転時間は約 6m sec であるから，(3-16) 式の exp(−80τ) の項が，exp(−320τ) となり，exp(−5τ) に比べてほとんど無視できる。したがって，この場合は random telegraph noise というよりはむしろ，white noise に近くなり，グラフの形も white noise を探索信号として用いた場合の相関関数，すなわち，インパルス応答に非常に近くなっている。グラフより求めた減衰定数は 4.93（理論値 5）である。

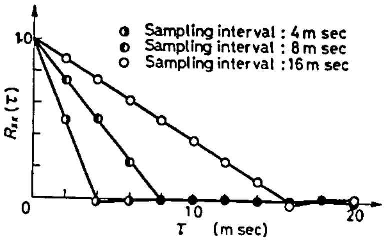
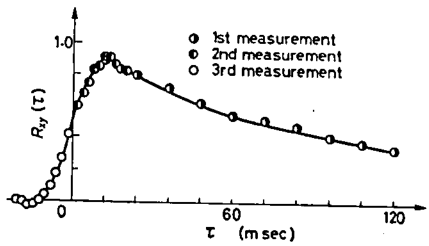


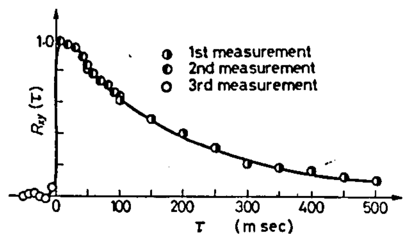
図 3-9. coin tossing 型 ノイズ発生器の出力の自己相関関数



$$G(s)=\frac{1}{1+sT},\ \frac{1}{T}=8.76$$

(Sampling interval : 16 m sec)

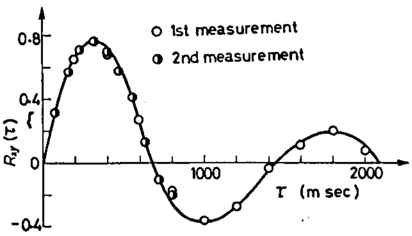
図 3-10. 一次系の入出力の相互相関関数 (その I)



$$G(s)=\frac{1}{1+sT},\ \frac{1}{T}=5.00$$

(sampling interval : 4 m sec)

図 3-11. 一次系の入出力の相互相関関数 (その II)



$$G(s)=\frac{-K}{1+2hTs+T^2s^2},\ T,\ h=\sqrt{\frac{5}{10}}$$

(sampling interval : 16 m sec)

図 3−12. 二次系の入出力の相互相関関数

3) 2次系の相互相関関数

図3−12. は2次系の入出力間の相互相関関数の測定結果を示す。この場合も, random telegraph noise と考えた時の平均反転時間が2次系の等価的な時定数(この場合の減衰定数は1)に比べて十分小さいので, ほぼインパルス応答を表わしている。

このインパルス応答の理論式は,

$$g(\tau)=\exp(-\tau)\cdot\sin(\sqrt{19}\,\tau) \qquad (\tau \geqq 0)$$

$$=0 \qquad (\tau < 0) \qquad (3-17)$$

である。正弦波の周期は約1.44秒, 減衰定数は1である。グラフより求めると, 周期は約1.42秒, 減衰定数は0.98である。

以上の結果から, この試作装置が非常に精度よく動作していることが分かる。

なお，この2値信号の可変遅延装置は相関関数の測定に便利なように，同時に遅延時間の異なる複数個の出力が得られるように工夫されているので，1次遅れ系のような簡単な形のものであれば，1回の測定でその相関関数全体を得ることができ，また，2次あるいはそれ以上の系のように相当複雑なものでも，1回の測定で大体の概形を知り，遅延時間τの適切な値が分かるので，2回あるいは3回程度の測定でかなり正確にその相関関数の形全体を知ることが出来ることが分かる。

また，いくつかの相関関数の測定結果から，ランダム・ノイズ発生器も，ほぼ設計通りの性能を持っていることがわかる。

第4章　インパルス応答を用いた等価的2次系の伝達関数の推定

§4.1　序

適応制御系においては，時間と共に刻々変動する制御系の動特性，あるいは制御対象の動特性を絶えず測定することが必要であり，また，動特性測定の方法には種々あるが，適応制御系で要求される定常運転中のプロセスの動作を大きく乱さず，比較的短時間に，系の動特性を求める方法として，M系列信号などの擬似ランダム信号や，系自身に内在する雑音を用いて，相関法によりインパルス応答を求める方法が有力であることが知られている。[15)~23),27),28)] また，そのための装置等について前章までに述べてきた。しかし，この得られたインパルス応答を直接用いて，制御することは困難で，一般にこれを広義のパターン認識法により処理して，その系の伝達関数等のパラメータを求めることが行なわれている。

本章においても，プラントの動特性測定において，その系のインパルス応答の有限個のサンプル値が測定誤差（相関演算における積分時間が有限であるための誤差，仮定した系と実際の系との次数の違いによる等価的誤差，プロセスパラメータの時間変動による等価誤差等）を含んだ値として与えられたとき，それらの値から，その系のパルス伝達関数を推定する問題を考えている。前田[20)]の方法はこのような動特性推定を含む一適応制御系について述べているが，そこではインパルス応答を用いて，パターン認識法により，あらかじめ前もって，想定したいくつかの有限個のパターンにあてはめるものであるが，本章で述べる方法では，推定により得られるプロセスパラメータ（パルス伝達関数のパラメータ）は，インパルス応答より直接計算される値をとる。

ところで，実際の系は一般に非常に高次な系であるが，あまり高次な系で近似

してもデータ処理が繁雑なばかりで得策とはいえない。実用的には2次系(振動的な系も近似出来る最小次数)で近似してもよい場合が多いと考えられるのでここでも制御対象のパルス伝達関数を2次系とし、そのパラメータをその系のインパルス応答の測定値から推定する方法について検討した。

(なお、推定すべき系が、立上りの非常にゆるやかな高次の系で、2次系では近似しがたい場合には、第7章で述べる。)

このようなパラメータ推定には従来、Penroseの擬似逆行列の特別な形である最短左側インバースを用いる方法が式誤差の2乗和最小の意味で最適であると考えられていた。[6),24)~26)] しかし、推定すべきパラメータの値を出来るだけ正確に推定するという意味で、また、これにより得られた情報を用いて制御を行なった場合、系全体の制御特性が最も良好になるという意味で最短左側インバースによる方法が必ずしも最適であるとはいえないことを§4.3で示し、またそのデータ処理が繁雑であること等を考慮して、データ処理が容易で、ノイズにも比較的強い新しい方法を§4.4で提案している。さらに§4.5ではその改良形を示している。[37)~39)]

そして、§4.6では、それら推定機構としての良さを、それによって得られた推定値の真値からの偏りとそのまわりの分散の点で、従来の最短左側インバースによる方法と比較検討している。

また、§4.7では、推定誤差はその制御系の特性、すなわち、パルス伝達関数の特性根に依存するが、その系の特性はまた、サンプリング周期を変えることにより等価的に変化する。したがって推定誤差はサンプリング周期の関数と考えられ、

サンプリング個数が有限であることを考慮すると推定誤差を最小にするようなサンプリング周期が存在する。このような最適サンプリング周期についても考察している。

§4.2 パルス伝達関数のパラメータとインパルス応答の関係

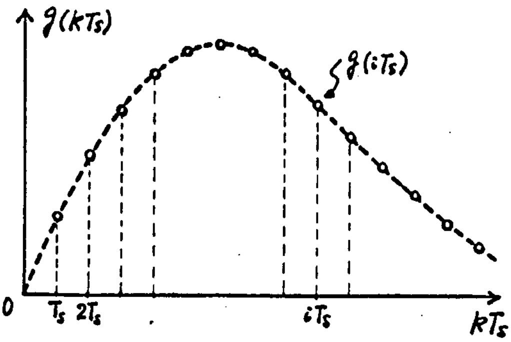


図4-1. インパルス応答のサンプル値

前章までに述べてきたような相関法によるインパルス応答の測定を想定しているので得られるインパルス応答というのは，遅れ時間に対して連続な値をとらず，あるとびとびの離散的な遅れ時間（普通には，ある時間幅の整数倍の遅れ時間：図4-1では，iT_s : $i=1,2,\cdots,n$）における値，すなわち，インパルス応答のサンプル値が，測定値として得られることになる。

いま，インパルス応答のサンプル値列 g_k，$(k=0,1,2,\cdots,n,\cdots)$ が与えられると，その系のパルス伝達関数は（4-1）式のように書き表わすことが出来る。

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cdot z^{-k} \qquad (4\text{-}1)$$

ただし
- g_k : 遅れ時間 kT_s におけるインパルス応答のサンプル値
- T_s : サンプリング周期

また、ここで考える系のパルス伝達関数は実用的見地から（4−2）式で示すような2次系で近似的に表わすことが出来るものとする。

$$G_\alpha(z)=\frac{\alpha_3\cdot z^{-1}}{1+\alpha_1\cdot z^{-1}+\alpha_2\cdot z^{-2}} \qquad (4-2)$$

なお（4−2）式は、直達分がなくしかもあまり立上りがゆるやかでない系で、振動的なものも、表現出来る最も簡単な式として採用している。

いま、（4−1）式で表わされる系が正確に（4−2）式で表現され、しかも測定時のノイズもない理想的な場合の（4−1）式の g_k ($k=0,1,2,\cdots,n,\cdots$) と（4−2）式の α_i ($i=1,2,3$) の関係式を、両式の z^{-k} の係数を比較することにより求め、（4−3）、（4−4）式を得る。

$$g_{k-1}\cdot\alpha_2+g_k\cdot\alpha_1+g_{k+1}=0 \qquad (4-3)$$

$$(k=1,2,\cdots)$$

$$\alpha_3=g_1 \qquad (4-4)$$

以上は、インパルス応答のサンプル値列 g_k ($k=1,2,\cdots$) がノイズにみだされず、そのまま得られるとしたが実際にはこれにノイズが重畳した測定値 h_k として与えられることになる。

$$h_k=g_k+\varepsilon_k \qquad (4-5)$$

ただし　g_k：時刻 kT_s におけるインパルス応答のサンプル値の真値。

　　　　ε_k：g_k に重畳するノイズ、分散が一定の white noise と考える。

なお、実際には（4−2）式の形で正確には表現出来ないのであるが、以後しばらくは、これによる等価的なノイズは考えないことにする。

(4−3), (4−4)式において g_k $(k=1,2,\cdots)$ の代りに測定値 h_k $(k=1,2,\cdots)$ で置き換えた式を (4−3)', (4−4)' 式とする。この (4−3)', (4−4)' 式は厳密には成立しないのであるが近似的に成立するものとし、これらの式を用いて、有限個の測定値 h_k $(k=1,2,\cdots)$ による α_i $(i=1,2,3)$ の推定を行なうことを考える。

(4−4)' による α_3 の推定は簡単であるから、以後は (4.2.3)式による α_i $(i=1,2)$ の推定について考える。

$$h_{k-1}\cdot\alpha_2 + h_k\cdot\alpha_1 + h_{k+1} \cong 0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{4-3'}$$

$$\alpha_3 \cong h_1 \tag{4-4'}$$

(4−3)' 式をマトリックス表示したものを (4−6) 式とする。

$$\mathbb{F}\cdot\mathbb{X} = \mathbb{G} \tag{4-6}$$

ただし、

$$\mathbb{F} \triangleq \begin{bmatrix} h_2, & h_3, & h_4, & \cdots, & h_{n-1} \\ h_1, & h_2, & h_3, & \cdots, & h_{n-2} \end{bmatrix}^T \tag{4-7}$$

$$\mathbb{X} \triangleq \left[\alpha_1,\ \alpha_2\right]^T \tag{4-8}$$

$$\mathbb{G} \triangleq -\left[h_3,\ h_4,\ h_5,\ \cdots,\ h_n\right]^T \tag{4-9}$$

ここで、$[\cdot]^T$ はマトリックス $[\cdot]$ の転置を表わす。

§4.3 最短左側インバースによる方法 (MLIM)

(4−6)式は α_1, α_2 に関する線形の連立方程式である。また、(4−7)式が

矩形行列であることからも分るように未知数の数よりも方程式の数の方が多い形で、各行が独立の場合は、一般に解は存在しない不能の形である。もし h_k ($k=1,2,\cdots,n$) にノイズが重畳せず、$h_k = g_k$ ならば (4-6)式中の2行だけが独立となり、任意の2行から解を求めることが出来る。しかし、h_kは測定値として与えられるので必ずノイズを含んでいる。このような場合 (4-6)式の平均的な意味での近似解は、(4-10)式に示すような最短左側インバースと呼ばれる擬似逆行列(Penroseの一般化逆行列の特別なもの)を用いて求められることが知られている。[24)]

$$\mathbb{H}^{LM} = (\mathbb{F}^{T} \cdot \mathbb{F})^{-1} \cdot \mathbb{F}^{T} \qquad (4-10)$$

(4-11)式に示す $\mathbb{H}^{LM}$による解 α_1^M, α_2^M の物理的意味は、(4-6)式のα_1, α_2にα_1^M, α_2^Mを代入した時の各行の式誤差の2乗和が最小となるようなα_1, α_2の値である。

$$\mathbb{X}^{M} = \mathbb{H}^{LM} \cdot \mathbb{G} \qquad (4-11)$$

ただし、

$$\mathbb{X}^{M} \triangleq \left[\alpha_1^M, \ \alpha_2^M\right]$$

したがって、(4-10), (4-11)式により、α_1^M, α_2^M を求める方法は、h_kにノイズを含んでいるとき、その各h_kにおける信号雑音比が同程度の場合、最も妥当な近似解を与えると考えられる。

しかし、相関法によりインパルス応答を測定することを想定しているので、h_kに重畳するノイズはh_kの大きさには関係なく、分散が一定であると考えるのが妥当である。

したがって，各 t_k における信号雑音比は一定と考えられず，α_i を出来るだけ正確に推定するという意味で最短左側インバースによる方法（以下 Minimum Left Inverse Method の略 MLIM と呼ぶ。）が必ずしも最適とはいえない。このMLIMを最適な推定法とするためには，(4-6)式に最適な weight をかけてからMLIMを適用する必要がある。しかしそのためのアルゴリズムを求めるにはかなりの困難を要するのであろうし，また，たとえそのアルゴリズムが求まったとしても，それはこれから推定すべき α_i（パラメータの真値），またはサンプル値 g_k（真値）の関数となるはずで，厳密な意味での最適な weight を得ることは不可能である。

そこで，実際問題としては，まず適当な weight（たとえば 1）を乗じてMLIMを適用し，これにより得られた推定値を仮りの真値と考え，準最適な weight を決定する。次に，その準最適な weight をかけてMLIMを適用し，より真値に近い推定値とより最適に近い weight をもとめる。このような操作を繰返して，逐次的に真値に近づけていくといった方法を取らざるをえないであろう。

ところで，上記のような操作を何度も繰返して，α_i を求めたとしても，それは2次系で近似した範囲内での最良な推定値でしかない。しかし，実際の系は一般に厳密には非常に高次な系であり，それを2次系で近似したためにおこる誤差はここでは無視し，推定するものとしているが，実際には，本来存在するところの次数の違いによる誤差も考慮に入れなければならない。

以上のような意味において，最適な weight を用いたMLIMも必ずしも最良な推定法であるとはいいがたい。

また，on-line の動特性推定を考えているので出来るだけ短時間に測定する

ことなどから，以後ここで取扱うMLIMはweight 1で1回だけ最矩左側インバースを用いる方法を意味するものとする。

§4.4 新しい推定法（NM）

§4.3で述べた推定法（MLIM）は，与えられた有限個のサンプル値を同時にすべて用いる方式であるために，そのデータ処理が繁雑になり，実用的立場から問題があった。そこで，与えられた有限個のサンプル値を数個づつのサンプル値からなる幾組かに分けて，各組での推定値をなんらかの意味で平均して所要の推定値を得る方法が考えられる。しかし，1組のサンプル値は任意の数点でよいのではなくてそれによる推定機構が簡単なこと，また，ノイズに対して出来るだけ強い構造になっていることが要求される。

そのために，(4-3)式とは独立に，α_1, α_3に関する線形の関係式(4-12)式を導出した。（付録II参照）

$$g_{2k}\cdot\alpha_3 - g_k^2\cdot\alpha_1 - 2\cdot g_k\cdot g_{k+1} = 0 \qquad (4-12)$$

(4-3), (4-12)式より，

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (\alpha_3\cdot g_{2k} - 2\, g_k\, g_{k+1}) / g_k^2 \\ \alpha_2 &= (-\alpha_3\cdot g_{2k} + g_k\cdot g_{k+1}) / (g_k\cdot g_{k-1}) \end{aligned}\right\} \qquad (4-13)$$

$$(k=2, 3, \cdots, [n/2])$$

(4-13)式において，α_3を(4-4)式を用いて，g_1で置き換えた式を(4-13)'式とすると，これは，α_1, α_2がg_k $(k=1, 2, \cdots, n)$より直ちに計算出来る形になっている。

すなわち、(4-13)'式において、g_k ($k=1,2,\cdots,n$) の代りにその測定値 h_k ($k=1,2,\cdots,n$) で置き換えた式を (4-14) 式とすると、この式が各組での α_1, α_2 の推定値を求めるためのアルゴリズムを与える。

$$\left.\begin{aligned} \hat{\alpha}_1^{(k)} &= \frac{h_1 \cdot h_{2k} - 2 \cdot h_k \cdot h_{k+1}}{h_k^2} \\ \hat{\alpha}_2^{(k)} &= \frac{-h_1 \cdot h_{2k} + h_k \cdot h_{k+1}}{h_k \cdot h_{k-1}} \end{aligned}\right\} \quad (k=2,3,\cdots,[n/2]) \qquad (4\text{-}14)$$

そして、これら $\hat{\alpha}_i^{(k)}$ ($i=1,2;\ k=2,3,\cdots[n/2]$) の k についての相加平均でもって、すなわち、(4-15)式により、h_k ($k=1,2,\cdots,n$) から α_i ($i=1,2$) を推定する方法（以下、New Method I の略、NM_1 と呼ぶ）を提案する。[37)]

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{k=2}^{m} \hat{\alpha}_i^{(k)} \quad (i=1,2:\ m=[n/2]) \qquad (4\text{-}15)$$

この方法(NM_1)によるサンプル点の取り方は、(4-14)、(4-15)式で分かるように、アルゴリズムが簡単で、しかも適当に離れた4点（$\hat{\alpha}_1^{(k)}$の場合：$h_1, h_k, h_{k+1}, h_{2k}$）、または5点（$\hat{\alpha}_2^{(k)}$の場合：$h_1, h_{k-1}, h_k, h_{k+1}, h_{2k}$）を用いて推定する方法であるために、インパルス応答の全体的な特徴を把握して推定する方式になっている。

また、(4-14),(4-15)式の形から分かるように各々のサンプル値が最終的な推定値 $\bar{\alpha}_i$ ($i=1,2$) におよぼす影響は一定ではない。すなわち、あるサンプル値は数個用いられ、あるサンプル値は1回または0回しか用いられないというように、推定式自体に natural weight がついていると考えられる。したがって、サンプリング周期が適当に選ばれて

いる場合には，そのデータ（インパルス応答のサンプル値 h_k）の比較的信頼性の高い初めの部分の weight が大きくなっており，望ましい natural weight になっているので，単なる相加平均をしても比較的ノイズに強い推定方式になっているといえる。

ところで，(4-13)′式（あるいは(4-14)式）に g_1（あるいは h_1）が特別な形で入っている。これは (4-4)式により，$\alpha_3=g_1$ という関係式より α_3 の推定値を h_1 を用いて得ることを考えているからである。

このように，ある特別な1点のサンプル値から，プロセスパラメータを推定するのは，ノイズの影響の点から望ましくないのであるが，MLIM でも (4-14)′式を用いて，α_3 を推定するようになるので MLIM との推定機構の良さの比較をする上でこのような NM_1 を考えている。したがって実際には，α_3 の推定にも，インパルス応答の全体的な特徴をとらえて推定することが望まれる。

そこで，(4-3)，(4-12)式とは独立にさらに α_3 と g_k $(k=1,2,\cdots,n)$ に関する (4-16)式を導出する。（付録Ⅲ参照）

$$\alpha_3 = g_k \cdot \sqrt{\frac{g_{k+1}^2 - g_k \cdot g_{k+2}}{g_{2k}^2 - g_k \cdot g_{3k}}} \qquad (4-16)$$

$$(k=1,2,\cdots,[n/3])$$

(4-16)式において，g_k の代りに測定値 h_k $(k=1,2,\cdots,n)$ で置き換えた式を (4-16)′式とし，その式より得られる α_3 の推定値を $\hat{\alpha}_3^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots,[n/3])$ とする。これを k について相加平均したもので α_3 の最終的な推定を得る。

$$: \hat{\alpha}_3^{(k)} = \sqrt{\frac{h_k^2\left(h_{k+1}^2 - h_k \cdot h_{k+2}\right)}{h_{2k}^2 - h_k \cdot h_{3k}}} \qquad (4-16)'$$

$$(k=1,2,\cdots,[n/3])$$

$$\overline{\alpha}_3 = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}\hat{\alpha}_3^{(k)} \qquad (4-17)$$

$$(l = [n/3])$$

この $\overline{\alpha}_3$ を (4-14)式の h_1 の代りに用い，しかも (4-9)式の代りに，(4-16)′，(4-17)式を用いる方法を NM_{II} (New Method IIの略)と呼ぶことにする。

ところで，(4-12)式あるいは，(4-13)式，(4-16)式が α_i $(i=1,2,3)$ を推定するための唯一の式ではなくて，それらと類似の式はいくらでも考えられるが，それらの中で出来るだけ簡単で，しかもインパルス応答の全体像をとらえ，与えられたデータを出来るだけ有効に利用する式として提案したものである。

§4.5 改良した新しい推定法 (INM)

§4.4で述べたNMは，インパルス応答のサンプル値が極端に小さい値をとらない場合には，従来の方法(MLIM)に比べデータ処理が簡単なだけでなく推定機構としての良さもすぐれていてかなり有効であることが確かめられた。(§4.6参照.) しかし，対象としている系が振動的である場合(パルス伝達関数が複素根をもつ場合等)には，(4-14)式の分母の項(h_k, h_{k-1})が殆んど零に近い値をとることもあり，また，ある場合には，(4-16)式の分母が零に近いような値をとったり，根号の中が負になったりすることもありうる。このようなときは，ノイズが非常に大きく影響し，推定誤差を極端に増加させることになる。そこで，つぎの3つの観点から，(4-14)式に適当なweightをつけて平均することを考え，$\hat{\alpha}_1^{(k)}$ には h_k^2，$\hat{\alpha}_2^{(k)}$ には $|h_k \cdot h_{k-1}|$ の weight

をつけて平均する方法、すなわち、(4−18)式により、$\hat{\alpha}_i$ を得る方法 (Improved New Method I の略 INM_I と呼ぶ) を提案する。

$$\left.\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= \sum_{k=1}^{[n/2]} (h_1 \cdot h_{2k} - 2 h_k \cdot h_{k+1}) \Big/ \sum_{k=1}^{[n/2]} h_k^2 \\ \hat{\alpha}_2 &= \sum_{k=2}^{[n/2]} (-h_1 \cdot h_{2k} + h_k \cdot h_{k+1}) \cdot \mathrm{sgn}\,(h_k \cdot h_{k-1}) \Big/ \sum_{k=2}^{[n/2]} \left| h_k \cdot h_{k-1} \right| \end{aligned}\right\} \quad (4-18)$$

i) 推定式の分母が極端に零に近くなることがないこと。

ii) 得られた推定値の分散が出来るだけ小さいこと。

iii) 推定機構が簡単なこと。

INM_I は (4−18)式から分かるように上の i), iii) は満足していることは明らかである なお、weight は各推定値で同符号でなければならないので、(4−18) 式の $\hat{\alpha}_2$ では、$\mathrm{sgn}\,(h_k \cdot h_{k-1})$ の項がついている。

さらに、ii) については、つぎの§5章でかなり一般的に述べることから分かるように、INM_I において適用している weight は分散最小という意味で実用的には近似的に準最適な weight になっている。

つぎに、NM_{II} にも上記の weight を適用し、α_3 の推定にも α_1, α_2 の推定の類推から次のような推定式を採用する。

すなわち、まず、(III−6) 式において $g_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$ の代りに測定値 $h_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$ で置き換えた式を (III−6)′式とし、それにより α_3^2 の推定を行ない、それらを k について平均して、最終的な α_3^2 の推定値 $\hat{\alpha}_3^2$ を求めた後、その平方根をとって $\hat{\alpha}_3$ を

求めることを考える。そこで上記の weight は，(Ⅲ−6) 式で α_3^2 の推定を行なう際に $|h_{2k}^2 - h_k\cdot h_{3k}|$ の weight をつけて平均し，$\hat{\alpha}_3^2$ を得る。

$$\hat{\alpha}_3^2 = \frac{\sum_{k=1}^{[n/3]} h_k^2 (h_{k+1}^2 - h_k\cdot h_{k+2})\cdot \mathrm{sgn}(h_{2k}^2 - h_k h_{3k})}{\sum_{k=1}^{[n/3]} |h_{2k}^2 - h_k\cdot h_{3k}|} \qquad (4-19)$$

$$\hat{\alpha}_3 = \sqrt{\hat{\alpha}_3^2} \qquad (4-20)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \sum_{k=1}^{[n/2]} (\hat{\alpha}_3\cdot h_{2k} - 2h_k\cdot h_{k+1}) \Big/ \sum_{k=1}^{[n/2]} h_k^2 \qquad (4-21)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \sum_{k=2}^{[n/3]} (-\hat{\alpha}_3\cdot h_{2k} + h_k\cdot h_{k+1})\,\mathrm{sgn}(h_k\cdot h_{k-1}) \Big/ \sum_{k=2}^{[n/2]} |h_k h_{k-1}| \qquad (4-22)$$

すなわち，(4−19)〜(4−22) 式により，αi ($i=1.2.3$) の推定値を得る方法 (Improved New Method Ⅱ の略，INMⅡと呼ぶ。) を提案する。

なお，ここで採用した weight は定性的には，与えられたデータ（インパルス応答のサンプル値）のパワーに近いものである。

§4.6. 推定機構としての良さの評価

§4.3 で述べた MLIM に比べ §4.4, §4.5 で述べた NM, INM の方が簡単な推定機構になっていることは確かであるが、つぎに、これらの推定機構としての良さについて考えよう。

これには、MLIM, NM, INM による推定値の真値からの偏りとそのまわりの分散を評価する方法が考えられる。

いま、一般に、推定値 $\hat{\alpha}$ が (4-23)式のように展開出来たとする。

$$\hat{\alpha} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \varepsilon_j + \sum_{j,k}^{n} \mu_{jk} \cdot \varepsilon_j \cdot \varepsilon_k + O(\varepsilon^2) \tag{4-23}$$

ただし、α_0 は推定値 $\hat{\alpha}$ の真値であり、ε_j ($j=1,2,\cdots,n$) は測定値に重畳するノイズで、同一の分散 σ_n^2 をもち、平均値が零の white noise と考える。また、λ_j, μ_{jk} は測定値の真値 g_k ($k=1,2,\cdots,n$) の関数として与えられるものである。そうすれば、$O(\varepsilon^2)$ を無視して、推定値の偏り β, および分散 σ^2 は近似的に (4-24), (4-25)式で求められる。

$$\beta \triangleq E[\hat{\alpha} - \alpha_0] \cong \sum_{i=1}^{n} \mu_{ii} \cdot \sigma_n^2 \tag{4-24}$$

$$\sigma^2 \triangleq E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])^2] \cong \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot \sigma_n^2 \tag{4-25}$$

この考え方を MLIM, NM, INM に適用すると、計算は相当繁雑だが λ_j, μ_{jk} を求めることが出来る。

つぎに、いくつかの例題についての MLIM と NM, INM の各方法による

計算機シミュレーションの結果と，(4-24)，(4-25)式の近似式による計算値との比較を以下に示す。

表4-1.は特性根が実根の場合で表から明らかなように，推定機構としての性能，すなわち，推定値の偏り，分散ともにNMの方がMLIMよりすぐれていることが分かる。

表4-2.は特性根が複素根の場合で，大体実軸と±$\pi/5$以内の扇形内にある時は，推定値の偏り，分散ともにINMの方がMLIMよりよいといえるが，±$\pi/5$を超えると逆転するようである。

つぎにパルス伝達関数のパラメータの推定値$\hat{\alpha}_1$，$\hat{\alpha}_2$の分散によるMLIMとINMの推定機構としての良さの比較をZ-平面上に図示したのが図4-2，図4-3.である。図4-2.は(4-25)式の近似式による計算値(理論値)で，図4-3.は計算機シミュレーションの結果(実験値)である。シミュレーションは推定を100回行なった時の推定値の分散により比較を行なった。両図とも，図の曲線と実軸でかこまれた扇形内がINMの方がすぐれている領域である。

表，図とも，非常に小さな値になる場合を除いて，近似式による計算値(理論値)とシミュレーションの結果(実験値)とは十分よい一致を示していることも分かる。

つぎに，Z-平面上で半径rを固定し，(系の減衰定数を一定にして)実軸からの角度θによる推定誤差(推定値の分散)の比較を示したのが図4-4.～図4-7.である。図4-4，4-5.は$r=0.7$の場合，

図4-6，4-7．は $\gamma=0.9$ の場合である。

以上のグラフから．INMはMLIMとは特性根の実軸からの角度に対して非常に対称的な特性をもっていることが分かる。つまり，MLIMは系の振動周期が極端に短かく，サンプリング定理が問題になる程でないかぎり，系の振動性に対して一定か，むしろ振動的な程，推定性能がよいことを表わしている。

一方．INMは逆にサンプリング周期にくらべ，系の振動周期が極端に大きくないかぎり，系が振動的になる程，推定性能が悪くなることを表わしていて，両者の交点がほぼ，$\theta=\pi/5$ 付近ということである。

ここで，特性根の実軸からの角度 θ とインパルス応答の振動周期 T，サンプリング周期 T_s との関係は S-平面と．Z-平面との対応から，(4-26)式で表わされるから，

$$T/T_s = 2\pi/\theta \qquad (4-26)$$

$\theta=\pi/5$ のときは，$T/T_s=10$，つまり，インパルス応答の1周期中に10コのサンプル点があるようなサンプリングになっている。ところで，実際問題としては，特性根の位置が $\pm\pi/5$ 以上，換言すれば，インパルス応答の1周期中のサンプル点が10個以下のように非常に振動的な系の推定はまれであり，また，そのような場合にもサンプリング周期を短かくして，等価的に振動性の少ない系にして推定するのが普通であるから，実用的にはINMがすぐれているといえる。

表4-1. 計算機シミュレーションの結果と近似式による計算値とによる
MLIMとNMの比較（特性根：実根）

試行回数：$n=2000$ ， ＊：計算値

Standard Deviation of Noise	Method	Bias of Estimate		Standard Deviation	
		α_1	α_2	σ_1	σ_2
True Values of α_i		-1.6000	0.6300	0.0000	0.0000
$\sigma_n=\frac{0.25}{\sqrt{3}}$	MLIM	0.2358	-0.2399	0.0193	0.0209
	MLIM*	0.2496	-0.2542	0.0116	0.0129
	NM	-0.0024	0.0089	0.0069	0.0144
	NM*	-0.0028	0.0075	0.0067	0.0140
$\sigma_n=\frac{0.50}{\sqrt{3}}$	MLIM	0.5596	-0.5639	0.0491	0.0537
	MLIM*	0.9985	-1.0169	0.0465	0.0514
	NM	-0.0224	0.0490	0.0328	0.0706
	NM*	-0.0110	0.0299	0.0268	0.0561
True Values of α_i		-1.1000	0.1800	0.0000	0.0000
$\sigma_n=\frac{0.05}{\sqrt{3}}$	MLIM	0.0089	-0.0085	0.0014	0.0015
	MLIM*	0.0094	-0.0089	0.0012	0.0013
	NM	-0.0007	0.0007	0.0010	0.0008
	NM*	0.0005	-0.0004	0.0011	0.0009
$\sigma_n=\frac{0.10}{\sqrt{3}}$	MLIM	0.0392	-0.0375	0.0053	0.0055
	MLIM*	0.0375	-0.0355	0.0049	0.0051
	NM	-0.0006	-0.0003	0.0045	0.0034
	NM*	0.0018	-0.0016	0.0044	0.0035

表4-2. 計算機シミュレーションの結果と近似式による計算値とによるMLIMとINMとの比較（特性根：複素根）

試行回数：$n=1000$, ＊：計算値

ノイズの標準偏差：$\sigma_n=0.01$, $r=0.7$ $(z=r\cdot e^{i\theta})$

Angular from Real Axis	Method	Bias of Estimate		Standard Deviation	
		α_1	α_2	σ_1	σ_2
$\theta=\pi/20$	MLIM	0.00906	-0.00855	0.02117	0.01904
	MLIM*	0.00990	-0.00940	0.02114	0.01892
	INM	0.00027	-0.00017	0.00569	0.00563
	INM*	0.00016	-0.00001	0.00549	0.00561
$\theta=3\pi/20$	MLIM	0.00820	-0.00714	0.02051	0.01597
	MLIM*	0.00842	-0.00722	0.02022	0.01556
	INM	0.00062	-0.00025	0.00996	0.00894
	INM*	0.00034	-0.00002	0.00990	0.00895
$\theta=5\pi/20$	MLIM	0.00637	-0.00472	0.01880	0.01074
	MLIM*	0.00698	-0.00503	0.01861	0.01063
	INM	0.00134	-0.00424	0.02454	0.01900
	INM*	0.00065	-0.00472	0.02451	0.01852
$\theta=7\pi/20$	MLIM	0.00390	-0.00239	0.01642	0.00742
	MLIM*	0.00450	-0.00243	0.01686	0.00744
	INM	0.00221	0.00047	0.05391	0.04016
	INM*	0.00078	0.00026	0.05464	0.04001

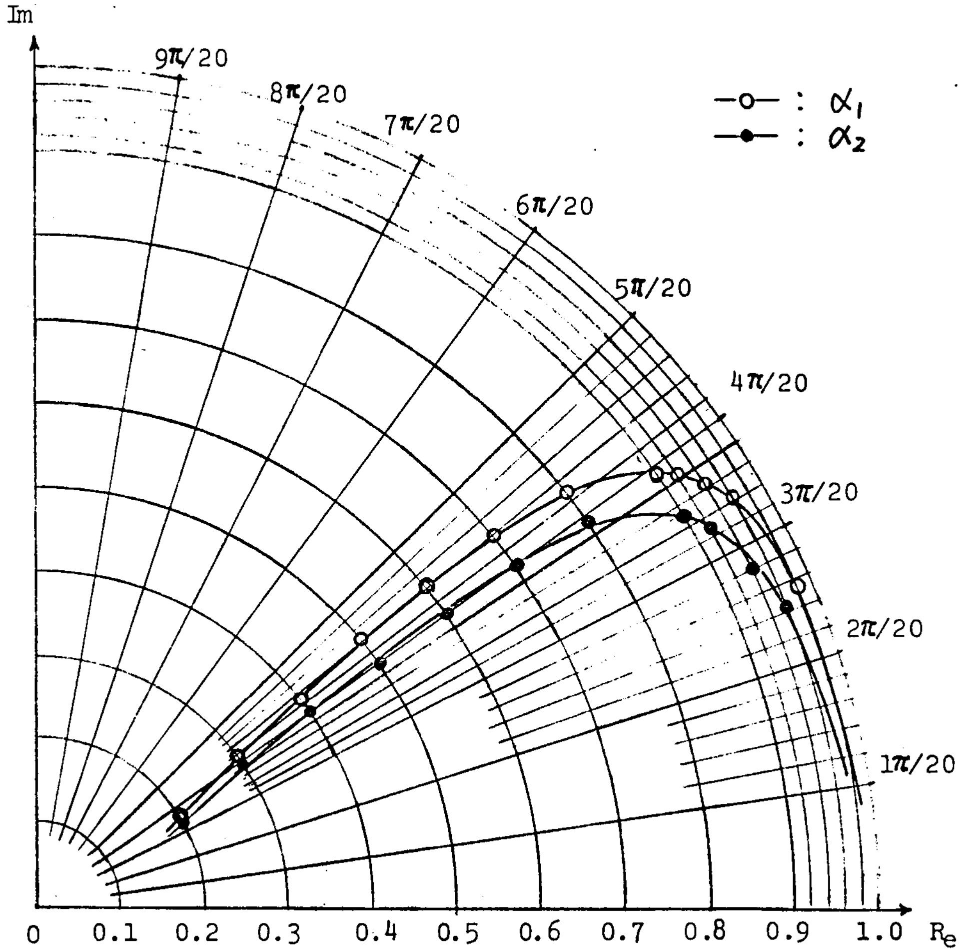


図 4-2. 推定値の標準偏差によるMLIMとINMとの比較（近似式による計算値）

（ノイズの標準偏差 : $\sigma_n = 0.01$
サンプル個数 : $N = 20$ ）

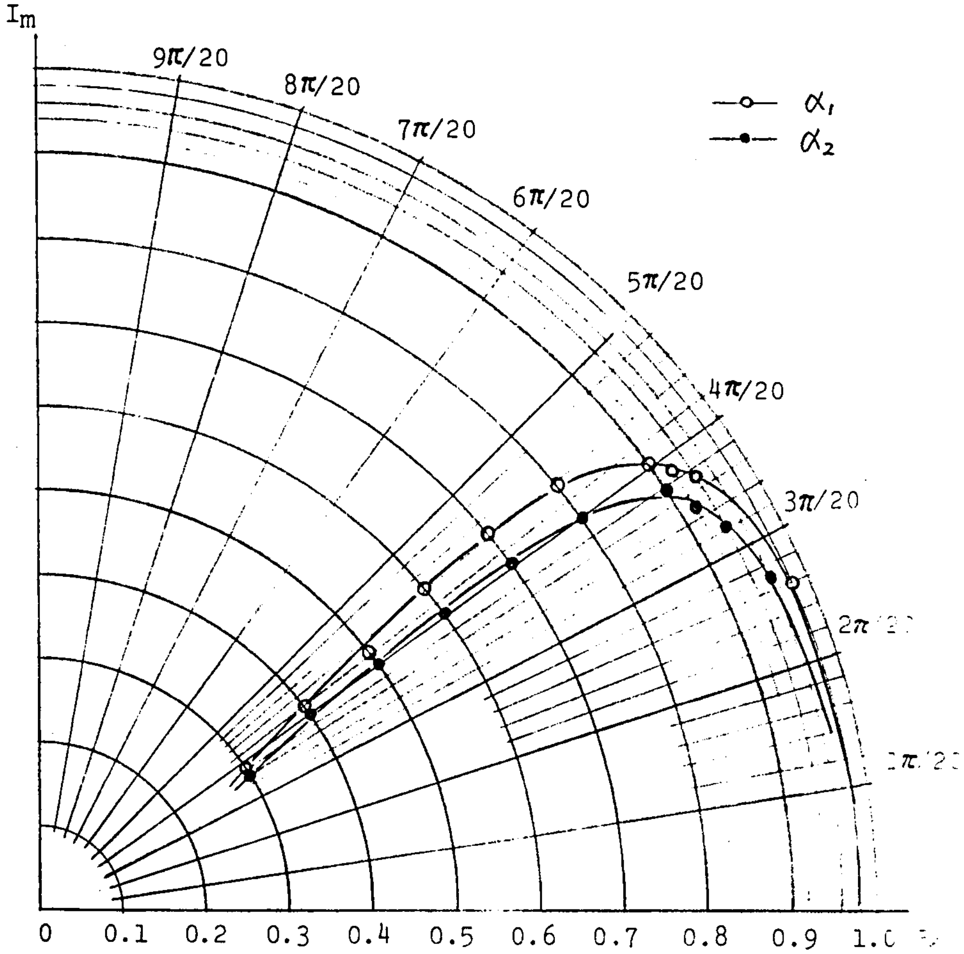


図4-3. 推定値の標準偏差によるMLIMとINMとの比較（計算機シミュレーションの結果）

ノイズの標準偏差 $\sigma_n = 0.01$
サンプル個数 $N = 20$
推定試行回数 $n = 100$

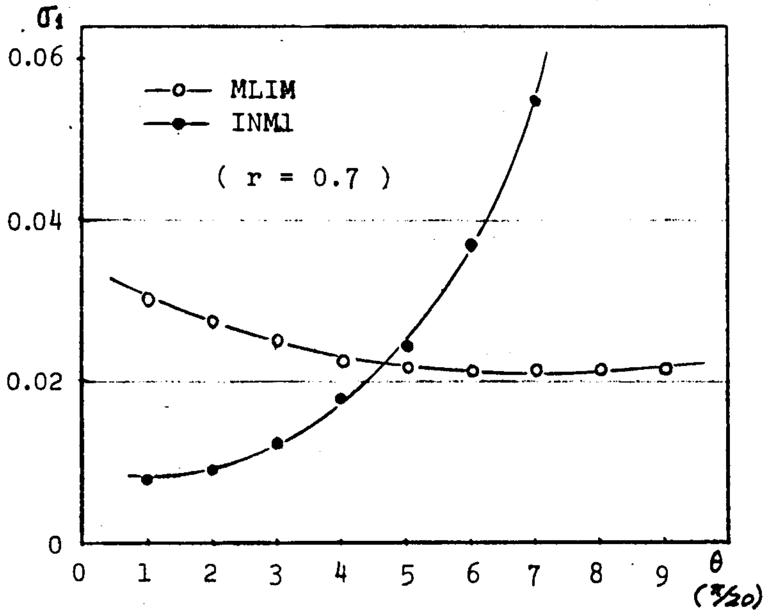


図4-4. Z平面における実軸からの角度に対するα_1の推定誤差（$Z=r\exp(j\theta)$, $r=0.7$の場合）

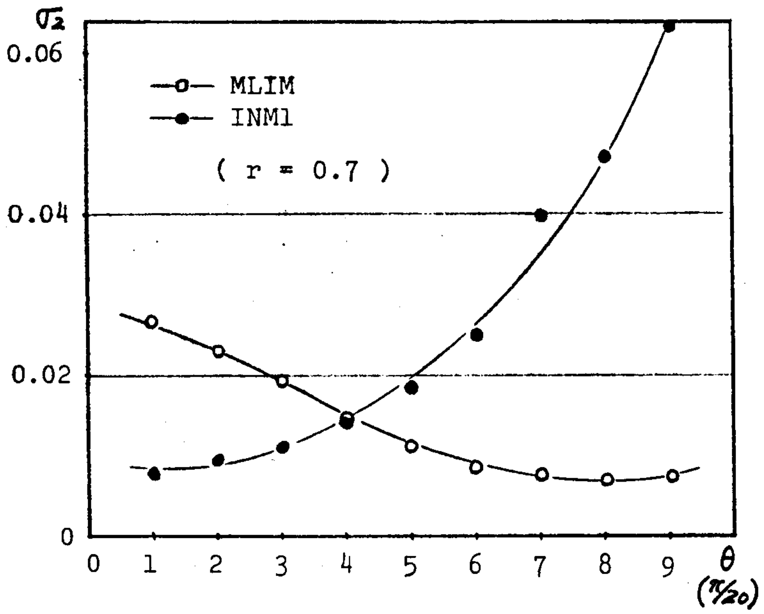


図4-5. Z-平面における実軸からの角度に対するα_2の推定誤差（$Z=r\cdot\exp(j\theta)$, $r=0.7$の場合）

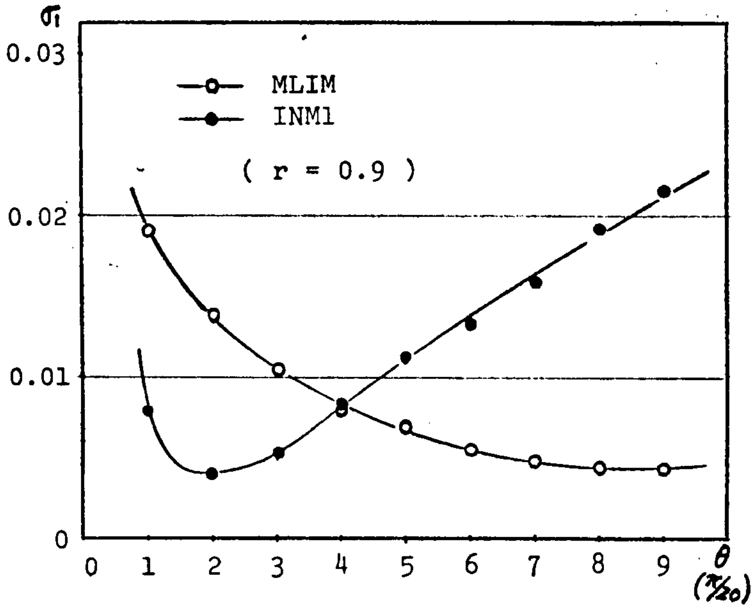


図4-6. Z-平面における実軸からの角度に対するα_1の推定誤差
($Z = r \cdot exp(j\theta)$, $r = 0.9$の場合)

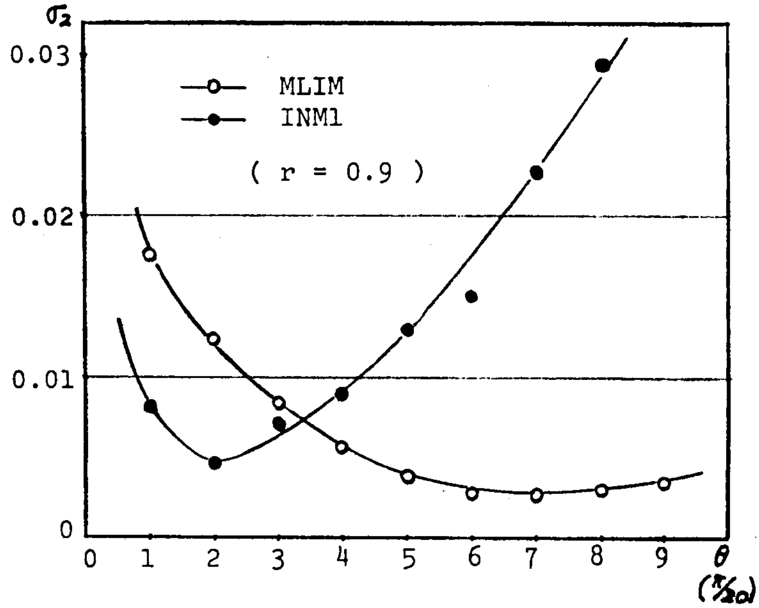


図4-7. Z-平面における実軸からの角度に対するα_2の推定誤差
($Z = r \cdot exp(j\theta)$, $r = 0.9$の場合)

§4.7. サンプリング周期と推定誤差

Z－平面上での特性根の位置とサンプリング周期との関係を考える。

いま，サンプリング周期T_sのときの特性根が，(4−27)式で表わされると考えると，

$$Z = r \cdot \exp(j\theta) \tag{4-27}$$

サンプリング周期T_s/nのときの特性根は等価的に次式のようになる。

$$Z_{1/n} = \sqrt[n]{r} \cdot \exp(j \cdot \theta/n) \tag{4-28}$$

したがって，サンプリング周期を$T_s \rightarrow T_s/n$とすることによって，半径は$\sqrt[n]{r}$と少し大きくなるが，θがθ/nとなり，図4−2，4−3．で示したINMの方が劣っている領域のかなりの部分をINMのすぐれている領域にもってくることが出来ることが分かる。

ところで，サンプリング周期は小さくすればする程推定誤差は小さくなるように思われるが実際には，サンプル個数が有限であるから，どこかに最適なサンプリング周期が存在することになる。

そこで，サンプル個数をパラメータとしてサンプリング周期を変化したときのMLIMとINMによる推定誤差を検討した。

図4−8．はサンプル数が10個，20個，40個の場合のINMによる推定誤差を表わしている。図4−9．は同じく，サンプル数が10個，20個，40個の場合のMLIMによる推定誤差を表わしている。

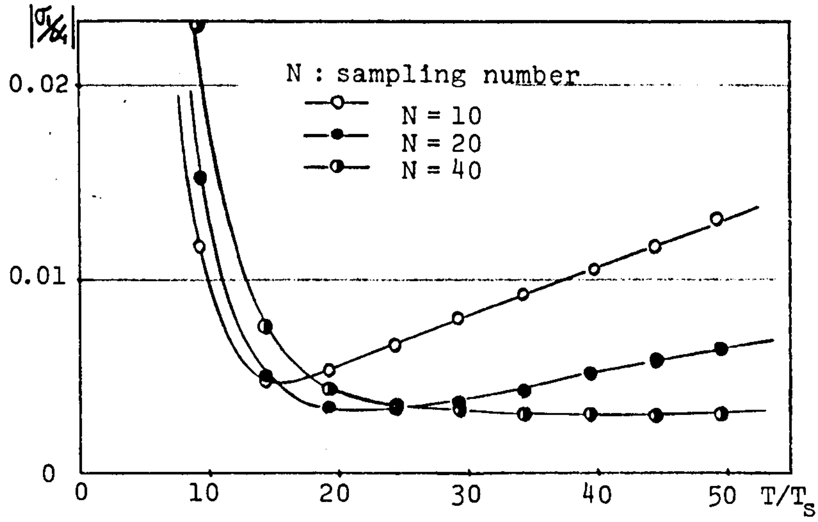
図の説明に，$\delta/\omega = \tan 27^\circ$，とあるのは，系の特性根が，

s−平面上で、$s=-\delta\pm j\omega$と表わされると考え、インパルス応答の1周期当りの減衰を表わす量として、δ/ωを考えている。$\delta/\omega=\tan 27^\circ$となる場合のインパルス応答は図4−11.(a)に示す。また、図の横軸：T/T_sはインパルス応答の1周期中に入るサンプル数を表わしている。（T：インパルス応答の周期、T_s：サンプリング周期）図の縦軸：$|\sigma_i/\alpha_i|$ $(i=1,2)$は、サンプリング周期を変えると、もとの系は同じでも、パルス伝達関数が、したがって、そのパラメータα_iも変わるので、推定誤差のサンプリング周期による影響を考えるため、単にその時のα_iの分散の大きさだけでなくα_iで正規化した量で比較することにした。

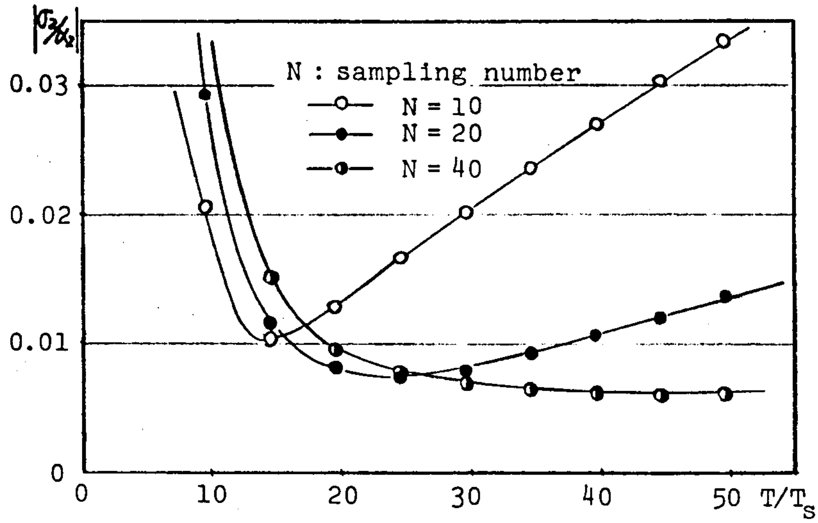
さて、図4−8.、4−9.から、サンプル個数：N＝10の場合は、その系に対して丁度適当なサンプリング周期になっていると、サンプル個数が多い場合に比べて、それ程悪くはないが、系の動特性が時間とともにゆっくりと変動するような場合も想定しているので、最適なサンプリング周期から、少しずれても推定誤差に大きくひびくので、都合が悪いように思われる。それに対して、N＝20の場合は、最適なサンプリング周期のあたりでかなりフラットになっていて、しかも、装置の点でもそれほど大変でもないと思われるので以後N＝20の場合について検討している。N＝40の場合は、N＝10、N＝20よりも確かによいが、N＝20に比べそれ程性能が改善されるわけでもないのでcostの点で不適と思われる。また、これらのグラフより、最適サンプリング周期はほぼインパルス応答の1周期から1.5周期

の間にすべてのサンプル点が入る程度のサンプリング周期になっていることが分かる。

図4-10.～図4-12.はいずれもサンプル数：$N=20$ に固定して、系の特性が、$\delta/\omega=\tan 15°$, $\tan 27°$, $\tan 39°$ の場合に対して、サンプリング周期を変えた時のMLIMとINMによる推定誤差の比較を表わしたものである。いずれも、(a)図に、推定のためのデータとして与えられるインパルス応答のサンプル値を示し、(b)図に α_1、(c)図に α_2 の推定誤差を示している。これらから、系の特性が変わると、最適サンプリング周期も変化し、グラフの様子も変わるが、ほぼ同じような傾向になることが分かる。

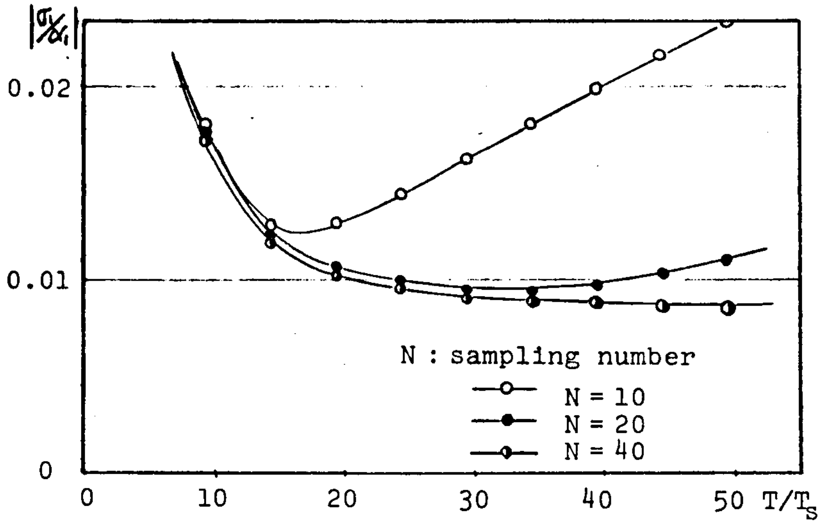


(a) サンプル個数とパラメータα_1の推定誤差

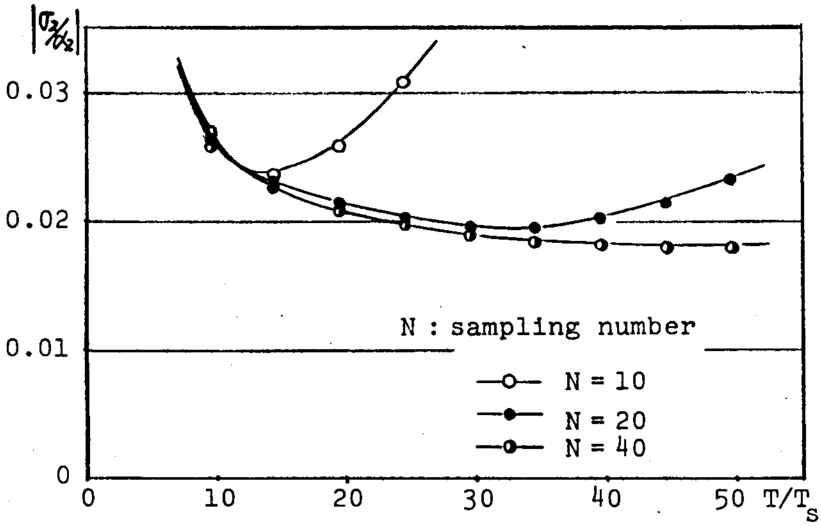


(b) サンプル個数とパラメータα_2の推定誤差

図4-8. サンプル個数とINMによる
推定誤差
($\delta/\omega = \tan 27^\circ$ の場合)



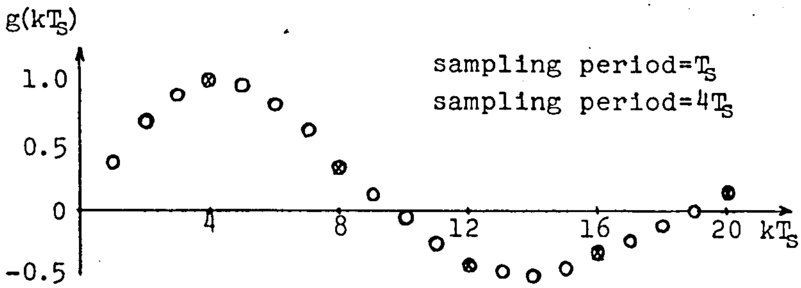
(a)　サンプル個数とパラメータα_1の推定誤差



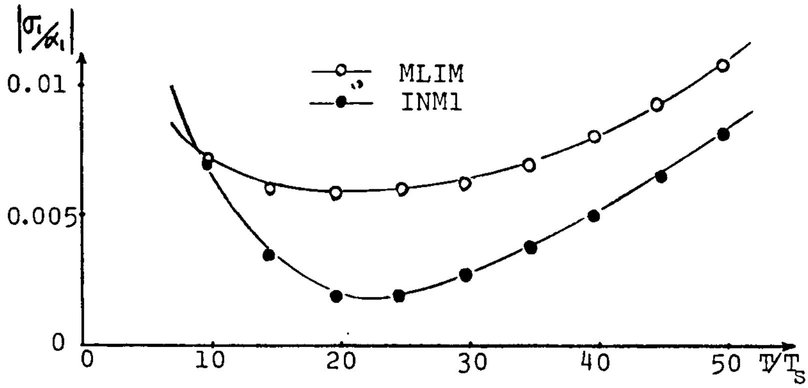
(b)　サンプル個数とパラメータα_2の推定誤差

図4-9.　サンプル個数とMLIMによる推定誤差

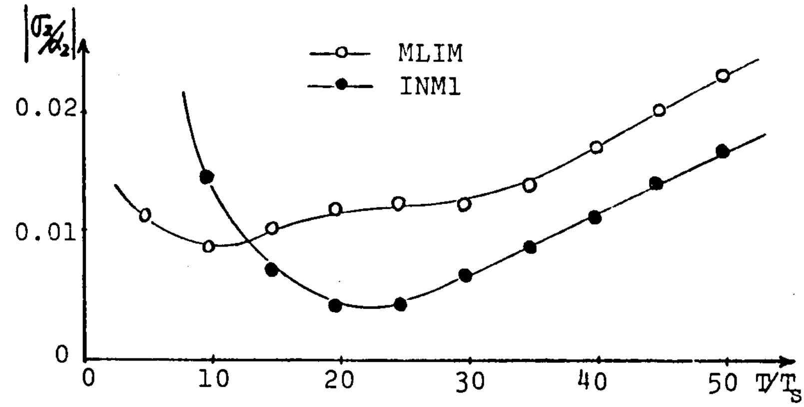
($\delta/\omega = \tan 27^\circ$ の場合)



(a) 推定のためのデータとして与えられるインパルス応答のサンプル値 ($\delta/\omega=\tan 15°$ の場合)

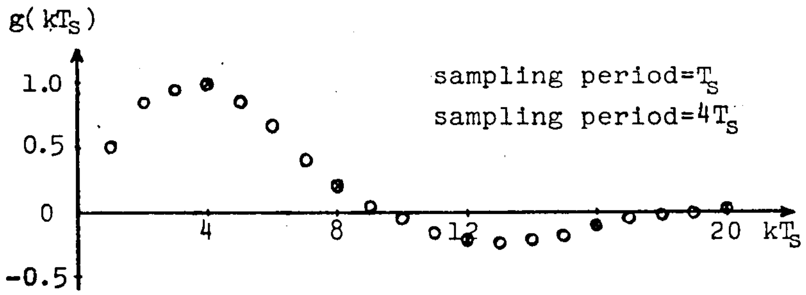


(b) パラメータ α_1 の推定誤差

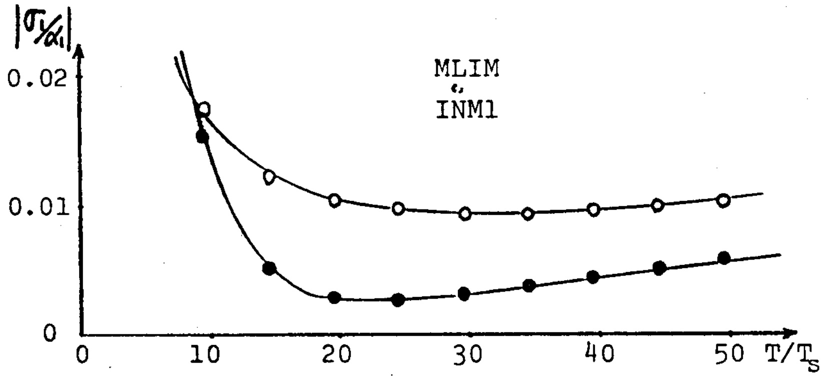


(C) パラメータ α_2 の推定誤差

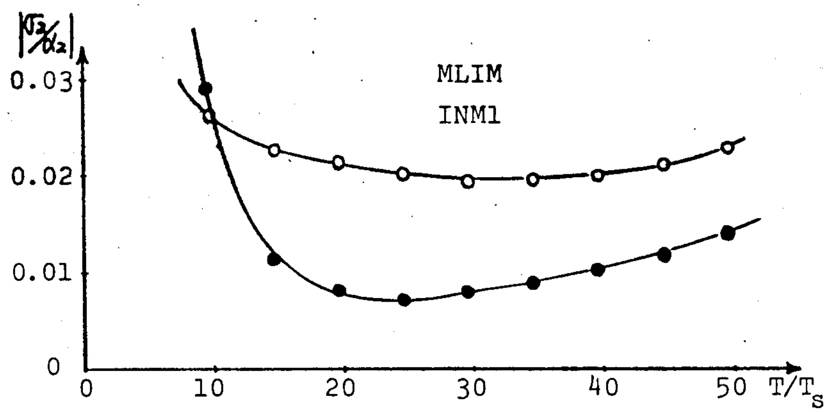
図4-10. サンプリング周期を変えた時の推定誤差
($\delta/\omega = \tan 15°$, $N=20$ の場合)



(a) 推定のためのデータとして与えられるインパルス応答のサンプル値 ($\delta/\omega = \tan 27°$ の場合)

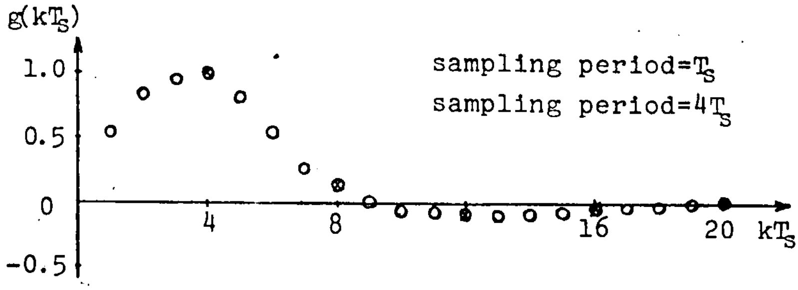


(b) パラメータ α_1 の推定誤差

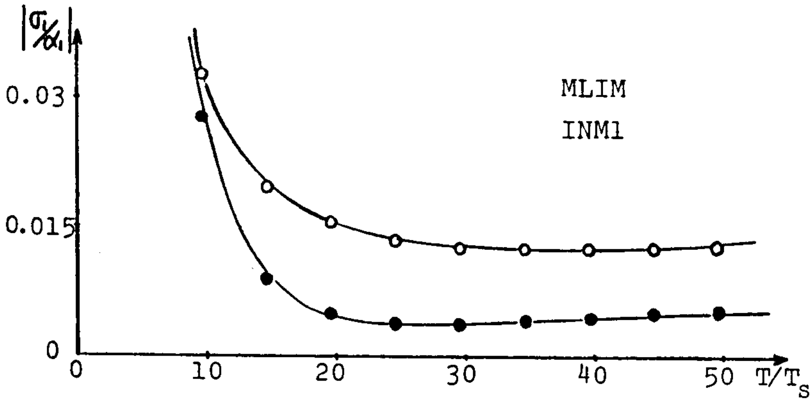


(c) パラメータ α_2 の推定誤差

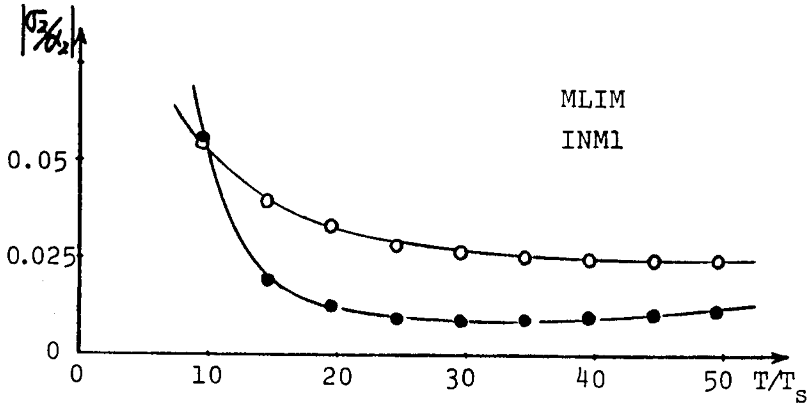
図4-11. サンプリング周期を変えた時の推定誤差
($\delta/\omega = \tan 27°$, $N=20$ の場合)



(a) 推定のためのデータとして与えられるインパルス応答のサンプル値（$\delta/\omega = \tan 39^\circ$ の場合）



(b) パラメータ α_1 の推定誤差



(c) パラメータ α_2 の推定誤差

図4-12. サンプリング周期を変えた時の推定誤差
（$\delta/\omega = \tan 39^\circ$, $N = 20$ の場合）

第5章　パラメータ推定における準最適重み[40)]

§5.1　序

第4章において制御対象のパルス伝達関数を二次系で近似し、そのパラメータをその系のインパルス応答を用いて推定する方法を提案した。これはインパルス応答のサンプル値の測定値をいくつかの組に分けて、パラメータを推定し、それらに適当な重みをつけて平均する方法（特にINM）である。

その際の重みの選定に対する理由づけは定性的なものでしかなかった。そこで、本章では、推定値の分散最小という意味での準最適重みをかなり一般的に導出し、先に提案したINMで適用している重みがこの観点からどの程度のものであるかを検討した。

ところで　ここで扱おうとしているのは次のような問題である。
何かあるパラメータを有限個のノイズを含んだ測定値から推定したいということがある。そしてそのパラメータはそれら測定値の関数になっていて、その関数は与えられている。もし、測定値にノイズがなければ、そのパラメータの値は正確にその関数から計算できる。しかし実際には測定値にはノイズが必ずあるために、パラメータの推定値に誤差を生ずる。

このような場合、普通　何回か測定を行ない、それぞれの測定において得た推定値（以後オ1推定値と呼ぶ）を何んらかの意味で平均して最終的な推定値を得ることを行なう。ここでは、オ1推定値の重みづき平均により最終的な推定値を得ることを考えている。その際、与えられたデータから出来るだけ良い最終的な推定値を得るにはその重みを適当に選ぶ必要がある。ここで"良い"というのは、推定値の分散が出来るだけ小さいことを意味している。したがって　ここでは推定値の分散を最小にするような重みを最適重みと呼ぶことにする。

一般には、そのような最適重みを正確に求めることはむずかしい。しかし、第1推定値を計算する推定式（以後第1推定式と呼ぶ。）が特別な形をしているときには、そのような最適重みを近似的に求めることが出来る。すなわち、準最適重みを得ることが出来る。ここでは、第1推定式が、分母、分子とも測定値の一次式で与えられる場合、分母、分子とも測定値の2次式で与えられる場合について検討した。

§5.2 第1推定式が1次式の場合

〔定理1〕

（5－1）式に示すような第1推定式の分母、分子が測定値の1次式で表わされていて、各回の測定値にもとづいた推定値（第1推定値）に適当な重みをつけて平均し最終的な推定値を得るとき、推定値の分散最小という意味で現実に利用出来る準最適重みは〔仮定A〕、〔仮定B〕のもとでは、第1推定式の分母の2乗に比例する重みである。

$$\hat{\theta}_i = \sum_{j=1}^{m} b_j (y_{ji} + \delta_{ji}) \Big/ \sum_{j=1}^{m} a_j (x_{ji} + \varepsilon_{ji}) \qquad (5-1)$$

ただし

$\hat{\theta}_i$ ： i回目の測定による第1推定値

a_j, b_j ： i回目の測定 iに無関係な定数

x_{ji}, y_{ji} ： i回目の測定における測定値の真値

$\varepsilon_{ji}, \delta_{ji}$ ： i回目の測定における測定値に含まれるノイズ

〔仮定A〕

各測定値に含まれるノイズは、分母、分子それぞれ同一分散 σ_ε^2, σ_δ^2 をもち、平均値零で互いに無相関とする。

〔仮定B〕

分母、分子をそれぞれ、ノイズについて展開したとき、ノイズの2次以上の項は真値の2乗和に比べて無視出来るものとする。

〔証明〕

まず、測定は n 回行なうものとしよう。

第1推定式の分母に注目して、(5−2)式に示すような重み、W_i を考える。

$$W_i \triangleq \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j (x_{ji} + \varepsilon_{ji}) \qquad (5-2)$$

ここで、i は i 回目の測定を示す添字。

λ_i は一般には測定値の関数である。

いま、(5−1)式の $\hat{\theta}_i$ に(5−2)式の W_i を乗じて平均することにより、最終的な推定値 $\hat{\theta}$ を得るものとする。すなわち、(5−3)式により $\hat{\theta}$ を得るものとする。

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j (y_{ji} + \delta_{ji})}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j (x_{ji} + \varepsilon_{ji})} \qquad (5-3)$$

〔仮定B〕を用いて(5−3)式を次式のように近似的に変形する。

$$\hat{\theta} \cong \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j y_{ji}}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_j x_{ji}} \left\{ \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j \delta_{ji}}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot y_{ji}} \right) \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j \varepsilon_{ji}}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot x_{ji}} \right) \right\} \tag{5-4}$$

つぎに、〔仮定A〕を用いて、$\hat{\theta}$ の分散 σ^2 を求め整理すると、

$$\sigma^2 \cong (\sigma_\delta^2 \cdot K^2 + \sigma_\varepsilon^2 \cdot \theta^2) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^2 \right) \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot x_{ji} \right) \right\} \tag{5-5}$$

ただし、

$$\theta \triangleq \sum_{j=1}^{m} b_j y_{ji} \Big/ \sum_{j=1}^{m} a_j x_{ji} \tag{5-6}$$

(これは、推定式において測定値にノイズのない場合であるから、パラメータの真値であり、iに無関係な定数になる。)

$$K^2 \triangleq \sum_{j=1}^{m} b_j^2 \Big/ \sum_{j=1}^{m} a_j^2 \tag{5-7}$$

(5-5)式において変数 λ_i によって σ^2 が影響を受けるのは{ }の部分であるから、これを P とおく。

$$P = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot x_{ji} \right)^2 \tag{5-8}$$

上式を λ_i に関して微分して、$\partial P / \partial \lambda_i = 0$ とおくと、

$$\lambda_i = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot x_{ji}} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot x_{ji} \right) \tag{5-9}$$

(5-9)式の右辺の最初の(　)の中はiに無関係な定数になるのでこれをKとおくと、

$$\lambda_i = K\cdot\sum_{j=1}^{m} a_j\cdot x_{ji} \qquad (5-10)$$

したがって、λ_iが(5-10)式で示されるような値のとき、Pは最小、すなわちσ^2は最小になる。このことは、又λ_iを(5-10)式に選んだときのPの値をP_Kとすると、

$$P_K = 1\Big/\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_{ji}\right)^2 \qquad (5-11)$$

となり、一方Schwarzの不等式から、

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right\}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_{ji}\right)^2\right\} \geq \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{m} a_j x_{ji}\right\}^2 \qquad (5-12)$$

であるから、$P \geq P_K$となり これによっても(5-10)式で示されるλ_iのときが最適であることが分かる。

すなわち、(5-10)式のλ_iを(5-2)式に代入して得られるW_iが

$$W_i = K\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_{ji}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\,(x_{ji}+\varepsilon_{ji})\right) \qquad (5-13)$$

$\hat{\theta}$の分散σ^2を最小にする最適重みであることが分かる。
しかし、(5-13)式の右辺にある$\left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_{ji}\right)$は測定値の真値の和であるから、実際には使えないものであって、その測定値$\left\{\sum_{j=1}^{m} a_j(x_{ji}+\varepsilon_{ji})\right\}$を代用することになる。したがって、実際に利用出来る分散最小の意味での準最適重みは、才1推定式$\hat{\theta}_i$の分母の2乗に比例するような量である。

(証明終り)

§5.3 第1推定式が2次式の場合

[定理 2]

(5−14)式に示すような第1推定式の分母,分子が測定値の2次式で表わされていて,各回の測定値にもとづいた推定値(第1推定値)に適当な重みをつけて平均し最終的な推定値を得るとき,推定値の分散最小という意味で現実に利用出来る準最適重みは,[仮定A],[仮定B]のもとでは,第1推定式の分母に比例する重みに,(5−23)式の補正係数を乗じたものである。

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{j,k}^{m} b_{jk}(y_{ji}+\delta_{ji})(y_{ki}+\delta_{ki})}{\sum_{j,k}^{m} a_{jk}(x_{ji}+\varepsilon_{ji})(x_{ki}+\varepsilon_{ki})} \qquad (5-14)$$

ただし,

$\hat{\theta}_i$: i回目の測定による第1推定値

a_{jk}, b_{jk} : i回目の測定に無関係な定数

x_{ji}, y_{ji} : i回目の測定における測定値の真値

$\varepsilon_{ji}, \delta_{ji}$: i回目の測定における測定値に含まれるノイズ.

[証明]

[定理1]の証明と殆んど同じように行なう。

まず,測定はn回行なうものとし,第1推定式の分母に注目して(5−15)式に示すような重みw_iを考える。

$$W_i = \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} a_{jk} \cdot (x_{ji} + \varepsilon_{ji})(x_{ki} + \varepsilon_{ki}) \qquad (5-15)$$

ここで i は i 回目の測定を示す添字であり，λ_i は一般に測定値の関数である。

いま(5−14)式の $\hat{\theta}_i$ に(5−15)式の W_i を乗じて平均することにより，最終的な推定値 $\hat{\theta}$ を得るものとする。すなわち，(5−16)式により $\hat{\theta}$ を得るものとする。

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} b_{jk} (y_{ji} + \delta_{ji})(y_{ki} + \delta_{ki})}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} a_{jk} (x_{ji} + \varepsilon_{ji})(x_{ki} + \varepsilon_{ki})} \qquad (5-16)$$

上式に，〔仮定B〕を用いて，$O(\varepsilon^2)$，$O(\delta^2)$ を無視して変形し，次式を得る。

$$\hat{\theta} \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} b_{jk} y_{ji} \cdot y_{ki}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} a_{jk} x_{ji} \cdot x_{ki}} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} b_{jk} (y_{ji} \cdot \delta_{ki} + y_{ki} \cdot \delta_{ji})}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} b_{jk} y_{ji} \cdot y_{ki}} \right) \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} a_{jk} (x_{ji} \cdot \varepsilon_{ki} + x_{ki} \cdot \varepsilon_{ji})}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} a_{jk} \cdot x_{ji} \cdot x_{ki}} \right) \right\} \qquad (5-17)$$

つぎに，〔仮定A〕を用いて，$\hat{\theta}$ の分散 σ^2 を求め，整理すると，

$$\sigma^2 \cong \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} b_{jk} y_{ji} \cdot y_{ki}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} a_{jk} x_{ji} \cdot x_{ki}} \right\}^2 \cdot \left\{ \frac{\sigma_\delta^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot \left(\sum_{j,k}^{m} b_{jk}^2 (y_{ji}^2 + y_{ki}^2) + 2 \sum_{j=1}^{m} b_{jj}^2 y_{ji}^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} b_{jk} y_{ji} \cdot y_{ki} \right)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot \left(\sum_{j,k}^{m} a_{jk}^2 (x_{ji}^2 + x_{ki}^2) + 2 \sum_{j=1}^{m} a_{jj}^2 x_{ji}^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^{m} a_{jk} \cdot x_{ji} \cdot x_{ki} \right)^2} \right\} \qquad (5-18)$$

ここで式を簡単にするため次のような文字を導入する。

$$A_i \triangleq \sum_{j,k}^{m} a_{jk}\, x_{ji} \cdot x_{ki}$$

$$B_i \triangleq \sum_{j,k}^{m} b_{jk} \cdot y_{ji} \cdot y_{ki}$$

$$\theta \triangleq B_i / A_i$$

（これは（5−14）式において測定値にノイズのない場合であるから定数になる。）

$$C_i \triangleq \sum_{j,k}^{m} a_{jk}^2 \left(x_{ji}^2 + x_{ki}^2 \right) + 2 \sum_{j=1}^{m} a_{jj}^2 \cdot x_{ji}^2$$

$$D_i^2 \triangleq \sum_{j,k}^{m} b_{jk}^2 \cdot \left(y_{ji}^2 + y_{ki}^2 \right) + 2 \sum_{j=1}^{m} b_{jj}^2 \cdot y_{ji}^2 \qquad (5-19)$$

（5−18）式に（5−19）式を用いて整理すると、

$$\sigma^2 = \theta^2 \cdot \left\{ \sigma_\delta^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot D_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot B_i \right)^2} + \sigma_\varepsilon^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot C_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot A_i \right)^2} \right\} \qquad (5-20)$$

さらに $B_i / A_i = \theta$ を代入して、整理すると、

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot \left(\sigma_\delta^2 \cdot D_i^2 + \theta^2 \cdot \sigma_\varepsilon^2 \cdot C_i^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot A_i \right)^2} \qquad (5-20)'$$

（5−20）′式の両辺を、λ_i について微分し、$\partial \sigma^2 / \partial \lambda_i = 0$ とおいて整理すると、

$$\lambda_i = \left(\frac{A_i}{\sigma_\delta^2 \cdot D_i^2 + \theta^2 \sigma_\varepsilon^2 \cdot C_i^2} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot \left(\sigma_\delta^2 \cdot D_i^2 + \theta^2 \sigma_\varepsilon^2 \cdot C_i^2 \right)}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot A_i} \right) \qquad (5-21)$$

さらに、簡単のため

$$E_i^2 \triangleq \sigma_\delta^2 \cdot D_i^2 + \theta^2 \cdot \sigma_\varepsilon^2 \cdot C_i^2 \tag{5-22}$$

を導入すると、

$$\lambda_i = \left(A_i / E_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot E_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot A_i \right) \tag{5-23}$$

ここで、$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 E_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i\right)$ は i には無関係な定数であるから、これを K とおくと、

$$\lambda_i = K \cdot \left(A_i / E_i^2 \right) \tag{5-23$'$}$$

λ_i として（5−23）式を選んだとき（5−20)$'$式の σ^2 は最小になる。すなわち、（5−23）式を（5−15）式に代入して求まる w_i が $\hat{\theta}$ の分散 σ^2 を最小にする最適重みである。

$$w_i = K \cdot \left(A_i / E_i^2 \right) \cdot \sum_{j,k}^{m} a_{jk} \left(x_{ji} + \varepsilon_{ji}\right)\left(x_{ki} + \varepsilon_{ki}\right) \tag{5-24}$$

次に、A_i/E_i^2 が定数になるのはどのような場合かを考える。
第1推定式 $\hat{\theta}_i$ として次の（5−25）式を考える。

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} \left(y_{ji} + \delta_{ji}\right)^2}{\sum_{j=1}^{m'} \left(x_{ji} + \varepsilon_{ji}\right)^2} \tag{5-25}$$

(5.3.12)式について、(5.3.6)、(5.3.9)式より A_i, E_i^2 を求めると

$$A_i = \sum_{j=1}^{m'} x_{ji}^2 \tag{5-26}$$

$$E_i^2 = 4\cdot\sigma_\delta^2\cdot\sum_{j=1}^{m} y_{ji}^2 + 4\cdot\theta^2\cdot\sigma_\varepsilon^2\cdot\sum_{j=1}^{m'} x_{ji}^2 \tag{5-27}$$

$$\therefore\ A_i/E_i^2 = \frac{1}{4(\sigma_\delta^2+\theta\cdot\sigma_\varepsilon^2)\cdot\theta} = const. \tag{5-28}$$

ただし

$$\theta \doteq \sum_{j=1}^{m} y_{ji}^2 \Big/ \sum_{j=1}^{m'} x_{ji}^2 \tag{5-29}$$

したがって、第1推定式 $\hat{\theta}_i$ が(5-26)式のような場合には、A_i/E_i^2 が定数となり、$\hat{\theta}$ の分散を最小にするような重みは第1推定式の分母に比例するような重みであることが分かる。しかし一般には A_i/E_i^2 は i 回目の測定 i に依存する量であるので、準最適重みは、分母に比例する重みに (A_i/E_i^2) 倍だけの補正を必要とする。

(証明終り)

§5.4 実際問題への定理の適用

つぎに、§4.5で提案したINMにおいて採用している重みを上記の観点から検討してみよう。

INM_I における第1推定式 $\hat{\alpha}_1^{(k)}$, $\hat{\alpha}_2^{(k)}$ は分母、分子とも測定値の2次式であるから〔定理2〕の場合に一応あてはまる。しかし、分母、分子の測定値に含まれる

ノイズが互いに独立という仮定が満足されないので厳密には適用出来ないのであるが，一応の目安として適用してみよう。

$$\hat{\alpha}_1^{(k)} = \frac{(g_1+\varepsilon_1)(g_{2k}+\varepsilon_{2k})-2(g_k+\varepsilon_k)(g_{k+1}+\varepsilon_{k+1})}{(g_k+\varepsilon_k)^2} \qquad (5-30)$$

$$\hat{\alpha}_2^{(k)} = \frac{-(g_1+\varepsilon_1)(g_{2k}+\varepsilon_{2k})+(g_k+\varepsilon_k)(g_{k+1}+\varepsilon_{k+1})}{(g_k+\varepsilon)(g_{k-1}+\varepsilon_{k-1})} \qquad (5-31)$$

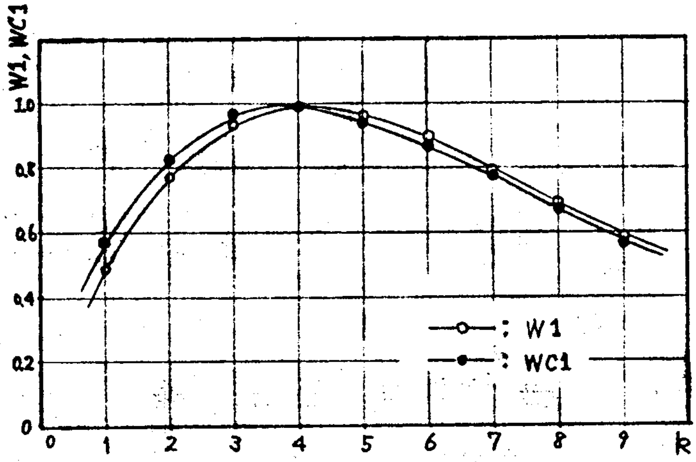
$\hat{\alpha}_1^{(k)}$, $\hat{\alpha}_2^{(k)}$ について，補正項 A_i/E_i^2 を求めてみる。

$$\left(A_k/E_k^2\right)_1 = g_k^2 \Big/ \left\{(g_1^2+g_{2k}^2+4g_k^2+4g_{k+1}^2)+4\cdot\alpha_1^2\cdot g_k^2\right\}\cdot\sigma_n^2$$
$$\neq const. \qquad (5-32)$$

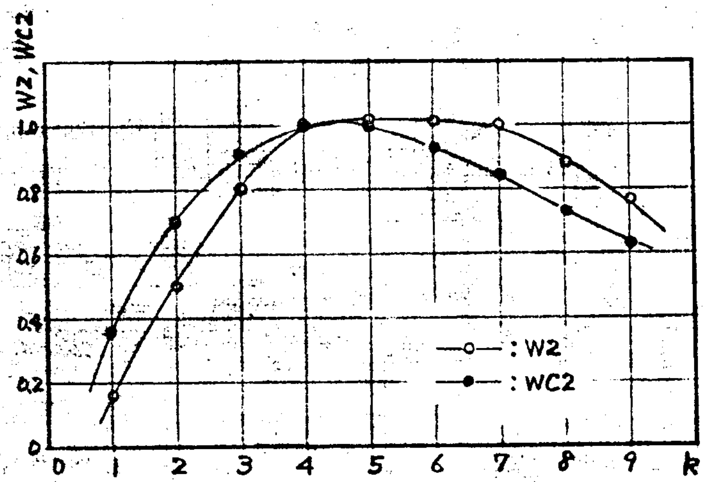
$$\left(A_k/E_k^2\right)_2 = g_{k-1}\cdot g_k \Big/ \left\{(g_1^2+g_{2k}^2+g_k^2+g_{k+1}^2)+\alpha_2^2\cdot(g_{k-1}^2+g_k^2)\right\}\sigma_n^2$$
$$\neq const. \qquad (5-33)$$

(5−32), (5−33)式から分かるように，いずれも定数ではない。しかしいくつかの例について，(5−32), (5−33)式を計算してみると，kによりそれほど大きな差はなく，又その値が小さい所では才1推定式の分母の大きさも小さくなっており，全体としての重みも小さい所であるから，実際問題としては，(A_i/E_i^2)の補正項は計算もめんどうであることから定数としてみなしてよいのではないかと思われる。

図5-1.，5-2.に A_i/E_i^2 を考慮した最適重みと，それをconst.とした準最適重みの一例を示す。図5-1.は特性根が実根の場合で，(a)図はパラメータ α_1 に関する重み，(b)図はパラメータ α_2 に関する重みである。図5-2.は特性根が複素根の場合についての同様なグラフである。これらから，パラメータ α_1 に関しては殆んど最適重みと準最適重みは一致するようである。パラメータ α_2 に関しては少しずれるが実用的には問題がないように思われる。

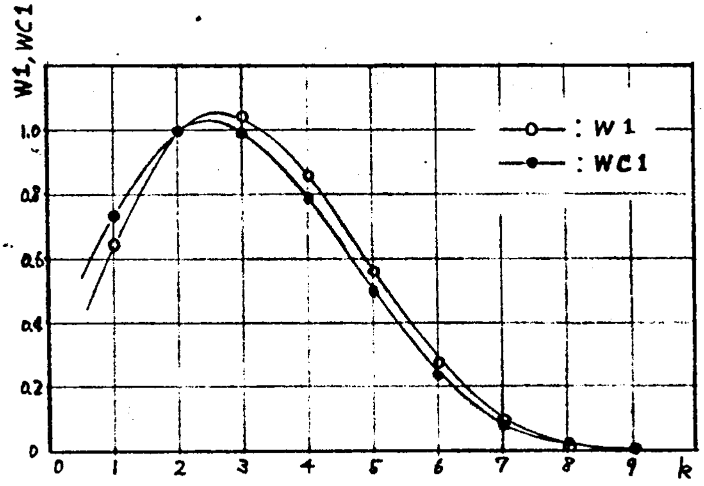


(a) パラメータα_1の最適重み（W1），
準最適重み（WC1）

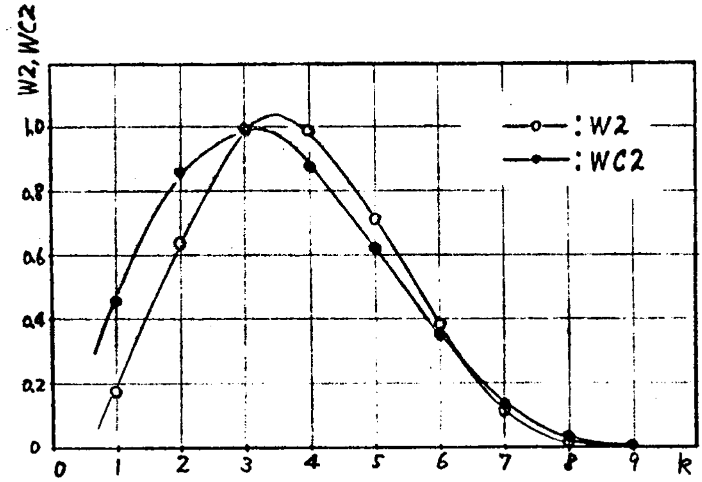


(b) パラメータα_2の最適重み（W2），
準最適重み（WC2）

図5-1. 最適重みと準最適重み
（Z1 = 0.9，Z2 = 0.7）



(a) パラメータ α_1 の最適重み ($W1$),
準最適重み ($WC1$)



(b) パラメータ α_2 の最適重み ($W2$),
準最適重み ($WC2$)

図 5-2. 最適重みと準最適重み
($Z1, Z2 = 0.85 \cdot e^{\pm j\pi/10}$)

第6章　連続系と等価的離散値系

§6.1　序

前章の§4.6で推定法の比較を行なったが、これは制御系が2次系で推定のために仮定した系も2次系であって推定すべきパラメータの真値が存在していたので、推定法の良さに対する評価規範として真値からの偏りとかそのまわりの分散を使用することが出来た。しかし このような場合でもパラメータが複数個あるので個々のパラメータについては評価規範が考えられても全体としてはよくわからない場合もある。 また、推定すべき制御系が2次系でない場合にはパラメータの真値が存在しないので、§4.6で用いたような評価規範は用いることが出来ない。 したがって、推定法の良否はその推定により得られた情報を用いていかによい制御性能が得られるか、すなわち、制御系全体としての評価規範により、推定法の良否を決定しなければならない。 しかも、その評価は推定により得られるのがパルス伝達関数であるから、離散値系のままで行ないたい。 また、それがもとの連続系にもあてはまるものでなければならない。

したがって、実際の連続系とそれにある意味で等価な離散値系の関係を調べる必要がある。 すなわち、単に微分を差分に、積分を和に置き換えるような操作だけでは等価な関係が得られず非常に簡単な例でも本質的な違いのあることを示し、また、どのような考慮をはらえば等価な関係が得られるかを制御装置として可変ゲインを選んだ簡単な場合について検討した。そして、そのような関係を導く評価規範によって得られる

最適ゲインを古典的制御論より得られる推奨値との関係から論じている。さらに，この評価規範によるMLIMとINMの推定機構としての良さの比較を行なった。

§6.2　連続系と離散値系におけるパラメータの関係

いま，推定すべき連続系の制御対象の伝達関数 $G(s)$ が次式で表わされるような2次系を考える。

$$G(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} \tag{6-1}$$

このパラメータ a, b, A, B は推定のために仮定した離散値系におけるパルス伝達関数 $G_\alpha(z)$ のパラメータ α_i $(i=1,2,3)$ の推定値から求めるものとする。ただし，$G_\alpha(z)$ としては，前章までで扱った次式を用いる。

$$G_\alpha(z) = \frac{\alpha_3 z^{-1}}{1+\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}} \tag{6-2}$$

さて，$G(s)$ と $G_\alpha(z)$ のパラメータの関係を求めてみる。
$G(s)$ を離散値系のパルス伝達関数に等価変換したものを $G^*(z)$ とすると，

$$G^*(z) = \frac{A}{1 - z^{-1} e^{-aT_s}} + \frac{B}{1 - z^{-1} e^{-bT_s}}$$

$$= \frac{(A+B) - (Ae^{-bT_s} + Be^{-aT_s}) z^{-1}}{1 - (e^{-aT_s} + e^{-bT_s}) z^{-1} + e^{-aT_s} \cdot e^{-bT_s} \cdot z^{-2}} \qquad (6-3)$$

(ただし、T_s はサンプリング周期である。)

ここで直達分がない場合を考えると、

$$A + B = 0 \qquad \therefore \quad B = -A$$

であるから $G^*(z)$ は次式のようになる。

$$G^*(z) = \frac{A(e^{-aT_s} - e^{-bT_s}) z^{-1}}{1 - (e^{-aT_s} + e^{-bT_s}) z^{-1} + e^{-(a+b)T_s} \cdot z^{-2}} \qquad (6-4)$$

(6-2), (6-4) 式を比較して、

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -(e^{-aT_s} + e^{-bT_s}) \\ \alpha_2 &= e^{-(a+b)T_s} \\ \alpha_3 &= A(e^{-aT_s} - e^{-bT_s}) \end{aligned}\right\} \qquad (6-5)$$

また、逆に、

$$\left.\begin{aligned} a &= (1/T_s) \cdot \ln\left\{\left(-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}\right)/2\right\} \\ b &= (1/T_s) \cdot \ln\left\{\left(-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}\right)/2\right\} \\ A &= \alpha_3 / \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2} \end{aligned}\right\} \qquad (6-6)$$

(ただし、$b > a$ としている。)

なお、このとき（6−1）式は次のように書ける。

$$G(s) = \frac{A(b-a)}{(s+a)(s+b)} \qquad (6-7)$$

（ただし、A, a, b は（6−6）式より与えられるもの。）

§6.3 連続系の評価規範と最適ゲイン

（6−7）式の $G(s)$ を用いて、図 6−1. のようなシステムを構成したとき、システム全体の評価規範（以後 Performance Index の略 P.I. を用いる）が最小となるようなゲイン k_c の最適値、すなわち、最適ゲイン k_{co} を求める問題を考える。

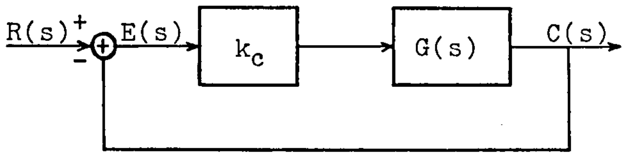


図 6−1. 連続系（$G(s)$：推定により得られる等価的２次系）

ここで、P.I として どのようなものを選ぶかが問題となる。
一般に、P.I としては indicial 応答とその定常値との差の２乗積分がよく用いられている。　図 6−2. に 図 6−1. のシステムの indicial 応答の概念図を示す。

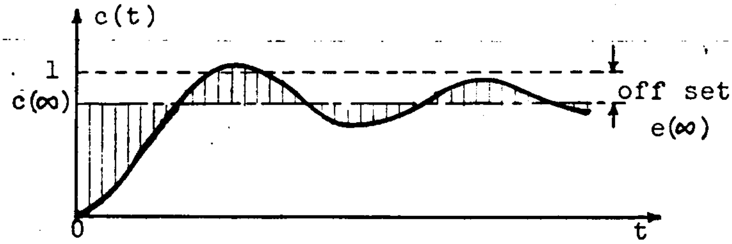


図 6-2. 連続系の indicial 応答の概念図

図 6-2. において縦線をほどこした部分の2乗積分が上述の P.I. であるから、これを PC1′ とすると、次式のようになる。

$$PC1' = \int_0^\infty \{c(\infty) - c(t)\}^2 dt = \int_0^\infty \{e(t) - e(\infty)\}^2 dt \tag{6-8}$$

この P.I では、制御装置のゲインが 0 のとき最適となるような Trivial な結果が得られる。したがって、C(t) を C(∞) で正規化する必要がある。

$$\frac{C(\infty) - C(t)}{C(\infty)} = \frac{\{1 - e(\infty)\} - \{1 - e(t)\}}{1 - e(\infty)} = \frac{e(t) - e(\infty)}{1 - e(\infty)} \tag{6-9}$$

であるから、このように正規化した P.I. を PC1 とすると、

$$PC1 = \frac{1}{\{1 - e(\infty)\}^2} \int_0^\infty \{e(t) - e(\infty)\}^2 dt \tag{6-10}$$

このとき、e(∞) は s 領域の最終値定理より

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = ab/(ab + K_c) \tag{6-11}$$

ただし，　$K_c \triangleq A(b-a)\cdot k_c$　(6-12)

さてつぎに PC1 を求めよう。

ここで

$$F(s) = E(s) - e(\infty)\cdot 1/s$$

$$= \frac{K_c}{ab+K_c}\cdot\frac{s+(a+b)}{(s+a)(s+b)+K_c} \qquad (6-13)$$

を考える。（ただし $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] \triangleq f(t) = e(t) - e(\infty)$）

t, s 領域での Parseval の等式は

$$\int_0^\infty \{f(t)\}^2 dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\cdot F(-s)\,ds \qquad (6-14)$$

であるから

$$y_1 \triangleq \int_0^\infty \{f(t)\}^2 dt = \sum_{F(s)\text{のすべての極について}} \mathrm{Residues}\,[F(s)\cdot F(-s)] \qquad (6-15)$$

を計算すると，

$$y_1 = \left(\frac{K_c}{ab+K_c}\right)^2 \cdot \frac{\{(a+b)^2 + (ab+K_c)\}}{2(ab+K_c)\cdot(a+b)} \qquad (6-16)$$

また

$$1/\{1-e(\infty)\}^2 = \left(\frac{ab+K_c}{K_c}\right)^2 \qquad (6-17)$$

であるから，

$$PC1 = \frac{(a+b)}{2(ab+K_c)} + \frac{1}{2(a+b)} \tag{6-18}$$

となる。これを図示すると，図6−3.のようになる。

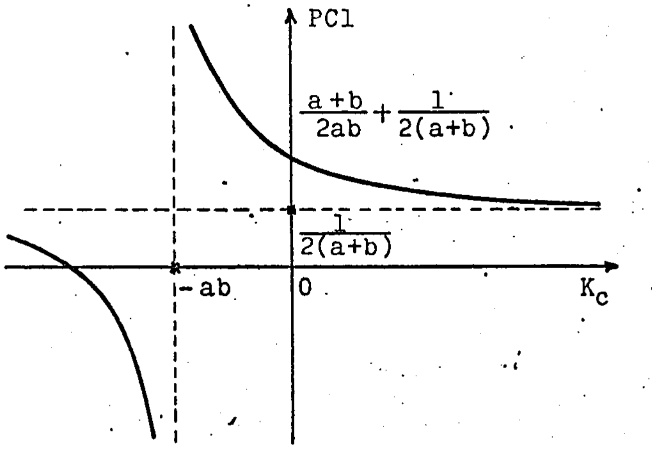


図6−3.　PC1 と K_c との関係

(6−18)式あるいは図6−3.より明らかなように，P.I.として PC1 を選んだときの最適ゲインは存在しない。

これは，(6−13)式の $F(s)$ あるいは時間領域での $f(t)$ を考えるとよく分かる。$F(s)$ の極を S_1，S_2 とすると，

$$S_1, S_2 = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{D}}{2} \tag{6-19}$$

ただし，　$D = (a+b)^2 - 4(ab+K_c)$

であるから，ゲイン K_c がある程度以上大きいと系は振動的になるが，K_c は振動周期にのみ影響し，系の減衰には関係しないので上述のことは物理的にもうなずける。

したがって，P.I.として PC1 を選ぶと，系が振動的になればなるほどよい

ということになって実際問題としては不都合になり，P.Iとしては望ましくない。そこで，P.I.として，系の応答の変化の速さに関する項を考慮に入れる必要が生ずる。そのために（6−20）式に示すような（6.3.3）式におけると同じ正規化による出力の微分値の2乗積分 PC 2′を考える。

$$PC2' = \frac{1}{\{1-e(\infty)\}^2}\int_0^\infty \{\dot{e}(t)-\dot{e}(\infty)\}^2 dt \qquad (6-20)$$

ただしここでは，$\dot{e}(\infty)=0$ である。

PC1 と同じようにして，PC 2′を計算して次式を得る。

$$PC2' = \frac{ab+K_c}{2(a+b)} \qquad (6-21)$$

これを図示すると，図 6−4. のようになる。

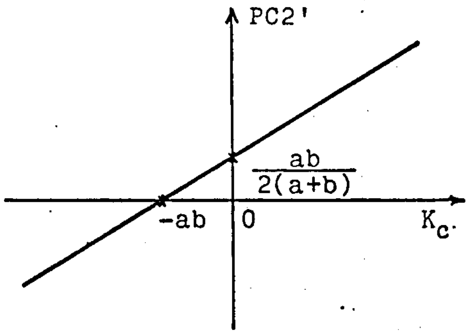


図 6−4.　PC2′と K_c の関係

このPC1 とPC2′は K_c に関して逆傾向にあるのでこの両者を適当な割合いで組合せたものを P.I. にすることを考える。

PC2′に重み W をつけたものを PC2 とし，最終的な P.I. として結局，次式

のような　を考えることにする。

$$PC = PC1 + PC2$$

$$PC1 = \frac{1}{\{1-e(\infty)\}^2}\cdot\int_0^\infty\{e(t)-e(\infty)\}^2 dt$$

$$PC2 = \frac{w}{\{1-e(\infty)\}^2}\cdot\int_0^\infty\{\dot{e}(t)\}^2 dt \qquad (6-22)$$

図6-1の場合に適用して求めると,

$$PC = \frac{(a+b)}{2(ab+K_c)} + \frac{1}{2(a+b)} + \frac{w(ab+K_c)}{2(a+b)} \qquad (6-23)$$

つぎにこのPCを最小にするK_c, すなわち最適ゲインを求める。

$$\frac{\partial}{\partial K_c}(PC) = -\frac{(a+b)}{2(ab+K_c)^2} + \frac{w}{2(a+b)} \qquad (6-24)$$

$\partial PC/\partial K_c = 0$ より

$$K_c = \sqrt{1/w}\cdot(a+b) - ab \qquad (6-25)$$

したがって, (6−12), (6−25)式より制御装置としてのゲインk_cの最適値k_{c0}は

$$k_{c0} = \{\sqrt{1/w}\cdot(a+b) - ab\}/\{A\cdot(b-a)\} \qquad (6-26)$$

以上の関係の概略図を示したのが 図6−5. である。

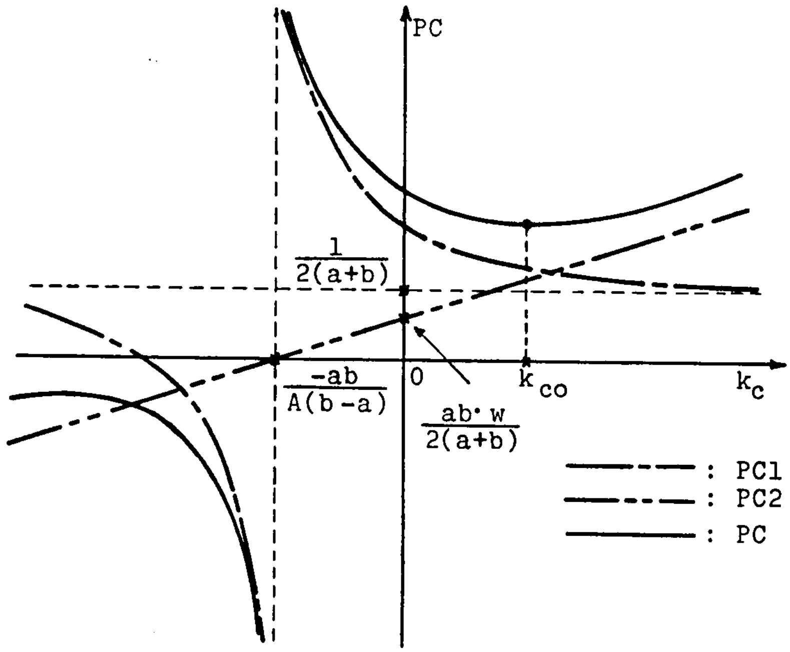


図 6-5. 連続系の評価規範 PC と制御装置のゲイン k_c との関係

§6.4 離散値系の評価規範と最適ゲイン

つぎに §6.3で述べた連続系のふるまいとある意味で等価な（系の入出力のサンプル時点での値が連続系のそれに等しい。）離散値系 図6−6.について §6.3と同様のことを考えてみよう。

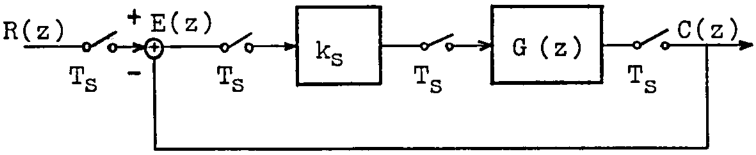


図6−6. 推定のために仮想的に考えた等価的離散値系
（$G_\alpha(z)$は連続系の制御対象$G(s)$を推定したもの）

すなわち，連続系のP.I.つまり（6−22）式と等価な離散値系のP.I.を考え，これを最小にするようなゲイン k_s を求める。そして，この k_s により §6.3で求めた k_c の代用にすることを考える。

（6−22）式に等価な離散値系のP.I.として次式のようなPS1, PS2, PSを考える。

$$PS = PS1 + PS2 \qquad (4-27)_1$$

$$PS1 = \frac{1}{\{1-e(\infty)\}^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\{e(nT_s)-e(\infty)\}^2\cdot T_s \qquad (4-27)_2$$

$$PS2 = \frac{W}{\{1-e(\infty)\}^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\{\dot{e}(nT_s)\}^2\cdot T_s \qquad (4-27)_3$$

ただし，　T_S ：サンプリング周期．

w ：(6−22)式におけるものと同じ重み

まず，$(6-27)_2$式を計算する。

連続系の場合と同様に入力は unit step として，s 領域に対して，Z 領域で計算を行なうことにする。

$$E(z)=\frac{1+\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}}{\{1+(\alpha_1+K_s)z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}\}}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} \tag{6-28}$$

ただし，　$K_s \triangleq k_s\cdot\alpha_3$ 　(6−29)

offset $e(\infty)$ は，

$$e(\infty)=\lim_{n\to\infty} e(nT_s)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})\cdot E(z)$$

$$=\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{1+(\alpha_1+K_s)+\alpha_2} \tag{6-30}$$

連続系の場合と同様に次式のような $F(z)$ を考える。

$$F(z)=E(z)-e(\infty)\cdot 1/(1-z^{-1})$$

$$=\left(\frac{K_s}{1+\alpha_1+K_s+\alpha_2}\right)\cdot\frac{1-\alpha_2\cdot z^{-1}}{\{1+(\alpha_1+K_s)z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}\}} \tag{6-31}$$

また，その逆 Z 変換したものを $f(nT_s)$ とする。

$$f(nT_s)=\mathcal{Z}^{-1}[F(z)]=e(nT_s)-e(\infty) \tag{6-32}$$

ここで

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\{f(nT_s)\}^2$$ を考える。

ところで，t, z 領域での Parseval の等式を求めると，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{f(nT_s)\}^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} F(z)\cdot F(z^{-1})\cdot z^{-1}\,dz \tag{6-33}$$

（Γ：$F(z)$ のすべての極を含む閉領域）

これを用いて，

$$y_1 = \sum_{F(z)\text{のすべての極について}} \left[F(z)\cdot F(z^{-1})\cdot z^{-1}\right] \tag{6-34}$$

留数計算を実行して，

$$y_1 = \frac{K_s^2\cdot\{(1+\alpha_2^2)(1+\alpha_2)+2\alpha_2(\alpha_1+K_s)\}}{(1-\alpha_2)(1+\alpha_1+K_s+\alpha_2)^3\cdot(1-\alpha_1-K_s+\alpha_2)} \tag{6-35}$$

また，(6−30)式より，

$$1/\{1-e(\infty)\}^2 = \left(\frac{1+\alpha_1+K_s+\alpha_2}{K_s}\right)^2 \tag{6-36}$$

であるから，PS1 は次式のようになる。

$$PS1 = \frac{T_s}{2(1-\alpha_2)}\left\{\frac{(1-\alpha_2)^2}{(1+\alpha_1+K_s+\alpha_2)} + \frac{(1+\alpha_2)^2}{(1-\alpha_1-K_s+\alpha_2)}\right\} \tag{6-37}$$

つぎに，$(6-27)_3$ 式の PS2 を計算しよう。
連続系の $\dot{e}(t)=d/dt\{e(t)\}$ に相当するものを離散値系で考える場合，差分の取り方で色々なものが考えられるが，その中で最も簡単な後退差分を用いることにする。すなわち，

$$\dot{e}(nT_s) = \frac{1}{T_s}\left\{e(nT_s) - e(\overline{n-1}\cdot T_s)\right\} \tag{6-38}$$

さらにこれをZ-領域で考えると，

$$\mathfrak{Z}\{\dot{e}(nT_s)\} = \frac{1}{T_s}\{E(z) - E(z)\cdot z^{-1}\}$$

$$= \frac{1}{T_s}\cdot E(z)\cdot(1-z^{-1}) \qquad (6-39)$$

PS1の時と同様に次の$H(z)$, $h(nT_s)$を考える。

$$H(z) = E(z)\cdot(1-z^{-1}) = \frac{1+\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}}{1+(\alpha_1+K_s)z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}} \qquad (6-40)$$

$$h(nT_s) = \mathfrak{Z}^{-1}\{H(z)\} = \dot{e}(nT_s)\cdot T_s \qquad (6-41)$$

$$y_2 \triangleq \sum_{n=1}^{\infty}\{h(nT_s)\}^2 \qquad (6-42)$$

とおいて，t, z 領域での Parseval の等式を用いて計算すると，

$$y_2 = \frac{K_s^2(1+\alpha_2)}{(1-\alpha_2)\{(1+\alpha_2)^2-(\alpha_1+K_s)^2\}} \qquad (6-43)$$

(6-27)$_3$, (6-36), (6-43)式より，

$$PS2 = \frac{W}{T_s}\cdot\frac{(1+\alpha_2)(1+\alpha_1+K_s+\alpha_2)}{(1-\alpha_2)(1-\alpha_1-K_s+\alpha_2)} \qquad (6-44)$$

変形して，

$$PS2 = \frac{W(1+\alpha_2)}{T_s(1-\alpha_2)}\cdot\left\{-1+\frac{2(1+\alpha_2)}{(1-\alpha_1-K_s+\alpha_2)}\right\} \qquad (6-44)'$$

つぎに，(6−27)′，(6−37)，(6−44)′式より，PS を最小にするように K_S を決める。すなわち，制御装置としてのゲイン k_S の最適値 k_{S0} を求める。

$$\frac{\partial PS}{\partial K_S} = \frac{T_S}{2(1-\alpha_2)}\cdot\left\{-\frac{(1-\alpha_2)^2}{(1+\alpha_1+K_S+\alpha_2)^2}+\frac{(1+\alpha_2)^2}{(1-\alpha_1-K_S+\alpha_2)^2}\right\}$$

$$-\frac{W(1+\alpha_2)}{T_S(1-\alpha_2)}\cdot\frac{2(1+\alpha_2)}{(1-\alpha_1-K_S+\alpha_2)^2} \qquad (6-45)$$

$\partial PS/\partial K_S = 0$ とおいて整理すると，

$$(4W+T_S^2)(1+\alpha_2)^2(1+\alpha_1+K_S+\alpha_2)^2$$
$$-T_S^2(1-\alpha_2)^2(1-\alpha_1-K_S+\alpha_2)^2 = 0 \qquad (6-46)$$

上式より K_S を求めると，

$$K_S = \left\{\frac{-\sqrt{4W+T_S^2}\cdot(1+\alpha_2)\pm T_S(1-\alpha_2)}{\sqrt{4W+T_S^2}\cdot(1+\alpha_2)\pm T_S(1-\alpha_2)}\right\}(1+\alpha_2)-\alpha_1 \qquad (6-47)$$

(6−47)式のように，PSの極値を与える K_S は2つ存在するが，最小値を与える求めるものは複号のうち正の符号をとるものである。（図6−7参照）。すなわち，

$$K_S = \left\{\frac{-\sqrt{4W+T_S^2}\cdot(1+\alpha_2)+T_S(1-\alpha_2)}{\sqrt{4W+T_S^2}\cdot(1+\alpha_2)+T_S(1-\alpha_2)}\right\}(1+\alpha_2)-\alpha_1 \qquad (6-48)$$

したがって，(6.4.3)，(6.4.22)式より，制御装置の最適ゲイン k_{S0} は，

$$k_{S0} = \left[\left\{\frac{-\sqrt{4W+T_S^2}\cdot(1+\alpha_2)+T_S(1-\alpha_2)}{\sqrt{4W+T_S^2}\cdot(1+\alpha_2)+T_S(1-\alpha_2)}\right\}(1+\alpha_2)-\alpha_1\right]\Big/\alpha_3 \qquad (6-49)$$

以上の関係の概略図を示したのが 図6-7. である。

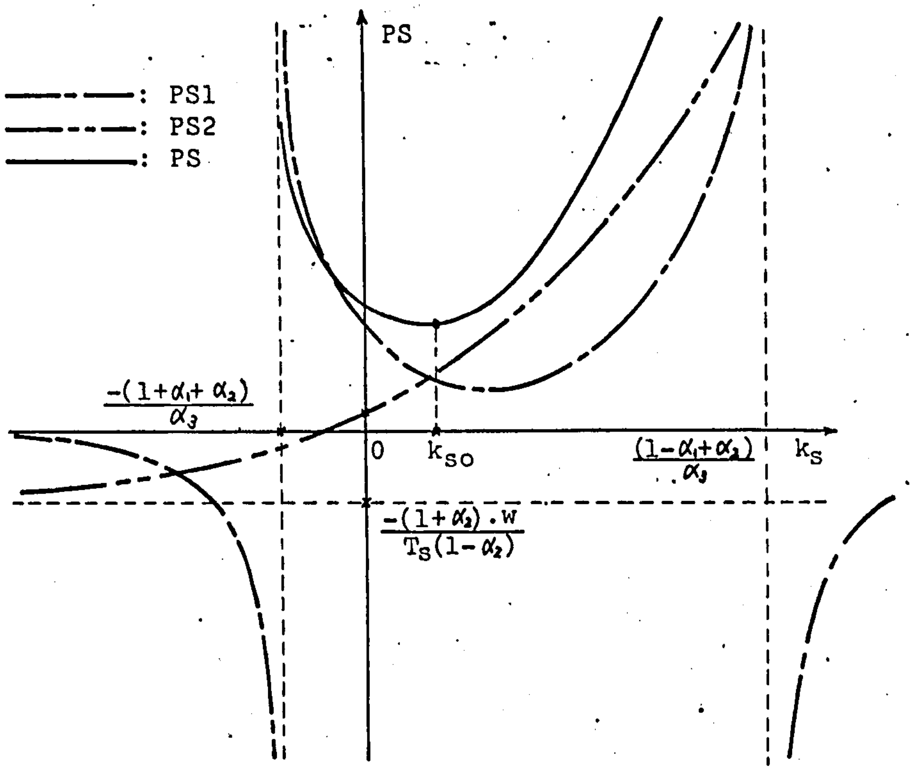


図6-7. 離散値系の評価規範 PS と制御装置の
ゲイン k_s との関係

§6.5 k_c と k_s との関係

図6-1. において、E(s) が分かれば C(s) に関するかぎり、図6-8. のような開ループ系で話をしてもよい。

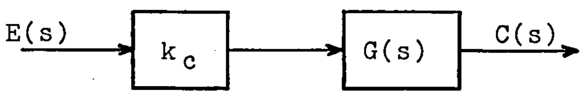


図6-8. 開ループ系 (連続系)

$G(s)$のインパルス応答を$g(t)$とすれば，時刻t_1における出力$C(t_1)$は，

$$c(t_1) = \int_0^{t_1} g(t_1-\tau)\cdot k_c \cdot e(\tau)\,d\tau \qquad (6\text{-}50)$$

ここで，T_sが十分小さければ近似的に次式が成立ち，それを用いて，(6-50)式は(6-52)式のように近似的に書き表わすことが出来る。

$$e(t) \cong e(kT_s) \qquad (kT_s \le t \le \overline{k+1}\cdot T_s)$$

$$g(t-\tau) \cong g(\overline{k-i}\cdot T_s) \qquad (\overline{k-i}\cdot T_s \le t-\tau \le \overline{k-i+1}\cdot T_s)$$

$$(6\text{-}51)$$

$$c(t_1) \cong \sum_{i=0}^{m} g(\overline{m-i}\cdot T_s)\cdot k_c \cdot e(iT_s)\cdot T_s \qquad (6\text{-}52)$$

（ただし，$mT_s \le t_1 \le \overline{m+1}\cdot T_s$）

図6-8.において，(6-51)，(6-52)式が成立するのは図6-9.のシステムである。

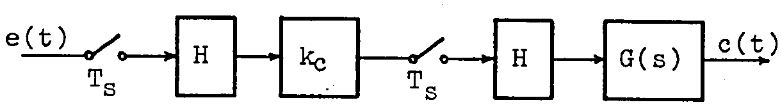


図6-9.　図6-8.の近似系

（H：零次ホールド回路，T_s：サンプリング周期）

一方，図6-6.の離散値系の場合も$E(z)$が分れば，$C(z)$に関するかぎり，図6-10.に示すような閉ループ系で話をしてもよい。

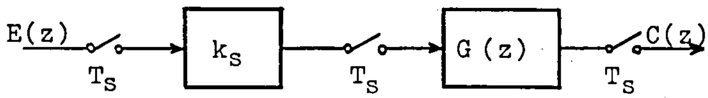


図6-10. 閉ループ系（離散値系）

図6-10の$G_d(z)$は図6-8.の$G(s)$をパルス伝達関数に等価変換したもの（インパルス応答のサンプル時点での値が等しいような等価変換）であるから，時刻$t_i = mT_s$における出力$C(mT_s)$は次式のように表わせる。

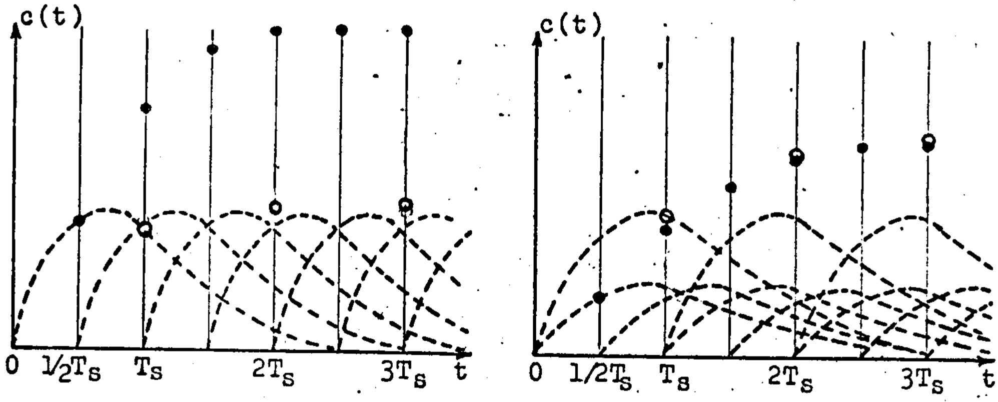
$$C(mT_s) = \sum_{i=0}^{m} g(\overline{m-i}\cdot T_s)\cdot k_s \cdot e(iT_s) \qquad (6-53)$$

(6-52)式と(6-53)式を比較して，

$$k_c \cong k_s/T_s \qquad (6-54)$$

を得る。なお，ここで注意しなければならないことは，(6-52)式はすべての時刻にわたって意味のある式であり，$T_s \to 0$の極限において厳密な式となる近似式である。それに対して，(6-53)式は$t = mT_s$ (m : integer)のときのみ意味のある式であってこれらの点においては厳密に成立つ式である。

さて，(6-54)式の物理的意味をunit step responseを例にとって考察してみよう。



(a) $T_s' = T_s/2$, $k_s' = k_s$　　(b) $T_s' = T_s/2$, $k_s' = k_s/2$

図 6-11. サンプリング周期と制御装置のゲインの選び方による step response への影響

• サンプリング周期 $T_s' = T_s/2$ のとき,

○ サンプリング周期 T_s のとき

図6-11.の(a)図のように、サンプリング周期T_sを$T_s'=T_s/2$にし、しかも制御装置のゲインk_sを$k_s'=k_s$とそのままの場合を考えてみると、サンプリング周期T_s'を用いた時の時刻$t=m'T_s'(=m\cdot T_s)$における出力はサンプリング周期T_sを用いた時の同時刻$t=mT_s$における出力のほぼ2倍の値の値になっていることが分かる。図6-11.の(b)図は$T_s'=T_s/2$のとき制御装置k_sも$k_s'=k_s/2$とした場合のstep responseを描いている。このようにすると、サンプリング周期T_s'を用いた時の時刻$t=m'T_s'(=mT_s)$における出力はサンプリング周期T_sを用いた時の同時刻$t=mT_s$における出力とほぼ一致する。

一般に、$T_s' = T_s/n$ の場合には $k_s' = k_s/n$ にすればよいことも容易に推測出来るであろう。したがって、サンプリング周期が変化しても出力が変化しないようにするためには、制御装置のゲインもそれに比例して変化させればよいことが分かる。すなわち、k_s/T_s が一定になるようにゲインを選べば近似的に連続系と等価になることが分かる。すなわち、k_s/T_s が連続系の制御装置のゲイン k_c に対応するわけで、(6-54)式が妥当な式だということがわかる。

§6.6 P.I. における重み W の決定

(6−26)式からわかるように、最適ゲイン k_{co} は W によって変化するので、システムの安定度、速応性等は W に支配されている。したがって、(6−26)式で与えられる最適ゲイン k_{co} を用いて実際にシステムを構成する場合、重み W を適切なものに選ぶ必要がある。換言すれば、W を適切に選んだときのみ、(6−26)式で与えられる最適ゲイン k_{co} というものはシステムにとって本当に最適であるといえる。そこで、古典制御理論で従来、経験的に望ましいと考えられている制御系の安定度とか速応性を評価するなんらかの特性量を用いて重み W を決定することが考えられる。ここでは、その特性量として共振値 M_p を選び W を決定することにする。

i) 共振値 M_p

図6−1. の系全体の伝達関数 $M(s)$ は、

$$M(s) = \frac{A \cdot k_c (b-a)}{s^2 + (a+b)s + ab + A \cdot k_c (b-a)} \qquad (6-55)$$

となる。ここで、

$$T = 1 \Big/ \sqrt{ab + A \cdot k_c (b-a)} \qquad (6-56)$$

$$\zeta = (a+b) \Big/ 2\sqrt{ab + A \cdot k_c (b-a)} \qquad (6-57)$$

$$K = A \cdot k_c \cdot (b-a) \Big/ \{ab + A \cdot k_c (b-a)\} \qquad (6-58)$$

とおくと、(6−55)式は次式のように書ける。

$$M(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \qquad (6\text{-}59)$$

したがって、その周波数伝達関数 $M(j\omega)$ は、

$$M(j\omega) = \frac{K}{(1 - T^2\omega^2) + j2\zeta T\omega} \qquad (6\text{-}60)$$

上式において、$|M(j\omega)|$ を最大にする角周波数 ω を ω_p（すなわち、固有角周波数）とすると、$|M(j\omega_p)|$ と $|M(j0)|$ の比が共振値 M_p であるから M_p は、

$$M_p = \left| \frac{M(j\omega_p)}{M(j0)} \right| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (6\text{-}61)$$

となり、その時の固有角周波数 ω_p は次式となる。

$$\omega_p = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \Big/ T \qquad (6\text{-}62)$$

以下では、M_p が 1 より大きいとき、すなわち、系全体の indicial 応答が振動的な場合についてのみ考える。なお、一般に良い応答を得るための共振値 M_p の値としては $M_p = 1.1 \sim 1.5$ 程度がよいとされている。

ii) T（自然角周波数の逆数）による重み w の決定

(6-23) 式の PC から得られる最適ゲイン k_{c0} を用いた時、(6-61) 式で与えられる M_p がどの程度になるか。あるいは逆に、M_p を指定した場合、その時のゲイン k_c が (6-26) 式の k_{c0} に等しくなるのは重み w がいくらの時かを調べるため、w と M_p の関係を求めよう。この場合、w は M_p

だけでなく、システムに依存するので、M_p 以外にシステムを特性づけるものとして、まず自然角周波数の逆数 T ((6-56)式あるいは (6-59)式の T) との関係を求めてみる。

(6-36)式と(6-57)式より

$$\zeta^2 = \sqrt{w}\,(a+b)/4 \qquad (6\text{-}63)$$

また、(6-61)式より、ζ^2 を求めると、

$$\zeta^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 1/M_p^2}}{2} \qquad (6\text{-}64)$$

となる。ところで、ω_p は正の実数でなければならないから、(6-62)式より

$$\zeta^2 < 1/2 \qquad (6\text{-}65)$$

したがって、(6-64)式、(6-65)式より、

$$\zeta^2 = \left(1 - \sqrt{1 - 1/M_p^2}\right)/2 \qquad (6\text{-}66)$$

となる。一方、(6-36)式、(6-56)式より、

$$(a+b) = \sqrt{w}/T^2 \qquad (6\text{-}67)$$

であるから、(6-63)、(6-66)、(6-67)式より、w を求めると、

$$w = 2T^2\left(1 - \sqrt{1 - 1/M_p^2}\right) \qquad (6\text{-}68)$$

したがって、w は M_p を指定し、T が与えられると決定できる。

$$w = C_1 \cdot T^2 \qquad (6\text{-}69)$$

ただし，

$$C_1 = 2\left(1-\sqrt{1-1/M_p^2}\right) \qquad (6\text{-}70)$$

$M_p = 1.155$のとき，$C_1 \cong 1.0$となるのでこのとき，$w \cong T^2$となり，重みはほぼ自然角周波数の逆数Tの2乗に選べばよいことが分かる。

iii) T_p（固有角周波数に対する半周期）によるwの決定

ii)において，Tが与えられると，wはほぼその2乗として決定されることが分かったが，実際問題としては，Tは得られにくいものである。そこで，Tに代わるものとしてT_pを考える。実際，固有角周波数ω_pはシステムの次数に関係なく比較的容易に得られる。したがって，T_pはそれから簡単に得られる。まず，TとT_pの関係を導こう。(6-56)，(6-57)，(6-62)式よりω_pを求めると次式のようになる。

$$\omega_p = \sqrt{\left\{2A\cdot k_c(b-a)-(a^2+b^2)\right\}/2} \qquad (6\text{-}71)$$

この固有角周波数ω_pの半周期をT_pとしているから，

$$T_p = \pi/\omega_p \qquad (6\text{-}72)$$

また，(6-62)，(6-66)，(6-72)式を用いると，

$$T = \left\{\sqrt[4]{M_p^2-1}\Big/\left(\pi\cdot\sqrt{M_p}\right)\right\}\cdot T_p \qquad (6\text{-}73)$$

したがって，(6-69)式に(6-72)式を代入して，

$$w = C_2 \cdot T_p^2 \tag{6-74}$$

ただし，

$$C_2 = \frac{2\{M_p \cdot \sqrt{M_p^2-1} - (M_p^2-1)\}}{\pi^2 \cdot M_p^2} \tag{6-75}$$

この C_2 と M_p の関係を図6-16.に示す。$M_p = 1.1 \sim 1.2$ では，ほぼ $C_2 = 1/20$ としてよいようである。

iv) 系のパラメータ推定値を用いた W の決定

パラメータの推定値 α_i $(i=1,2,3)$ より重み W が決定出来れば (6-49)式の離散値系の最適ゲイン k_{s0} を求める際都合がよい。そこで，w をパラメータの推定値を用いて表わしてみよう。

(6-57)式を(6-56)式の T で表わすと，

$$\zeta = (a+b) \cdot T/2 \tag{6-76}$$

(6-66)，(6-76)式より ζ^2 を消去すると，

$$T^2 = 2\left(1 - \sqrt{1 - 1/M_p^2}\right) / (a+b)^2 \tag{6-77}$$

(6-77)式を(6-68)式に代入して，

$$w = C_3 / (a+b)^2 \tag{6-78}$$

ただし,

$$C_3 = 4\cdot\left(1-\sqrt{1-1/M_p^2}\right) \qquad (6\text{-}79)$$

連続系の評価規範 PC には (6-78), (6-79)式を用いることになる。

一方,(6-5)式より,

$$(a+b) = -\frac{1}{T_s}\cdot \ln \alpha_2 \qquad (6\text{-}80)$$

であるから,(6-78)式に代入して,

$$W = C_3\cdot T_s^2/(\ln \alpha_2)^2 \qquad (6\text{-}81)$$

したがって,離散値系の評価規範 PS には,(6-81) 式を用いるとよい。ここで W が T_s^2 に比例しているので,PS1, PS2 のデメンジョンの上からも妥当な結果であることが分かる。なお,C_3 は (6-79)式で与えられるもので,M_p を指定すると一意的に定まる定数である。

さらに,$0<\alpha_2<1$ であることを考慮して,PS あるいは k_{s0} の計算を簡単にするため $(\ln \alpha_2)$ を (α_2-1) で展開して近似式による方法も考えられる。

$$\ln \alpha_2 = (\alpha_2-1) - \frac{(\alpha_2-1)^2}{2} + \frac{(\alpha_2-1)^2}{3} - \cdots\cdots$$

を利用して,

$$(\ln \alpha_2)^2 \cong (\alpha_2-1)^2 - (\alpha_2-1)^3 + (\alpha_2-1)^4 \qquad (6\text{-}82)$$

を用いると,$0<\alpha_2<1$ の範囲ではかなりより近似になっている。

§6.7　いくつかの例題における計算例

ここで行なっていることの目的の1つは実際的な制御の問題，すなわち，実際の系は連続系であって，測定により得られるのが等価的離散値系のパラメータである場合，そのパラメータを直接用いて，ある評価規範のもとでその離散値系を最適にするような制御装置のパラメータをそのまま，もとの連続系の制御装置に用い得ることの可能性を調べること。いま1つは推定法の良さを比較するための評価規範を得ることであるが，これについては次節で取扱う。

さて，ここでは本章，前節までに述べて来た方法を実際の系（例題）にあてはめて計算した。すなわち，連続系において，前節で述べた評価規範 PC を最小にする制御装置の最適ゲイン k_{co} を用いた時の系全体が古典的制御理論による推奨値（ここでは共振値 M_p）を満足するように PC 中の重み w を決定する。つぎにその時の重み w を使って離散値系の評価規範 PS とそのときの最適ゲイン k_{so} を求めた。

図6−12.は連続系の制御対象の伝達関数 $G(s)$ が (6−83)式に示すもので，$a=0.4$，$b=0.9$ の場合について，上記のことを計算した結果である。

$$G(s)=\frac{(b-a)}{(s+a)(s+b)} \qquad (6-83)$$

ここでは，§6.6−iii) の (6−74)式により，重み w を決定している。また，C_2 としては，$M_p \cong 1.21$ に相当する $1/20$ を用いた。（図6−16.参照）図の横軸は，制御装置のゲイン k_c を対数目盛でとり，縦軸は評価規範

の PC1, PC2, PC である。

図6-13.は，図6-12.のシステムと等価な離散値系についてのグラフである．また，重み W も同じ値を用いている。

横軸は離散値系の制御装置のゲイン k_s とサンプリング周期 T_s の比 k_s/T_s（連続系の k_c に相当するもの）を対数目盛でとり，縦軸は離散値系の評価規範 PS1, PS2, PS である。

なお，グラフが2本づつあるのは T_s を変えた時のものである。

図6-12.と図6-13.から，$k_c \cong k_s/T_s$ とおくと，PC と PS は非常によく似た傾向にあることが分かる。また，T_s を小さくしていくと（k_s/T_s：PS）のグラフが（k_c：PC）のグラフに漸近的に近づくことも分かる。

図6-14.は図6-12と図6-13.の PC，PS のグラフの最適ゲイン k_{c0}，k_{s0}/T_s 付近を拡大し，一諸に描いたものである。

このグラフからも，T_s を小さくしていったとき（k_s/T_s：PS）と（k_c：PC）のグラフが漸近していく様子が分かる。ただし，ここでは T_s をシステムの T_p を規準に決めている。

図6-15.は図6-14.と同じ種類のグラフで，ただ制御対象が $a=0.5$, $b=0.6$（(6-83)式において）の場合について描いたものである。グラフからわかるように，システムが変わっても，傾向は全く同じであることが分かる。

図6-17.は T_p/T_s を変化したとき，k_{s0}/T_s の k_{c0} に対する近かさがどのように変わるかを調べたものである。グラフより（k_{s0}/T_s）/ k_{c0} を 99%以上にするには $T_p/T_s \geqq 30$ 程度に選ぶ必要がある。$T_p/T_s = 10$ では 93% 程度であり，

実用的には，このあたりを用いるとよいのではないかと思われる。これはインパルス応答とサンプリング周期との関係などから考えても妥当な結果である。

以上のことから，評価規範中の重みWを何らかの方法で適当に選べば連続系での最適制御はそれと等価な離散値系での最適制御の問題と等価になること。すなわち，適当なWが決まると離散値系で最適ゲインk_{s0}を求め，k_{s0}/T_sをk_{c0}と考えて連続系の制御ゲインに用いることが可能である。

さらに，このようなことを用いれば，制御対象の動特性が時間とともにゆっくりと変化するような系において，制御装置のゲインを適応的に考えて望ましい特性を保つ，いわゆる一種の適応制御が考えられる。すなわち，相関法等で制御対象のインパルス応答をたえず測定し，その時間とともにゆっくりと変動するサンプル値を得る。これを用いて，INM等により等価的離散値系のパルス伝達関数のパラメータα_i $(i=1,2,3,)$の推定値$\hat{\alpha}_i$ $(i=1,2,3,)$を得る。つぎに，本章で紹介した評価規範PSにより最適ゲインk_{s0}を$\hat{\alpha}_i$ $(i=1,2,3)$の関数として求め，k_{s0}/T_sをもとの連続系の制御ゲインk_{c0}として用いるのである。

この際，PS中の，あるいは，k_{s0}中のWとしては，(6-81)式を用いる。これは制御対象の動特性が変動すれば，それにつれて重みWが，つまり，評価規範そのものが変わり，制御ゲインがそれに応じて変動して，系全体としては望ましい特性を保つようになっている。すなわち，適応制御になっていると考えられる。

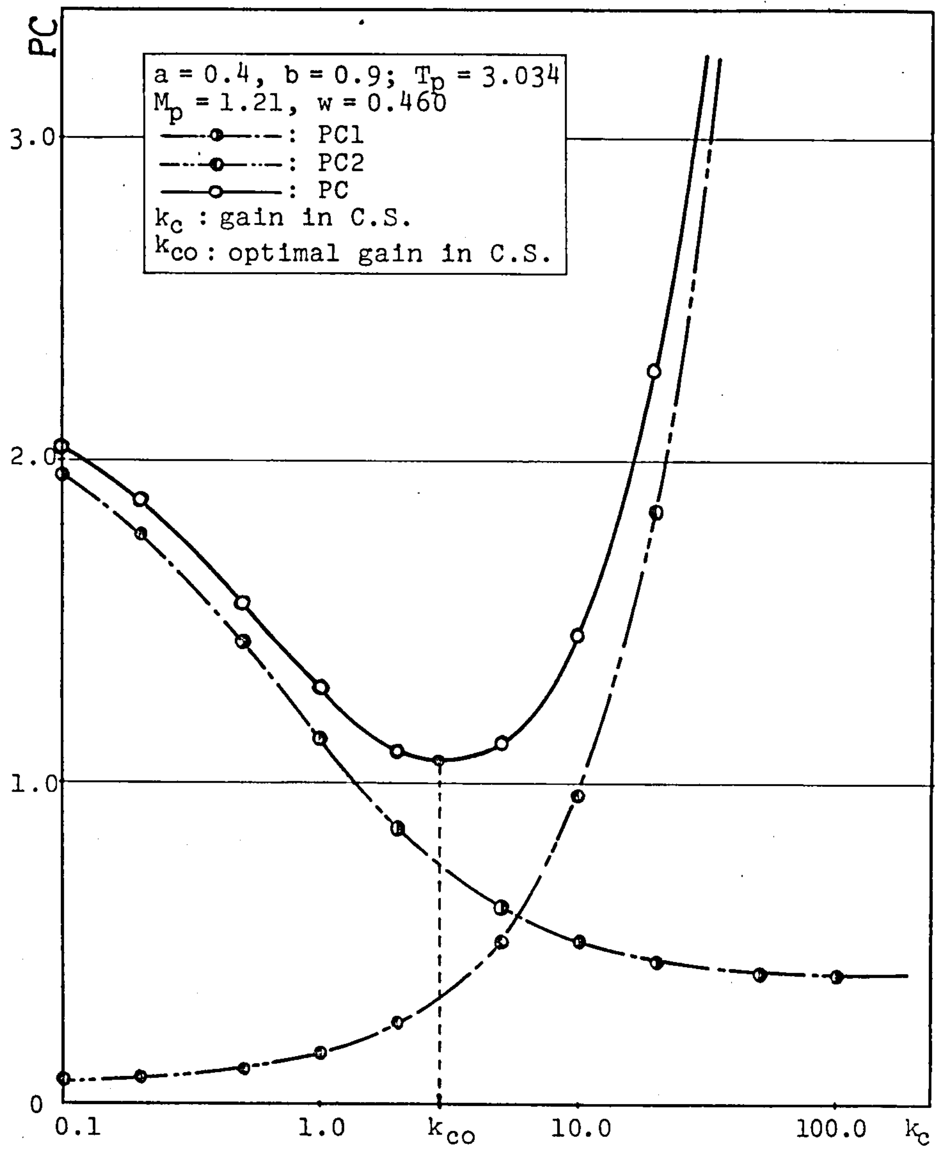


図6-12. 連続系の制御ゲインと評価規範

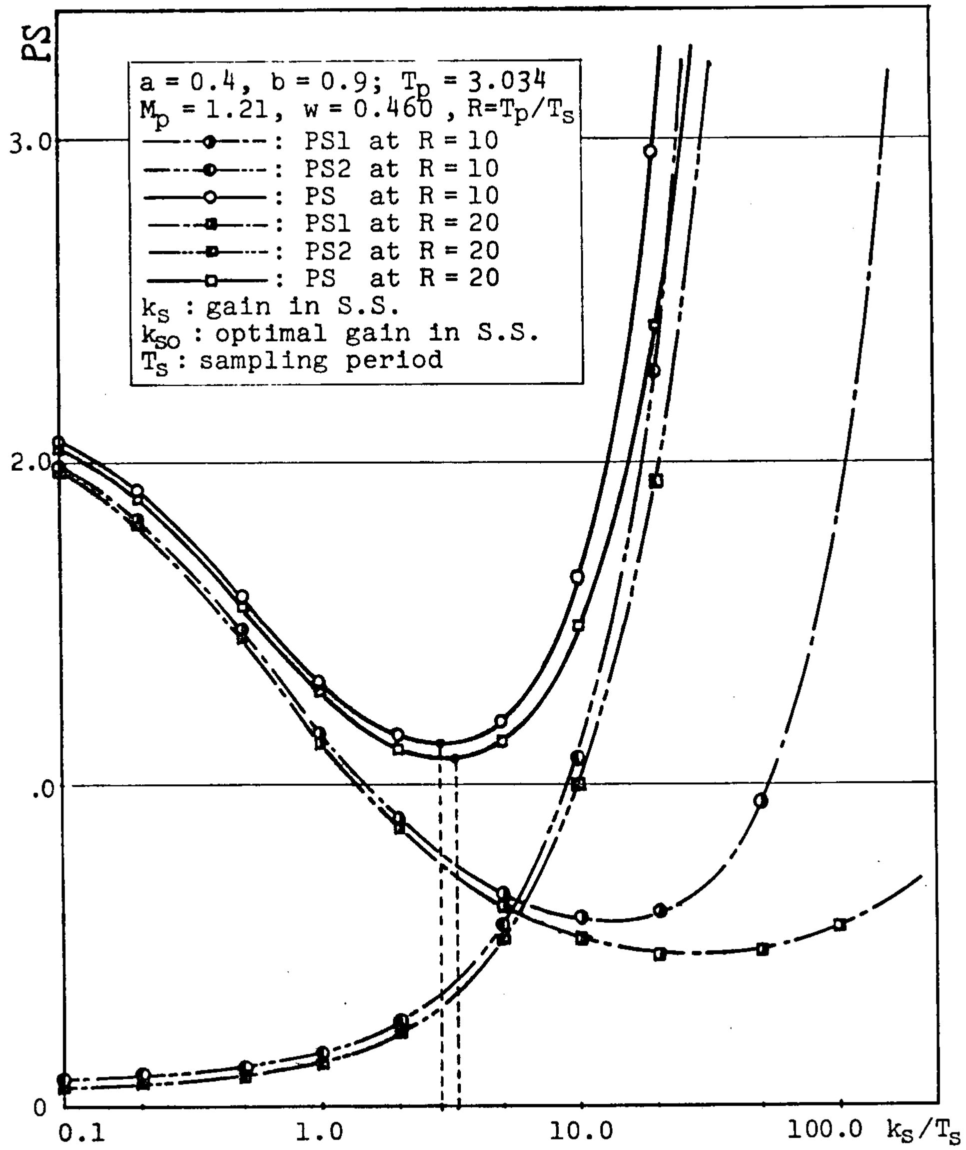


図 6-13. 等価な離散値系の制御ゲインと評価規範

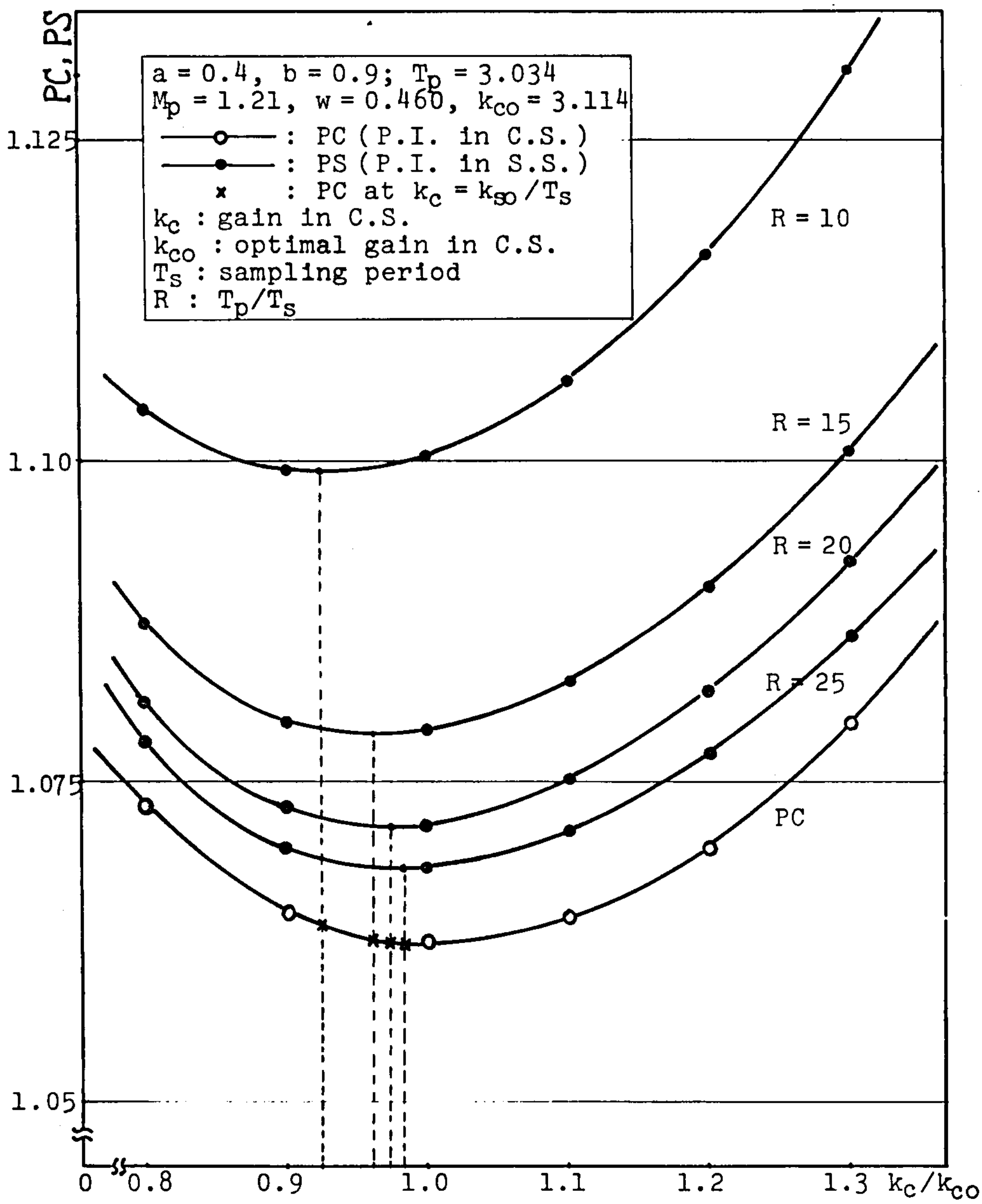


図6-14. 最適制御ゲイン付近の連続系と等価な離散値系の評価規範 (そのI)

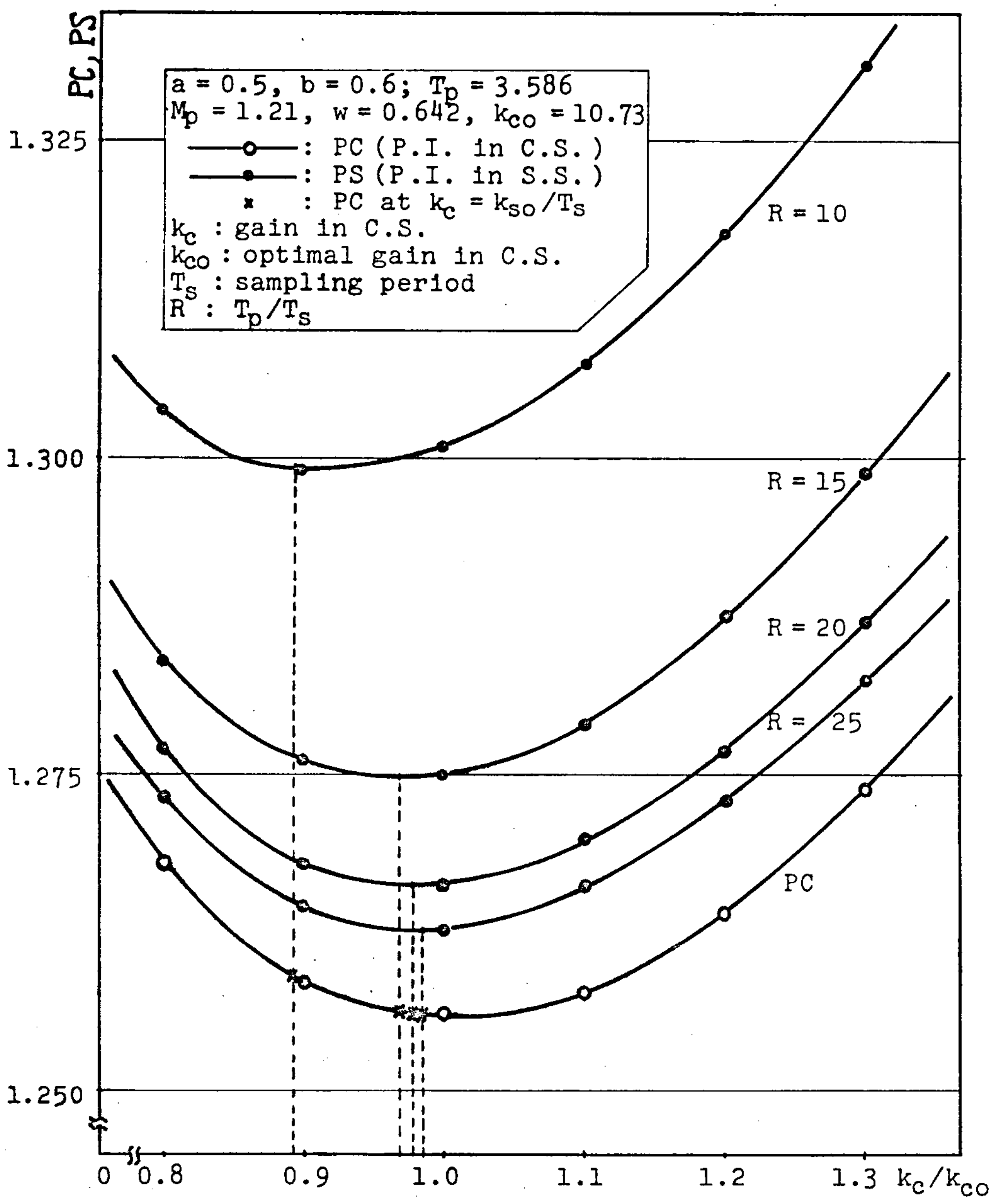


図 6−15. 最適制御ゲイン付近の連続系と等価な離散値系の評価規範（その II）

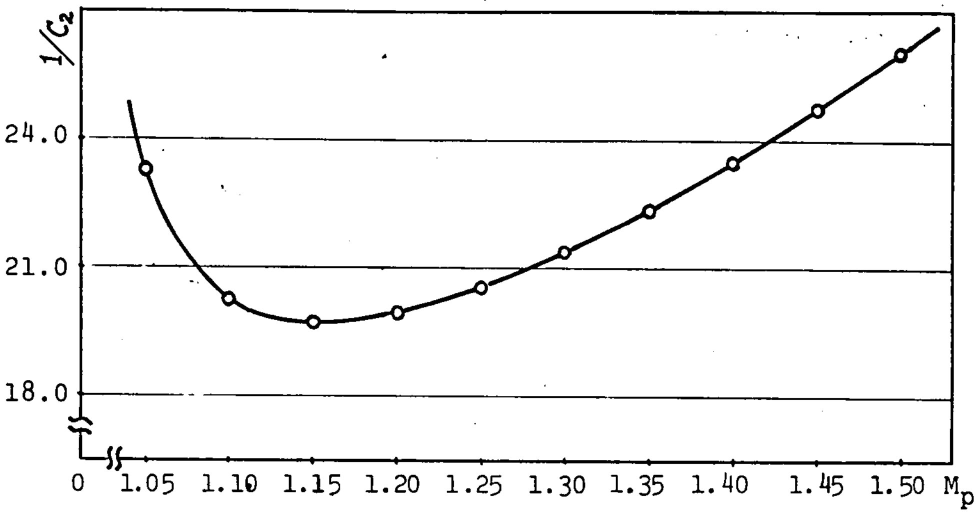


図6-16. 最適重みWにおける係数C_2と共振値M_pとの関係

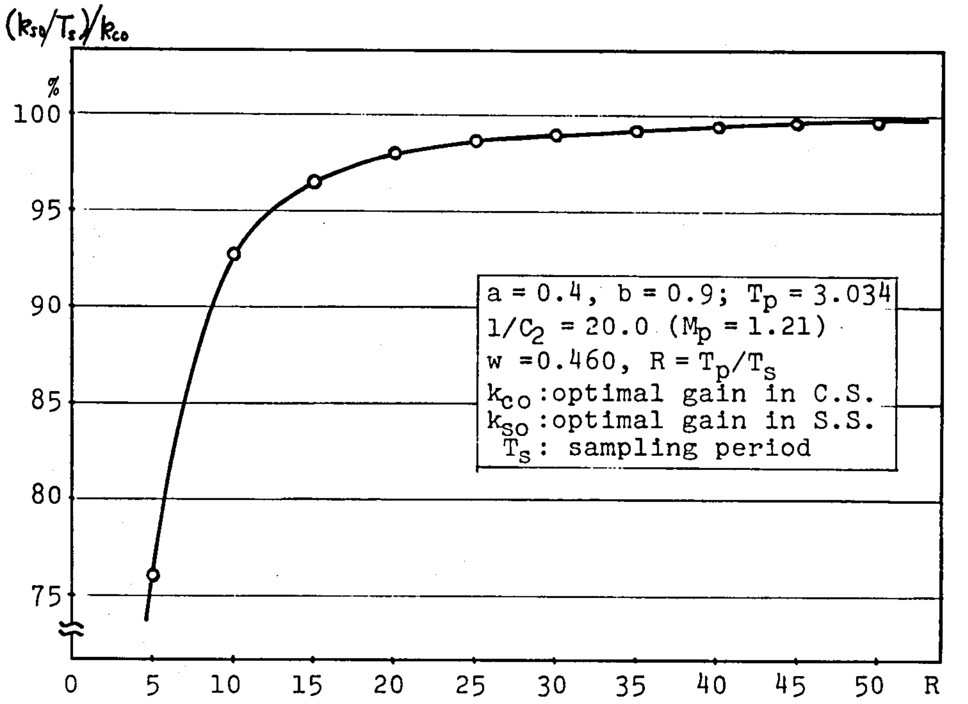


図6-17. 等価な離散値系の最適ゲインと連続系の最適ゲインとの比とサンプリング周期との関係

§6.8 この評価規範によるMLIMとINMの比較

第4章において、系の動特性推定をそのパルス伝達関数を仮定して、単にパラメータ推定の問題として考え、そのパラメータの推定値の真値との比較により推定法の良否を調べ、INMの優位性を主張して来た。

ここでは、本章で述べてきたような立場から、制御対象が2次系で制御装置としては可変ゲインを選んだ最も簡単な場合について、その制御対象の等価的離散値系のパラメータをMLIM, INM1, INM2で推定し、それぞれの推定値 $\hat{\alpha}_i$ $(i=1,2,3)$ より離散値系の最適ゲイン k_{s0} を求め、そして、(6-54)式の関係から近似的に求められる連続系の最適ゲイン k_{c0}^{*} と、これを用いた制御系の(6-22)式に示す評価規範とによる比較を行なった。

その結果を表6-1, 表6-2に示す。(§6.7と同じ計算例を用いた。)表より、この評価規範は制御装置として最も単純なゲイン要素のみを考えているのでパラメータ変動に対し非常に感度の悪いものであるが、いずれもMLIMよりINMの方がすぐれていることが分かる。また、このように制御対象が純粋に2次系の場合には、(INM2は系が2次系からかなりずれた場合にも適用できるように考えたもの) INM1もINM2も殆んど同じ程度であるが、ノイズが比較的大きいところでINM2の方が良くなるのは注意すべき点である。

表6-1 制御系全体の評価規範による推定機構の良さの比較

(その I)

$$\left(G(s) = \frac{(b-a)}{(s+a)(s+b)} \,,\quad \begin{matrix} a = 0.40 \\ b = 0.90 \end{matrix} \quad \text{の場合} \right)$$

System Parameters, Optimal Gain and Optimal P.I.					
$a = 0.40$, $b = 0.90$, $T_p = 3.011$, $M_p = 1.21$, $w = 0.453$, $k_{co} = 3.147$, $P.I._o = 1.058$					
Noise	Method	k_{co}^* P.I.	Mean	Standard Deviation	Ratio
$\sigma_n / G_m = 0.01$	MLIM	k_{co}^*	3.556	0.247	1.130
		P.I.	1.065	0.000	1.007
	INM1	k_{co}^*	3.036	0.045	0.965
		P.I.	1.059	0.000	1.001
	INM2	k_{co}^*	3.242	0.085	1.030
		P.I.	1.059	0.000	1.002
$\sigma_n / G_m = 0.02$	MLIM	k_{co}^*	5.082	1.181	1.615
		P.I.	1.122	0.003	1.061
	INM1	k_{co}^*	2.995	0.183	0.952
		P.I.	1.063	0.000	1.005
	INM2	k_{co}^*	3.652	0.150	1.160
		P.I.	1.065	0.000	1.007
$\sigma_n / G_m = 0.03$	MLIM	k_{co}^*	7.097	2.876	2.255
		P.I.	1.239	0.013	1.172
	INM1	k_{co}^*	2.913	0.436	0.926
		P.I.	1.074	0.001	1.015
	INM2	k_{co}^*	3.918	0.225	1.245
		P.I.	1.072	0.000	1.014

σ_n : standard deviation of noise
G_m : maximum sampled value of impulse response
k_{co}^* : equivalent gain in continuous system $(= k_{so}/T_s)$
trial time : $N = 50$

表6-2 制御系全体の評価規範による推定機構の良さの比較 (そのII)

$$\left(G(s) = \frac{(b-a)}{(s+a)(s+b)} \; , \; \begin{matrix} a = 0.50 \\ b = 0.60 \end{matrix} \text{ の場合} \right)$$

System Parameters, Optimal Gain and Optimal P.I.					
$a = 0.50$, $b = 0.60$, $T_p = 3.559$, $M_p = 1.21$, $w = 0.632$, $k_{co} = 10.845$, $P.I._o = 1.250$					
Noise	Method	k_{co}^* / P.I.	Mean	Standard Deviation	Ratio
$\sigma_n / G_m = 0.01$	MLIM	k_{co}^*	12.168	2.808	1.122
		P.I.	1.257	0.000	1.006
	INM1	k_{co}^*	10.452	0.539	0.964
		P.I.	1.251	0.000	1.001
	INM2	k_{co}^*	11.048	0.861	1.019
		P.I.	1.252	0.000	1.001
$\sigma_n / G_m = 0.02$	MLIM	k_{co}^*	17.266	13.491	1.592
		P.I.	1.317	0.003	1.054
	INM1	k_{co}^*	10.307	2.204	0.950
		P.I.	1.256	0.000	1.005
	INM2	k_{co}^*	12.464	1.944	1.149
		P.I.	1.258	0.000	1.006
$\sigma_n / G_m = 0.03$	MLIM	k_{co}^*	24.085	33.297	2.221
		P.I.	1.445	0.015	1.157
	INM1	k_{co}^*	10.023	5.199	0.924
		P.I.	1.267	0.001	1.014
	INM2	k_{co}^*	13.459	2.693	1.241
		P.I.	1.266	0.000	1.013

σ_n : standard deviation of noise
G_m : maximum sampled value of impulse response
k_{co}^* : equivalent gain in continuous system $(=k_{so}/T_s)$
trial time : $N = 50$

第7章　2次系と遅れ要素による近似

§7.1　序

前章まではすべて制御系を2次系で近似できる場合について考えてきた。しかし、立上りの非常に遅い高次系は2次系で近似するにはかなりの無理が生ずる場合がある。

従来このような系に対しては、（1次系）＋（遅れ要素）で近似することが行なわれ、また、それによる制御装置の設計も経験則として求められていた。また、化学プロセスなどでよく遭遇する高次系は（2次系）＋（遅れ要素）でかなりうまく近似できることが知られている。

そこで本稿でも遅れ要素を導入することにより立上りの遅い高次系にも適用できるモデルを考えた。すなわち、前章までの等価的離散値系のパルス伝達関数 $G_\alpha(z)$ として、（7−1）式のような（2次系）＋（遅れ要素）を選んだ場合について、そのパラメータの決定法とその高次系の近似系としての良さの評価を行なった。ただし、ここで取扱う遅れ要素としては、（7−1）式からも明らかなように、サンプリング周期の整数倍の遅れのみを考える。

$$G_\alpha(z) = \frac{\alpha_3 \cdot z^{-(l+1)}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}} \qquad (7-1)$$

（l：非負の整数）

遅れをもつ系の制御は一般にむずかしいとされているが、離散値系でサンプリング周期の整数倍の遅れのみを考える場合は比較的容易である。

また、高次系の近似系としての良さの評価は、遅れのある場合の Discrete Maximum Principle による制御則を用いた。

§7.2 遅れのパラメータの決定

測定により得られる制御対象のインパルス応答のサンプル値から，(7-1)式で仮定したパルス伝達関数のパラメータを決定する際，まず，遅れのパラメータ l を決定し，そのあとで，2次系のパラメータ α_i $(i=1,2,3)$ を決定する方法を採用する。このlの決定法は非常にむずかしく，おそらく絶対的な決定法というのは存在しないと思われる。

そこで，l を比較的簡単に決定するための一つの目安となるものを考えよう。

まず，直達分のない2次系のインパルス応答は(7-2)式のように表わされる。

$$g(\tau) = A\cdot\{\exp(s_1\tau) - \exp(s_2\tau)\} \qquad (7\text{-}2)$$

ただし，　s_1, s_2 ：特性根　，　A ：係数（定数）

ここで，特性根が実根，複素根の場合に分けて考えてみる。

i)　s_1, s_2 が2実根の場合

$$s_1 = -\sigma_1 \ , \quad s_2 = -\sigma_2 \qquad (0 < \sigma_1 < \sigma_2)$$

とおくと，そのインパルス応答の τ に関する導関数 $g_r'(\tau)$ は次式で表わされる。

$$g_r'(\tau) = A\cdot\{-\sigma_1\cdot\exp(-\sigma_1\tau) + \sigma_2\cdot\exp(-\sigma_2\tau)\} \qquad (7\text{-}3)$$

ii)　s_1, s_2 が複素根の場合

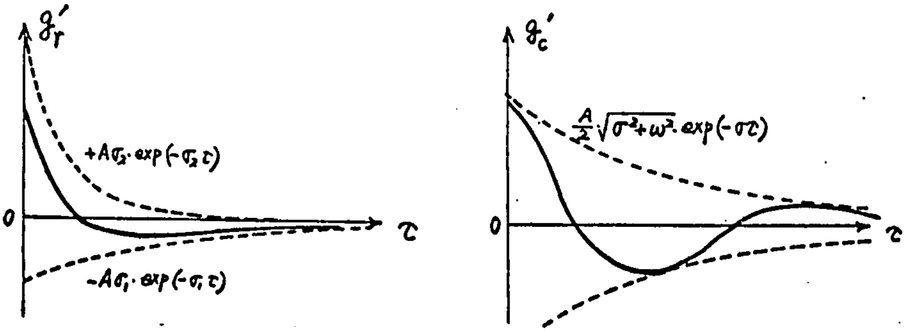
$$s_1 = -\sigma + j\omega \ , \quad s_2 = -\sigma - j\omega \qquad (\sigma > 0)$$

とおくと，そのインパルス応答の τ に関する導関数 $g_c'(\tau)$ は次式で表わされる。

$$g_c'(\tau) = \frac{A}{2}\sqrt{\sigma^2+\omega^2}\cdot\exp(-\sigma\tau)\cdot\cos(\omega\tau + \tan^{-1}\sigma/\omega) \qquad (7\text{-}4)$$

ただし，　$0 < \tan^{-1}\sigma/\omega < \pi/2$

(7-3)，(7-4)式の概略図を示したのが図7-1である。



(a) 実根の場合　　　(b) 複素根の場合

図7-1　インパルス応答の導関数

図7-1から明らかなようにいずれも（複素根の場合は少なくとも $\tau=0$ からインパルス応答が最大値をとる τ の値までの範囲内では）$\tau=0$ において，インパルス応答はその導関数が最大となることが分かる。

以上のことから，図7-2に示す高次系のインパルス応答を（2次系）+（遅れ要素）で近似するとき，その微係数が最大となるサンプル時刻を遅れ時間の目安に考えることにする。

以下にその具体的方法を示す。

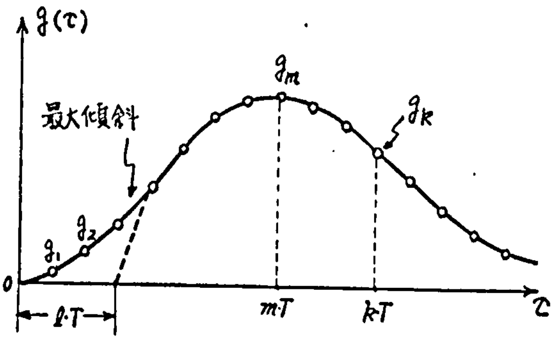


図7-2　高次系のインパルス応答

[その I]

図7-2において，次式に示すインパルス応答の変化分を，g_iがインパルス応答の最大値になるまで計算してその最大値 d_{imax} を求める。そして，その時

$$d_i \triangleq g_{i+1} - g_i \qquad (i=0,1,2,\cdots) \qquad (7-5)$$

のサンプル時刻を $i_{max}\cdot T$ とするとき，遅れ要素のパラメータ l を $l = i_{max}$ として決定する方法。

なお，d_i を d_{imax} までではなく，g_i が最大となるまで計算していくのはインパルス応答のサンプル値に重畳するノイズの影響を考慮するためである。

これは最も簡単な方法の一つと思われるが，サンプル時刻 $(l+1)T$ における点でなめらかにつながらないので遅れ時間が大きい時には特に近似が悪くなる場合がある。

[その II]

つぎに，2次系のインパルス応答の立上りから最大値までは2次式でかなりうまく近似出来ることを用い，手順は少し複雑になるがよりよい近似の得られる方法について述べる。

まず，その I と同じように(7-5)式により d_i を計算し，その最大値 d_{max} を求め，そのときのサンプル時刻を $i\cdot T$ とする。また，インパルス応答の最大値を与えるサンプル時刻を $m\cdot T$，その時の値を g_m とするとき，(7-6)式のような2次式を考え，これが $\tau = i\cdot T$ で g_i ，$\tau = m\cdot T$

で g_m を通り、しかも $\tau = m\cdot T$ の近傍で（τ は T の整数倍のみ考えるので）g が最大値をとるように a, b を決定する。（図7-3 参照）

$$g = a\cdot\tau\cdot(\tau - b\cdot T) \qquad (7\text{-}6)$$

手順としては、まず、$l=i$ とおき、(7-7)式を計算し、$b<2(m-l)$ ならば、l に 1 を加えたものを l として、さらに (7-7)式を計算し、$b>2(m-l)$ となるまでこの手順を続け、初めて、$b>2(m-l)$ となる l の値より 1 を減じたものを遅れのパラメータ l と決める方法。

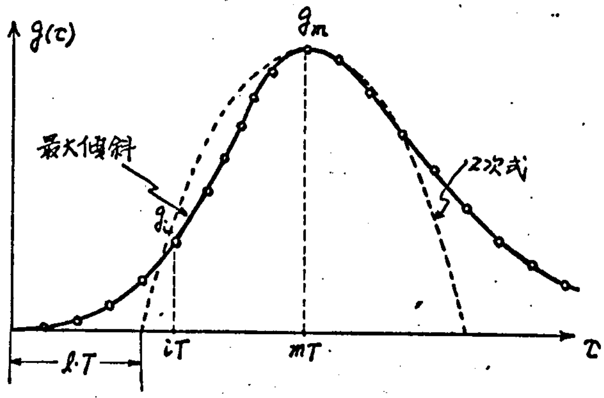


図7-3 高次系のインパルス応答の近似

$$b = \frac{g_m\cdot(i-l)^2 - g_i\cdot(m-l)^2}{g_m\cdot(i-l) - g_i\cdot(m-l)} \qquad (7\text{-}7)$$

またこのとき、サンプル時刻 $\tau = l\cdot T$ 〜 $i\cdot T$ までのインパルス応答の値を次式により修正しておく。

$$g_{l+k} = \frac{g_m\cdot k\cdot(k-b)}{(m-l)(m-l-b)} \qquad (7\text{-}8)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, (i-l))$$

ただし、b は (7-7)式により計算されるものである。

この方法を用いるとかなり広い範囲の高次系のインパルス応答を（2次系）+（遅れ要素）で十分よい精度で近似できる。（§7.4参照）。以下ではこの方法（そのII）を用いて遅れ要素の決定を行なうものとする。

§7.3 2次系のパラメータの決定

遅れ要素のパラメータ l が前節の方法、あるいは他の何らかの適当な方法により決定されると、（それに伴うサンプル時刻 $l\cdot T$ 付近のサンプル値の修正を含む）残りの2次系のパラメータ α_i ($i=1,2,3$) は第4章で述べたINM2が殆んどそのまま利用できる。すなわち、インパルス応答のサンプル値の測定値を h_k ($h_k = g_k + \varepsilon_k$; g_k：サンプル値の真値，ε_k：ノイズ，$k=1,2,\cdots,n$) とし，遅れ要素を l とすると，まず，$\hat{\alpha}_3$ を (7-9), (7-10)式により求め，それを(7-11), (7-12)式に代入して，$\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ をそれぞれ求めればよいことになる。

$$\widehat{\alpha_3^2} = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} h_{i+l}^2 \cdot (h_{i+l+1}^2 - h_{i+l}\cdot h_{i+l+2}) \cdot \mathrm{sgn}(h_{2i+l}^2 - h_{i+l}\cdot h_{3i+l})}{\sum_{i=1}^{m_1} \left| h_{2i+l}^2 - h_{i+l}\cdot h_{3i+l} \right|} \qquad (7-9)$$

$$(m_1 = [(n-l)/3])$$

$$\hat{\alpha}_3 = \sqrt{\widehat{\alpha_3^2}} \qquad (7-10)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \sum_{j=1}^{m_2} (\hat{\alpha}_3 \cdot h_{2j+l} - 2 h_{j+l}\cdot h_{j+l+1}) \Big/ \sum_{j=1}^{m_2} h_{j+l}^2 \qquad (7-11)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \sum_{j=2}^{m_2} (-\hat{\alpha}_3 \cdot h_{2j+l} + h_{j+l}\cdot h_{j+l+1}) \cdot \mathrm{sgn}(h_{j+l}\cdot h_{j+l-1}) \Big/ \sum_{j=1}^{m_2} \left| h_{j+l}\cdot h_{j+l-1} \right| \qquad (7-12)$$

$$(m_2 = [(n-l)/2])$$

§7.4 高次系の近似例

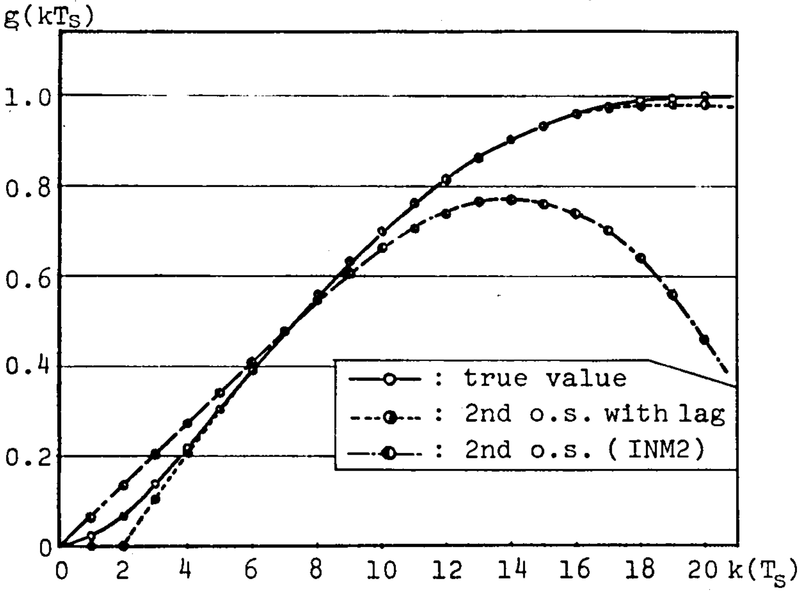
高次系を(7-1)式のような(2次系)+(遅れ要素)で近似し、§7.2, §7.3で述べた方法によりそのパラメータを求める方法で、どの程度高次系のインパルス応答が近似できるかを示すため、その近似例を以下に示す。

図7-4は系の伝達関数が $G(s) = 1/\{(s+1)(s+2)(s+4)\}$ で示されるような3次系のインパルス応答とその(2次系)+(遅れ要素)による近似、および第4章のINM2による近似を示したものである。図(b)、サンプリング周期 $T_s = 0.1$ 秒の場合のように比較的立上りの速いような場合には、第4章のINM2でもかなりうまく近似できるが、図(a)、$T_s = 0.05$ 秒の場合のように立上りがこの程度ゆるやかになってくるとINM2だけではもはや近似しがたいようになってくる。それに対し、遅れ要素を考慮に入れるといずれの場合も非常によく近似できることが分かる。

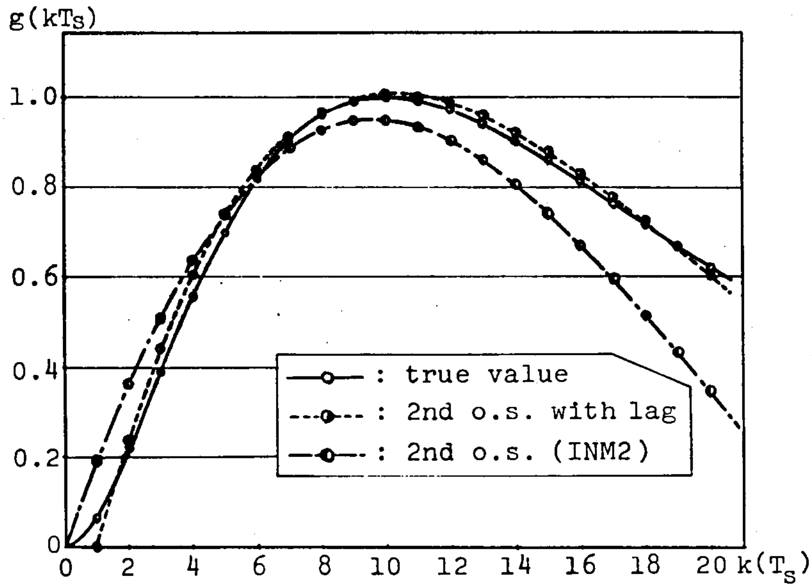
図7-5は $G(s) = 1/(1+sT_a)^3$ の系において、T_a/T_s の比を変えた時のインパルス応答とその(2次系)+(遅れ要素)による近似を示したものである。

図7-6は $G(s) = 1/(1+sT_a)^n$ で表わされる高次系において、T_a/T_s を固定して、n を 3, 4, 5, 6 と変えた場合のインパルス応答とその(2次系)+(遅れ要素)による近似を示したものである。

以上の図はほんの一例にすぎないが高次系のインパルス応答をその小さい所(サンプル値の値も小さい所)を除いて非常によく近似できていることが分かる。



(a) $T_s = 0.05$ の場合



(b) $T_s = 0.1$ の場合

図 7-4 $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ のインパルス応答とその近似

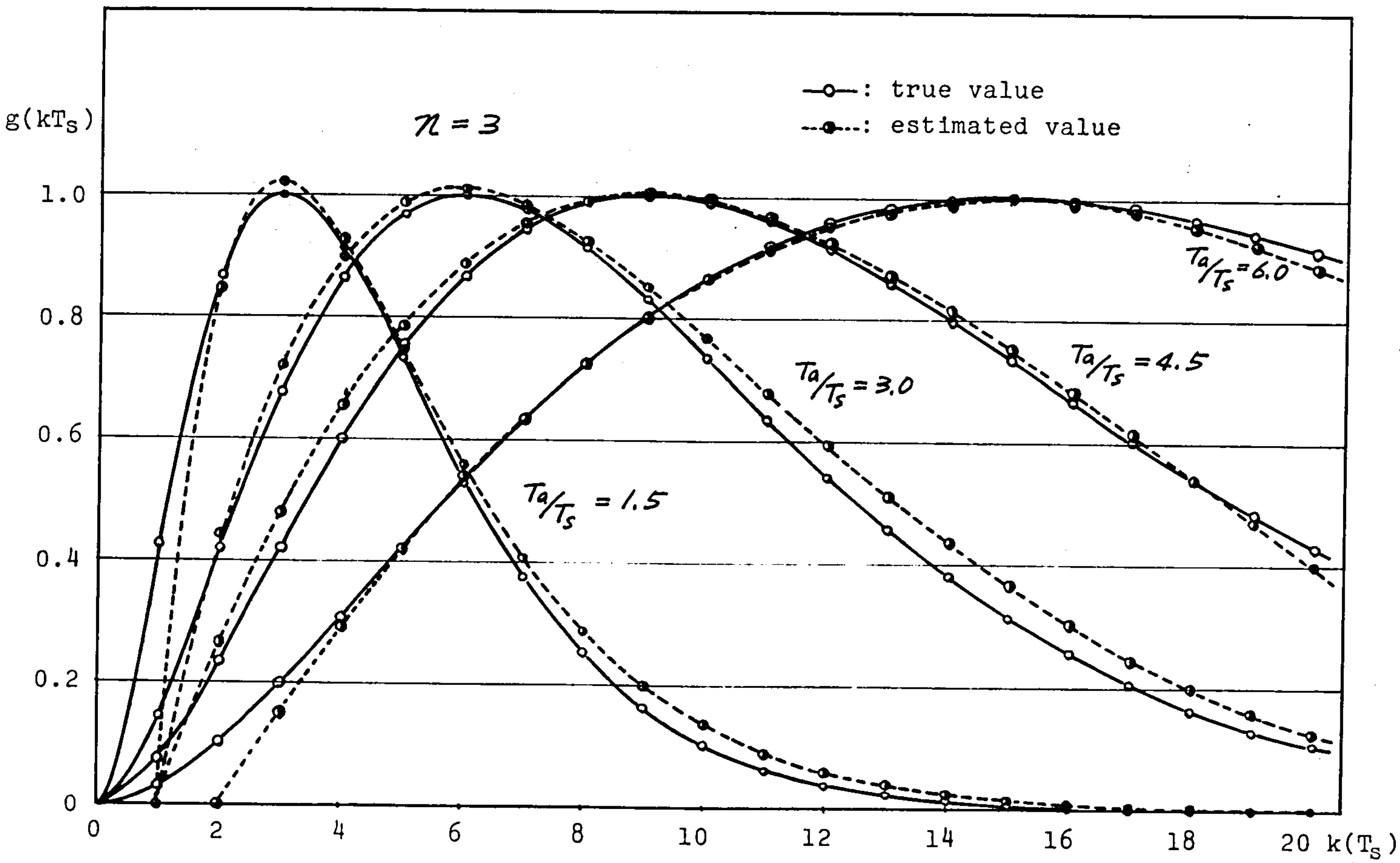


図7-5　$G(s)=\left(\frac{K}{1+sT_a}\right)^3$ の系において，T_a/T_s の比を変えた時のインパルス応答と その（2次系）+（遅れ要素）による近似

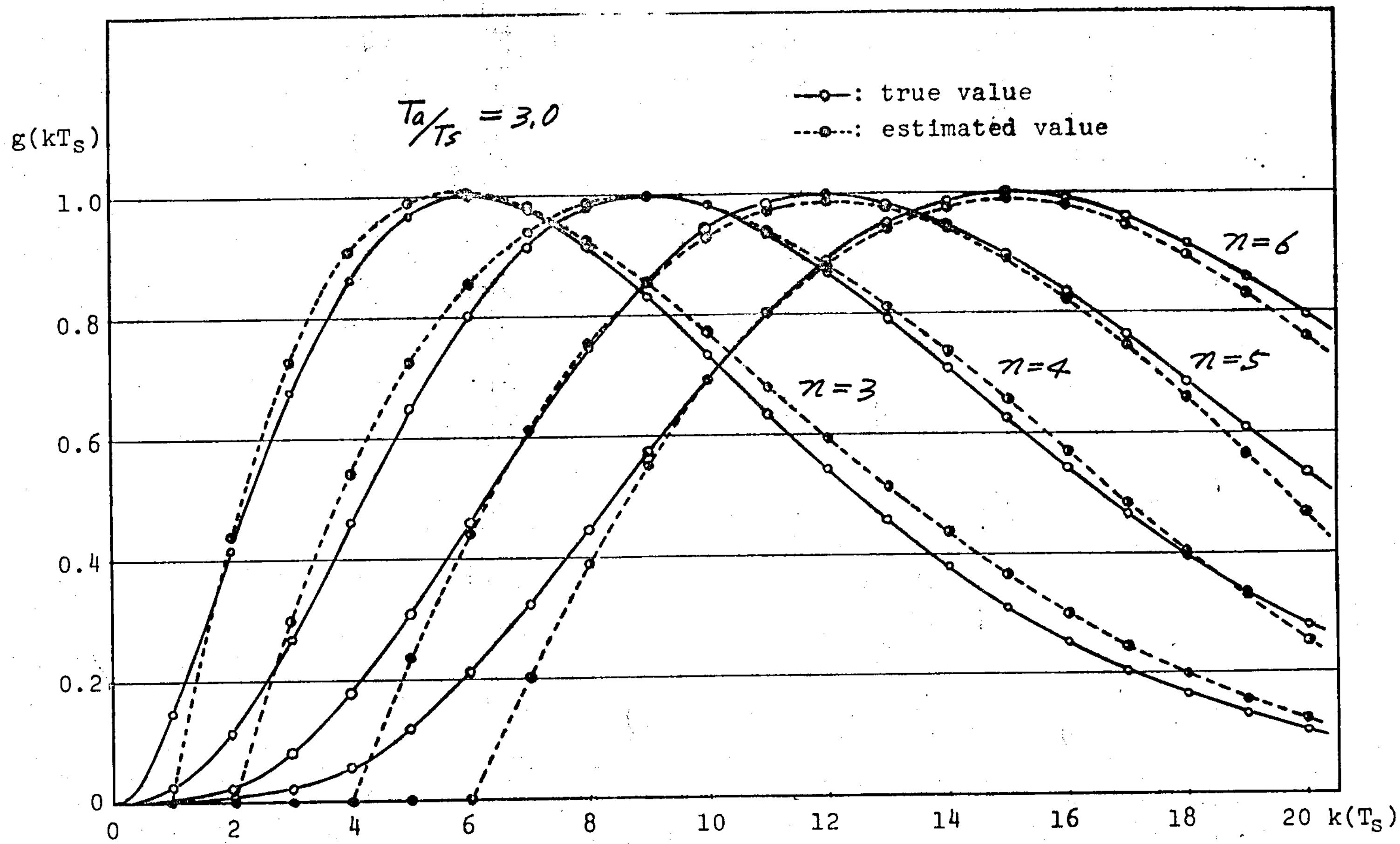


図7-6　系の伝達関数が　$G(s)=\left(\frac{K}{1+sTa}\right)^{n}$　で表わされる高次系のインパルス応答と

その(2次系)+(遅れ要素)による近似

§7.5 遅れのある系の最適制御

前節までに述べてきたように高次系を（2次系）+（遅れ要素）で近似し，そのパラメータを推定する方法を提案したが，その推定法の良さを評価するために以下に述べるような遅れのある系の最適制御を考えることにする。

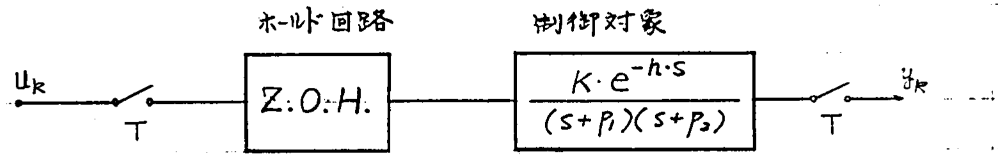


図 7-7　ディジタル的な制御の基本構成図

いま，図7-7のように制御対象の動特性を（2次系）+（遅れ要素）で近似し，それに零次ホールドをつけて，ディジタル的な（離散値系の）制御を考えることにする。なお，零次ホールドまで含めた系の伝達関数 $G(s)$ は（7-1）式で表わされる等価的離散値系のパルス伝達関数 $G_\alpha(z)$ より算出されるものと考え，遅れ時間を表わすパラメータ h はサンプリング周期 T の整数倍である場合のみを考えることにする。

$$G(s)=\frac{K\cdot e^{-h\cdot s}}{(s+p_1)(s+p_2)}\cdot\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right) \qquad (7\text{-}13)$$

まず，（7-13）式の $G(s)$ で表わされる系を Jordan Canonical Form に変換した後，離散値系の状態方程式表示にする。（付録 IV 参照）

なお，$H(s)=(1-e^{-sT})/s$ の部分は入力を階段状入力で近似（あるいは表現）するために考えるものであって，状態変数表示する際には直接関係しない項である。

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathbb{X}_{k+1} &= \mathbb{P}\cdot \mathbb{X}_k + \mathbb{q}\cdot u_{k-m} \\
y_k &= \mathbb{C}^T\cdot \mathbb{X}_k
\end{aligned}
\right.
\tag{7-14}
$$

ただし,

$$
\mathbb{P} = \begin{bmatrix} e^{-p_1 T} & 0 \\ 0 & e^{-p_2 T} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{q} = \frac{K}{p_2 - p_1}\begin{bmatrix} (1-e^{-p_1 T})/p_1 \\ (1-e^{-p_2 T})/p_2 \end{bmatrix},
$$

$$
\mathbb{C}^T = [\,1,\ -1\,], \quad m = h/T, \quad \left(\begin{array}{l} T：\text{サンプリング周期} \\ m：\text{非負の整数} \end{array}\right)
\tag{7-15}
$$

つぎに,(7-16)式のような2次形の評価規範を考え,(7-14)式の条件のもとで,(7-16)式を最小にするような離散値系の最適制御問題を考える。

$$
J = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbb{X}_k^T \Phi\cdot \mathbb{X}_k + u_k^2\right)
\tag{7-16}
$$

ただし,

$$
\Phi = \mathbb{C}\cdot\mathbb{C}^T\cdot f \quad ,(f>0\ ;\ \text{スカラー})
\tag{7-17}
$$

この時,最適制御信号 u_k^* は Discrete Maximum Principle[55] によりつぎのように与えられる。[50]

$$
u_k^* = K_k^{*T}\cdot \mathbb{X}_k
\tag{7-18}
$$

ただし,

$$
K_k^{*T} = \left\{
\begin{array}{ll}
-\mathbb{q}\cdot\mathbb{M}\cdot(\alpha)^{k+1}\cdot\mathbb{P}^{m-k} & (0 \le k \le m-1) \\
-\mathbb{q}\cdot\mathbb{M}\cdot(\alpha)^{m+1} & (k \ge m)
\end{array}
\right.
\tag{7-19}
$$

ただし，

$$\mathbb{K} \triangleq (\mathbb{I} + g \cdot g^T \cdot \mathbb{M})^{-1} \cdot \mathbb{P} \qquad (7-20)$$

また，$\mathbb{M}$ は（7−21）式で表わされる方程式の解である。（Riccati Matrix $\mathbb{M}$）

$$\mathbb{M} = \Phi + \mathbb{P}^T \cdot \mathbb{M} \cdot (\mathbb{I} + g \cdot g^T \cdot \mathbb{M})^{-1} \cdot \mathbb{P} \qquad (7-21)$$

ところで，一般の高次系を（7−13）式に示すような（2次系）+（遅れ要素）で近似する場合を考えているので，（7−18）式のような状態変数フィードバックにより制御信号を求めようとしても実際には使えない。そこでつぎのような出力フィードバックにより制御信号を得るための適当な変換が必要になる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}_k = \mathbb{V} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}_k \qquad (7-22)$$

ただし，

$$\mathbb{V} = \frac{1}{P_2 - P_1} \begin{pmatrix} P_2 & 1 \\ P_1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7-23)$$

（付録 V 参照）

（7−18），（7−22）式より，

$$u_k^* = K_k^{*T} \cdot \mathbb{V} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}_k \qquad (7-24)$$

として最適制御信号を決定する。なお，出力の時間に関する一回微分 $\dot{y}_k$ としては実際には一次差分で近似することにする。すなわち，

$$\dot{y}_k \cong (y_k - y_{k-1})/T \qquad (7-25)$$

したがって，評価規範も状態変数の代りに出力を用いた表示にする必要がある。

$$x_k^T \cdot \Phi \cdot x_k = x_k^T \cdot c \cdot c^T \cdot f \cdot x_k = y_k^2 \cdot f \qquad (7\text{-}26)$$

であるから，評価規範Jは次式のようになる。

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(y_k^2 \cdot f + u_k^2 \right) \qquad (2\text{-}27)$$

§7.6 高次系の近似系としての良さの評価

つぎに，高次系の一例として制御対象が図7-7で扱った3次系で表わされる場合について，つぎに示す4種の条件で制御する場合について考察し，それらを前節で述べた評価規範により比較検討した。また，それによって，(2次系)+(遅れ要素)で近似する方法の有用性を確かめた。なお，以下で述べる方法はすべて，図7-7に示すようなディジタル的な制御方式をとるものとする。

(1) 3次系の動特性が正確に分っており，しかもその内部状態，すなわち，離散値系の状態変数表示をした場合の状態ベクトルがすべての時間にわたって測定可能であり，それが制御に利用出来るという条件のもとでの最適制御。(以下では，true optimal control (state vector) と呼ぶ。)

(2) 3次系の動特性は正確に分っているが，その内部状態は不明で，系の出力のみが測定可能で制御に利用出来るという条件のもとでの最適制御。(以下では，sub optimal control (output) と呼ぶ)

(3) 3次系の動特性も不明で，系の出力のみが測定可能である場合，その系の動特性を(7-1)式に示す(2次系)+(遅れ要素)で近似してそのパラメータを求め，これをもとにして行なう最適制御。

（以下では，2nd order system with transport lag と呼ぶ。）

(4)　3次系の動特性も不明で系の出力のみが測定可能である場合，その系の動特性を第4章で述べた改良した新しい方法 INM2 により推定して，等価的2次系のパルス伝達関数を求め，これをもとにして行なう最適制御。

（以下では，2nd order system (INM2) と呼ぶ。）

さて，図7-7に示すようなディジタル的な制御を考えてホールド回路まで含めた3次系の伝達関数は(7-28)式で表わされる。

$$G'(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)} \cdot \left(\frac{1-e^{-sT}}{s} \right) \qquad (7-28)$$

この系を前節で述べたように Jordan Canonical Form に変換して，離散値系の状態変数表示すると次のようになる。（付録Ⅳ参照）

$$\begin{cases} \mathbb{X}_{k+1} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{X}_k + \mathbb{q} \cdot u_k \\ y_k = \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{X}_k \end{cases} \qquad (7-29)$$

ただし，

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4T} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{q} = \begin{bmatrix} 1-e^{-T} \\ 1-e^{-2T} \\ 1-e^{-4T} \end{bmatrix}, \qquad (7-30)$$

$$\mathbb{C}^T = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right)$$

また，評価規範としては有限段の制御を考えて，

$$J = \sum_{k=0}^{N} (y_k^2 \cdot f + u_k^2) \qquad (7-31)$$

を用いることにする。以下では，$N=50$，$f=100$ とした場合を考えている。

この時, true optimal control signal u_k^o は Discrete Maximum Principle[55] により,

$$u_k^0 = K_k^{0T} \cdot \boldsymbol{x}_k \tag{7-32}$$

ただし,

$$K_k^{0T} = -\boldsymbol{g}^T \cdot \mathbb{M}_k \cdot (\mathbb{I} + \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g}^T \mathbb{M}_k)^{-1} \cdot \mathbb{P} \tag{7-33}$$

また, $\mathbb{M}_k$ は次式により, $k=N-1$ から $k=0$ までを求めて記憶しておき, それを(7-32)式に適用する。

$$\mathbb{M}_k = \Phi + \mathbb{P}^T \mathbb{M}_{k+1} \cdot (\mathbb{I} + \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g}^T \mathbb{M}_{k+1})^{-1} \cdot \mathbb{P} \tag{7-34}$$

ここで, $\Phi = \mathbb{C} \cdot \mathbb{C}^T f, \quad f = 100, \quad \mathbb{M}_N = \Phi$ (7-35)

つぎに sub optimal control signal u_k^s は次式より求める。

$$u_k^s = \begin{cases} 0 & (k = 0, 1) \\ K_k^{0T} \cdot \mathbb{V} \cdot \begin{pmatrix} y_k \\ (y_k - y_{k-1})/T \\ (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})/T^2 \end{pmatrix} & (k \geq 2) \end{cases} \tag{7-36}$$

ただし,

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(付録V参照)} \tag{7-37}$$

(3)の 2nd order system with transport lag の場合は前節の手法を殆んどそのまま用いる。ただ, 評価規範は(7-31)式と同じものを用いる。また, 制御信号を求める式におけるマトリックス $\mathbb{M}$ は, $\mathbb{P}$, $\boldsymbol{g}$, $\mathbb{C}$ の係数マトリックスは前節で述べたものを用いて, (7-34), (7-35)式により求める。

(4)の 2nd order system (INM2) は(3)の場合と殆んど同じで，ただ，$m=0$ とおくだけでよい。なお，(7-36)式の場合と同じように，(3)，(4) とも，最初の制御段では，y_{-1} が不明であるため制御信号は0とする。

図7-8 は，サンプリング周期が $T=0.1$ 秒，系の内部状態の初期値が，$X_2(0)=X_3(0)=0.0$，$X_1(0)=1/C_1$，$y(0)=1.0$ の場合（C_1 は出力マトリックス $\mathbb{C}$ の第1成分）の前記4種の条件による最適制御の比較を示したものである。この図はそれぞれの方法による出力 y（縦軸左側に目盛を示す）と制御入力 u（縦軸右側に目盛を示す）の時間変化の様子を示している。ここで制御入力 u はその値の時間変化の様子と，各種方法による比較を明確にするためになめらかな曲線で結んでいるが，実際にはディジタル的な制御を考えているので各サンプル時点間は一定値をとる階段状信号である。このことはつぎの図7-9 の場合も同じである。

図より，(3)の（2次系）+（遅れ要素）による近似も，(4)の2次系 (INM2) による近似も真の最適制御にかなり近いことが分かる。これは図7-4(b) のインパルス応答の近似のグラフからも予想される結果である。なお，この場合，(2)の sub optimal control よりも(3)の方が評価規範が小さく良い結果になっているが，これは(2)の方法が3次系の出力フィードバックであるため最初の2段階は制御を行なわないのに対し，(3)の方法は2次系であるため最初の一段だけ制御を行なわないということより，近似の程度がよいとこのようなことも起り得るのである。したがって，さらに高次系になると，この影響が大きくひびことも考えられるが，これも（2次系）+（遅れ要素）で近似することの有用性を意味している。

図7-9 はサンプリング周期が $T=0.05$ 秒，内部状態の初期値が，$X_1(0)=X_3(0)=0.0$，$X_2(0)=1/C_2$，$y(0)=1.0$ の場合についての前図と同様のグラフ

である。この場合は図7-4(a)からも分かるようにインパルス応答がかなり違っているので(4)の方法では真の最適制御とは全く異なった制御になっている。すなわち、制御入力uが正,負逆で、初期値のモードにもよるが制御しない方がかえってよいということを示している。このことは(3)の方法についてもいえるが、uの絶対値も小さく,それほど悪くはならないようになっている所に遅れ要素を導入した意味がある。

また、以上のことから明らかなように同じ系であってもサンプリング周期の選び方によってかなり異なった様子を呈することが分かる。

表7-1にサンプリング周期が$T=0.05$秒と$T=0.1$秒の場合について、初期値のモードが異なった時の4種の方法による最適制御の評価規範の値を示す。

この表からも$T=0.1$秒の場合にはいずれの初期値モードにおいても(3),(4)の方法はかなり真の最適制御に近いことが分かる。しかし,$T=0.05$秒の場合には,(4)のINM2による方法ではもはや制御の意味がないような結果になっている。それに対し,(3)の方法では真の最適制御に比べ悪くはなっているがそれほどひどくはなく実用的に意味があるといえる。

表7-2はインパルス応答にノイズがある,より現実的な場合についての計算機シミュレーションの結果である。ノイズの大きさはインパルス応答の最大値に対し,その標準偏差が1%,2%,3%の場合を取扱った。1つの条件に対する実験試行回数は50回である。このようにノイズがあっても(3)の(2次系)+(遅れ要素)による方法は十分有効であり,$T=0.1$秒の場合にはノイズがある方がかえってよい結果になる場合もあることを示している。

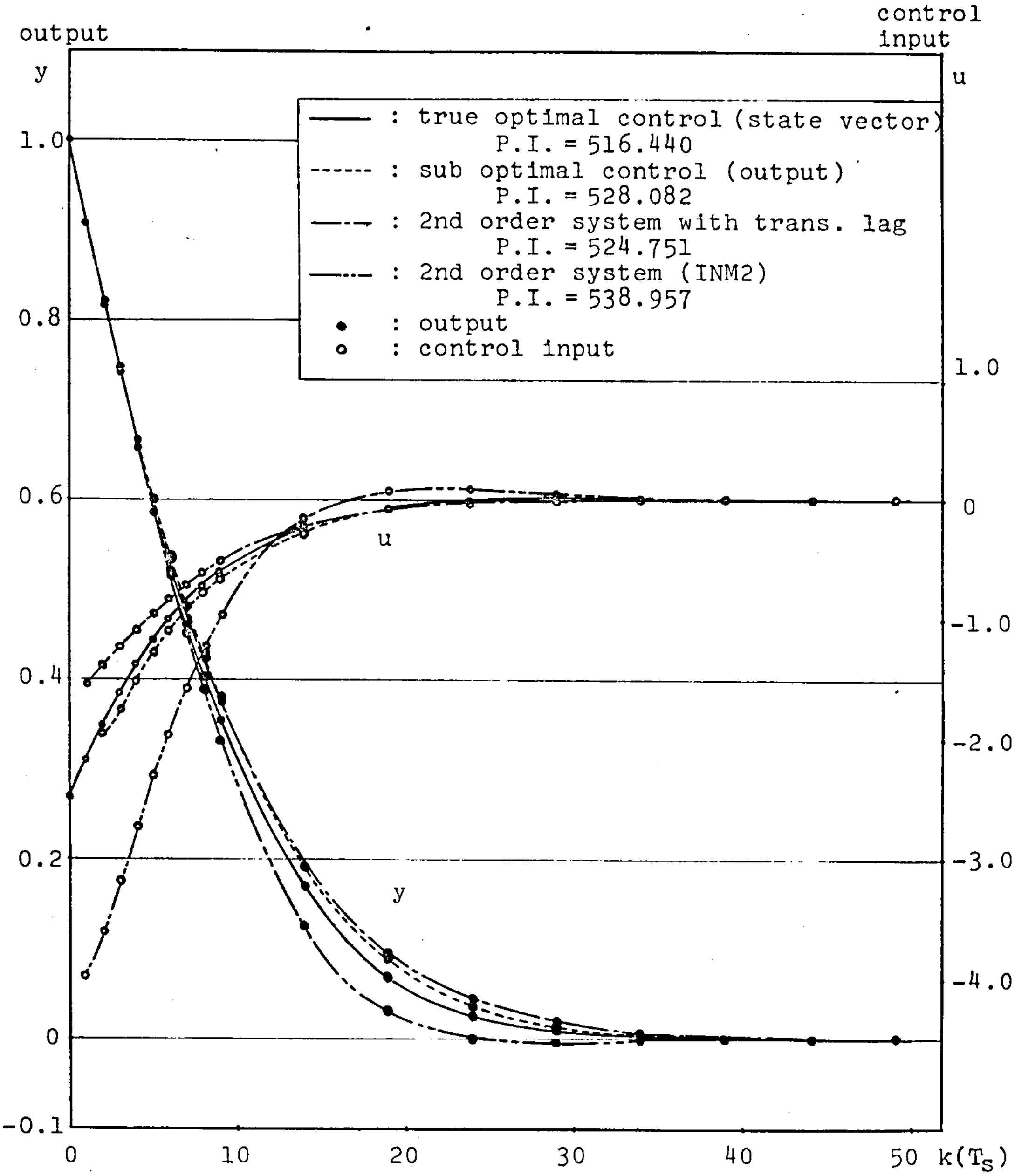


図7-8　伝達関数が $G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ で表わされる系の各種方法による最適制御の出力 y と制御入力 u の時間変化（その1）

（$T=0.1$，初期値モード (1)：$X_2(0)=X_3(0)=0.0$，$X_1(0)=1/C_1$，$y(0)=1.0$ の場合）

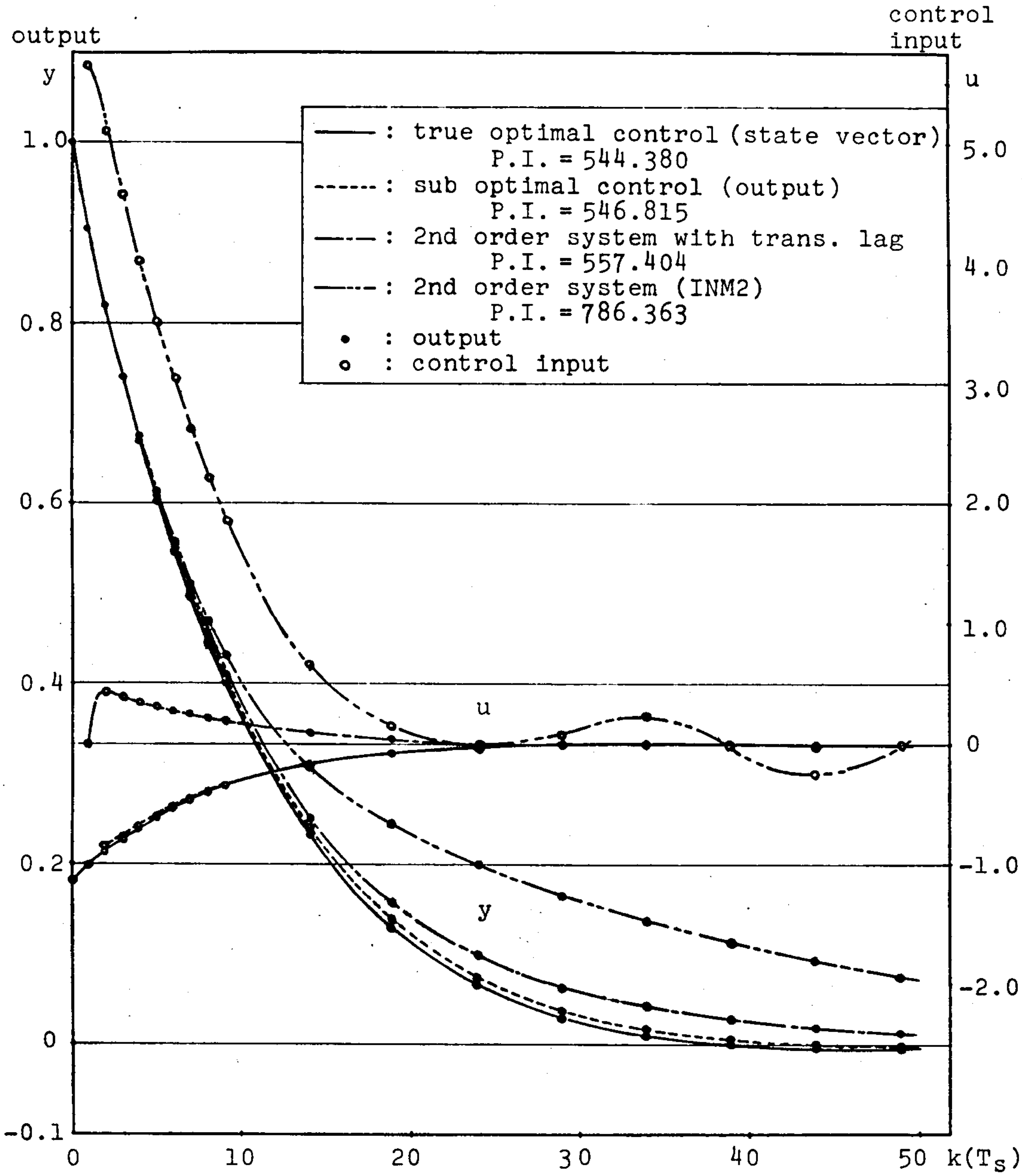


図7-9　伝達関数が $G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ で表わされる系の各種方法による最適制御の出力 y と制御入力 u の時間変化(その II)

($T=0.05$;　初期値モード(2): $X_1(0)=X_3(0)=0.0$, $X_2(0)=1/C_2$,　$y(0)=1.0$ の場合)

表7-1 伝達関数が $G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ の系の各種方法による最適制御の比較
(インパルス応答にノイズのない場合)

Method of Estimation or Control	Sample Period	Initial Values Mode *		
		(1)	(2)	(3)
True Optimal Control (state vector)	T=0.05	980.024	544.380	302.950
	T=0.1	516.440	299.723	181.415
Sub Optimal Control (output)	T=0.05	992.726	546.815	303.200
	T=0.1	528.082	301.764	181.689
Second Order System with Transport Lag	T=0.05	996.981	557.404	359.375
	T=0.1	524.751	302.239	192.104
Second Order System (INM2)	T=0.05	1114.811	786.363	926.014
	T=0.1	538.957	302.020	201.223

* : Initial Values Mode ;
(1) : $x_2(0)=x_3(0)=0.0,\ x_1(0)=1/c_1,\ y(0)=1.0$
(2) : $x_1(0)=x_3(0)=0.0,\ x_2(0)=1/c_2,\ y(0)=1.0$
(3) : $x_1(0)=x_2(0)=0.0,\ x_3(0)=1/c_3,\ y(0)=1.0$

表7-2　伝達関数が $G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ で表わされる系において，
インパルス応答にノイズのある場合の（2次系）+（遅れ要素），
2次系（INM2）の両推定法による最適制御の比較

（ただし，初期値モード（2）：
$X_1(0)=X_3(0)=0.0,\ X_2(0)=1/C_2,\ y(0)=1.0$ ）

Sample Period	Standard Deviation of Noise	Method of Estimation			
		2nd Order System with Transport Lag		2nd Order System (INM2)	
		mean	s.d.*	mean	s.d.*
T=0.05	σ_n/G_m=0.01	569.134	23.443	729.406	333.292
	σ_n/G_m=0.02	598.440	48.028	663.722	191.703
	σ_n/G_m=0.03	623.885	60.250	733.607	263.853
T=0.1	σ_n/G_m=0.01	303.087	1.981	303.216	2.445
	σ_n/G_m=0.02	302.795	1.570	307.778	6.490
	σ_n/G_m=0.03	302.556	1.112	312.991	8.925

* : standard deviation of Performance Index
G_m : maximum sampled value of impulse response
σ_n : standard deviation of noise

結言

本論文では，零交叉波を用いた相関法による動特性測定に関する基礎的問題を解析し，それに基づくインパルス応答の測定装置の主要部分，すなわち，2値信号の遅延装置とランダム．ノイズ発生器の試作を行なった。また，このような相関法により得られたインパルス応答から制御系のパルス伝達関数を推定するための新しい方法を提案し，その推定機構としての良さの評価を種々の方法により行ない，その有用性を明らかにした。以下に各章で得た成果を要約する。

第2章では，制御系の伝達関数を推定するのに正規性雑音を探索信号として用い，その入出力を共に零交叉波に変換して相関法を用いた場合の推定誤差の程度を明らかにした。また，探索信号としてランダム．テレグラフ．ノイズを用いた場合には，その入出力を零交叉波に変換してもゲイン以外のすべての情報は失われないことを明らかにした。また，ランダム．テレグラフ．ノイズを用いて相関関数を測定する時のデータの必要長さは，同じ許容誤差に対して白色雑音を用いた場合の約半分でよいという結果を得た。

第3章では，インパルス応答の測定に必要な2値信号の多出力可変遅延装置を試作した。これは遅延時間の相異なる10個の遅延出力（原理的には，遅延線の記憶容量以下であれば任意にとれる）が同時に得られる装置で，遅延時間は3桁の有効数字（偶数のみ）と倍率（10進）を装置前面のパネル面上で設定出来るように作られている。（2 msec ～ 99.8 sec）　これを用いてインパルス応答を求めると遅延時間の異なる10個の点が同時に得られるので動特性が全く未知の系

でも1回の測定で適当な遅延時間のきざみ幅が分かり便利である。また，探索信号用として，ランダム・テレグラフ・ノイズ発生器を試作し，これらが十分よい精度で動作することを確かめた。

第4章では，系のパルス伝達関数を2次系で近似し，そのパラメータをインパルス応答のサンプル値から推定する新しい方法を提案した。これは，インパルス応答のサンプル値をいくつかの組に分けてパラメータ推定し，それらの重み付平均により最終的な推定値を得る方法で，従来の最短左側インバースによる方法よりはデータ処理が簡単でしかも実用的範囲ではノイズに対しても強いことを近似式による解析的方法と計算機シミュレーションによる方法で確かめた。また，普通サンプリング周期（インパルス応答の測定における遅延時間のきざみ幅に相当）は小さい程推定誤差は小さくなると考えられるが，得られるサンプル値の個数が現実には有限個であることを考慮すると，最適なサンプル周期が存在することになる。この最適サンプリング周期もサンプル値の個数をパラメータとして求めている。

第5章では，重み付平均による推定法において，その推定値の分散最小という意味での最適重みをやや一般的に論じ，その立場から第4章で提案した推定法で用いている重み付平均のアルゴリズムを評価し，実用的意味では準最適重みになっていることを示した。

第6章では，実際の系は連続系であるが測定が離散的であるため推定によって得られる結果は等価的離散値系のパルス伝達関数であるという連続－離散値系の問題を，システムは2次系で，制御装置は可変ゲインという非常に簡単な例について論じ，その問題点と解決法について述べた。

ここでは，ある評価規範を最小にするという最適制御により得られたシステムが古典的制御理論の意味でも十分よい制御系になっているように逆にその評価規範を決定するという手法を用いている。これはある意味で，現代制御理論と古典的制御理論の融合といえる。そして，この評価規範を用いると，連続系と等価的離散値系の関係がうまくつき，離散値系の最適ゲインから簡単にそれと等価な連続系の最適ゲインが求められることを示した。また，第4章で提案した新しい推定法と従来の最短左側インバースによる方法との比較を単にパラメータの推定値がその真値にどれ程近いかではなくて，その推定値により得られた情報を用いていかによい制御性能が得られるかという制御系全体の評価規範により推定法の比較を行なった。これによっても新しい推定法の有用性が確かめられた。

第7章では，2次系では近似しがたい高次系とか遅れの大きい系にも適用出来るように遅れ要素を導入して系のパルス伝達関数を（2次系）+（遅れ要素）で近似した場合のパラメータの決定法とその推定機構としての良さについて検討した。遅れのパラメータは遅れ時間というものの考え方により任意性があって，その決定法は非常にむずかしい問題で拡張カルマン.フィルターによる現代制御論的な状態推定の手法を用いても必ずしも良い結果が得られるとはいえないようである。ここでは比較的簡単な1つの方法を提案し，それがかなりの範囲で使用にたえることをいくつかの例題で示した。また，遅れのパラメータが何んらかの方法で決定されると，残りの2次系のパラメータは第4章の方法が殆んどそのまま使えることを示した。

最後に，高次系の一例として3次系を選びこのディジタル的な制御を考えて，離散値系の最適制御問題をいくつかの条件のもとで考察し，遅れ要素の導入の効果を確かめた。また，合せてサンプリング周期が適切な場合にはINM2でもかなりよい結果の得られることも確かめた。

謝辞

本研究は京都大学工学部近藤文治教授の御指導の下に行なったものである。終始適切な御指導御鞭撻を下さった近藤教授に厚く御礼申し上げます。また，終始懇切丁寧な御指導御討論を頂き多大の御助言を賜わった安藤和昭助教授に心から感謝致します。また，大学院在学中第3章の装置製作に多大の御協力を頂いた森本正幸氏に御礼申し上げます。さらに研究に際し色々御助力下さった近藤研究室関係者一同に御礼申し上げます。そして最後に本研究を完成するにあたり，たえず暖いお心使いと激励を頂いた岡山大学工学部佐野博也教授と計測制御研究室の皆様に感謝致します。

付録I. 入力の零点分布がポアソンの場合のFlip-Flopの出力の相関関数

いま，単位時間に落ちる零点の平均個数がαの零点分布をもつPoisson Process $y(t)$を考える。そして，つぎに示すような$P(n,\tau)$，$P_n(\tau)$なる量を考える。

$P(n,\tau)$：与えられた時間間隔$[t, t+\tau]$に正確にnコの零点が落ちる確率

$P_n(\tau)$：n区間の確率密度関数。すなわち，時刻tにおいて零点が存在し，その後n番目の零点が時間間隔$[t+\tau, t+\tau+d\tau]$に存在する条件付確率が$P_n(\tau)d\tau$で与えられるもの。

独立なPoint Processに対しては これらの間に(I-1)式の関係が成り立つことが知られている。[8),9)]

$$P''(n,\tau) = \alpha\cdot\left\{P_{n+1}(\tau) - 2\cdot P_n(\tau) + P_{n-1}(\tau)\right\} \qquad \text{(I-1)}$$

ただし，$\left\{\begin{array}{l} n \leq 0 \text{ に対しては } P_n(\tau)=0 \text{ とする。} \\ P''(n,\tau) \text{ は } P(n,\tau) \text{ の } \tau \text{ についての2回微分を意味する。} \end{array}\right\}$

また，$P(n,\tau)$を用いるとyの相関関数は次式で与えられることは明らかである。

$$\Gamma(\tau) = 4\alpha\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot P(n,|\tau|) \qquad \text{(I-2)}$$

(I-1)，(I-2)式より，

$$\therefore \Gamma''(\tau) = 4\alpha\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n P_n(|\tau|) \qquad \text{(I-3)}$$

(I-3)式を $\tau \geq 0$ の領域でラプラス変換し，さらに (I-4)式を考慮して，

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}\{\gamma''(\tau)\} &= s^2\cdot R(s) - s\cdot\gamma(+0) - \gamma'(+0), \\ \gamma(+0) &= 1, \quad \gamma'(+0) = -2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I-4)}$$

次式を得る。

$$s^2\cdot R(s) = s - 2\alpha + 4\alpha\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot P_n(s) \qquad \text{(I-5)}$$

また，独立な Point Process では (I-6) あるいは (I-6)′ 式が成り立つので，これを (I-5)式に代入して (I-7)式を得る。

$$P_n(\tau) = P_1(\tau) * P_1(\tau) * \cdots\cdots * P_1(\tau) \qquad \text{(I-6)}$$

ただし， $*$: たたみ込み積分を表わす。

これをラプラス変換して，

$$P_n(s) = \{P_1(s)\}^n \qquad \text{(I-6)}'$$

$$R(s) = \frac{1}{s} - \frac{2\alpha}{s^2}\cdot\frac{1-P_1(s)}{1+P_1(s)} \qquad \text{(I-7)}$$

これより Poisson Process y の相関関数は

$$\gamma_y(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{R(s)\} = \exp(-2\alpha|\tau|) \qquad \text{(I-8)}$$

さらに y を Flip-Flop に通した出力 z の相関関数は (I-7)式において，

$$\alpha \longrightarrow \alpha/2, \quad P_1(s) \longrightarrow P_2(s) = \{P_1(s)\}^2$$

としたものを逆ラプラス変換したものであるから，

$$\gamma_z(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{\alpha}{s^2}\cdot\frac{1-\{P_1(s)\}^2}{1+\{P_1(s)\}^2}\right\}$$

$$= \exp(-\alpha|\tau|)\cdot\cos(\alpha\tau) \qquad (I-9)$$

これが入力の零点分布がポアソンの場合のFlip-Flopの出力の相関関数である。そして，殆んど無相関と考えられる $|\gamma_z(\tau)| < 10^{-4}$ となるためには，(I-9)式より，$|\alpha\tau| > 9.2$ が得られる。さらに，$\tau = 1\,m\,Sec$（最高サンプリング周期が 1^{KHz} であるから）に対しては次式が得られる。

$$1/\alpha < \frac{10^{-3}}{9.2} \cong 10^{-4} \quad (Sec) \qquad (I-10)$$

したがって，平均反転時間 $1/\alpha$ は $100\,\mu Sec$ 以下であればFlip-Flopの出力は殆んど無相関と考えてよいことになる。

付録II　本文(4-12)式の導出

本文(4-2)式を次のように部分分数に展開して考える。

$$G_\alpha(z) = \frac{\beta_3}{(1-\beta_1 z^{-1})} - \frac{\beta_3}{(1-\beta_2 z^{-1})} \qquad (\text{II}-1)$$

ただし、

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -(\beta_1+\beta_2) \\ \alpha_2 &= \beta_1\cdot\beta_2 \\ \alpha_3 &= \beta_3\cdot(\beta_1-\beta_2) \end{aligned}\right\} \qquad (\text{II}-2)$$

(II-1)式をz^{-1}について展開し、z^{-k}の係数を本文(4-1)式と比較して、

$$\beta_3\cdot(\beta_1{}^k-\beta_2{}^k) = g_k \qquad (\text{II}-3)$$

さらに、z^{-2k}の係数を比較して、

$$\beta_3\cdot(\beta_1{}^{2k}-\beta_2{}^{2k}) = g_{2k} \qquad (\text{II}-4)$$

変形して、

$$\beta_3\cdot(\beta_1{}^k-\beta_2{}^k)\cdot(\beta_1{}^k+\beta_2{}^k) = g_{2k} \qquad (\text{II}-4)'$$

また、(II-3)式の両辺にβ_1を乗じて整理すると、

$$\beta_3\cdot(\beta_1-\beta_2)\cdot(\beta_1{}^k+\beta_1{}^{k-1}\cdot\beta_2+\cdots\cdots+\beta_1\cdot\beta_2{}^{k-1}) = \beta_1\cdot g_k \qquad (\text{II}-5)$$

(II-3)式において、$k \longrightarrow k+1$ としたものと(II-5)式より、

$$g_{k+1}-\beta_1\cdot g_k = \beta_3\cdot(\beta_1-\beta_2)\cdot\beta_2{}^k \qquad (\text{II}-6)$$

また、β_2を用い同様にして、

$$g_{k+1} - \beta_2 \cdot g_k = \beta_3 \cdot (\beta_1 - \beta_2) \cdot \beta_1^{k} \qquad (\mathrm{II}-7)$$

(II-6), (II-7)式より,

$$2 \cdot g_{k+1} - (\beta_1 + \beta_2) \cdot g_k = \beta_3 \cdot (\beta_1 - \beta_2) \cdot (\beta_1^{k} + \beta_2^{k}) \qquad (\mathrm{II}-8)$$

(II-2)式を考慮して整理すると,

$$2 \cdot g_{k+1} + \alpha_1 \cdot g_k = \alpha_3 \cdot (\beta_1^{k} + \beta_2^{k}) \qquad (\mathrm{II}-9)$$

(II-3), (II-4)', (II-9)式より,

$$g_k \cdot (2 g_{k+1} + \alpha_1 \cdot g_k) = \alpha_3 \cdot g_{2k}$$

これを整理して,

$$g_{2k} \cdot \alpha_3 - g_k^2 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot g_k \cdot g_{k+1} = 0 \qquad (\mathrm{II}-10)$$

これが本文(4-12)式である。

付録Ⅲ　本文(4-16)式の導出

本文(4-12)式の導出(付録Ⅱ)と同様の考え方で，(4-2)式を(Ⅱ-1)，(Ⅱ-2)式のように展開し，(Ⅱ-1)～(Ⅱ-10)式の他に，さらにつぎに示す(Ⅲ-1)式を考える。

$$g_{3k} = \beta_3 \cdot (\beta_1^{3k} - \beta_2^{3k})$$

$$= \beta_3 \cdot (\beta_1^{k} - \beta_2^{k})\{(\beta_1^{k} + \beta_2^{k}) - \beta_1^{k} \cdot \beta_2^{k}\} \qquad (\text{Ⅲ-1})$$

ところで，(Ⅱ-2)，(Ⅱ-6)式と(Ⅱ-2)，(Ⅱ-7)式よりそれぞれ，

$$\beta_2^{k} = \frac{1}{\alpha_3} \cdot (g_{k+1} - \beta_1 \cdot g_k) \qquad (\text{Ⅲ-2})$$

$$\beta_1^{k} = \frac{1}{\alpha_3} \cdot (g_{k+1} - \beta_2 \cdot g_k) \qquad (\text{Ⅲ-3})$$

(Ⅲ-2)，(Ⅲ-3)式より，(Ⅱ-2)式を考慮して，

$$\beta_1^{k} \cdot \beta_2^{k} = \frac{1}{\alpha_3^2} \{ g_{k+1}^2 + g_k \cdot (\alpha_1 \cdot g_{k+1} + \alpha_2 \cdot g_k) \} \qquad (\text{Ⅲ-4})$$

また，(Ⅱ-3)，(Ⅱ-4)′式より，

$$(\beta_1^{k} + \beta_2^{k})^2 = (g_{2k} / g_k)^2 \qquad (\text{Ⅲ-5})$$

本文(4-13)式を考慮して，(Ⅱ-3)，(Ⅲ-4)，(Ⅲ-5)式を(Ⅲ-1)式に代入して，

$$g_{3k} = g_k \cdot \left\{ (g_{2k}/g_k)^2 - \frac{1}{\alpha_3^2} \cdot (g_{k+1}^2 - g_k \cdot g_{k+2}) \right\}$$

これを変形して次式を得る。この両辺の平方根をとったものが本文(4-16)式である。

$$\alpha_3^2 = \frac{g_k^2 \cdot (g_{k+1}^2 - g_k \cdot g_{k+2})}{(g_{2k}^2 - g_k \cdot g_{3k})} \qquad (\text{Ⅲ-6})$$

付録IV　伝達関数が与えられている時、これをJordan Canonical Formに変換して、離散値系の状態方程式表示を行なうこと。

伝達関数が(IV-1)式で与えられるような簡単な2次系の場合を考える。

$$G(s) = \frac{K}{(s+P_1)(s+P_2)} \qquad (\text{IV-1})$$

これをJordan Canonical Formに変換して、まず連続系の状態方程式を導びく。(IV-1)式を(IV-2)式のように変形して、図IV-1を参照すると、

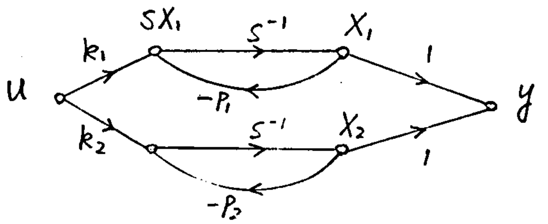
$$G(s) = \frac{k_1}{s+P_1} + \frac{k_2}{s+P_2} \qquad (\text{IV-2})$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{X}(t) = \mathbb{A}\cdot\mathbb{X}(t) + \mathbb{b}\cdot u(t) \qquad (\text{IV-3})$$

$$y(t) = \mathbb{C}^T\cdot\mathbb{X}(t) \qquad (\text{IV-4})$$

が得られる。ただし、

$$k_1 = K/(P_2-P_1), \quad k_2 = K/(P_1-P_2),$$
$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \qquad (\text{IV-5})$$
$$\mathbb{C}^T = [1, 1]$$



図IV-1　$G(s) = \frac{k_1}{s+P_1} + \frac{k_2}{s+P_2}$ の信号線図表示

つぎにこれを離散値系の状態方程式表示に変換することを考える。

まず、(IV-3)式の解を求めると、つぎのようになる。

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\cdot\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\eta)\cdot\mathbf{b}\cdot u(\eta)\,d\eta \qquad \text{(IV-6)}$$

ただし、$\Phi(t)$ は $u(t)=0$ の場合の(IV-3)式の解で次式で表わされる。

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}\cdot t) \qquad \text{(IV-7)}$$

ここで、$\mathbf{x}_k \triangleq \mathbf{x}(kT)$、$\mathbf{x}_{k+1} \triangleq \mathbf{x}(\overline{k+1}\cdot T)$ であることを考慮すると、

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(T)\cdot\mathbf{x}_k + \int_0^T \Phi(T-\eta)\cdot\mathbf{b}\cdot u(\eta)\,d\eta \qquad \text{(IV-8)}$$

（T：サンプリング周期）

これより、(IV-3),(IV-4)式に対応する離散値系の状態方程式と出力方程式を(IV-9),(IV-10)式と仮定し、その係数マトリックス $\mathbf{P}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{C}^T$ を求める。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{x}_k + \mathbf{g}\cdot u_k \qquad \text{(IV-9)}$$

$$Y_k = \mathbf{C}^T\cdot\mathbf{x}_k \qquad \text{(IV-10)}$$

(IV-8),(IV-9)式より、ただちに次式が得られる。

$$\mathbf{P} = \Phi(T) = \exp(\mathbf{A}\cdot T) = \begin{pmatrix} e^{-\beta_1 T} & 0 \\ 0 & e^{-\beta_2 T} \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-11)}$$

つぎに、$kT \leq \eta < (k+1)T$ に対して、$u(\eta) = u(kT) \triangleq u_k$ を仮定すると、（入力が階段状信号であること）次式が得られる。

$$\int_0^T \Phi(T-\eta)\cdot\mathbf{b}\cdot u(\eta)\,d\eta = \Phi(T)\cdot\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I}-\Phi(T)^{-1})\cdot\mathbf{b}\cdot u_k \qquad \text{(IV-12)}$$

これより，

$$\boldsymbol{g} = \mathbb{P}\cdot\mathbb{A}^{-1}\cdot(\mathbb{I}-\mathbb{P}^{-1})\cdot\boldsymbol{b}$$

$$= \frac{K}{P_2-P_1}\cdot\begin{pmatrix}(1-e^{-P_1T})/P_1 \\ -(1-e^{-P_2T})/P_2\end{pmatrix} \qquad (\mathrm{IV}-13)$$

なお，$\mathbb{C}^T$は連続系も離散値系も同じものになる。

本文の(7-15)式と合せて，$\boldsymbol{g}$の第2要素の負号をとると，$\mathbb{C}^T$の第2要素に負号がつくことになる。（図IV-1. 参照）

つぎに本文の(7-13)式の$(1-e^{-sT})/s$は零次ホールド回路の伝達関数で，入力を階段状信号にするために挿入されたものであると考えるとよい。また，e^{-hs}の項は，入力を$h=m\cdot T$時間だけ遅らせる働きをしているだけであることを考慮すると，u_kをu_{k-m}に変えればよいことが分かる。

以上のことは3次あるいはそれ以上の系についても殆んど同じように出来る。

付録 V　状態変数フィードバックを出力フィードバックの形にするための適当な変換

$$\mathbb{X}_k \triangleq \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}_k = \mathbb{V} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}_k \qquad (\mathrm{V}-1)$$

ただし,
$$\mathbb{V} = \frac{1}{p_2 - p_1} \begin{pmatrix} p_2 & 1 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{V}-2)$$

が正しいことを証明する。

まず, $\dot{y}(t)$ を $\mathbb{X}(t)$ を用いて表わすと,

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{X}(t) \\ &= \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}(t) + \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{B} \cdot u(t) \qquad (\mathrm{V}-3) \end{aligned}$$

ところで, $\mathbb{C}^T \cdot \mathbb{B} \cdot u(t)$ の項を考えてみると,

$$\mathbb{C}^T \cdot \mathbb{B} = (1, -1) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = k_1 - k_2 = 0 \qquad (\mathrm{V}-4)$$

$$\left(\because k_1 = k_2 = K/(p_2 - p_1) \right)$$

なお, 高次の系についても同様のことがいえ, $u(t)$の項は消える。

そこで, $\dot{y}(t) = \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}(t)$ と表わされるので, 次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{X}_k \\ \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \\ \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{A} \end{bmatrix} \cdot \mathbb{X}_k \qquad (\mathrm{V}-5)$$

したがって, (V-1)式のような変換を行なうためのマトリックス$\mathbb{V}$は

$$\mathbb{V} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \\ \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \qquad (\mathrm{V}-6)$$

より求められる。これを, この場合にあてはめると, (V-2)式が得られる。

参考文献

1) Kerr, R.B. and Surber, W.H. : "Precision of Impulse-Response Identification Based on Short, Normal Operating Records," IRE Trans., vol. AC-6 , pp. 173-182, 1961

2) Lichtenberger, W.W. : "A Technique of Linear System Identification Using Correlating Filters," IRE Trans.,vol. AC-6 , pp.183-199, 1961

3) Lindenlaub, J.C. and Cooper, G.R. : "Noise Limitations of System Identification Techniques," IEEE Trans., vol. AC-8 , pp. 43-48, 1963

4) Veltman, B.P. und Kwakernaak, H. : "Theorie und Technik der Polaritatskorrelation fur die dynamische Analyse nieder-frequenter Signale und Systeme," Regelungstechnik, Heft 9, 357-363, 1961

5) Veselova, G.P. and Gribanov, Yu.I. : "The Relay Method of Determining Correlation Coefficients," Automation and Remote Control, vol. 30 , no. 2, pp. 187-194, 1969

6) Kalman, R.E. : "Design of a Self-Optimizing Control System," ASME Trans., vol. 80, no. 2, pp. 468-478, 1958

7) Huffman, D.A. : "The Synthesis of Linear Sequential Coding Networks," Information Theory Academic Press, pp. 77-95, 1956

8) McFadden, J.A. : "The Axis-Crossing Intervals of Random Functions," IRE Trans., vol. IT-2, pp.146-150, December, 1956

9) ———— : "The Axis-Crossing Intervals of Random Functions II ," IRE Trans., vol. IT-4, pp.14-24, March, 1958

10) ———— : "The Fourth Product Moment of Infinitely Clipped Noise," IRE Trans., vol. IT-4, pp. 159-162, December, 1958

11) ———— : "The Probability Density of the Output of an RC Filter When the Input Is a Binary Random Process," IRE Trans., vol. IT-5 , pp. 174-178, December, 1959

12) ———— : "On the Length of Intervals in a Stationary Point Process," Journal of the Royal Statistical Society, Series B, vol.24, no.2, pp. 364-382, 1962

13) Wax, N. (editor) : "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes," Dover Pub., New York, pp. 133-294, 1954

14) Davenport, W.B.Jr. and Root, W.L. : "An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise," McGraw-Hill, New York, 1958

15) 古田, 伊沢: プロセス動特性の一測定法, 計測と制御, vol.3, No.9, pp.666～674, 1964

16) 佐藤: 線形なプロセスの応答の実時間算定法, 計測と制御, vol.3, No.9, pp.675～683, 1964

17) 大地, 古田, 伊沢: M系列信号を用いた最適化制御, 計測自動制御学会論文集, vol.2, No.4, pp.276～282, 1966

18) 河原田: M系列とノイズを組合わせた高速度二進乱数の発生, 計測自動制御学会論文集, vol.2, No.4, pp.283～288, 1966

19) 伊沢, 古田, 大野, 井藤, 秋山: Binary Random Signal による熱交換器の動特性試験, 計測自動制御学会論文集, vol.2, No.2, pp.101～112, 1966

20) 前田: 擬似ランダム信号を用いる適応制御系, 制御工学, vol.13, No.4, pp.245～254, 1969

21) 藤井, 赤沢: 平均応答計算装置の試作, 制御工学, vol.11, No.6, pp.299～307, 1967

22) 森下: 相関器を簡易化するための新しい方法, 計測と制御, vol.3, No.4, pp.282～288, 1964

23) 中村, 岩貞, 足立: I系列によるプラント動特性の同定法, 計測自動制御学会論文集, vol.5, No.2, pp.118～126, 1969

24) 鈴木, 藤井: プロセス同定問題への最小2乗推定法の応用, 計測と制御, vol.10, No.8, pp.563～578, 1971

25) 鈴木，峠，藤井，西村：最小2乗法による線形プロセスの動特性決定法について，計測自動制御学会論文集，vol. 1，No. 2，pp. 163～173，1965

26) 鈴木，古谷，藤井：最小2乗法による無定位性プロセスの動特性決定，計測自動制御学会論文集，vol. 2，No. 4，pp. 289～294，1966

27) 茅：相関関数解析とそのプロセス動特性計測への応用，計測と制御，vol. 5，No. 2，pp 121～128，1966

28) 茅：相関を利用した周波数応答測定法，計測と制御，vol. 2，No. 1，pp. 33～40，1963

29) 茅：伝達関数モデル妥当性の検定，計測自動制御学会論文集，vol. 5，No. 4，pp. 348～357，1969

30) 茅：プロセス伝達関数の比較解析，電気学会誌，vol. 90，No. 6，pp. 183～192，1970

31) 椹木，菅井：制御系における Random Signal の相関関数決定に際しての誤差の評価，京都大学自動制御研究会資料，

32) 兼田：零交叉波を用いた相関関数の測定について，京都大学工学部電気系教室研究談話会資料，No. 174，1968

33) 近藤，安藤，兼田，森本：2値遅延装置の試作とアナログ相関器への応用，アナログ技術研究会資料，vol. 8，No. 2，pp. 37～46，1968

34) 佐藤：確率的非線形系の解析 ―ランダム・プロセスの非線形確率の一例―，計測と制御，vol. 5，No. 3，pp 155～160，1966

35) 近藤，安藤，兼田，森本：磁歪遅延線を用いた多出力可変遅延装置について，日本自動制御協会 統計学的制御理論シンポジウム資料，No. 205，pp. 53~56，1968

36) 兼田，安藤，近藤：2値信号の多出力可変遅延装置，制御工学，vol. 14，No. 7，1970

37) 兼田，安藤：ノイズのあるインパルス応答のサンプル値より等価的二次系の伝達関数を推定する一方法，電子通信学会論文誌，vol. 54-C，No. 12，pp. 1168，1971

38) 兼田：インパルス応答を用いた動特性推定，電子通信学会論文誌，vol. 55-D，No. 7，pp. 481，1972

39) 兼田，安藤：ノイズのあるインパルス応答より等価的2次系の伝達関数を推定する一方法，日本自動制御協会第3回統計学的制御理論シンポジウム資料，No. 4.2，pp. 37~40，1971

40) 兼田：パラメータ推定における準最適重みに関する一考察，電子通信学会論文誌，vol. 55-D，No. 8，pp. 563，1972

41) 兼田，安藤：線形離散値系の動特性同定，日本自動制御協会第2回ダイナミカル・システム・シンポジウム資料，No. 122，pp. 73~76，1972

42) Laning, J.H.Jr. and Battin, R.H. : "Random Processes in Automatic Control," McGraw-Hill, New York, 1956

43) Korn, G.A. : "Random-Process Simulation and Measurement," McGraw-Hill, New York, 1966

44) Pervozvanskii, A.A. : "Random-Processes in Nonlinear Control Systems," Academic Press, New York, pp. 16-43, 1965

45) Uhlenbeck, G.E. and Lawson, J.L. : "Threshold Signals," Radiation Laboratory Series, McGraw-Hill, New York, 1950

46) Hargrave, L.E.Jr. : "A Magnetostrictive Delay-Line Shift Register," IRE Trans., vol. EC-10, December, pp. 702-707, 1961

47) Mundy, R.C.N. : "A Magnetostrictive Delay-Line Store," Electronic Engineering, vol. 35, January, pp. 32-35, 1963

48) Lee, P.C.K. : "Optimal Estimation, Identification, and Control," MIT Press, 1964

49) Tou, J.T. : "Digital Sampled-Data Control System," McGraw-Hill, New York, 1959

50) Joshi, S. and Kaufman, H. : "An Adaptive Control Scheme for High Order Plants Using Second Order Models with Transport Lag," Research Report of U.S. Armed Service Technical Information Agency, 1971

51) Cox, J.B., Hellums, L.J., and Williams, T.J. : "Algorithms for Direct Digital Control of Chemical Processes," IFAC, Session 4B, Paper 43A, 1966

52) Gallier, F.W. and Otto, R.E. : "Self-Tuning Computer Adapts DDC Algorithms," Progress in Direct Digital Control, ISA 1969, edited by Williams, T.J. and Ryan, F.M., pp. 235-240, 1969

53) Coughapour, D.R. and Koppel, L.B. : "Process Systems Analysis and Control," McGraw-Hill, New York, p.97, pp. 225-226, 1965

54) Jazwinski, A.H. : "Stochastic Processes and Filtering Theory," Academic Press, New York, 1970

55) Sage, A.P. : "Optimum Systems Control," Prentice-Hall Inc., 1968