

高速計算機のストリップ線路間

誘導雑音に関する研究

奥川 俊二

昭和49年6月

高速計算機のストリップ線路向
誘導雑音に関する研究

奥川俊二

昭和49年6月

DOC

1974

18

電気系

内容梗概

まず第1章において、計算機回路における雑音について一般的に述べ、その中でも誘導雑音の問題が特に重要であることを示す。

次に第2章においては、多線条線路の一般理論をマクスウェルの方程式から出発して明らかにしている。そして反射係数マトリックスによる多重反射の取扱ひ法、マイクロ波回路で重要な多線条指数線路の一般的理論について述べ、伝送基本マトリックスも誘導している。

第3章では、誘導雑音をまず結合が弱いと仮定、すなわち被誘導線が誘導線に及ぼす影響を無視して解析し、次に第2章で示した多線条線路一般理論を適用することによって、一般的に解析を行い各種端子条件において実験結果ともよく一致する事を示している。そしてこれ等二つの理論による結果を統合して、誘導雑音の実用的な等価回路も導いている。

第4章においては、最近の計算機の論理布線として広く用いられている、しゃへい型ストリップ線路、マイクロストリップ線路、埋め込まれた (embedded) マイクロストリップ線路の解析法を示している。まずしゃへい型ストリップ線路は均質媒質であるため解析は比較的容易であつて、等角写像等による解析法がかたまり古くより知られており設計法もほぼ確立されているが、これ等の結果をまとめて示している。マイクロストリップ線路は一番広く用いられているものであるが、媒質が基板の誘電体層と空気の二重層からなるため、解析が困難であつた。

本論文ではグリーン関数と積分方程式による解析法により、導体の厚さ等の断面の寸法と基板の比誘電率の変化に対して、特性インピーダンス、伝搬定数、そして誘導雑音係数等が如何に変化するかを明らかにしている。そして実験結果ともよく一致することも確かめている。さらに同様にグリーン関数と

積分方程式による解析法により、マイクロストリップ線路を機械的に保護するために誘電体層の中に埋めこんだ、いわゆる埋め込まれたマイクロストリップ線路を解析し、その特性を明らかにしている。

第5章においては、まず最初に最近の高速計算機の基本論理回路として盛んに用いられている、TTL (transistor-transistor logic) および ECL (emitter coupled logic) 型回路の主な入出力特性について概説し、雑音余裕度について述べている。そして、TTL, ECL 回路を実装した高速計算機の実際の論理布線間の線間距離の設計法について述べている。

目次

第1章	序論	-----	1
第2章	多線条線路一般理論	-----	5
2.1	はじめに	-----	5
2.2	マクスウエルの方程式と多線条線路の方程式	-----	5
2.3	多線条線路の基本式	-----	9
2.4	反射係数マトリックスと多重反射	-----	14
2.5	多線条指数線路	-----	18
2.6	伝送基本マトリックス	-----	21
第3章	誘導雑音の解析	-----	27
3.1	はじめに	-----	27
3.2	弱結合理論による解析	-----	28
3.2.1	基本式の誘導(1)	-----	28
3.2.2	基本式の誘導(2)	-----	31
3.2.3	送端および受端における誘導雑音	-----	35
3.3	多線条線路理論による解析	-----	37
3.3.1	基本式	-----	37
3.3.2	全端子整合の場合	-----	39
3.3.3	各種端子条件における誘導雑音	-----	44
3.3.4	実験結果	-----	49

3.4	誘導雑音の等価回路	-----	57
第4章	ストリップ線路の解析	-----	61
4.1	はじめに	-----	61
4.2	しゃへい型ストリップ線路	-----	62
4.2.1	はじめに	-----	62
4.2.2	等角映像法による解析	-----	63
4.2.3	その他の解析法	-----	65
4.2.4	設計法	-----	66
4.3	マイクロストリップ線路	-----	70
4.3.1	はじめに	-----	70
4.3.2	実効比誘電率による表現	-----	74
4.3.3	グリーン関数と積分方程式による解析法	-----	75
4.3.4	結合マイクロストリップ線路のグリーン関数	-----	77
4.3.5	電位係数	-----	82
4.3.6	計算方法	-----	85
4.3.7	計算結果	-----	90
4.3.8	実験結果等との比較	-----	103
4.3.9	三線系線路の計算例	-----	106
4.3.10	磁性体媒質上のマイクロストリップ線路	-----	107
4.4	埋め込まれたマイクロストリップ線路	-----	108
4.4.1	はじめに	-----	108
4.4.2	グリーン関数	-----	110
4.4.3	計算結果	-----	117

第5章 論理布線内の誘導雑音-----123

5.1 はじめに-----123

5.2 高速論理回路-----123

5.3 雑音余裕度-----127

5.4 論理布線設計-----129

第6章 結び-----131

参考文献-----133

附録-----145

第1章 序論

計算機がますます高速化され、回路がIC(集積回路)化、さらにはLSI(大規模集積化)化され高密度実装化されるに従って、論理布線間の誘導雑音の問題が大変重要になって来た。

高速回路では短かい線でも分布定数伝送線路として取り扱わなければならず、回路そのものの遅れよりも線路の遅れの方が大きくなって来ており、回路そのものと同様に線路の研究がますます重要とになって来ている。

誘導雑音は近接した線路間の結合によって生じる雑音であるが、一般に広い意味の雑音というのは球形の理想的なものからのずれであって、計算機回路の雑音には一般に次のようなものが考えられる⁽¹⁾⁽²⁾

- (1) 計算機外部から飛び込んで来る外来雑音
- (2) 線路の不整合による反射によって生じる雑音
- (3) 共通の電源線による結合のために起る電源雑音
- (4) 共通の接地インピーダンスによる結合のために生じる接地雑音
- (5) 近接線路間の誘導雑音

(1)の外来雑音はシールドする事によって、また入力電源線をフィルタする事によって抑制する事が出来る。普通は簡単な電力線フィルタとステイールのキャビネットで十分である。また特に内部に多くのリレーを使用し普通の積集アークの抑制だけでは不十分の場合には余分なシールドが必要になる事もある。

(2)の反射による雑音は、ある程度以上長い線路に対しては負論終端を整合する事によって小さくする事が出来る。この整合のために終端抵抗で余分の電力を消費する事によってしやうがこれは致し方ない。

(3)の共通電源による雑音は電源システムが電流の急速な変化の要求に応じられないために起るものであって、電源バスの上

の電圧が変化しこの変化がこの同じ電源バスにつながらる他の回路に結合される事によって生じるものであるが、これは電源インピーダンスを下げたり、適当なフィルタをつける事によって比較的簡単に治す事が出来る。また第5章で述べるように高速論理回路としては TTL (transistor-transistor logic) と ECL (emitter coupled logic) が広く用いられているが、特に ECL 回路では回路の二つの状態によってその回路の電流が強んど変化しないうえ、回路のスウィッチングによって電源雑音を生じる事がない。

(4)の共通の接地インピーダンスの結合によって生じる雑音は、いくつかの回路が共通のアース線を通して電流をリターンする場合、接地回路の有限のインピーダンスのためにカップリングが生じる。特に接地線のインダクタンスによって生じるので、接地線のインピーダンスを出来るだけ下げる事が必要である。

以上のように(1)から(4)までの雑音は夫々にわけて述べたような方法によって小さくする事が出来る。(5)の誘導雑音も多線回路間の距離を十分にとれば小さくする事が出来るのは当然のことであるが、線路間の距離を大きくするのは高密度実装の目的と相反する事に注意。従って実際に誘導雑音の見地からどの程度まで線路を近づけてよいかの目安が、高速度高密度論理回路の設計のためにどうしても必要になってくる。

計算機の論理布線は、図 1.1 に示すように IC をパックした flat pac の第一レベルのパッケージング、そして flat pac を搭載したプリントカードの第二レベルのパッケージング、そしてこれ等のカードをさしこむ多層のマザーボードあるいはバックパネルボードの第三レベルのパッケージングが考えられるが、LSI 化されると第二レベルのパッケージングはなくなり、二レベルのパッケージングとなる。いずれにせよ、カード又はボード上の論理布線は第4章で述べるストリップ線路である。

以下第2章では誘導雑音を厳密に解析するための準備として多線路線路の一般理論について述べる。多線路線路の研究は単に誘導雑音の解析のみにあらず、マイクロ波回路の研究や、

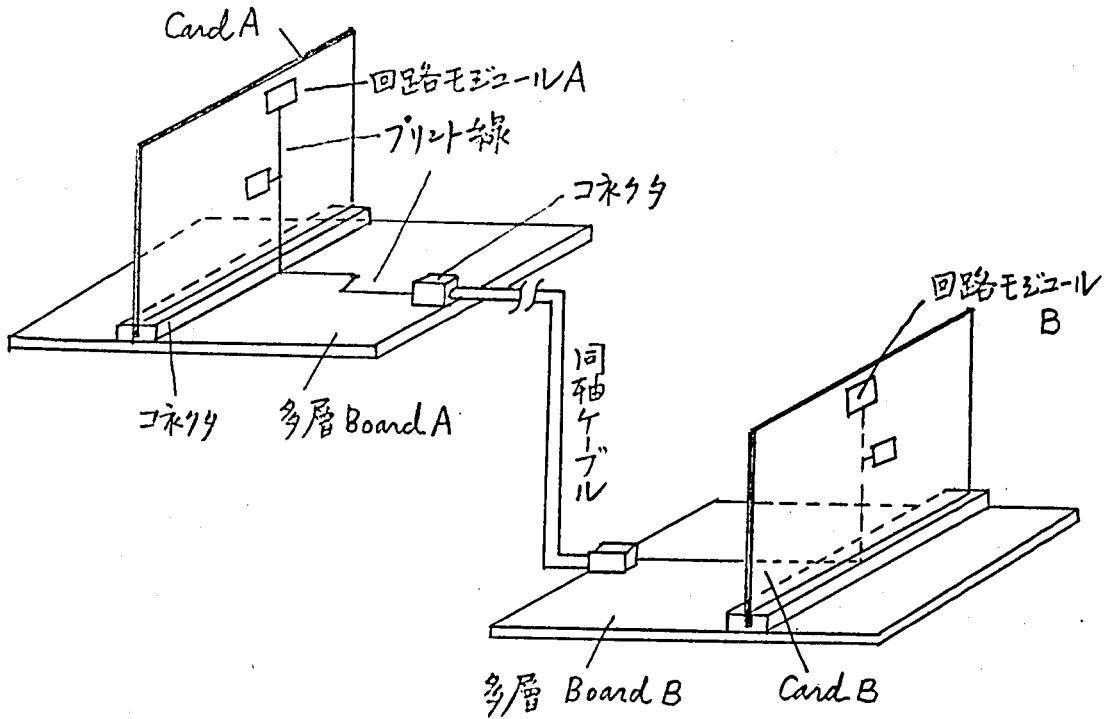


図 1.1

送電線のサージの研究のために必要である。ここでは、まずマクスウエルの方程式と多線条線路の方程式の関係を明らかにしたのち、時間領域における多線条線路の一般的理論を、特性アドミタンスマトリックス、反射係数マトリックス等を用いて明らかにする。そしてさらにマククロ波回路において重要な多線条指数線路についても考察する。

次いで第3章では、まず最初に従来広く用いられているところの被誘導線が誘導線に及ぼす影響を無視したいわゆる弱結合理論に基づいて誘導雑音の式を導き出し、次いで第2章で明らかにした多線条線路の一般理論を対称二線条線路の場合に適用する事によって、被誘導線が誘導線に及ぼす影響も考慮に入れた場合の一般式を導出する。そして、各種端子条件の下で実験結果ともよく一致する事を示す。そしてさらに、弱結合理論で定義された誘導雑音係数と、偶発態および奇発態の特性インピーダンスと伝搬速度との間の関係を明らかにする。最後に、弱結

合理論と多線条理論による結果を合わせて、誘導雑音の实用的な等価回路を導く。

第4章では論理布線として一般に用いられているしゃへい型ストリップ線路, マイクロストリップ線路, としてマイクロストリップ線路で線路を保護するため誘電体層をもうけた埋め込まれたマイクロストリップ線路も TEM 状態の伝搬を仮定して解析している。しゃへい型ストリップ線路は媒質が一樣であるため解析が容易であり等角写像法による解析が比較的早く知られているが, マイクロストリップ線路は媒質が二重層をなしているため最近まで精密な解析は困難であった。ここでは, Silvester のグリーン関数と積分方程式による解析法⁽⁶⁵⁾を, 結合線路の場合に拡張する事によつて, 伝搬定数, 特性インピーダンス, 誘導雑音係数などが, 導体の厚さ等の線路の断面の幾何学的寸法と基板の誘電率に対してどの様に変化するかを明らかにし, また実験結果ともよく一致する事を示している。最後に埋め込まれたマイクロストリップ線路を同様にグリーン関数と積分方程式による方法によつて解析し, その特性を明らかにしている。

最後に第5章では, 最近の高速度論理回路として広く用いられている TTL および ECL 論理回路について簡単に述べたのち, これらの論理回路を実装してストリップ線路で接続した場合の誘導雑音について考察し, 実際に線間距離をどの程度に設計すればよいかを明らかにしている。

第2章 多線条線路一般理論

2.1 はじめに

多線条線路の研究は大変古く Carson 等の 1920 年代の論文⁽¹⁾より、ごく最近の Paul の論文⁽²²⁾まで (1973-08), 数多くの研究発表があり,⁽¹⁾⁻⁽²²⁾ 大変古くて又新しい問題である。

多線条線路の研究は、マイクロ波における方向性結合器や濾波器等の研究や、送電線のサージの研究や、デイジナル回路における並行線路間の誘導雑音の研究などのために必要であるが、時間領域における多線条線路の一般理論は、送電線のサージの問題に関連して林の理論⁽²⁾ (1955年) が古くよりあり、理論的には完全であると思われるが、他の分野ではこの理論は余り知られていないようであり、多線条線路の時間領域における理論が最近でも種々発表されているが、⁽³⁾⁻⁽¹⁷⁾ 本質的には林理論に殆んど含まれるものであると考えられる。

この章においては、まず最近の Weeks の論文⁽¹⁹⁾ に基いてマクスウエルの方程式と多線条線路の方程式の関係を明らかにしたのち、林理論などに基いて多線条線路の基本式を示す。さらにマイクロ波で必要なる多線条指数線路の基本式および伝送基本マトリックスを導く。

2.2 マクスウエルの方程式と多線条線路の方程式⁽¹⁹⁾

電磁界でのマクスウエルの方程式を出発点として、伝搬方向 (z 軸方向) に一様な $N+1$ 個の導体からなる一般的多線条線路の解を導く。ここで、一定の誘電率 ϵ と透磁率 μ をもつ一様な完全な誘電体と無損失線路、すなわち TEM 状態の伝搬を仮定する。なお、共通の基準となる導体は $N+1$ 番目の導体とし、各導体の電圧はこの基準導体に対して測られるものとする。導体外部の空間は完全に絶縁体を仮定しているから、この空

向では電荷の流れはないし、もしはじめに電荷が与えられていなければ、この空間は電荷のない空間である。従って伝導電流と電荷密度は導体外側では零となり、導体外側の空間では、電界と磁界は次のマクスウエルの方程式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

導体表面での境界条件はEの接線成分と $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ の法線成分が導体表面において連続しなければならない事であるが導体は無損失と仮定しているのので導体内ではEとHは零である。従って、境界条件はEの接線成分とHの法線成分がすべての導体表面において零になる事である。

このような $N+1$ 導体の構成では、TEM状態の伝搬、すなわちEとHが伝搬方向（z軸方向）に垂直な平面（ x, y 平面）内にある事になる（ $H_z = E_z = 0$ ）。このような伝送線路系では、マクスウエルの方程式のTEM状態の解は

$$\mathbf{E} = -\sum_{i=1}^N V_i(z, t) \nabla \phi_i(x, y) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{H} = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j(z, t) \right) \mathbf{e}_z \times \nabla \phi_i(x, y) \quad (2.3)$$

のようになる。ここで \mathbf{e}_z は z 軸に平行で z 軸の正方向に向く単位ベクトルである。N 個の関数 $V_i(z, t)$, $I_i(z, t)$ は線型独立で少くとも一回微分可能な z と t の関数であり、 $V_i(z, t)$, $I_i(z, t)$ は x, y に関して独立である。N 個の関数 $\phi_i(x, y)$ は z と t に対して独立で少くとも一回微分可能な x と y の関数であり、 N^2 個の L_{ij} は定数である。

式(2.2), (2.3)によって与えられるフィールドに対して次の5つの事が必要される。

- (1) E の接線成分と H の法線成分はすべて導体表面で零である。
- (2) 式(2.2)の関数 $V_i(z, t)$ は $N+1$ 番目の導体に対する i 番目の導体の電位である。
- (3) 式(2.3)の関数 $I_i(z, t)$ は i 番目の導体を流れる電流である。
- (4) すべての $N+1$ 個の導体を流れる電流の和はすべての z, t に対して零であり, E と H は導体から無限大の距離のところでは零である。
- (5) 式(2.2)によって与えられる電界 E と式(2.3)によって与えられる磁界 H は式(2.1)のマクスウエル方程式を満足しなければならない。

これ等5つの要求に対する5つの必要充分条件は次のように与える。

- (1) 関数 $\phi_i(x, y)$ はすべての導体表面で一定値をとる。
- (2) もし j 番目の導体表面における $\phi_i(x, y)$ の一定値を $\phi_i(j)$ ($j=1, 2, \dots, N+1$)とすると

$$\phi_i(j) = \delta_{ij} + \phi_i(N+1) \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

ここに δ_{ij} はクロネッカーの δ である。 (2.4)

- (3) 式(2.3)の定数 L_{ij} は

$$\sum_{j=1}^N C_{ij} L_{jk} = \epsilon \mu \delta_{ik} \quad (CL = \epsilon \mu U) \quad (2.5)$$

(U : 単位行列)

ここに定数 C_{ij} は次の δ_{ij} に定義される。

$$C_{ij} = -\epsilon \oint_{S_i} n_i \nabla \phi_j \cdot d\mathbf{l}_i \quad (2.6)$$

ここで n_i は i 番目の導体の表面に対する外向きの単位法線ベクトルである。積分の通路は z -一定の面内であり, i 番目の導体を z 軸の正方向に対して反時計廻りに

一度取り巻き, 導体表面に任意に近く存在する。 $d l_i$ はこの通路にそつての要素である。

(4) $i = 1, 2, \dots, N$ に対して

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \phi_i \rightarrow 0 \quad (|\mathbf{r}| \rightarrow \infty \text{ のとき}) \quad (2.7)$$

ここに $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (\mathbf{i}, \mathbf{j} はそれぞれ x 軸, y 軸に平行 (正方向) の単位ベクトル)

(5) $i = 1, 2, \dots, N$ に対して, 関数 $\phi_i(x, y)$ は二次元のラプラスの方程式

$$\nabla^2 \phi_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} = 0 \quad (2.8)$$

を満足し, 関数 $V_i(z, t)$ と $I_i(z, t)$ は伝送方程式

$$- \frac{\partial V_i}{\partial z} = \sum_{j=1}^N L_{ij} \frac{\partial I_j}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$- \frac{\partial I_i}{\partial z} = \sum_{j=1}^N C_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial t} \quad (2.10)$$

を満足する。

以上が必要充分条件である事は Weeks⁽¹⁹⁾ が示しているので, ここでは省略する。

なお, 式 (2.4) における定数 $\phi_i(N+1) \varepsilon$

$$\phi_i(N+1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (2.11)$$

とける様に選んでも一般性を失わない。更に

$$C_{ji} = C_{ij}, \quad C_{ii} > 0, \quad C_{ij} < 0 \quad (i \neq j) \quad (2.12)$$

$$L_{ji} = L_{ij} \quad (2.13)$$

である事も容易に示すことができる。

さらに, $\rho_i(z, t) \varepsilon$ i 番目の導体の時間 t , 位置 z における単位長さ当たりの電荷とすると

$$\Phi_i(z, t) = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j(z, t) \quad (2.14)$$

つまり、マトリックス C_{ij} が容量マトリックスである事が明確となる。また、 $\Phi_i(z, t)$ を i 番目の導体と $N+1$ 番目とによって形成される回路に鎖交する単位長さ当たりの磁束とすると

$$\Phi_i(z, t) = \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j(z, t) \quad (2.15)$$

なる関係が導かれる。

2.3 多線路線路の基本式

図 2.1 に示すように、接地面上の n 本の線路からなる無損失多線路線路システムを考へる。このシステムにそつて伝搬する TEM 波は $2n$ 個の場合に線型偏微分方程式で示される。前節式 (2.9), (2.10) に示したようによく知られている。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \right\} (2.16)$$

ここに v, i はそれぞれ電圧および電流マトリックス、 L, C

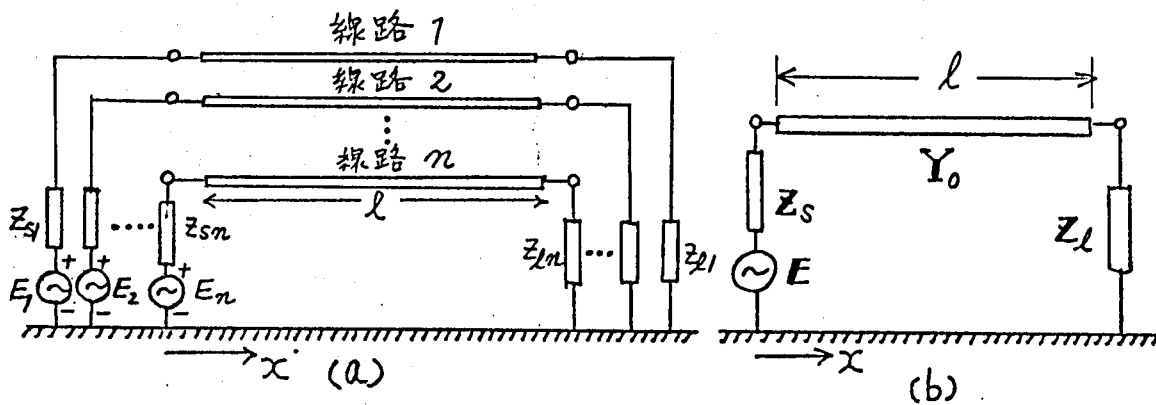


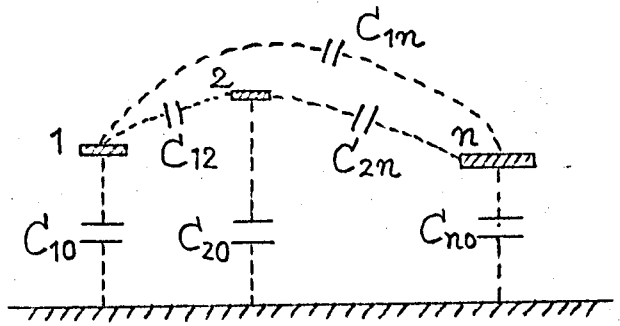
図 2.1

はそれぞれインダクタンスマトリックス, キャパシタンスマトリックスである。

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ L_{n1} & \cdots & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{n1} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

キャパシタンスマトリックスの各成分は, 図2.2の部分容量により次のように表わせる。



$$C_{ij} = C_{ji} = -C_{ij} < 0$$

図 2.2

$$C_{ii} = C_{i0} + C_{i1} + \cdots + C_{i,i-1} + C_{i,i+1} + \cdots + C_{in} \geq 0$$

ラプラス変換によつて式(2.16)は (電圧, 電流の初期値 0 とし)

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dx} \mathbf{V}(s) &= \mathbf{Z}(s) \mathbf{I}(s) \\ -\frac{d}{dx} \mathbf{I}(s) &= \mathbf{Y}(s) \mathbf{V}(s) \end{aligned} \right\} (2.17)$$

$$\text{ここに } \mathbf{Z}(s) = \mathbf{L} s, \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} s$$

となる。以下簡単のため特に示す必要のある時以外はラプラス変換の演算子 S は省略することにする。

式(2.17)より I を消去することによって

$$\frac{d^2}{dx^2} V = ZYV = Q^2 V \quad (2.18)$$

となり、この一般解は

$$\left. \begin{aligned} V &= e^{-Qx} V_1 + e^{Qx} V_2 \\ I &= Y_0 e^{-Qx} V_1 - Y_0 e^{Qx} V_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} Q &= (ZY)^{\frac{1}{2}} : \text{伝搬定数マトリックス} \\ Y_0 &= Z^{-1} Q : \text{特性アドミタンスマトリックス} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

であり、 V_1, V_2 は境界条件で与えられる積分定数マトリックスである。ここに用いているマトリックス関数はシルベスタの定理によって実際に計算できる形に変換できる⁽²⁾。

なお、特性アドミタンスマトリックスは次に示すように対称マトリックスであり、物理的に実現可能である。

$$\begin{aligned} Y_0^t &= (Z^{-1} Q)^t = Q^t Z^{-1} = Z^{-1} Z Q^t Z^{-1} = Z^{-1} Z (YZ)^{\frac{1}{2}} Z^{-1} \\ &= Z^{-1} (ZY)^{\frac{1}{2}} = Z^{-1} Q = Y_0 \quad (t: \text{転置行列}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{一般に, } Af(BA) = f(AB)A \\ A(BA)^{\frac{1}{n}} = (AB)^{\frac{1}{n}}A \end{array} \right)$$

また、式(2.17)より V の方を消去することにより

$$\frac{d^2}{dx^2} I = YZI \quad (2.22)$$

とわかるから、一般解は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I} &= e^{-\mathbf{Q}'x} \mathbf{I}_1 - e^{\mathbf{Q}'x} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V} &= \mathbf{Z}'_0 e^{-\mathbf{Q}'x} \mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}'_0 e^{\mathbf{Q}'x} \mathbf{I}_2 \end{aligned} \right\} (2.23)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}' &= (\mathbf{Y}\mathbf{Z})^{\frac{1}{2}} = ((\mathbf{Z}^t \mathbf{Y}^t)^t)^{\frac{1}{2}} = ((\mathbf{Z}\mathbf{Y})^t)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Q}^t \\ \mathbf{Z}'_0 &= \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Q}' = \mathbf{Z} (\mathbf{Y}\mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Q}' = \mathbf{Z} \mathbf{Q}'^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Z} = \mathbf{Y}_0^{-1} \end{aligned} \right\} (2.24)$$

である。 \mathbf{Q} と \mathbf{Q}^t とは同じ固有値を有するので、当然のことでは
がら式(2.19)と(2.23)とは数学的に等価なものである。

さて、次に別の形式の一般解を示そう。式(2.18)において
 \mathcal{P}_i^2 ($i=1, 2, \dots, n$)を $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Z}\mathbf{Y}$ の固有値とすれば、これに対
応する n 個の固有ベクトル \mathbf{X}_i は non-singular な modal
matrix $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ を形成する。固有ベクトルは
任意の乗数をつけて考えることができるから、 \mathbf{X} はそのあとに
任意の non-singular な定数の対角マトリックスがかかっ
ていると考えてよい。

式(2.18)を

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} \mathbf{V}' \quad (2.25)$$

によって変換すれば

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{V}' = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Q}^2 \mathbf{X} \mathbf{V}' = \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{V}' \quad (2.26)$$

とわかる。ここに

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{P}_n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

このように A が対角マトリックスに化するので、各状態の伝搬はそれぞれ独立に扱うことができる。式(2.26)の一般解は

$$V' = \begin{bmatrix} e^{-g_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-g_2 x} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & e^{-g_n x} \end{bmatrix} V_1' + \begin{bmatrix} e^{g_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{g_2 x} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & e^{g_n x} \end{bmatrix} V_2' \\ = E_{-x} V_1' + E_x V_2' \quad (2.28)$$

となる。ここに対角マトリックス E_{-x} , E_x は次式で与えられる。

$$E_{\pm x} = \begin{bmatrix} e^{\pm g_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\pm g_2 x} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & e^{\pm g_n x} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

(符号同順)

なお、以上では固有値はすべて異なるとして示してきたが、勿論同じものがあるかもしれない。例えばもし最初の i 個の固有値は夫々異なり、 $j = n - i$ 個の固有値が等しいとするならば、modal matrix は

$$X = \begin{bmatrix} X(n, i) & \\ \hline & \mathbf{0}(i, j) \\ \hline & \mathbf{U}(j, j) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

となる事を Guckel 等の文献⁽¹⁸⁾に示している。(この文献では等角等の論文⁽⁹⁾を引用している)。

2.4 反射係数マトリックスと多重反射

次に図 2.1(a) に示した多線系線路システムは送受端のインピーダンス等をマトリックスで表現して同図 (b) のように書ける。ここで

$$\mathbf{Z}_S = \begin{bmatrix} Z_{S1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_{S2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & Z_{Sm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}_L = \begin{bmatrix} Z_{L1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_{L2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & Z_{Ln} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

である。式 (2.19) の積合定数行列マトリックスを境界条件

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_S &= \mathbf{E} - \mathbf{Z}_S \mathbf{I}_S \quad (x=0) \\ \mathbf{V}_L &= \mathbf{Z}_L \mathbf{I}_L \quad (x=l) \end{aligned} \right\} (2.32)$$

によって決定し、これを式 (2.19) に代入すれば次式を得る。

$$\mathbf{V} = \left(e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(l-x)} \mathbf{I}_L e^{-\alpha l} \right) \left(\mathbf{U} - \mathbf{I}_S e^{-\alpha l} \mathbf{I}_L e^{-\alpha l} \right)^{-1} \mathbf{V}_{in} \quad (2.33)$$

ここに $\mathbf{I}_S, \mathbf{I}_L$ は送端および受端における電圧反射係数マトリックスで⁽²⁾

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I}_S &= (\mathbf{Z}_S \mathbf{Y}_0 + \mathbf{U})^{-1} (\mathbf{Z}_S \mathbf{Y}_0 - \mathbf{U}) = (\mathbf{Z}_S - \mathbf{Z}_0)(\mathbf{Z}_S + \mathbf{Z}_0)^{-1} \\ \mathbf{I}_L &= (\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_0 + \mathbf{U})^{-1} (\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_0 - \mathbf{U}) = (\mathbf{Z}_L - \mathbf{Z}_0)(\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_0)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

($\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Y}_0^{-1}$)

$$\text{よって} \quad \mathbf{V}_{in} = (\mathbf{Z}_S \mathbf{Y}_0 + \mathbf{U})^{-1} \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{U} - \mathbf{I}_S) \mathbf{E} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} - \mathbf{I}_S e^{-\alpha l} \mathbf{I}_L e^{-\alpha l})^{-1} &= \mathbf{U} + \mathbf{I}_S e^{-\alpha l} \mathbf{I}_L e^{-\alpha l} + \dots \\ &\quad + (\mathbf{I}_S e^{-\alpha l} \mathbf{I}_L e^{-\alpha l})^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.36)$$

であり、式 (2.35) は初期電圧波を、そして式 (2.36) は多重反射を表わしている。

特に送端, 受端においては

$$V_s = V_{in} + (U + \Gamma_s) e^{-\alpha l} \Gamma_L e^{-\alpha l} (U + \Gamma_s e^{-\alpha l} \Gamma_L e^{-\alpha l} + \dots) V_{in} \quad (2.37)$$

$$V_L = (U + \Gamma_L) e^{-\alpha l} (U + \Gamma_s e^{-\alpha l} \Gamma_L e^{-\alpha l} + \dots) V_{in} \quad (2.38)$$

受端が特性アドミタンスマトリックスで終端されておれば, すなわち $Z_L = Y_0^{-1}$ であれば, $\Gamma_L = 0$ となって反射は全然なくなり

$$V = e^{-\alpha x} V_{in} \quad (2.39)$$

とわかることも明らかである。この特性アドミタンスマトリックスが Amemiya⁽⁵⁾ の述べている線路の等価回路に等しい事も自明のことである。

特に線路が無損失誘電体媒質が均質である場合には, n 個の伝搬状態は単一のものとなり, 伝搬速度は

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \left(\begin{array}{l} v_0: \text{真空中の光速} \\ \epsilon_r: \text{誘電体の比誘電率} \end{array} \right)$$

となり,

$$L C = \frac{1}{v^2} U \quad (2.40)$$

なる関係が成り立つから

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{S}{v} U \\ e^{-\alpha x} &= e^{-\frac{S}{v} x U} = e^{-\frac{S}{v} x} U \\ Y_0 &= Z^{-1} Q = v C \end{aligned} \right\} (2.41)$$

となり, 式(2.33)は

$$V = \left(e^{-\frac{x}{v} S} U + e^{-\frac{(2l-x)}{v} S} \Gamma_L \right) \left(U - e^{-\frac{2l}{v} S} \Gamma_s \Gamma_L \right)^{-1} V_{in} \quad (2.42)$$

と知る。

modal matrix による場合を示すと、式(2.28)において境界条件により V_1' , V_2' を定め代入すれば

$$V' = (E_{-x} + E_{-(l-x)} T_l' E_{-l}) (U - T_s' E_{-l} T_l' E_{-l})^{-1} V_{in}' \quad (2.43)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} T_s' &= X^{-1} T_s X, & T_l' &= X^{-1} T_l X \\ Z_s' &= X^{-1} Z_s X, & Z_l' &= X^{-1} Z_l X \\ Y_0' &= X^{-1} Y_0 X, & E' &= X^{-1} E \\ V_{in}' &= (Z_s' Y_0' + U)^{-1} E' = \frac{1}{2} (U - T_s') E' \end{aligned} \right\} (2.44)$$

この式(2.43)を式(2.25)により変換すると

$$V = (X E_x X^{-1} + X E_{-(l-x)} X^{-1} T_l X E_{-l} X^{-1}) \cdot (U - T_s X E_{-l} X^{-1} T_l X E_{-l} X^{-1})^{-1} V_{in} \quad (2.45)$$

と知る。

$$e^{-Qx} = X E_x X^{-1} \quad (2.46)$$

(13)

であるから、式(2.45)と式(2.33)は全く等価である事がわかる。

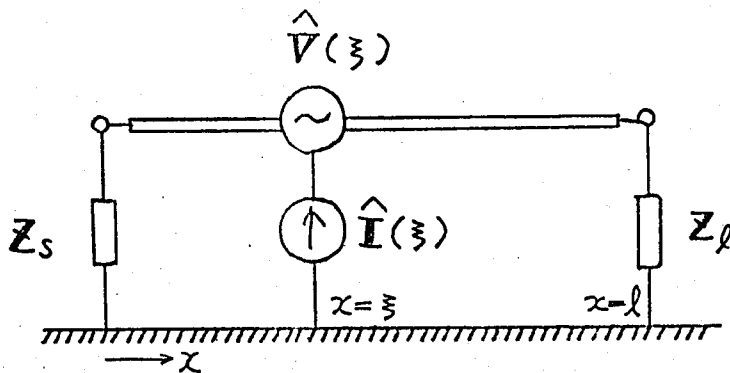


図 2.3

次に図 2.3 に示すように、線路の途中 $x = \xi$ に電圧源群、電流源群が誘起された場合の一般式を導いておく。

$$\left. \begin{aligned} x \leq \xi: \quad V_1(x, \xi) &= e^{-\alpha(\xi-x)} A_1 + e^{\alpha(\xi-x)} B_1 \\ Z_0 I_1(x, \xi) &= -e^{-\alpha(\xi-x)} A_1 + e^{\alpha(\xi-x)} B_1 \end{aligned} \right\} (2.47)$$

$$\left. \begin{aligned} x \geq \xi: \quad V_2(x, \xi) &= e^{-\alpha(x-\xi)} A_2 + e^{\alpha(x-\xi)} B_2 \\ Z_0 I_2(x, \xi) &= e^{-\alpha(x-\xi)} A_2 - e^{\alpha(x-\xi)} B_2 \end{aligned} \right\} (2.48)$$

この式 (2.47), (2.48) の積分変数行列マトリックス A_1 等を、境界条件

$$V_1(0, \xi) = -Z_S I_1(0, \xi)$$

$$V_2(l, \xi) = Z_L I_2(l, \xi)$$

$$V_2(\xi+0, \xi) - V_1(\xi-0, \xi) = \widehat{V}(\xi)$$

$$I_2(\xi+0, \xi) - I_1(\xi-0, \xi) = \widehat{I}(\xi)$$

より決定して代入すれば次式を得る。

$x \leq \xi$:

$$V_1(x, \xi) = \left(e^{-\alpha(\xi-x)} + e^{-\alpha x} \Gamma_S e^{-\alpha \xi} \right) \left(u - e^{-\alpha(l-\xi)} \Gamma_L e^{-\alpha l} \Gamma_S e^{-\alpha \xi} \right)^{-1} \left\{ -\frac{\widehat{V}(\xi)}{2} + \frac{Z_0 \widehat{I}(\xi)}{2} + e^{-\alpha(l-\xi)} \Gamma_L e^{-\alpha(l-\xi)} \left(\frac{\widehat{V}(\xi)}{2} + \frac{Z_0 \widehat{I}(\xi)}{2} \right) \right\}$$

$x \geq \xi$:

$$V_2(x, \xi) = \left(e^{-\alpha(x-\xi)} + e^{-\alpha(l-x)} \Gamma_L e^{-\alpha(l-\xi)} \right) \left(u - e^{-\alpha(l-\xi)} \Gamma_L e^{-\alpha l} \Gamma_S e^{-\alpha \xi} \right)^{-1} \left\{ \frac{\widehat{V}(\xi)}{2} + \frac{Z_0 \widehat{I}(\xi)}{2} + e^{-\alpha \xi} \Gamma_S e^{-\alpha \xi} \left(-\frac{\widehat{V}(\xi)}{2} + \frac{Z_0 \widehat{I}(\xi)}{2} \right) \right\}$$

2.5 多線系指数線路

(2.49)

計算機回路で使用されることはすなわいが、マイクロ波回路
 において有用であるので理論的⁽⁸⁾な考察を行って行くことにする。⁽⁹⁾

指数線路ではインダクタンス, およびキャパシタンスマトリ
 ックスが

$$\mathbf{L}(z) = e^{2ax} \mathbf{L}, \quad \mathbf{C}(z) = e^{-2ax} \mathbf{C} \quad (2.50)$$

で与えられるから, ラプラス変換を行って

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dx} \mathbf{V} &= e^{2ax} \mathbf{Z} \mathbf{I} \\ -\frac{d}{dx} \mathbf{I} &= e^{-2ax} \mathbf{Y} \mathbf{V} \end{aligned} \right\} (2.51)$$

となる。ここで $\mathbf{Z} = s\mathbf{L}$, $\mathbf{Y} = s\mathbf{C}$ は s に無関係である。

この方程式を解くには

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' e^{ax}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}' e^{-ax} \quad (2.52)$$

で変換すると便利である。そうすると式(2.51)は

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dx} \mathbf{V}' &= a\mathbf{V}' + \mathbf{Z} \mathbf{I}' \\ -\frac{d}{dx} \mathbf{I}' &= \mathbf{Y} \mathbf{V}' - a\mathbf{I}' \end{aligned} \right\} (2.53)$$

となる。

これより \mathbf{I}' を消去すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{V}' &= \mathbf{Q}^2 \mathbf{V}' \\ \mathbf{Q}^2 &= a^2 \mathbf{U} + \mathbf{Z} \mathbf{Y} \end{aligned} \right\} (2.54)$$

ここに

従って一般解は

$$\left. \begin{aligned} V' &= e^{-\alpha x} K_1 + e^{\alpha x} K_2 \\ I' &= Y_{of} e^{-\alpha x} K_1 - Y_{ob} e^{\alpha x} K_2 \end{aligned} \right\} (2.55)$$

ここに

$$Y_{of} = Z^{-1}(\alpha - aU)$$

$$Y_{ob} = Z^{-1}(\alpha + aU)$$

K_1, K_2 は種分定数列マトリックスである。 Y_{of}, Y_{ob} はそれぞれ forward (x の正方向) および backward (x の負方向) の特性アドミタンスマトリックスであると考えてよい。これ等が共に対称マトリックスで物理的に実現可能であることは

$$\begin{aligned} Y_{of}^t, Y_{ob}^t &= (\alpha \mp aU)^t Z^{-1} = Z^{-1} Z (\alpha^t \mp aU) Z^{-1} \\ &= Z^{-1} (\alpha \mp aU) Z Z^{-1} = Y_{of}, Y_{ob} \end{aligned} \quad (2.56)$$

より明らかである。

次に、式 (2.53) より V' を消去して上と同様に一般解を求めれば

$$\left. \begin{aligned} I' &= e^{-\alpha' x} K_3 + e^{\alpha' x} K_4 \\ V' &= Z_{of} e^{-\alpha' x} K_3 - Z_{ob} e^{\alpha' x} K_4 \end{aligned} \right\} (2.57)$$

ここに

$$\alpha'^2 = a^2 U + YZ = \alpha^t{}^2$$

$$Z_{of} = Y^{-1}(\alpha' + aU)$$

$$Z_{ob} = Y^{-1}(\alpha' - aU)$$

なお、

$$\begin{aligned}
 Z_{of}, Z_{ob} &= Y^{-1} Z^{-1} Z (Q \pm aU) = (ZY)^{-1} (Q \pm aU) Z \\
 &= (Q^2 - a^2 U)^{-1} (Q \pm aU) Z = (Q \mp aU)^{-1} (Q \pm aU)^{-1} \\
 &= (Q \mp aU)^{-1} Z = (Z^{-1} (Q \mp aU))^{-1} = Y_{of}^{-1}, Y_{ob}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$(Q'^2)^t = (a^2 U + YZ)^t = a^2 U + (YZ)^t = a^2 U + ZY = Q^2$$

であるから、式(2.57)と式(2.55)は数学的に等価である。

ここで図2.1(b)と同じ境界条件, 可なりわち

$$x=0: V_s' = E - Z_s I_s'$$

$$x=l: V_l' = e^{-2al} Z_l I_l'$$

より定数行列マトリックスを決定し, $V = V' e^{ax}$ で変換すれば

$$V = e^{ax} (e^{-ax} + e^{-a(l-x)} I_l e^{-al} X U - I_s e^{-al} I_l e^{-al})^{-1} V_{in} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここに} \\
 V_{in} &= (Z_s Y_{of} + U)^{-1} E \\
 I_s &= (Z_s Y_{of} + U)^{-1} (Z_s Y_{ob} - U) \\
 I_l &= (Z_l Y_{ob} e^{-2al} + U)^{-1} (Z_l Y_{of} e^{-2al} - U)
 \end{aligned} \quad (2.59)$$

これが均一線路の式(2.33), (2.34)に対応する一般式である。

$Y_{of} e^{-2al}$, $Y_{ob} e^{-2al}$ は $x=l$ における両方向の特性アドミタンスマトリックスである。 $Z_l^{-1} = Y_{of} e^{-2al}$ であり $I_l = 0$ ととり, すると $Z_s^{-1} = Y_{ob}$ であるより $I_s = 0$ ととり。以上の式で,

$a=0$ とおけば, 均一線路の場合の式に一致するのは当然のことである。

なお, 線路が図2.4に示すように cascade に接続

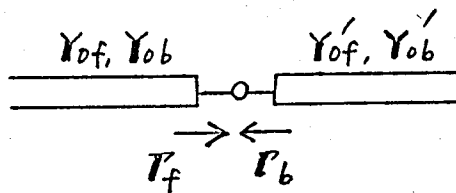


図2.4

された時の反射係数マトリックスも、持続系での両線路系の両方向特性アドミタンスマトリックスより

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_f &= (Y_{of}'^{-1} Y_{ob} + U)^{-1} (Y_{of}'^{-1} Y_{of} - U) \\ \Gamma_b &= (Y_{ob}^{-1} Y_{of}' + U)^{-1} (Y_{ob}^{-1} Y_{ob}' - U) \end{aligned} \right\} (2.60)$$

の様にとえられる。

以上の反射係数および無反射条件については、単一指数線路の場合に Chao 等⁽¹⁴⁾が最上示している結果を包含している。すなわち、

$$Z(x) = S L_0 e^{-2kx}, \quad Y(x) = S C_0 e^{2kx}$$

のとき ($k = -a$),

$$(2.61)$$

$x=0$ における電圧反射係数

$$\rho = \frac{(\sqrt{S^2 L_0 C_0 + k^2} - k) Z_L(0) - S L_0}{(\sqrt{S^2 L_0 C_0 + k^2} + k) Z_L(0) + S L_0} \quad (2.62)$$

無反射条件

$$Z_L(0) \Big|_{\rho=0} = \frac{S L_0}{\sqrt{S^2 L_0 C_0 + k^2} - k} \quad (2.63)$$

である。

2.6 伝送基本マトリックス

次にマイクロ波回路の解析に必要な伝送基本マトリックスを指数線路の場合について誘導し、その特別な場合 ($a=0$) とし、一様線路の場合も示す。

式 (2.52), (2.53) はそれぞれ次のように表わせる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U e^{ax} & 0 \\ 0 & U e^{-ax} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}' \\ \mathbf{I}' \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{V}' \\ \mathbf{I}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\mathbf{U} & -z \\ -Y & a\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}' \\ \mathbf{I}' \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

この式 (2.65) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathbf{s}(x) &= \mathbf{A} \mathbf{s}(x) \\ \text{ここに} \quad \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -a\mathbf{U} & -z \\ -Y & a\mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (\chi \text{ に対し独立}) \\ \mathbf{s}(x) &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}' \\ \mathbf{I}' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.66)$$

従ってこの方程式の解は周知のように

$$\mathbf{s}(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{s}(0) \quad (2.67)$$

である。故に多線系指数線路の伝送基本マトリックスは

$$\mathbf{T}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{U} e^{ax} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} e^{-ax} \end{bmatrix} e^{\mathbf{A}x} \quad (2.68)$$

で与えられる。

$e^{\mathbf{A}x}$ の計算は以下の様になる。

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}x} &= e^{\begin{bmatrix} -a\mathbf{U} & -z \\ -Y & a\mathbf{U} \end{bmatrix} x} = \mathbf{U} + \frac{\begin{bmatrix} -a\mathbf{U} & -z \\ -Y & a\mathbf{U} \end{bmatrix} x}{1!} + \frac{\begin{bmatrix} -a\mathbf{U} & -z \\ -Y & a\mathbf{U} \end{bmatrix}^2 x^2}{2!} + \dots \\ &= \mathbf{U} + \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{t^2} \end{bmatrix}}{2!} x^2 + \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{t^2} \end{bmatrix}^2}{4!} x^4 + \dots \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} -aU & -Z \\ -Y & aU \end{bmatrix} \left\{ xU + \frac{\begin{bmatrix} Q^2 & 0 \\ 0 & Q^{t^2} \end{bmatrix}}{3!} x^3 + \frac{\begin{bmatrix} Q^2 & 0 \\ 0 & Q^{t^2} \end{bmatrix}^2}{5!} x^5 + \dots \right\}$$

(2.69)

こゝで

$$U + \frac{\begin{bmatrix} Q^2 & 0 \\ 0 & Q^{t^2} \end{bmatrix}}{2!} x^2 + \dots = \begin{bmatrix} U + \frac{Q^2}{2!} x^2 + \frac{Q^4}{4!} x^4 + \dots & 0 \\ 0 & U + \frac{Q^{t^2}}{2!} x^2 + \frac{Q^{t^4}}{4!} x^4 + \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh Qx & 0 \\ 0 & \cosh Q^t x \end{bmatrix}$$

$$xU + \frac{\begin{bmatrix} Q^2 & 0 \\ 0 & Q^{t^2} \end{bmatrix}}{3!} x^3 + \dots = \begin{bmatrix} Q^{-1} \left\{ Qx + \frac{Q^3}{3!} x^3 + \dots \right\} & 0 \\ 0 & Q^{t-1} \left\{ Q^t x + \frac{Q^{t^3}}{3!} x^3 + \dots \right\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q^{-1} \sinh Qx & 0 \\ 0 & Q^{t-1} \sinh Q^t x \end{bmatrix}$$

よつて、伝送基本マトリックスは

$$T(x) = \begin{bmatrix} Ue^{ax} & 0 \\ 0 & Ue^{-ax} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \cosh Qx & 0 \\ 0 & \cosh Q^t x \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} -aU & -Z \\ -Y & aU \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} \sinh Qx & 0 \\ 0 & Q^{t-1} \sinh Q^t x \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{ax}(\cosh \alpha x - a \alpha^{-1} \sinh \alpha x) & -e^{ax} Z \alpha^{t-1} \sinh \alpha^t x \\ -e^{-ax} Y \alpha^{-1} \sinh \alpha x & e^{-ax}(\cosh \alpha^t x + a \alpha^{t-1} \sinh \alpha^t x) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

特に一様線路の場合には上式で $a=0$ とおいて

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(x) &= \begin{bmatrix} \cosh \alpha x & -Z \alpha^{t-1} \sinh \alpha^t x \\ -Y \alpha^{-1} \sinh \alpha x & \cosh \alpha^t x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \alpha x & -\sinh \alpha x Y_0^{-1} \\ -\sinh \alpha^t x Y_0 & \cosh \alpha^t x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\left(\begin{aligned} \because Y \alpha^{-1} \sinh \alpha x &= \alpha^{t-1} \sinh \alpha^t x Y = \sinh \alpha^t x \alpha^{t-1} Y \\ &= \sinh \alpha^t x Y_0 \end{aligned} \right)$$

特に無損失均質媒質とすれば

$$\cosh \alpha x = \cosh \left(x \frac{s}{v} \mathbf{U} \right) = \mathbf{U} \cosh \frac{x}{v} s$$

$$\sinh \alpha x = \sinh \left(x \frac{s}{v} \mathbf{U} \right) = \mathbf{U} \sinh \frac{x}{v} s$$

$$Y_0 = v \mathbf{C}, \quad Z_0 = v \mathbf{L} = (v \mathbf{C})^{-1}$$

よって

$$\mathbf{T}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \cosh \frac{x}{v} s & -v \mathbf{L} \sinh \frac{x}{v} s \\ -v \mathbf{C} \sinh \frac{x}{v} s & \mathbf{U} \cosh \frac{x}{v} s \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

とける。

伝送基本マトリックスのもう一つ別の誘導法を示すと次のようになる⁽⁹⁾。式(2.55)において $x=0$ とおき

$$\left. \begin{aligned} V_s' &= K_1 + K_2 \\ I_s' &= Y_{of} K_1 - Y_{ob} K_2 \end{aligned} \right\} (2.73)$$

これより K_1, K_2 を求め

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= Q^{-1} Z (Y_{ob} V_s' + I_s') / 2 \\ K_2 &= Q^{-1} Z (Y_{of} V_s' - I_s') / 2 \end{aligned} \right\} (2.74)$$

これを式(2.55)に代入して

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = T(x) \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

の形に整理すれば, $\sinh Qx Q^{-1} Z = Z Q^{-1} \sinh Qx$ であるから $T(x)$ として式(2.70)と同じ結果が得られる。

次に, 上の e^{Ax} を求めるのに, マトリックスに対するラプラス変換を用いる方法が Pipes によって示されている⁽¹¹⁾ ので, これを多線条指数線路の場合に拡張して示すと次のようになる。式(2.66)を x についてラプラス変換すれば

$$\mathcal{L} S(x) = \int_0^{\infty} e^{-sx} S(x) dx = P(s) \quad (2.76)$$

と置いて, 式(2.66)は

$$(sU - A) P(s) = U \quad (S(0) = U) \quad (2.77)$$

とけるから,

$$P(s) = (sU - A)^{-1} \quad (2.78)$$

を得る。これは Pipes によれば

$$\mathcal{L}^{-1}(s\mathbf{U} - \mathbf{A})^{-1} = e^{\mathbf{A}x} \quad (2.79)$$

なる関係がある。(10)

$$(s\mathbf{U} - \mathbf{A})^{-1}(s\mathbf{U} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s-a)\mathbf{U} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & (s-a)\mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U} \end{bmatrix}$$

より a, b, c, d を求め

$$e^{\mathbf{A}x} = (s\mathbf{U} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} (s-a) \left[(s-a)^2\mathbf{U} - \mathbf{Z}\mathbf{Y} \right]^{-1} & - \left[(s-a)^2\mathbf{U} - \mathbf{Z}\mathbf{Y} \right]^{-1} \\ - \left[(s-a)^2\mathbf{U} - \mathbf{Y}\mathbf{Z} \right]^{-1} & (s-a) \left[(s-a)^2\mathbf{U} - \mathbf{Y}\mathbf{Z} \right]^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

これを次のマトリックスに關するラプラス変換の公式⁽¹¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(s\mathbf{U} - \mathbf{A}^2)^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} \sinh \mathbf{A}x \\ \mathcal{L}^{-1}s(s^2\mathbf{U} - \mathbf{A}^2)^{-1} &= \cosh \mathbf{A}x \end{aligned} \right\} (2.81)$$

によつて逆ラプラス変換すれば、式(2.70)と同じ結果が得られる。

第3章 誘導雑音の解析

3.1 はじめに

論理布線間の誘導雑音の問題は、回路がますます高密度実装化され、信号の立上り立下りがますます速くなるに従って、特に重要となってきたものであるが、この問題も古くて新しい問題であり、古くは1963年のJarvisの論文⁽²³⁾より1973年6月のDeFalcoの論文⁽³⁷⁾まで数多くの発表がある。⁽²³⁾⁻⁽⁴¹⁾

初期の解析においては(最近のDeFalcoの論文⁽³⁷⁾においてすらも)すべて線路間の結合が大変弱い、すなわち被誘導線が誘導線に及ぼす影響を完全に無視できるものとして解析している。この弱結合理論による解析法にも、この弱結合の条件の下で基本微分方程式を解くJarvisの方法と⁽²³⁾、線路の各兵において誘起される電圧源、電流源による電圧、電流の基本式を用いてこれを全線路長にわたって積分する事によって求めるGrayの方法⁽²⁴⁾があり、勿論両方法による結果は一致している。Feller等⁽²⁵⁾と片岡の解析もGrayの方法と同じである。またJarvisの方法に基いて各種端子条件の下における誘導雑音を示したものに、Lynn等の本⁽³⁵⁾とDeFalcoの論文がある。^{(36),(37)}

被誘導線が誘導線に及ぼす影響も考慮に入れた解析は、媒質が均質な場合について、Bland⁽²⁹⁾およびConolly⁽²⁸⁾がマイクロ波における方向性結合器の理論⁽³¹⁾⁽³²⁾を用いて、全端子が整合している場合の誘導雑音の式を導いた。この媒質が均質というのは第4章に示すしゃへい型ストリップ線路の場合である。一般的に端子条件の場合については筆者が発表している。⁽³⁹⁾

マイクロストリップ線路の場合のように媒質が一様でなく、しかも被誘導線の誘導線に及ぼす影響も考慮に入れた場合については、Catt⁽³³⁾⁽³⁴⁾および筆者の発表⁽⁴⁰⁾があり、弱結合理論でのいわゆる forward crosstalk noise は偶発態および奇発態の伝

搬速度の差によるものであることが、理論的、実験的に明らかとされた (Catt はこれを differential noise とよんでいる)。また誘導雑音とは直接関係ないが、伝搬状態の速度の差についての理論と実験結果が、伝送線パルス変成器に関して Matlack によって与えられている。⁽³⁸⁾ またこの他にこの速度差による雑音に関して比較的最近の松下の発表もある。⁽⁴¹⁾

この章では、まず 3.2 において Jarvis および Gray の方法に基づいて、弱結合理論の下での誘導雑音の式を導出し、次に本章で述べた多線条線路の一般理論を対称二線条線路の場合に適用する事によって、被誘導線が誘導線に及ぼす影響を考慮した場合の一般式を示し、各種端子条件の下で実験結果ともよく一致する事を示す。そして弱結合理論において定義された誘導雑音係数と、偶状態および奇状態の特性インピーダンスと伝搬速度との間の関係を明らかにする。さらに弱結合理論と多線条線路による結果を合わせて、実用的な誘導雑音の等価回路を導く。

3.2 弱結合理論による解析

3.2.1 基本式の誘導(1)

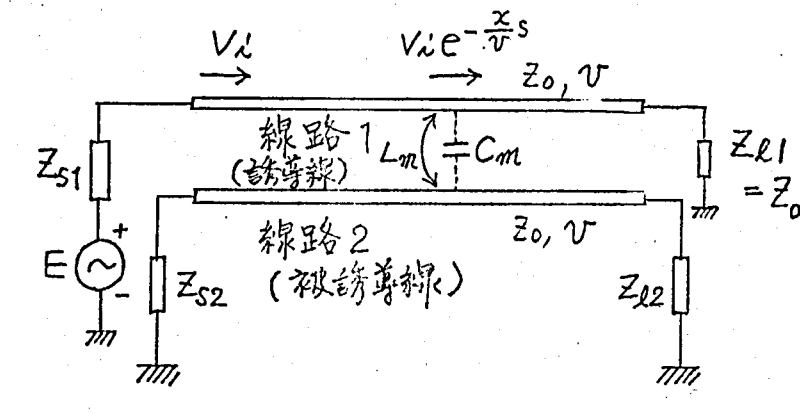


図 3.1

図 3.1 に示すような対称二線条線路の基本微分方程式は、周知のように次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{\partial i_1}{\partial x} &= C \frac{\partial v_1}{\partial t} - C_m \frac{\partial v_2}{\partial t} \\
 -\frac{\partial i_2}{\partial x} &= -C_m \frac{\partial v_1}{\partial t} + C \frac{\partial v_2}{\partial t} \\
 -\frac{\partial v_1}{\partial x} &= L \frac{\partial i_1}{\partial t} + L_m \frac{\partial i_2}{\partial t} \\
 -\frac{\partial v_2}{\partial x} &= L_m \frac{\partial i_1}{\partial t} + L \frac{\partial i_2}{\partial t}
 \end{aligned} \right\} (3.1)$$

ここに L, L_m は自己および相互インダクタンス, C, C_m は自己および相互容量であり, v_1, i_1 等は夫々の線路の電圧, 電流である。

線路1(誘導線)上の波形によって生じた線路2(被誘導線)上の波形が線路1の波形に再び影響を及ぼすことはない, すなわち結合が弱いと仮定すれば, 線路1の応答は単一線路の場合と同じであり, その終端が整合されているとすれば ($Z_{e1} = Z_0$, Z_0 : 特性インピーダンス), ラプラス変換形で示して

$$V_1 = V_i e^{-\frac{x}{v} s}, \quad I_1 = \frac{V_i}{Z_0} e^{-\frac{x}{v} s} \quad (3.2)$$

ここに

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.3)$$

と表わせる。線路2上では

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{d}{dx} I_2 &= SCV_2 - SC_m V_1 \\
 -\frac{d}{dx} V_2 &= SLI_2 + SL_m I_1
 \end{aligned} \right\} (3.4)$$

これより

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2}{dx^2} V_2 - \left(\frac{S}{v}\right)^2 V_2 &= \left(\frac{S}{v}\right)^2 \sigma (K-1) V_i e^{-\frac{x}{v} s} \\
 \text{ここに } \sigma &= \frac{C_m}{C}, \quad K = \left(\frac{L_m}{L}\right) \left(\frac{C}{C_m}\right)
 \end{aligned} \right\} (3.5)$$

この微分方程式は周知の $\varphi(D)V_2 = C e^{-\frac{x}{v} s}$ の形をしており
 $\varphi(-\frac{s}{v}) = 0$, $\varphi'(-\frac{s}{v}) = 2(-\frac{s}{v})$ 故

$$C \frac{x e^{-\frac{x}{v} s}}{2(-\frac{s}{v})} \text{ が一つの解である.}$$

故に

$$\begin{aligned} V_2 &= A e^{-\frac{x}{v} s} + B e^{\frac{x}{v} s} + \left(\frac{s}{v}\right)^2 \sigma(k-1) \frac{x e^{-\frac{x}{v} s}}{-\frac{2s}{v}} \\ &= \left[A + k_f x (S V_i) \right] e^{-\frac{x}{v} s} + B e^{\frac{x}{v} s} \\ z_0 I_2 &= \left[A + k_f x (S V_i) - 2k_b V_i \right] e^{-\frac{x}{v} s} - B e^{\frac{x}{v} s} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ここに

$$\begin{aligned} k_b &= \frac{\sigma(k+1)}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{L_m}{L} + \frac{C_m}{C} \right) = \frac{1}{4\sqrt{LC}} \left(\frac{L_m}{z_0} + z_0 C_m \right) \\ k_f &= -\frac{\sigma(k-1)}{2v} = -\frac{1}{2} \sqrt{LC} \left(\frac{L_m}{L} - \frac{C_m}{C} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{L_m}{z_0} - z_0 C_m \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

k_b は後進誘導雑音係数 (backward crosstalk noise coefficient),
 k_f は前進誘導雑音係数 (forward crosstalk noise coefficient)
 である。

境界条件 $x=0$ において, $V_2 = -z_{s2} I_2$, $x=l$ において,
 $V_2 = z_{l2} I_2$ より, A, B を決定して式(3.6)に代入すれば

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{k_b V_i}{1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2} e^{-\frac{2l}{v} s}} \left[(1 + \sigma_{s2}) e^{-\frac{x}{v} s} - (1 + \sigma_{l2}) \sigma_{s2} e^{-\frac{2l+x}{v} s} \right. \\ &\quad \left. - (1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2}) e^{-\frac{2l-x}{v} s} \right] \\ &+ \frac{k_f (S V_i)}{1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2} e^{-\frac{2l}{v} s}} \left[l \sigma_{l2} (\sigma_{s2} e^{-\frac{2l+x}{v} s} + e^{-\frac{2l-x}{v} s}) \right] \\ &+ k_f (S V_i) x e^{-\frac{x}{v} s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_0 I_2 = & \frac{K_b V_i}{1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2} e^{-\frac{2l}{v} s}} \left[- (1 - \sigma_{s2}) e^{-\frac{x}{v} s} - (1 - \sigma_{l2}) \sigma_{s2} e^{-\frac{2l+x}{v} s} \right. \\
 & \left. + (1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2}) e^{-\frac{2l-x}{v} s} \right] \\
 & + \frac{K_f (S V_i)}{1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2} e^{-\frac{2l}{v} s}} \left[l \sigma_{l2} (\sigma_{s2} e^{-\frac{2l+x}{v} s} - e^{-\frac{2l-x}{v} s}) \right] \\
 & + K_f (S V_i) x e^{-\frac{x}{v} s}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

70る一般式を得る。ここに σ_{s2} , σ_{l2} は反射係数である。

$$\sigma_{s2} = \frac{Z_{s2} - Z_0}{Z_{s2} + Z_0}, \quad \sigma_{l2} = \frac{Z_{l2} - Z_0}{Z_{l2} + Z_0}$$

3.2.2 基本式の誘導(2)

予可準備として図 3.2 (a), (b) に示す様に線路の途中に電圧源、電流源が誘起された場合の線路の任意の点における電圧、電流の式を導く。

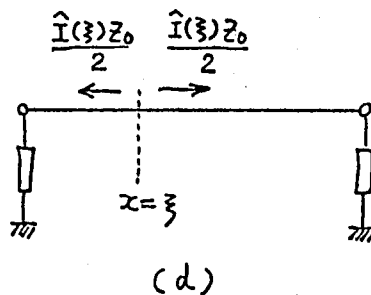
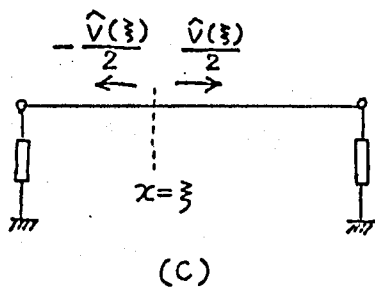
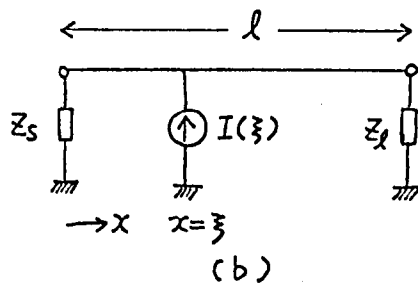
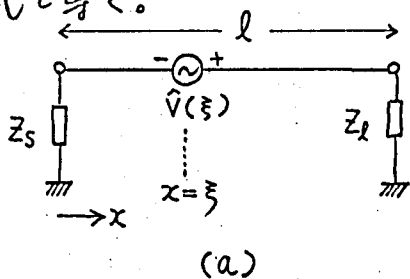


図 3.2

線路上の電圧, 電流は

$$\left. \begin{aligned} x \leq \xi: \quad V_1(x, \xi) &= A_1 e^{-\frac{\xi-x}{v} s} + B_1 e^{\frac{\xi-x}{v} s} \\ z_0 I_1(x, \xi) &= -A_1 e^{-\frac{\xi-x}{v} s} + B_1 e^{\frac{\xi-x}{v} s} \end{aligned} \right\} (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} x \geq \xi: \quad V_2(x, \xi) &= A_2 e^{-\frac{x-\xi}{v} s} + B_2 e^{\frac{x-\xi}{v} s} \\ z_0 I_2(x, \xi) &= A_2 e^{-\frac{x-\xi}{v} s} - B_2 e^{\frac{x-\xi}{v} s} \end{aligned} \right\} (3.10)$$

と表わせる。

$x=0$, $x=l$ における境界条件は

$$V_1(0, \xi) = -z_s I_1(0, \xi), \quad V_2(l, \xi) = z_l I_2(l, \xi) \quad (3.11)$$

$x=\xi$ における境界条件は

図 3.2 (a) の電圧源の場合:

$$\left. \begin{aligned} I_2(\xi+0, \xi) - I_1(\xi-0, \xi) &= 0 \\ V_2(\xi+0, \xi) - V_1(\xi-0, \xi) &= \hat{V}(\xi) \end{aligned} \right\} (3.12)$$

図 3.2 (b) の電流源の場合:

$$\left. \begin{aligned} I_2(\xi+0, \xi) - I_1(\xi-0, \xi) &= \hat{I}(\xi) \\ V_2(\xi+0, \xi) - V_1(\xi-0, \xi) &= 0 \end{aligned} \right\} (3.13)$$

以上の境界条件により積分常数 A, B を決定して代入すれば, 電圧源の場合には次に示す式 (3.14), (3.15), 電流源の場合には式 (3.16), (3.17) が得られる。

電圧源の場合:

$x \leq \xi$:

$$\left. \begin{aligned} V_1(x, \xi) &= -\frac{\hat{V}(\xi)}{2} \cdot \frac{1 - \sigma_L e^{-\frac{2(l-\xi)s}{v}}}{1 - \sigma_s \sigma_L e^{-\frac{2l}{v}s}} \left\{ e^{-\frac{\xi-x}{v}s} + \sigma_s e^{-\frac{\xi+x}{v}s} \right\} \\ Z_0 I_1(x, \xi) &= -\frac{\hat{V}(\xi)}{2} \cdot \frac{1 - \sigma_L e^{-\frac{2(l-\xi)s}{v}}}{1 - \sigma_s \sigma_L e^{-\frac{2l}{v}s}} \left\{ -e^{-\frac{\xi-x}{v}s} + \sigma_s e^{-\frac{\xi+x}{v}s} \right\} \end{aligned} \right\} (3.14)$$

$x \geq \xi$:

$$\left. \begin{aligned} V_2(x, \xi) &= \frac{\hat{V}(\xi)}{2} \cdot \frac{1 - \sigma_s e^{-\frac{2\xi s}{v}}}{1 - \sigma_s \sigma_L e^{-\frac{2l}{v}s}} \left\{ e^{-\frac{x-\xi}{v}s} + \sigma_L e^{-\frac{2l-(x+\xi)}{v}s} \right\} \\ Z_0 I_2(x, \xi) &= \frac{\hat{V}(\xi)}{2} \cdot \frac{1 - \sigma_s e^{-\frac{2\xi s}{v}}}{1 - \sigma_s \sigma_L e^{-\frac{2l}{v}s}} \left\{ e^{-\frac{x-\xi}{v}s} - \sigma_L e^{-\frac{2l-(x+\xi)}{v}s} \right\} \end{aligned} \right\} (3.15)$$

電流源の場合:

$x \leq \xi$:

$$\left. \begin{aligned} V_1(x, \xi) &= \frac{\hat{I}(\xi) Z_0}{2} \cdot \frac{1 + \sigma_L e^{-\frac{2(l-\xi)s}{v}}}{1 - \sigma_s \sigma_L e^{-\frac{2l}{v}s}} \left\{ e^{-\frac{\xi-x}{v}s} + \sigma_s e^{-\frac{\xi+x}{v}s} \right\} \\ Z_0 I_1(x, \xi) &= \frac{\hat{I}(\xi) Z_0}{2} \cdot \frac{1 + \sigma_L e^{-\frac{2(l-\xi)s}{v}}}{1 - \sigma_s \sigma_L e^{-\frac{2l}{v}s}} \left\{ -e^{-\frac{\xi-x}{v}s} + \sigma_s e^{-\frac{\xi+x}{v}s} \right\} \end{aligned} \right\} (3.16)$$

$x \geq \xi$:

$$\left. \begin{aligned} V_2(x, \xi) &= \frac{\hat{I}(\xi) Z_0}{2} \cdot \frac{1 + \sigma_s e^{-\frac{2\xi s}{v}}}{1 - \sigma_s \sigma_L e^{-\frac{2l}{v}s}} \left\{ e^{-\frac{x-\xi}{v}s} + \sigma_L e^{-\frac{2l-(x+\xi)}{v}s} \right\} \\ Z_0 I_2(x, \xi) &= \frac{\hat{I}(\xi) Z_0}{2} \cdot \frac{1 + \sigma_s e^{-\frac{2\xi s}{v}}}{1 - \sigma_s \sigma_L e^{-\frac{2l}{v}s}} \left\{ e^{-\frac{x-\xi}{v}s} - \sigma_L e^{-\frac{2l-(x+\xi)}{v}s} \right\} \end{aligned} \right\} (3.17)$$

式(3.14)~(3.17)の意味は図9.2(c),(d)を参照して次のように明らかである。一例として式(3.14)を考へると、 $x=0$ において右向きに伝搬する電圧波は $\frac{\hat{V}(z)}{2}$ が伝搬する。従つて x 点での電圧波は $-\frac{\hat{V}(z)}{2}e^{-\frac{z-x}{v}S}$ 、電流波はこれに $-\frac{1}{Z_0}$ をかけたものである。これが送端 $x=0$ で反射係数 σ_s で反射して戻つて来て x に来るとこれが $-\frac{\hat{V}(z)}{2}\sigma_s e^{-\frac{z+x}{v}S}$ であり、電流波はこれに $\frac{1}{Z_0}$ をかけたものである。一方最初に右方向に伝搬した $\frac{\hat{V}(z)}{2}$ の電圧波は送端 $x=l$ で反射して $x=z$ の点まで戻つて来ると $\frac{\hat{V}(z)}{2}\sigma_l e^{-\frac{2(l-z)}{v}S}$ である。以後はこれが上で考へた新たな左方向への電圧波と考へればよい。分母の

$$\frac{1}{1 - \sigma_s \sigma_l e^{-\frac{2l}{v}S}} = 1 + \sigma_s \sigma_l e^{-\frac{2l}{v}S} + \dots + (\sigma_s \sigma_l)^n e^{-\frac{2nl}{v}S} + \dots \quad (3.18)$$

は以後の多次反射を示すものである。

さて以上の結果を用いて誘導雑音の一般式を誘導する。線路1上の $x=z$ における電圧、電流は $V_1 e^{-\frac{z}{v}S}$ 、 $\frac{V_1}{Z_0} e^{-\frac{z}{v}S}$ であるから、線路2上の $x=z$ 点に誘起される電圧源、電流源はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}(z) &= sL_{m1} \frac{V_1}{Z_0} e^{-\frac{z}{v}S} \\ \hat{I}(z) &= sC_{m1} V_1 e^{-\frac{z}{v}S} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

である。

従つて式(3.14)~(3.17)を用いて、線路2上の任意の点の電圧は

$$V(x) = \int_0^x \left\{ \text{式(3.14)} + \text{式(3.16)} \right\} dz + \int_x^l \left\{ \text{式(3.15)} + \text{式(3.17)} \right\} dz \quad (3.20)$$

により計算すれば求まる。計算の詳細は省略するが、 σ_s, σ_l をそれぞれ σ_{s2}, σ_{l2} で置き直せば、前に別の方法により誘導した式(3.8)と同じ式が得られる。

3.2.3 送端および受端における誘導雑音

式(3.8)において特に $x=0, x=l$ とおけば

$$\left. \begin{aligned} V_{s2} &= \frac{1 + \sigma_{s2}}{1 - \sigma_{s2}\sigma_{l2} e^{-\frac{2l}{v}s}} \left\{ \alpha V_i + \beta V_i e^{-\frac{2l}{v}s} \sigma_{l2} \right\} \\ V_{l2} &= \frac{(1 + \sigma_{l2}) e^{-\frac{l}{v}s}}{1 - \sigma_{s2}\sigma_{l2} e^{-\frac{2l}{v}s}} \left\{ \sigma_{s2} \alpha V_i + \beta V_i \right\} \end{aligned} \right\} (3.21)$$

こゝに

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= K_b \left(1 - e^{-\frac{2l}{v}s} \right) \\ \beta &= K_f l s \end{aligned} \right\} (3.22)$$

すなわち特に両端が整合している ($Z_{s2} = Z_{l2} = Z_0, \sigma_{s2} = \sigma_{l2} = 0$) とすれば

$$\left. \begin{aligned} V_{s2} &= \alpha V_i = K_b \left(1 - e^{-\frac{2l}{v}s} \right) V_i \\ V_{l2} &= e^{-\frac{l}{v}s} \beta V_i = e^{-\frac{l}{v}s} K_f l (s V_i) \end{aligned} \right\} (3.23)$$

V_i として

$$V_i = \frac{1}{\tau_r s^2} \left(1 - e^{-\tau_r s} \right) \quad (3.24)$$

のようになり時間 τ_r のランダムな波形を考へれば、近端誘導雑音 V_{s2} は図 3.3 から明らかになる様に振中、中は次のようになる。

$$\frac{2l}{v} \geq \tau_r : \text{振中 } K_b, \quad \text{中 } \frac{2l}{v}$$

$$\frac{2l}{v} < \tau_r : \text{振中 } K_b \frac{2l}{v} / \tau_r, \quad \text{中 } \tau_r$$

また遠端誘導雑音 V_{l2} は式(3.23)より明らかになるように、振中 $\frac{K_f l}{\tau_r}$,

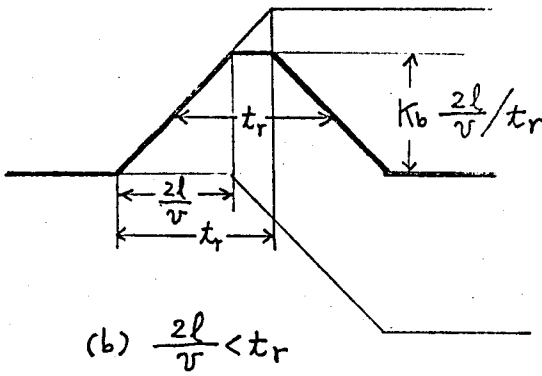
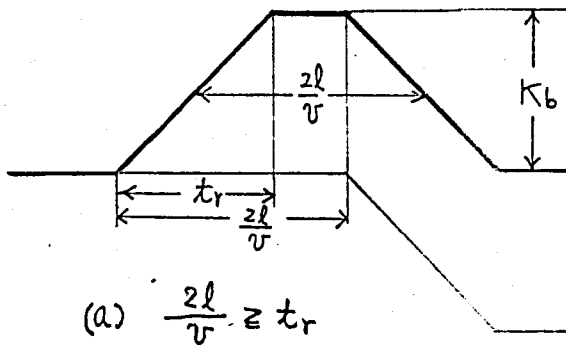


図 3.3

間 t_r に逆比例する事になる。

なお、両端が整合しているときの線路又上の任意の長さ x における電圧波形は式(3.8)で $\gamma_{s2} = \gamma_{l2} = 0$ とおく事により

$$V_2 = K_b V_i e^{-\frac{x}{v} s} (1 - e^{-\frac{2(l-x)}{v} s}) + K_f x e^{-\frac{x}{v} s} (s V_i) \quad (3.25)$$

となる。両端子が整合していない場合には、図3.4のような等価回路を考へる事が出来る。

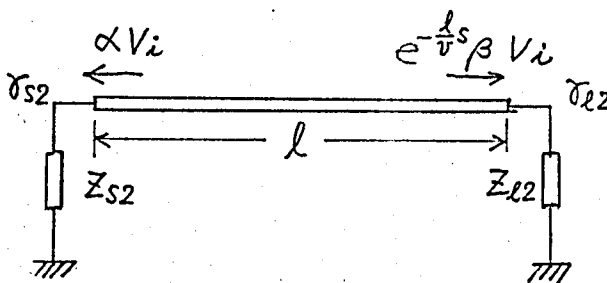


図 3.4

中 t_r の矩形パルスとなる。

このように近端誘導雑音は線長 l に比例して振中、中共に大きくなり、 $\frac{2l}{v} \geq t_r$ となるとあとは振中は K_b で一定となり、中は尚 l に比例して大きくなっていく。線長 l を一定とすれば信号の立上り時間が短かくなる程誘導雑音は大きくなる事がわかる。

遠端誘導雑音は式(3.23)によれば、常に線長 l に比例し、信号の立上り時

は、 $x=0$ から $x=l$ においてそれぞれ入射電圧波 αV_i と $e^{-\frac{1}{v} s} \beta V_i$ とがあり、あとはこれが反射係

数 γ_{s2}, γ_{2s} で多量反射されると考えればよい。この事は式(3.21)より明らかである。しかし、この等価回路は近端誘導雑音、遠端誘導雑音に対するものであって、式(3.25)よりわかるように線路の途中の点での誘導雑音を与えないものではない。

3.3 多線路線路理論による解析

3.3.1 基本式

3章で得た一般理論も無損失対称二線路線路の場合に適用すれば

$$\begin{aligned} Q^2 &= ZY = S^2 LC = S^2 \begin{bmatrix} L & L_m \\ L_m & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -C_m \\ -C_m & C \end{bmatrix} \\ &= S^2 \begin{bmatrix} LC - L_m C_m & -LC_m + L_m C \\ -LC_m + L_m C & LC - L_m C_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

この固有値は

$$\begin{aligned} \beta_1^2, \beta_2^2 &= S^2 \left\{ (LC - L_m C_m) \pm (-LC_m + L_m C) \right\} \\ &= S^2 (L + L_m)(C - C_m), S^2 (L - L_m)(C + C_m) \end{aligned} \quad (3.27)$$

従って

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{aligned} Z' &= X^{-1} Z X = \begin{bmatrix} S(L + L_m) & 0 \\ 0 & S(L - L_m) \end{bmatrix} \\ Y' &= X^{-1} Y X = \begin{bmatrix} S(C - C_m) & 0 \\ 0 & S(C + C_m) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 + V_2}{2} \\ \frac{V_1 - V_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_e \\ V_o \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{Y}'_0 = \mathbf{Z}'^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S(L+L_m)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S(L-L_m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{S}{v_e} & 0 \\ 0 & \frac{S}{v_o} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \text{よ} \quad \text{こ} \quad \text{に} \quad \left. \begin{aligned} \frac{S}{v_e} &= S \sqrt{(C-C_m)(L+L_m)} \\ \frac{S}{v_o} &= S \sqrt{(C+C_m)(L-L_m)} \end{aligned} \right\} \quad (3.32) \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}'_0 = \mathbf{Y}'_0^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{L+L_m}{C-C_m}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{L-L_m}{C+C_m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{0e} & 0 \\ 0 & Z_{0o} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

ここに V_e, V_o ; Z_{0e}, Z_{0o} ; v_e, v_o はそれぞれ偶奇モードの電圧, 特性インピーダンス, 伝搬速度である。式(3.33)より明らかになるように常に $Z_{0e} > Z_{0o}$ である。しかし, v_e, v_o の大小関係は一般に媒質に依存し, 後に示すようにマイクロストリップ線路では $v_o > v_e$ である。

なお, 以上の事は一般理論に従わなくても対称線路の場合次のように簡単に導く事もできる。⁽³⁰⁾元の微分方程式の式(3.1)で

$$\left. \begin{aligned} v_e &= \frac{v_1 + v_2}{2}, & v_o &= \frac{v_1 - v_2}{2} \\ i_e &= \frac{i_1 + i_2}{2}, & i_o &= \frac{i_1 - i_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

と変換する事によって

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial i'_e}{\partial x} &= (C-C_m) \frac{\partial v_e}{\partial t} \\ -\frac{\partial v_e}{\partial x} &= (L+L_m) \frac{\partial i'_e}{\partial t} \end{aligned} \right\} (3.35)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial i'_o}{\partial x} &= (C+C_m) \frac{\partial v_o}{\partial t} \\ -\frac{\partial v_o}{\partial x} &= (L-L_m) \frac{\partial i'_o}{\partial t} \end{aligned} \right\} (3.36)$$

の様に、各状態に対して周知の単一線路の場合と全く同様の式に帰する事からも容易に導く事ができる。

3.3.2 全端子整合の場合

図3.1の構成ですべての終端インピーダンスが等しく Z_0 である場合には、一般式により反射係数マトリックスを計算すれば

$$\begin{aligned} \Gamma_e' &= (Z_e' Y_0' + U)^{-1} (Z_e' Y_0' - U) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{Z_0 - Z_{0e}}{Z_0 + Z_{0e}} & 0 \\ 0 & \frac{Z_0 - Z_{0o}}{Z_0 + Z_{0o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_e & 0 \\ 0 & \Gamma_o \end{bmatrix} = \Gamma_s' \end{aligned} \quad (3.37)$$

も得る。反射を完全に零にする完全整合回路網も一般には可能である⁽²⁾⁽⁵⁾が、図3.1のような構成では Γ_e, Γ_o を同時に零にする事は出来ない。両状態の反射が打ち消し合う $\Gamma_e + \Gamma_o = 0$ の条件より Z_0 を求めれば

$$Z_0 = \sqrt{Z_{0e} Z_{0o}} \quad (3.38)$$

が得られ、これは媒質が均質の場合に対して Conolly が導いた式⁽²⁸⁾と一致する。

この時、各状態の反射係数は $\Gamma_o = \rho, \Gamma_e = -\rho$ となる。ここに

$$\rho = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{2Z_0 + Z_{0e} + Z_{0o}} = \frac{\sqrt{Z_{0e}} - \sqrt{Z_{0o}}}{\sqrt{Z_{0e}} + \sqrt{Z_{0o}}} \quad (3.39)$$

この場合の各部電圧波形は、次式を利用して

$$\Gamma'_s = \Gamma'_l = \begin{bmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{U} - \Gamma'_s \mathbf{E}_l \Gamma'_l \mathbf{E}_l)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \rho^2 e^{-2T_e S}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \rho^2 e^{-2T_o S}} \end{bmatrix}$$

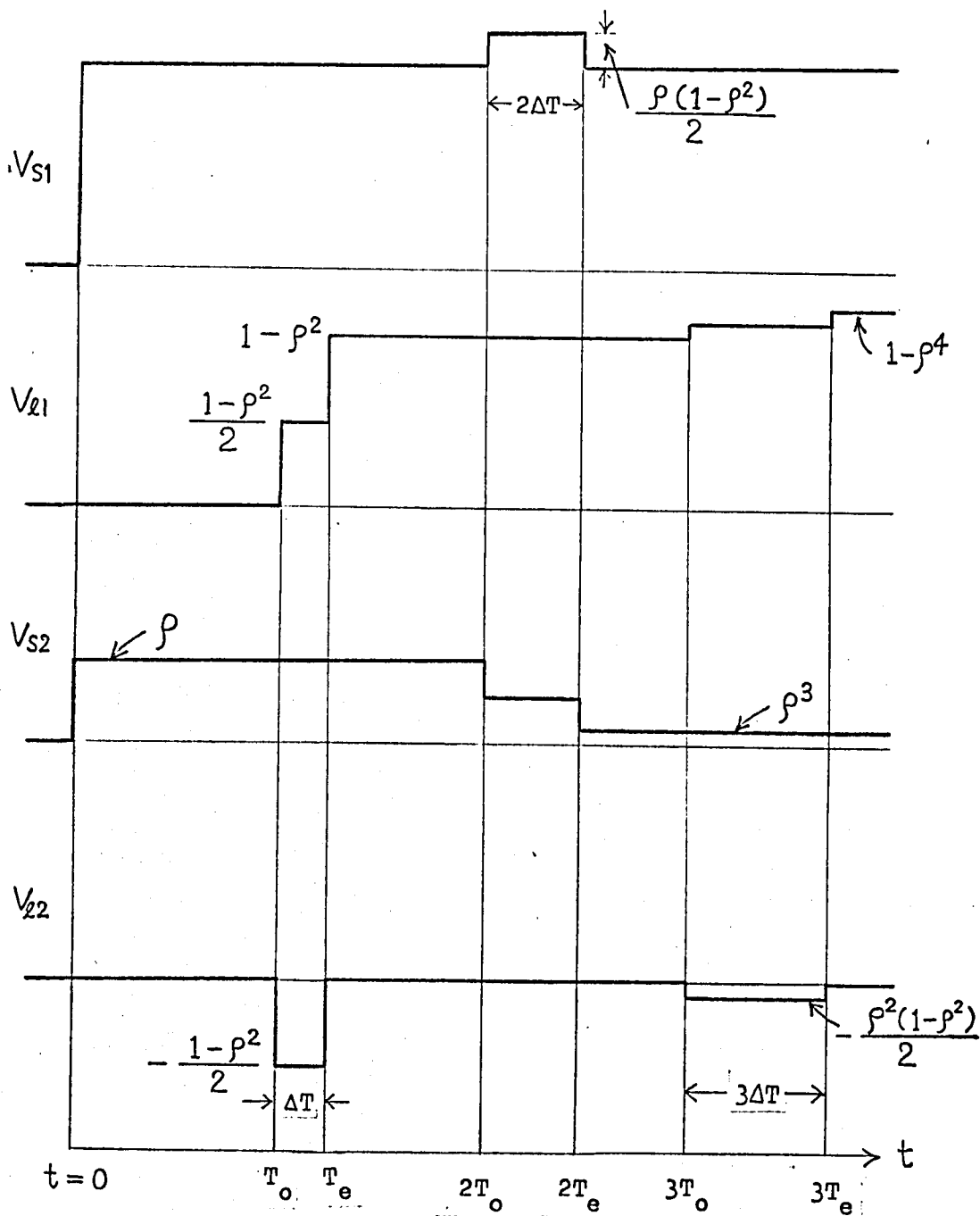
$$\text{ここに } T_e = \frac{l}{v_e}, \quad T_o = \frac{l}{v_o}$$

次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}'_s &= \begin{bmatrix} \frac{1 - \rho e^{-2T_e S}}{1 - \rho^2 e^{-2T_e S}} \cdot \frac{1 + \rho}{2} \cdot \frac{E}{2} \\ \frac{1 + \rho e^{-2T_o S}}{1 - \rho^2 e^{-2T_o S}} \cdot \frac{1 - \rho}{2} \cdot \frac{E}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}'_l &= \begin{bmatrix} \frac{e^{-T_e S} (1 - \rho)}{1 - \rho^2 e^{-2T_e S}} \cdot \frac{1 + \rho}{2} \cdot \frac{E}{2} \\ \frac{e^{-T_o S} (1 + \rho)}{1 - \rho^2 e^{-2T_o S}} \cdot \frac{1 - \rho}{2} \cdot \frac{E}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (3.40)$$

この式 (3.40) の波形を図に示すと図 3.5 ($T_e > T_o$ の場合)、
図 3.6 ($T_e < T_o$ の場合) のようになる。

これより偶定態、奇定態の伝搬速度が等しい場合 (均値媒質
の場合) には、 $V_{l2} = 0$ となり Connolly⁽²³⁾ の示した結果とも一致
する事も明らかであり、 ρ は結合の強さを示す結合係数である
事もわかる。弱結合理論で全端子整合の場合の式 (3.23) と比較
すると、この ρ はそのまま後述誘導雑音係数 K_b に対応する事
がわかる。すなわち



□ 3.5 $T_e > T_0$

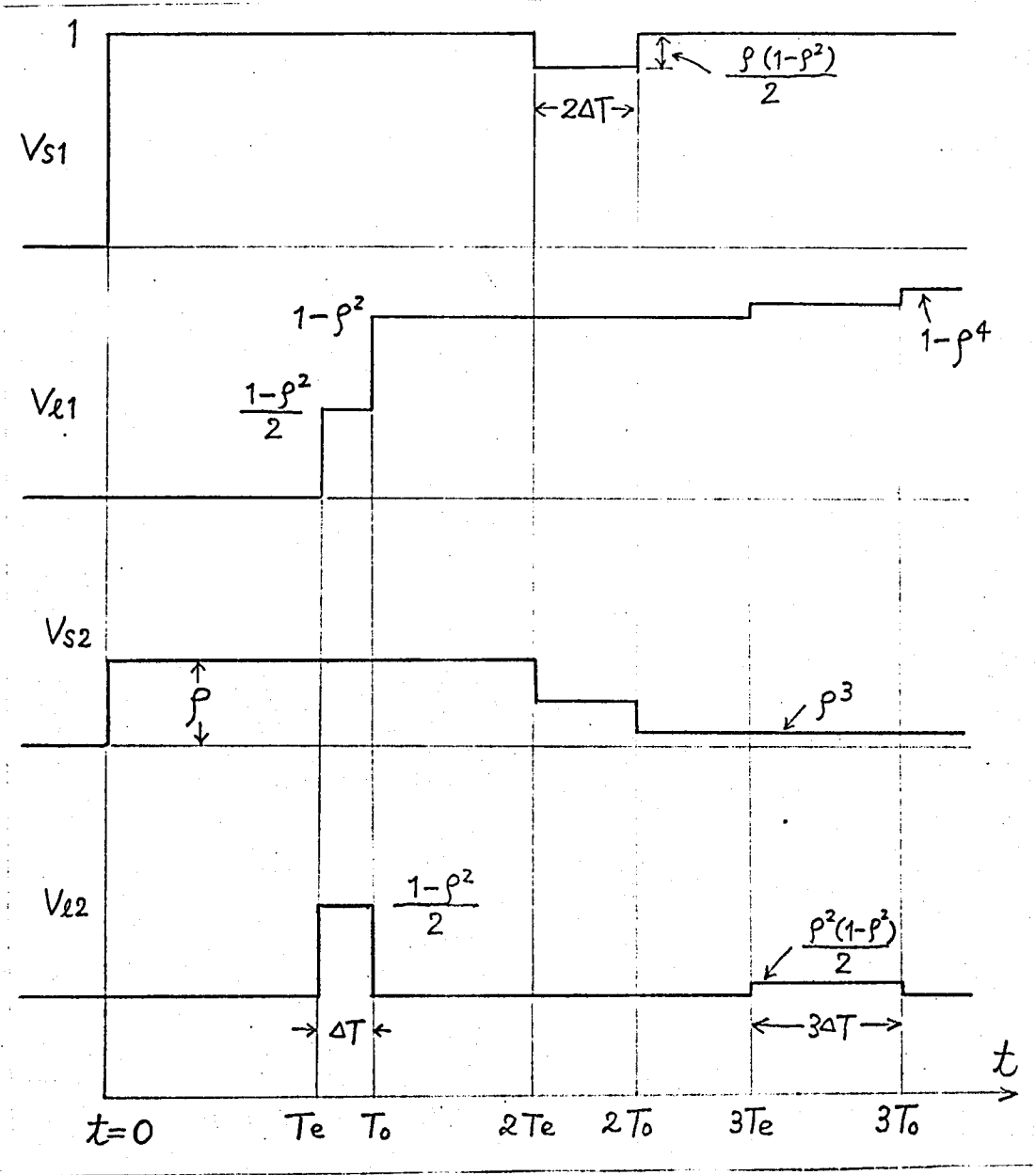


图 3.6 $T_e < T_o$

$$K_b = \rho$$

$$(3.41)$$

一方遠端誘導雑音 V_{e2} は弱結合理論により得た結果とが若干異っている。弱結合理論の式(3.23)によれば前に述べた様に V_{e2} は常に線長 l に比例し、信号の立ち上がり時間 t_r に逆比例する事になるが、実際にはそんな事は無い。図 3.5, 3.6 よりわかる様に V_{e2} は両状態の伝搬速度の差によって生じるものであり、振巾は $\frac{1-\rho^2}{2} V_{s1}$ を越える事は無いし、また元の信号波形より鋭い立ち上りになる事も無い(負帰線路である以上当然のことである)。

図 3.7 に式(3.24)のランフ状入力も加えた際、 $t_r > \Delta T$ ($\Delta T = T_e - T_0$) を仮定したときの V_{e2} の波形を、弱結合理論(式(3.23))と多線条線路理論(式(3.40))とについて比較して示してある。これより上の条件の下では ($T_e > T_0$)

$$K_f = -\frac{1-\rho^2}{2} \frac{\Delta T}{l} = -\frac{1-\rho^2}{2} \left(\frac{1}{v_e} - \frac{1}{v_0} \right) \quad (3.42)$$

なる関係がある事がわかる。 $t_r \leq \Delta T$ とすると V_{e1} の振巾は $-\frac{1-\rho^2}{2} V_{s1}$ で一定となり、巾が線長 l に比例して大きくなる事になる。

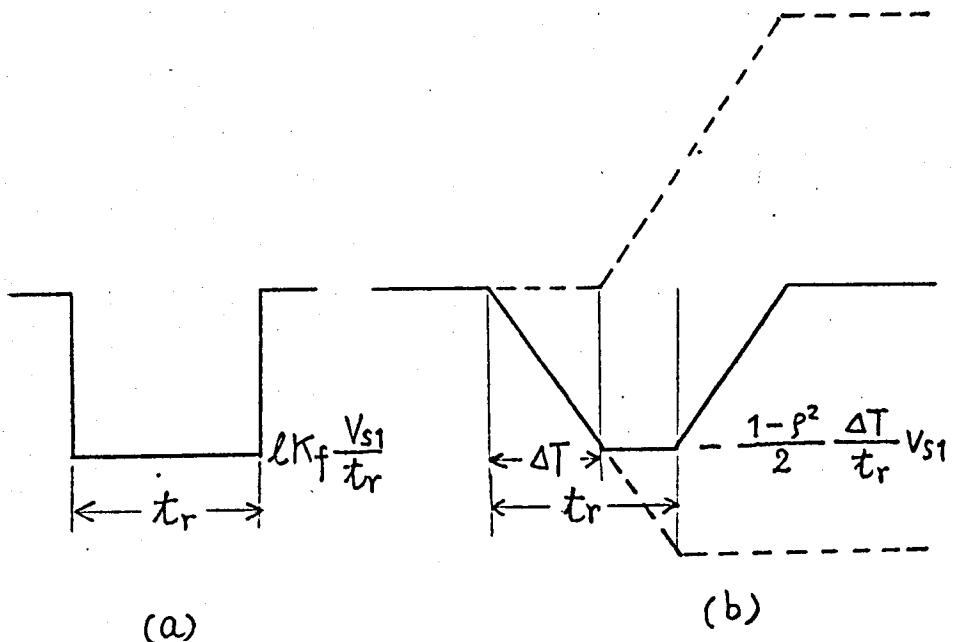


図 3.7

実際の計算法の論理布線においては、線長が信号の立上り時間に比べて非常に大きい時以外は $\tau < \Delta T$ となる事は無いし、
 更に普通は $\rho^2 \ll 1$ と考へてよいので、以上の式で ρ^2 以上を無視しても実用上それ程差し支へはない。なお、式(3.39), (3.41), (3.42)で結合が弱い、すなわち $\frac{L_m}{L}, \frac{C_m}{C} \ll 1$ とおいて近似すれば、式(3.7)の K_b, K_f に関することも次のように容易に確かめられる⁽⁴⁰⁾。

$$Z_{0e} = \sqrt{\frac{L+L_m}{C-C_m}} \cong \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{L_m}{L} + \frac{1}{2} \frac{C_m}{C} \right)$$

$$Z_{0o} = \sqrt{\frac{L-L_m}{C+C_m}} \cong \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{L_m}{L} - \frac{1}{2} \frac{C_m}{C} \right)$$

$$Z_0 = \sqrt{Z_{0e} Z_{0o}} \cong \sqrt{\frac{L}{C}}$$

従つて

$$\rho = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{2Z_0 + Z_{0e} + Z_{0o}} \cong \frac{1}{4} \left(\frac{L_m}{L} + \frac{C_m}{C} \right) = K_b$$

また

$$T_e = \frac{l}{v_e} = l \sqrt{(L+L_m)(C-C_m)} \cong l \sqrt{LC} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{L_m}{L} - \frac{1}{2} \frac{C_m}{C} \right)$$

$$T_o = \frac{l}{v_o} = l \sqrt{(L-L_m)(C+C_m)} \cong l \sqrt{LC} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{L_m}{L} + \frac{1}{2} \frac{C_m}{C} \right)$$

$$\Delta T = T_e - T_o \cong l \sqrt{LC} \left\{ \frac{L_m}{L} - \frac{C_m}{C} \right\}$$

従つて

$$-\frac{1-\rho^2}{2} \frac{\Delta T}{l} \cong -\frac{1}{2} \sqrt{LC} \left(\frac{L_m}{L} - \frac{C_m}{C} \right) = K_f$$

3.3.3 各種端子条件における誘導雑音

一般の端子条件における反射係数は(以下 Γ_e' について示すが Γ_s' についても同様である), 次のようになる。

$$\Gamma'_l = \frac{1}{2Z_{l1}Z_{l2} + 2Z_{0e}Z_{0o} + (Z_{l1} + Z_{l2})(Z_{0e} + Z_{0o})}$$

$$\left[\begin{array}{cc} 2Z_{l1}Z_{l2} - 2Z_{0e}Z_{0o} + (Z_{0o} - Z_{0e})(Z_{l1} + Z_{l2}) & 2Z_{0e}(Z_{l1} - Z_{l2}) \\ 2Z_{0o}(Z_{l1} - Z_{l2}) & 2Z_{l1}Z_{l2} - 2Z_{0e}Z_{0o} + (Z_{0e} - Z_{0o})(Z_{l1} + Z_{l2}) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{1 - \rho^2 T_{l1} T_{l2}} \left[\begin{array}{cc} (T_{l1} + T_{l2}) \frac{1 - \rho^2}{2} - \rho(1 - T_{l1} T_{l2}) & \frac{T_{l1} - T_{l2}}{2} (1 + \rho)^2 \\ \frac{T_{l1} - T_{l2}}{2} (1 - \rho)^2 & (T_{l1} + T_{l2}) \frac{1 - \rho^2}{2} + \rho(1 - T_{l1} T_{l2}) \end{array} \right] \quad (3.43)$$

ここに $T_{l1} = \frac{Z_{l1} - Z_0}{Z_{l1} + Z_0}$, $T_{l2} = \frac{Z_{l2} - Z_0}{Z_{l2} + Z_0}$

特に

$$Z_{l1} = Z_{l2} = \infty \text{ のときは, } \Gamma'_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \quad (3.44)$$

$$Z_{l1} = Z_{l2} = 0 \text{ のときは, } \Gamma'_l = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{U} \quad (3.45)$$

なお, 初期電圧波は

$$\mathbf{V}'_{in} = \frac{1}{1 - \rho^2 T_{s1} T_{s2}} \left[\begin{array}{c} (1 + \rho)(1 + \rho T_{s2}) \\ (1 - \rho)(1 - \rho T_{s2}) \end{array} \right] \frac{1 - T_{s2}}{2} \cdot \frac{E}{2} \quad (3.46)$$

とける。

(1) $Z_{s1} = Z_{s2} = 0$ ($T_{s1} = T_{s2} = -1$), $Z_{l1} = Z_{l2} = Z_0$ ($T_{l1} = T_{l2} = 0$) の場合

$$\mathbf{V}'_{in} = \left[\begin{array}{c} \frac{E}{2} \\ \frac{E}{2} \end{array} \right]$$

$$(\mathbf{U} - \Gamma'_s \mathbf{E}_l \Gamma'_l \mathbf{E}_l)^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{1 - \rho e^{-2Tos}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \rho e^{-2Tos}} \end{array} \right]$$

とほるから

$$V_{\ell}' = \left[\begin{array}{c} \frac{e^{-T_e S} (1-\rho)}{1-\rho e^{-2T_e S}} \cdot \frac{E}{2} \\ \frac{e^{-T_o S} (1+\rho)}{1+\rho e^{-2T_o S}} \cdot \frac{E}{2} \end{array} \right] \quad (3.47)$$

これより各部の波形を示すと図3.8のようにほる。

(2) $Z_{S1} = Z_{S2} = \infty$ ($\Gamma_{S1} = \Gamma_{S2} = 1$), $Z_{\ell 1} = Z_{\ell 2} = Z_0$ ($T_{\ell 1} = T_{\ell 2} = 0$)
の場合

$$V_{in}' = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\begin{array}{c} (1+\rho)^2 \\ (1-\rho)^2 \end{array} \right] \frac{Z_0 I}{2} \quad (I: \text{電流源の大きさ})$$

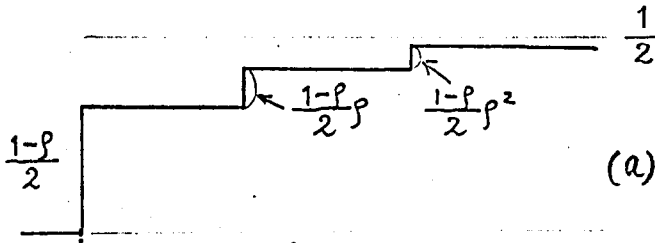
$$(U - \Gamma_S' E_{\ell} \Gamma_{\ell}' E_{\ell})^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{1+\rho e^{-2T_e S}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\rho e^{-2T_o S}} \end{array} \right]$$

とほるから

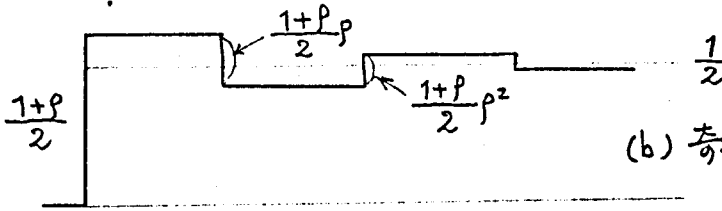
$$V_S' = \left[\begin{array}{c} \frac{1-\rho e^{-2T_e S}}{1+\rho e^{-2T_e S}} \cdot \frac{1+\rho}{1-\rho} \\ \frac{1+\rho e^{-2T_o S}}{1-\rho e^{-2T_o S}} \cdot \frac{1-\rho}{1+\rho} \end{array} \right] \frac{Z_0 I}{2} \quad (3.48)$$

$$V_{\ell}' = \left[\begin{array}{c} \frac{(1-\rho) e^{-T_e S}}{1+\rho e^{-2T_e S}} \cdot \frac{1+\rho}{1-\rho} \\ \frac{(1+\rho) e^{-T_o S}}{1-\rho e^{-2T_o S}} \cdot \frac{1-\rho}{1+\rho} \end{array} \right] \frac{Z_0 I}{2} \quad (3.49)$$

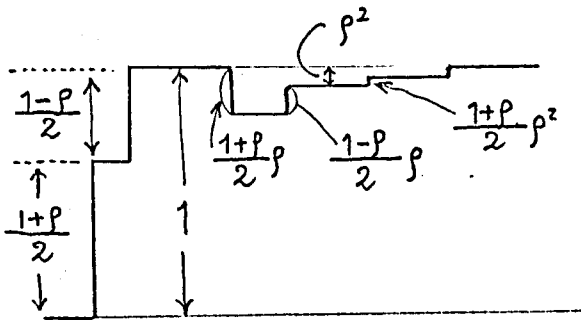
を得る。この式による各部波形を図3.9に示す。



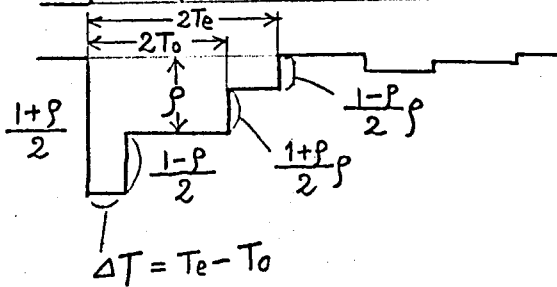
(a) 偶姿態 V_{e2}



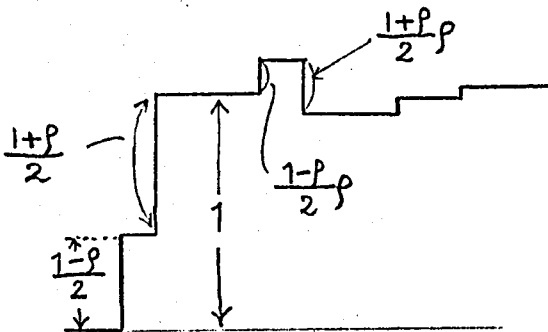
(b) 奇姿態 V_{o2}



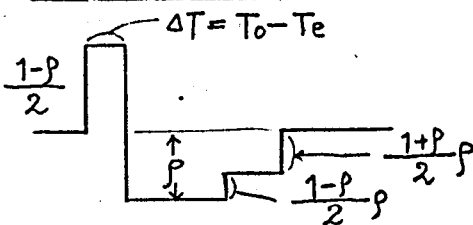
(c) $V_{e1} (T_o < T_e)$



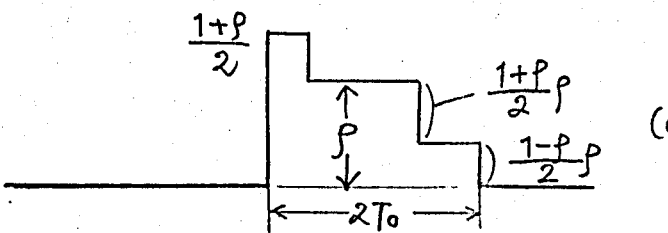
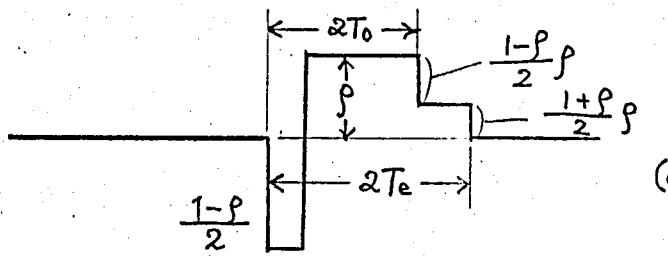
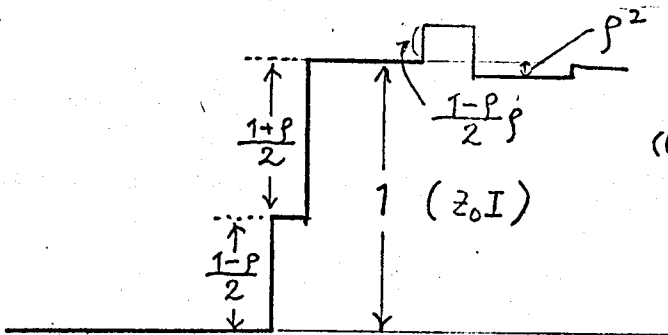
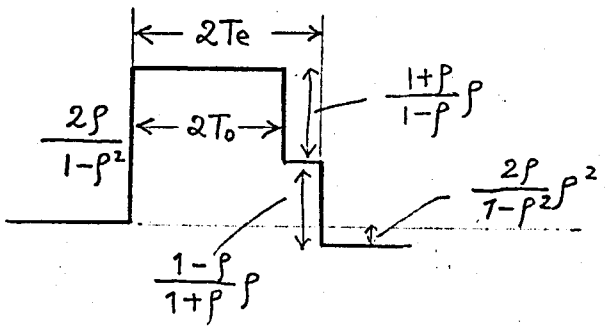
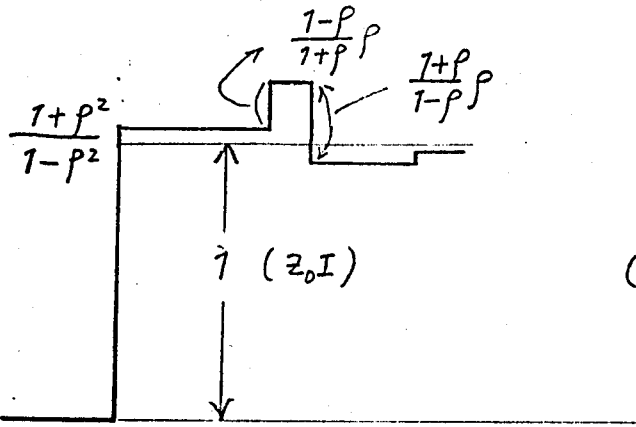
(d) $V_{e2} (T_o < T_e)$



(e) $V_{e1} (T_o > T_e)$



(f) $V_{e2} (T_o > T_e)$



(3) $Z_{s1} = Z_{e2} = 0$ ($T_{s1} = T_{e2} = -1$), $Z_{s2} = Z_{e1} = Z_0$ ($T_{s2} = T_{e1} = 0$)
の場合

今まで扱ってきた場合にように対称線路で扱われるので、反射係数マトリックスが対角マトリックスで扱われる。

$$\mathbf{V}'_m = \begin{bmatrix} (1+\rho) \\ (1-\rho) \end{bmatrix} \frac{E}{2}$$

$$\mathbf{I}'_s = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+\rho)^2 - 2\rho^2 & (1+\rho)^2 \\ (1-\rho)^2 & (1-\rho)^2 - 2\rho^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}'_e = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+\rho)^2 - 2\rho^2 & -(1+\rho)^2 \\ -(1-\rho)^2 & (1-\rho)^2 - 2\rho^2 \end{bmatrix}$$

等を用いて計算すれば、近端誘導雑音として次式を得る。

$$V_{s2} = \rho E + \frac{(1-\rho^2)}{4} E \left[(1+\rho) \left\{ (1-\rho)^2 - 2\rho^2 \right\} e^{-2T_0 S} - 2\rho(1-\rho^2) e^{-(T_0+T_e)S} \right. \\ \left. - (1-\rho) \left\{ (1+\rho)^2 - 2\rho^2 \right\} e^{-2T_e S} \right] + \dots$$

(3.50)

この波形を図3.10に示す。

3.3.4 実験結果

マイクロストリップ線路の実験結果は Catt が発表しており、⁽³³⁾前進誘導雑音 (Catt はこれを differential noise と呼んでいる) が両姿勢の速度差によって生じる事を示している。

ここでは実験は接地面上に発泡ポリエチレンの燃り線を 0.7 cm の高さに張り行い、理論と実験がよく一致する事を確認した。マイクロストリップ線路では、媒質がすべて空気である場合に比べて基板の誘電体によって C_m より C の方がより大きく

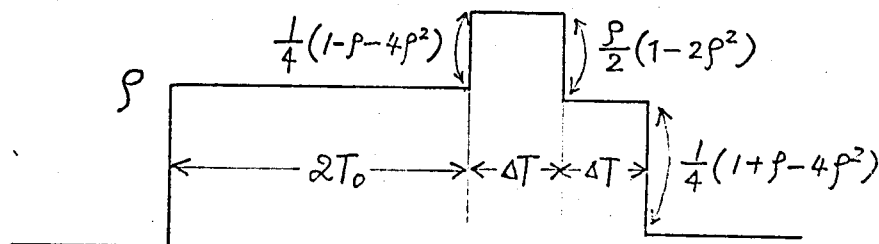
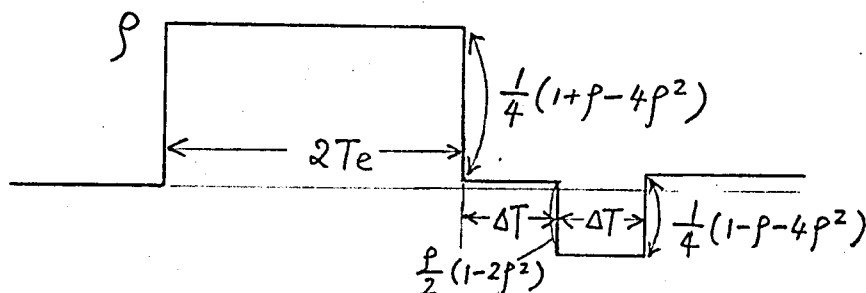
(a) $T_0 < T_e$ ($\Delta T = T_e - T_0$)(b) $T_0 > T_e$ ($\Delta T = T_0 - T_e$)

図 3.10

はるので、奇姿態の方が偶姿態より速く伝搬し、 $T_e > T_0$ となるが、この実験の場合には、媒質がすべて空気である場合に比べて C_m の方が C より増加率が大きいので、偶姿態の方が奇姿態より速く伝搬する。従って $T_e < T_0$ となる。

信号波形の立上り時間は約 4ns であり、線長は 10m と 2m とし、波形観測はすべてサンプリングオシロスコープ (4500MC) で行った。タイムスケールは 10m のとき 20ns/cm 、 2m のとき 5ns/cm としている。

図 3.11, 3.12 は全端子整合の場合である。図 3.11 は線路が長く (10m)、 $\tau < \Delta T$ の場合であり、図 3.12 は線路が短かく (2m)、 $\tau > \Delta T$ の場合である。図 3.6 と図 3.11 を見比べてみると理論と実験結果がよく一致していることがわかる。また、図 3.11, 3.12 より、 $\rho \cong 0.3$ 、 $K_f \cong 0.55\text{ns/m}$ である事も読みとれる。

図 3.13 は $Z_{s2} = \infty$ で他の三つの端子が整合している場合で

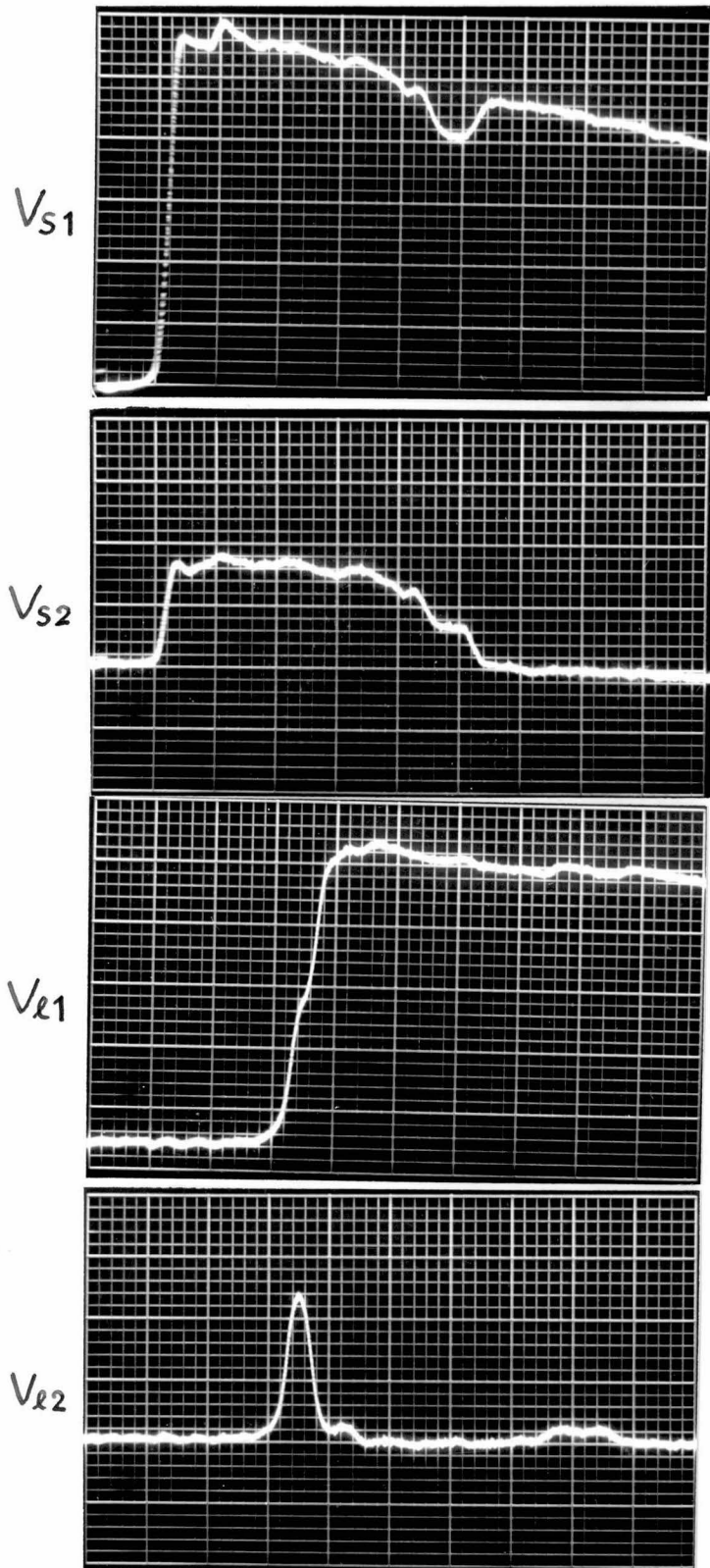


图 3.11 全端子整合 ($l=10m, 20ns/cm$)

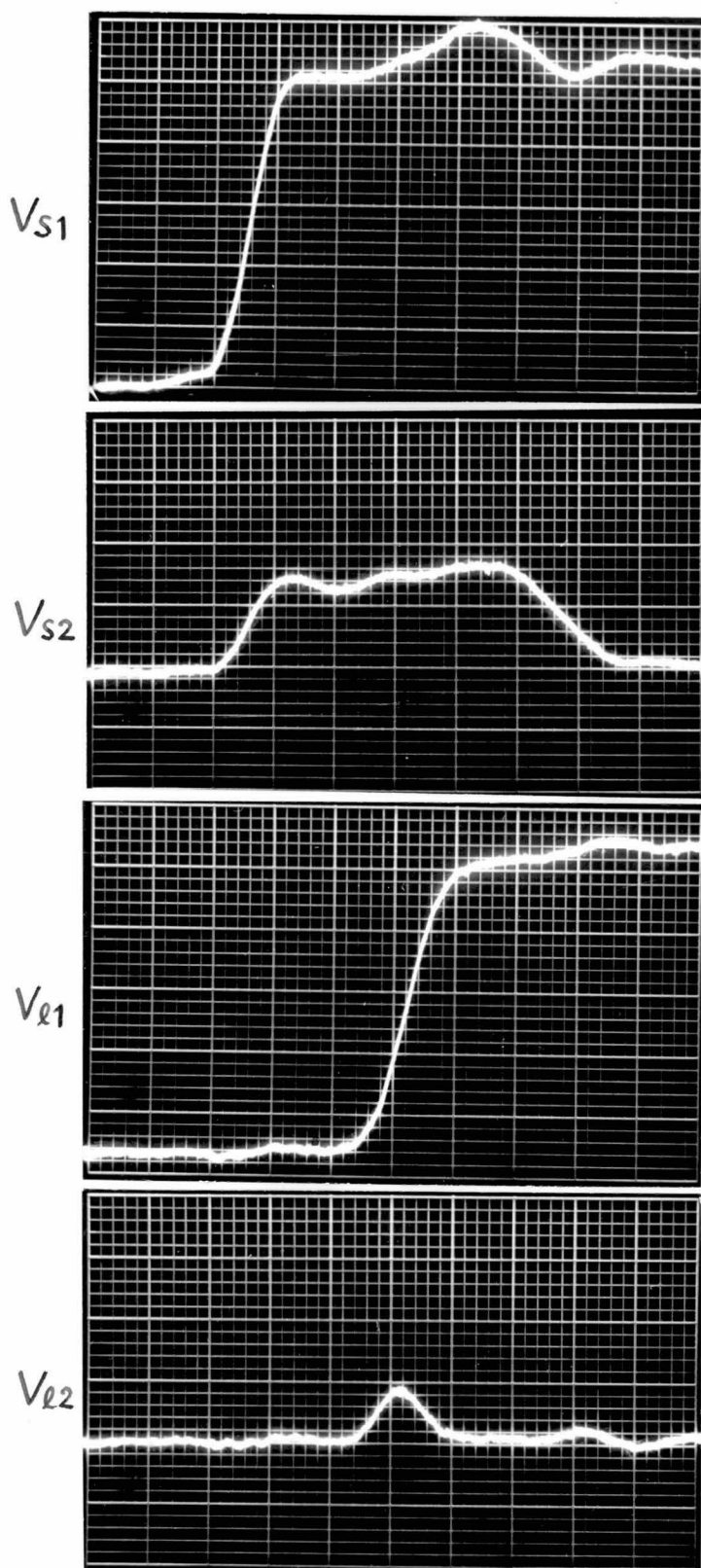
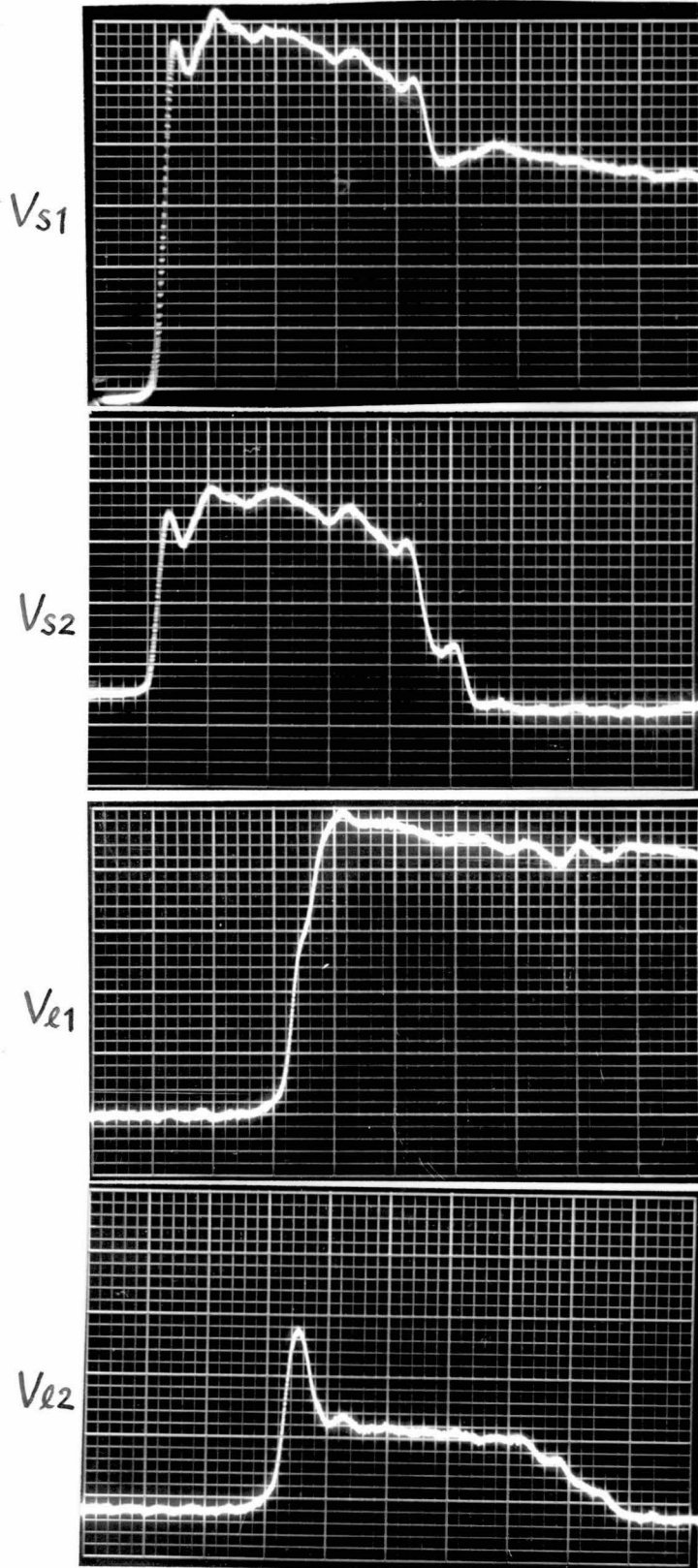


图 3.12 全端子整合 ($l=2m$; $5ns/cm$)



3.13 $Z_{S2} = \infty$ ($l = 10\text{m}, 20\text{ns/cm}$)

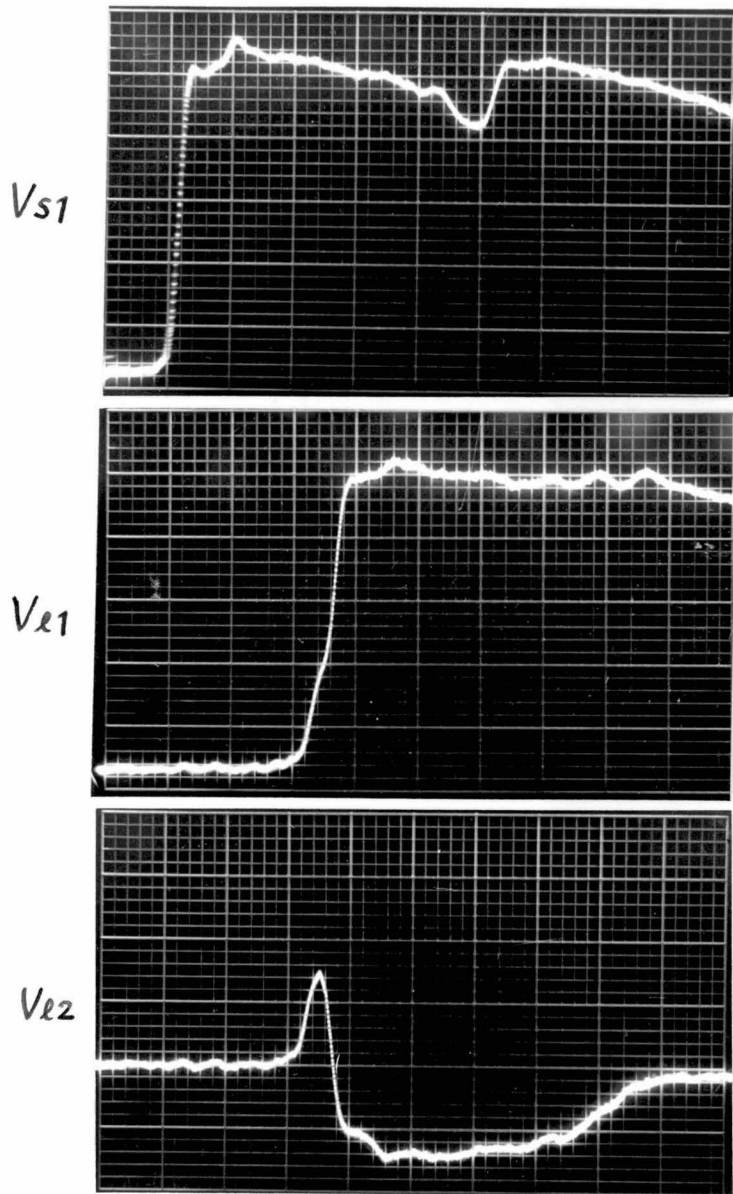


图 3.14 $Z_{S2} = 0$ ($l = 10\text{m}$, 20ns/cm)

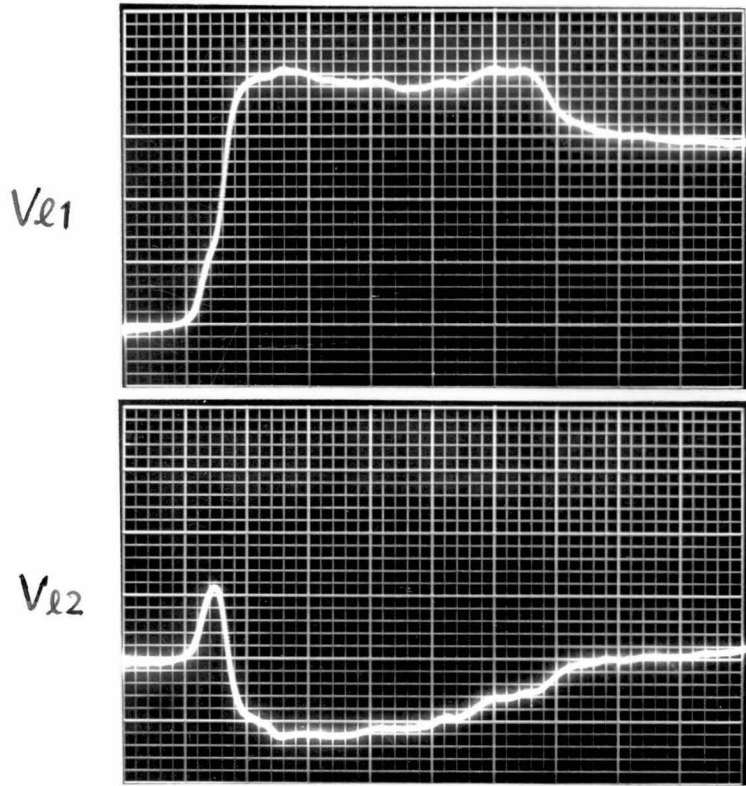


図 3.15 $Z_{s1} = Z_{s2} = 0$ ($l = 10\text{m}, 20\text{ns/cm}$)

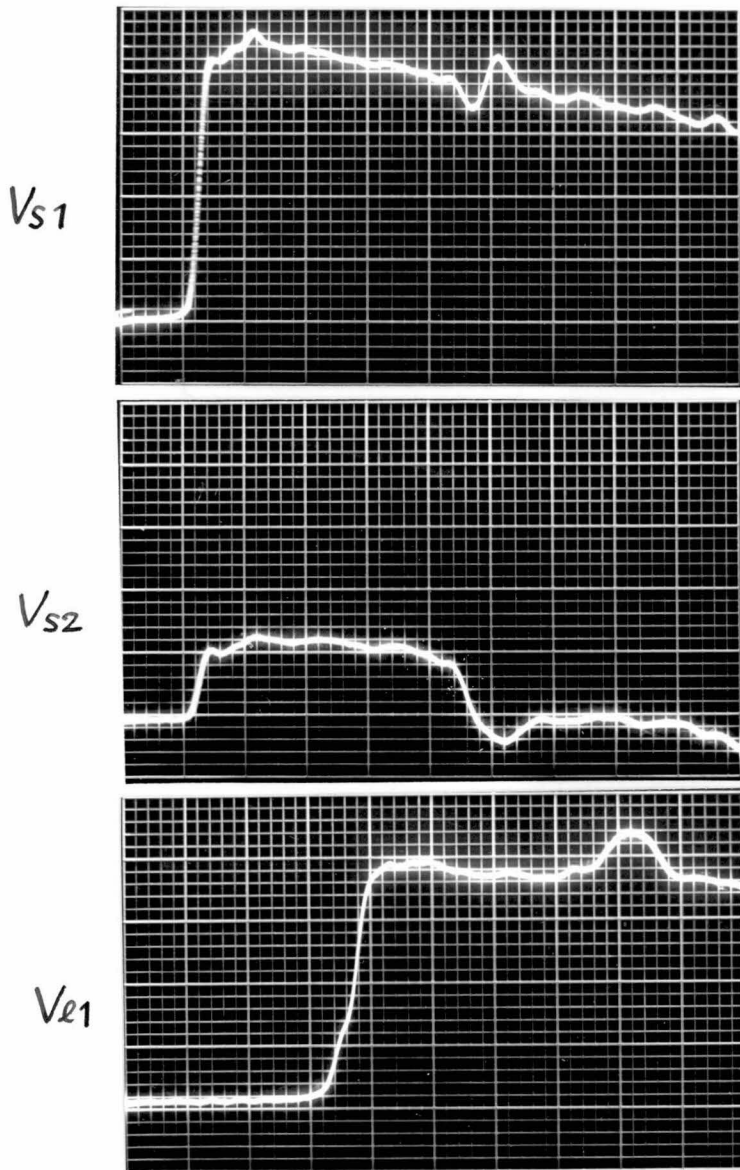


图 3.16 $Z_{s1} = Z_{l2} = 0$ ($l = 10 \text{ m}, 20 \text{ ns/cm}$)

ある。この V_{e2} と図 3.9 (d), およびこの V_{s2} と図 3.9 (b) とを比較してみるとよく一致している (図 3.9 では $Z_{s1} = \infty$ でありその (b) は $T_0 < T_e$ の場合であるが, $T_0 > T_e$ としたとしても振中は変わらず中が $2T_e$ になるだけである)。

図 3.14 は $Z_{s2} = 0$ で他の三つの端子が整合している場合の波形であり, 図 3.15 はさらに Z_{s1} も零の場合の波形である。この図 3.15 の V_{e1}, V_{e2} と図 3.8 の (e), (f) も比較するとこれもよく一致している事がわかる。また図 3.16 は $Z_{s1} = Z_{e2} = 0, Z_{s2} = Z_{e1} = Z_0$ の場合の各部波形であり, この V_{s2} と図 3.10 (b) を比べてみるとこれも理論と実験が大変よく合致する事がわかる。

以上簡単な実験ではあるが, 多線系線路理論が実際上有効である事が確かめられ, 前進誘導雑音が偶姿態と奇姿態の速度の差によって生じる事も確認された。

3.4 誘導雑音の等価回路

以上によって多線系線路理論の有効性が確かめられたが, 一般的な複雑な端子条件の場合に適用するのは反射係数マトリックスが大変複雑になるので, 実用上非常に困難である。そこで弱結合理論と多線系線路理論の結果を合成して次のように考えればよい。全端子整合の場合, 後進誘導雑音については両理論による結果はほとんど変わらない。ただ前進誘導雑音についてはかなり異なった結果が得られているから, この点を弱結合理論において修正する。

従って, 式 (3.23) の代りに次式を採用する。

$$\left. \begin{aligned} V_{s2} &= \rho (1 - e^{-2TS}) V_i \\ V_{e2} &= -\frac{1 - \rho^2}{2} e^{-TS} (1 - e^{-4TS}) V_i \end{aligned} \right\} (3.51)$$

ここに

$$\begin{aligned} T_0 &< T_e, \quad \Delta T = T_e - T_0, \quad \left(\begin{aligned} T_0 &= \frac{l}{v_0} \\ T_e &= \frac{l}{v_e} \end{aligned} \right) \\ T &= \frac{1}{2} (T_e + T_0) \end{aligned}$$

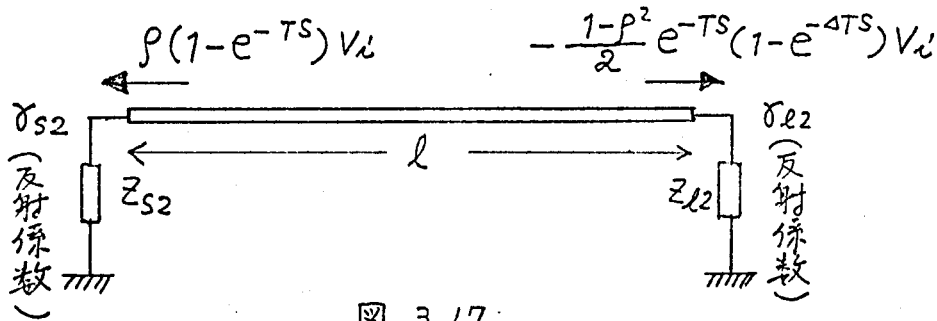


図 3.17

マイクロストリップ線路への適用を考へて、 $T_0 < T_e$ の場合を採用的にしている。

そして、 s_2, e_2 端子が不整合の場合には図 3.17 の等価回路に従つて多重反射を考へればよい。従つて式 (3.21) と同様に

$$\left. \begin{aligned} V_{s2} &= \frac{1 + \sigma_{s2}}{1 - \sigma_{s2} \sigma_{e2} e^{-2TS}} \left\{ \alpha - \beta \sigma_{e2} e^{-2TS} \right\} V_i \\ V_{e2} &= \frac{(1 + \sigma_{e2}) e^{-TS}}{1 - \sigma_{s2} \sigma_{e2} e^{-2TS}} \left\{ \sigma_{s2} \alpha - \beta \right\} V_i \end{aligned} \right\} (3.52)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \rho (1 - e^{-2TS}) \\ \beta &= \frac{1 - \rho^2}{2} (1 - e^{-4TS}) \end{aligned} \right\} (3.53)$$

なる式を用ゐればよい ($\alpha, \beta > 0$)。

例之ば、 $\sigma_{s2} = -1, \sigma_{e2} = 0$ の場合には

$$V_{e2} = -e^{-TS} \left\{ \alpha + \beta \right\} V_i = -e^{-TS} \left\{ \rho (1 - e^{-2TS}) + \frac{1 - \rho^2}{2} (1 - e^{-4TS}) \right\} V_i \quad (3.54)$$

となる。これを図に示せば図 3.18 (a) のようになり、厳密理論による図 3.8 (d) と比較してみると殆んど同じ事がわかる。また、

$\sigma_{s2} = 1, \sigma_{e2} = 0$ の場合には

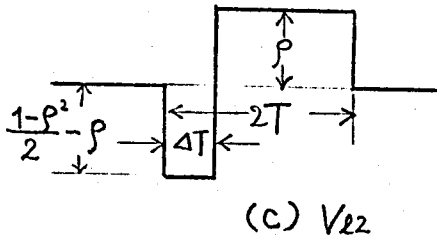
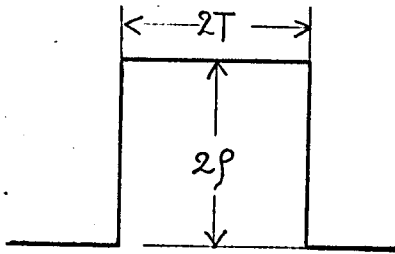
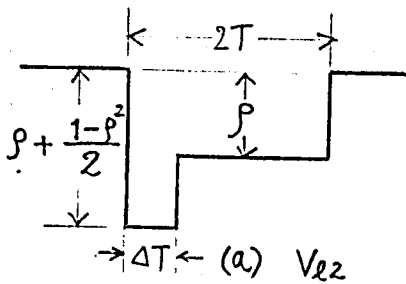


図 3.18

$$V_{s2} = 2\alpha V_i = 2\rho(1 - e^{-2TS})V_i$$

$$\begin{aligned} V_{s2} &= e^{-TS} \{ \alpha - \beta \} V_i \\ &= e^{-TS} \left\{ \rho(1 - e^{-2TS}) - \frac{1-\rho^2}{2}(1 - e^{-4TS}) \right\} V_i \end{aligned} \quad (3.55)$$

とほり、この波形図 3.18 (b), (c) と図 3.9 (b), (d) を比較すると、よく近似できる事がわかる。

線路 1 が整合していない場合には次の様に考えればよい。すなわち、線路 1 上の反射波それぞれについて線路 2 に誘起される誘導雑音を重畳してやればよい。線路 1 の受端 ($x=l$) における第 1 番目の反射波は、 $V_i e^{-TS} \sigma_{l1}$ である。これを新しい信号とみて、これによって線路 2 に誘起される電圧波は式 (3.52) で送端と受端を入れ替之

V_i の代りに $V_i e^{-TS} \sigma_{l1}$ を代入すれば

$$\begin{aligned} V_{s2}' &= \frac{(1 + \sigma_{s2}) e^{-TS}}{1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2} e^{-2TS}} \left\{ \alpha \sigma_{l2} - \beta \right\} V_i e^{-TS} \sigma_{l1} \\ V_{s2}' &= \frac{(1 + \sigma_{l2})}{1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2} e^{-2TS}} \left\{ \alpha - \beta e^{-2TS} \sigma_{s2} \right\} V_i e^{-TS} \sigma_{l1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

とほる。

これを以後の線路 1 上のすべての反射波について考えて、重畳すれば

$$\begin{aligned}
 V_{s2} &= \frac{(1 + \sigma_{s2})}{(1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2} e^{-2Ts})(1 - \sigma_{s1} \sigma_{l1} e^{-2Ts})} \\
 &\quad \left\{ \alpha(1 + \sigma_{l1} \sigma_{l2} e^{-2Ts}) - \beta e^{-2Ts} (\sigma_{l1} + \sigma_{l2}) \right\} \\
 V_{l2} &= \frac{(1 + \sigma_{l2}) e^{-Ts}}{(1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2} e^{-2Ts})(1 - \sigma_{s1} \sigma_{l1} e^{-2Ts})} \\
 &\quad \left\{ \alpha(\sigma_{l1} + \sigma_{s2}) - (1 + \sigma_{l1} \sigma_{l2} e^{-2Ts}) \beta \right\}
 \end{aligned}$$

が得られる。

(3.57)

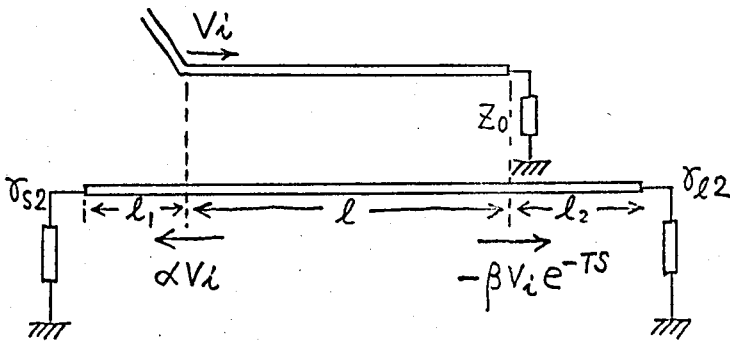


図 3.19

また、以上の理論において線長 l は実際の線長ではなくて、結合している部分の長さであると考えられる。従って図 3.19 のような場合

には、 $x=0$, $x=l$ において二つの入射波 αV_i と $-\beta V_i e^{-Ts}$ とを考ればよく、誘導電圧は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 V_{s2} &= \frac{(1 + \sigma_{s2}) e^{-\frac{l_1}{v} s}}{1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2} e^{-\frac{2(l+l_1+l_2)}{v} s}} \left\{ \alpha - \beta \sigma_{l2} e^{-\frac{2(l+l_2)}{v} s} \right\} V_i \\
 V_{l2} &= \frac{(1 + \sigma_{l2}) e^{-\frac{l+l_2}{v} s}}{1 - \sigma_{s2} \sigma_{l2} e^{-\frac{2(l+l_1+l_2)}{v} s}} \left\{ \alpha \sigma_{s2} e^{-\frac{2l_1}{v} s} - \beta \right\} V_i
 \end{aligned}
 \quad (3.58)$$

第4章 ストリップ線路の解析

4.1 はじめに

ストリップ線路は高速計算機の論理布線としてのみならず、濾波器、方向性結合器などマイクロ波集積回路においても広く使用されており、近年特に重要とわかってきている。

論理布線として使用されているものは、図4.1に示すようにしゃへい型ストリップ線路 (shielded strip line), マイクロストリップ線路 (pure) microstrip line, 埋め込まれたマイクロストリップ線路 (embedded microstrip line) の三種である (マイクロ波回路ではこれら以外の型の線路も用いられている)。すなわち、最近の高速計算機では多層プリント板が広く使用されているが、多層プリント板の中間層ではしゃへい型ストリップ線路になり、表面層ではマイクロストリップ線路、またはその表面を誘電体で保護した埋め込まれたマイクロストリップ線路になる。

これ等ストリップ線路については古くより現在に至るまで種々の研究があるが、⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾ 大部分は線路の断面の寸法が信号の波長に比べて十分小さく且線路が無損失であるとして、TEM状態の伝搬を仮定して解析している。TEM状態の伝搬を仮定すれば、線路の解析は要するに二次元のラプラスの方程式の境界値問題に帰着され、これらの線路の伝搬速度、特性インピーダンス、結合

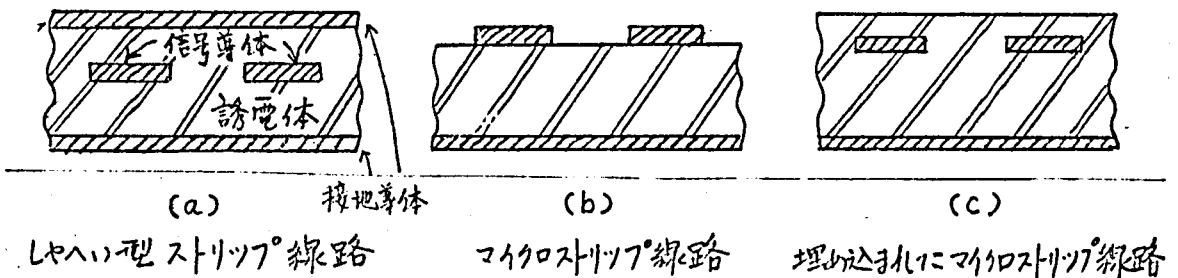


図 4.1

線路の結合係数等すべての特性は、線路の容量より求められる。

解析法は、等角写像法、緩和法、変分法、そしてグリーン関数と積分方程式による方法、の4種に大別することができる。これ等の解析法については、浜崎が1969年以前のものについてまとめているが、⁽⁴²⁾⁽⁴³⁾ それ以後も続々新しい研究結果が発表されており、これ等最近の発表は殆んどがグリーン関数と積分方程式による方法である。

まず等角写像法は Schwartz-Christoffel 変換によるもので、比較的簡単な線路の容量を解析的に求めることができるが、線路の厚さを考慮したもう少し複雑な構造になると困難である。

緩和法は計算機を用いてラプラスの方程式を解く逐次近似法であって、ポテンシャルを求めようとする平面上を細かい正方形網目でおおい、網目毎の電位を周囲の網目毎の電位と比較して一次補正を行って精度を逐次向上していく方法であり、一応どんな構造の線路でも計算に着手できるが多数の網目を用いて繰り返しし計算を必要とする。

変分法は変分原理により容量の上限下限を求めるものであって、緩和法のように繰り返しし計算は必要とせず数値計算は簡単である。

最後のグリーン関数と積分方程式による方法は、線路の厚さを考慮した場合も厳密に求めることができるし、更に後に示すように三導体以上の系の容量マトリックスも同様に簡単に求めることができる等、一番すぐれた方法であると思われる。

以下、マイクロストリップ線路に重夾を置いて三種のストリップ線路の解析法および計算結果を示す。

4.2 しやへい型ストリップ線路

4.2.1 はじめに

媒質が均質であるのでマイクロストリップ線路に比べるとはるかに解析し易いため、早くから等角写像法による解析法⁽⁴⁴⁾⁻⁽⁴⁶⁾が種々行われ、設計法もほぼ確立していると云える。

伝搬速度 v は

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (v_0: \text{真空中の光速}, \epsilon_r: \text{媒質の比誘電率}) \quad (4.1)$$

で与えられるので問題なく、求めるべきものは特性インピーダンス

$$Z_0 = \frac{1}{vC} \quad (C: \text{線路の単位長に当りの容量}) \quad (4.2)$$

と結合線路の場合の結合係数(誘導雑音係数)である。

結合線路の場合も伝搬速度は偶姿態と奇姿態ともに上に示した v に与るので前進誘導雑音は存在しない。後進誘導雑音係数 ρ は

$$\rho = \frac{\sqrt{Z_{oe}} - \sqrt{Z_{oo}}}{\sqrt{Z_{oe}} + \sqrt{Z_{oo}}} = \frac{\sqrt{C_{oo}} - \sqrt{C_{oe}}}{\sqrt{C_{oo}} + \sqrt{C_{oe}}} \quad (4.3)$$

により、偶姿態の容量 C_{oe} と奇姿態の容量 C_{oo} から求めることができる。

なお、等角写像法の他にも、務和法、変分法によっても解析されているし⁽⁵⁰⁾⁻⁽⁵³⁾、最近のグリーン関数と積分方程式による方法によつて他の線路と一括して解析することもできる。^{(69),(72)} 以下図4.2にその断面の構造を示す線路について解析法および設計法を示す。

4.2.2 等角写像法による解析⁽⁴⁴⁾⁻⁽⁴⁹⁾

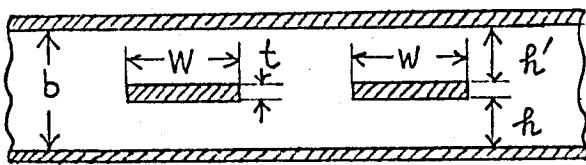


図 4.2

- (1) 線路の厚さ t が無視できるとき
単一線路についてはずつと以前から積分積分により特性インピーダンスの厳密解が

次のように与えられている。⁽⁴⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} Z_0 &= \frac{1}{vC} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{K(k')}{K(k)} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K(k')}{K(k)} (\Omega) \\ k &= \tanh \frac{\pi W}{2b}, \quad k' = \sqrt{1-k^2} = \operatorname{sech} \frac{\pi W}{2b} \end{aligned} \right\} (4.4)$$

K は第一種完全楕円積分である。

結合線路についても同様楕円積分により偶奇モードおよび奇偶モードの特性インピーダンスは

$$Z_{0\{e\}} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K(k'_{\{e\}})}{K(k_{\{e\}})} \quad (\Omega) \quad (\text{添字同順})$$

ここに

$$k_e = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{W}{b}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{W+S}{b}\right)$$

$$k_o = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{W}{b}\right) \coth\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{W+S}{b}\right)$$

$$k'_{\{e\}} = \sqrt{1 - k_{\{e\}}^2} \quad (\text{添字同順})$$

(4.5)

で与えられる。なお、Cahill の最近の文献⁽⁵⁵⁾によれば、完全楕円積分は次のように相対誤差 10^{-5} 以下で近似できる。

$$\frac{K(k')}{K(k)} \approx \pi / \ln\left(2 \cdot \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}}\right)$$

$$\left(0 < \frac{K(k')}{K(k)} \leq 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1 \text{ のとき}\right)$$

$$\approx \frac{1}{\pi} \ln\left(2 \cdot \frac{1 + \sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k'}}\right) \quad (k' = \sqrt{1 - k^2})$$

$$\left(1 \leq \frac{K(k')}{K(k)} < \infty, 0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}\right)$$

(4.6)

(2) 線路の厚さが無視できるとき ($t \ll b$)

どんな場合にも適用できる厳密な解は与えられていない。単一線路の場合、線路の中 W が広くて線路の両側の端効果電界の相互作用を無視できる場合 ($W/(b-t) \geq 0.35$) には、半無限平板の端効果容量 $2C_f$ を等角写像法により求め (これは上の条件の下では厳密に求まる)、これと理想的な平行板容量との和によって線路の容量を求めると、特性インピーダンスは

$$Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \frac{1}{4 \frac{W/b}{1-t/b} + 4 \frac{C_f}{\epsilon}} \quad (\Omega)$$

(4.7)

$$\text{ここに} \quad \frac{C_f'}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2}{1 - \frac{t}{b}} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{b}} + 1 \right) - \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{b}} - 1 \right) \ln \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{t}{b}\right)^2 - 1} \right) \right\}$$

で与えられる。⁽⁴⁵⁾ W が小さくなるに従って不正確となるが、 $W/(b-t) = 0.35$ の時で誤差は 7.2% という事である。

結合線路の場合には、同様に線路の中が広いとき ($\frac{W}{b}/(1 - \frac{t}{b}) \geq 0.35$) には、各状態での端効果容量を用いて

$$\begin{aligned} Z_{0f_0} &= \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{C_{0f_0}/\varepsilon} \quad (\Omega) \\ \text{ここに} \quad C_{0f_0}/\varepsilon &= 4 \frac{\frac{W}{b}}{1 - \frac{t}{b}} + 2 \frac{C_f'}{\varepsilon} + 2 \frac{C_{f_0}'}{\varepsilon} \quad (\text{流路同順}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{C_{0f_0}/\varepsilon}} \right\} (4.8)$$

と表わせる ($C_{f_0}' > C_f' > C_{fe}$)。

この各状態の端効果容量は Cohn により $t=0$ の場合に対しては等角写像法により厳密解が与えられており、⁽⁴⁶⁾ $t \neq 0$ の場合には同じく Cohn により近似的に与えられていたが、⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾ 後に Gestinger により、⁽⁴⁹⁾ 等角写像法で $t \neq 0$ の場合にも厳密な解が導かれ、 Γ の形で与えられている (図 4.4, 4.5 に示す)。

4.2.3 その他の解析法

変分法により Guckel は、⁽⁵⁰⁾ 非対称 ($b \neq b'$) で $t \neq 0$ の場合について、単一線路の特性インピーダンスと損失を計算しているし、殆んど同じ頃と同じく変分法により Duncan は、⁽⁵¹⁾ $t=0$ の場合の結合線路の特性インピーダンスも計算している。

また緩和法によって Green は、⁽⁵³⁾ $t \neq 0$ で側壁を有する対称な線路の特性インピーダンスを求め、また Schneider は、⁽⁵²⁾ 同様の線路の特性インピーダンスと損失を緩和法で計算している。

また、McCary は、⁽⁵⁴⁾ 結合線路の結合係数をストリップ厚の厚さが無視できる場合について、非対称線路の場合を対称線路の楕円積分による結果の式 (4.5) より結合係数が小さいとして粗い近似を行うことによつて、次のように近似的に求められているが誤差は 25% 以下とされている。

$$k_c = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}} \quad \left(= \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} & \xrightarrow{h' \leq W+S} \frac{\exp\left\{-2\pi S / (h+h'+2\sqrt{hh'})\right\}}{\frac{1}{4}\pi \frac{W}{h} \left(1 + \frac{h}{h'}\right) + \ln 4} \\ & \xrightarrow{h' > W+S} \frac{\exp\left\{-2\pi S / (h+W+S+2\sqrt{h(W+S)})\right\}}{\frac{1}{4}\pi \frac{W}{h} \left(1 + \frac{h}{h'}\right) + \ln 4} \end{aligned} \right\} (4.9)$$

以上のように、対称線路の場合には $h=0$ の場合には楕円積分により、 $h \neq 0$ の場合には $W/b / (1 - \frac{h}{b}) \geq 0.35$ の時には端効果容量により、厳密な結果が得られているのでこれを利用すればよい。 $h \neq 0$ で $\frac{W}{b} / (1 - \frac{h}{b}) < 0.35$ の場合や非対称線路の場合には後に埋め込まれたマイクロストリップ線路のところで示すグリ-2 関数と積分方程式による方法を用いなければならない。

4.2.4 設計法

ストリップ導体の厚さを無視できる場合には、楕円積分を用いて解析結果より得られる

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{b} &= \frac{2}{\pi} \tanh^{-1} \sqrt{k_e k_o} \\ \frac{S}{b} &= \frac{2}{\pi} \tanh^{-1} \left(\frac{1 - k_o}{1 - k_e} \sqrt{\frac{k_e}{k_o}} \right) \end{aligned} \right\} (4.10)$$

なる関係^(4b)を用いて次のように特性インピーダンス Z_0 ($Z_0 = \sqrt{Z_{0e} Z_{0o}}$)、結合係数 ρ ($\rho = (Z_{0e} - Z_{0o}) / (2Z_0 + Z_{0e} + Z_{0o})$) とから幾何学的寸法 $\frac{W}{b}$, $\frac{S}{b}$ を求める事ができる。

各導体の特性インピーダンスは Z_0 と ρ により

$$\left. \begin{aligned} Z_{0e} &= \frac{1 + \rho}{1 - \rho} Z_0 \\ Z_{0o} &= \frac{1 - \rho}{1 + \rho} Z_0 \end{aligned} \right\} (4.11)$$

と表わせるから、この式と式(4.5)より $\frac{K(k_e')}{K(k_e)}$, $\frac{K(k_0')}{K(k_0)}$ が求められる。 $\frac{K(k')}{K(k)}$ 対 $\sin^{-1}k$ のグラフ ($\sin^{-1}k + \sin^{-1}k' = 90^\circ$) が文献(28)の図6に与えられているので、これにより k_e , k_0 を求め、

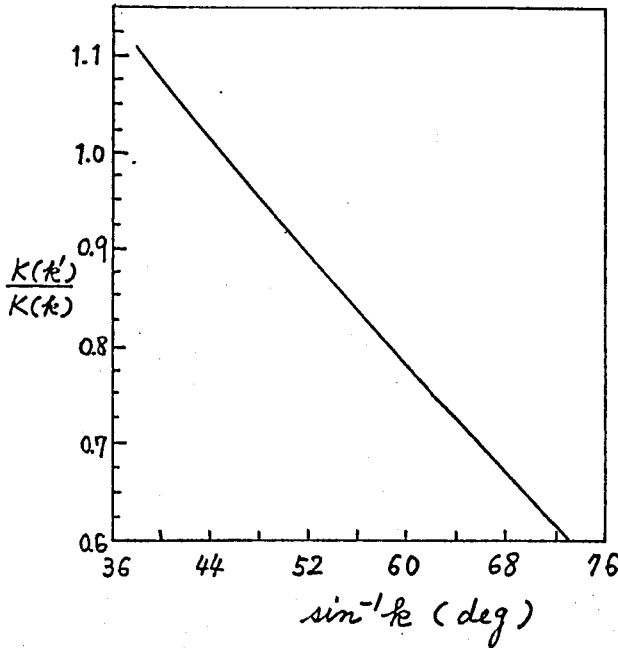


図 4.3

式(4.10)より $\frac{W}{b}$, $\frac{S}{b}$ を計算すればよい。このグラフを図4.3に示しておく。

また、式(4.5), (4.6) から k_0 , k_e について解くことにより得られる式(4.12)を用いて、 z_{0e} , z_{0o} より k_0 , k_e を求め、式(4.10)より $\frac{W}{b}$, $\frac{S}{b}$ を求める事もできる。⁽²⁸⁾ 精度は楕円積分によるのと比べても相対誤差は 10^{-5} 以下である。

$$\left. \begin{aligned}
 k_e &\cong \begin{cases} \tanh^2 x_e & (z_{0e} \leq \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ のとき}) \\ \operatorname{sech} y_e \sqrt{1 + \tanh^2 y_e} & (z_{0e} \geq \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ のとき}) \end{cases} \\
 k_0 &\cong \begin{cases} \tanh^2 x_0 & (z_{0o} \leq \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ のとき}) \\ \operatorname{sech} y_0 \sqrt{1 + \tanh^2 y_0} & (z_{0o} \geq \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ のとき}) \end{cases}
 \end{aligned} \right\} (4.12)$$

ここに

$$x_{j|e} = \frac{15\pi^2}{\sqrt{\epsilon_r} z_{0j|e}} - \ln \sqrt{2}$$

$$y_{j|e} = \frac{\sqrt{\epsilon_r} z_{0j|e}}{60} - \ln \sqrt{2}$$

次に、端効果容量による解析結果を用いて次のように設計する事もできる。⁽⁴⁸⁾ $t=0$ のときの端効果容量は C_{fo} により⁽⁴⁶⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_f'}{\epsilon} &= \frac{2}{\pi} \ln 2 \\ \frac{C_{fe}'}{\epsilon} &= \frac{s}{b} - \frac{2}{\pi} \ln \left(\cosh \frac{\pi s}{2b} \right) \\ \frac{C_{fo}'}{\epsilon} &= \frac{s}{b} - \frac{2}{\pi} \ln \left(\sinh \frac{\pi s}{2b} \right) \end{aligned} \right\} (4.13)$$

で与えられている。

式(4.8)より

$$\frac{\Delta C}{\epsilon} = \frac{C_{fo}'}{\epsilon} - \frac{C_{fe}'}{\epsilon} = \frac{60\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \left(\frac{1}{z_{0o}} - \frac{1}{z_{0e}} \right) = \frac{60\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \frac{4\beta}{1-\beta^2} \frac{1}{z_0} \quad (4.14)$$

が得られる。式(4.13)より $\frac{\Delta C}{\epsilon}$ は

$$\frac{\Delta C}{\epsilon} = \frac{C_{fo}'}{\epsilon} - \frac{C_{fe}'}{\epsilon} = \frac{2}{\pi} \ln \left(\coth \frac{\pi s}{2b} \right) \quad (4.15)$$

であるから、これに式(4.14)を代入し $\frac{s}{b}$ について解けば

$$\begin{aligned} \frac{s}{b} &= \frac{2}{\pi} \coth^{-1} \left\{ \exp \left(\frac{30\pi^2}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{4\beta}{1-\beta^2} \frac{1}{z_0} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \ln \left\{ \coth \left(\frac{15\pi^2}{\sqrt{\epsilon_r} z_0} \frac{4\beta}{1-\beta^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

さらに式(4.8)の z_{0e} の式で $t=0$ と置いたものに、式(4.13)を代入して $\frac{W}{b}$ について解けば

$$\frac{W}{b} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r} z_0} \frac{1-\beta}{1+\beta} - \frac{s}{2b} + \frac{1}{\pi} \left\{ \ln \left(\cosh \frac{\pi s}{2b} \right) - \ln 2 \right\} \quad (4.17)$$

とわかるので、式(4.16), (4.17) により z_0, β を与えて $\frac{s}{b}, \frac{W}{b}$ を設計する事ができる。

ストリップ導体の厚さ t が無視できるときも次のようにして設計できる。与えられた z_0, β とかう式(4.14)により $\frac{\Delta C}{\epsilon}$ を

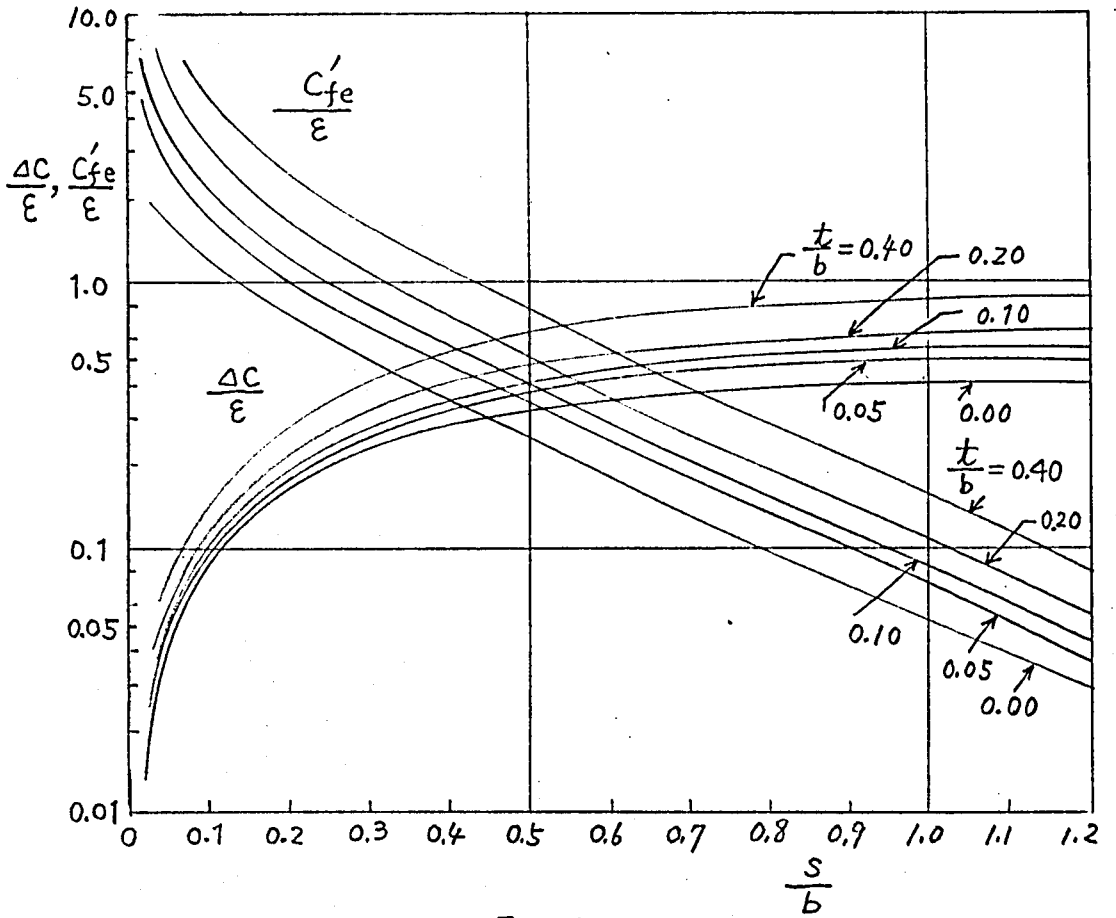


图 4.4

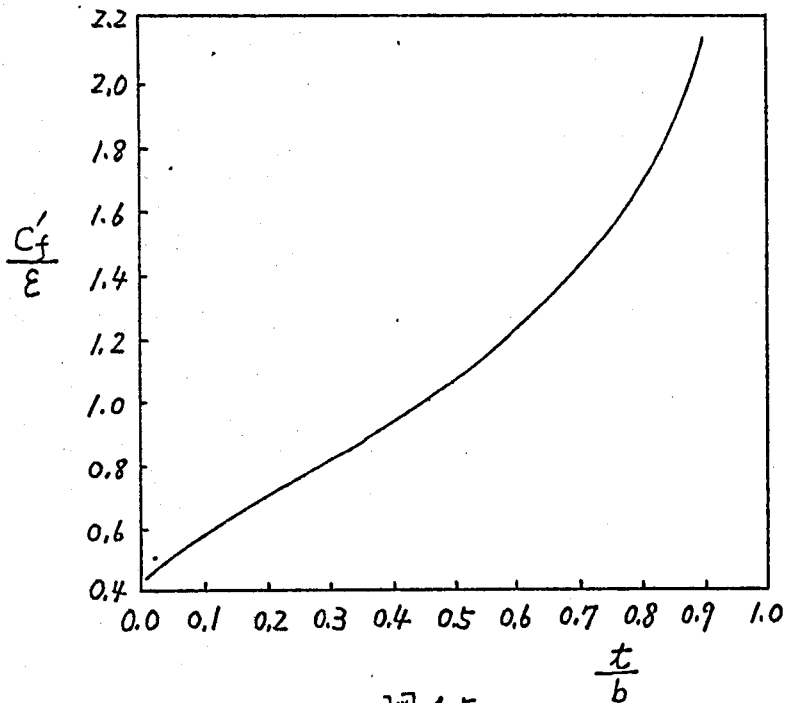


图 4.5

計算し、 b と w を適当に選んで図4.4の $\frac{\Delta C}{\epsilon}$ の曲線より対応する $\frac{S}{b}$ を決定する。そして同図より $\frac{C'_{fe}}{\epsilon}$ が求まり、図4.5より $\frac{C'_f}{\epsilon}$ が求まるので、 $\frac{W}{b}$ は式(4.8)より

$$\frac{W}{b} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(\frac{C_{oe}}{2\epsilon} - \frac{C'_{fe}}{\epsilon} - \frac{C'_f}{\epsilon} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{W}{b}} \right\} (4.18)$$

ここに

$$\frac{C_{oe}}{\epsilon} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \frac{1-p}{1+p} \cdot \frac{1}{z_0}$$

で与えられ設計は完成する。なお、 $\frac{\Delta C}{\epsilon}$ 、 $\frac{C'_{fe}}{\epsilon}$ 、 $\frac{C'_f}{\epsilon}$ の変化を示す図4.4、4.5は Grestinger の文献⁽⁴⁹⁾の図3、5を引用したものである。

4.3 マイクロストリップ線路

4.3.1 はじめに

マイクロストリップ線路の研究もかなり古くから行われているが、⁽⁵⁶⁾媒質が基板の誘電体と空気の二重層をなしている均質でないため、材料的な構造は簡単にもかかわらず、その電気的特性の厳密な解析は最近まで困難であった。このように媒質が不均質の場合には無損失線路を仮定しても厳密には TEM 状態の伝搬とはならないのであるが、線路の断面の寸法が使用波長に比較して十分に小さいときには、基本モードは TEM 波に近いことが知られており、⁽⁴³⁾以下に示す解析法もすべて TEM 近似を採用している。

媒質が均質とした場合の解析は等角写像法により厳密な解析が古くから知られ、⁽⁴⁴⁾またこれを近似したものが得られていたが、^{(56),(57)}媒質が二重層である事を初めて考慮に入れて変形等角写像法により解析したのが Wheeler⁽⁵⁸⁾であり、実効充填率、実効比誘電率も便つて特性インピーダンスの近似式を導いた。導体の厚さが有限の場合には導体中を補正して実効中を使用する。この結果は実験ともかなりよく一致することも Gaulton 等によって確かめられている。⁽⁸⁴⁾

線和法によつては単一線路の場合に, Green⁽⁵³⁾が線路の厚さが無視できる場合について, さらに Stinelkelfer⁽⁵⁹⁾は厚さも考慮して計算している。また山下は変分法を用いて厚さ $t=0$ の場合を解析した。⁽⁶⁰⁾ t が有限で線路の中 W に比して十分小さい場合には, 無限に薄いストリップ導体二枚を向隔 t で置いたもので近似している。さらに山下は誘電体が三層でしゃへい板をもつ場合にも拡張した。⁽⁶¹⁾

グリーン関数と積分方程式による解析法は, 導体表面を細片に分割してそれ等の細片の電荷についての積分方程式を解く方法で, 細分割法とも呼ぶ事ができると思われるが,⁽⁷²⁾ それ自身をれ程新しいものでもなく, Crystalによつて(1964-06)⁽⁶²⁾, 二枚のシールド板間に置かれた円筒導体の場合について適用され, また Brooke等によつて(1967-06)⁽⁶³⁾⁽⁶⁴⁾, インダクタンスを計算するのにも用いられている。

マイクロストリップ線路の解析に盛んに用いられる様になつたのは1968年以後である。Silvesterの発表(1968-01)⁽⁶⁵⁾が一番早く, グリーン関数を多重影線法によつて求め, 導体表面を各細片内では電荷密度が一定とみられるように十分細かく細片に分割し, その各細片の電荷に関する積分方程式をマトリクスで近似して解くことによつて全電荷したがつて容量を求めている。導体の厚さも考慮する事が容易であり, Kauppの単一線路の実験結果⁽⁶⁶⁾ともよく一致する事が確かめられている。

このSilvesterの方法を結合線路の場合に適用する事によつて, 誘導性係数等を計算しKauppの結合線路の実験結果⁽⁶⁷⁾とよく一致する事を, 筆者等が示した(1968-10)⁽⁶⁶⁾。

Kammler(1968-11)⁽⁶⁷⁾は, 導体の厚さが無視できる多導体しゃへい型ストリップ線路を解析した。またグリーン関数によつて多重影線法で求め計算機にかけ易い形に変形している。各ストリップ導体を $M+1$ 個の細片に分割し, 各細片の電荷密度を直線に近似し, また新たに M 個の試験点を N 個の各導体上に選び, その試験点での電位が境界条件に最もよく合う様に, 最小自乗法により $N(M+1)$ 個の電荷密度を求める。さらに分割点

の間隙は等分割に可する方法と揃真で細かく中央で粗く可る \sin 形にわけ可する方法とを述べており、また縁取法に比べて計算時間や誤差の英で可ぐれている事を明らかにしている。

Bryant 等は (1968-12)⁽⁶⁸⁾, dielectric Green's function を用いて基板の誘電体と空気との境界における電界の不連続を表わし, Silvester と同様積分方程式を解くことにより, 結合線路の場合を解析している。唯 Bryant 等の方法では等体の厚さが考慮に入れられていない。

Hill 等は (1969-05)⁽⁶⁹⁾, その断面が多角形である様は任意の導体からなる埋め込まれたマイクロストリップ線路の場合を解析している。後に示すようにこの特別な場合として λ へい型ストリップ線路を含んでいる。グリーン関数は多重映像法により求め、やはり等体表面を細分可するが, Silvester の方法と異なる英は, 細片の電位をその中央の電位としている事である (Silvester では細片の各夾の電位の平均をその細片の電位としている)。

またドイツの Clemm も (1969-05)⁽⁷⁰⁾, Silvester の方法とよく似た方法により単一のマイクロストリップ線路の容量を求めている。Chestnut の方法は (1969-10)⁽⁹⁸⁾, Kammler の方法を改良したものであり, 厚さを考慮しガウスの公式を用いて積分を有限級数の和に置き換えて積分方程式を解いている。Guston 等は (1969-12)⁽⁷¹⁾, Silvester の方法により計算し, 等体の厚さにより線路の特性がどのように変化可るかを明らかにしている。

Weeks は (1970-01)⁽⁷²⁾, Kammler と Hill 等の結果をまとめ拡張した。断面が多角形で近似可る任意のマイクロストリップ線路, 埋め込まれたマイクロストリップ線路, λ へい型ストリップ線路を全く同様に取り扱可る。グリーン関数をどのようにして求めたかは触れていないが, 後に示すように Silvester (マイクロストリップ線路の場合) および Hill 等 (埋め込まれたマイクロストリップ線路, λ へい型ストリップ線路の場合) の示したグリーン関数と等価のものである。電荷分布は折れ線に近似 (Silvester

等は階段で近似)し、積分方程式を解くのは Kammler と同様の手法によっている。

以上が主な流れであると思われるが、以上の他にも、山下等は (1969-06~1970-06)⁽⁷³⁾⁻⁽⁷⁶⁾, Silvester の方法を拡張して三層の誘電体層として薄い導体を持つ層の線路を解析している(山下等の文献⁽⁷³⁾⁽⁷⁴⁾では筆者等の文献⁽⁶⁵⁾を引用している)。この様な構造では多重映像法によってグリーン関数を導出するのは大変困難であるので、フーリエ級数展開によるグリーン関数を用いている。

また島崎等は (1971-02)⁽⁷⁷⁾, 電荷分布の形に通した数値積分公式を採用して積分方程式自身を高精度の近似で解いており、精度の高い電荷分布が得られているが、しかしこの方法ではストリップ導体の厚さが無視できる場合に限られている。

その他、Judd 等 (1970-02)⁽⁷⁹⁾ の *ortho-normal block analysis* による解析的方法、Chang 等の (1970-02~1971-06)⁽⁷⁸⁾⁽⁷⁹⁾, 一般的に N 層の誘電体層からなる多導体系の変分法による解析法、Bräckelmann の (1971-03)⁽⁸⁰⁾, 埋め込まれた結合マイクロストリップ線路を Hill や Weeks と同様のやり方で解析したもの、Ramadan 等 (1971-06)⁽⁸¹⁾ による厚さが無視できる場合を変分法によって解析したもの、Bergandtz 等 (1972-04)⁽⁸²⁾ の、厚さを考慮した場合の結合線路を共通の境界におけるフーリエ級数展開を用いて解析したもの、Pregla (1972-11)⁽⁸³⁾ の Wheeler の等角映像法を結合回路の場合に拡張して解析法(導体の厚さは考慮されていない)、など多くの研究発表がある。なお、線路の損失については本論文では考察しないが、これに因してはいくつかの文献⁽⁷⁹⁾⁻⁽⁸²⁾がある。

以下 Silvester のグリーン関数と積分方程式による方法を結合線路の場合に拡張する事によって解析した計算結果を示し、結合線路の特性が導体の厚さなどの線路の断面の幾何学的寸法と基板の誘電体の比誘電率によってどのように変化するかを明らかにし、実験結果⁽⁸⁴⁾ともよく一致する事を示す。

4.3.2 実効比誘電率による表現

いま、媒質がすべて空気である、可なり誘電体の比誘電率の ϵ_r が 1 であると仮定すると、偶姿態、奇姿態の伝搬速度は真空中の光速と等しくなり

$$v_{oe} \Big|_{\epsilon_r=1} = v_{oo} \Big|_{\epsilon_r=1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = v_0 \quad (4.19)$$

が得られた。これより L, L_m と $\epsilon_r=1$ の時の両姿態の容量 C_{eo}, C_{oo} で表わせば

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L & L_m \\ L_m & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -C_m \\ -C_m & C \end{bmatrix} \Big|_{\epsilon_r=1} &= \begin{bmatrix} L & L_m \\ L_m & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{C_{oo}+C_{eo}}{2} & -\frac{C_{oo}-C_{eo}}{2} \\ -\frac{C_{oo}-C_{eo}}{2} & \frac{C_{oo}+C_{eo}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{v_0^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.20)$$

より

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2v_0^2} \left(\frac{1}{C_{eo}} + \frac{1}{C_{oo}} \right) \\ L_m &= \frac{1}{2v_0^2} \left(\frac{1}{C_{eo}} - \frac{1}{C_{oo}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

とわかるから、これを前章の式(3.32), (3.33)に代入すれば、偶姿態と奇姿態の特性インピーダンスと伝搬速度は

$$\left. \begin{aligned} z_{oe} &= \frac{1}{v_0 \sqrt{\epsilon_{ree}} C_{eo}} \\ z_{oo} &= \frac{1}{v_0 \sqrt{\epsilon_{reo}} C_{oo}} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{oe} &= \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_{ree}}} \\ v_{oo} &= \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_{reo}}} \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

と表わることが出来る。ここに

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ree} &= \frac{C_e}{C_{e0}} \\ \epsilon_{reo} &= \frac{C_o}{C_{o0}} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

はそれぞれ偶定数, 奇定数の実効比誘電率であり, マイクロストリップ線路では $\epsilon_{ree} > \epsilon_{reo}$ である。⁽⁶⁶⁾

このように, 両定数の特性インピーダンスと伝搬速度, したがって結合線路の特性インピーダンス (式(3.38)) や誘導批音係数 (式(3.39), (3.42)) が $\epsilon_r = 1$ のときの両定数の容量と実効比誘電率とによって表わされる。

$$Z_0 = \frac{1}{v_0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{ree} \epsilon_{reo}} C_{e0} C_{o0}} \quad (4.25)$$

$$\rho = \frac{\sqrt{\sqrt{\epsilon_{reo} C_{o0}} - \sqrt{\sqrt{\epsilon_{ree} C_{e0}}}}}{\sqrt{\sqrt{\epsilon_{reo} C_{o0}} + \sqrt{\sqrt{\epsilon_{ree} C_{e0}}}}} \quad (4.26)$$

$$K_f = -\frac{1-\rho^2}{2v_0^2} \left(\sqrt{\epsilon_{ree}} - \sqrt{\epsilon_{reo}} \right) \quad (4.27)$$

4.3.3 グリーン関数と積分方程式による解析法

Silvester のグリーン関数と積分方程式による方法を図 4.6 に示すような結合線路の場合に拡張する事によって解析を行う。勿論結合線路の特別な場合として単一线路の場合を含んでいる。

導体表面を z 軸方向に無限に長い線電荷の集まりと考える。導体表面上の任意の点 A(x₀, y₀) に単位線電荷を置いたとき任意の点 B(x, y) に生じる電位, すなわちグリーン関数を G(B|A) とすれば, B における電位は各線電荷による電位を導体全表面に対して積分して

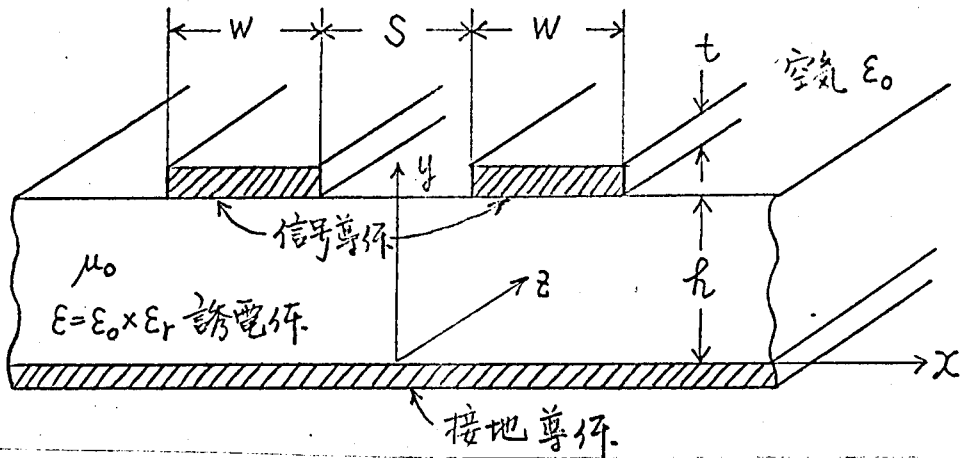


図 4.6

$$V(x, y) = \int G(B|A) \sigma(A) dA \quad (4.28)$$

と表わせる。ここに $\sigma(A)$ は長 A における電荷密度である。したがって電位 V とグリーン関数 G が既知ならば、式 (4.28) は導体表面上の電荷密度 σ に関する G を核関数とする第一種フレドホルム形の積分方程式であって、つぎのようにマトリックスで近似して数値的に解くことができる。

1) 電荷のある導体表面を N 個の細片 (中 W_k) に分割すれば、式 (4.28) は

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^N \int_{W_k} G(B|A) \sigma(A) dA \quad (4.29)$$

となる。 W_k が十分小さく細片内では電荷が密度 σ_k で一様に分布しているものと近似でき、また細片の電位がその細片上の各点の電位の平均値で近似することができるならば、任意の j 番目の細片の電位は

$$V_j = \sum_{k=1}^N \frac{1}{W_j} \int_{W_j} \left\{ \int_{W_k} G(B|A) \sigma_k dA \right\} dB = \sum_{k=1}^N P_{j,k} \rho_k \quad (4.30)$$

($j=1, 2, \dots, N$; $\rho_k = \sigma_k W_k$)

ここに

$$P_{jik} = \frac{1}{w_j w_k} \int_{w_j} \int_{w_k} G(B|A) dA dB = P_{kij} \quad (4.31)$$

となる。 P_{jik} はマクスウェルの電位係数であり、式(4.30)はこの電位係数を係数とする各細片の電荷 q_k についての N 元連立一次方程式を構成する。導体の電位が単位電位にあると仮定してこれを解けば、全電荷量

$$Q = \sum_{k=1}^N q_k \quad (4.32)$$

より直ちに容量が求まる。

4.3.4 結合マイクロストリップ線路のグリーン関数

電磁気学の基礎理論より明らかになる様に、図4.7(a)の如く誘電率 ϵ_1 と ϵ_2 の二つの誘電体が相対していて ϵ_1 の誘電体中に紙面と直角方向に無限に長い線電荷 ρ がある場合には、その境界における境界条件は電界の接線成分と誘電率密度の法線成分とが夫々相等しい事である。

ϵ_1 の誘電体中の電界に対しては図4.7(b)を、そして ϵ_2 の誘電体中の電界に対しては同図(c)を考へれば、境界条件

$$E_{1t} = \frac{(\rho + \rho')}{2\pi\epsilon_1 r} \sin\theta = E_{2t} = \frac{\rho'' \sin\theta}{2\pi\epsilon_2 r}$$

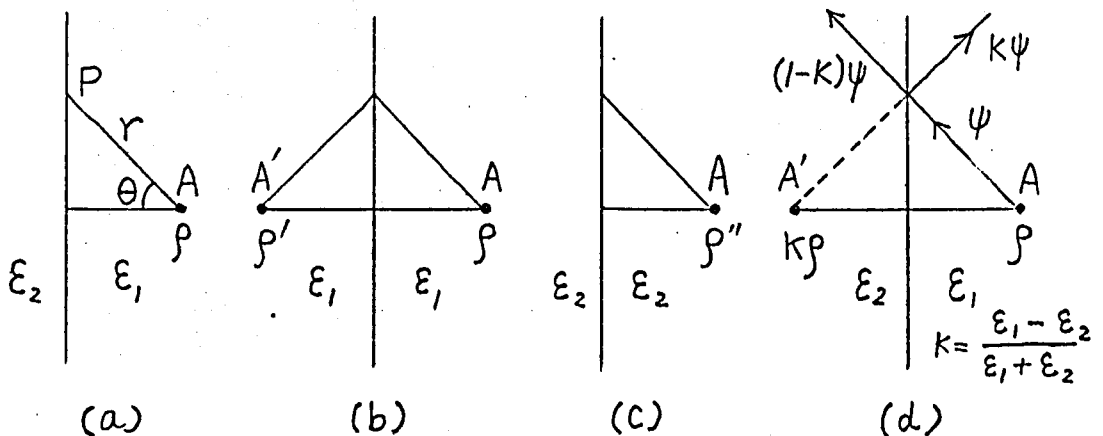


図 4.7

$$D_{10z} = \frac{(\rho - \rho')}{2\pi r} \cos\theta = D_{20z} = \frac{\rho'' \cos\theta}{2\pi r}$$

より

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= k\rho \\ \rho'' &= (1-k)\rho \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

$$\text{ここに } k = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad (4.34)$$

が得られる。

以上の事から同図(d)に示す様に ϵ_1 の誘電体中の線電荷 ρ により生じた誘電束が境界面において反射係数 k で反射され、透射係数 $(1-k)$ で ϵ_2 の誘電体中に透射されると考へる事によつて以下に示す多重影像を考へる事ができる。⁽⁶⁵⁾

図 4.8 に示すように ϵ_1 の誘電体中に ϵ_2 の誘電体がサドイッチ状にはさまれた三層からなる場合を考へる。多重影像を上の方法で考へる事によつて、 ϵ_1 中の点 $(0, y')$ にある線電荷 ρ による第一及び第三領域の任意の点の電位は

第一領域 ($y \geq h$):

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{-\rho}{4\pi\epsilon_1} \ln \left\{ (y-y')^2 + x^2 \right\} - \frac{k\rho}{4\pi\epsilon_1} \ln \left\{ (y+y'-2h)^2 + x^2 \right\} \\ &\quad + \frac{(1-k^2)\rho}{4\pi\epsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n-1} \ln \left\{ (y+y'+2(n-1)h)^2 + x^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

第三領域 ($y \leq -h$):

$$V(x, y) = - \frac{(1-k^2)\rho}{4\pi\epsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} k^{2(n-1)} \ln \left\{ (-y+y'+2(2(n-1))h)^2 + x^2 \right\} \quad (4.36)$$

となる。

さらに点 $(0, -y')$ に線電荷 $-\rho$ も置かれた場合を考へると、第一領域 ($y \geq h$) の任意点における電位は上の式 (4.35), (4.36) より次のようになる。

$$\begin{aligned}
 v(x, y) &= \frac{-\rho}{4\pi\epsilon_1} \ln \left\{ (y-y')^2 + x^2 \right\} - \frac{K\rho}{4\pi\epsilon_1} \ln \left\{ (y+y'-2h)^2 + x^2 \right\} \\
 &+ \frac{(1-K^2)\rho}{4\pi\epsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} K^{2n-1} \ln \left\{ (y+y'+2(n-1)h)^2 + x^2 \right\} \\
 &= -\frac{K\rho}{4\pi\epsilon_1} \ln \frac{(y+y'-2h)^2 + x^2}{(y-y')^2 + x^2} - \frac{(1+K)\rho}{4\pi\epsilon_1} \ln \left\{ (y-y')^2 + x^2 \right\} \\
 &+ \frac{(1-K^2)\rho}{4\pi\epsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} K^{2n-1} \ln \left\{ (y+y'+2(n-1)h)^2 + x^2 \right\} \\
 &= -\frac{K\rho}{4\pi\epsilon_1} \ln \frac{(y+y'-2h)^2 + x^2}{(y-y')^2 + x^2} \\
 &+ \frac{(1-K^2)\rho}{4\pi\epsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} K^{2n-1} \ln \frac{(y+y'+2(n-1)h)^2 + x^2}{(y-y')^2 + x^2}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

結合マイクロストリップ線路の偶姿態および奇姿態の容量を求め
 るためには、図4.9(a),(b)にそれぞれ示してあるように導
 体の影像を考之ればよい。図4.9(c)のように互いに影像の位置
 ($\pm x_k, \pm y_k$; $y_k \geq h$)にある四個の単位線電荷による $x \geq 0$,
 $y \geq h$ なる区域の真 (x, y) におけるグリーン関数は式(4.37)

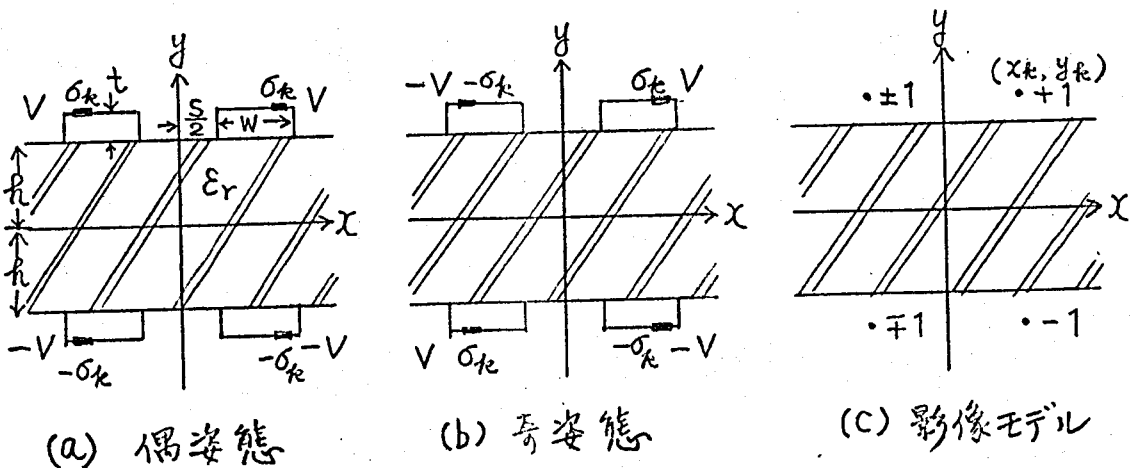


図 4.9

を用いて次のように表わせる ($\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_0$, $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$).

$$G(x, y | x_k, y_k)$$

$$= -\frac{K}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{(x-x_k)^2 + (y+y_k-2h)^2}{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2} \pm \ln \frac{(x+x_k)^2 + (y+y_k-2h)^2}{(x+x_k)^2 + (y-y_k)^2} \right]$$

$$+ \frac{1-K^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \left[\ln \frac{(x-x_k)^2 + (y+y_k+2(n-1)h)^2}{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2} \right. \\ \left. \pm \ln \frac{(x+x_k)^2 + (y+y_k+2(n-1)h)^2}{(x+x_k)^2 + (y-y_k)^2} \right]$$

ここに

$$K = \frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \quad (4.38)$$

はち、この式を变形すると Weeks⁽⁷²⁾ の式(19)になる。

$$\text{式(4.37)} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_1} \left[-\ln \{ (y-y')^2 + x^2 \} - K \ln \{ (y+y'+2h)^2 + x^2 \} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} K^{2n-1} \ln \{ (y+y'+2(n-1)h)^2 + x^2 \} \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} K^{2n+1} \ln \{ (y+y'+2(n-1)h)^2 + x^2 \} \right]$$

これを

$$-\ln \{ (y-y')^2 + x^2 \} = -\sum_{n=0}^{\infty} K^{2n} \ln \{ (y-y'-2n h)^2 + x^2 \} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} K^{2n+1} \ln \{ (y-y'-2(n+1)h)^2 + x^2 \}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} K^{2n-1} \ln \{ (y+y'+2(n-1)h)^2 + x^2 \}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} K^{2n} \ln \{ (y+y'+2(n+1)h)^2 + x^2 \}$$

$$-K \ln \{ (y+y'-2h)^2 + x^2 \} - \sum_{n=1}^{\infty} K^{2n+1} \ln \{ (y+y'+2(n-1)h)^2 + x^2 \}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} K^{2n+1} \ln \{ (y+y'+2(n+1)h)^2 + x^2 \}$$

なる関係が成り立つから

$$\begin{aligned} \text{式(4.37)} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_1} & \left[\sum_{n=0}^{\infty} k^n \ln \frac{(y+y'+2nh)^2+x^2}{(y-y'-2nh)^2+x^2} \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^{\infty} k^{n+1} \ln \frac{(y+y'+2(n+1)h)^2+x^2}{(y-y'-2(n+1)h)^2+x^2} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

となる。これは Weicks の式(19)である ($x \rightarrow x-x'$)。

なお、計算は式(4.37)による方が式(4.39)によるよりも、約2倍速い。なお、式(4.38)で±の符号は偶数態のとき+、奇数態のとき-である。

4.3.5 電位係数

ストリップ導体の表面を図4.10に示すように I, II 面をそれぞれ N_w 個の細片に、そして III, IV 面をそれぞれ N_t 個の細片に分割するものとする。式(4.31)と(4.38)とから、 j 番目と k 番目 ($j \neq k$ としておく) の細片との間の電位係数は、幾何学平均距離 (geometrical mean distance, GMD) を用いて次のように表わすことができる。

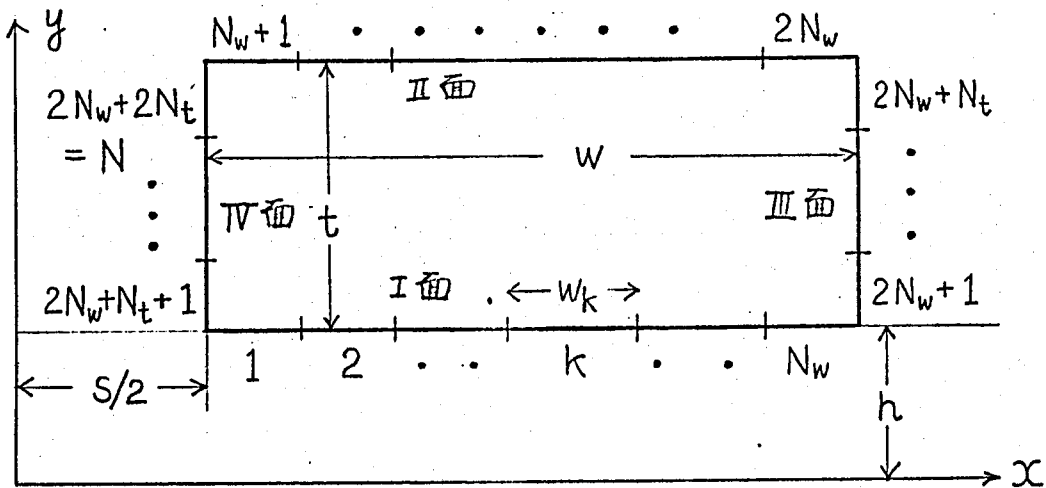


図 4.10

$$P_{j,k} = -\frac{k}{2\pi\epsilon_0} \left[(\ln D_{j,k}(0) - \ln d_{j,k}) \pm (\ln D_{j,k'}(0) - \ln d_{j,k'}) \right] \\ + \frac{1-k^2}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} \left[(\ln D_{j,k}(n) - \ln d_{j,k}) \right. \\ \left. \pm (\ln D_{j,k'}(n) - \ln d_{j,k'}) \right] \quad (4.40)$$

ここで符号 \pm は、+が偶姿態、-が奇姿態の場合を示している。
 $D_{j,k}$, $d_{j,k}$ などは次に示すように k (番目の細片) に対してその
 の影像と j (番目の細片) との間の幾何学的平均距離 (GMD) である。

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{j,k} : k \text{ と } j \text{ の間の GMD} \\ d_{j,k'} : k \text{ の } y \text{ 軸に面する影像と } j \text{ の間の GMD} \\ D_{j,k}(n) : k \text{ の } y = -(n-1) \text{ 軸に面する影像と } j \text{ の間の GMD} \\ D_{j,k'}(n) : k \text{ の } y = -(n-1) \text{ 軸に面する影像の } y \text{ 軸に面する影像と, } j \text{ の間の GMD} \end{array} \right.$$

なお、式 (4.40) は特に $\epsilon_r = 1$ あるいは $k = 0$ の場合には、無限級数の第一項だけでよく次のようになる。

$$P_{j,k} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[(\ln D_{j,k}(1) - \ln d_{j,k}) \pm (\ln D_{j,k'}(1) - \ln d_{j,k'}) \right] \quad (4.41)$$

上で用いた幾何学的平均距離は実際には次式を用いて計算する。

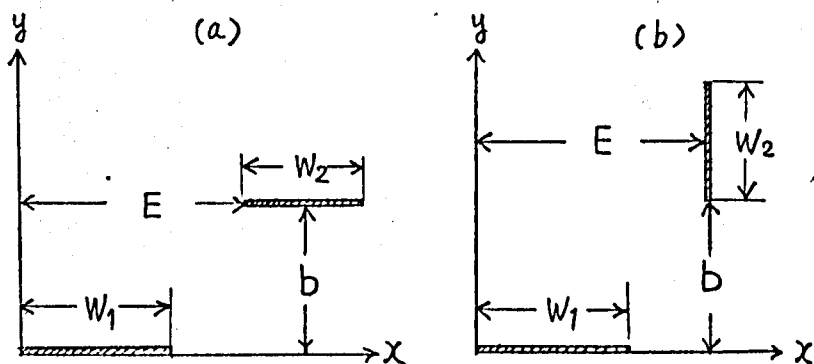


図 4.11

図 4.11 (a), (b) に示すように厚さ 0 の中 w_1, w_2 の二つの細片の間の幾何学的平均距離は

(1) 図 4.11 (a) の場合

$$\begin{aligned} \ln R_{12} &= GH(w_1, w_2, b, E) = \frac{1}{w_1 w_2} \int_0^{w_1} dx_1 \int_E^{E+w_2} dx_2 \ln \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + b^2} \\ &= \frac{1}{2w_1 w_2} FH(x_2 - x_1) \Big|_0^{w_1} \Big|_E^{E+w_2} \\ &= \frac{1}{2w_1 w_2} \left[FH(E+w_2 - w_1) + FH(E) - FH(E+w_2) - FH(E-w_1) \right] \end{aligned}$$

ここに

(4.42)

$$FH(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2bx \tan^{-1} \frac{x}{b} - \frac{x^2 - b^2}{2} \ln(x^2 + b^2)$$

(4.43)

(2) 図 4.11 (b) の場合

$$\begin{aligned} \ln R_{12} &= GV(w_1, w_2, b, E) = \frac{1}{w_1 w_2} \int_{E-w_1}^E dx \int_b^{b+w_2} dy \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2w_1 w_2} FV(x, y) \Big|_{E-w_1}^E \Big|_b^{b+w_2} \\ &= \frac{1}{2w_1 w_2} \left[FV(E, b+w_2) + FV(E-w_1) - FV(E, b) \right. \\ &\quad \left. - FV(E-w_1, b+w_2) \right] \end{aligned}$$

ここに

(4.44)

$$FV(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2) - 3xy + x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} + y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

(4.45)

4.3.6 計算方法

以上の式に基づいて数値計算を行えばよいのであるが、できるだけ精度を落とすことなく計算時間を短縮するために以下の表に留意した。なお、中位の結合線路の偶モードの場合で、線路の間隔 S を 0 とおいて得られた容量を 2 倍すれば、ストリップ幅 W の単一線路の容量が求まることも明らかである。

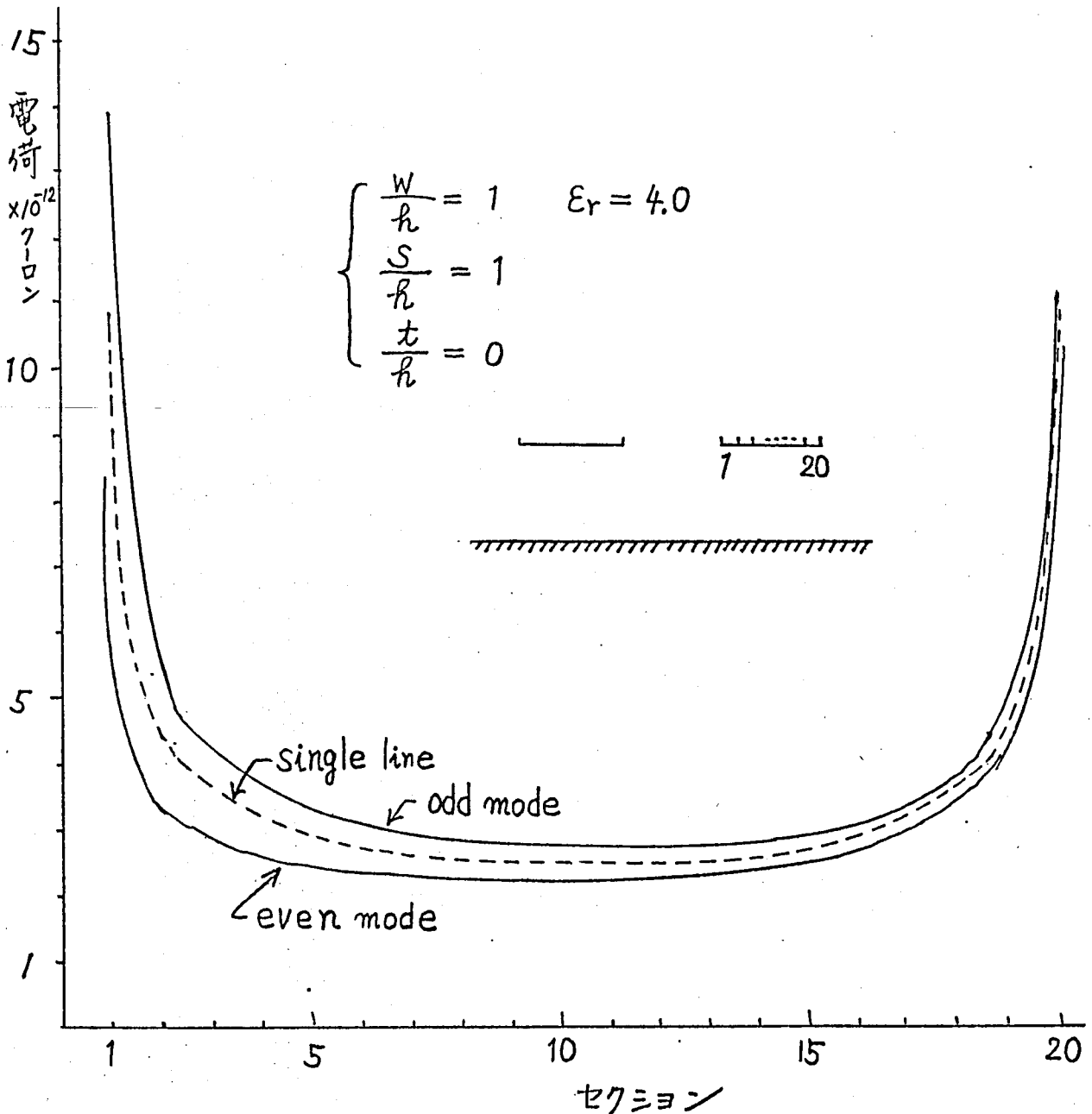


図 4.12

表 4.1

		電荷 ($\times 10^{-12} \text{C}$)	
面	番号	$\epsilon_r = 1$	$\epsilon_r = 5$
I面	1	0.517	2.707
	2	0.520	2.727
	3	0.526	2.770
	4	0.536	2.840
	5	0.551	2.945
	6	0.574	3.105
	7	0.606	3.335
	8	0.668	3.810
	9	0.707	4.040
	10	1.325	9.564
	計	6.530	37.843
II面	11	0.285	0.324
	12	0.288	0.327
	13	0.294	0.334
	14	0.304	0.346
	15	0.318	0.363
	16	0.339	0.389
	17	0.369	0.425
	18	0.424	0.492
	19	0.464	0.542
	20	0.967	1.166
	計	4.052	4.708
III面	21	1.211	2.391
	22	0.618	0.836
	23	0.628	0.875
	24	0.579	0.763
	25	1.001	1.256
	計	4.037	6.121
	計	14.619	48.672
	未知比誘電率	3.3294	

(1) 電荷分布と分割法

原理的には分割数 N を無限大にしたときに真の値が得られるわけであるが、計算時間は大抵 N^2 に比例して大きくなるので、 N は必要最小値に押さえない。そこで電荷がストリップ導体の端に集まることに着目して、次式によって端程細かく細片に分割した（これと似た分割法はインダクタンスを求める際に Brooke 等が行っている⁽⁴⁾）。

I, II 面:

$$\Delta w_j = \frac{A_1}{\left\{ \left| \left(\frac{N_w}{2} - j \right) - d + r(2d+1) \right| + 2 \right\}^\beta}$$

III, IV 面:

$$\Delta t_j = \frac{A_2}{\left\{ \left| \frac{N_t}{2} - j + 1 \right| + 2 \right\}^\beta}$$

(4.46)

ここに A_1 と A_2 は

$$\sum_{j=1}^{N_w} \Delta w_j = W, \quad \sum_{j=1}^{N_t} \Delta t_j = t$$

と定める。

電荷分布の例を図 4.12 および表 4.1 に示してあるが、

これからわかるように電荷は偶巻態では III 面側の端に、そして偶巻態では IV 面側の端に、より集まるので、これに応じて分割するために d と r を用いては偶巻態に対しては 0、奇巻態に対

しては1とする。次に表 4.1 からわかるように、当然のことながら $\epsilon_r=1$ のときでもI面の電荷の方がII面の電荷よりも多く、 $\epsilon_r=5$ になるとII面の電荷は大して増さずI面の電荷は急増する。

一般に容量および実効比誘電率は分割数 N を大きくする程大きくかつて真の値に近づく。その収束状況の一例を表 4.2 に示

表 4.2

$$\left(\frac{W}{h} = 0.5, \frac{S}{h} = 0.5, \frac{t}{h} = 0, \epsilon_r = 5.0, d = 0 \right)$$

(a) $\epsilon_r=1$ のときの容量

N \ B	C _{e0} (pF)					C _{o0} (pF)				
	0	1	2	3	6	0	1	2	3	6
2	14.99	15.04	15.70	15.16	15.26	27.15	27.35	27.59	27.83	28.28
4	15.21	15.26	15.30	15.34	15.39	28.08	28.29	28.48	28.63	28.83
6	15.28	15.33	15.37	15.39	15.41	28.39	28.59	28.75	28.86	28.92
10	15.34	15.38	15.41	15.42	15.42	28.64	28.80	28.91	28.97	28.95
20	15.39	15.41	15.43	15.43	15.42	28.84	28.94	29.00	29.02	28.96
30	15.40	15.42	15.43	15.43	15.42	28.90	28.98	29.01	29.02	28.97
50	15.41	15.43	15.43	15.43	15.42	28.95	29.00	29.02	29.03	28.97
100	15.42	15.43	15.43	15.43	15.42	29.00	29.02	29.03	29.03	28.97

(b) 実効比誘電率

N \ B	E _{ree}					E _{reo}				
	0	1	2	3	6	0	1	2	3	6
2	3.606	3.607	3.609	3.611	3.615	3.065	3.064	3.063	3.062	3.062
4	3.615	3.617	3.619	3.620	3.623	3.066	3.066	3.066	3.066	3.067
6	3.618	3.620	3.622	3.623	3.624	3.066	3.066	3.066	3.066	3.067
8	3.620	3.621	3.623	3.624	3.624	3.066	3.066	3.066	3.067	3.067
10	3.621	3.622	3.623	3.624	3.624	3.066	3.066	3.067	3.067	3.067
12	3.621	3.623	3.624	3.624	3.624	3.066	3.067	3.067	3.067	3.067
20	3.622	3.624	3.624	3.625	3.624	3.067	3.067	3.067	3.067	3.067

してあるが、実効比誘電率は分割数有限の影響が分母分子で相殺されるので、容量そのものよりほかに収束が速いことがわかる。計算時間には ϵ_r が大きくなるに従って大きくなるが、 $\epsilon_r=1$ の時は P_{jk} の計算で無限級数の第一項のみとるので、大変速い。従ってやはり大きき N で $\epsilon_r=1$ の時の容量を計算し、小さい N に対して実効比誘電率を計算するのが、能率的である。分割方法は一様分割 ($\beta=0$) より端程細かく分割した方が収束が速いことはこの表4.2より明らかである。やはり大きき N をとり大差精度よく計算するには $\beta=3$ が適当と思われるが、 N を10以下に選ぶのであれば $\beta=6$ が良い。

(2) 幾何学的平均距離と中心間距離

電位係数 P_{jk} の各項の係数を構成する幾何学的平均距離は、細片の中に比べてそれ等の間の距離がやはり大ききになると、中心間距離で置き換えて十分

である。

表 4.3

幾何学的平均距離と中心間距離がどの程度異なるかの一例を表4.3に示しておく。この表からわかるように、 $E+b > 20(W_1+W_2)$ であれば GH の場合の相対誤差は 10^{-4} 以下、 GV の場合 10^{-5} 以下である。 N がやはり大きければ

$(W_1=1)$ W_2	E	b	$\frac{E+b}{W_1+W_2}$	GH-中心間距離	GV-中心間距離
				GH	GV
0.1	0	0.2	1.0	-0.13×10^{-7}	-0.51×10^{-4}
"	"	0.4	2.0	-0.56×10^{-2}	-0.11×10^{-4}
"	"	0.6	3.0	-0.45×10^{-2}	-0.51×10^{-5}
"	"	0.8	4.0	-0.38×10^{-2}	-0.47×10^{-5}
"	"	2	10.0	0.30×10^{-3}	0.32×10^{-7}
"	"	3	15.0	0.64×10^{-4}	0.41×10^{-8}
"	"	4	20.0	0.38×10^{-4}	0.50×10^{-9}
"	"	5	25.0	0.21×10^{-4}	0.30×10^{-9}
"	0.2	0	1.0	0.14×10^{-7}	-0.10×10^{-3}
"	1	1	10.0	0.12×10^{-5}	-0.31×10^{-6}
"	2	2	20.0	-0.51×10^{-7}	-0.22×10^{-7}
0.5	0	0.2	0.33	-0.23×10^{-1}	0.61×10^{-7}
"	"	0.4	0.67	-0.43×10^{-1}	0.64×10^{-1}
"	"	0.6	1.0	-0.49×10^{-1}	0.80×10^{-1}
"	"	0.8	1.33	-0.77×10^{-1}	0.22
"	"	2	3.3	0.37×10^{-2}	0.24×10^{-2}
"	"	4	6.7	0.48×10^{-3}	-0.38×10^{-3}
"	"	6	10.0	0.17×10^{-3}	-0.14×10^{-3}
"	"	8	13.3	0.81×10^{-4}	-0.70×10^{-4}
"	0.5	0	0.83	0.61×10^{-1}	-0.32×10^{-1}
"	3	3	10.0	-0.24×10^{-4}	-0.33×10^{-4}
"	6	6	20.0	-0.22×10^{-5}	-0.30×10^{-5}

は電位係数の級数の計算で、 $n=3$ 位でもう上の条件を満足する。この級数は交番級数 ($-1 < k \leq 0$) であり収束する。級数は相対誤差 10^{-6} 以下になるように計算している。 $\epsilon_r = 1$ のときは級数の第一項のみでよく、 $\epsilon_r = 5$ のときは $n = 40 \sim 50$ の程度である。

(3) 計算精度と外挿法

分割数無限大のとき真の値が得られるわけであるが、比較的小さい数個の N に対する計算値から外挿法によって高精度に求めることもできる⁽⁴⁴⁾。

収束の状況が $C_\infty = C_N + aN^{-\varphi}$ で表わされるものとするば

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_3}{N_4} \quad (4.47)$$

を満する 4 個の N に対する容量の計算値より

$$C_\infty = C_{N_4} + \frac{(C_{N_4} - C_{N_3})(C_{N_4} - C_{N_2})}{(C_{N_2} - C_{N_1})(C_{N_4} - C_{N_3})} \quad (4.48)$$

によって C_∞ を計算することができる。

一例として表 4.2 で C_{e0} , $\beta = 0$ の場合をとると、 $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, $N_3 = 10$, $N_4 = 20$ で、 $C_{N_1} = 14.994$, $C_{N_2} = 15.210$, $C_{N_3} = 15.341$, $C_{N_4} = 15.387$ (表 4.2 より一桁詳しく示してある) であるから、式(4.48)より計算すると、 $C_\infty = 15.429$ が得られる。なお $N = 100$ のとき $C_{e0} = 15.424$ である。計算は 4 回やらねばならないが、外挿法による方が計算時間ははるかに小さい。実用上は 3 桁程度求れば十分であるので、実際にこの外挿法による計算は行っていないが、特に高精度に求めたいときには有効である。

なお、式(4.25)~(4.27)より明らかになる様に、特性インピーダンスは $\epsilon_r = 1$ のときの容量におよぼす実効比誘電率の分割は有限の影響を受けるが、 β の方は偶奇態および奇奇態に対する分割数有限の影響がほぼ同程度であるため相殺されて殆んど影響さ

れず、 N が小でも精度よく計算できるし、 K_f は容量そのものの影響は全然うけない。

(4) 計算時間

以上のように実効比誘電率が分割数増大に対して非常に収束が速いこと、および電位係数の計算は $\epsilon_r = 1$ のとき非常に速いこと、の二つの長を利用して、 C_{eo} , C_{oo} , E_{ree} , E_{reo} より Z_0 , ρ 等を計算する事にしたものである。以下に示す計算結果は、 C_{eo} , C_{oo} の計算のときには $N_w = 6$, $N_t = 3$ とし、 E_{ree} , E_{reo} の計算のときは $N_w = 4$, $N_t = 1$ として行ったもので、 $\beta = 6$, $\alpha = 0$ としている。精度はこの程度の分割数で実用上十分であり（実用上は三桁あれば十分である）、計算時間は前者のとき約20秒（ C_{eo} , C_{oo} 共で）、後者のとき $\epsilon_r = 5$ の場合で約1分である（ E_{ree} , E_{reo} 共で）。なお、計算機は Tosbac-3400 を使用した。

なお、幾何学的平均距離を中心内距離で置き換える事により精度を損うことなく計算時間は約 $\frac{1}{4}$ に減少している。また同じ N に対して $\epsilon_r = 5$ のときは $\epsilon_r = 1$ のときの約10倍の時間が所要である。

4.3.7 計算結果

得られた結果の一部を図4.13～4.23に示してある。比誘電率は計算機のプリント板に最もよく用いられている glass-epoxy の $\epsilon_r = 5$ の場合を主に示している。またストリップ導体の厚さ t , w , 線路の間隔 S はすべて誘電体の厚さ h で正規化し、実用上重要と思われる範囲で示している。

後述誘導雑音係数 ρ が実用上最も重要であるが、 ρ は図4.13～4.16よりわかるように $\frac{S}{h}$ が1.0以下では $\log_{10} \frac{S}{h}$ にほぼ逆比例している。当然厚さ $\frac{t}{h}$ が大きくなれば結合も強くなり ρ は大きくなる。導体 w の変化に対してはやや複雑である。図4.15では $\frac{w}{h}$ にほぼ逆比例しているが、表4.6よりわかるように必ずしもそうとは示えず、結合が比較的弱いときには殆んど変化しないが、 $\frac{w}{h}$ が大きくなるとわずかに ρ が大きくなるが逆に ρ が大きく

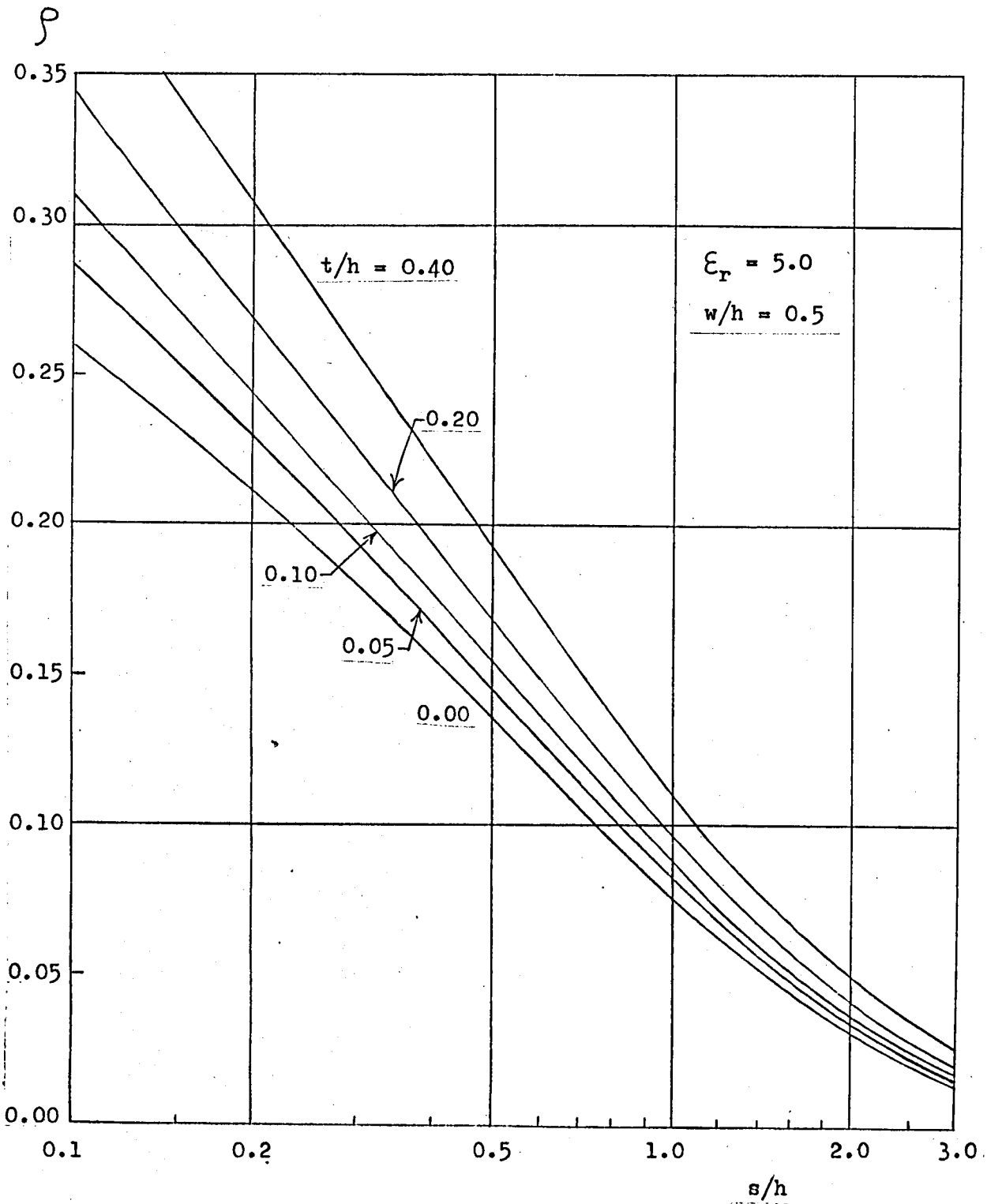


图 4.13 ρ

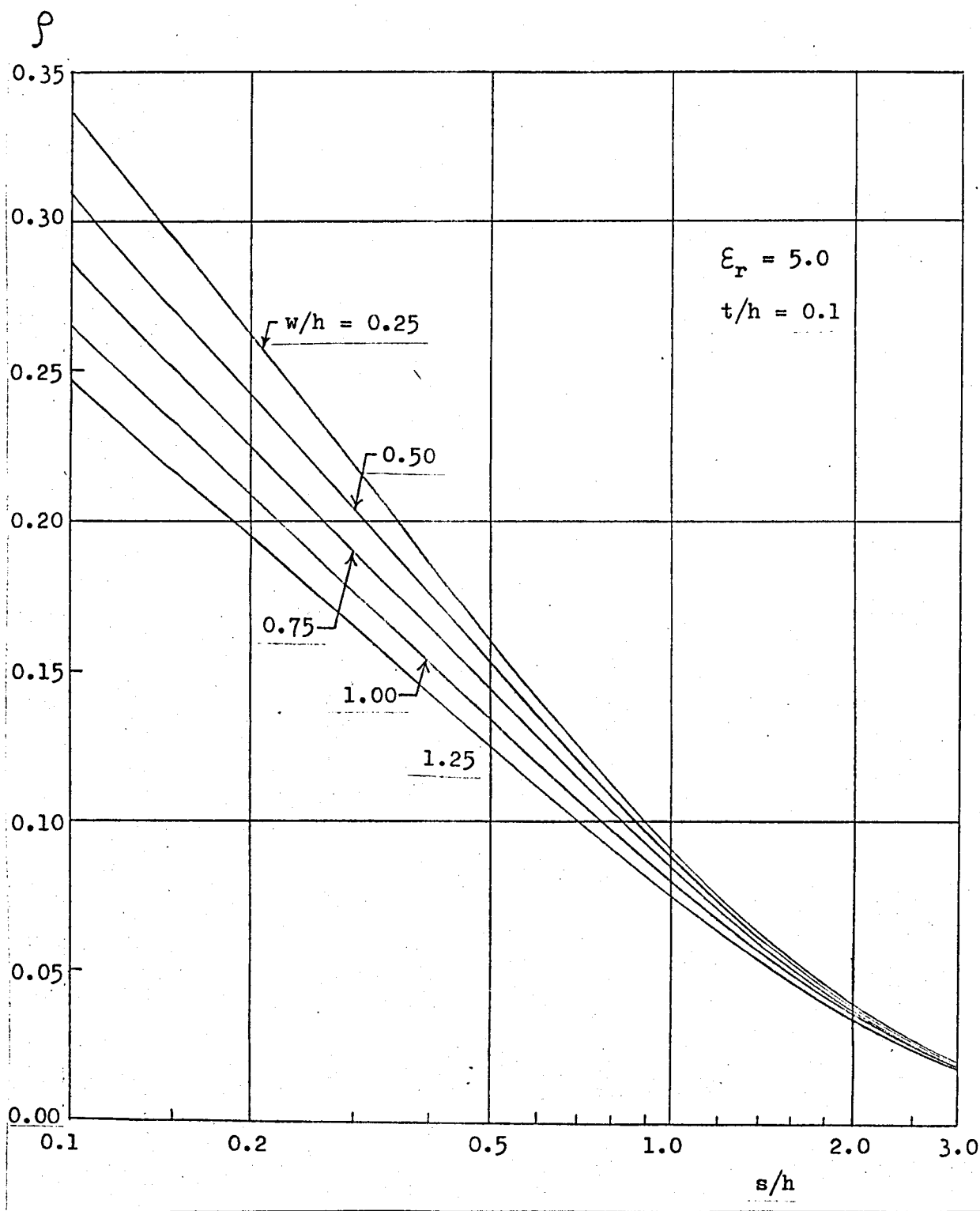


图 4.14 ρ

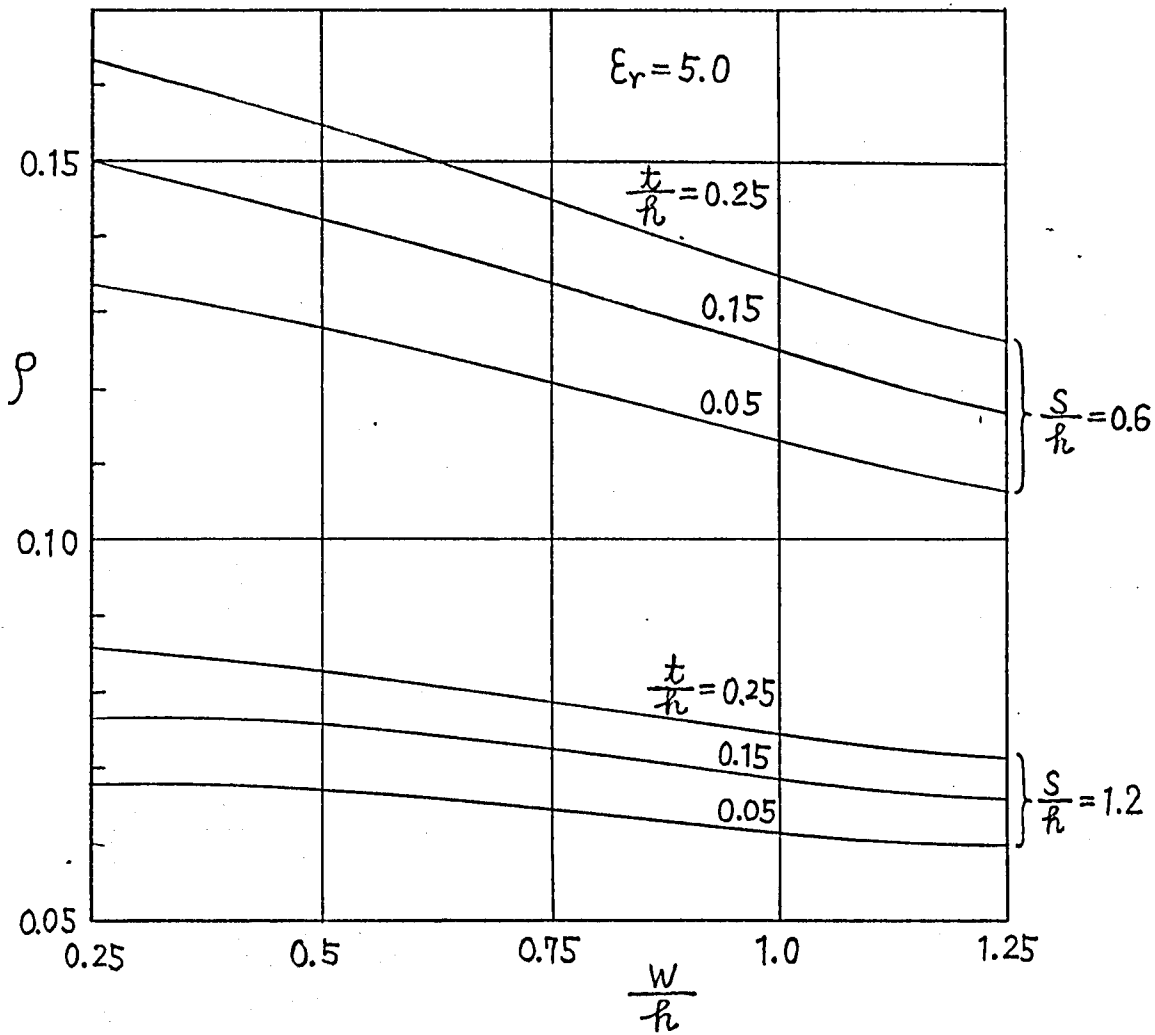


图 4.15 ρ

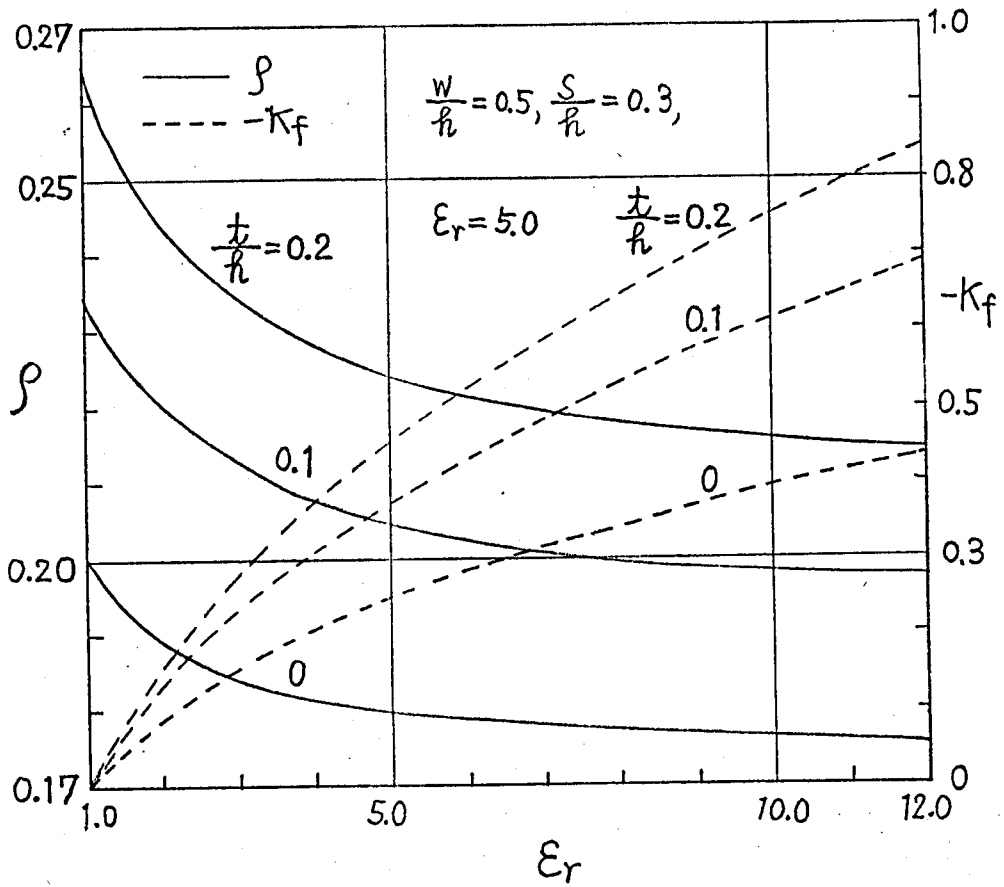


图 4.16 $\rho, -K_f$

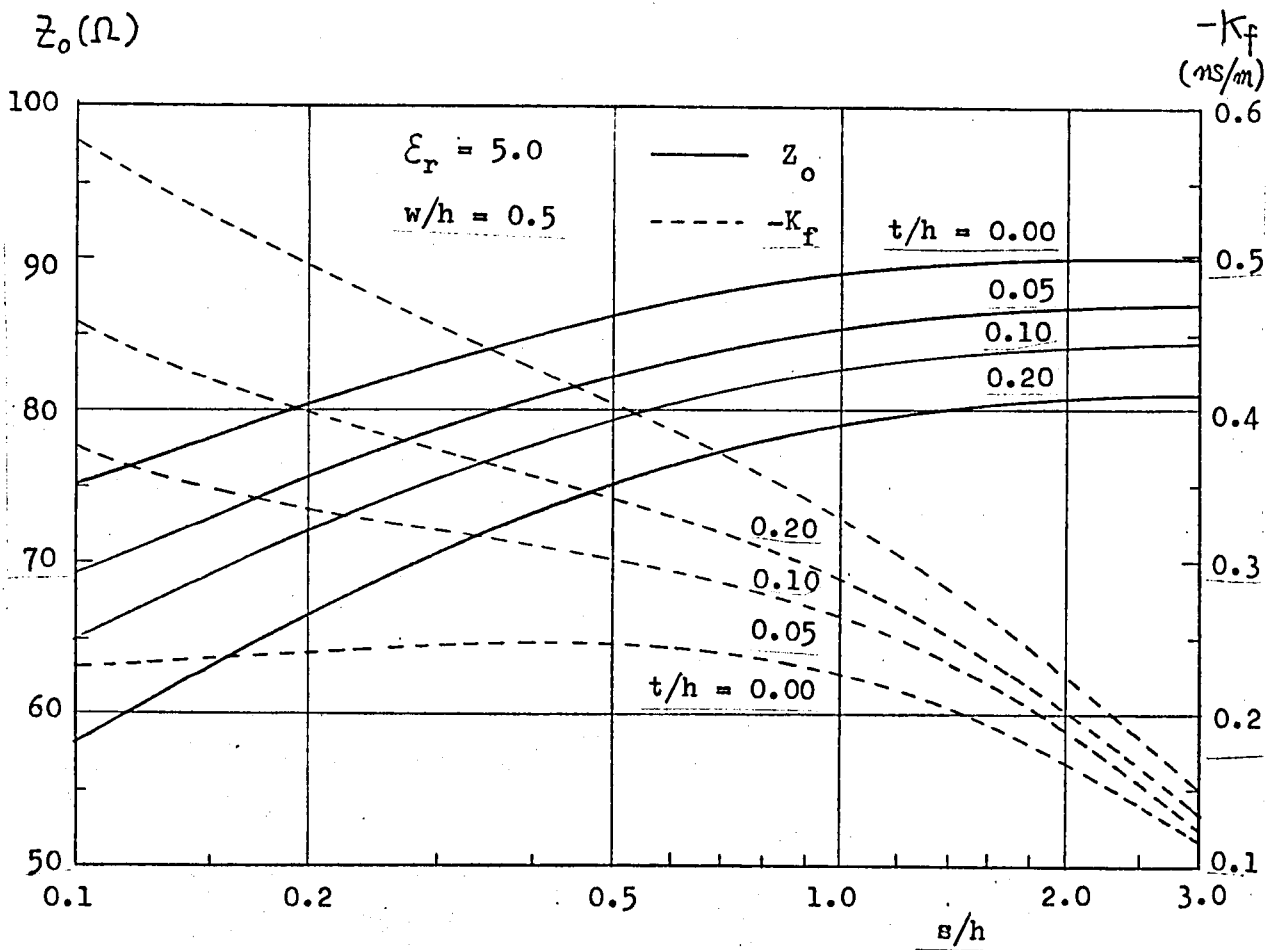


图 4.17 $-K_f, Z_0$

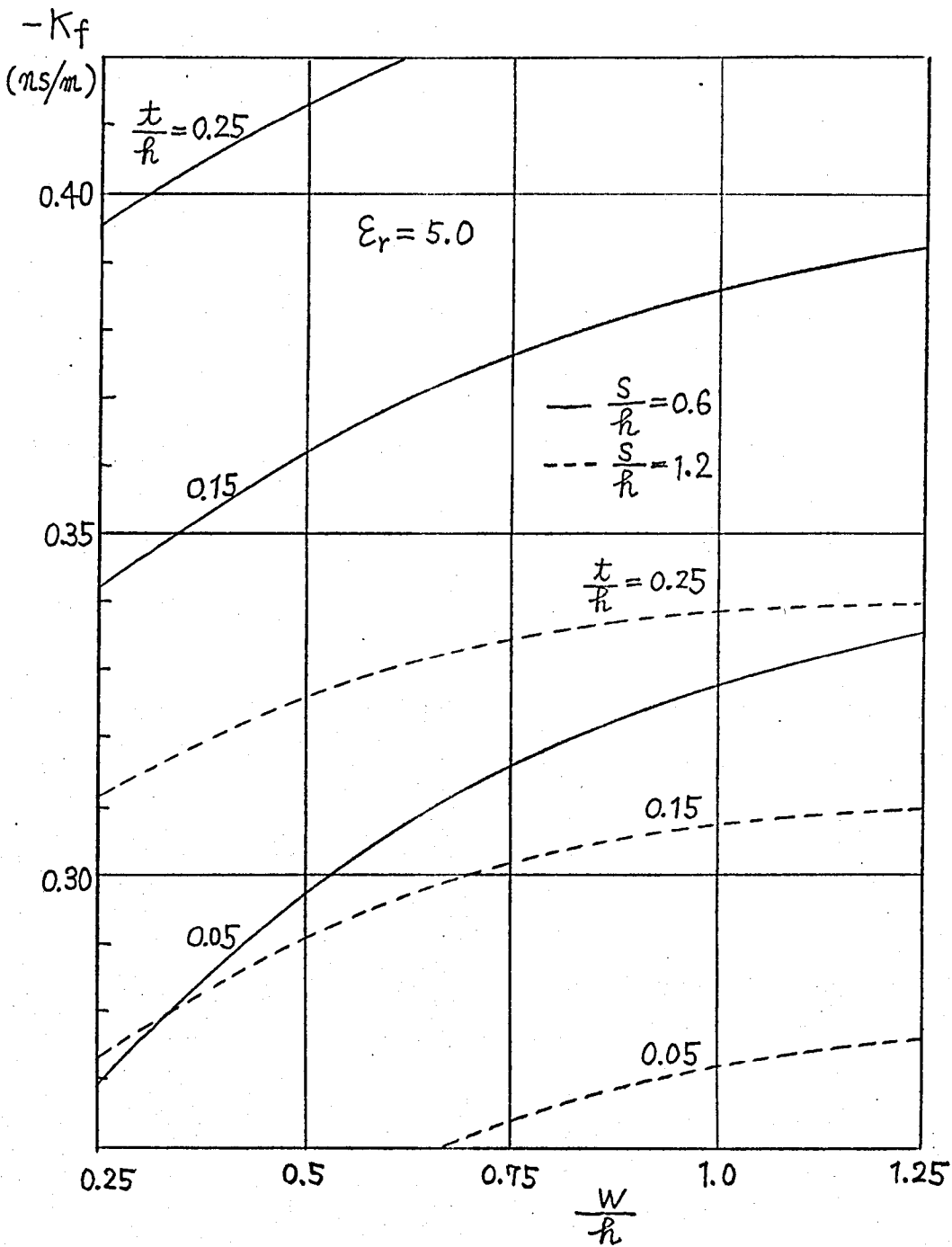


图 4.18 $-K_f$

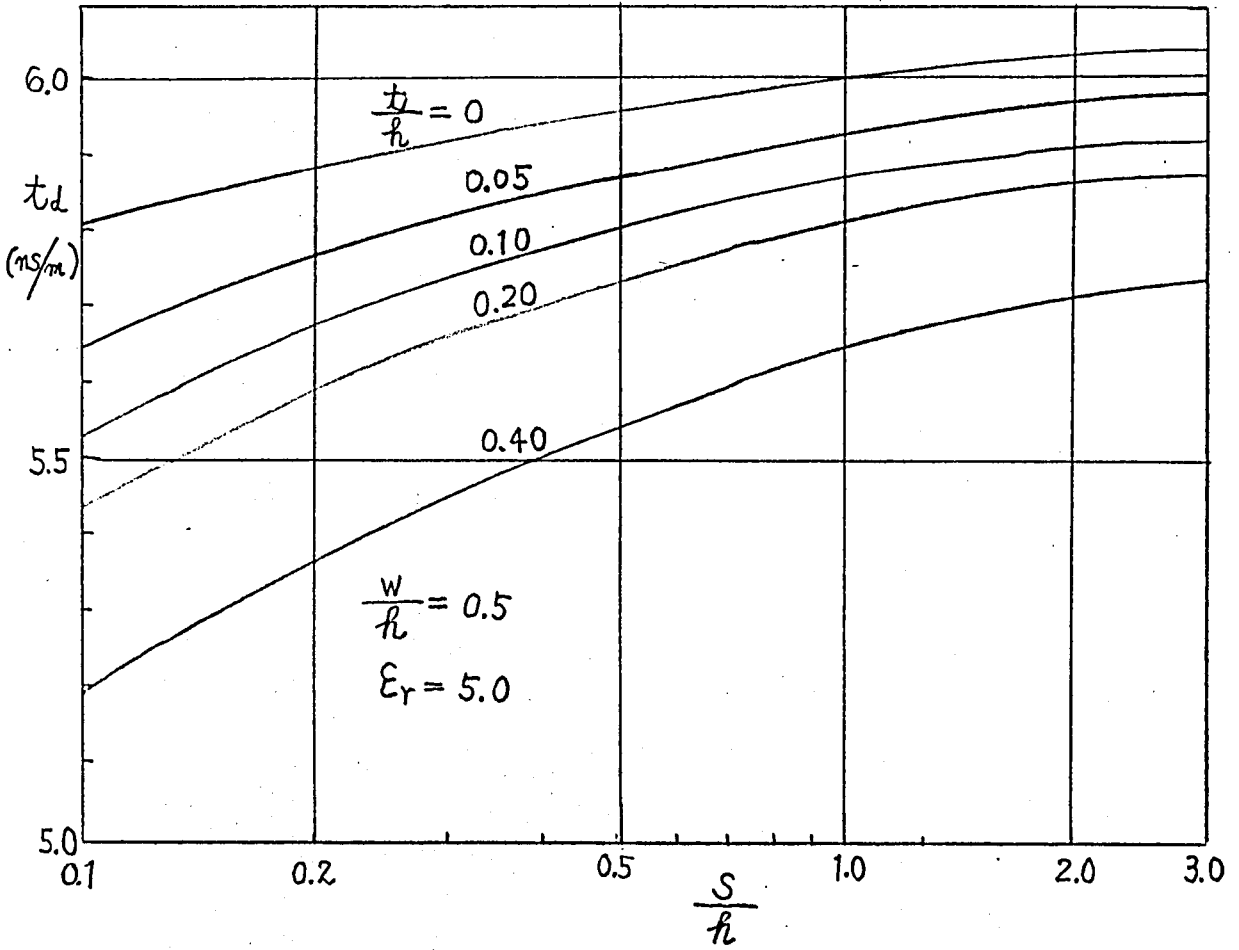


图 4.19 t_d

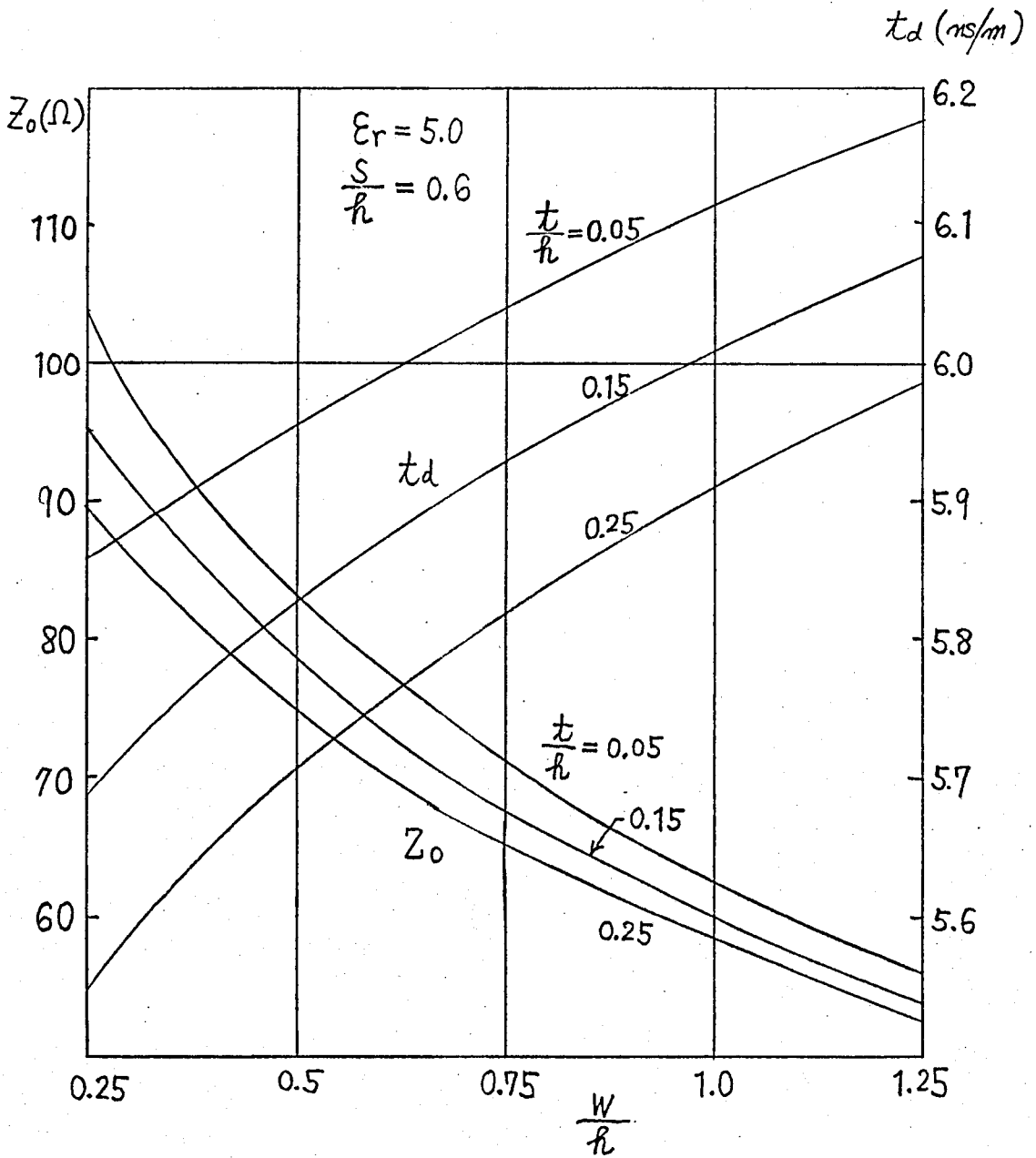


图 4.20 Z_0, t_d

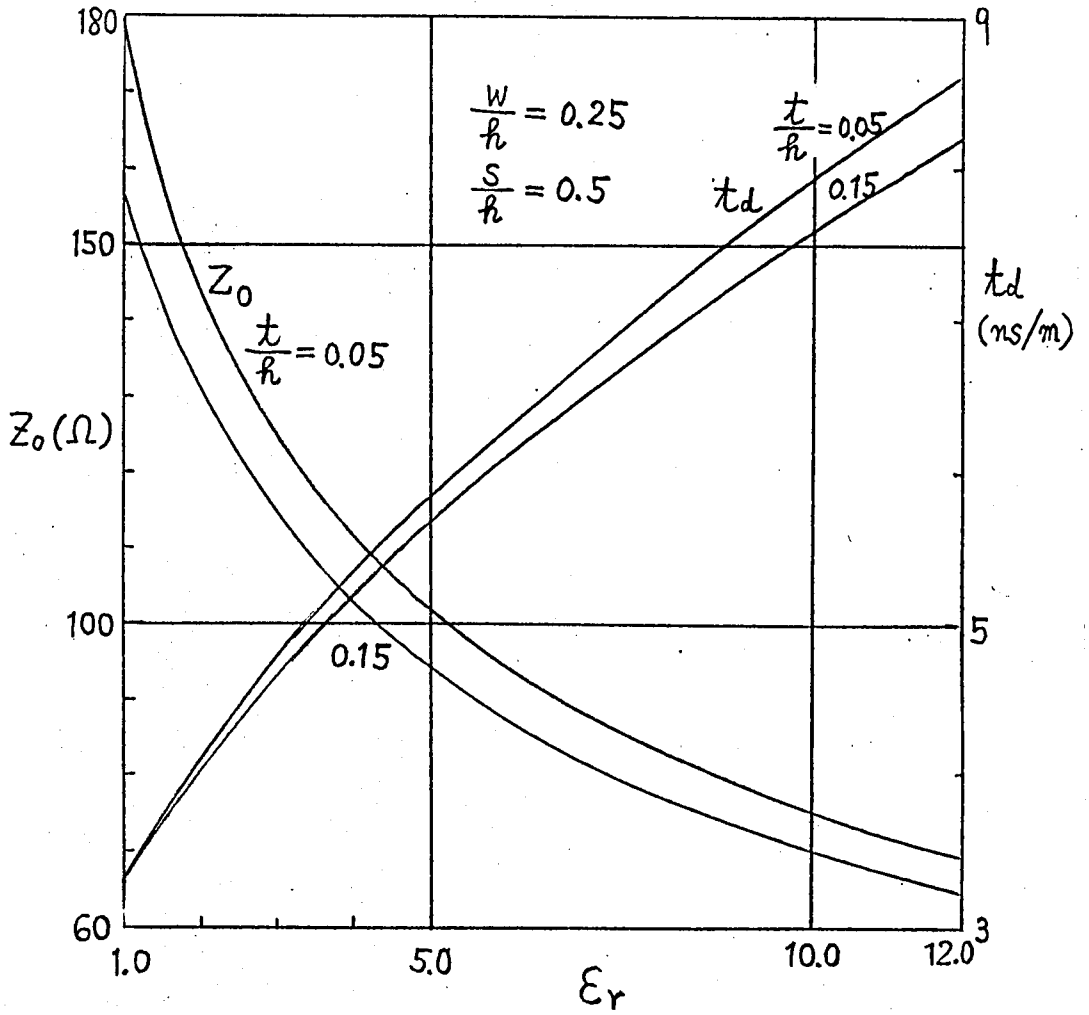


图 4.21 Z_0, t_d

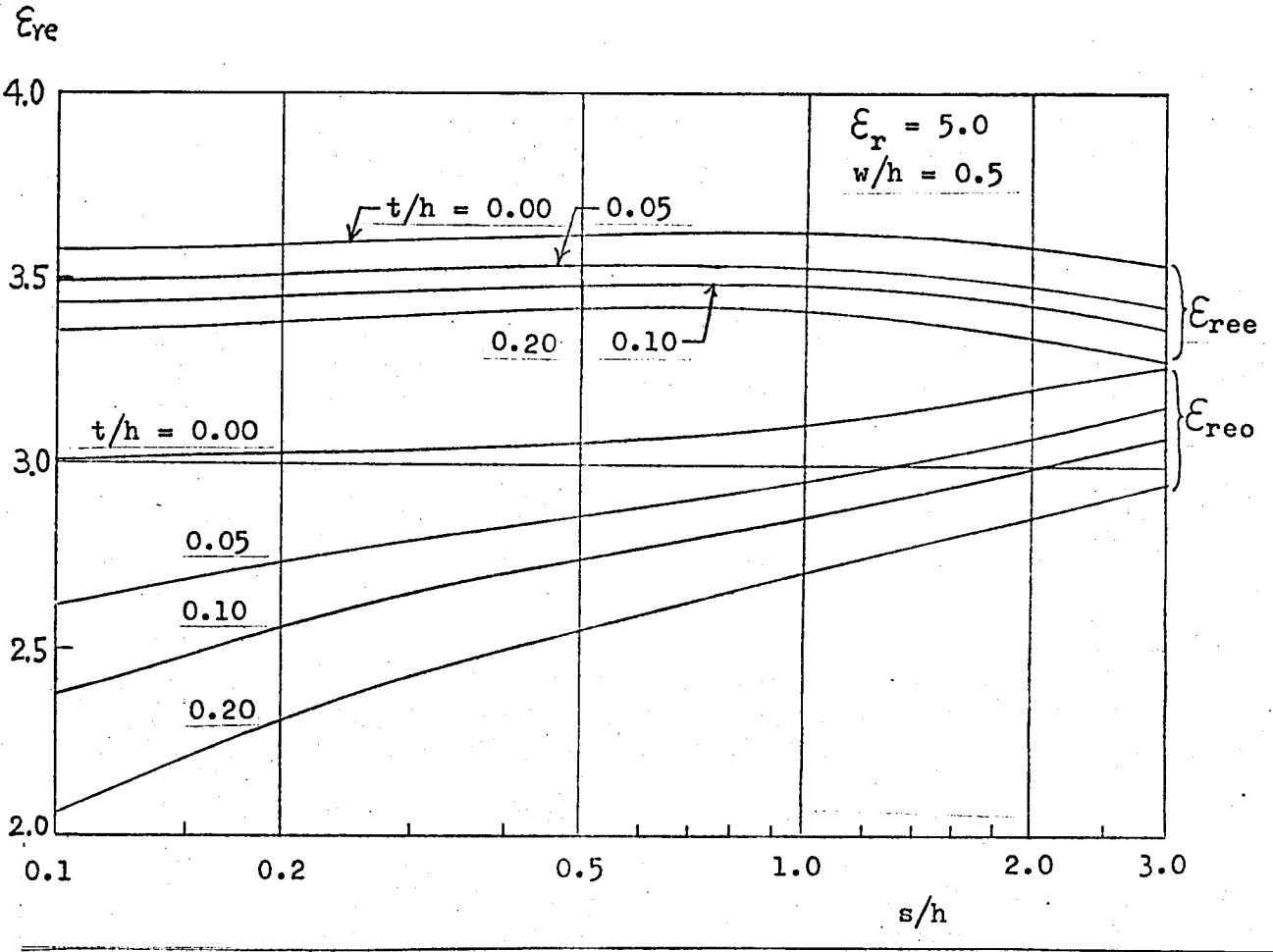


图 4.22 ϵ_{re}

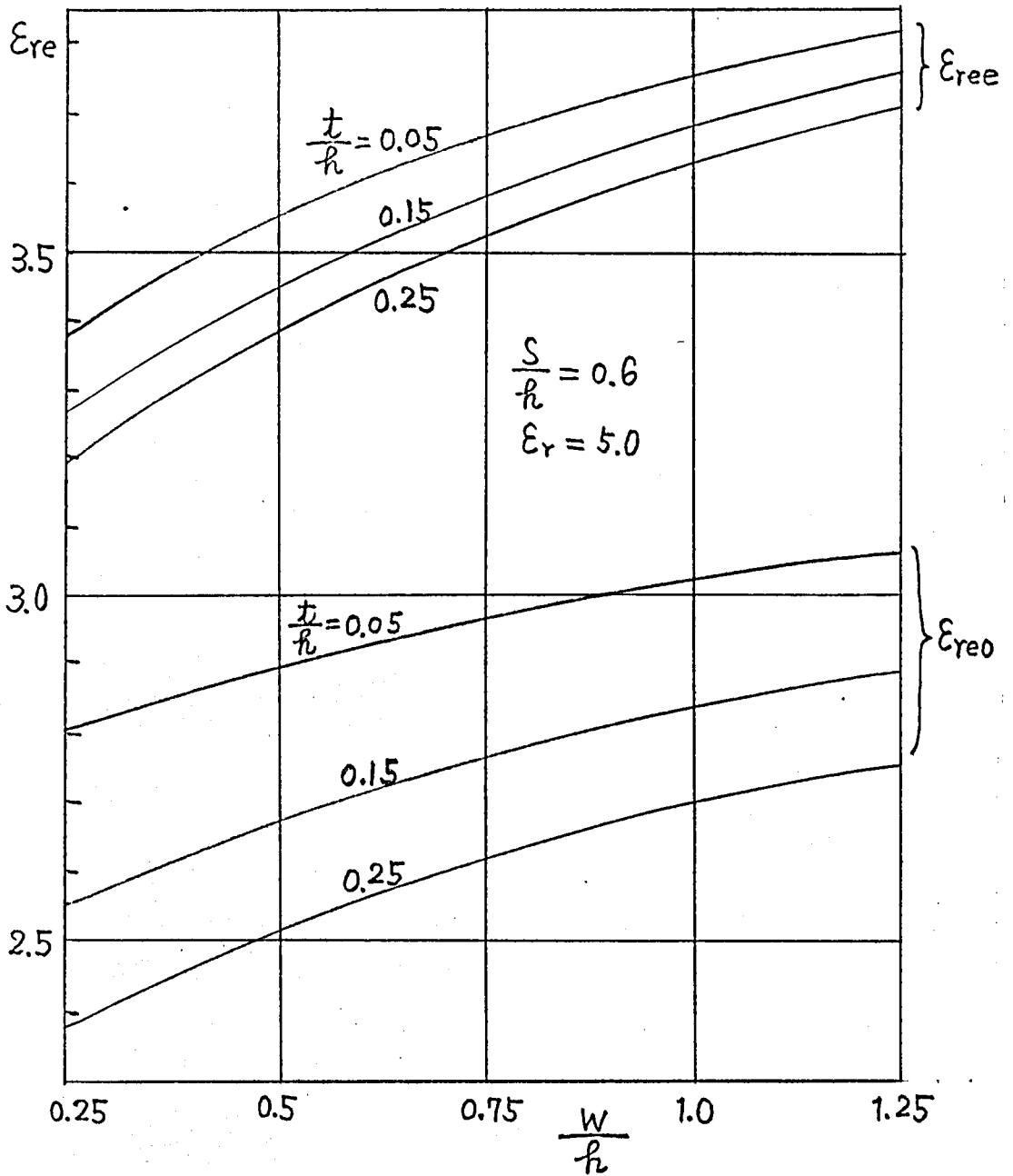


图 4.23 ϵ_{re}

表 4.4

$\frac{W}{L}$	$\frac{L}{L}$	$\frac{S}{L}$	計算	近似式	誤差(%)
0.5	0.05	0.2	.230	.236	+3.5
"	"	0.3	.194	.197	+1.5
"	"	0.6	.129	.131	+1.6
"	0.1	0.2	.244	.244	0
"	"	0.3	.205	.205	0
"	"	0.6	.136	.139	+2.2
"	0.2	0.2	.269	.259	-3.7
"	"	0.3	.224	.220	-1.8
"	"	0.6	.169	.171	+1.2
0.25	0.05	0.2	.246	.246	0
"	"	0.3	.205	.207	+0.9
"	"	0.6	.134	.141	+5.2
"	0.15	0.2	.278	.262	-5.8
"	"	0.3	.230	.223	-3.0
"	"	0.6	.150	.157	+4.6
1.0	0.15	0.3	.185	.193	+4.3
"	"	0.6	.125	.127	+1.5
"	"	1.2	.069	.060	-13.0
"	0.25	0.3	.207	.208	+3.4
"	"	0.6	.135	.142	+5.2
"	"	1.2	.075	.075	0

なることもある。この変化はわずかではあるが、 W が大きくなるると $\frac{S}{W}$ は小さくなる事によるのではないかとと思われる。Kauppの実験では実用的な範囲では ρ は W を変えても変わりないとしている。⁽⁸⁷⁾

以上より実用上重要な範囲、 $\frac{S}{h} = 0.2 \sim 1.0$, $\frac{t}{h} = 0.05 \sim 0.25$, $\frac{W}{h} = 0.25 \sim 1.0$, で使用できる近似式として $\epsilon_r = 5$ のとき

$$\rho \cong 0.09 - 0.22 \log_{10} \frac{S}{h} + 0.15 \left(\frac{t}{h} - 0.1 \right) - 0.04 \left(\frac{W}{h} - 0.5 \right) \quad (4.49)$$

なる式を得ることが出来る。この近似式によつてどの程度の精度が得られるかを表4.4に示してある。特別に結合が弱い場合を除いて誤差は6%以下であり実用上十分である。

なお、 ϵ_r の変化に対しては、 ρ は $\epsilon_r = 1$ のときが一番大きく ϵ_r が大きくなるに従つて小さくなる(図4.76)。

一方前進誘導係数 $-k_f$ は、 $\frac{S}{h}$ が小さくになると、 $\frac{t}{h}$ が大きくなる、そして $\frac{W}{h}$ が大きくなると、大きくなる(図4.16~4.18)。すなわち図4.16よりわかる様に ϵ_r と共に大きくなる。

その他、特性インピーダンス Z_0 、単位長に当りの伝搬遅れ時間 $t_d (= \frac{1}{2} (\frac{1}{v_{0e}} + \frac{1}{v_{0o}}))$ 、実効比誘電率 ϵ_{re} , ϵ_{ro} を図4.17~4.23に示す。

4.3.8 実験結果等との比較

(1) 単一線路

まず単一線路については、Kauppの実験結果のらびに近似式があるので、⁽⁸⁶⁾これと比較した結果を表4.5に示す。特性インピーダンスの測定結果と一番異なる場合でも5%位の誤差である。Kauppの計算は、線路の厚さがかなり厚いとして

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{re}}} \ln \frac{5.98 h}{0.8 W + t} \quad (\Omega) \quad (4.50)$$

という式によつていいる。ここで実効比誘電率は実験結果より

表 4.5

Er	寸法 (mil)			特性インピーダンス (Ω)			実効比誘電率	
	h	W	t	計算	測定	Kaupf計算	計算	Kaupf計算
2.9	29	24	2.8	87.6	90	86.5	2.14	2.05
4.3	19	22	2.8	63.1	65	62.6	3.01	2.71
4.3	19	10	2.8	86.6	82	85.7	2.81	2.71
4.3	55	10	2.8	124.2	124	124.8	2.75	2.71
4.7	8	10	2.8	56.1	53	52.5	3.16	2.90
4.7	8	20	2.8	38.7	36	32.9	3.44	2.90
4.7	14	15	2.8	62.1	61	61.0	3.19	2.90

得た実験式として次式で計算する。

$$\epsilon_{re} = 0.475 \epsilon_r + 0.67 \quad (4.51)$$

(b) 結合線路の実験結果との比較

誘導雑音係数についても同じく Kaupf によって豊富な実験結果が与えられているので、⁽⁸⁷⁾ 計算結果の有効性を確かめるためにこれと比較した。結果を表 4.6 に示す。実験値は Kaupf の文献の図 7(a), (b) より読み取ったものである ($-K_f$ は ms/foot で示されているものを ms/m に換算した)。Kaupf の実験結果はストリップ導体の中が 7.5 ~ 25 mil の間に有効として与えられているので、計算は $W = 7.8, 15.6, 23.4$ mil の三つの場合について行った ($\epsilon_r = 5.0, t = 2.8$ mil)。

この表 4.6 は $\frac{W}{h}, \frac{W}{t}, \frac{t}{h}$ の値のかなり広い範囲を含んでいることにはなるが、 K_b の方は大抵よく一致できると思われる。 $-K_f$ の方は結合が弱いときにはよく一致しているが、結合が強いときには計算値の方が少し大きくなっている。

実験は信号の立ち上がり時間 t_r が 7 ns, 線長 l が 15.5 inch で行っているので、 K_b は十分 $t_r < 2T_0$ なる条件下で測定される信号移行の影響を受けないので正確であるが、 $-K_f$ の方は $t_r > 4T$ の状態で測定される信号移行の影響を受けている。式 (4.27) は信号移行をランプ状と仮定したものであり、この

表 4.6

	h (mil)	S (mil)									
		15	20	25	30	40	50	60	80	100	
K _b (ρ)	59.6	E	.222	.191	.165	.144	.115	.094	.079	.056	.043
		1	.223	.192	.168	.149	.119	.097	.080	.057	.042
		2	.222	.193	.170	.151	.122	.100	.083	.059	.043
		3	.215	.187	.166	.148	.120	.099	.083	.060	.045
	44.0	E	.194	.164	.140	.119	.090	.071	.057	.040	.028
		1	.197	.165	.141	.122	.094	.073	.059	.039	.028
		2	.192	.163	.140	.122	.094	.074	.059	.040	.028
		3	.183	.156	.135	.118	.092	.073	.060	.041	.030
	31.0	E	.154	.128	.105	.088	.062	.047	.037	.024	.017
		1	.164	.133	.110	.092	.066	.047	.038	.024	.017
		2	.156	.127	.106	.089	.065	.049	.038	.024	.017
		3	.145	.120	.100	.085	.064	.049	.039	.026	.018
8.35	E	.042	.030	.021	.016	.010	.007	.006	.004	.002	
	1	.047	.034	.027	.021	.014	.010	.008	.005	.004	
	2	.045	.032	.024	.018	.012	.009	.006	.004	.003	
	3	.041	.030	.023	.019	.013	.010	.008	.006	.004	
-K _f (ns/m)	59.6	E	.24	.24	.24	.24	.24	.23	.22	.20	.18
		1	.28	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.19	.17
		2	.29	.28	.28	.27	.26	.25	.24	.22	.19
		3	.31	.30	.29	.29	.27	.26	.25	.22	.20
	8.35	E	.25	.21	.17	.14	.10	.08	.07	.05	.02
		1	.26	.21	.16	.13	.08	.06	.04	.02	.01
		2	.28	.22	.18	.15	.10	.07	.06	.04	.02
		3	.26	.21	.16	.13	.09	.06	.05	.03	.02

$$t = 2.8 \text{ mil}, \quad E_r = 5.0$$

E: 實驗結果; 1, 2, 3: 計算結果 $W = 7.8, 15.6, 23.4 \text{ mil}$

程度の一致で実用上十分である。なお、信号波形を cosine 波
形と仮定して計算すると、1%程度計算値は大きくなる。

(c) 結合線路の他の計算法による結果との比較

ストリップ導体の厚さを考慮に入れた場合の比較ができるよう
な計算結果は他に発表されているが、厚さを無視できる場合
には Bryant 等の計算法がある。⁽⁶⁸⁾ この計算法による結果と
筆者の計算法による結果を Rao が比較している⁽⁹⁰⁾。これによ
れば、実効比誘電率は $\frac{W}{h} = 0.5$, $\frac{S}{h} = 0.3$, $\epsilon_r = 9.99$ とす

Bryant の方法: $E_{rec} = 6.754$, $E_{reo} = 5.551$

筆者の方法 : $E_{rec} = 6.748$, $E_{reo} = 5.606$

であり、差は 1%以下である。

4.3.8 三線系線路の計算例

グリーン関数と積分方程式による方法によれば、Hill 等⁽⁶⁹⁾
Weeks⁽⁷²⁾ が示しているように、一般に多角形の断面をもつ任意
の多線系線路の自己および相互キャパシタンスからなるキャパ
シタンスマトリックスを求めることができる。ここでは、二線系線

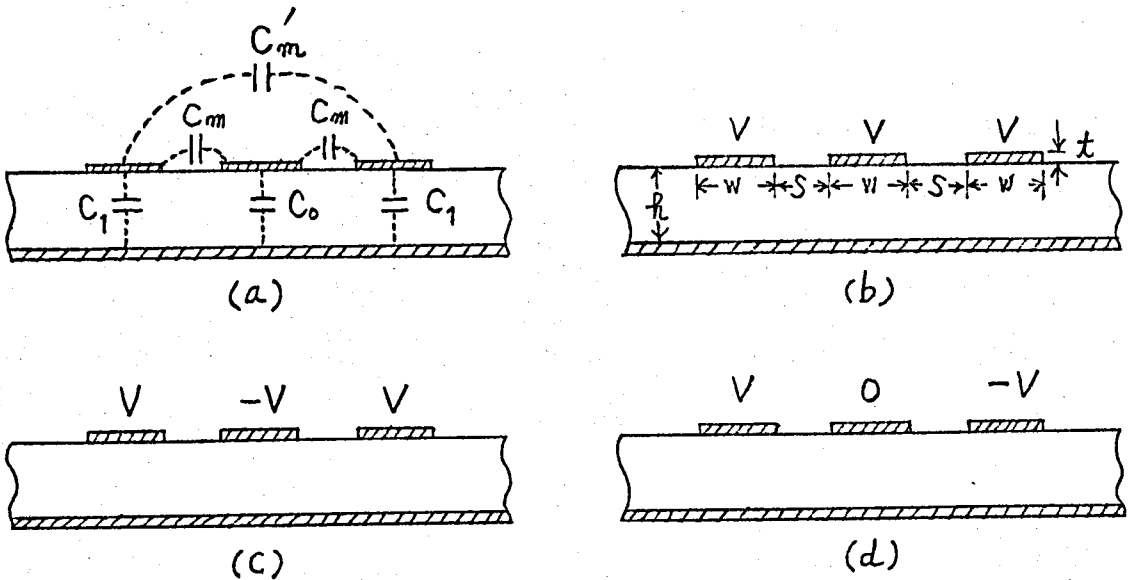


図 4.24

路で開発したプログラムを殆んどそのまま用いて、図4.24(a)に示すような対称三線条線路の容量を計算する方法を示す。⁽⁶⁾

このためには、同図(b),(c),(d)に示すような三つの状態を考えてやればよい。(b),(c)では二線条線路の場合の偶状態を利用することにより、また(d)では二線条線路の場合の奇状態を利用することにより、解析できる。そして、(b)の状態では C_0, C_1 が求まり、(c)の状態では $C_1 + 2C_m$ が求まり、そして(d)の状態では $C_1 + C_m + 2C'_m$ が求まるので、これより C_m, C'_m が計算できる。

$\frac{W}{h} = 1.0, \frac{S}{h} = 1.0, t = 0, \epsilon_r = 4.5$ の場合には

$$C_1 = 76.87 \text{ PF}, \quad C_0 = 70.03 \text{ PF},$$

$$C_m = 8.64 \text{ PF}, \quad C'_m = 0.67 \text{ PF}$$

という結果が得られる。当然 C_1 の方が C_0 より少し大きくなり、また C'_m は C_m に比べて非常に小さくなるのは当然の結果である。

4.3.9 磁性体媒質上のマイクロストリップ線路

この場合も今まで述べて来た誘電体媒質上のストリップ線路の容量、実効比誘電率から次に示すように簡単に導くことができるのである。

図4.25(a)に示す線路で媒質がすべて空気であると仮定した場合のインダクタンス、キャパシタンスを L_0, C_0 、同図(a)に示す線路のそれを L, C 、そして同図(b)の場合をそれぞれ L', C' とする。(b)の線路では比透磁率は(a)と等しく比誘電率のみが次

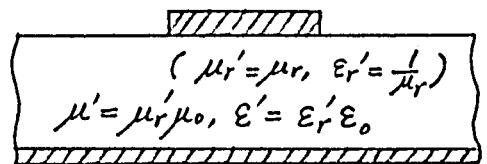
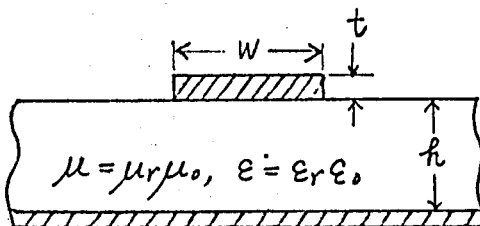


図 4.25

のように変化したと考えている。

$$\mu_r' = \mu_r, \quad \epsilon_r' = \frac{1}{\mu_r} \quad (4.52)$$

線路(b)では

$$L'C' = \mu_0 \epsilon_0 \quad (4.53)$$

なる関係が成立つるので⁽¹⁰⁰⁾

$$L = L' = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{C'} \quad (4.54)$$

からインダクタンスを計算する事ができる。C'は今まで述べて来た方法で比誘電率を $\frac{1}{\mu_r}$ とおいて計算すればよい。

また実効比透磁率 μ_{re} も次のように求める事ができる。

$$\mu_{re} = \frac{L}{L_0} = \frac{L'}{L_0} = \frac{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{C'}}{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{C_0}} = \frac{1}{\frac{C'}{C_0}} = \frac{1}{\epsilon_{re}} \quad (4.55)$$

すなわち、実効比透磁率は線路(b)の実効比誘電率の逆数として与えられる。⁽¹⁰¹⁾

なお、以上の解析において勿論 TEM 波の伝搬を仮定している。

4.4 埋め込みにマイクロストリップ線路

4.4.1 はじめに

線路の特性が全空間が誘電体で充たされたのと同じになる位十分に埋め込まれたとした場合についての考察は Kaupp が行っている。⁽⁹¹⁾ Kaupp はこのような状態になるのは、実験的にストリップ導体の厚さの 1~2 倍程度の埋め込み層がある場合であると述べている。勿論埋め込み層の付加によってもインダクタンスの方は変化しない(媒質の比透磁率は 1) から、特性インピーダンス、伝搬遅れは、

$$\begin{aligned} \text{マイクロストリップ線路:} & \quad Z_{01} = \sqrt{\frac{L}{C_1}}, \quad t_{d1} = \sqrt{LC_1} \\ \text{埋め込まれたマイクロストリップ線路:} & \quad Z_{02} = \sqrt{\frac{L}{C_2}}, \quad t_{d2} = \sqrt{LC_2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

であるから、これより

$$t_{d1} Z_{01} = t_{d2} Z_{02} \quad (4.57)$$

なる関係が成り立つ。亦た全空間が比誘電率 ϵ_r の誘電体で満たされたのと同じ特性が得られるものとするれば、 $C_2 = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_{re}} C_1$ (ϵ_{re} はマイクロストリップ線路の実効比誘電率) であるから、特性インピーダンスは $\sqrt{\frac{\epsilon_r}{\epsilon_{re}}}$ 分の 1 に、伝播遅れは $\sqrt{\frac{\epsilon_r}{\epsilon_{re}}}$ 倍になる。

結合線路の誘導雑音についてはマイクロストリップ線路の弱結合理論に基く誘導雑音係数より次のように表わす事ができる。⁽⁹¹⁾

$$\begin{aligned} \text{マイクロストリップ線路:} & \quad K_{b1} = \frac{1}{4t_{d1}} \left(Z_{01} C_{m1} + \frac{L_m}{Z_{01}} \right) \\ & \quad K_{f1} = \frac{1}{2} \left(Z_{01} C_{m1} - \frac{L_m}{Z_{01}} \right) \\ \text{埋め込まれたマイクロストリップ線路:} & \quad K_{b2} = \frac{1}{4t_{d2}} \left(Z_{02} C_{m2} + \frac{L_m}{Z_{02}} \right) \\ & \quad K_{f2} = 0 \quad \left(\text{従って } Z_{02} C_{m2} = \frac{L_m}{Z_{02}} \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

式(4.57), (4.58)より

$$K_{b2} = \frac{L_m}{2t_{d1} Z_{01}} = K_{b1} - \frac{K_{f1}}{2t_{d1}} \quad (4.59)$$

なる関係が得られる。これによってマイクロストリップ線路の K_{b1} , K_{f1} より埋め込まれたマイクロストリップ線路の K_{b2} が求まる。 $K_{f1} < 0$ 故 $K_{b2} > K_{b1}$ である。尚完全に埋め込まれたマイクロストリップ線路では、全空間がすべて空気である ($\epsilon_r = 1$)

と仮定した時の容量のすべて ϵ_r 倍になるので、 K_b は $\epsilon_r = 1$ の時の値と等しくなる。

以下、マイクロストリップ線路の解析と同様のグリーン関数と積分方程式による方法により、埋め込まれたマイクロストリップ線路の特性を厳密に解析しその性質を明らかにする。

4.4.2 グリーン関数

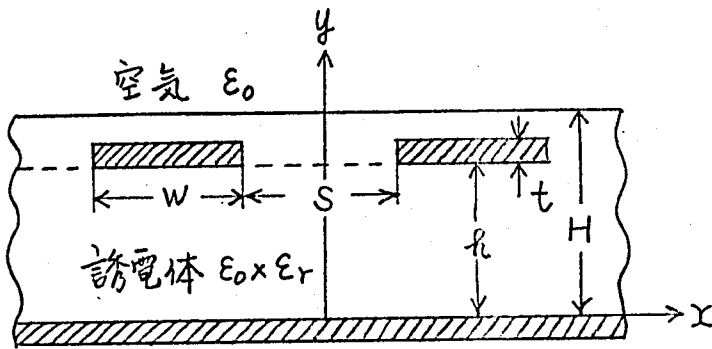


図 4.26

図 4.26 にその断面を示す埋め込まれたマイクロストリップ線路のグリーン関数を導く。

図 4.27 に示すように三層の誘電体からなる系

において、中間の誘電率 ϵ_2 の誘電体の中の点 $(0, y')$ ($y' \leq h$) にある線電荷 ρ による ϵ_2 の誘電体中の任意の点 (x, y) ($y \leq h$) の電位は

$$V(x, y) = -\frac{\rho}{4\pi\epsilon_2} \left[\ln \{ (y-y')^2 + x^2 \} + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n \ln \{ (y+(-1)^{n-1}y'-2nh)^2 + x^2 \} + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n \ln \{ (y+(-1)^n y'+2nh)^2 + x^2 \} \right] \quad (4.60)$$

となる。

これより、 $(0, y')$ 点の線電荷の他にもう一つ点 $(0, -y')$ に $-\rho$ の線電荷がある場合の電位は ($-\rho$ に対しては上の式(4.60)で $y' \rightarrow -y'$ と置くのみである)、二つの線電荷による電位を重畳する事によって次のようになる。

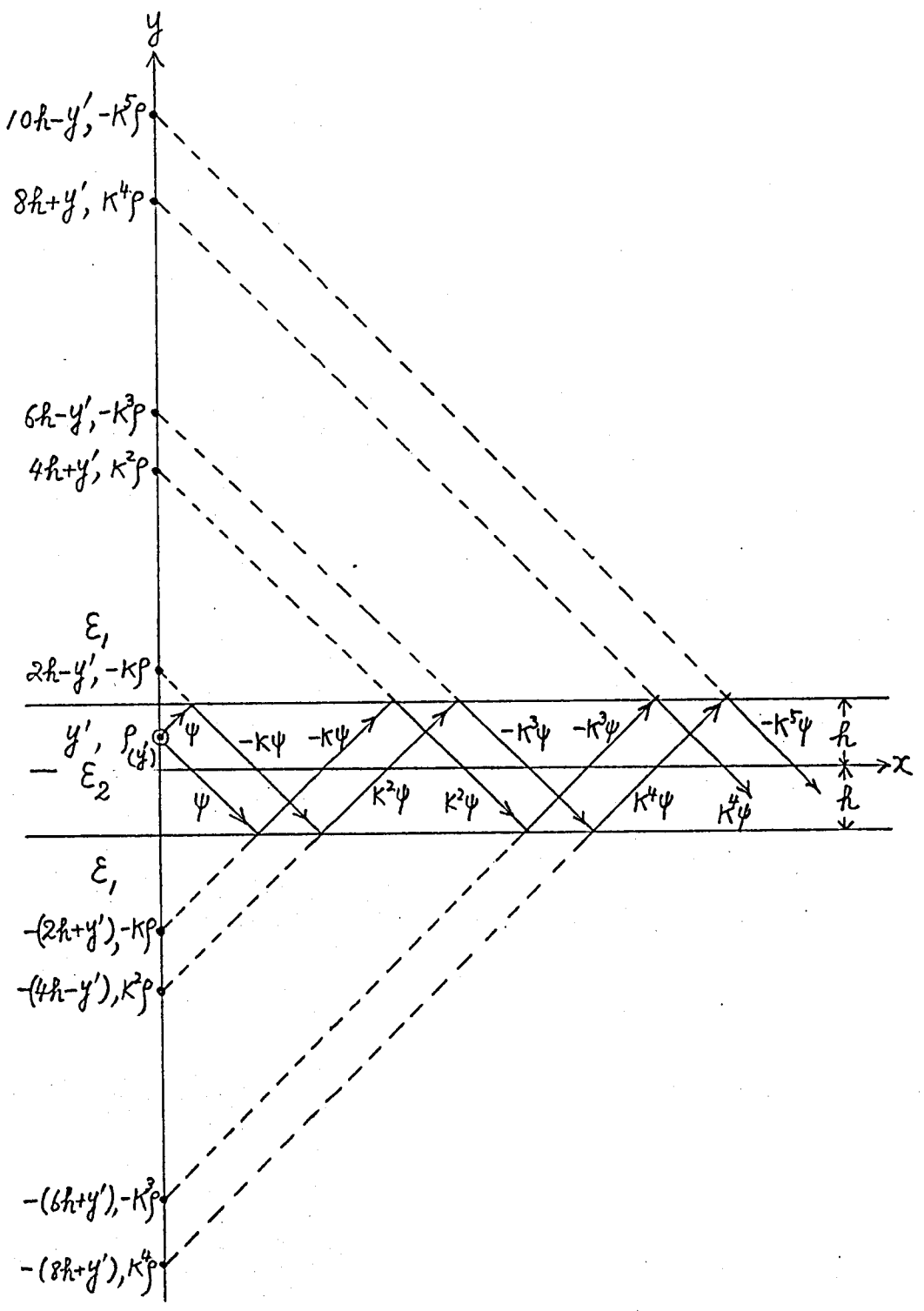


图 4.27

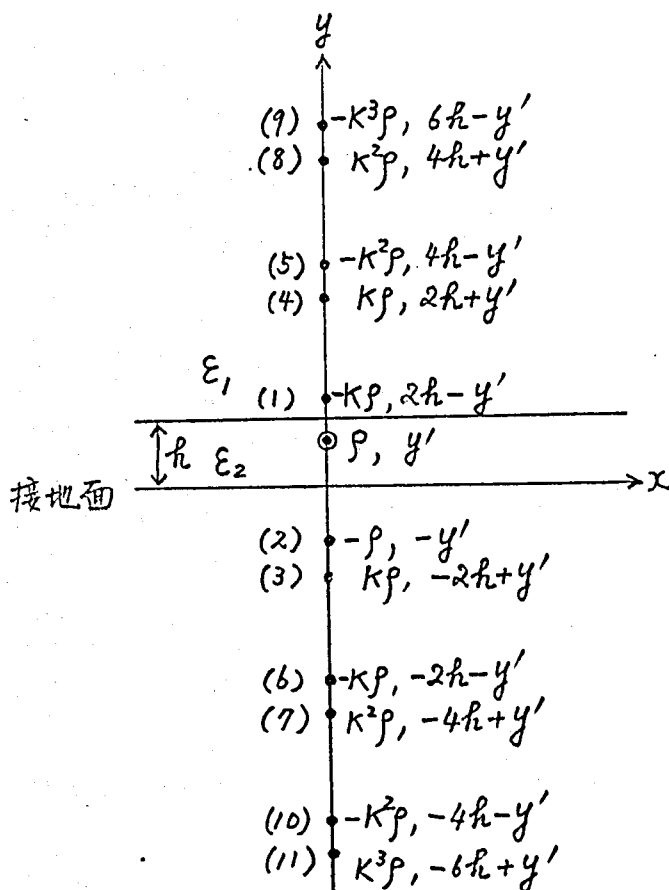
$$\begin{aligned}
 V(x, y) = & -\frac{\rho}{4\pi\epsilon_2} \left[\ln \left\{ (y-y')^2 + x^2 \right\} - \ln \left\{ (y+y')^2 + x^2 \right\} \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n \ln \left\{ (y+(-1)^{n-1}y' - 2nh)^2 + x^2 \right\} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n \ln \left\{ (y+(-1)^n y' + 2nh)^2 + x^2 \right\} \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n \ln \left\{ (y+(-1)^n y' - 2nh)^2 + x^2 \right\} \\
 & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n \ln \left\{ (y+(-1)^{n-1} y' + 2nh)^2 + x^2 \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & -\frac{\rho}{4\pi\epsilon_2} \left[\ln \frac{(y-y')^2 + x^2}{(y+y')^2 + x^2} \right. \\
 & - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} k^n \ln \left\{ (y+y' - 2nh)^2 + x^2 \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} k^n \left\{ (y-y' - 2nh)^2 + x^2 \right\} \\
 & - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} k^n \ln \left\{ (y+y' + 2nh)^2 + x^2 \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} k^n \left\{ (y-y' + 2nh)^2 + x^2 \right\} \\
 & + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} k^n \ln \left\{ (y-y' - 2nh)^2 + x^2 \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} k^n \ln \left\{ (y+y' - 2nh)^2 + x^2 \right\} \\
 & + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} k^n \ln \left\{ (y-y' + 2nh)^2 + x^2 \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} k^n \ln \left\{ (y+y' + 2nh)^2 + x^2 \right\} \left. \right]
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{\rho}{4\pi\epsilon_2} \left[\ln \frac{(y-y')^2+x^2}{(y+y')^2+x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \ln \frac{(y-y'-2nh)^2+x^2}{(y+y'-2nh)^2+x^2} \cdot \frac{(y-y'+2nh)^2+x^2}{(y+y'+2nh)^2+x^2} \right] \quad (4.61)$$

この式 (4.61) は Hill 等 ⁽¹⁹⁾ が図 4.28 に示すような多重影像法による等価系に式と一致する ($\epsilon_1 \Rightarrow \epsilon_2$, $y \rightarrow y_i$, $y' \rightarrow y_j$, $x \rightarrow (x_i - x_j)$).
 さらにこの式を変形すると

$$\ln \frac{(y-y')^2+x^2}{(y+y')^2+x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \ln \frac{(y-y'+2nh)^2+x^2}{(y+y'+2nh)^2+x^2}$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} K^n \ln \frac{(y-y'+2nh)^2+x^2}{(y+y'+2nh)^2+x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} K^n \ln \frac{(y-y'-2nh)^2+x^2}{(y+y'-2nh)^2+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} K^{n+1} \ln \frac{(y-y'-2(n+1)h)^2+x^2}{(y+y'-2(n+1)h)^2+x^2}$$

であるから、式(4.61)は

$$V(x,y) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} K^n \ln \frac{(y+y'+2nh)^2+x^2}{(y-y'+2nh)^2+x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} K^{n+1} \ln \frac{(y+y'+2(n+1)h)^2+x^2}{(y-y'+2(n+1)h)^2+x^2} \right] \quad (4.62)$$

とすると、Weeberの式⁽⁷²⁾(22)に一致する($x \rightarrow (x-x')$)。

この式(4.62)はマイクロストリップ^o線路の場合の式(4.39)と大差なく似た形をしている。これら式(4.62)と(4.39)を比較すると

$$V(x,y) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon} \left[\sum_{n=0}^{\infty} K^n \left\{ \ln \frac{(y+y'+2nh)^2+x^2}{(y-y'-2i'n h)^2+x^2} - i'K \ln \frac{(y+y'+2i'(n-i)h)^2+x^2}{(y-y'-2(n+1)h)^2+x^2} \right\} \right] \quad (4.63)$$

とわかる。ここに

$$\begin{cases} \text{マイクロストリップ^o線路:} & i' = 1, \quad \epsilon = \epsilon_1 \\ \text{埋め込られたマイクロストリップ^o線路:} & i' = -1, \quad \epsilon = \epsilon_2 \end{cases}$$

こうして得られた式(4.63)を用いて、互いに影縁の位置($\pm x_k$, $\pm y_k$)にある4個の区画方向に無限に長い線電荷による任意の長におけるグリ-2)関数は、式(4.38)を得ると同様にして次のように与えられる(マイクロストリップ^o線路では $y_k \leq h$, $y \geq h$;

埋め込まれたマイクロストリップ線路では $y_k \leq H, y \leq H$)。

$$G(x, y | x_k, y_k) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r^{(1-i)/2}} \sum_{n=0}^{\infty} K^n \left[F_1(x_k) \pm F_1(-x_k) - i'K \left\{ F_2(x_k) \pm F_2(-x_k) \right\} \right] \quad (4.64)$$

ここに

$$F_1(x_k) = \ln \frac{(x-x_k)^2 + (y+y_k+2nH)^2}{(x-x_k)^2 + (y-y_k-2inH)^2}$$

$$F_2(x_k) = \ln \frac{(x-x_k)^2 + (y+y_k+2i(n-i)H)^2}{(x-x_k)^2 + (y-y_k-2(n+1)H)^2}$$

$$K = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r}$$

$$H = h + (t+h')^{(1-i)/2}$$

$$i' = \begin{cases} 1 & : \text{マイクロストリップ線路の場合} \\ -1 & : \text{埋め込まれたマイクロストリップ線路の場合} \end{cases}$$

$$\pm = \begin{cases} + & : \text{偶巻数} \\ - & : \text{奇巻数} \end{cases}$$

(4.65)

この式 (4.64) と (4.65) により、マイクロストリップ線路と埋め込まれたマイクロストリップ線路を全く同様に解析する事ができる。この式に基づいた線路の両巻線の容量を計算する Fortran プログラムを付録に示す。なお、マイクロストリップ線路の場合はこの式によるよりも式 (4.38) による方が約 2 倍計算が速い (筆者の開発した付録のプログラムは MIT のリンカーン研究所で使用されている⁽⁹⁰⁾)。

なお、埋め込まれたマイクロストリップ線路の場合で、空気の ϵ_0 を無限大、すなわち導体と考之れば、しやへい型ストリップ線路の場合と通り ($i = -1, k = 1$)、三種の線路が一括して扱える事になる。しかし、Wecks も述べているように、 $K = 1$ のときにはグリー-2 関数の無限級数は大変収束が遅くなるので式 (4.64) のまゝで計算するのは余り得策ではない。しかし $K = 1$ のとき幸いこの級数は次のようになる。⁽⁶⁷⁾

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{\left\{ (y+y'+2nh)^2 + (x-x')^2 \right\} \left\{ (y+y'-2(n+1)h)^2 + (x-x')^2 \right\}}{\left\{ (y-y'+2nh)^2 + (x-x')^2 \right\} \left\{ (y-y'-2(n+1)h)^2 + (x-x')^2 \right\}}$$

$$= \ln \frac{\sinh^2 \frac{\pi(x-x')}{2h} + \sin^2 \frac{\pi(y+y')}{2h}}{\sinh^2 \frac{\pi(x-x')}{2h} + \sin^2 \frac{\pi(y-y')}{2h}} \quad (4.66)$$

従つて、式 (4.64) で与えられるグリー-2 関数は $K = 1$ のとき ($i = -1$)、次式のようになる。

$$G(x, y | x_k, y_k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\ln \frac{\sinh^2 \frac{\pi(x-x_k)}{2H} + \sin^2 \frac{\pi(y+y_k)}{2H}}{\sinh^2 \frac{\pi(x-x_k)}{2H} + \sin^2 \frac{\pi(y-y_k)}{2H}} \right. \\ \left. \pm \ln \frac{\sinh^2 \frac{\pi(x+x_k)}{2H} + \sin^2 \frac{\pi(y+y_k)}{2H}}{\sinh^2 \frac{\pi(x+x_k)}{2H} + \sin^2 \frac{\pi(y-y_k)}{2H}} \right] \quad (4.67)$$

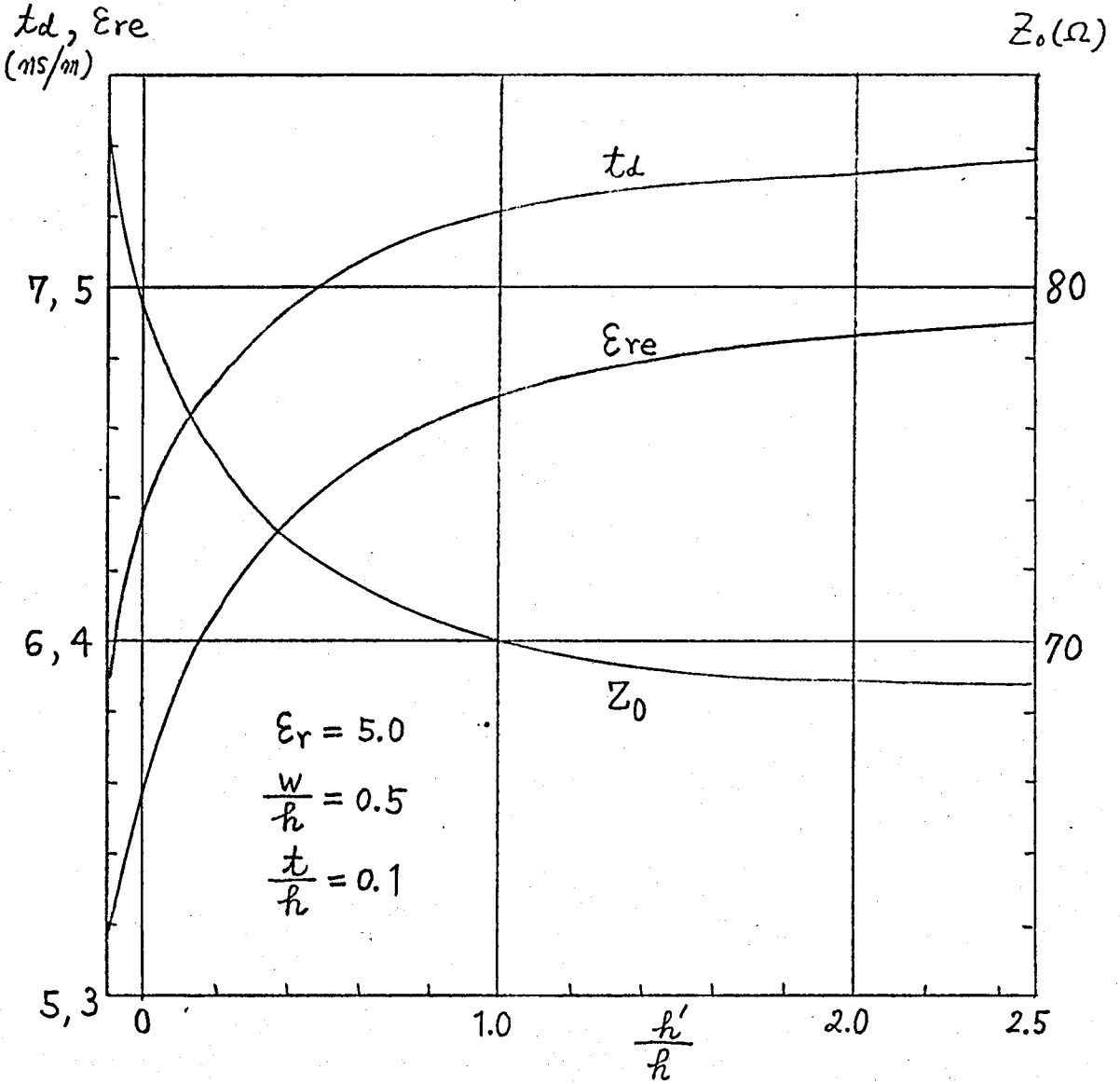
4.4.3 計算結果

得られた結果を図4.29~4.31, 表4.7, 4.8 に示す。⁽⁷³⁾ 図4.29は単一線路の場合であって $\frac{h'}{h}$ が1位でもおだかなり h' の影響を受けている。図には示していないが $\frac{h'}{h}$ が10のときには $\epsilon_{re} = 4.99$ とわり全面が ϵ_r の媒質で満たされているのと殆んど変わらなくなる。また, 埋め込まれた線路では, $\epsilon_d, \epsilon_{re}, \epsilon_{ro}$ はストリップ導体の厚さ h の影響は殆んど受けない。

図4.30, 4.31は結合線路の場合であるが, 図中 $h' + h = 0$ は対応するマイクロストリップ線路の場合を示している。マイクロストリップ線路では奇状態の方が偶状態より速く伝搬するが ($\epsilon_{re0} < \epsilon_{re}$), 埋め込み層の厚さ h' が大きくなるに従ってこの速度差 $\Delta v_r = (v_{e0} - v_{e}) / (v_{e0} + v_{e})$ が小さくなり, $\frac{h'}{h} \approx 0.75$ の付近で0になる ($\epsilon_{re0} = \epsilon_{re}$)。この時の実効比誘電率 ϵ_{re} は4.1位であり, ϵ_r に比してかなり小さい事に注意する必要がある。この h' の臨界値においては前進誘導雑音は0になるが, この状態は全空間が比誘電率 ϵ_{re} の均質媒質で満たされている場合に相当する。

一方, 後進誘導雑音係数 ρ は $\frac{h'}{h}$ と共に大きくなり, 上記の h' の臨界値において, $\epsilon_r = 1$ のとき (全空間が空気で満たされた場合) の値と, そしてまた $\frac{h'}{h} = \infty$ (全空間が基板材料 ϵ_r で満たされた場合) のとき ρ の値と等しくなる。そして, h' がこの臨界値を越えて大きくなると (これは実用上殆んど意味がないが), 逆に $\epsilon_{re0} > \epsilon_{re}$ とわり奇状態より偶状態の方が僅かに速く伝搬することになる。図4.32に結合マイクロストリップ線路の電界⁽⁷⁷⁾の様子を示してあるが, h' がある程度大きくなると奇状態の方は h' の影響を殆んど受けなくなるのに対して偶状態の方はかなり影響を受ける事からも理解できると思われる。

表4.7に $\Delta v_r = 0$ となるときの $\frac{h'}{h}$ の値とその時の実効比誘電率 ϵ_{re} が示してある。これからわかる様に $\frac{h'}{h}$ が小さい程, すなわち結合が強い程, この $\frac{h'}{h}$ は小さく, また ϵ_{re} も小さくなる事がわかる。実用上必要と思われる $\frac{h'}{h} = 0.5$ の近くで



□ 4.29

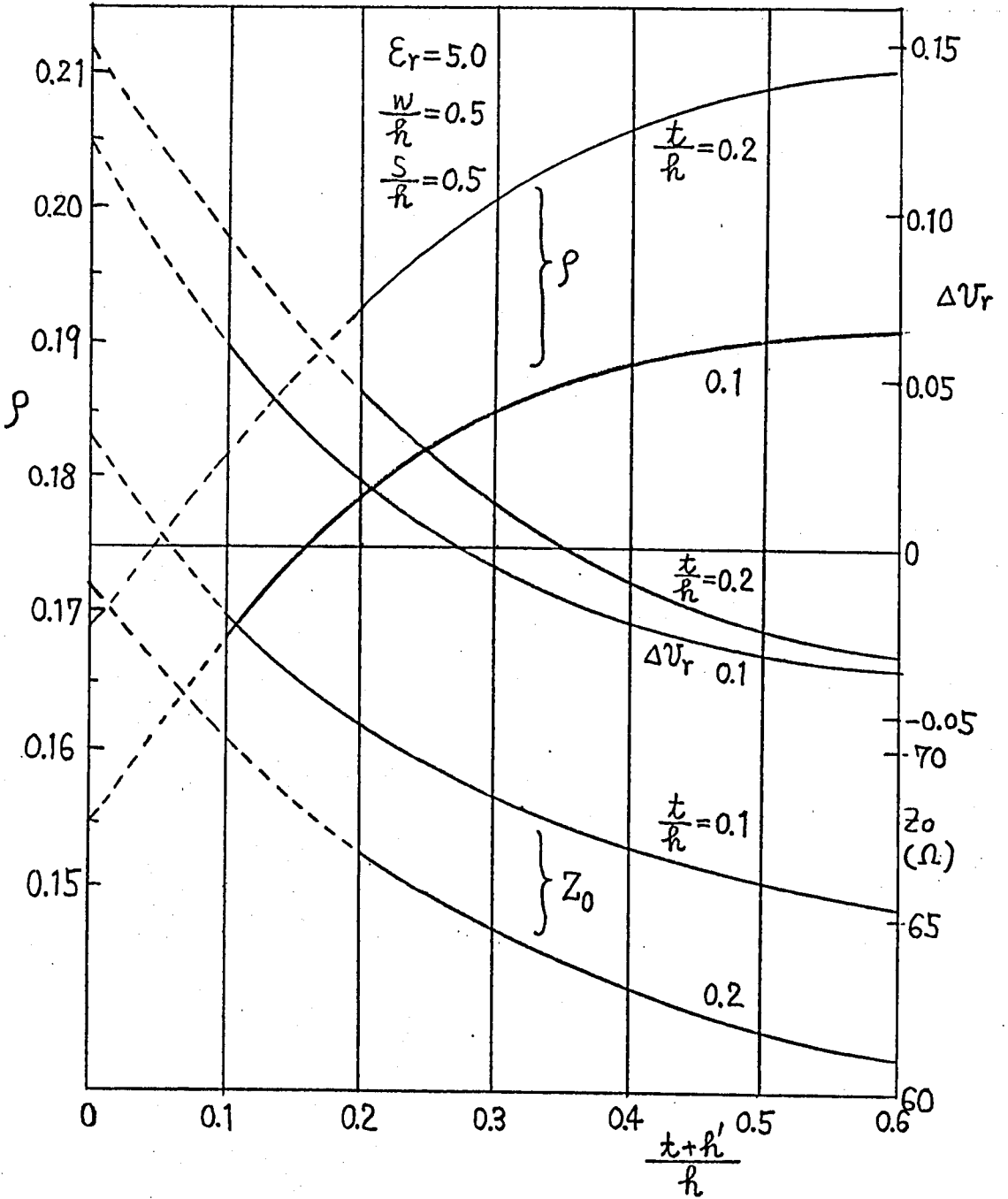
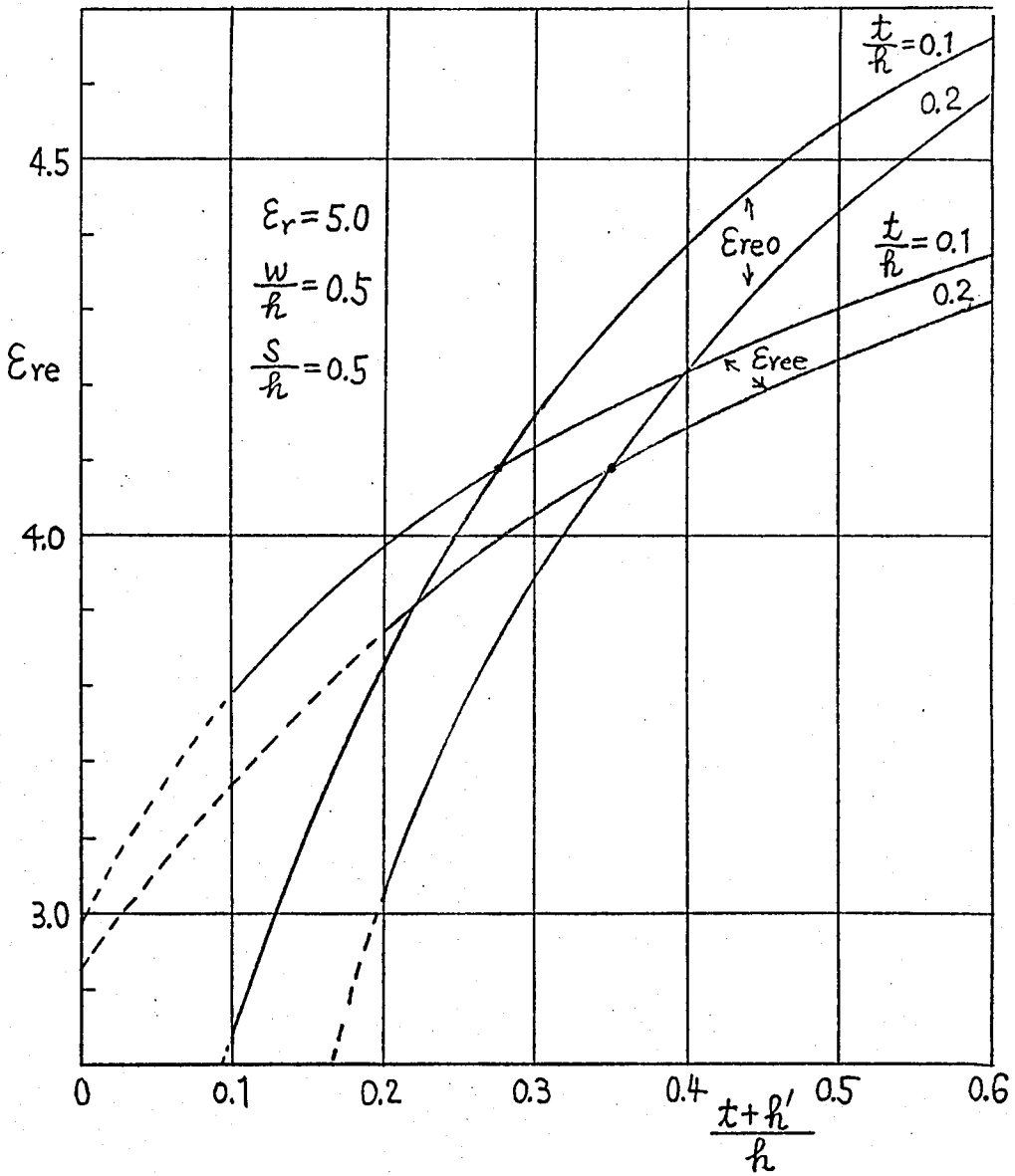


图 4.30



☒ 4.31

表 4.7

$\frac{t}{h}$		$\frac{W}{h} = 0.5, \epsilon_r = 5.0$					$\frac{W}{h} = 0.5, \frac{S}{h} = 0.5$		
		$\frac{S}{h}$					ϵ_r		
		0.4	0.5	0.6	0.75	0.9	2.5	5.0	10.0
0	R'/R	.170	.205	.240	.293	.346	.190	.205	.213
	ϵ_{re}	4.03	4.10	4.16	4.24	4.31	2.17	4.10	7.95
0.1	R'/R	.134	.171	.208	.262	.317	.159	.171	.178
	ϵ_{re}	4.02	4.08	4.13	4.21	4.28	2.16	4.08	7.91
0.2	R'/R	.104	.142	.180	.235	.290	.132	.142	.148
	ϵ_{re}	4.02	4.08	4.13	4.21	4.26	2.16	4.08	7.90

表 4.8

$\frac{S}{h}$	$\frac{t}{h}$ ($\frac{W}{h} = 0.5$)					
	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4
0.1	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16
0.2	1.12	1.14	1.16	1.16	1.17	1.18
0.3	1.13	1.16	1.17	1.17	1.18	1.19
0.4	1.15	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21
0.5	1.17	1.19	1.19	1.20	1.22	1.23
0.6	1.19	1.20	1.22	1.22	1.24	1.25
1.2	1.30	1.32	1.33	1.33	1.34	1.35

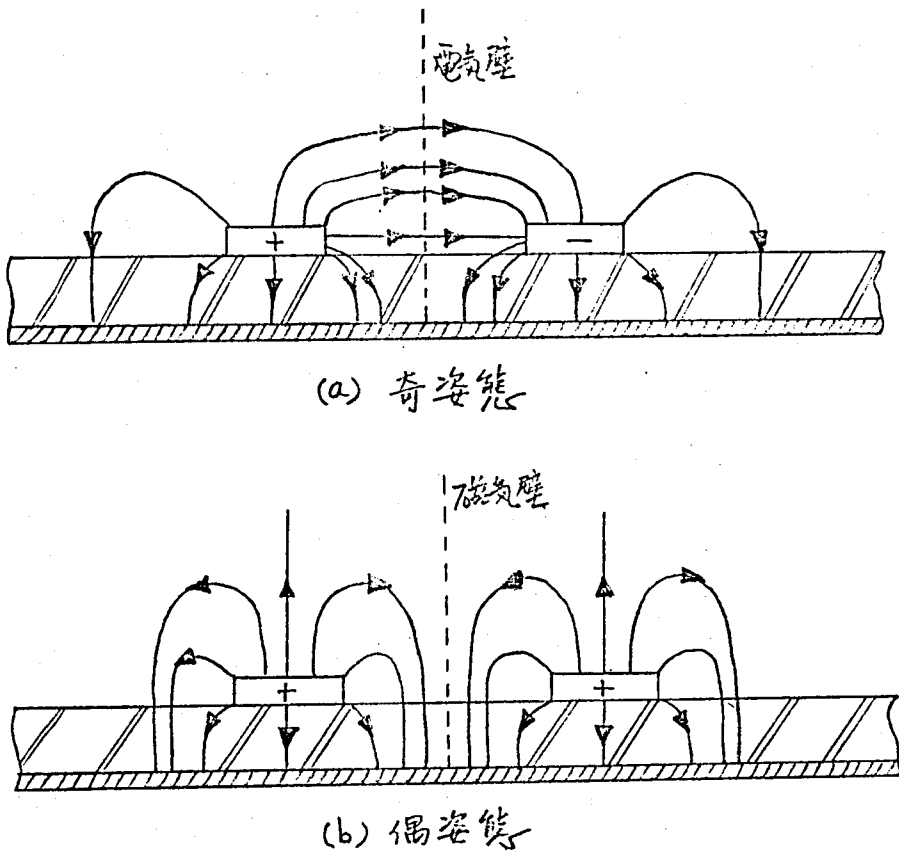


図 4.32

は $\epsilon_{re} \cong 4.1$ である。L 型ストリップ線路では常に $\Delta v_r = 0$ であるが、この場合と埋め込られたマイクロストリップ線路とが異なる点は、この実効比誘電率であって、伝搬速度は $\sqrt{4.1/5} \cong 0.9$ ($\epsilon_r = 5$ のとき) 故、約 10% 埋め込られたマイクロストリップ線路の方が速いことがわかる。

なお、 β はマイクロストリップ線路に比べると大きくなるが、丁度 $\Delta v_r = 0$ にする様に埋め込んだ場合に β がどの程度大きくなるか図 4.8 に示してある。大体実用的な幾何学寸法の範囲内では、この増加は 15~20% 程度である。

第5章 論理布線間の誘導雑音

5.1 はじめに

以上第3章においては誘導雑音の性質を明らかにし、また第4章においては各種ストリップ線路について、その断面の幾何学的寸法と基板の比誘電率とその電気的特性の間の関係を明らかにしてきた。

そこでこの第5章においては、以上で得られた結果も実際の高速計算機の論理回路の場合に適用する事によつて、誘導雑音の見地から論理布線を如何に設計すればよいかの方針を示す。まず最初に最近の高速計算機の基本論理回路として広く用いられている TTL および ECL 回路について特にその入出力インピーダンスを考察し、次に雑音余裕度 (noise immunity) について説明し、これ等 TTL および ECL 回路を実装したシステムにおいて誘導雑音がどのようにふるかを明らかにし、論理布線間の線間距離もどのように定めたらよいかを述べる。

5.2 高速度論理回路

集積回路 (IC) では、インダクタンスは勿論コンデンサも出まらだけ用いる、また抵抗よりはむしろダイオードやトランジスタを用いる方が有利である。また、近接した位置にある抵抗は強んど同じバラツキで製造されるので、回路の動作も抵抗の絶対値で決まるよりも、抵抗の比で決まるような回路の方が有利である。このような事から TTL (transistor-transistor logic) および ECL (emitter coupled logic, または CML (current mode logic) ともいう) が高速度論理回路として広く用いられるようになってきている。

(1) TTL回路 ⁽¹⁰²⁾⁽¹⁰³⁾

中速度の代表的TTL回路を図5.1(a)に示す。Tr1はマルチエミッタトランジスタであって、ここで正論理(電圧レベルの高い方を論理的"1"とする)のAND回路を構成する。入力のうち一つまたはそれ以上が"0"であればTr1はONとなり、そのコレクタ電位は低電位となる。

このときTr2 (phase splitter) はOFFとなりそのエミッタ電位は接地電位に近くコレクタ電位は電源電圧Vccである。Tr3, Tr4はtotem poleを構成し、Tr2がOFFのときTr4はベースドライブを受けずベース

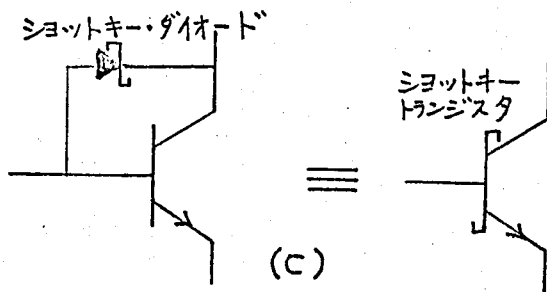
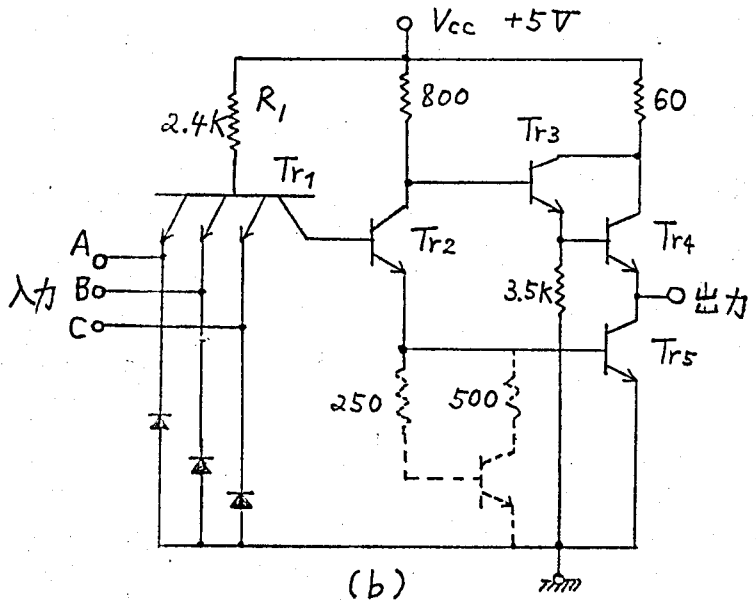
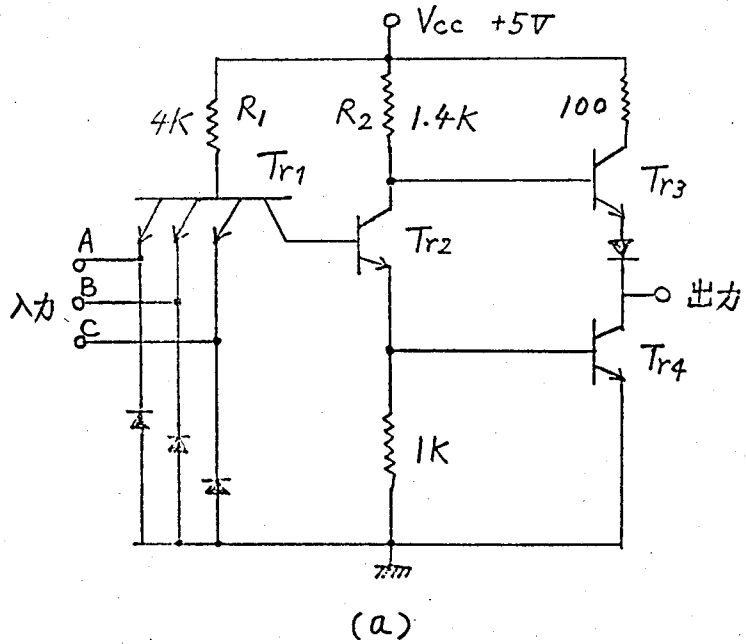


図 5.1

電圧はほぼ $0V$ であり OFF 状態になる。Tr3 は R_2 からドライブを受けとりエミッタホロフとして働き、出力は高電圧レベル("1")となる(出力電圧は $V_{cc} - 2V_{BE}$ ($V_{BE} \cong 0.7 \sim 0.8V$))。

逆にすべての入力が "1" のときには、Tr1 のベースからコレクタに電流が流れコレクタは高電圧となる。このため Tr2 は ON となり従って Tr4 が ON となり Tr3 は OFF となり、出力は低電圧レベル("0")となる(出力電圧 $V_{sat} \cong 0.2V$)。従ってこの回路全体としては正論理の NAND 回路として働く。

なお、Tr3 と Tr4 の間のダイオードは Tr3 が OFF になる事を保証するために用いられており、また入力のダイオードはクランプダイオードであってリングング防止のために入れられている。

Tr3 が ON のときの出力インピーダンスは大体 $75 \sim 125 \Omega$ であって普通に用いられる線路の特性インピーダンスにほぼ等しい。Tr4 が ON のときの出力インピーダンスは大体 $5 \sim 10 \Omega$ 程度である。なお、入力インピーダンスは高電圧レベルでは数 $100k \Omega$ 、低電圧レベルではほぼ R_1 に等しく普通数 $k \Omega$ であって、いずれの場合も線路のインピーダンスに比べれば ∞ と考えてよい。

図 5.1 (b) に示したのは高速度の TTL でインピーダンスを下げ高速化をはかっているが、消費電力は大きくはっている。Tr3 と Tr4 はダーリントン接続であり、高電圧レベルでの出力インピーダンスが小さくなって 10Ω の程度となる⁽¹⁰³⁾。なお、このダーリントン接続は右を $emc\ pole$ の上のトランジスタ Tr4 を飽和させない。

さらにトランジスタの飽和を避けて高速化をはかるため図 5.1 (c) に示すように Schottky ダイオード (IC で作り易い) を用いてベース・コレクタ接合をクランプする事が行われる(このようにクランプしたトランジスタは Schottky トランジスタと呼ばれる)。図 5.1 (b) の Tr4 を除いたすべてのトランジスタを Schottky トランジスタで置き換えた回路も用いられる事が多いが、出力インピーダンスは低電圧レベルでは 10Ω 程度、高電圧レベルでは高電流のとき 70Ω 程度、低電流のとき 10Ω 程度となる⁽¹⁰³⁾。

(2) ECL回路⁽¹⁰²⁾⁽¹⁰⁴⁾

その代表的回路の例を図5.2に示す。ECL回路はトランジスタを不飽和で動作させ消費電力はかぎり大きくするが最も高速であり(現在の一番高速のECL回路の遅れ時間は1ns程度である)、補元出力(正論理のORとNORの両方)も得ることが出来るし、また他の回路の出力端子と結んで wired OR もとる事が出来るなど、論理的融通性も高い。従って最近の高速計算法⁽¹⁰⁵⁾⁻⁽¹⁰⁷⁾では殆んど全部このECL回路を基本回路として採用している。

動作の概要を述べると、 V_{EE} と R_E で構成される定電流を入力によって切換えるものであって、すべての入力が低電圧レベルのとき Tr_4 がONであり、入力の一つまたはそれ以上が高電圧レベルになるとその対応するトランジスタに電流が流れ Tr_4 はOFFとなる。 Tr_5 はエミッタホロワであり低インピーダンスの基準電圧 V_{BB} を作り出している。出力の Tr_6 と Tr_7 はエミッタホロワであり低出力インピーダンス(5~10 Ω)で多数のファンアウトを供給できる。

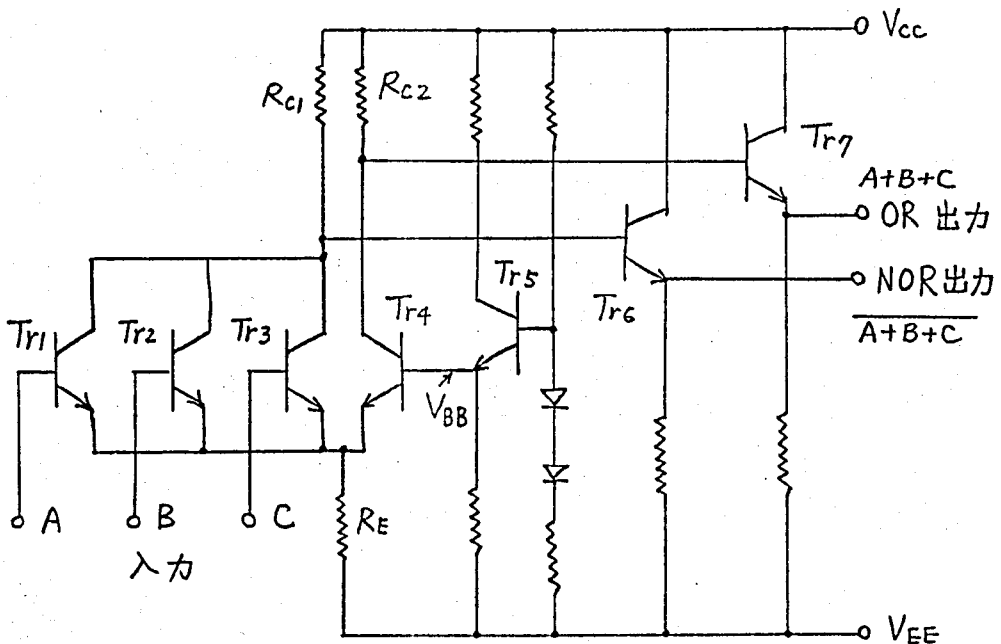


図 5.2

"0" 出力レベルは $V_{CC} - V_{BE}$ ($V_{BE} \cong 0.7 \sim 0.8V$)

"1" 出力レベルは $V_{CC} - V_{BE} - \frac{R_C (V_{BB} - V_{BE})}{R_E}$

であり, 従つて論理振巾 (logic swing) は $\frac{R_C (V_{BB} - V_{BE})}{R_E}$

(これは前にふれたように抵抗の比で決まる) であり, 普通の設計では大抵 V_{BE} に等しく $0.8V$ 程度である。入力インピーダンスは $100k\Omega$ の程度であつて, TTLの場合と同様線路のインピーダンスに比べれば ∞ と考えられる。

論理振巾が $0.8V$ と小さいので外来雑音に対しては弱いと云えるが, 内部雑音は論理振巾に比例するので特に ECL 回路が内部雑音に対して弱いという事はない。なお, 第1章で触れたように, 論理状態によつて定電流を切換えるだけなのでその回路全体としての電抗は殆んど変化なく, 従つて電源雑音は全然問題にならない。

5.3 雑音余裕度 ⁽¹⁰⁸⁾⁻⁽¹¹¹⁾

論理回路の良さを示す特性定数の一つに, どの位の雑音電圧が入つてもまだ正常に動作しようかという事を示す定数が必要である。論理回路を縦続に接続した場合を考えると, 前段の出力はそのまゝ後段の入力となる。入出力伝達特性のグラフを図 5.3 に示す。ある余裕を以て "1" とみなせる最小限のレベルを $\min. V_{L1}$, "0" とみなせる最大限のレベルを $\max. V_{L0}$ とする。 $\min. V_{L1}$ を出力に出すためには図 5.3 に示すように V_{t0} の入力が必要である。ところがその前段において V_{t1} が入力に代つておれば, 出力は $\max. V_{L0}$ になっている筈である。したがつて, $\max. V_{L0}$ と V_{t0} の差だけは雑音が入つても誤動作しないという事になる。これは直接につながられに各段において, "0" レベルで $V_{t0} - \max. V_{L0}$, "1" レベルで $\min. V_{L1} - V_{t1}$ なる雑音が入つても次に $\min. V_{L1}$, $\max. V_{L0}$ を出力として出せる事を意味している。すなわち, "0" レベル雑音余裕 (noise margin) NM_0 ,

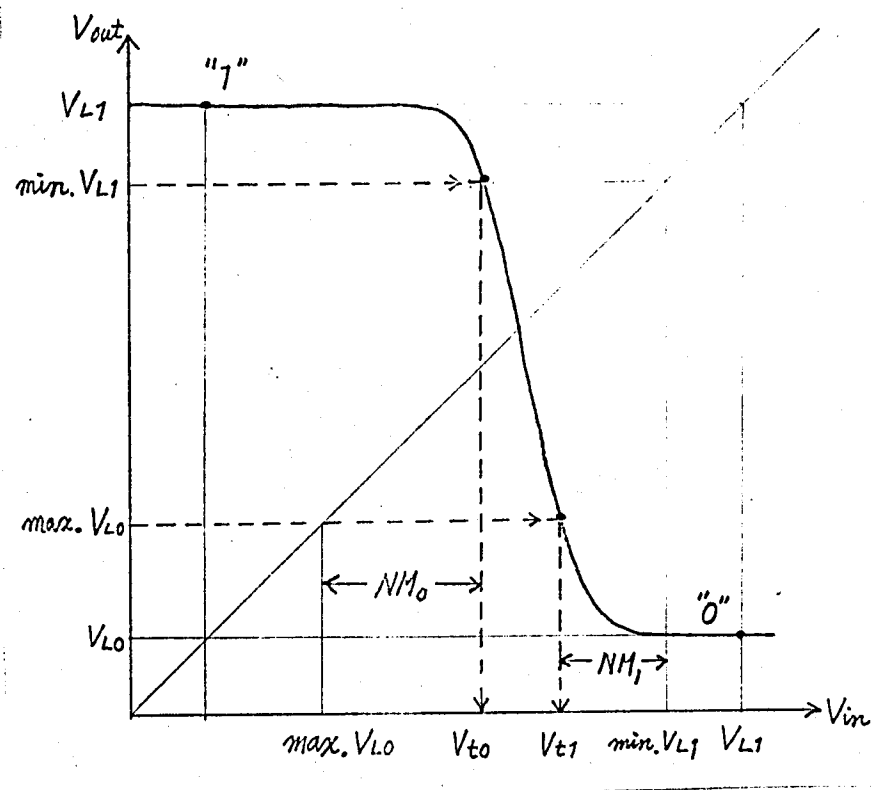


図 5.3

"1"レベル雑音余裕 NM_1 は

$$NM_0 = V_{t0} - \max. V_{L0}$$

$$NM_1 = \min V_{L1} - V_{t1}$$

で与えられる。内部雑音は論理振巾 ($V_{L1} - V_{L0}$) に比例するので、雑音余裕を論理振巾に対する比で表われば、雑音余裕度 (noise immunity) は

$$NI = \frac{NM}{V_{L1} - V_{L0}}$$

で与えられる。

以上は直感的に考えた DC noise margin であったが、実際のシステムにおいては雑音はパルスの形をしているので、AC noise margin を考える必要がある。回路が継続に接続されているとき、雑音信号がこれ等の回路を伝搬して誤り動作を生じさせるとき、実際に雑音とほる。AC noise margin は、回路の入力が $\min. V_{L1}$ または $\max. V_{L0}$ のときに入力に雑音パルスを

加えて、出力に丁度加えたのと同じ振中のパルスが生じるとき、その振中として定義する事が出来る。AC noise marginは非常にパルス中が広いときはDCのそれと一致するが、図5.4⁽¹⁰²⁾に示すようにパルス中が小さくなると大きくなる。⁽¹⁰⁸⁾⁻⁽¹¹¹⁾

数値例をあげ

れば、最近のある高速計算機で使用しているECL回路ではDC NMは225mV、AC NMは330mVである⁽¹⁰⁷⁾。

図5.7(b)に示したTTL

でDC NMは400mV⁽¹⁰³⁾、図5.2

のECLでDC NMが大体200mVである⁽¹⁰⁴⁾。

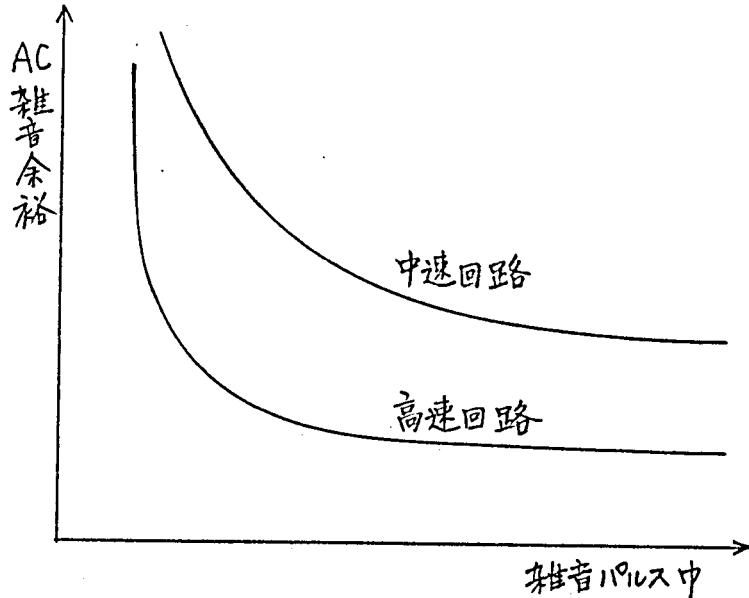


図 5.4

5.4 論理布線設計

TTLおよびECL回路を実装した場合、その出力インピーダンスは上に述べたように図5.7(a)の中速度TTLで出力が“1”の時のみ線路のインピーダンスにほぼ等しく反射係数は0となるが、その他の場合は線路のインピーダンスに比べれば非常に小さく、従って反射係数はほぼ-1となる事が出来る。入力インピーダンスは線路のインピーダンスに比べて大変小さいのでこのままでは反射係数1となり、リズギングを起こして反射雑音が大変大きくなるので、反射雑音の見地から長い線路では終端を整合する必要がある。

まず、中速度TTLで出力が“1”の場合は回路の出力での反射

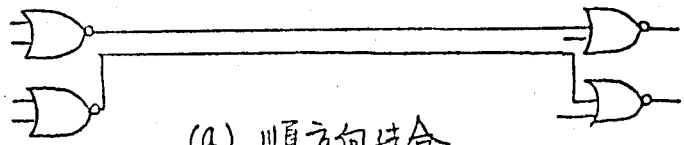
係数はほぼ0であり
 終端は整合させるの
 で回路の入力での反
 射係数も0である。

従って、第3章の
 3.3.2で扱った場合
 になる。

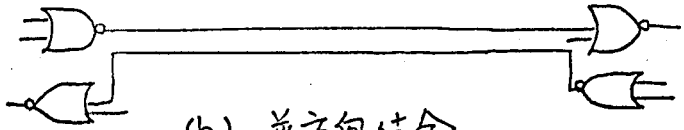
その他高速度TTL
 やECLの場合には
 回路の出力での反射

係数はほぼ-1であり、回路の入力では整合をとっているので反
 射係数は0である。結合の仕方は図5.5に示すように二通りが
 考えられる。(a)の順方向結合の場合には、第3章3.3.3の(1)の
 場合になるし、(b)の逆方向結合の場合には、同じく3.3.3の(3)
 の場合になる。従ってこれ等の結果と第4章の図4.13とから、
 振動余裕度をきめれば、どの位の線内距離にすればよいか
 わかる。

なお、三本の並行伝送路で真中の線が両側から同時に誘導をう
 ける場合には振動は増大すると考えてよいから、これを考慮し
 て線内距離を定めよう。



(a) 順方向結合



(b) 逆方向結合

図 5.5

第6章 結び

まず、第1章では計算機回路での種々の雑音のうち特に誘導雑音が高速高密度実装回路で重要であることを示した。

第2章では電磁界でのマクスウエルの方程式を出発点として、多線系線路の基本式を導き、伝播定数マトリックス、特性アドミタンスマトリックスを用いた一般解を示し、またこの特性アドミタンスマトリックスが対称マトリックスで物理的に実現可能であることを示した。多重反射は反射係数マトリックスを用いて表わす事ができ、線路の任意の共に電圧源群、電流源群が誘起された時の一般式を導いた。そして以上の理論をマクログロー回路で重要な多線系指数線路に拡張して、forwardおよびbackwardの特性アドミタンスマトリックス（これも物理的に実現可能）を導入する事によって一様の多線系線路と同様に取扱える事ができる事を明らかにした。そしてこれ等の結果が最近単一伝導線路について発表された結果を包含している事を示した。さらに伝送定数マトリックスも指制線路の場合について示したが、勿論この特別な場合として ($a=0$)、一様線路の場合を包含している。

第3章においては、まず従来よく用いられている弱結合理論に基づいて誘導雑音の基本式を導き出し、次いで第2章で明らかにした多線系線路の一般理論を対称二線系線路の場合に適用する事によって被誘導線が誘導線に及ぼす影響も考慮に入れた場合の一般式を導出した。そして特にいわゆる前進誘導雑音といわれるものが従来知られていなかったとはかなり異なった性質をもっている事を明らかにした。さらにこの多線系線路理論による解析結果が各種端子条件の下で実験結果ともよく一致する事を示し、弱結合理論と多線系理論による結果を合わせて、誘導雑音の実用的な等価回路を導いた。

第4章においてはグリーン関数と積分方程式による解析法を用いて、もとよりマククロストリップ回路の諸特性を明らかにした。この解析法はストリップ導体の厚さに対する制限も含めなく、また埋め込まれたマククロストリップ線路、しゃへい型ストリップ線路も全く同様に解析できる等大変有効な方法である事を示した。また計算結果も実験結果とよく一致する事を明らかにした。この章で示している結果は計算機論理回路の誘導線路を解析するのに便利であろうが、方法そのものはマククロ線路の設計にも適用できるものであり、現に付録に示した筆者のプログラムは、MITのリンカーン研究所でマククロ線路の設計のために使用中である。(90)

第5章では第3章、第4章の結果を用いて、実際に高速論理回路のTTLおよびECL回路を実装したとき、線間距離等をどのようにして定めたらよいかを明らかにした。

最後に本研究の遂行に際して、種々有益な助言を下され、親切に指導下さった京都大学工学部藤原宏教授に心から深謝致し得る。

参 考 文 献

- (1) J. R. Carson and R.S. Hoyt: "Propagation of periodic currents over a system of parallel wires", Bell System Tech. Jour., 6, pp.495-505 (July. 1927).
- (2) S. Hayashi: "Surges on transmission systems", Denki-shoin, Tokyo (1955).
- (3) P. Althammer: "Ein Beitrag zur Berechnung von Ausgleichvorgängen auf Mehrleitersystemen", Arch. Elektrotechnik, 49, pp. 170-182 (March 1964).
- (4) H. Kaden: "Die Übertragungsmatrizen gekoppelter Leitungen", Arch. elekt. Übertragung, 16, pp.296-306 (June 1962).
- (5) H. Amemiya: "Time-domain analysis of multiple parallel transmission lines", RCA Rev., 28, pp.241-276 (June 1967).
- (6) _____: "matched-termination network for multiple parallel transmission lines", Electronics Letters, 3, pp.13-14 (Jan. 1967).
- (7) _____: "Time-domain analysis of multiple parallel transmission lines by means of equivalent circuits", Electronics Letters, 3, pp. 14-15 (Jan. 1967).
- (8) E.C. Bertnolli: "Analysis of the n -wire exponential lines", Proc. IEEE, 55, p.1225 (July 1967).
- (9) H. Hagiwara and S. Okugawa: "Time-domain analysis of multiconductor exponential

- lines", *Proc. IEEE*, 56, pp. 1111-1112 (June 1968).
- (10) L. A. Pipes: "Direct computation of transmission matrices of electrical transmission lines: Part I", *J. Franklin Institute*, 281, pp. 275-292 (April 1966).
- (11) —: "Applications of Laplace transforms of matrix functions", *J. Franklin Institute*, 285, pp. 436-451 (June 1968).
- (12) M. A. Murray-Lasso: "Unified matrix theory of lumped and distributed directional couplers", *Bell System Tech. Jour.*, 47, pp. 39-71 (Jan. 1968).
- (13) R. A. Frazer, W. J. Duncan, and A. R. Collar: "Elementary matrices", Cambridge University Press, London (1963).
- (14) C. L. Chao and W. H. Ku: "A general expression for the reflection coefficients of an exponential transmission line", *Proc. IEEE*, 56, pp. 2199-2200 (Dec. 1968).
- (15) 松下: "媒質が不均一な多線条線路の伝搬モード", *電子通信学会論文誌*, 53-A, pp. 515-522 (Oct. 1970).
- (16) —: "多線条線路の伝送特性", *電子通信学会論文誌*, 53-A, pp. 671-678 (Dec. 1970).
- (17) F. Y. Chang: "Transient analysis of lossless coupled transmission lines in a non-homogeneous dielectric medium", *IEEE Trans.*, MTT-18, pp. 616-626 (Sept. 1970).
- (18) H. Guckel and Y. Y. Sun: "Uniform multimode transmission lines", *IEEE Trans.*, MTT-20, pp. 412-413 (June 1972).
- (19) W. T. Weeks: "Multiconductor transmission-

- line theory in the TEM approximation", IBM J., 16, pp. 604-611 (Nov. 1972).
- (20) C.W. Ho: "Theory and computer-aided analysis of lossless transmission lines", IBM J., 17, pp. 249-255 (May 1973).
- (21) K.D. Marx: "Propagation modes, equivalent circuits, and characteristic terminations for multiconductor transmission lines with inhomogeneous dielectrics", IEEE Trans., MTT-21, pp. 450-457 (July 1973).
- (22) C.Y. Paul: "On uniform multimode transmission lines", IEEE Trans., MTT-21, pp. 556-558 (Aug. 1973).
- (23) D.B. Jarvis: "The effects of interconnections on high-speed logic circuits", IEEE Trans., EC-12, pp. 476-487 (Oct. 1963).
- (24) H. Gray: "Digital computer engineering", pp. 292-296, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliff, N.J. (1963).
- (25) A. Feller, H.R. Kaupp, and J.J. DiGiacomo: "Crosstalk and reflections in high-speed digital systems", AFIPS Conference Proceedings, 27, pp. 511-525 (1965 FJCC).
- (26) 片岡: "論理布線における波形歪と雑音について", 通信学会電子計算機研資, EC-65, 2-18 (Feb. 1965).
- (27) J.F. Rössing and J.E. Walther: "Calculation of cross-coupled noise in digital systems", IEEE Trans., EC-16, pp. 14-17 (Feb. 1967).
- (28) J.B. Connolly: "Cross coupling in high speed digital systems", IEEE Trans., EC-15, pp. 323-327 (June 1966).

- (29) G.F. Bland: "Directional coupling and its use for memory noise reduction", IBM J., 7, pp. 252-256 (July 1963).
- (30) M. Cott: "Ondes de courant sans tension et de tension sans courant sur deux lignes parallèles", Onde élect., 34, pp. 381-383 (Aug. 1954).
- (31) E.M.T. Jones and J.T. Bolljahn: "Coupled-strip-transmission-line filters and directional couplers", IRE Trans., MTT-4, pp. 75-81 (April 1956).
- (32) G.L. Matthaei, L. Young, and E.M.T. Jones: "Microwave filters, impedance matching network and coupling structures", McGraw-Hill, N.Y. (1964).
- (33) I. Catt: "Crosstalk (noise) in digital systems", IEEE Trans., EC-16, pp. 743-763 (Dec. 1967).
- (34) E.C. Garth and I. Catt: "Ultrahigh-speed IC's require shorter, faster interconnections", Electronics, 39, pp. 103-110 (July 1968).
- (35) D.E. Lynn, C.S. Meyer, and D.J. Hamilton: "Analysis and design of integrated circuits", Chap. 11, McGraw-Hill, N.Y. (1967).
- (36) J.A. Defalco: "Reflection and crosstalk in logic circuit interconnection", IEEE Spectrum, 7, pp. 44-50 (July 1970).
- (37) _____: "Predicting crosstalk in digital systems", Computer Design, 12, pp. 69-75 (June 1973).
- (38) R.E. Matick: "Transmission line pulse transformers - theory and applications", Proc. IEEE, 56, pp. 47-62 (Jan. 1968).

- (39) 萩原・須川: "論理配線間の誘導雑音に関する一考察", 昭和42年電子通信学会全国大会, No. 41 (Oct. 1967).
- (40) ———: "論理配線間の誘導雑音に関する一考察(II)", 昭和43年電気四学会連合大会, No. 2735 (March 1968).
- (41) 松下: "多線糸線路の誘導雑音概算法", 電子通信学会論文誌, 54-C, pp. 257-265 (March 1971).
- (42) 浜崎: "マイクロ波ストリツフ線路(その1)", 電子通信学会誌, 52, pp. 1144-1153 (Sept. 1969).
- (43) ———: "マイクロ波ストリツフ線路(その2)", 電子通信学会誌, 52, pp. 1249-1255 (Oct. 1969).
- (44) F. Oberkettlinger and W. Magnus: "Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik", Chap. 3, Springer-Verlag, Berlin (1949).
- (45) S. B. Cohn: "Characteristic impedance of the shielded-strip transmission line", IRE Trans., MTT-2, pp. 52-57 (Feb. 1954).
- (46) ———: "Shielded coupled-strip transmission line", IRE Trans., MTT-3, pp. 29-38 (Oct. 1955).
- (47) ———: "Thickness corrections for capacitive obstacles and strip conductors", IRE Trans., MTT-8, pp. 638-644 (Nov. 1960).
- (48) J. Singletary, Jr.: "Fringing capacitance in strip-line coupler design", IEEE Trans., MTT-14, p. 398 (Aug. 1966).
- (49) W. J. Gestinger: "Coupled rectangular bars between parallel plates", IRE Trans., MTT-10, pp. 65-72 (Jan. 1962).
- (50) H. Guckel: "Characteristic impedances of generalized rectangular transmission lines", IEEE Trans., MTT-13, pp. 270-274 (May 1965).

- (51) J.W. Duncan: "Characteristic impedances of multiconductor strip transmission lines", *IEEE Trans.*, MTT-13, pp. 107-118 (Jan. 1965).
- (52) M.V. Schneider: "Computation of impedance and attenuation of TEM-lines by finite difference methods", *IEEE Trans.*, MTT-13, pp. 793-800 (Nov. 1965).
- (53) H.E. Green: "The numerical solution of some important transmission-line problems", *IEEE Trans.*, MTT-13, pp. 676-692 (Sept. 1965).
- (54) R.O. McCary: "An approximation to the asymmetric strip-line coupling coefficient", *IEEE Trans.*, C-17, pp. 537-542 (June 1968).
- (55) L.W. Cahill: "Design formulae for parallel-coupled striplines", *Proceedings of the IREE*, 33, pp. 573-574 (Dec. 1972).
- (56) F. Assadourian and E. Rami: "Simplified theory of microstrip transmission systems", *Proc. IRE*, 40, pp. 1651-1657 (Dec. 1952).
- (57) H.A. Wheeler: "Transmission line properties of parallel wide strips by a conformal mapping approximation", *IEEE Trans.*, MTT-12, pp. 280-289 (May 1964)
- (58) _____: "Transmission line properties of parallel strips separated by a dielectric sheet", *IEEE Trans.*, MTT-13, pp. 172-185 (March 1965).
- (59) H.E. Stinehelfer: "An accurate calculation of uniform microstrip transmission lines", *IEEE Trans.*, MTT-16, pp. 439-444 (June 1968).
- (60) E. Yamashita and R. Mittra: "Variational method for the analysis of microstrip lines",

- (61) IEEE Trans., MTT-16, pp. 251-256 (April 1968).
 : "Variational method for the analysis of microstrip-like transmission lines", IEEE Trans., MTT-16, pp. 529-535 (August 1968).
- (62) E.G. Cristal : "Coupled circular cylindrical rods between parallel ground planes", IEEE Trans., MTT-12, pp. 428-439 (July 1964).
- (63) R.L. Brooke and J.E. Cruz : "Current distribution and impedance of lossless conductor systems", IEEE Trans., MTT-15, pp. 358-364 (June 1967).
- (64) R.L. Brooke, C.A. Hoer, and C.H. Love : "Inductance and characteristic impedance of strip-lines", J. Research NBS (Engineering and Instrumentation), 71C, pp. 59-67 (Jan. - March 1967).
- (65) P. Silvester : "TEM wave properties of microstrip transmission lines", Proc. Instn Elect. Engrs, 115, pp. 43-48 (Jan. 1968).
- (66) 萩原・興川 : "マイクロストリップ線路間の誘導雑音の解析", 電子通信学会電子計測技術研究, EC-68, 21 (Oct 1968)
- (67) D.W. Kammler : "Calculation of characteristic admittances and coupling coefficients for strip transmission lines", IEEE Trans., MTT-16, pp. 925-937 (Nov. 1968).
- (68) T.G. Bryant and J.A. Weiss : "Parameters of microstrip transmission lines and of coupled pairs of microstrip lines", IEEE Trans., MTT-16, pp. 1021-1027 (Dec. 1968).
- (69) Y.M. Hill, N.O. Reckord, and D.R. Winner : "A general method for obtaining impedance

and coupling characteristics of practical microstrip and triplate transmission line configurations", IBM J., 13, pp. 314-322 (May 1969).

- (70) H.L. Clemm = "Berechnung von Kapazität und Wellenwiderstand der Streifenleitung auf einem dielektrischen Träger (microstrip) mit Hilfe der Teilflächen-Methode", Frequenz, 23, pp. 143-151 (May 1969).
- (71) M.A.R. Gunston and J.R. Weale = "Variations of microstrip impedance with strip thickness", Electronics Letters, 5, pp. 697-698 (Dec. 1969).
- (72) W.T. Weeks = "Calculation of coefficient of capacitance of multiconductor transmission lines in the presence of a dielectric interface", IEEE Trans., MTT-18, pp. 35-43 (Jan. 1970).
- (73) 厚木, 山下 = "厚ストリップ導体を持つ線路の解析", 電子通信学会マイクロ波研究, MW-69, 16 (June 1969).
- (74) 山下, 厚木 = "誘電体板上の平行ストリップ線路", 電子通信学会マイクロ波研究, MW-70, 5 (April 1970).
- (75) E. Yamashita and K. Atsuki = "Strip line with rectangular outer conductor and three dielectric layers", IEEE Trans., MTT-18, pp. 238-244 (May 1970).
- (76) 厚木, 山下 = "厚ストリップ導体, 多重誘電体層おびわらへい導体を持つ線路の解析法", 電子通信学会論文誌, 53-B, pp. 322-328 (June 1970).
- (77) 島崎, 清野 = "積分方程式によるマイクロストリップ線路の解析法", 電子通信学会論文誌, 54-B, pp. 69-76 (Feb. 1971).
- (78) Y. Chang and I.C. Chang = "Simple method for the variational analysis of a generalized

- N-dielectric-layer transmission line", *Electronics Letters*, 6, pp. 49-50 (Feb. 1970).
- (79) Y. Chang and Chang-Yu Wu: "Extension of Chang-Chang's method to analysis of generalized multilayer and multi-conductor transmission-line systems", *Elektronics Letters*, 7, pp. 45-47 (Jan. 1971).
- (80) W. Bräckelmann: "Leitungskonstanten gekoppelter Streifenleitungen", *Nachrichtentech. Z.*, 24, pp. 157-162 (March 1971).
- (81) M. Ramadan and W.F. Westgate: "Impedance of coupled microstrip transmission lines", *The Microwave Journal*, 14, pp. 30-34 (June 1971).
- (82) H.G. Bergandt and R. Pregla: "Calculation of the even- and odd-mode capacitance parameters for coupled microstrips", *Arch. für Elektronik und Übertragungstechnik*, 26, pp. 153-158 (April 1972).
- (83) R. Pregla: "Calculation of the distributed capacitances and phase velocities in coupled microstrip lines by conformal mapping techniques", *Arch. für Elektronik und Übertragungstechnik*, 26, pp. 470-474 (Nov. 1972).
- (84) M. Gaulton, J.J. Hughes, and H. Sobol: "Measurements on the properties of microstrip transmission lines for microwave integrated circuits", *RCA Rev.*, 27, pp. 377-391 (Sept. 1966).
- (85) L.S. Napoli and J.J. Hughes: "Characteristic of coupled microstrip lines", *RCA Rev.*,

- 31, pp. 479-498 (Sept. 1970).
- (86) H. R. Kaupp : "Characteristics of microstrip transmission lines", *IEEE Trans.*, EC-16, pp. 185-193 (April 1967).
- (87) H. R. Kaupp : "Pulse crosstalk between microstrip transmission lines", 7th International Electronic Circuit Packaging Symposium Record (WESCON 66), 2/5 (Aug. 1966)
- (88) 奥川・森原 : "マイクロストリップ線路間の誘導雑音の解析と計算", *電子通信学会論文誌*, 53-C, pp. 485-492 (July 1970).
- (89) S. V. Judd, I. Whiteley, R. J. Clowes, and D. C. Rickard : "An analytical method for calculating microstrip transmission line parameters", *IEEE Trans.*, MTT-18, pp. 78-87 (Feb. 1970).
- (90) R. Rao : private communication
- (91) H. R. Kaupp : "Effects of embedding microstrip interconnections", *Electronic Packaging Product Conference*, pp. 189-201 (Oct. 1970)
- (92) S. Okugawa : "Calculation of characteristic of embedded coupled microstrip lines with finite thickness", *Electronics Letters*, 8, pp. 494-495 (Oct. 1972).
- (93) 奥川 : "高速計算機用ストリップ線路の特性解析", *京産大論文*, 2, pp. 85-93 (Feb. 1973).
- (94) R. A. Pucel, D. J. Massé, and C. P. Hartung : "Losses in microstrip", *IEEE Trans.*, MTT-16, pp. 342-350 (June 1968).
- (95) 喜田村, 寺田 他 : "表皮効果のあるストリップ線路の諸特性", *電子通信学会論文誌*, 52-A, pp. 360-366 (Sept 1969).

- (96) A. Gopinath, R. Horton, and B. Easter: "Microstrip loss calculations", *Electronics Letters*, 6, pp. 40-41 (Jan. 1970).
- (97) R. Horton: "Loss calculations of coupled microstrip lines", *IEEE Trans.*, MTT-21, pp. 359-360 (May 1973).
- (98) P.C. Chestnut: "On determining the capacitances of shielded multiconductor transmission lines", *IEEE Trans.*, MTT-17, pp. 734-745 (Oct. 1969).
- (99) M.A.R. Gunston and J.R. Weale: "The transmission characteristics of microstrip", *The Marconi Review*, 32, 3rd quarter, pp. 226-243 (1969).
- (100) R. Horton and B. Easter: "Impedance and guide wavelength on an arbitrary ferromagnetic substrate", *Electronics Letters*, 7, pp. 642-643 (Oct. 1971).
- (101) R.A. Pucel and D.J. Massé: "Microstrip propagation on magnetic substrates - Part I: Design theory", *IEEE Trans.*, MTT-20, pp. 304-308 (May 1972).
- (102) D.K. Lynn, C.S. Meyer, and D.J. Hamilton: "Analysis and design of integrated circuits", Chap. 6-11, McGraw-Hill, N.Y. (1967).
- (103) L.S. Garrett: "Integrated-circuit digital logic families II", *IEEE Spectrum*, 7, 11, pp. 63-72 (Nov. 1970).
- (104) _____: "Integrated-circuit digital logic families III", *IEEE Spectrum*, 7, 12, pp. 30-42 (Dec. 1970).

- (105) P.E. Fox and W.J. Nestork : "Design of logic circuit technology for IBM system/370 models 145 and 155", *IBM J.*, 15, pp. 384-390 (Dec. 1971).
- (106) H.J. White and R.A. Stotler : "Packaging a billion operations per second computer", *Proc. of Technical Program National Electronic Packaging and Production Conference (NEPCON)*, pp. 367-386 (1971).
- (107) K. Nakazawa, et al : "The system packaging of a very high-speed computer", *Proc. of Technical Program National Electronic Packaging and Production Conference (NEPCON)*, pp. 399-406 (1971).
- (108) G. Luecke : "Noise margins in digital integrated circuits", *Proc. IEEE*, 52, pp. 1565-1571 (Dec. 1964).
- (109) F.C. Yao : "Interconnection and noise immunity of circuitry in digital computers", *IEEE Trans.*, EC-14, pp. 875-880 (Dec. 1965).
- (110) S.S. Eaton : "IC noise-immunity measurement", *Instruments and Control Systems*, 42, pp. 77-80 (Oct. 1970).
- (111) V. Boarn : "Designing logic circuits for high noise immunity", *IEEE Spectrum*, 10, 1, pp. 53-59 (Jan. 1973).
- (112) A. Richardson : "Noise consideration in microelectronic digital computers", *Electrical Communication*, 41, pp. 467-475 (April 1966).
- (113) 片岡, 山方 : "集積論理回路における配線間誘導雑音について", *電子通信学会論文誌*, 53-C, pp. 230-236 (April 1970).

```

SUBROUTINE CAP(A,B,T,NH,NV,ER,EO,C)
COMMON IBT,IEM,HD
DIMENSION P(100,101)
AK=(1,-ER)/(1.+ER)
H=1.+(T+HD)*FLOAT(1-IEM)/2,
BE0=0,
IF(P) 201,202,201
201 NN=2*(NH+NV)
GO TO 203
202 NN=2*NH+NV
203 S=0,
DO 210 I=1,NH
IF(P) 211,212,211
212 S=S+1./FLOAT(I+1)**IBT
GO TO 210
211 S=S+1./((ABS(FLOAT(NH/2-I)-BE0+EO*(2.*BE0+1.))+2.))**IBT
210 CONTINUE
CDA=A/S
IF(T) 204,205,204
205 NN=NH
GO TO 206
204 S=0,
DO 220 I=1,NV
S=S+1./((ABS(FLOAT(NV/2-I+1))+2.))**IBT
220 CONTINUE
CDT=T/S
206 HJ=0,
DO 200 JJ=1,NN
DO 200 KK=1,JJ
J=JJ
K=KK
J2=J-NH
IF(J2) 11,11,12
11 IF(KK-1) 301,300,301
300 IF(P) 370,371,370
371 DAJ=CDA/FLOAT(J+1)**IBT
GO TO 372
370 DAJ=CDA/(ABS(FLOAT(NH/2-J)-BE0+EO*(2.*BE0+1.))+2.))**IBT
372 HJ=HJ+DAJ
301 JFK=1
341 IF(P) 375,376,375
376 DAK=CDA/FLOAT(K+1)**IBT
GO TO 350
375 DAK=CDA/(ABS(FLOAT(NH/2-K)-BE0+EO*(2.*BE0+1.))+2.))**IBT
GO TO 350
12 J3=J2-NH
IF(J3) 13,13,14
13 J=J2
IF(JKF.LE.1) HJ=0,
IF(KK-1) 311,310,311
310 IF(P) 380,381,380
381 DAJ=CDA/FLOAT(J+1)**IBT
GO TO 382

```



```

380 DAJ=QDA/(ABS(FLOAT(NH/2-J)-BEO+EO*(2.*BEO+1.))+2.)*IBT
382 HJ=HJ+DAJ
311 K2=K-NH
    IF(K2) 15,15,16
 15 JKFE2
    GO TO 341
 16 JKFE3
342 K=K2
    GO TO 341
 14 J4=J3-NV
    IF(J4) 17,17,18
 17 J=J3
    IF(JKF,LE,3) HJ=0.
    IF((K-1) 321,320,321
320 DAJ=QDT/(ABS(FLOAT(NV/2-J+1))+2.)*IBT
    HJ=HJ+DAJ
321 K2=K-NH
    IF(K2) 19,19,20
 19 JKFE4
    GO TO 341
 20 K3=K2-NH
    IF(K3) 21,21,22
 21 JKFE5
    GO TO 342
 22 JKFE6
343 K=K3
344 DAK=QDT/(ABS(FLOAT(NV/2-K+1))+2.)*IBT
    GO TO 350
 18 J=J4
    IF(JKF,LE,6) HJ=0.
    IF((K-1) 331,330,331
330 DAJ=QDT/(ABS(FLOAT(NV/2-J+1))+2.)*IBT
    HJ=HJ+DAJ
331 K2=K-NH
    IF(K2) 23,23,24
 23 JKFE7
    GO TO 341
 24 K3=K2-NH
    IF(K3) 26,26,27
 26 JKFE8
    GO TO 342
 27 K4=K3-NV
    IF(K4) 28,28,29
 28 JKFE9
    GO TO 343
 29 JKFE10
    K=K4
    GO TO 344
350 IF(K.EQ,1) HK=0.
    HK=HK+DAK
    R=1.
    S=0.
    DO 70 NP1=1,2000
    N=NP1-1

```

```

GO TO (51,52,53,54,55,56,57,58,59,60),JKF
51 YJ=1.
   YK=1.
   GO TO 61
52 YJ=1.+T
   YK=1.
   GO TO 61
53 YJ=1.+T
   YK=1.+T
61 A1=GH(DAJ,DAK,YJ+YK+H*FLOAT(2*N),HJ-HK)
   B1=GH(DAJ,DAK,YJ+YK+H*FLOAT(2*N),HJ+HK-DAK+2.*B)
   A2=GH(DAJ,DAK,ABS(YJ-YK-H*FLOAT(2*N*IEM)),HJ-HK)
   B2=GH(DAJ,DAK,ABS(YJ-YK-H*FLOAT(2*N*IEM)),HJ+HK-DAK+2.*B)
   A3=GH(DAJ,DAK,ABS(YJ+YK+H*FLOAT(2*(N-IEM)*IEM)),HJ-HK)
   B3=GH(DAJ,DAK,ABS(YJ+YK+H*FLOAT(2*(N-IEM)*IEM)),HJ+HK-DAK+2.*B)
   A4=GH(DAJ,DAK,ABS(YJ-YK-H*FLOAT(2*(N+1))),HJ-HK)
   B4=GH(DAJ,DAK,ABS(YJ-YK-H*FLOAT(2*(N+1))),HJ+HK-DAK+2.*B)
64 G1=A1-A2-FLOAT(IEM)*(A3-A4)*AK
   G2=B1-B2-FLOAT(IEM)*(B3-B4)*AK
   IF(CO) 71,72,71
72 FC=F*(G1+G2)
   GO TO 73
71 FC=F*(G1-G2)
73 S=S+FC
   IF(AK) 65,200,65
65 IF(ABS(FC/S)-1.E-7) 200,200,70
56 XJ=A+C
   XK=A+B
   GO TO 62
59 XJ=F
   XK=A+B
   GO TO 62
60 XJ=F
   XK=F
62 A1=GH(DAJ,DAK,ABS(XJ-XK),2,+HJ+HK-DAK+H*FLOAT(2*N))
   B1=GH(DAJ,DAK,XJ+XK,2,+HJ+HK-DAK+H*FLOAT(2*N))
   A2=GH(DAJ,DAK,ABS(XJ-XK),HJ-HK-H*FLOAT(2*N*IEM))
   B2=GH(DAJ,DAK,XJ+XK,HJ-HK-H*FLOAT(2*N*IEM))
   A3=GH(DAJ,DAK,ABS(XJ-XK),2,+HJ+HK-DAK+H*FLOAT(2*IEM*(N-IEM)))
   B3=GH(DAJ,DAK,XJ+XK,2,+HJ+HK-DAK+H*FLOAT(2*IEM*(N-IEM)))
   A4=GH(DAJ,DAK,ABS(XJ-XK),HJ-HK-H*FLOAT(2*(N+1)))
   B4=GH(DAJ,DAK,XJ+XK,HJ-HK-H*FLOAT(2*(N+1)))
   GO TO 64
54 XJ=A+B
   YK=1.
   GO TO 63
55 XJ=A+B
   YK=1.+T
   GO TO 63
57 XJ=F
   YK=1.
   GO TO 63
58 XJ=F
   YK=1.+T

```

```

63 A1=CQV(DAJ,DAK,XJ-B-HK,1.+HJ+YK+H*FLOAT(2*N))
   B1=CQV(DAJ,DAK,XJ+B+HK-DAK,1.+HJ+YK+H*FLOAT(2*N))
   A2=CQV(DAJ,DAK,XJ-B-HK,1.+HJ-YK-H*FLOAT(2*N*IEM))
   B2=CQV(DAJ,DAK,XJ+B+HK-DAK,1.+HJ-YK-H*FLOAT(2*N*IEM))
   A3=CQV(DAJ,DAK,XJ-B-HK,1.+HJ+YK+H*FLOAT(2*IEM*(N-IEM)))
   B3=CQV(DAJ,DAK,XJ+B+HK-DAK,1.+HJ+YK+H*FLOAT(2*IEM*(N-IEM)))
   A4=CQV(DAJ,DAK,XJ-B-HK,1.+HJ-YK-H*FLOAT(2*(N+1)))
   B4=CQV(DAJ,DAK,XJ+B+HK-DAK,1.+HJ-YK-H*FLOAT(2*(N+1)))
GO TO 64

```

```
70 R=R*AK
```

```
200 P(JJ,KK)=18.E9*ER**((IEM-1)/2)*S
```

```
DO 130 J=2,NN
```

```
JJ=J-1
```

```
DO 130 K=1,JJ
```

```
*B) 130 P(K,J)=P(J,K)
```

```
DO 180 I=1,NN
```

```
180 P(I,NN+1)=1.
```

```
DO 140 K=1,NN
```

```
W=P(K,K)
```

```
KK=K+1
```

```
NN1=NN+1
```

```
DO 150 J=KK,NN1
```

```
150 P(K,J)=P(K,J)/W
```

```
DO 140 I=1,NN
```

```
IF(I-K) 141,140,141
```

```
141 W=P(I,K)
```

```
DO 160 J=KK,NN1
```

```
160 P(I,J)=P(I,J)-W*P(K,J)
```

```
140 CONTINUE
```

```
C=0.
```

```
DO 170 I=1,NN
```

```
170 C=C+P(I,NN+1)
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
*** END OF JOB STEP
```

```
FTC
```

```
00000000 MSEC
```

```
***
```

```

FUNCTION GH(W1,W2,D,E)
  IF (ABS(E)+ABS(D)-20.*(W1+W2)) 1,1,2
1  GH=.5/W1/W2*(FH(E+W2-W1,D)+FH(E,B)-FH(E+W2,B)-FH(E-W1,B))
  RETURN
2  GH=.5*ALOG((E+.5*(W2-W1))**2+B*B)
  RETURN
END

```

```

FUNCTION FH(X,B)
  IF (D) 5,2,5
5  IF (X) 1,6,1
1  FH=1.5*X*X-2.*B*X*ATAN(X/B)-.5*(X*X-B*B)*ALOG(X*X+B*B)
  RETURN
2  IF (X) 3,4,3
3  FH=1.5*X*X-.5*X*X*ALOG(X*X)
  RETURN
4  FH=0.
  RETURN
6  FH=.5*B*B*ALOG(D*D)
  RETURN
END

```

```

FUNCTION GV(W1,W2,B,E)
  IF (ABS(E)+ABS(B)-20.*(W1+W2)) 1,1,2
1  GV=.5/W1/W2*(FV(E,B+W2)+FV(E-W1,B)-FV(E,B)-FV(E-W1,B+W2))
  RETURN
2  GV=.5*ALOG((B+.5*W2)**2+(E-.5*W1)**2)
  RETURN
END

```

```

FUNCTION FV(X,Y)
  IF (X) 1,2,1
1  IF (Y) 3,2,3
2  FV=0.
  RETURN
3  FV=X*Y*ALOG(X*X+Y*Y)-3.*X*Y+X*X*ATAN(Y/X)+Y*Y*ATAN(X/Y)
  RETURN
END

```
