交通流の配分と制御に関する基礎的研究

中　堀　一　郎

昭和51年 9 月

交通流の配分と制御に関する基礎的研究

中　堀　一　郎

昭和51年9月

序

交通システムの計画、設計及び制御の基礎となる交通流の理論は、現在多くの研究により序々にその体系を整えつつあるが、いまだに不完全な部分も多く残されている。現代の社会問題のうちでも交通問題の占める割合は非常に大きく、交通流理論の早急な整備が望まれている。本研究は、このような動機づけの基に行われた幾つかの研究をまとめたものである。

交通システムの計画及び設計において、交通流配分問題は重要な役割をもっている。この問題はこれまでに数多くの先覚者により研究が積み重ねられてきた。しかし、この問題をグラフ理論的に検討することはあまり行われていない。ここでは交通流網を多種流網としてとらえ、新しい視点から交通流配分問題の定式化を試みた。これに基づいて、配分問題に関する実用的なアルゴリズムを提案し、例題を用いてその有効性を確かめた。更に配分問題の応用として、需要・供給の均衡問題についても考察した。

交通システムの制御において、交通流の動的モデルの果たす役割は大きい。道路交通流を対象とした動的モデルとしては、いままでにいわゆるミクロモデル、マクロモデルに関する多くの提案がある。ここでは、道路交通流の状態推定及び予測に適合したマクロモデルについて考察し、新しく区間速度に基づく変数による状態モデルと統計モデルを導く。これを基に、交通状態の推定及び予測を行う手法を示し、実測データを用いてその有効性を確かめた。

謝　　　　　辞

この研究は、主として筆者が所属する三菱電機㈱中央研究所で行ったものを京都大学工学部西川褘一教授のご指導のもとにまとめたものである。この間1974及び1975年度に受託研究生として、直接同教授よりいただいたご懇篤なご指導は、本論文作成の大きな原動力となった。また、三菱電機中央研究所で筆者の直接の上司であるグループリーダ、上村勝彦博士には、本論文を書く機会と自由な研究環境を与えていただくと共に、研究遂行上における有益な示唆とご教示をいただいた。

東京大学工学部猪瀬博教授、東京大学生産技術研究所浜田喬助教授には、筆者に交通工学研究への動機づけを与えていただくと共に、研究の過程で種々のご指導をいただいた。

日本道路公団及び京都市交通局の関係各位、特に日本道路公団維持施設部植木源治氏には、有益なご教示をいただくと共に、交通実測等にひとかたならぬ便宜を与えていただいた。

三菱電機の諸先輩、同僚にはご厚意あふれるご激励とご援助をいただいた。特に、中央研究所顧問の京都大学名誉教授林千博博士及び本社重電計画部部長馬場準一博士には、終始ご厚情あふれるご激励をいただいた。また、中央研究所システム・電力系統グループの半田哲、前田和男及び中崎勝一の諸氏には、筆者の仕事に温いご援助とご協力をいただいた。

以上の方々に対し衷心より感謝の意を捧げる。

交通流の配分と制御に関する基礎的研究

目　　次

第１章　序　　論

1.1　本研究の背景

自動車台数の急激な増加と、それに対応する平面街路及び高速道路の拡充・整備により、道路交通需要が大巾に増大した。しかし都市等では局所的に需要量が供給量を上まわる場合も多く渋滞、事故及び公害等が日常的に発生し、大きな社会問題となっている。

この問題を解消するため、更に新しいバイパス、高速道路や地下鉄、モノレール、新交通システム等の各種施設計画、一方通行、進入禁止、右左折禁止等の各種規制を定める運用計画及び平面街路の信号管制、高速道路の流入調整のような既存道路の運用管理等の改善策が考えられ実行されている。しかるにこれらの計画及び運用管理は莫大な社会的費用を必要とするため、試行錯誤を極力少なくし、十分な事前評価に基づいた有効かつ適切なものにする必要がある。

このような背景のもとに、交通需要の発生、分布、機関別分担及び交通流配分等の交通計画問題及び交通流の監視と管制の問題が重要な課題となってきている。

1.2　内容梗概

筆者は上記の動機づけの下に、交通流の配分及び制御に関するいくつかの考察を行った。本論文はそのまとめであり、序論としての本章を含め７つの章から構成されている。本論文は大きく２つに分けることができる。まず第２章～第４章においては、交通計画問題の基本として大規模交通流網における静的な交通流配分問題を考察しており、次に第５章～第６章においては、道路交通流の制御問題の基本となる動的な交通流モデルについて考察している。以下に各章の内容の概要を述べる。

第２章では交通計画の基本となる交通流配分問題について考察する。交通流配分問題は、定まった出発点と目的点を持つ交通流を、何らかの意味で交通流網に最適に配分する問題である。この問題は電気、水の流れ等の出発点と目的点の定まらない一種流問題と異なり、多種流問題と呼ばれる。ここでは等時間則に基づく交通流配分問題に対して、一種流問題と対比しながらグラフ理論的な考察を加え、配分交通流の基礎方程式を導出し、それに基づくアルゴリズムを提案する。すなわち、まず交通流網をパス接続行列及びパスループ行列を導入して表現し、次にパスと枝をそれぞれ木と補木に分割して行列を整理変形する。その結果、交通量保存則、等時間則が簡潔に表現され、これらに枝の交通量ー旅行時間特性を加えて、枝交通量に関する２つの双対な基礎方程式及びパス交通量に関する基礎方程式を導く。これらの基礎方程式の求解を、従来のI. A.法又は Wayne 法と組み合わせて、有効なアルゴリズムを構成し、簡単な例題を用いて有用性を示す。更に、交通流が多階層である場合にも、枝特性を適当な形に表せば、これが１階層の場合と同様に解けることを示す。

第３章は、第２章で導いた交通流配分アルゴリズムの実用化に関する問題について考察している。まず、第２章で述べたアルゴリズムにおいて最も計算時間及び記憶容量を必要とする基礎方程式の求解について、その高速化と記憶容量の節約について考える。すなわち基礎方程式で逆行列が必要なパスループ・インピーダンス行列が正値対称であることに注目し、基礎方程式の求解に代数方程式の直接解法の一つである Choleski 法を適用した。更に繰返し計算における簡易化及び交通流網の分割法についても言及する。

次に、枝特性が非線形である場合の求解法として、区間線形写像法及び Newton−Raphson 法を適用する。Newton−Raphson 法に必要なヤコビ行列は、パスループ・インピーダンス行列の一般化された形であることが示され、簡単な求解法が提示される。最後に実用規模の問題を解く汎用プログラ

ムを開発し、例題でその有効性を確かめる。

第４章では、交通計画及び制御への交通流配分問題の応用について述べる。交通計画の各段階のうち、交通分布及び交通流配分の２つの段階を統一するため、交通流配分問題に交通需要特性を付加して、需要・供給の均衡解を表す基礎方程式を得る。この基礎方程式に基づき需要・供給の均衡解を得るアルゴリズムを提案し、その高速算法について述べる。更に、通行料金法又は流入制限法により交通の需要・供給の均衡解を操作することを考える。この問題は上述の基礎方程式を制限条件とし、仕事量を目的関数とする２次計画問題として定式化され、解の存在及び唯一性の条件が示され求解アルゴリズムが示される。

第５章では、道路交通流の状態モデルと、その状態推定への応用について考察する。従来の状態モデルの変数である交通密度及び空間平均速度の組合せに代えて、交通密度と区間速度に基づいて新しく定義する交通運動量及び交通エネルギーを状態変数とすることを提案する。これらの状態変数は、一定地点で計測される速度調和、交通量及び速度和にそれぞれ期待値が等しいことを示し、これらの関係式と各変量の保存則から、新しい差分方程式モデルを誘導する。このモデルを用いて高速道路における交通密度、交通運動量及び交通エネルギーが、一定地点で計測される速度調和、交通量及び速度和等から、また平面街路における交通密度が地点で計測される交通量及び旅行時間から、いずれもカルマン・フィルタを用いて推定される。これらの状態推定法の有効性は、それぞれ実測データによって確かめられている。

第６章では、道路交通流の統計モデルとその予測への応用について考察する。ここでは高速道路交通流が上流から下流へ一方向に流れることを利用し、これを上流地点と下流地点の時間量を入出力変数とした定常確率過程と考える。この入出力時系列の間に成立する統計モデルとしてＡＲＭＡモデルをあてはめ、システム・パラメータを同定する。これにより短期的な交通流の予

測が可能であることを示し、高速道路における事故検出及びトンネル換気制御への応用例について述べる。

第7章は本論文の結論であり、第2章～第6章で得られた結果をまとめると共に、今後に残された問題について述べる。

第2章　交通流配分問題に関する基礎的考察

2.1　緒　　言

交通流網において、与えられた起終点交通量（以下ＯＤ交通量と呼ぶ）を、ＯＤ間の径路（以下パスと呼ぶ）に何らかの意味で最適に分配する問題は、交通流配分問題と呼ばれる。この問題は、交通の発生、分布及び機関別分担と共に交通計画における基本的な過程であり、[96,107,130] 従来より都市交通計画や道路の新設計画において重要な役割を果たしてきた。最近、この問題は交通計画のみならず、道路網や新交通システム等の高度な交通管制においても、基本的な役割を担うことが広く認識されるようになった。

J.G.Wardrop[125] は交通流配分問題を、等時間配分と最適配分の問題に分類した。等時間配分とは、各ＯＤについて、交通流が配分されるパスの旅行時間はすべて等しく、配分されないパスのそれよりは長くないような配分のことである。これは、利用者が各自最短旅行時間のパスを選ぶことを目標とする、と仮定した非協力ゲームにおけるNashの均衡解であることが知られている。一方、最適配分とは、交通流網における総旅行時間（利用者の旅行時間の総和）が最小となるような配分である。この配分を実現するためには、利用者にパスを指定し強制する、何らかの管制が必要となる。上記二つの配分を、S.C.Dafermos と F.T.Sparrow[8,9] はそれぞれ、利用者最適及びシステム最適配分と呼んでいる。

DafermosとSparrow[8,9]及び井上[49]は、パスを構成する小区間（以下枝と呼ぶ）の特性がある条件を満たせば、これら二つの配分問題が Kuhn Tucker の定理に基づいて、互いに等価な問題に変換されることを示した。これらの問題の解の性質については、佐佐木[102] が等時間配分問題のパス交通量は唯一に定まらないことを指適しており、Dafermos と Sparrow[8,9] が或る枝特性のもとで枝交通量は存在し唯一であることを指適している。

配分問題の数値解法としては、等時間配分の解を得る逐増配分法[70]（Incremental Assignment 法、以下では I.A. 法と呼ぶ）とWayne法[111]及び、最適配分の解を得る凸計画法[31,65,67,86]が代表的なものであり、一般の交通流網を扱い得る計算機プログラムも、既に幾つか開発されている。[51,66] しかしこれらの数値解法は、理論的な明解さ、収束性の保証、及び計算量等の点で十分満足できるものではない。

等時間配分の解を代数的に表現しようとする試みは、佐佐木[45,46,102,103]等によって行われてきた。佐佐木[102]は交通量保存則及び等時間則より、パス交通量を一意的に決定するために、配分比条件を付け加えた。しかし一般的な交通流網に対して配分比条件を記述することは難しく、更に配分比条件が非線形であるため、求解が実際上困難となる。飯田[45]は長距離ODと短距離ODとは情報が不均等であるという仮説を用いて、配分比条件の加わった問題の求解法を提案している。一方、問題を各OD毎に分解すれば電気回路網と等価となることを利用した、逐次計算法もいくつか提案されている。[77,100,101,104] しかしこれらの提案も配分比条件の問題を根本的には解決しておらず、代数方程式の次元数についても明確な考察がされていない。

一般にネットワークは、電気や水のようにすべての流れが均質である一種流網と、交通流や情報流のように流れがOD毎に区別される多種流網に分類される。一種流網の代表例は電気回路網であり、近年、それに対するグラフ理論的研究が急速に進んでいる。一方、多種流網のグラフ理論的な考察はほとんどなされていない。

本章では、交通流網を多種流網としてとらえ、そのグラフ理論的考察に基づいて等時間配分問題を代数的に明確に表現し、更にこの問題の汎用解法を提案する。[78,79]

すなわち、まず等時間則を満たすパスの集合が既知であるとして、交通流網を新しく定めるパス接続行列で表現する。次にパスを木パスと補木パス

に分け、パス接続行列を整理することによってパスループ行列を定める。更にパスループ行列の最大正則小行列に対応して、枝を木枝と補木枝に分割する。これらを基に一種流網のループ方程式及びカット方程式に対応する、互いに双対な多種流網のパスループ方程式及びパスカット方程式を導く。そしてこれらの方程式の次元は、それぞれ補木枝と木枝の数に等しいことを示す。

これらの代数方程式の求解と、I. A.法あるいはWayne法とを組み合わせて、流量が非負のパスを最短パス探索法により順次見出しながら原配分問題の解を得る完結したアルゴリズムを構成し、簡単な例題でその有効性を確かめる。

2.2 準　備

枝（アーク）の集合をL、節点（ノード）の集合をNとし、集合{L, N}をグラフGとする。グラフGにおいて流れの起終点を表す節点の順序対をODと呼び、その集合をSとする。

各ODを結ぶ単純パス列（以下単にパスという）が少なくとも1本存在するとして、それらの集合をPと書く。　各ODに属するパス集合から任意に1本のパスを選び、これを木パスとする。それ以外のパスを補木パスとする。補木パスを1本選び、同じODに属する木パスとの間に出来るループをパスループと呼ぶ。

OD sの交通量を q_s、パスp及び枝 ℓ の交通量をそれぞれ q_p 及び q_ℓ とする。このとき交通量保存則は次のように書ける。

$$q_s = \sum_{p \in P} \delta_{sp}\, q_p \qquad (2.1)$$

$$q_\ell = \sum_{p \in P} \delta_{\ell p}\, q_p \qquad (2.2)$$

ここで

$$\delta_{sp} = \begin{cases} 1 & : \text{ p が s に属すとき} \\ 0 & : \text{ その他} \end{cases}$$

$$\delta_{\ell p} = \begin{cases} 1 & : \ \ell \text{ が p に含まれるとき} \\ 0 & : \text{ その他} \end{cases}$$

枝 ℓ での旅行時間 t_ℓ は、一般に図 2.1 に示すように、交通量 q_ℓ の関数

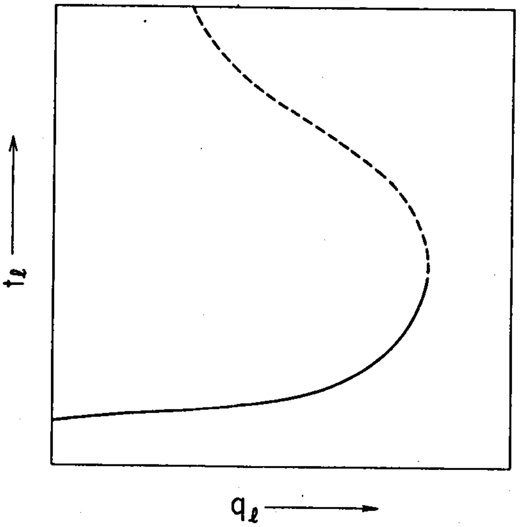

Fig. 2.1. A typical flow-volume vs. travel-time characteristic on an arc.

になる。図 2.1 において点線で表わされた部分は、流れの渋滞状態に対応している。しかし以下では理論的簡潔性と実用性の観点から旅行時間関数

$$t_\ell = t_\ell\,(q_\ell) \qquad (2.3)$$

は、$q_\ell \geqq 0$ で定義された連続な単調増加関数とする。この第 2 章では更にこの関数を図 2.2 に示すような線形関数に限定して考え、第 3 章で非線形関数の場合に拡張する。

枝 ℓ における総旅行時間 c_ℓ は次式で与えられる。

$$c_\ell \triangleq q_\ell\, t_\ell = c_\ell\,(q_\ell) \qquad (2.4)$$

(2.3) 及び (2.4) 式で定まる関数 $t_\ell\,(q_\ell)$ 及び $c_\ell(q_\ell)$ は枝 ℓ における交通流の特性（以下では枝特性と呼ぶ）を表している。

パス p の旅行時間 t_p と ODs の旅行時間 t_s は、それぞれに含まれる枝

---

† ここでいう旅行時間は、実際の旅行時間の他に通行料金、快適性、安全性等旅行を評価する多くの指標の総合指標としての等価旅行時間を意味する。

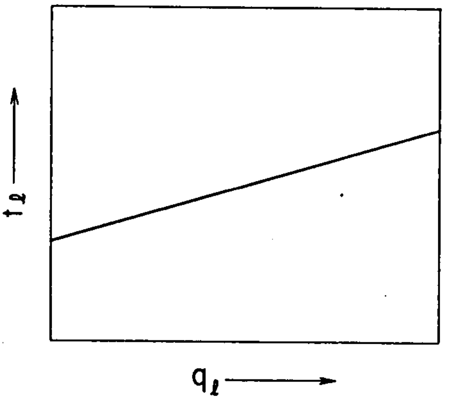

Fig. 2.2. A linear approximation of $(q_\ell$-$t_\ell)$ characteristic.

の旅行時間の和で表されるものとする。q_s，t_ℓ 等の集合をそれぞれベクトルで表し、Q_S，T_L 等と書く。以上の記号を用いて、交通流網を集合 $W_1 \triangleq \{G, Q_S, T_L\}$ 及び $W_2 \triangleq \{G, Q_S, C_L\}$で表す。

2.3　問題の記述と基本定理

（2.1）及び（2.2）式は電気回路網におけるキルヒホフの電流則に相当し、（2.3）及び（2.4）式はオーム則に相当する。従って交通流配分の解を定めるには、更に電気回路網におけるキルヒホフの電圧則に相当する関係式が必要となることが想像される。

Wardrop[125)]はこの関係式として、等時間則及び総旅行時間最小則という二つの仮説を立て、交通流配分問題を次の二つの問題に分けて定式化した。

〔問題 2.1〕

交通流網 W_1 において、m個のパス$p_1,\cdots,p_m$を持つ任意のODのパス旅行時間が、次の性質を満たすような可能解 Q_P 又は Q_L を求めよ。

$$t_{p1}(Q_L)=\cdots=t_{pr}(Q_L)\leqq t_{pr+1}(Q_L)\leqq\cdots\leqq t_{pm}(Q_L) \qquad (2.5)$$

$$q_{pi}>0\ ,\quad i=1,2,\cdots\cdots,r$$

$$q_{pi}=0\ ,\quad i=r+1,\cdots\cdots,m$$

〔問題 2.2〕

交通流網 W_2 において、次式で定まる総旅行時間 $c(Q_L)$ を最小にする可能解 Q_P 又は Q_L を求めよ。

$$c(Q_L) = \sum_{\ell \varepsilon L} c_\ell(q_\ell) = \sum_{\ell \varepsilon L} q_\ell t_\ell(q_\ell) \qquad (2.6)$$

問題 2.1 の解は対象とする交通流網の利用者間の非協力ゲームにおける Nash の局所的均衡解である。都市内平面街路網の場合等において、道路利用者が独立に最短旅行時間のパス（以下では最短パスと呼ぶ）を選ぶとすれば、最終的にこの均衡解に落ち着くと考えられる。

他方、問題 2.2 の解は交通流網が全体として保持すべき最小値性を持っている。しかし、この解のような状態では、利用者は最短パスより長くかかるパスを強制される場合もある。従ってこの状態は自動貨物輸送のように、中央管制局の存在する場合においてのみ実現する。

Dafermos と Sparrow[8,9] は問題 2.1 及び 2.2 の解の存在と唯一性について、次に示す幾つかの重要な定理を導いた。

〔定理 2.1〕 すべての枝 ℓ において $[0, \infty)$ で $t_\ell(q_\ell)$ が単調増加であれば、問題 2.1 の唯一解 Q_L が存在する。

〔定理 2.2〕 すべての枝 ℓ において $[0, \infty)$ で $t_\ell(q_\ell)$ が単調増加であり、かつ $c_\ell(q_\ell)$ が凸であれば、問題 2.2 の唯一解 Q_L が存在する。

一方、問題 2.1 のパス交通量 Q_P の唯一性は必ずしも保証されないことは、佐佐木[102] によって指摘されている。Dafermos と Sparrow[8,9] 及び井上[49] は、独立に問題 1 及び問題 2 の関係について次の定理を導いた。

〔定理 2.3〕 定理 2.2 の条件が満たされるとすれば、問題 2.2 の解は m 個のパス $p_1, \cdots, p_m$ で結ばれる任意の OD について、次の性質を満たす解と等価である。

$$c'_{p1}(Q_L) = \cdots = c'_{pr}(Q_L) \leqq c'_{pr+1}(Q_L) \leqq \cdots \leqq c'_{pm}(Q_L) \tag{2.7}$$

$$q_{pi} > 0, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, r$$

$$q_{pi} = 0, \quad i = r+1, \cdots\cdots, m$$

$$c'_p = \sum_{\ell \in L} \delta_{\ell p} c'_\ell(q_\ell), \quad c'_\ell(q_\ell) = \frac{dc_\ell(q_\ell)}{dq_\ell} \tag{2.8}$$

定理2.3によれば、問題2.1と2.2は本質的に等価であると考えられるから、以下では問題2.1についてのみ考察することにする。

2.4 基礎方程式の行列表示

この節では、交通流網の基本的な関係式を基に、問題2.1の解を得るのに必要な枝交通量及びパス交通量に関する基礎方程式を導こう。ここで、等時間則を満たすパスの組、すなわち（2.5）式におけるパス1〜rは予め与えられていると仮定する。2.5節で提示するアルゴリズムでは、この仮定を満たすようなパス選択の過程が含まれている。

2.4.1 基本関係式

まず、交通流網を表現する手段として、OD−パス接続行列 A_1, 及び枝−パス接続行列 A_2 を次のように定める。

$$A_1 = (a_{1ij}), \quad a_{1ij} = \begin{cases} 1 & \text{：パス } j \text{ が OD } i \text{ に属するとき} \\ 0 & \text{：その他} \end{cases} \tag{2.9}$$

$$A_2 = (a_{2ij}), \quad a_{2ij} = \begin{cases} 1 & \text{：枝 } i \text{ がパス } j \text{ に含まれるとき} \\ 0 & \text{：その他} \end{cases} \tag{2.10}$$

これら二つの行列をまとめて、単にパス接続行列と呼ぶ。

パス接続行列 A_1 及び A_2 を用いれば、（2.1）及び（2.2）式で示した交通量保存則は次のように表される。

$$Q_S = A_1 Q_P \tag{2.11}$$

$$Q_L = A_2 Q_P \tag{2.12}$$

与えられたパスは、仮定により、等時間則を満たしている。パス接続行列 A_1 及び A_2 を用いて（2.5）式を表せば、次のようになる。

$$T_P = A_1^t\ T_S = A_2^t\ T_L \tag{2.13}$$

ここに行列の右肩の添字 t は転置を表す。一方、図 2.2 の枝特性、すなわち（2.3）式は

$$T_L = Z\,Q_L + T_{L0} \tag{2.14}$$

と表すことができる。ここでZを枝インピーダンス行列と呼ぶ。Zは正値対角行列であり、一般に Q_L の関数となるが、この章では前に述べたように、これを定数行列とする。T_{L0} は交通量が零の時の旅行時間、すなわち自由旅行時間を表す正値ベクトルである。

（2.11）～（2.14）式は、問題 2.1 の求解のための基本となる関係式の行列表示であり、以下の議論の出発点となる。定理 2.3 によれば、問題 2.2 は（2.14）式においてZを 2Z と置き換えることによって、全く同様に取り扱えることに注意しよう。

2.4.2　パス接続行列の整理

パス接続行列を次に示す手順で整理することにより、パスと枝の組を分割する。

(i)　まず与えられたパスを木パスと補木パスに分割し、パス接続行列の列に木パス、補木パスの順に並べる。一方、行には木パスに対応するODを順に並べる。これによりパス接続行列は

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

となる。ここに I は単位行列を表す。

(ii)　次にODと木パスの順序を変えずに、パス接続行列の最大正則部分行列を求める。このため次の補助的な行列

$$B \triangleq \overline{A}_{22} - \overline{A}_{21}\overline{A}_{12} \tag{2.16}$$

を導入しよう。(2.16)式の右辺において、$\overline{A}_{22}$ の列は補木パスの枝接続を表すベクトルであり、それに相当する $\overline{A}_{21}\overline{A}_{12}$ の列は、その補木パスが属するODの木パスの枝接続を表すベクトルである。このように、Bの列は補木パスを付加した時に得られるパスループを表すベクトルとなる。従ってBをパスループ行列と呼ぶ。明らかにBの要素は(−1, 0, 1)となる。

パスループ行列Bにおいて行と列の順序変更を行い、最大正則部分行列 B_{11} を左上に掃き出せば

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

ただし、 $$B_{22} = B_{21} B_{11}^{-1} B_{12} \tag{2.18}$$

となる。ここで B_{11} の列に対応する補木パスによって作られるパスループは独立であり、B_{12} の列に対応する補木パスによって作られるパスループは、それらに従属であると考えることができる。

(iii) パスループ行列Bの行及び列の順序変更に対応して、パス接続行列の枝及び補木パスの順序も変更され、次の形となる。

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

ここで

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{22} - A_{21}A_{12} \quad , \quad B_{12} = A_{23} - A_{21}A_{13} \\ B_{21} &= A_{32} - A_{31}A_{12} \quad , \quad B_{22} = A_{33} - A_{31}A_{13} \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{bmatrix} I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \text{の最大正則部分行列}$$

以上述べたパス接続行列の分割に応じて、パス及び枝はそれぞれ（P_1，P_2，P_3）及び（L_1，L_2）に分割される。ここに集合P_1，P_2 及び P_3 をそれぞれ木パス、独立な補木パス及び従属な補木パスと呼ぶ。更に 集合（P_1，P_2）及び（P_3）をそれぞれ基底パス及び非基底パスと呼ぶ。一方集合 L_1 及び L_2 をそれぞれ交通流網（多種流網）の補木枝及び木枝（以下では単に補木枝、木枝という）と呼ぶ。以上の名称の妥当性は、以下に述べる電気回路網（一種流網）との対応性から明らかとなる。またパスの基底、非基底の意味は後に（2.39）式において明らかとなる。

〔例題 2.1〕

上記手順を図 2.3 に示すグラフを例として示そう。ODとパスは表2.1に示す通りである。

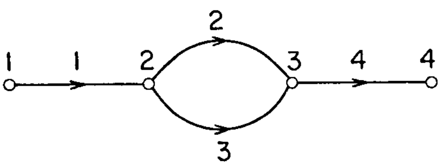

Fig. 2.3. Graph 1.

Table 2.1 OD pairs and paths in Ex. 2.1

OD	from node	to node	path	arc sequence
1	1	2	1	1
2	3	4	2	4
3	1	4	3	1, 2, 4
			7	1, 3, 4
4	1	3	4	1, 2
			8	1, 3
5	2	4	5	2, 4
			9	3, 4
6	2	3	6	2
			10	3

パスの集合（1, 2, 3, 4, 5, 6）を木パスとして選べば、パス接続行列は次のようになる。

$$
\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix} =
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{cccccc|cccc} \multicolumn{6}{c|}{\overbrace{\hphantom{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}}^{\text{木パス}}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{0\ 0\ 0\ 0}}^{\text{補木パス}}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\text{OD}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\right. &
\left|\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}\right| \\
\text{枝}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\right. &
\left|\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right|
\end{array}
\qquad (2.21)
$$

（2.16）式により、パスループ行列Bは次のようになる。

$$
B = \begin{array}{ll}
 & \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{-1\ -1\ -1\ -1}}^{\text{補木パス}}} \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\text{枝}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\right. &
\left|\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|
\end{array}
\qquad (2.22)
$$

（2.22）式から明らかなように、補木パス（ 7, 8, 9, 10）が付加された場合にできるパスループはすべて等しい。（2..22）式において第1行と第3行を入れ換えれば

$$
B = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c|ccc} 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\left|\begin{array}{c|ccc}
-1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|
\end{array}
\qquad (2.23)
$$

となる。パス7は独立な補木パスとなり、パス（8, 9, 10）は従属な補木パスとなる。これに従い枝2は補木枝となり、枝（1, 3, 4）は木枝となる。

最終的にはパス接続行列は次のように整理される。

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{ll|cccccc|c|ccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \mathrm{OD} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \text{枝} & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad (2.24)$$

〔例題 2. 2〕

ここでは、上記手順を図 2. 4 で示す例題を用いて説明しよう。なお、この例題では枝 6 を通るパスはないので、この枝を除外して考える。ODとパスを表 2. 2 に示す。

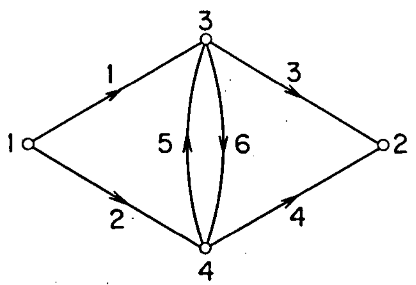

Fig. 2.4. Graph 2.

Table 2.2 ODpairs and paths in Ex. 2.2

OD	from node	to node	path	arc sequence
1	1	2	1	1, 3
			4	2, 4
2	4	2	2	4
			5	5, 3
3	1	3	3	1
			6	2, 5

パス（1,2,3）を木パスとすれば、パス接続行列は次のように得られる。

$$
\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix} =
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{cccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{木パス}}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{補木パス}}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{OD}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right. \\ \text{枝}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\right. \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (2.25)
$$

（2.16）式よりパスループ行列Bを求めれば

$$
B = \overline{A}_{22} - \overline{A}_{21}\overline{A}_{12} =
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{補木パス}}} \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\text{枝}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\right. &
\left[\begin{array}{ccc}
-1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (2.26)
$$

となる。行列Bの第1行と第2行の行ベクトルは互いに従属である。更に行列Bの階数は2であるから、第2行と第3行を入れ換えることにより、左上に最大正則小行列を置くことができる。この結果

$$
B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} =
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad}^{\substack{\text{独立な} \\ \text{補木パス}}}} & \overbrace{\quad}^{\substack{\text{従属な} \\ \text{補木パス}}} \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{補木枝}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array}\right. \\ \text{木枝}\left\{\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 5 \end{array}\right. \end{array} &
\left[\begin{array}{cc|c}
-1 & 0 & -1 \\
-1 & 1 & 0 \\ \hline
1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (2.27)
$$

となる。すなわち図2.4及び表2.2で示される交通流網において、パスは木パス（1,2,3）、独立な補木パス（4,5）及び従属な補木パス（6)に分割され、枝は補木枝（1,3）及び木枝（2,4,5）に分割される。

2.4.3　基礎方程式の誘導

前節において述べた行列の整理の結果、(2.11)〜(2.14)式は 次のように書き換えられる。

$$Q_S = \begin{bmatrix} I & A_{12} & A_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{P1} \\ Q_{P2} \\ Q_{P3} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{L1} \\ Q_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{P1} \\ Q_{P2} \\ Q_{P3} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$\begin{bmatrix} T_{P1} \\ T_{P2} \\ T_{P3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A_{12}^t \\ A_{13}^t \end{bmatrix} T_S = \begin{bmatrix} A_{21}^t & A_{31}^t \\ A_{22}^t & A_{32}^t \\ A_{23}^t & A_{33}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{L1} \\ T_{L2} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$\begin{bmatrix} T_{L1} \\ T_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{L1} \\ Q_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{L01} \\ T_{L02} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Q_{L1}，Q_{P1}，T_{L1} 等の意味は自明であろう。さて本節では(2.28)〜(2.31)式を用いて枝交通量及びパス交通量に関する基本方程式を導く。

まず(2.28)式より、Q_{P1} は次のように得られる。

$$Q_{P1} = -\begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{P2} \\ Q_{P3} \end{bmatrix} + Q_S \tag{2.32}$$

(2.32)式を(2.29)式に代入し、更にパスループ行列Bを用いれば

$$\begin{bmatrix} Q_{L1} \\ Q_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{P2} \\ Q_{P3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} Q_S \qquad (2.33)$$

となる。(2.33)式より、Q_{P2}を消去し、更に(2.18)式の関係を用いれば、次式を得る。

$$\left[-B_{21} B_{11}^{-1} \quad I \right] \left\{ \begin{bmatrix} Q_{L1} \\ Q_{L2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} Q_S \right\} = 0 \qquad (2.34)$$

(2.34)式は交通流網の交通量保存則の縮約された形であり、電気回路網におけるキルヒホフの電流則に相当する。(2.34)式は木パスにOD交通量を逆方向に流し、これを枝交通量に重畳すれば、このときの枝交通量は行列$\left[-B_{21} B_{11}^{-1} \quad I \right]$と直交することを意味している。電気回路網との対応づけにより[36)] 行列$\left[-B_{21} B_{11}^{-1} \quad I \right]$は交通流網の基本カット行列と考えることができる。

(2.30)式よりT_Sを消去し、更に(2.18)式の関係を用いれば、

$$\left[I \quad B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} \right] \begin{bmatrix} T_{L1} \\ T_{L2} \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.35)$$

が成立する。(2.35)式は等時間則の縮約された形であり、電気回路網におけるキルヒホフの電圧則に相当する。(2.35)式は同一ODに属するパスの等時間則が、独立パスループの旅行時間の代数和が零、という性質に置き換えられることを示している。従って、行列$\left[I \quad B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} \right]$は交通流網における基本ループ行列と考えることができる。

(2.34)及び(2.35)式より、交通流網における基本カット行列と基本ループ行列も、電気回路網におけると同様に、互いにその主要部分の転置行列

の逆符号が等しいという関係を持っている。枝の集合 L_1 を交通流網の補木枝、 L_2 を木枝と呼ぶことも、(2.34),(2.35)式より妥当であることがわかる。(2.34),(2.35)式はそれぞれ、交通流網におけるキルヒホフの電流則と電圧則であるから、これにオーム則に相当する(2.31)式を加えれば、交通流配分問題の基礎方程式を導くことができる。

(2.31),(2.34)及び(2.35)式を用いて T_{L1}, T_{L2} 及び Q_{L2} を消去すれば

$$DQ_{L1}=-[T_{L01}+Z_1A_{21}Q_S]-B_{11}^{t^{-1}}B_{21}^{t}[T_{L02}+Z_2A_{31}Q_S]+DA_{21}Q_S \tag{2.36}$$

が得られる。ここで行列 $D \triangleq Z_1+B_{11}^{t^{-1}}B_{21}^{t}Z_2B_{21}B_{11}^{-1}$ は交通流網のパスループ・インピーダンス行列と考えることができ、明らかに正値対称行列である。従って Q_{L1} は(2.36)式より一意に定まる。

(2.36)式は、交通流配分問題の枝交通量を定める基礎方程式である。以下ではこれをパスループ方程式と呼ぶ。その次数は補木枝 L_1 の数に等しい。Q_{L2} は Q_{L1} を(2.34)式に代入して、次のように得られる。

$$Q_{L2}=B_{21}B_{11}^{-1}Q_{L1}+[-B_{21}B_{11}^{-1}A_{21}+A_{31}]Q_S \tag{2.37}$$

更に T_{L1}, T_{L2} は(2.31)式より容易に導くことができる。

一方、(2.31),(2.34)及び(2.35)式を用いて Q_{L1}, Q_{L2} 及び T_{L1} を消去すれば、

$$ET_{L2}=-B_{21}B_{11}^{-1}[Z_1^{-1}T_{L01}+A_{21}Q_S]+[Z_2^{-1}T_{L02}+A_{31}Q_S] \tag{2.38}$$

が得られる。ここで行列 $E \triangleq Z_2^{-1}+B_{21}B_{11}^{-1}Z_1^{-1}B_{11}^{t^{-1}}B_{21}^{t}$ はパスループ・インピダンス行列Dに対し、パスカット・アドミダンス行列と呼ぶことができる。行列EもDと同様、明らかに正値対称行列である。従って T_{L2} は(2.38)式より一意に定まる。以下では(2.38)式をパスカット方程式と呼ぶ。その次

数は木枝 L_2 の数に等しい。T_{L1} ，Q_{L1} 及び Q_{L2} は、T_{L2} を(2.35)，(2.31)式に代入して容易に得ることができる。

(2.36) 及び (2.38) 式で表されるパスループ方程式及びパスカット方程式は互いに双対であり、いずれか一方を解けばよい。従って、補木枝と木枝の数を比較して、どちらを解くか選ぶことができる。この求解の流れを図 2.5 に示す。以下では簡単のためパスループ方程式の求解のみを例にとって議論を進める。

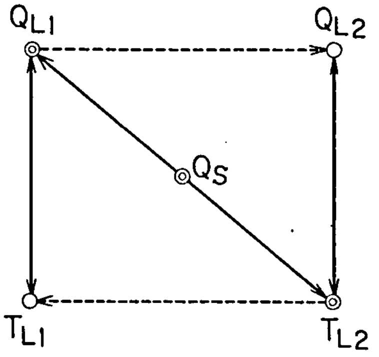

Fig. 2.5. Procedures for solving the fundamental equations.

(2.36)，(2.37) 式を (2.32)，(2.33) 式と組み合わせれば、パス交通量に関する次の基礎方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} I & A_{12} & A_{13} \\ 0 & B_{11} & B_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{P1} \\ Q_{P2} \\ Q_{P3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -A_{21} \end{bmatrix} Q_S + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{L1} \end{bmatrix} \qquad (2.39)$$

(2.39) 式及び $Q_{Pi} \geqq 0$ ($i=1,2,3$)を満たすことは Q_P が真の解であるための必要条件である。従属な補木パス P_3 の集合が空でなければ、(2.39) 式の解は Q_P 空間の 1 点ではなく、ある部分空間となる。これは従来より指摘されたように、パス交通量の解が一意とは限らないことを示すものである。

上記の必要条件が通常の線形計画法の制限条件と同じ形であることに注意すれば、例えば双対シンプレックス法[64] を用いて、可能解の 1 つを見つけることができる。(2.39) 式の形から、(P_1 ，P_2)を基底パス、(P_3) を非基底パスと呼んだ理由は明らかである。

2.5 配分計算のアルゴリズム

前節では、等時間配分問題において、枝交通量及びパス交通量が満たすべき必要条件を示した。この条件は十分条件ではなく、問題の真の解はこれらの必要条件に加えて、仮定したパス以外のパスの旅行時間が、仮定したパスのそれ以下にならないという条件を満足しなければならない。本節では、上記の必要十分条件を満たす解を得るためのアルゴリズムについて考える。

まず、枝交通量及びパス交通量が満たすべき必要条件式(2.36),(2.37)及び(2.39)式を次のように簡潔に表しておく。

$$Q_L = F_1 (Q_S) \tag{2.40}$$

$$Q_P = F_2 (Q_S) \tag{2.41}$$

更に(2.36),(2.37)式を(2.31)式に代入し(2.30)式を用いることにより、パス旅行時間が次のように表される。

$$T_P = F_3 (Q_S) \tag{2.42}$$

(2.40),(2.41)及び(2.42)式はOD交通量の Q_S 空間から、枝交通量の Q_L 空間、パス交通量の Q_P 空間及びパス旅行時間の T_P 空間への写像を表すと考えることができる。ここで、等時間則を満たすパスの集合に変更があれば、写像関数が変化することに注意しょう。

次に(2.40)〜(2.42)式の Q_S を λQ_S で置き換え

$$Q_L = F_1 (\lambda Q_S) \tag{2.43}$$

$$Q_P = F_2 (\lambda Q_S) \tag{2.44}$$

$$T_P = F_3 (\lambda Q_S) \tag{2.45}$$

を考える。但し、$0 \leqq \lambda \leqq 1$ である。λ を0から1まで増加させたとき、ベクトル λQ_S は原点と Q_S を結ぶ直線上を動く。Q_S 空間を2次元としてこれを示せば、図2.6のようになる。このベクトルの Q_L, Q_P 及び T_P 空間への写像を考える。

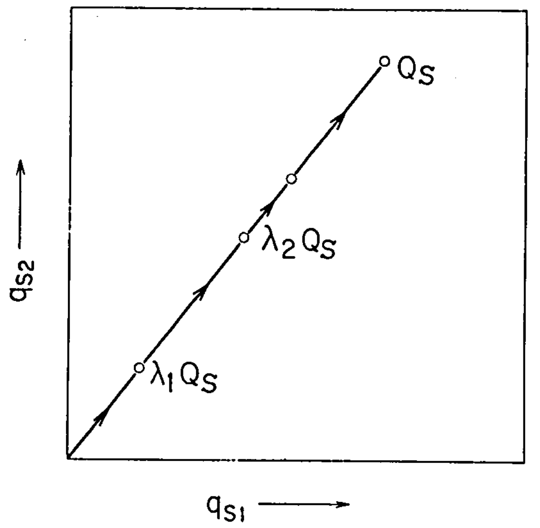

Fig. 2.6. A trajectory of Q_S as λ increases.

λが0のとき、各ODに対するパスは零交通量のときの最短パスのみとなり、明らかに Fi(0)(i=1,2) は0であるから、写像 Q_L 及び Q_P は0となる。λを増加させるにつれて(2.44)式よりパス交通量が変化し、交通量が0から正になるパスや、逆に正から0になるパスが生じる。この変化に応じて Fi (i=1,2,3)が変化するが、パスの生成及び消滅の境界においても、

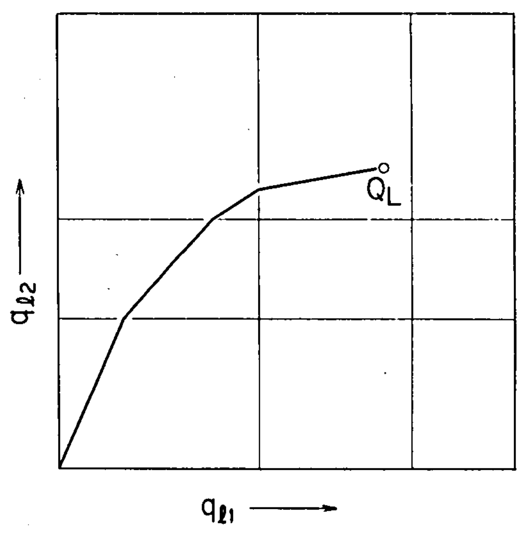

Fig. 2.7. A mapped trajectory on the Q_L space.

写像 Q_L , Q_P 及び T_P は連続であり、更にパスの組が同じ領域ではこれらの写像は直線となる。例えば、Q_L 空間を2次元として、この様子を概念的に示したものが図2.7である。$\lambda=1$ のとき、明らかに各写像は原問題の解となる。

すべてのパスの組が予め与えられた場合とそうでない場合に分けて、以上の手順を次の2つのアルゴリズムにまとめることができる。

〔アルゴリズム2.1〕　（パスが予め与えられている場合）

(i) 各ODについて、零交通量時の最短パスを選び(2.43)〜(2.45)式を作成する。

(ii) (2.44)式においてパスを基底及び非基底に分け、正の基底パス交通量の1つが0となる最小の λ を求め λ^1 とする。また、(2.45)式を用いて、交通量0の一つのパスの旅行時間が、交通量正のパスのそれと等しくなる最小の λ を求め、それを λ^2 とする。$\lambda_{min}=\min(\lambda^1, \lambda^2, 1)$ と置く。

$\lambda_{min}=1$ なら終了。

(iii) λ_{min} においてパスを削除又は付加し、それに応じて(2.43)〜(2.45)を修正する。(ii)へもどる。

〔アルゴリズム2.2〕　（パスが予め与えられていない場合）

(i) 各ODについて、零交通量時の最短パスをE.W.Dijkstra[12] の手法により求め、(2.43)〜(2.45)を作成する。

(ii) λ を適当量 $\Delta\lambda$ だけ増加させる。λ が1となれば終了。

(iii) (2.44)式においてパスを基底及び非基底に分け、正の基底パスの交通量が0となれば、そのパスを削除する。各ODについて改めて最短パスを求め、その結果新しいパスが得られれば、そのパスを付加する。パスの組に変更があれば(2.43)〜(2.45)式を修正し、(ii)へもどる。パスの組に変更がなければそのまま(ii)へもどる。

ここで提案したアルゴリズム2.1及び2.2は、(2.43)〜(2.45)式の求解を、いわゆるI.A.法と組み合わせたものと考えることができる。一方、これらのアルゴリズムは区間線形回路問題の求解法として知られるKatzenelson法[56)]に類似のものであり、Katzenelson法と同様、次のように有限回の繰返しで収束することが分かる。

〔定理2.4〕 パスの組合せ総数をrとすれば、このアルゴリズムはr回以内の繰返し計算で収束する。

〔証明〕 上記の定理を証明するには、λが増す過程で同じパスの組が2度現れることはないことをいえばよい。λがλ_iのときのパスの組をΦ_iとし、λが増してλ_{i+1}になったとき、新しいパスp^*が付加されたとする。更にλが増し、或るところで再びパスの組Φ_iが現れたと仮定しよう。このときλ_{i+1}で付加したパスp^*は、パスの組に含まれていない。ところが同じパスの組Φ_iに対して(2.45)式は同一であり、(2.45)式のλに関する線形性よりλ_{i+1}以上のλに対しp^*は最短パスとなる。パスの組が最短パスを含まないことは、等時間則に矛盾する。λ_{i+1}でパスが削除される場合についても、同様に証明できる。 (証明終り)

(注意2.1) 定理2.4は、枝特性の線形性を仮定していることに注意しよう。

上で述べたアルゴリズム2.1及び2.2は、有限回収束という著しい特長を持っている。しかし、実際には適当なλの増分量$\Delta\lambda$を決定するのが困難である。もし$\Delta\lambda$が小さすぎると$\lambda=1$に到着するまでの繰返し回数が不必要に多くなり、逆に$\Delta\lambda$が大きすぎると$\Delta\lambda$だけ増す間のパスの変更が1回とは限らないことになる。

この難点を避けるため、Wayne法を(2.40)〜(2.42)式の求解と組み合わせた、次のアルゴリズムを考えよう。

〔アルゴリズム2.3〕

(1) 各ODに対する最短パスを見出す。

(ii)　(i)で得られた最短パスが、それまでに得られていたパスの集合に含まれていれば終了。そうでなければ新しくパスの集合に加え、(2.40)~(2.42)式を変更する。

(iii)　(2.41)式よりパス交通量を求める。もし可能解が求まれば、(i)へもどる。可能解がなければ、負のパス交通量を持つパスを削除して、(ii)へもどる。

(注意2.2)　アルゴリズム2.3において(ii)の終了条件が満足されれば、解は明らかに原問題の解である。このアルゴリズムの収束性について明確な保証はないが、筆者等の試したいくつかの計算例では収束が確かめられた。

(注意2.3)　多くの例題ではアルゴリズム2.1、2.2に比較し、アルゴリズム2.3の収束速度が大きかった。従って、有限回収束の保証には欠けるが、アルゴリズム2.3がより実用的であると思われる。

2.6　数値計算例

この節では幾つかの簡単な例題を用いて、アルゴリズム2.1、2.2、及び2.3の計算過程について示そう。

［例題2.3］

例題2.1で用いた図2.3に示されたグラフと、表2.3、表2.4に示す枝特性とOD交通量を持つ交通流網に、アルゴリズム2.1及び2.2を適用する。

Table 2.3. Arc characteristics in Ex. 2.3

arc	from	to	Z	$t_{\ell 0}$
1	1	2	0.001	4.0
2	2	3	0.002	3.5
3	2	3	0.003	4.5
4	3	4	0.002	3.0

Table 2.4. OD demands in Ex. 2.3

OD	from	to	qs
1	1	2	400
2	3	4	300
3	1	4	200
4	1	3	500
5	2	4	300
6	2	3	300

ここで、λの増分$\Delta\lambda$を0.1とする。計算の過程における枝及びパスの解を、それぞれ表2.5及び表2.6に示す。

Table 2.5. Solutions of arc flows in Ex. 2. 3. with increasing λ

arc	q_ℓ \ λ / t_ℓ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	q_1	110	220	330	440	550	660	770	880	990	1100
	t_1	4.11	4.22	4.33	4.44	4.55	4.66	4.77	4.88	4.99	5.10
2	q_2	130	260	390	512	590	668	746	824	902	980
	t_2	3.76	4.02	4.28	4.52	4.68	4.84	4.99	5.15	5.30	5.46
3	q_3	0	0	0	8	60	112	164	216	268	320
	t_3	4.50	4.50	4.50	4.52	4.68	4.84	4.99	5.15	5.30	5.46
4	q_4	80	160	240	320	400	480	560	640	720	800
	t_4	3.16	3.32	3.48	3.62	3.80	3.96	4.12	4.28	4.44	4.60

Table 2.6. Solutions of path flows in Ex. 2.3. with increasing λ

OD	path	arc sequence	q_p \ t_p (λ)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	1	1	q_1	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400
			t_1	4.11	4.22	4.33	4.44	4.55	4.60	4.77	4.88	4.99	5.10
2	2	4	q_2	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
			t_2	3.16	3.32	3.48	3.64	3.80	3.96	4.12	4.28	4.44	4.60
3	3	1, 2, 4	q_3	20	40	60	72	40	8	0	0	0	0
			t_3	11.03	11.56	12.09	12.60	13.03	13.46	13.88	14.31	14.73	15.16
	7	1, 3, 4	q_7	—	—	—	8	60	112	140	160	180	200
			t_7				12.60	13.03	13.46	13.88	14.31	14.73	15.16
4	4	1, 2	q_4	50	100	150	200	250	300	326	344	362	380
			t_4	7.87	8.24	8.61	8.96	9.23	9.50	9.76	10.03	10.29	10.56
	8	1, 3	q_8	—	—	—	0	0	0	24	56	88	120
			t_8				8.96	9.23	9.50	9.76	10.03	10.29	10.56
5	5	2, 4	q_5	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
			t_5	6.92	7.34	7.76	8.16	8.48	8.80	9.11	9.43	9.74	10.06
	9	3, 4	q_9	—	—	—	0	0	0	0	0	0	0
			t_9				8.16	8.48	8.80	9.11	9.43	9.74	10.06
6	6	2	q_6	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
			t_6	3.76	4.02	4.28	4.52	4.68	4.84	4.99	5.15	5.30	5.46
	10	3	q_{10}	—	—	—	0	0	0	0	0	0	0
			t_{10}				4.52	4.68	4.84	4.99	5.15	5.30	5.46

ステップ1では、各ODに対して最短パス{ 1, 2,……, 6 }が見出される。各OD交通量の1/10がこれらのパスに配分される。ステップ3、すなわち $\lambda = 0.3$ までパスの組に変更はない。

ステップ4において、OD{ 3, 4, 5, 6 }に対する新しい最短パス{ 7, 8, 9, 10}が見つかる。パス接続行列の整理をすれば、パス集合は $P_1=\{1,2,\cdots,6\}$, $P_2=\{7\}$, $P_3=\{8,9,10\}$ となる。

さらに λ を増加させると、パス3の交通量 q_{p3} が減少し、パス7の交通量 q_{p7} が増加する。ステップ7においてパス3の交通量は零となり、パス3は削除される。その結果、パス集合は $P_1=\{1,2,7,4,5,6\}$, $P_2=\{8\}$, $P_3=\{3,9,10\}$ となる。

ステップ8から10までは、パス集合に変化はない。最終的な結果は、表2.5及び表2.6の $\lambda=1$ の欄に示されている。λ の増加に伴うパス交通量を図2.8に示す。これよりパス交通量の λ に関する線形性が明確である。

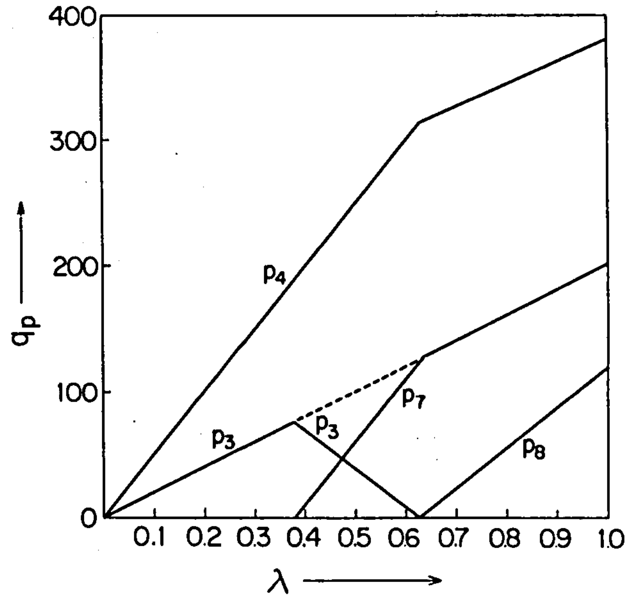

Fig. 2.8. Variation of path flow-volume as λ increases.

〔例題 2.4 〕

ここでは例題 2.3 と同じ問題に、アルゴリズム 2.3 を適用してみる。このアルゴリズムの適用過程における枝とパスの解を、表 2.7 及び表 2.8 に示す。

Table 2.7. Solutions of arc flows in Ex. 2.4.

arc	q_ℓ \ step t_ℓ	1	2
1	q_ℓ t_ℓ	1100 5.1	1100 5.1
2	q_ℓ t_ℓ	1300 6.1	980 5.46
3	q_ℓ t_ℓ	0 4.5	320 5.46
4	q_ℓ t_ℓ	800 4.6	800 4.6

Table 2.8. Solutions of path flows in Ex. 2.4.

OD	path	arc sequence	q_ℓ \ step t_p	1	2
1	1	1	q_1 t_1	400 5.1	400 5.1
2	2	4	q_2 t_2	300 4.6	300 4.6
3	3	1, 2, 4	q_3 t_3	200 15.8	0 15.16
	7	1, 3, 4	q_7 t_7	—	200 15.16
4	4	1, 2	q_4 t_4	500 11.2	380 10.56
	8	1, 3	q_8 t_8	—	120 10.56
5	5	2, 4	q_5 t_5	300 10.8	300 10.06
	9	3, 4	q_9 t_9	—	0 10.06
6	6	2	q_6 t_6	300 6.1	300 5.46
	10	3	q_{10} t_{10}	—	0 5.46

ステップ1では、最短パスの組｛1,2,…，6｝が見出される。全OD交通量がこれらのパスに配分される。

ステップ2においては、新しい最短パスの組｛7,8,9,10｝が見つかる。パス接続行列の整理により、パスは$P_1 = \{1, 2, \cdots, 6\}$，$P_2 = \{7\}$，$P_3 = \{8, 9, 10\}$に分割される。この場合パス3の交通量が負になるので、双対シンプレックス法を適用すれば、現実のパスは、$P_1 = \{1, 2, 7, 4, 5, 6\}$，$P_2 = \{8\}$，$P_3 = \{3, 9, 10\}$に分割される。

この他に新しい最短パスが見つからないので、アルゴリズムは終了する。例題2.3と2.4とを比較すれば、例題2.4の計算量が著しく小さいことがわかる。

〔例題2.5〕

この例題では、例題2.2で用いた図2.4のグラフ、表2.9の枝特性及び表2.10のOD交通量を持つ交通流網を取り扱う。この例題はアルゴリズム2.3

Table 2.9. Arc characteristics in Ex. 2.5.

arc	from	to	Z	$t_{\ell 0}$
1	1	3	0.003	4.0
2	1	4	0.002	3.5
3	3	2	0.002	4.5
4	4	2	0.003	6.0
5	4	3	0.001	1.5
6	3	4	0.001	5.0

Table 2.10. OD demands in Ex. 2.5.

OD	from	to	q_s
1	1	2	2000
2	4	2	500
3	1	3	800

で解いた。枝とパスの解はそれぞれ表2.11及び表2.12に示される。

Table 2.11. Solutions of arc flows in Ex. 2.5.

arc	q_ℓ \ step / t_ℓ	1	2	3
1	q_1	2800	1460	1460
	t_1	12.40	8.38	8.38
2	q_2	0	1340	1340
	t_2	3.5	6.18	6.18
3	q_3	2000	1360	1360
	t_3	8.5	7.22	7.22
4	q_4	500	1140	1140
	t_4	7.5	9.42	9.42
5	q_5	0	700	700
	t_5	1.5	2.20	2.20
6	q_6	0	0	0
	t_6	5.0	5.0	5.0

Table 2.12. Solutions of path flows in Ex. 2.5.

OD	path	arc sequence	q_p \ step / t_p	1	2	3
1	1	1, 3	q_1	2000	1360	1360
			t_1	20.9	15.6	15.6
	4	2, 4	q_4	—	640	640
			t_4		15.6	15.6
2	2	4	q_2	500	500	500
			t_2	7.5	9.42	9.42
	6	5, 3	q_6	—	—	0
			t_6			9.42
3	3	1	q_3	800	100	100
			t_3	12.40	8.38	8.38
	5	2, 5	q_5	—	700	700
			t_5		8.38	8.38

３ステップでこのアルゴリズムは終了し、６個のパスが見い出された。これらのパスは、$P_1=\{1,2,3\}$，$P_2=\{4,5\}$，$P_3=\{6\}$ に分割された。

2.7　多階層利用者の交通流配分問題への拡張

2.7.1　問題の記述

前節での議論は、枝特性（すなわち、枝の交通量－旅行時間特性）が、すべての利用者に対して等しいこと、すなわちすべての利用者が均一の階層に属すること、を前提としてなされた。しかるにこの仮定では、現実の複雑な交通現象を説明することが困難なことが多い。

例えば、道路網の利用者は乗用車、貨物車、更にバスや緊急車等に分類できる。このうち乗用車と貨物車をとってみれば、枝の旅行時間が必ずしも等しくないことがわかる。従って、同じＯＤに対しても、厳密には車種によって選択されるパスと配分比が異なるであろう。

一方、旅行を目的別に分類すれば、通勤、通学、買物、業務、観光等に分けられる。一般的に、等価旅行時間は旅行時間、通行料金、快適性、安全性等の複雑な関数となるが、これは利用者の目的によっても異なってくるであろう。通勤、通学では旅行時間の短い径路、買物では市の中心部や駐車可能なショッピングセンターの周囲の道路、観光では快適で景色の良い径路等の等価旅行時間が小さくなり、利用者が多くなる。

以上のように、多階層の利用者は各階層ごとに異なる枝特性を持つと考える必要がある。ここで階層を ｉ で表し、階層数を ｎ とすれば、これらの特性は次のように表すことができる。

$$t_\ell^{(i)} = t_\ell^{(i)}\left(q_\ell^{(1)}, \cdots\cdots, q_\ell^{(n)}\right) \qquad (i=1,2,\cdots n) \qquad (2.46)$$

$$c_\ell^{(i)} = c_\ell^{(i)}\left(q_\ell^{(1)}, \cdots\cdots, q_\ell^{(n)}\right) \qquad (i=1,2,\cdots n) \qquad (2.47)$$

すなわち、階層 ｉ の利用者の枝旅行時間 $t_\ell^{(i)}$（または枝の総旅行時間 $c_\ell^{(i)}$）

は、その枝を流れるすべての階層の交通量に依存して定まる。

S.C. Dafermos[10] は、多階層利用者による交通流配分問題も、1階層の場合と同様、次の2つの問題に分類した。

〔問題 2.3〕

多階層の利用者が一つの交通流網 W_1 を利用する場合、次の関係を満たす交通流配分を、利用者最適配分と呼ぶ。

$$t_{p_1}^{(i)} = t_{p_2}^{(i)} = \cdots\cdots = t_{p_r}^{(i)} \leqq t_{p_{r+1}}^{(i)} \leqq \cdots \leqq t_{p_m}^{(i)} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2.48}$$

ただし　$p_1, \cdots\cdots, p_r$ ：利用されるパス

　　　　$p_{r+1}, \cdots, p_m$ ：利用されないパス

〔問題 2.4〕

多階層の利用者が一つの交通流網 W_2 を利用するとき、次の総旅行時間を最小にする交通流配分を、システム最適配分と呼ぶ。

$$c(Q_L) = \sum_{\ell \in L} \sum_{i=1}^{n} c_\ell^{(i)}(q_\ell^{(1)}, \cdots, q_\ell^{(n)}) \tag{2.49}$$

すなわち問題 2.3 は、従来1階層で成立するとしていた等時間則を、多階層では各階層ごとに成立するとしたものである。問題 2.4 では従来の1階層での総旅行時間を、各階層の総旅行時間の和で置き換えている。Dafermos[10] は、これらの問題の解の性質を論じ、一階層の場合の拡張として次の2つの定理を導いている。

〔定理 2.5〕 次の一般化された枝インピーダンス行列Z

$$Z = \{z_{ij}\}, \quad z_{ij} \triangleq \frac{\partial t_\ell^{(i)}(q_\ell^{(1)}, \cdots, q_\ell^{(n)})}{\partial q_\ell^{(j)}} \tag{2.50}$$

がすべての $\ell \in L$ について正値対称であれば、問題 2.3 の枝交通量に関する解は唯一つ存在する。

〔定理 2.6〕 関数 $C(Q_L)$が凸、すなわち、例えばすべての $\ell \in L$ に関して $\sum_{i=1}^{n} c_\ell^{(i)}(q_\ell^{(1)}, \cdots, q_\ell^{(n)})$ が凸であれば、問題 2.4 の枝交通量に関する解は唯一つ存在する。

更に 1 階層利用者の場合と同様、利用者最適配分とシステム最適配分の間には、ある条件の下で等価変換が可能であるので、以下では問題 2.3 について考察する。筆者等[33)]は問題 2.3 を道路網における多車種交通流配分問題として扱い、枝特性に相当する道路特性を簡潔な線形式で表し、これを用いて多車種交通流配分問題を 1 車種交通流配分問題に還元できることを示した。以下の議論は、これを発展し一般化したものである。

2.7.2 多階層利用者の枝特性

まず、簡単のため階層の数を 2 とし、道路における乗用車と貨物車を考える。ここで (2.46) 式で表した枝特性(すなわち道路の枝特性)について、少し考察しよう。

今、道路に乗用車しか存在しないときの枝特性を $t_{11}(q_\ell)$ とし、逆に貨物車しか存在しない時のそれを $t_{22}(q_\ell)$ とすれば、これらは図 2.9 に実線で示

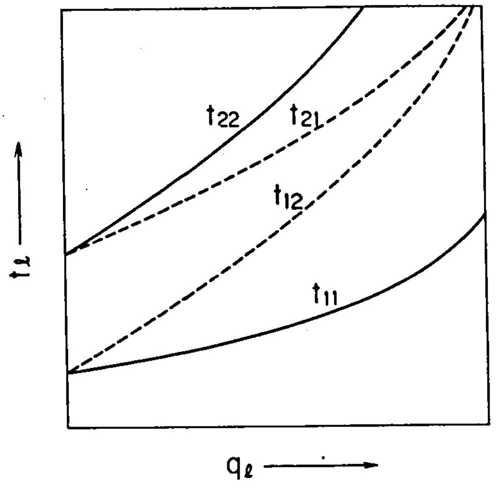

Fig.2.9. (q_ℓ - t_ℓ) characteristics in case of two class traffic.

すように互いに異なる。一方、貨物車に比べ乗用車が著しく少ない場合の乗用車の枝特性を $t_{12}(q_\ell)$ とし、逆に乗用車に比べ貨物車が著しく少ない場合の貨物車の枝特性を $t_{21}(q_\ell)$とする。$t_{12}(q_\ell)$ 及び $t_{21}(q_\ell)$ の枝特性は、極限状態の仮想的なものであり、シミュレーション等で求められる。ここで、交通量が零の時の $t_{11}(0)$と $t_{12}(0)$ 及び $t_{21}(0)$ と $t_{22}(0)$は互いに等しく、それぞれ乗用車及び貨物車の自由走行時の旅行時間となる。$t_{12}(q_\ell)$ 及び $t_{21}(q_\ell)$ を、図 2.9 に点線で示しておく。

以上の説明から明らかなように、図 2.9 の枝特性は次式のように書ける。

$$t_{ij}(q_\ell)= z_{ij}(q_\ell)\cdot q_\ell+t_{\ell 0}^{(j)} \qquad (i, j = 1,2) \qquad (2.51)$$

次に乗用車と貨物車が混在している場合の枝特性を考える。乗用車の交通量を $q_\ell^{(1)}$, 貨物車の交通量を $q_\ell^{(2)}$ とすれば、混合交通量は $q_\ell=q_\ell^{(1)}+q_\ell^{(2)}$ となる。前述したように、もし貨物車の交通量$q_\ell^{(2)}$が零であれば、乗用車及び貨物車の旅行時間はそれぞれ $t_{11}(q_\ell)$ 及び $t_{21}(q_\ell)$となる。一方 $q_\ell^{(1)}$ が零であれば、$t_{12}(q_\ell)$ 及び $t_{22}(q_\ell)$となる。

さて、$q_\ell^{(1)}$ 及び $q_\ell^{(2)}$ が共に零でない場合には、次の線形内挿が成立するとしよう。

$$t_\ell^{(1)}= t_{11}(q_\ell)+\frac{q_\ell^{(2)}}{q_\ell^{(1)}+q_\ell^{(2)}}\Big(t_{12}(q_\ell)-t_{11}(q_\ell)\Big) \qquad (2.52)$$

$$t_\ell^{(2)}= t_{22}(q_\ell)+\frac{q_\ell^{(1)}}{q_\ell^{(1)}+q_\ell^{(2)}}\Big(t_{21}(q_\ell)-t_{22}(q_\ell)\Big) \qquad (2.53)$$

この内挿法を図 2.10 に示す。

(2.51)式で得られる $t_{ij}(q_\ell)$を(2.52)及び(2.53)式に代入すれば、次の簡潔な関係式が得られる。

$$t_\ell^{(1)}= z_{11}q_\ell^{(1)}+ z_{12}q_\ell^{(2)}+ t_{\ell 0}^{(1)} \qquad (2.54)$$

$$t_\ell^{(2)}= z_{21}q_\ell^{(1)}+ z_{22}q_\ell^{(2)}+ t_{\ell 0}^{(2)} \qquad (2.55)$$

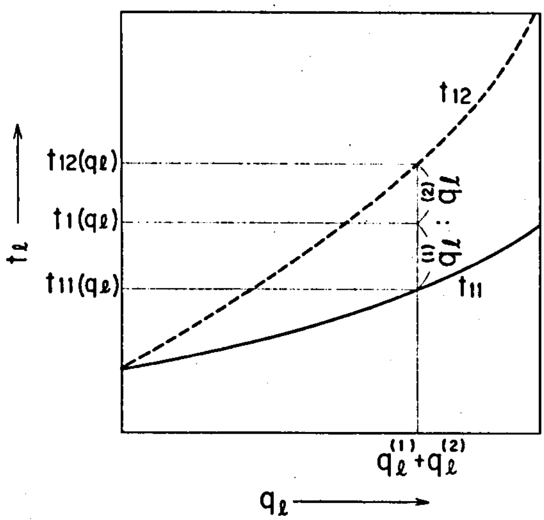

Fig.2.10. Linear interporation for calculating travel time in case of two-class traffic.

(2.54) 及び (2.55) 式は、2車種が混在した場合の道路の枝特性である。ここに z_{ij} が q_ℓ に依存しない場合は線形であり、q_ℓ に依存する場合は非線形となる。

以上の議論を一般の多階層利用者の場合に拡張すれば、容易に次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} t_\ell^{(1)} \\ \vdots \\ t_\ell^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ z_{n1} & & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\ell^{(1)} \\ \vdots \\ q_\ell^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{\ell 0}^{(1)} \\ \vdots \\ t_{\ell 0}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

(2.56) 式は多階層利用者の場合の枝特性であり、1階層の場合の (2.3) 式を拡張したものである。

2.7.3　基礎方程式の誘導

多階層の等時間配分問題、すなわち、問題 2.3 では各階層毎に交通量保存則と等時間則が満たされる。従って、予めパスが与えられたとすれば、2.4

節の（2.11）～（2.13）式に相当する次式が得られる。

$$Q_S^{(i)} = A_1^{(i)} Q_P^{(i)} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.57}$$

$$Q_L^{(i)} = A_2^{(i)} Q_P^{(i)} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.58}$$

$$T_P^{(i)} = A_1^{(i)t} T_S^{(i)} = A_2^{(i)t} T_L^{(i)} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.59}$$

ここで変数は 2.2 節と同様であり、変数の右肩の添字 i（1, 2,…，n）は階層を表す。

ここで新しく次の変数を定める。

$$\mathbf{Q}_S \triangleq \begin{bmatrix} Q_S^{(1)} \\ \vdots \\ Q_S^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_P \triangleq \begin{bmatrix} Q_P^{(1)} \\ \vdots \\ Q_P^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_L \triangleq \begin{bmatrix} Q_L^{(1)} \\ \vdots \\ Q_L^{(n)} \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

$$\mathbf{T}_S \triangleq \begin{bmatrix} T_S^{(1)} \\ \vdots \\ T_S^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_P \triangleq \begin{bmatrix} T_P^{(1)} \\ \vdots \\ T_P^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_L \triangleq \begin{bmatrix} T_L^{(1)} \\ \vdots \\ T_L^{(n)} \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

$$\mathbf{A}_1 \triangleq \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & & 0 \\ & A_1^{(2)} & \\ & & \ddots \\ 0 & & A_1^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 \triangleq \begin{bmatrix} A_2^{(1)} & & 0 \\ & A_2^{(2)} & \\ & & \ddots \\ 0 & & A_2^{(n)} \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

上述の変数を用いれば（2.57）～（2.59）式は次のように統一して表現できる。

$$\mathbf{Q}_S = \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_P \tag{2.63}$$

$$\mathbf{Q}_L = \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_P \tag{2.64}$$

$$\mathbf{T}_P = \mathbf{A}_1^t \mathbf{T}_S = \mathbf{A}_2^t \mathbf{T}_L \tag{2.65}$$

一方（2.56）式で表される枝特性は、 T_L 及び Q_L の順序づけに従い、次の形に整理される。

$$T_L = Z\,Q_L + T_{L0} \tag{2.66}$$

ただし

$$Z = \begin{bmatrix} Z^{(1,1)} & \cdots\cdots & Z^{(1,n)} \\ \vdots & \ddots & \\ Z^{(n,1)} & & Z^{(n,n)} \end{bmatrix} \qquad T_{L0} = \begin{bmatrix} T_{L0}^{(1)} \\ \vdots \\ T_{L0}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

ここでZ及び T_{L0} の右肩の添字は階層を表す。$Z^{(i,j)}$ は正値対角行列であり、$T_{L0}^{(i)}$ は 正のベクトルであることに注意しよう。

（2.63）～（2.66）式を 2.4 節の（2.11）～（2.14）式と比較すれば、A_1，A_2 及び Z の特殊性を除いて、 全く同じ形であることがわかる。すなわち、多階層の交通流配分問題は、特殊な 1 階層の交通流配分問題に変換された。従って、 2.4 節以降の議論をそのまま（2.63）～（2.66）式に適用することができる。

すなわち、多階層問題のパス接続行列 A_1 及び A_2 を整理することにより、枝及びパスを（L_1 ，L_2）及び（P_1，P_2，P_3）と分割し、枝及びパスに関する次の基礎方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} &D\left[Q_{L1} - A_{21} Q_S\right] \\ &= -\left[I \quad B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t}\right] \left\{ \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} Q_S + \begin{bmatrix} T_{L01} \\ T_{L02} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$Q_{L2} = A_{31} Q_S + B_{21} B_{11}^{-1} \left[Q_{L1} - A_{21} Q_S\right] \tag{2.69}$$

$$\begin{bmatrix} I & A_{12} & A_{13} \\ 0 & B_{11} & B_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{P1} \\ Q_{P2} \\ Q_{P3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -A_{21} \end{bmatrix} Q_S + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{L1} \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

ここに

$$D \triangleq \begin{bmatrix} I & B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ B_{21} B_{11}^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

(2.68)〜(2.71) 式において、A_{ij} , B_{ij} 等は 2.2 節と同様、パス接続行列及びパスループ行列の部分行列である。

(2.68) 式が一意解を持つためには (2.71)式で定まるDが正則行列である必要がある。Dの正則性のためには、Zが正値対称行列であればよい。1階層問題と異なり、Zは一般には正値対角行列とはならないことに注意しよう。従ってDが正則行列である限り、2.2.5 節で示したアルゴリズムが、そのまま多階層問題に適用できることが明らかとなった。

従来、多階層利用者の配分問題を解くアルゴリズムとしては、Dafermos[10] の階層及びOD毎に繰返し演算を行なうものが知られているが、ここで述べた手法は階層及びODを一括して扱うことができ、簡単でかつ収束性が良い。

2.7.4　数値計算例

ここでは 2.7 節で述べた多階層交通流配分問題を明確にし、そのアルゴリズムの有効性を確かめるため、簡単な例題の解法を示す。

〔例題 2.6〕

例題 2.2 及び 2.5 で用いた図 2.4 に示すグラフにおいて、2 階層利用者の交通流配分問題を解く。なお図 2.4 における枝 6 は除外して考える。各階層のOD交通量を表 2.1 3 に示す。ここでは枝特性を次の区間線形特性で与えた。

---

† 枝特性が区間線形の場合のアルゴリズムは第 3 章において与える。
ここでは、このアルゴリズムを利用した。

Table 2.13. OD demands in Ex. 2.6.

OD	from	to	$qs^{(1)}$	$qs^{(2)}$
1	1	2	500	300
2	4	2	300	200

枝　2.4の特性

$$\begin{cases} t_{11} = 0.5q_\ell + 400 \\ t_{12} = 1.125\,q_\ell + 400 \end{cases} \qquad (0 \leqq q_\ell \leqq 800)$$

$$\begin{cases} t_{11} = 3.5\,q_\ell - 2000 \\ t_{12} = 4.125\,q_\ell - 2000 \end{cases} \qquad (800 \leqq q_\ell \leqq 1000)$$

$$\begin{cases} t_{11} = 40\,q_\ell - 38500 \\ t_{12} = 40.625\,q_\ell - 38500 \end{cases} \qquad (1000 \leqq q_\ell)$$

$$\begin{cases} t_{21} = 0.857\,q_\ell + 700 \\ t_{22} = 0.429\,q_\ell + 700 \end{cases} \qquad (0 \leqq q_\ell \leqq 700)$$

$$\begin{cases} t_{21} = 3.667\,q_\ell - 1267 \\ t_{22} = 3.238\,q_\ell - 1267 \end{cases} \qquad (700 \leqq q_\ell \leqq 1000)$$

$$\begin{cases} t_{21} = 40\,q_\ell - 37600 \\ t_{22} = 39.57\,q_\ell - 37600 \end{cases} \qquad (1000 \leqq q_\ell)$$

枝　1.3及び5の特性

$$\begin{cases} t_{11} = 0.5\,q_\ell + t_{i0}^{(1)} \\ t_{12} = 1.333\,q_\ell + t_{i0}^{(1)} \end{cases} \qquad (0 \leqq q_\ell \leqq 600)$$

$$\begin{cases} t_{11} = 4.0\,q_\ell + (t_{i0}^{(1)} - 2100) \\ t_{12} = 4.833\,q_\ell + (t_{i0}^{(1)} - 2100) \end{cases} \qquad (600 \leqq q_\ell \leqq 900)$$

$$\begin{cases} t_{11} = 50.0\,q_\ell + (t_{i0}^{(1)} - 43500) \\ t_{12} = 50.83\,q_\ell + (t_{i0}^{(1)} - 43500) \end{cases} \qquad (900 \leqq q_\ell)$$

$$t_{21} = q_\ell + t_{i0}^{(2)}$$
$$t_{22} = 0.5\,q_\ell + t_{i0}^{(2)} \qquad (0 \leqq q_\ell \leqq 600)$$
$$t_{21} = 4.667\,q_\ell + (t_{i0}^{(2)} - 2200)$$
$$t_{22} = 4.167\,q_\ell + (t_{i0}^{(2)} - 2200) \qquad (600 \leqq q_\ell \leqq 900)$$
$$t_{21} = 50.0\,q_\ell + (t_{i0}^{(2)} - 43000)$$
$$t_{22} = 49.5\,q_\ell + (t_{i0}^{(2)} - 43000) \qquad (900 \leqq q_\ell)$$

上記の $t_{i0}^{(1)}$　$t_{i0}^{(2)}$ は、i番目の枝における零交通量時の旅行時間を表し、次の値とした。

$$t_{10}^{(1)} = t_{50}^{(1)} = 500, \qquad t_{30}^{(1)} = 100$$
$$t_{10}^{(2)} = t_{50}^{(2)} = 800, \qquad t_{30}^{(2)} = 130$$

この問題を第3章3.3.3.節で与える区間線形特性の場合のアルゴリズムに基づいて解いた。その結果、表2.14に示すパス交通量と旅行時間が得られた。表2.14の結果より、階層別及びOD別に等時間則が成り立っており、

Table 2.14. Solutions of path flows in Ex. 2.6.

class	OD	path	arc sequence	q_p	t_p
1	1	1	2, 4	120.24	1697.2
		2	1, 5, 4	0	—
		3	1, 3	379.76	1697.2
	2	4	4	232.96	1014.8
		5	5, 3	67.05	1014.8
2	1	1	2, 4	197.53	2226.2
		2	1, 5, 4	0	—
		3	1, 3	102.47	2226.2
	2	4	4	192.02	1305.4
		5	5, 3	7.98	1305.4

OD毎に階層1の旅行時間が、階層2の旅行時間より短くなっている。また、枝特性の相異により、階層1と階層2のパス交通量の比率が異なっていることがわかる。

2.8 結　言

本章では、交通流網の代表的問題である等時間配分問題についてグラフ理論的に考察し、それに基づいて解の満たすべき基礎方程式を簡潔な行列形式で表現した。更に、この基礎方程式をI.A.法あるいはWayne法と組み合わせて、求解のアルゴリズムを幾つか提案した。

すなわち、まず交通流網をパス接続行列、パスループ行列を用いて表現し、パスを木パス、独立な補木パス及び従属な補木パスに分割して、行列を整理変形した。これに伴い枝も木枝と補木枝に分割される。この分割により交通量保存則及び等時間則が縮約された形で表現された。これを枝特性と組み合わせて、枝交通量及びパス交通量が満たすべき基礎方程式が簡潔な代数方程式の形に記述された。このときの基礎方程式の次数は、木枝または補木枝の数に一致する。これらの結果は、電気回路網のような一種流網と交通流網のような多種流網の類似点と相異点を極めて明確に示したものである。

更に、この基礎方程式の求解とI.A.法あるいはWayne法とを組み合わせたアルゴリズムを提案した。これにより、実用的な等時間配分アルゴリズムが構成され、その有効性は例題により実証された。

最後に、多階層利用者の交通流配分問題について考察した。多階層利用者の枝特性を簡潔な線形式で表現することにより、この問題が特殊な1階層利用者の交通流配分問題に変換できることを示した。これにより1階層の場合の議論が、ほぼそのまま多階層の場合にも適用できることが明らかとなった。これは簡単な例題によっても確かめられた。

第3章　交通流配分アルゴリズムの実用化に関する考察

3.1　緒　　言

第2章で述べたように、交通の配分は、交通の発生、分布及び機関別分担と共に、交通計画における基本的な過程である。従って現実の都市交通計画や道路の新設計画において、交通流配分問題が実際に扱われてきている。Wayne法やI.A.法[67,70,111]は、このような現実の問題を解く手法として、広く利用されている。これらの手法が数学的な厳密性を欠きながらも広く採用されてきた[51,67]のは数値計算の容易さ（計算量と記憶量の小ささ）、及び非線形枝特性への拡張の容易さの理由からであると考えられる。

一方、交通流配分問題を等時間配分の立場から代数方程式で表す研究が種々なされてきたが、[47,102]これらを現実の問題に適用した例はあまり知られていない。その理由として、数学的厳密性の不足、数値計算の難しさ（計算量と記憶量の大きさ）、及び非線形枝特性への拡張の難しさ等が考えられる。

第2章では主に上記の等時間配分問題について考察し、数学的に厳密な基礎方程式を導き、これに基づくアルゴリズムを提案した。しかし、このアルゴリズムを従来の Wayne法や I. A. 法 のように実用的なものにするには、更に数値計算の簡潔化と高速化及び非線形枝特性への拡張等の問題について十分検討しておく必要がある。本章ではこのような動機づけを基にして、アルゴリズムの実用化に関する考察を行なう。

まず、対象とする交通流網が大規模になれば、計算量及び記憶量はほとんど基礎方程式の求解に費されることを示し、この求解に必要な計算量と記憶量の節約について考察した。すなわち、前章で導いたパスループ・インピーダンス行列Dが正値対称であることを利用すれば、基礎方程式の求解には、代数方程式の直接解法の一つである Choleski 分解法が有用であることを示し、更に繰返し計算の簡素化について述べる。

次に一般的な枝特性を、区間線形及び滑らかな非線形で表現する二つの場合に分け、前者には区間線形写像法、後者には Newton-Raphson 法が、それぞれ適用できることを明らかにする。区間線形写像法の場合は有限回収束が保証されるが、Newton-Raphson 法の場合には、これは保証されない。Newton-Raphson 法で必要なヤコビ行列は、パスループ・インピーダンス行列Dを一般化した形であることを示し、これを利用した簡単な計算法を提示する。

以上の考察に基づいて交通流配分問題を解く汎用の計算機プログラムを作製した。このプログラムは行列のスパース性の活用にまだ不十分な点が多いが、中規模の一般的な問題の計算が可能であることを、例題によって示した。

3.2　大規模交通流網の交通流配分問題

3.2.1　まえがき

前章で導いた交通流配分の新しい計算法は、交通量保存則、等時間則及び枝特性より導かれる基礎方程式の求解を基盤にしている。これを従来のWayne 法[111)]や I. A. 法[70)]等の数値解法と比較すれば、収束までの繰返し演算の回数は少なくなるが、逆に1回毎の演算は複雑になる。従って前章の計算法を実用的に有効なものにするためには、各回の演算を簡潔かつ高速にする必要がある。特に一般の都市交通流網では、枝の数が 1000 以上と非常に大規模となることも稀でなく、この点の検討は実用上重要である。

本節ではこの問題、すなわち基礎方程式の簡潔かつ高速な求解について考察する。まず、基礎方程式求解の手順を示し、この過程で必要な行列がスパース性を有し、更にその要素が (1, 0, −1)からなるという性質を用いれば、必要な記憶量が著しく小さくなることを示す。更に最も計算時間を費すパスループ・インピーダンス行列の逆行列演算が、Choleski分解で代行できることを示す。そのとき、繰返し計算に必要なパスループ・インピーダンス行

列の逆行列の修正は、少ない計算量で実行できる。

更に交通流網が大規模になる場合、問題を幾つかの部分問題に分解して解くことが有用となる。この分解法として、佐佐木、井上等[103)]によって提案された従来の方法に加え、二つの新しい方法を提案する。

3.2.2　道路網のグラフ

第2章では、節点における旅行時間を零とし、枝におけるそれを交通量に依存する正の値として、交通流網のグラフをこのような節点と枝の集合として定めた。本節では、現実の道路網を上記のグラフに対応づけてみよう。

まず、微視的な対応づけとして、平面街路の交差点または高速道路の分岐合流点を節点とし、これら節点を両端とする道路区間を枝とする立場がある。これを図3.1に示す。都心のように交差点間の距離が比較的短く、枝の

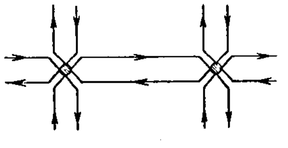

Fig. 3.1.　A simple model of zone or intersection.

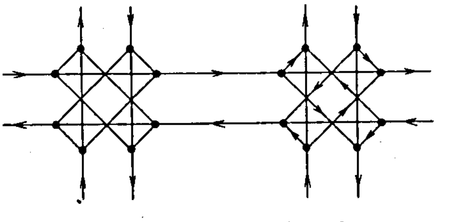

Fig. 3.2.　A detailed model of intersection.

旅行時間が小さい場合には、交差点の通過時間が無視できないため、図3.2に示すように、交差点を更にいくつかの節点と枝に分割する必要がある。†

一方、巨視的な対応づけとして、ある面積を持ち、交通の発生吸収点を表すゾーンを節点とし、これらのゾーンを結ぶ道路または道路束を枝とする立場がある。これはゾーンがある距離をもって広く散在しているような、広域の

---

† 交差点では、右折車の枝旅行時間が対向直進車の交通量に依存するため、厳密には枝相互間の干渉を考える必要が起る。この場合、枝インピーダンス行列Zは対角行列とはならないが、この場合にも第2章の議論を拡張して適用することができる。

交通を扱う場合に有効な対応づけであると考えられるが、ゾーン内交通についてはに別途検討する必要がある。

以上述べた二つの立場のうち、前者は道路網の記述に重点を置いたものであり、後者は発生吸収点の記述に重点を置いたものであると考えることができる。従って現実の都市を扱うには、これらの立場を併用すると便利がよい。これについて考えよう。

都市内の道路は、幹線道路と生活道路に大きく分類することができる。幹線道路は主にゾーン間にまたがるトリップを処理し、生活道路はゾーン内トリップやゾーン間トリップの発生吸収を処理する。従って都市内交通を扱う場合、道路網としては幹線道路のみならず、生活道路及びその端にある交通発生吸収ゾーンを明確に表現することが望ましい。このような観点から、ここでは節点と枝を次のように分類しよう。

節点　1：交通発生吸収ゾーン
　　　2：ゾーンと幹線道路の流入出点
　　　3：幹線道路の交差点と分岐合流点
枝　　1：生活道路又は生活道路束
　　　2：幹線道路

例えば、典型的な都心の道路網は、図 3.3 に示すようなグラフに対応させることができる。

上記のような対応関係を与えることにより、都市内道路網をかなり詳細に表現することが可能となる。しかしこのような詳細な表現では、グラフは著しく巨大なものとなり、枝の数が 1000 を越える場合も少なくない。従って前章で述べた交通流配分問題においても、大規模問題に対する何らかの手だてが必要となる。

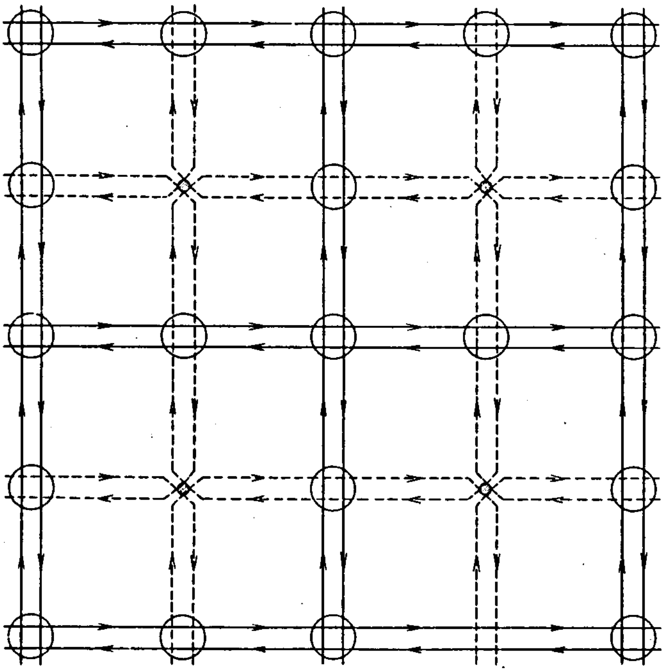

Fig. 3.3. A detailed model of road network

3.2.3 基礎方程式の高速求解法

前章で導いたアルゴリズム2.1～2.3をディジタル計算機で実現する場合に、計算量及び記憶量の点で問題となるのは、基礎方程式(2.36)又は(2.38)の求解である。なぜなら、パスの組が変化し、これに伴ってパスループ・インピーダンス行列Dまたはパスカット・アドミタンス行列Eが変化する度にこの求解が必要となり、しかも行列D又はEの次元の約3乗に比例する計算時間を必要とするからである。

本節では、この計算の高速化及び記憶量の縮小化について考えよう。基礎方程式(2.36)または(2.38)は線形代数方程式であるから、行列のスパース性を考慮しつつ、ガウス消去法に基づく直接解法を利用すれば、求解が簡単になることが示される。更に、アルゴリズム2.1～2.3ではパスの組は次々と変化するが、ほとんどのパスは前回のまま残るという性質に着目すれば、基礎方程式の繰返し計算が簡単になることが示される。

さて、基礎方程式（2.3 6）及び（2.3 8）の求解の流れは図 2. 5 より図 3. 4 及び 3. 5 のように分解される。これらはそれぞれ、パスループ方程式及びパ

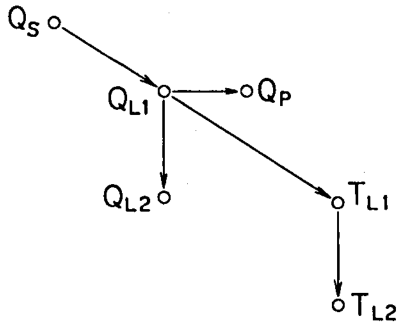

Fig. 3.4. A calculation procedure by solving the path-loop equation.

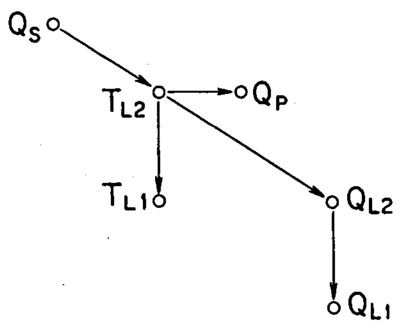

Fig. 3.5. A calculation procedure by solving the path-cut equation.

スカット方程式に基づく計算の流れである。これらのどちらを採用するかは、木枝及び補木枝の要素数 n（L_1）及び n（L_2）の大小による。ここでは簡単のため補木枝がより少ないとし、図 3. 4 に示すパスループ方程式に基づく計算の流れについて説明しよう。

（2.3 6）式を書き直せば、次のようになる。

$$D\left[Q_{L1} - A_{21} Q_S\right]$$
$$= -\left[T_{L01} + Z_1 A_{21} Q_S\right] - B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} \left[T_{L02} + Z_2 A_{31} Q_S\right] \qquad (3.1)$$

(3.1)式の計算に必要な行列は A_{21} , A_{31} , B_{11} , B_{21} 及び D であるが、これらはいずれもスパースな行列であるから、適当なデータ構造[108,109] を利用することにより、小さくまとめて格納することができる。

一方、(3.1)式に示す計算において必要な乗算のうち、A_{21} , A_{31} , B_{11} , 及び B_{21} に関するものは、それらの要素が (0, 1) 及び (−1, 0, 1) であることに着目すれば、加減算に置き換えられる。結局、本来の乗算は $Z_1 \cdot (A_{21} Q_S)$ 及び $Z_2 \cdot (A_{31} Q_S)$ の $n(L_1)+n(L_2)$ 回となる。従って、これらの乗算に比べて D の逆行列演算 ($n(L_1)^3/2$ 回の乗算に相当) が問題となることがわかる。†

(3.1)式の代数方程式の解を求める場合、D の逆行列を求める方法は、ガウス消去法に比較して計算量の点でもスパース性保存の点でも、問題が多いことは広く知られている。[41,110] 従ってここでは D が正値対称行列であることに着目して、ガウス消去法を利用した次の Choleski 分解[110] を行なうことにしよう。

$$D = R^t R \qquad (3.2)$$

ただし

$$r_{11} = \sqrt{d_{11}}, \quad r_{1j} = d_{1j} / r_{11} \qquad (1 < j \leqq n)$$

$$r_{ij} = \left(d_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}\, r_{kj} \right) / r_{ii} \qquad (1 < i < j \leqq n)$$

$$r_{jj} = \left(d_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{kj}^2 \right)^{1/2} \qquad (1 < j \leqq n)$$

$$r_{ij} = 0 \qquad (1 \leqq j < i)$$

(3.2)式を(3.1)式に代入し、中間変数として X を用いれば、

$$R^t X = -[T_{L01} + Z_1 A_{21} Q_S] - B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} [T_{L02} + Z_2 A_{31} Q_S] \qquad (3.3)$$

$$R\, [Q_{L1} - A_{21} Q_S] = X \qquad (3.4)$$

---

† B_{11} の逆行列はすでに行列の整理の時に求められていることに注意しよう。

となる。(3.3), (3.4)式において R^t 及び R はそれぞれ下、上三角行列であるから、X 及び ($Q_{L1} - A_{21} Q_S$) は要素毎に解くことができる。D の次元は $n(L_1)$ であるから、この計算では (3.2)式で表される D の分解に $(n(L_1)^3/6)$ 回、(3.3), (3.4)式における X の求解に $n(L_1)^2$ 回の乗算が必要であるが、これは D の逆行列演算を利用する場合の $n(L_1)^3/2 + n(L_1)^2$ 回に比較して著しく少ない。

前に述べたように、前章のアルゴリズム 2.2 及び 2.3 では、パスの組が変化する度に、(3.1)式の求解が必要となる。ここでパスの組が変化した場合の R の変化について調べよう。まず新しいパスが付加されて、パスの組が Φ_i から Φ_{i+1} に変化した場合について考えよう。この場合の D 及び R を、それぞれ D_i, D_{i+1} 及び R_i, R_{i+1} と表す。このとき次の関係がある。

$$D_{i+1} = \begin{bmatrix} D_i & \delta_{12} \\ \delta_{12}^t & \delta_{22} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$R_{i+1} = \begin{bmatrix} R_i & \zeta_1 \\ 0 & \zeta_2 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

ここで (3.5), (3.6) 式を (3.2) 式に代入すれば

$$R_i \zeta_1 = \delta_{12} \tag{3.7}$$

$$\zeta_2^t \zeta_2 = \delta_{22} - \zeta_1^t \zeta_1 \tag{3.8}$$

が得られる。(3.7)式において R_i はそれまでの計算ですでに得られているから、ζ_1 は容易に得ることができる。この ζ_1 を (3.8)式の右辺に代入すれば $\delta_{22} - \zeta_1^t \zeta_1$ が求まり、これを再び (3.2)式のように分解すれば ζ_2 が求まる。今 δ_{22} の次元を $n(L_i^*)$ とすれば、(3.8)式の計算における乗算回数は $n(L_i^*)^3/6 + n(L_i^*)^2/2$ 回となり、D_{i+1} を直接分解する場合の

$n(L_1+L_i^*)^3/6+n(L_1+L_i^*)^2$ 回 に比較し、著しく少ない。

次にパスの削除に伴うRの変化について調べよう。今パスの集合 Φ_i が、あるパスの削除により Φ_{i+1} に変化したとし、これに応じてパスループ・インピーダンス行列Dが、D_i から D_{i+1} に変化したとする。このとき、D_i, D_{i+1} を次のように表すことができる。

$$D_i = \begin{bmatrix} D_{11} & \delta_{1i} & D_{12} \\ \delta_{i1} & \delta_{ii} & \delta_{i2} \\ D_{21} & \delta_{2i} & D_{22} \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

$$D_{i+1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

D_i に対する R_i が

$$R_i = \begin{bmatrix} R_{11} & \zeta_{1i} & R_{12} \\ 0 & \zeta_{ii} & \zeta_{i2} \\ 0 & 0 & R_{22} \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

と表されているとすれば、D_{i+1} に対する R_{i+1} は、(3.10), (3.11) 式 を (3.2) 式に代入して (3.9) 式を考慮することにより、次のようになる。

$$R_{i+1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & \zeta^*_{22} \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

ただし

$$\zeta^{*t}_{22}\,\zeta^*_{22} = \zeta^t_{i2}\,\zeta_{i2} + R^t_{22}\,R_{22} \qquad (3.13)$$

(3.13)式において ζ^*_{22} を求めるには、J.M. Bennet[4], T.Fujisawa, E.S.Kuh と T.Ohtsuki[21] 等の方法を利用することができる。ζ_{i2} を (n_1, n_2) 行列とすれば、このときの乗算回数は $n_1 n_2^2$ となり[4]、

D_{i+1} を直接分解する場合に比較し、著しく少ないことがわかる。

以上に述べたように、交通流配分問題の求解において最も計算時間を費す基礎方程式の求解は、代数方程式の解法として知られるCholeski分解法を用いることにより、かなり高速化できることが明らかとなった。更に、パスの組が変化する場合の求解には、前回の結果を修正して利用する、簡単な計算法が使えることが明らかとなった。

3.2.4　交通流網の分解法

交通流網の規模が更に大きくなれば、3.2.3節で述べた高速求解法もその計算量及び記憶量の点で問題が生じ、より効率のよい計算手法が必要となる。従来の実用的なプログラムでは、原問題を各OD毎の問題に分解し、これを順に解くことにより原問題の解に収束させる逐次計算法が広く採用されている。[9,76,86,103]

本節では、前章で導いた基礎方程式の求解に基づく交通流網の分解法について考える。まず、分解された部分問題を順に解く方法として、佐佐木、井上等の方法[103]と筆者等の方法[76]を説明し、この場合にも基礎方程式が重要な役割を果たすことを示す。次に分解された部分問題を同時に解き、更にこれらの解を調整して原問題の解に収束させる、2レベル法を提案する。この手法においても、基礎方程式がやはり重要な役割を果たす。

a．ODの直列分解法1

交通流配分問題は、各OD毎の部分問題が共通枝を通じて互いに関連するという、明確な特長をもっている。S.C.Dafermos[9]，佐佐木と井上[103]及びS.Nguyen[86]等はこの特長を利用して、各OD毎の部分問題を順次解いていく分解法を提案している。これらの解法では、各OD毎の部分問題の求解法はそれぞれ異なるが、分解法の構造は同一である。この分解法は必ずしもODを1個ずつに分ける必要はなく、次のように幾つかのODを含む部分集合毎の部分問題に分ける方法として、一般化できる。

〔分解法１〕

(i) 与えられたＯＤを幾つかの部分集合に分解し、1,……，ｍの順序づけをする。

(ii) １番目のＯＤ部分集合の問題を解く。ｉ＝２とする。

(iii) 原問題の解に収束したか？　収束なら終了。そうでなければ(iv)へ。

(iv) ｉ番目のＯＤ部分集合以外の解を固定して、ｉ番目のＯＤ部分集合の問題を解く。

(v) ｉ≒ｍのとき　ｉ＝ｉ＋１とし、ｉ＝ｍのときは　ｉ＝１として(iii)へもどる。

（注意 3.1 ）　この分解法１では、(i)におけるＯＤ部分集合の順序づけによって、収束の速さが変わる。佐佐木と井上は、各部分集合がそれぞれ１個のＯＤからなる場合に、ＯＤの順序を零交通量時における旅行時間の短い順にとるのが良いと指摘している。

（注意 3.2 ）　分解法１の収束性についての保証はない。しかし厳密な解を必要としない場合には、ＯＤ部分集合１～ｍの繰返しを１～２度すれば、十分実用性の高い解に収束すると言われている。

以上の手順を図 3.6 に示す。さて、この分解法１を前章で述べたアルゴリ

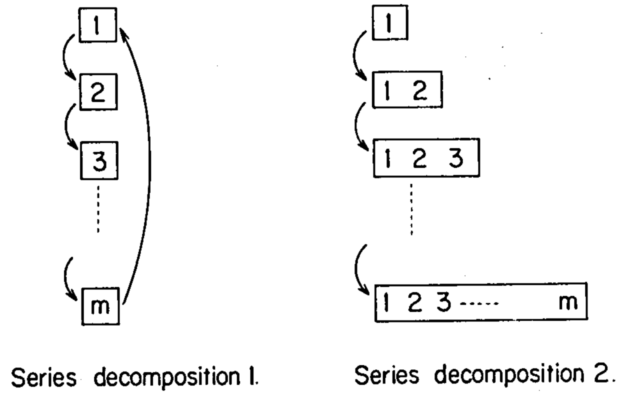

Fig. 3.6. Series decomposition methods for large networks.

ズム2.1～2.3と組み合わせることを考えよう。i番目以外のOD部分集合により定められた枝交通量を（ $Q_{L01}^{(i)}$, $Q_{L02}^{(i)}$ ）とする。この枝交通量がすでに流れているとすれば、i番目のOD部分集合の問題の基礎方程式は、(2.36)式に対応して

$$D^{(i)}\left[Q_{L1}^{(i)} - A_{21}^{(i)} Q_S^{(i)}\right]$$

$$= -\left[T_{L01}^{(i)} + Z_1^{(i)} Q_{L01}^{(i)} + Z_1^{(i)} A_{21}^{(i)} Q_S^{(i)}\right]$$

$$-B_{11}^{(i)t^{-1}} B_{21}^{(i)t}\left[T_{L02}^{(i)} + Z_2^{(i)} Q_{L02}^{(i)} + Z_2^{(i)} A_{31}^{(i)} Q_S^{(i)}\right] \qquad (3.14)$$

となる。すなわち（3.14）式では、（2.36）式に比較して、零交通量時の旅行時間が（$T_{L01}^{(i)}$, $T_{L02}^{(i)}$）から（$T_{L01}^{(i)} + Z_1^{(i)} Q_{L01}^{(i)}$, $T_{L02}^{(i)} + Z_2^{(i)} Q_{L02}^{(i)}$）に変化している。これは枝交通量が（$Q_{L01}^{(i)}$, $Q_{L02}^{(i)}$）の場合の枝旅行時間に等しい。

（3.14）式は（2.36）式と同様の式であるから、その求解は（2.36）式と同様となる。すなわち、i番目のOD部分集合の部分問題は、零交通量時の旅行時間を変更して、前章のアルゴリズム2.1～2.3を利用すれば解くことができる。従って分解法1は、(ii)及び(iv)においてこれらのアルゴリズムを用いることにより、実行することが可能である。

b．ODの直列分解法2

前節で述べた分解法1では、厳密解に到達するまでにm個のOD部分集合の部分問題の求解を、多重回行なう必要がある。筆者等[76)]は、これに対して、有限回の演算で解に収束する、次の分解法を提案した。

［分解法2］

(i) 与えられたOD集合を部分集合に分解し、1,……，mの順序づけをする。

(ii) 1番目のOD部分集合の問題を解く。i＝2とする。

(iii) 1～i番目のOD部分集合の和集合に対する問題を解く。

(iv)　$i=m$ のとき終了。$i \neq m$ のとき　$i=i+1$ として(iii)へもどる。

（注意 3.3 ）　分解法 2 は分解法 1 に比較し、(iii)の演算が複雑になるが、繰返し演算を多重回行なう必要はない。

（注意 3.4 ）　分解法 2 は既に大規模問題の解が得られていて、更に新しく OD 部分集合を追加した場合の求解法としても有効である。

以上の手順を図 3.6 に併記して示す。分解法 2 の(iii)に、前章で導いたアルゴリズム 2.1 ～ 2.3 を組み合わせることを考えよう。1 ～ $i-1$ 番目の OD 部分集合の和集合に対して（ 2.36 ）式が

$$D^{(i-1)}\left[Q_{L1}^{(i-1)}-A_{21}^{(i-1)}Q_S^{(i-1)}\right]=-\left[T_{L01}^{(i-1)}+Z_1^{(i-1)}A_{21}^{(i-1)}Q_S^{(i-1)}\right]$$
$$-B_{11}^{(i-1)t^{-1}}B_{21}^{(i-1)t}\left[T_{L02}^{(i-1)}+Z_2^{(i-1)}A_{31}^{(i-1)}Q_S^{(i-1)}\right] \tag{3.15}$$

で表されるとする。これに更に i 番目の OD 部分集合が付加された場合の和集合に対して、（ 2.36 ）式が

$$D^{(i)}\left[Q_{L1}^{(i)}-A_{21}^{(i)}Q_S^{(i)}\right]$$
$$=-\left[T_{L01}^{(i)}+Z_1^{(i)}A_{21}^{(i)}Q_S^{(i)}\right]-B_{11}^{(i)t^{-1}}B_{21}^{(i)t}\left[T_{L02}^{(i)}+Z_2^{(i)}A_{31}^{(i)}Q_S^{(i)}\right] \tag{3.16}$$

と表されるとする。このとき新しく付加された i 番目の OD 部分集合に対応して、パスの付加及び削除が生ずる。しかるに $D^{(i-1)}$ の逆行列（またはCholeski分解）は前段で得られており、この結果を用いれば $D^{(i)}$ の逆行列（または Choleski分解）は、3.2.3 節に述べた方法により簡単に求めることができる。

分解法 2 に基づく求解の収束性については、前章の定理 2.4 の拡張により次の定理が容易に得られる。

〔定理 3.1 〕

分解法 2 において、(iii)の演算に前章のアルゴリズム 2.1 または 2.2 を用い

れば、有限回の演算で厳密解を得ることができる。

c．ODの並列分解法

以上で述べた直列分解法１，２の手順は、いずれもOD部分集合を順序づけて解く方法である。この順序づけが収束の速度に大きな影響を与えるが、明確な順序づけの方法はまだ存在していない。

この節ではOD部分集合の順序づけに影響されない分解法として、大規模な微分方程式や代数方程式の求解に用いられる、干渉ベクトル調整法[44,88]を適用することを考える。この方法は、図3.7に示すように１種の２レベル法[71]

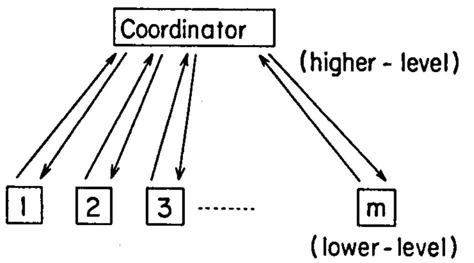

Fig. 3.7 Parallel decomposition methods for large networks.

であり、各部分集合の問題を解くレベル１の演算と、それらの解を調整して、原問題の近似解を求めるレベル２の演算（コーディネータ）とからなる。

（2.3 6）式をm個の部分集合に分解した形で示せば、次のようになる。

$$
\left\{
\begin{aligned}
Q_{L1}^{(1)} &= b_{L1}^{(1)} - D^{(1)-1}\left[Z_1^{(1)} Q_{L01}^{(1)} + B_{11}^{(1)t-1} B_{21}^{(1)t} Z_2^{(1)} Q_{L02}^{(1)} \right] \\
&\vdots \\
Q_{L1}^{(m)} &= b_{L1}^{(m)} - D^{(m)-1}\left[Z_1^{(m)} Q_{L01}^{(m)} + B_{11}^{(m)t-1} B_{21}^{(m)t} Z_2^{(m)} Q_{L02}^{(m)} \right]
\end{aligned}
\right.
\qquad (3.17)
$$

ただし

$$
\left\{
\begin{aligned}
b_{L1}^{(1)} &= D^{(1)-1}\left\{ -\left[T_{L01}^{(1)} + Z_1^{(1)} A_{21}^{(1)} Q_S^{(1)} \right] - B_{11}^{(1)t-1} B_{21}^{(1)t} \left[T_{L02}^{(1)} + Z_2^{(1)} A_{31}^{(1)} Q_S^{(1)} \right] \right\} + A_{21}^{(1)} Q_S^{(1)} \\
&\vdots \\
b_{L1}^{(m)} &= D^{(m)-1}\left\{ -\left[T_{L01}^{(m)} + Z_1^{(m)} A_{21}^{(m)} Q_S^{(m)} \right] - B_{11}^{(m)t-1} B_{21}^{(m)t} \left[T_{L02}^{(m)} + Z_2^{(m)} A_{31}^{(m)} Q_S^{(m)} \right] \right\} + A_{21}^{(m)} Q_S^{(m)}
\end{aligned}
\right.
$$

(3.18)

ここで右肩の添字(i)は、i番目のOD部分集合を表す。一方$(Q_{L01}^{(i)}, Q_{L02}^{(i)})$は、枝交通量からi番目のOD部分集合による枝交通量を除いたものである。すなわち、(3.17)式の右辺第2項は、各OD部分集合と他の部分集合との関係を表す干渉項であると考えることができる。もし各OD部分集合のパスが、互いに他の部分集合との間に枝を共有しなければ、(3.17)式の右辺第2項は0となり、原問題は互いに独立したm個のOD部分集合の問題に帰着される。

一般には(3.17)式の右辺第2項の干渉項は零ではないが、OD部分集合をうまく選べば十分小さくすることができる。このような場合に(3.17)式を効率よく解く方法として、市江[44]の干渉ベクトル調整法と呼ばれる、次の逐次修正法が適用できる。

まずj段階の$Q_{L1}^{(1)} \sim Q_{L1}^{(m)}$を${}^{j}Q_{L1}^{(1)} \sim {}^{j}Q_{L1}^{(m)}$と表す。このとき${}^{j}Q_{L1}^{(1)} \sim {}^{j}Q_{L1}^{(m)}$を(2.37)式に代入すれば、${}^{j}Q_{L2}^{(1)} \sim {}^{j}Q_{L2}^{(m)}$を得ることができ、これを基に${}^{j}Q_{L01}^{(1)} \sim {}^{j}Q_{L01}^{(m)}$及び${}^{j}Q_{L02}^{(1)} \sim {}^{j}Q_{L02}^{(m)}$が求まる。このとき${}^{j+1}Q_{L1}^{(1)} \sim {}^{j+1}Q_{L1}^{(m)}$は次式で定まる。

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{j+1}Q_{L1}^{(1)} = {}^{j}Q_{L1}^{(1)} + \alpha\left[{}^{*j}Q_{L1}^{(1)} - {}^{j}Q_{L1}^{(1)}\right] \\ \qquad\vdots \\ {}^{j+1}Q_{L1}^{(m)} = {}^{j}Q_{L1}^{(m)} + \alpha\left[{}^{*j}Q_{L1}^{(m)} - {}^{j}Q_{L1}^{(m)}\right] \end{array}\right. \tag{3.19}$$

ただし

$${}^{*j}Q_{L1}^{(i)} = b_{L1}^{(i)} - D^{(i)^{-1}}\left[Z_1^{(i)}\,{}^{j}Q_{L01}^{(i)} + B_{11}^{(i)t^{-1}} B_{21}^{(i)t}\, Z_2^{(i)}\,{}^{j}Q_{L02}^{(i)}\right] \tag{3.20}$$

(3.19)式において、αはスカラー量であり、次式

$$J = \sum_{i=1}^{m} \| {}^{*j+1}Q_{L1}^{(i)} - {}^{j+1}Q_{L1}^{(i)} \| \tag{3..21}$$

を最小にする値である。

以上述べた方法を分解法3と呼ぶ。以上の手順をまとめれば次のようになる。

〔分解法3〕

(i)　各OD部分集合の枝交通量$Q_{L1}^{(i)}$(i = 1, 2,⋯, m)を仮定し、これを${}^{1}Q_{L1}$とする。j = 2とする。

(ii)　(3.17)式の右辺の$Q_{L01}^{(i)}, Q_{L02}^{(i)}$に、${}^{j}Q_{L1}^{(i)}, {}^{j}Q_{L2}^{(i)}$(i = 1,⋯, m)から求まる${}^{j}Q_{L01}^{(i)}, {}^{j}Q_{L02}^{(i)}$を代入して求解し、これを${}^{*j}Q_{L1}^{(i)}$とする。

(iii)　${}^{j+1}Q_{L1}^{(i)} = {}^{j}Q_{L1}^{(i)} + \alpha\left[{}^{*j}Q_{L1}^{(i)} - {}^{j}Q_{L1}^{(i)}\right]$とし、(3.21)式で与えられるJが最小になるα^*を求める。

(iv)　${}^{j+1}Q_{L1}^{(i)} = {}^{j}Q_{L1}^{(i)} + \alpha^*\left[{}^{*j}Q_{L1}^{(i)} - {}^{j}Q_{L1}^{(i)}\right]$として、(ii)へもどる。

この分解法3は、求解の順序にかかわらず同じ解が得られる。更に各部分問題は、分解法1と同様に小さく、その点分解法2に比較して有利である。

3.2.5　むすび

本3.2節では、第2章の議論を現実問題に適用する場合の問題の一つとして、交通流網が大規模になった場合の計算の高速化、効率化について述べた。

この結果、計算に必要な記憶量は、行列のスパース性及び要素が(1, 0, −1)である性質を用いれば著しく小さくできること、計算量の大部分を占める逆行列演算は、行列のスパース性の利用とCholeski 分解法により、著しく高速化されることが明らかとなった。

更に道路網が大規模になった場合には、道路網の分解が有用であることを示し、分解法として、従来の分解法の他に新しい分解法を提案し、その手順を示した。

3.3　非線形枝特性を持つ交通流網における交通流配分問題

3.3.1　まえがき

第2章では、枝特性(交通量−旅行時間特性)が線形式で表される場合の交通流配分問題を数学的に簡潔に表し、その均衡解を得る手法について述べた。しかるに現実には、交通量が交通容量に近づくにつれ旅行時間が急激に

増大し、特性は非線形となる。この非線形特性を無視すると、枝には交通容量以上の交通量でも自由に流れることになり、実際の現象と乖離する。そこで、本節では枝の非線形特性を考慮した場合の交通流配分問題の求解法について考察しよう。

従来、枝特性が非線形の場合の均衡解を得る方法として、第2章で述べたWayne 法、I.A.法及びDafermos の方法が利用されてきた。[9,70,111,112] しかしこれらのアルゴリズムは計算の手順を示したものにすぎず、それに基づいて数学的な議論を発展させるのは困難である。

一方、最近では最適配分の解を得る手法として、一般的な非線形計画法を利用する手法が、T. Leventhal, G.Nemhauser と L.Trotter[67] 及び S.Nguyen[86] 等によって提案されている。一般に、等時間配分問題を最適配分問題に変換すると枝特性が線形であれば2次計画問題となり、非線形であればより高次の非線形計画問題となる。すなわち、枝特性が非線形の場合の均衡解の求解は、非線形計画問題の求解に置き換えられる。しかし非線形計画法を利用したこれらの方法では、計算の過程で等時間則を必ずしも満たさない欠点があるうえ、収束の速度に問題があると考えられる。

本章では、枝特性を区間線形関数で近似した場合と、一般的な非線形関数で表した場合に分け、それぞれの求解法について考える。各場合について、区間線形及び非線形代数方程式で表される基礎方程式を誘導し、第2章で述べたアルゴリズムを拡張して、解が求められることを示す。更にこれらのアルゴリズムにおいて重要な区間線形代数方程式及び非線形代数方程式の、効率的な求解法を示す。

3.3.2 道路の枝特性

B.D.Greenshilds[28] は簡潔な車両追従モデルを用いて、道路区間における交通密度 ρ_ℓ と空間平均速度 u_ℓ の関係が、次式のような線形式で表されることを示した。[†]

† 第5章参照

$$u_\ell = a\rho_\ell + b \qquad (3.22)$$

この関係は、その後多くの実測により、広い範囲で成立することが確認されている。[29,83,89] (3.22)式において、a 及び b はそれぞれ負及び正の定数であり、その値は道路区間により決まる。

いま、道路区間の長さを x_ℓ とすれば、交通量 q_ℓ、旅行時間 t_ℓ と ρ_ℓ, u_ℓ との間には、次の2つの関係がある。[43]

$$q_\ell = \rho_\ell u_\ell \qquad (3.23)$$

$$u_\ell = \frac{x_\ell}{t_\ell} \qquad (3.24)$$

(3.23)及び(3.24)式を(3.22)式に代入して整理すれば

$$t_\ell = \frac{2 \cdot x_\ell}{b \pm \sqrt{b^2 + 4aq_\ell}} \qquad (3.25)$$

が得られる。(3.25)式において、分母の符号が正のときは交通の正常状態を表し、負のときは渋滞状態を表している。すなわち、第2章の図2.1で示した交通量－旅行時間の枝特性は(3.25)式に相当したものであることがわかる。

飯田及び中堀、半田はこの特性を図3.8に示すような単調増加区間線形関

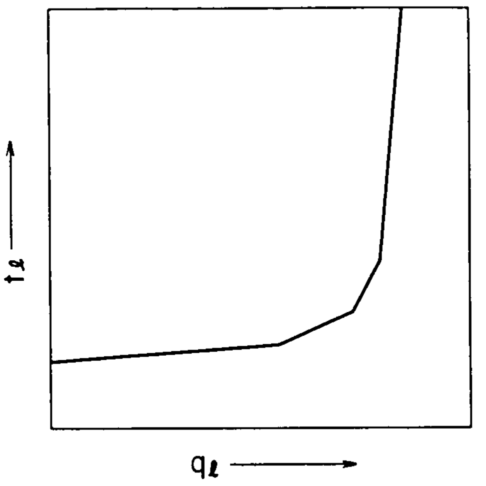

Fig. 3.8 A piecewise linear approximation of $(q_\ell - t_\ell)$ characteristic

数で近似している。これによれば、枝特性は交通量の領域毎に、次の線形関数で表される。

$$t_\ell = z_\ell^{(i)} q_\ell + t_{\ell 0}^{(i)} \tag{3.26}$$

ただし

$$q_{\ell 1}^{(i)} \leqq q_\ell \leqq q_{\ell 2}^{(i)}$$

BPR[124] では、この枝特性を図3.9に示すような次の4次関数で表しており、Nguyen等はこの特性を使っている。[86]

$$t_\ell = t_{\ell 0}\left(0.15\left(\frac{q_\ell}{q_{\ell c}}\right)^4 + 1\right) \tag{3.27}$$

ここで $t_{\ell 0}$ は零交通量時の旅行時間を表し、$q_{\ell c}$ は枝の交通容量を表している。

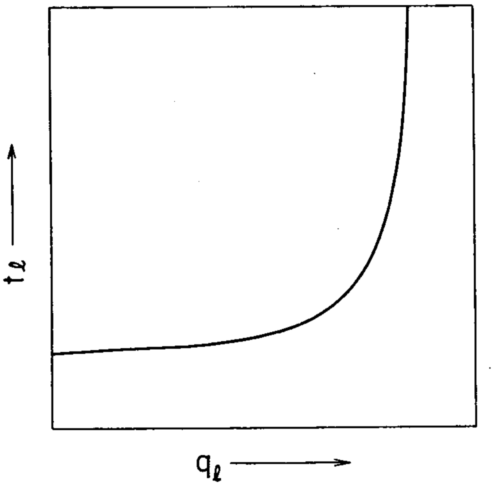

Fig. 3.9. A nonlinear approximation of (q_ℓ-t_ℓ) characteristic.

以上の枝特性、すなわち(3.26)及び(3.27)式では、q_ℓ が $[0, \infty)$ において単調増加となり、定理2.1により原問題の解の存在及び唯一性が保証される。従って以下では枝特性が単調増加関数であるとし、区間線形及び一般的な非線形関数のそれぞれの場合について考察しよう。

3.3.3　区間線形枝特性の場合の求解法

枝特性を（3.26）式のように区間線形で近似すれば、各枝の交通量はいくつかの領域に分割され、それぞれの領域で枝特性は線形となる。いま、すべての枝の交通量の領域を仮定し、それらの集合をΨとすることにより、(2.31)式に相当する次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} T_{L1} \\ T_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1^{\Psi} & 0 \\ 0 & Z_2^{\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{L1} \\ Q_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{L01}^{\Psi} \\ T_{L02}^{\Psi} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

（3.28）式において、Z_1^{Ψ}，Z_2^{Ψ} 及び T_{L01}^{Ψ}，T_{L02}^{Ψ} は集合Ψによって定まる、定数行列及びベクトルである。

交通量保存則及び等時間則は、枝特性にかかわらずグラフのみに依存するから（2.28）～（2.30）式はそのまま成立する。従ってパスループまたはパスカット方程式は、（2.28）～（2.30）式に（3.28）式を組み合わせて、前章と同様に導くことができる。このときのパスループ方程式は次のようになる。

$$D^{\Psi}\left[Q_{L1} - A_{21}Q_S\right] = -\left[T_{L01}^{\Psi} + Z_1^{\Psi}A_{21}Q_S\right] - B_{11}^{t^{-1}}B_{21}^{t}\left[T_{L02}^{\Psi} + Z_2^{\Psi}A_{31}Q_S\right] \tag{3.29}$$

ただし　　$D^{\Psi} \triangleq Z_1^{\Psi} + B_{11}^{t^{-1}}B_{21}^{t}Z_2^{\Psi}B_{21}B_{11}^{-1}$

（3.29）式より得られるQ_{L1}を用いれば、Q_{L2}，T_{L1}，T_{L2} 及びQ_{P1}～Q_{P3}は前章と同様の手順で容易に求めることができる。従って、以下では（3.29）式の求解について考えよう。

各枝の交通量の領域を仮定し、この集合をΨとする。Ψによって定まるZ^{Ψ}とT_{L0}^{Ψ}を（3.29）式に代入して得られるQ_{L1}及び、このQ_{L1}を（2.37）式に代入して得られるQ_{L2}の領域の集合をΨ'とする。仮定された領域Ψと得ら

れた領域 Ψ' が一致すれば、真の解が得られたことになる。しかし一般に Ψ と Ψ' は一致しない。この領域を逐次変化させ真の解を得る方法として、電気回路網解析の分野で発達した、区間線形写像の手法[20,56]が利用できる。

(3.29)式の求解に区間線形写像法を用いれば、原問題の求解アルゴリズムとしては、前章のアルゴリズム2.1～2.3がそのまま利用できる。ここではアルゴリズム2.2を例として考えよう。アルゴリズム2.2では λ の増加に伴い、パスの付加と削除が行われたが、ここでは更に枝の領域の変更が加わり、次のようになる。

〔アルゴリズム3.1〕

(i) 各枝の領域を零交通量時の領域とする。各ODについて零交通量時の最短旅行時間パスを求める。Q_S を λQ_S として基礎方程式を作る。

(ii) λ を適当量 $\Delta\lambda$ だけ増加させる。λ が1となれば終了。

(iii) 枝交通量が仮定の領域になければ、領域を変更する。パス交通量が正から零になれば、そのパスを削除する。改めて各OD毎に最短パスを求め、新しいパスが見つかればこれを付加する。領域あるいはパスの変化があれば、基礎方程式を変更して(ii)へもどる。変化がなければ、そのまま(ii)へもどる。

アルゴリズム3.1はアルゴリズム2.2と同様、次のように有限回の基礎方程式の変更で、厳密解に収束することがいえる。

〔定理3.2〕

パスと領域の組合せの数を r とすれば、アルゴリズム3.1はたかだか r 回のパスあるいは領域の変更で真の解に収束する。

〔証　明〕

この定理を証明するには、λ の増加について同じパスと領域の組合せ(Φ^i, Ψ^i)が二度現れることがないことをいえばよい。定理2.4と同様に λ に関する線形性により、(Φ^i, Ψ^i) からパス p^* が付加または削除され、更にいくつかのステップの後再び (Φ^i, Ψ^i) が現れることはない。同様に λ に関する

線形性により、(Φ^i, Ψ^i)から領域が変更され、更に幾つかのステップの後再び(Φ^i, Ψ^i)が現れることもない。従って、λの増加に伴って、領域及びパスの同じ組合せはたかだか一度しか現れない。　　　　　(証明終り)

アルゴリズム3.1では(3.29)式の求解が、パスの変更に加えて領域の変更の場合にも、必要となる。パスの変更の場合は、3.2.3節で述べたのと同じ形になるので説明を省略し、領域変更の場合の計算法について考えよう。領域Ψ_iからΨ_{i+1}への変更に対応して、行列DがD_iからD_{i+1}へ変化したとすれば、

$$D_{i+1} = D_i + \left[I \quad B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} \right] \Delta Z \begin{bmatrix} I \\ B_{21} B_{11}^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

ただし　　$Z_{i+1} = Z_i + \Delta Z$

となる。通常領域変更は一つの枝についてのみ起こるから、ΔZは一つの対角要素だけが非零の行列となる。この非零要素がj行j列にあるとすれば

$$\left[I \quad B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} \right] \Delta Z \begin{bmatrix} I \\ B_{21} B_{11}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \left[I \quad B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} \right]_{\cdot j} \Delta z_{jj} \begin{bmatrix} I \\ B_{21} B_{11}^{-1} \end{bmatrix}_{j \cdot} \tag{3.31}$$

となる。ここで添字の$\cdot j$, jj, 及び$j\cdot$は、それぞれ行列のj列、j行j列及びj行を表す。

すなわち、(3.31)式はベクトルの積の形で表される行列(dyad)であることがわかる。今D_iが既にCholeski分解されているとしよう。このときD_{i+1}は、(3.30)式で示したように、D_iとベクトルの積の形の行列の和で表されるから、Fujisawa, KuhとOhtsuki[21)]の方法を用いて、そのCholeski 分解を容易に求めることができる。このように枝の領域の変更に伴って必要となる(3.29)式の求解も、3.2.3節で述べたパスの変更の場

合と同様に、それ以前の結果を基に簡単に行えることが示された。

3.3.4 非線形枝特性の場合の求解法

(3.27)式を一般化して、交通量−旅行時間で表される枝特性が次の非線形関数で表される場合を考えよう。

$$t_\ell = z(q_\ell)\cdot q_\ell + t_{\ell 0} \qquad (3.32)$$

ここで、枝インピーダンス $z(q_\ell)$ は、$(0, \infty)$ で定義される連続微分可能な非減少関数であるとする。(3.27)式の場合、$z(q_\ell)$ は

$$z(q_\ell) = 0.15\, t_{\ell 0}\, q_\ell^3 / q_{\ell C}^4$$ である。

枝特性が(3.32)式のように一般的な非線形関数で表される場合、すべての枝特性は(2.31)式に対応して、次式で表現することができる。

$$\begin{bmatrix} T_{L1} \\ T_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1(Q_{L1}) & 0 \\ 0 & Z_2(Q_{L2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{L1} \\ Q_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{L01} \\ T_{L02} \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

交通量保存則及び等時間則は枝特性に関係せずグラフのトポロジーのみに依存するから、(2.28)〜(2.30)式はそのまま成立する。従ってこれらの式に(3.33)式を組み合わせれば、基礎方程式としてパスループ及びパスカット方程式が、第2章と同様にして導かれる。3.2.3節同様、ここではパスループ方程式のみを示せば次のようになる。

$$\begin{aligned} &D(Q_L)\left[Q_{L1} - A_{21}Q_S\right] \\ &\quad = -\left[T_{L01} + Z_1(Q_{L1})A_{21}Q_S\right] - B_{11}^{t\,-1}B_{21}^{t}\left[T_{L02} + Z_2(Q_{L2})A_{31}Q_S\right] \end{aligned} \qquad (3.34)$$

ただし $$D(Q_L) = Z_1(Q_{L1}) + B_{11}^{t\,-1}B_{21}^{t}Z_2(Q_{L2})B_{21}B_{11}^{-1} \qquad (3.35)$$

(3.34)式は、行列D，Z_1 及び Z_2 が Q_L の関数であるから、非線形代数方程式となる。Q_{L2} は(2.37)式より Q_{L1} で定まるから、$D(Q_L)$ 及び $Z_2(Q_{L2})$ も $Z_1(Q_{L1})$ と同様に、$D(Q_{L1})$，$Z_2(Q_{L1})$ と表現することができる。

T_{L1}, T_{L2}及びQ_{P1} ~ Q_{P3} も前章と同様に、Q_{L1} より求めることができる。従って、以下ではQ_{L1}のみを変数として、(3.34)式で表される非線形代数方程式の求解について考える。

非線形代数方程式の求解法として、現在最も一般的に利用されているNewton−Raphson 法[6]を、(3.34)式に適用することを考えよう。ここで(3.34)式より、次の関数Eを導入する。

$$E(Q_{L1}) = D(Q_{L1})\left[Q_{L1} - A_{21}Q_S\right] + \left[T_{L01} + Z_1(Q_{L1})A_{21}Q_S\right] + B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t}\left[T_{L02} + Z_2(Q_{L2})A_{31}Q_S\right] \tag{3.36}$$

(3.34)式の解 Q_{L1}を(3.36)式の右辺に代入すれば、$E(Q_{L1})$ は零ベクトルとなる。しかし一般には$E(Q_{L1})$は零でないベクトルであり、誤差ベクトルと呼ばれる。

(3.34)式の解 Q_{L1}の第m近似を$Q_{L1}^{(m)}$ とすれば、第m+1近似$Q_{L1}^{(m+1)}$はNewton−Raphson法により次のようになる。

$$Q_{L1}^{(m+1)} = Q_{L1}^{(m)} - \left(\frac{\partial E}{\partial Q_{L1}}\right)^{(m)^{-1}} E^{(m)} \tag{3.37}$$

ここで $\dfrac{\partial E}{\partial Q_{L1}}$はヤコビ行列であり、その ij 要素は次のように定められる。

$$\left(\frac{\partial E}{\partial Q_{L1}}\right)_{ij} = \frac{\partial e_i}{\partial q_{L1j}} \tag{3.38}$$

(3.38)式において e_i は誤差ベクトル$E(Q_{L1})$の第 i 要素であり、q_{L1j} はベクトルQ_{L1}の第 j 要素である。

さて、ヤコビ行列を求めよう。(3.36)式を書き直せば次のようになる。

$$E(Q_{L1}) = T_{L01} + Z_1Q_{L1} + B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t}\left[T_{L02} + Z_2Q_{L2}\right] \tag{3.39}$$

ここで

$$Q_{L2} = B_{21} B_{11}^{-1} \left[Q_{L1} - A_{21} Q_S \right] + A_{31} Q_S \qquad (3.40)$$

従って (3.38)式で定まるヤコビ行列の第 ij 要素は

$$\frac{\partial e_i}{\partial q_{L1j}} = \left[\frac{\partial Z_1}{\partial q_{L1j}} Q_{L1} + Z_1 \frac{\partial Q_{L1}}{\partial q_{L1j}} \right]_i$$

$$+ \left(B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} \right)_{i\cdot} \left[\frac{\partial Z_2}{\partial q_{L1j}} Q_{L2} + Z_2 \frac{\partial Q_{L2}}{\partial q_{L1j}} \right] \qquad (3.41)$$

となる。(3.41)式において添字の i 及び i• は、それぞれベクトルの第 i 要素及び行列の第 i 行を表わす。

(3.41)式において $\dfrac{\partial Z_1}{\partial q_{L1j}}$ 及び $\dfrac{\partial Q_{L1}}{\partial q_{L1j}}$ は次のように求まる。

$$\frac{\partial Z_1}{\partial q_{L1j}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Z}_{1\cdot j} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.42)$$

$$\frac{\partial Q_{L1}}{\partial q_{L1j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (j \qquad (3.43)$$

(3.42)式において、$\overline{Z}_{1\cdot j}$ は第 j 要素が $\dfrac{\partial Z_{1jj}}{\partial q_{L1j}}$ であり、その他の要素が 0 である列ベクトルである。

次に (3.41)式における $\dfrac{\partial Z_2}{\partial q_{L1j}}$ 及び $\dfrac{\partial Q_{L2}}{\partial q_{L1j}}$ を求めよう。補木枝 L_2 の数を $n(L_2)$ とすれば、$\dfrac{\partial Z_2}{\partial q_{L1j}}$ は次のようになる。

$$\frac{\partial Z_2}{\partial q_{L1j}} = \sum_{k=1}^{n(L_2)} \frac{\partial Z_2}{\partial q_{L2k}} \frac{\partial q_{L2k}}{\partial q_{L1j}} \qquad (3.44)$$

ただし

$$\frac{\partial Z_2}{\partial q_{L2k}} = \begin{array}{c} \hphantom{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \quad & 0 & 0 \end{bmatrix}} \\[-4pt] \begin{array}{ccccc} & & k & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \overline{Z}_{2\cdot k} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.45)$$

ここで $\overline{Z}_{2\cdot k}$ は第k要素が $\dfrac{\partial z_{2kk}}{\partial q_{L2k}}$ であり、その他の要素が0である列ベクトルである。更に(3.40)式より $\dfrac{\partial q_{L2k}}{\partial q_{L1j}}$ は

$$\frac{\partial q_{L2k}}{\partial q_{L1j}} = \left[B_{21} B_{11}^{-1} \right]_{kj} \qquad (3.46)$$

となる。従って、(3.45)及び(3.46)を(3.44)式に代入して整理すれば

$$\frac{\partial Z_2}{\partial q_{L1j}} = \left[\overline{Z}_{2\cdot 1} \left[B_{21} B_{11}^{-1} \right]_{1j}, \overline{Z}_{2\cdot 2} \left[B_{21} B_{11}^{-1} \right]_{2j}, \cdots, \right.$$
$$\left. \overline{Z}_{2\cdot n(L_2)} \left[B_{21} B_{11}^{-1} \right]_{n(L_2)j} \right] \qquad (3.47)$$

が得られる。一方、$\dfrac{\partial Q_{L2}}{\partial q_{L1j}}$ は(3.40)式を用いれば、(3.46)式と同様に次のようになる。

$$\frac{\partial Q_{L2}}{\partial q_{L1j}} = \left[B_{21} B_{11}^{-1} \right]_{\cdot j} \qquad (3..48)$$

以上で得られた $\dfrac{\partial Z_1}{\partial q_{L1j}}$, $\dfrac{\partial Q_{L1}}{\partial q_{L1j}}$, $\dfrac{\partial Z_2}{\partial q_{L1j}}$ 及び $\dfrac{\partial Q_{L2}}{\partial q_{L1j}}$ を(3.41)式に代入して整理すれば、ヤコビ行列の ij 要素は次のようになる。

$$\frac{\partial e_i}{\partial q_{L1j}} = \widetilde{Z}_{1ij} + \left[B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} \right]_{i\cdot} \widetilde{Z}_2 \left[B_{21} B_{11}^{-1} \right]_{\cdot j} \qquad (3.49)$$

ただし

$$\tilde{z}_{1ij} = \begin{cases} \dfrac{dz_{1ii}}{dq_{L1i}} \cdot q_{L1i} + z_{1ii} & (i=j) \\ \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{3.50}$$

$$\tilde{z}_{2ij} = \begin{cases} \dfrac{dz_{2ii}}{dq_{L2i}} \cdot q_{L2i} + z_{2ii} & (i=j) \\ \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{3.51}$$

ここで $\tilde{Z}_1$ 及び $\tilde{Z}_2$ は正値対角行列であり、枝特性が線形の場合は、それぞれ枝インピーダンス行列 Z_1 及び Z_2 に等しくなる。

(3.49)式を ij 要素とするヤコビ行列は次式となる。

$$\frac{\partial E}{\partial Q_{L1}} = \tilde{Z}_1 + B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} \tilde{Z}_2 B_{21} B_{11}^{-1} \tag{3.52}$$

すなわちヤコビ行列は、枝特性が線形の場合は、パスループ・インピーダンス行列Dに等しくなる。従って以下ではヤコビ行列を $\tilde{D}$ と表そう。

(3.37)式に従って、Newton－Raphson 法を遂行するにあたって、ヤコビ行列の逆行列演算を避けるため、次の形式に書き替える。[108)]

$$\tilde{D}^{(m)} \left[Q_{L1}^{(m+1)} - Q_{L1}^{(m)} \right] = - E^{(m)} \tag{3.53}$$

ここで、$\tilde{D}^{(m)}$ は正値対称行列であるから Choleski 分解することができ、3.2 節と同様の手順により、容易に $Q_{L1}^{(m+1)}$ を求めることができる。

なお、$Z(q_\ell)$ が(3.27)式のように q_ℓ の 3 乗に比例する場合には、(3.50), (3.51)式の行列は $\tilde{Z}_1 = 4Z_1$　$\tilde{Z}_2 = 4Z_2$ となる。従って、ヤコビ行列 $\tilde{D}$ は $\tilde{D} = 4D$ となる。

以上述べたように本 3.3.4 節では、枝特性が一般の非線形関数で表される場合の基礎方程式の求解が、Newton－Raphson 法を用いて行なえること

を示した。第2章で述べたアルゴリズム2.1～2.3において、その基礎方程式の求解に本3.3.4節の方法を用いれば、枝特性が非線形の場合の交通流配分問題を解くことができる。

3.3.5　むすび

本節では枝特性の非線形性を考慮した交通流配分問題の求解法について述べた。

枝特性が区間線形関数で表される場合の枝交通量の基礎方程式は、区間線形代数方程式となる。この式の求解法としては、電気回路網解析の分野で良く知られた、区間線形写像法が有用であることを示し、その有限回収束を証明した。

一方、枝特性が一般の非線形関数で表される場合には、枝交通量の基礎方程式は非線形代数方程式となる。この求解法として良く知られたNewton－Raphson法の適用を提案し、その計算に必要なヤコビ行列が、拡張されたパスループ・インピーダンス行列の形になる事を示した。この結果を用いて、計算量の少ない簡潔な計算法を確立した。

3.4　交通流配分問題の汎用プログラム開発と例題への応用

第2章及び本第3章で述べた方法に基づき、汎用の交通流配分プログラムを開発した。このプログラムは第2章で述べたアルゴリズム2.3を土台とし、更に本章で述べたCholeski分解法による基礎方程式の高速求解及びNewton－Raphson法による非線形基礎方程式の求解を組み込んだものである。従ってこのプログラムは、道路特性が線形の場合と、BPRマニュアルによる4次の非線形の場合に、適用することができる。

このプログラムの構造を図3.10に示す。このプログラムの入出力を次に示す。

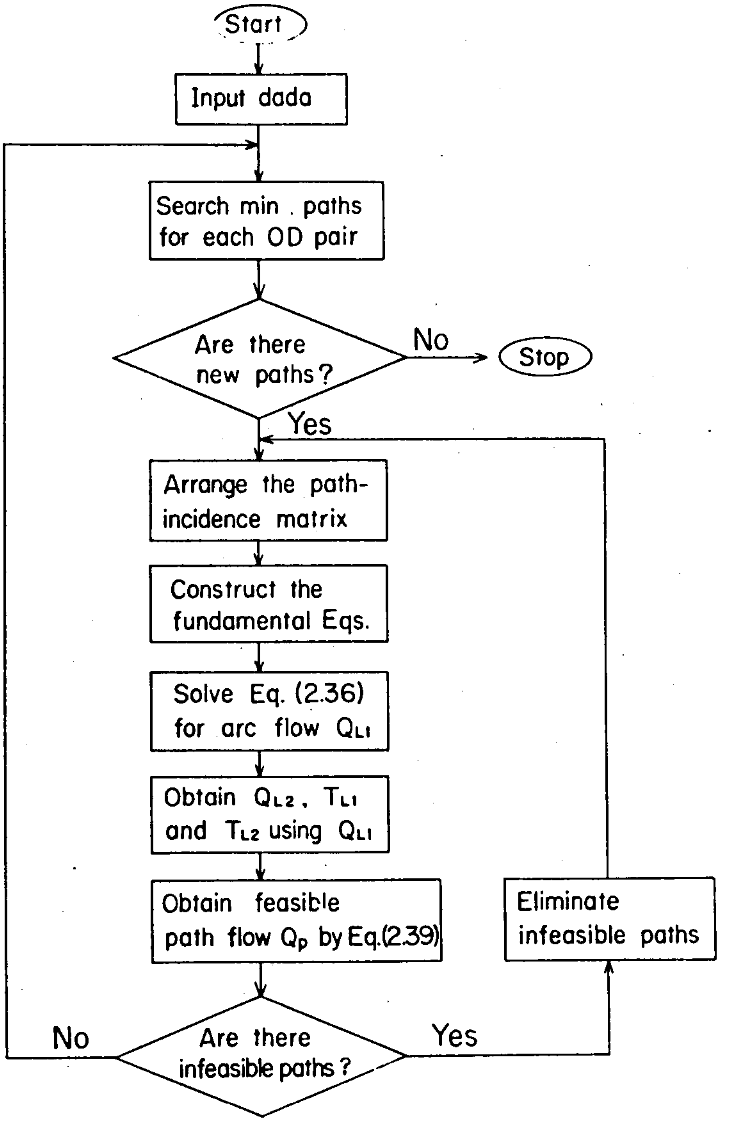

Fig. 3.10. Flow diagram of the traffic assignment program.

入　力

1. 節点数、枝数、ＯＤ数

2. 枝　特性；　始端及び終端節点、$(z_\ell, t_{\ell 0})$ or $(q_{\ell c}, t_{\ell 0})$

3. ＯＤ特性；　始端及び終端節点、ＯＤ交通量

出　力

1. 枝の解；　枝名、Q_L, T_L

2. パスの解；　パス名（所属ＯＤ）、枝シーケンス、Q_P, T_P

3. 総旅行時間

このプログラムは FortranⅣでコーディングされており、約1000ステップである。このプログラムを利用して、図3.11に示したグラフにおける

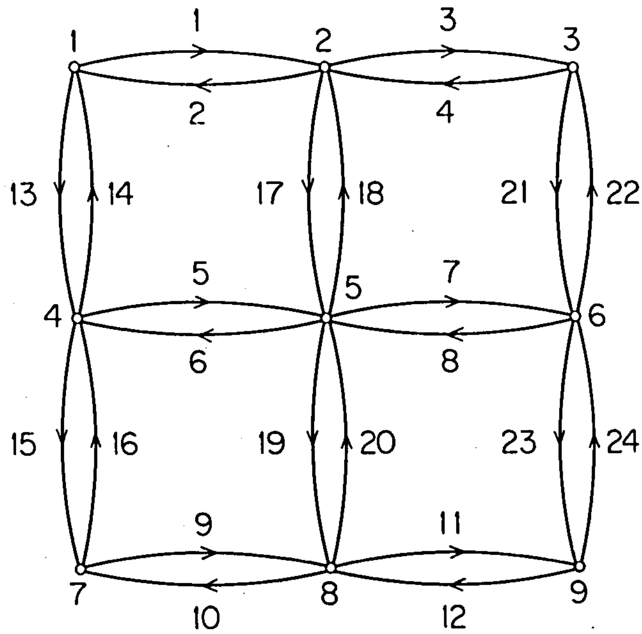

Fig.3.11 Graph 3.

交通流配分問題を線形及び非線形の場合について解いた。この時のＯＤ特性を表3.1に示す。

〔例題3.1〕

まず、枝特性が線形の場合を考えよう。　各枝の特性を表3.2に示す。このとき、計算は4回の繰返し計算で収束する。ステップ4で得られたパス以外に最短パスは存在しないのでこの解は厳密解である。このときのパスの解の収束の様子を表3.3に示す。

Table 3.1. OD demands in Ex. 3.1.

OD	from node	to node	q_0
1	1	9	3.0
2	9	1	5.0
3	7	3	2.0
4	3	7	2.5
5	4	3	2.0
6	5	2	1.5
7	5	7	2.6
8	9	5	4.0
9	1	3	1.6
10	7	9	2.25

Table 3.2. Arc characteristics in Ex. 3.1.

arc	from	to	z	to
1	1	2	0.5	1.0
2	2	1	2.5	2.5
3	2	3	3.0	3.0
4	3	2	1.0	1.0
5	4	5	1.0	1.5
6	5	4	1.0	2.0
7	5	6	1.2	3.0
8	6	5	0.5	1.0
9	7	8	1.3	2.0
10	8	7	2.5	2.5
11	8	9	1.0	1.0
12	9	8	4.0	3.0
13	1	4	1.3	4.0
14	4	1	7.0	3.5
15	4	7	1.3	2.0
16	7	4	0.8	1.0
17	2	5	0.9	1.5
18	5	2	1.0	2.0
19	5	8	1.0	2.5
20	8	5	1.0	1.0
21	3	6	1.0	1.5
22	6	3	2.6	2.0
23	6	9	2.5	2.5
24	9	6	0.3	0.5

Table 3.3. Solutions of path flows in Ex. 3.1.

OD	path	arc sequence	1		2		3		4	
			q_p	t_p	q_p	t_p	q_p	t_p	q_p	t_p
1	1	1,17,19,11	3.0	20.0	2.85	21.1	2.67	21.0	2.67	21.0
	2	1, 3,21,23	—	—	0.15	21.1	0.15	21.0	0.15	21.0
	3	1,17, 7,23	—	—	—	—	0.19	21.0	0.19	21.0
2	1	24, 8,18, 2	4.14	28.8	3.67	28.2	3.36	28.1	3.36	28.1
	2	12,10,16,14	0.86	28.8	—	—	—	—	—	—
	3	24, 8, 6,14	—	—	1.33	28.2	1.33	28.1	1.33	28.1
	4	12,20,18, 2	—	—	—	—	0.32	28.1	0.32	28.1
3	1	16, 5, 7,22	2.0	27.9	1.47	25.0	1.55	25.3	1.55	25.3
	2	9,20,18, 3	—	—	0.53	25.0	0.45	25.3	0.45	25.3
	3	16, 5,18, 3	—	—	—	—	—	—	0	25.3
4	1	4,17, 6,15	1.76	22.6	1.60	21.1	1.57	21.1	1.57	21.1
	2	21,23,12,10	0.74	22.6	0.90	21.1	0.64	21.1	0.64	21.1
	3	21, 8, 6,15	—	—	—	—	0.29	21.1	0.29	21.1
	4	21, 8,19,10	—	—	—	—	—	—	0	21.1
5	1	5,18, 3,	0.30	22.1	0.08	22.8	0.19	23.0	0.19	23.0
	2	5, 7,22,	1.70	24.6	1.92	22.8	1.81	23.0	1.81	23.0
6	1	18	1.5	7.9	1.5	7.8	1.5	7.8	1.5	7.8
7	1	6,15	2.6	14.0	1.76	13.0	1.51	13.1	1.51	13.1
	2	19,10	—	—	0.84	13.0	1.09	13.1	1.09	13.1
8	1	24, 8	4.0	8.0	4.0	8.7	4.0	8.6	4.0	8.6
	2	12,20	—	—	—	—	0	8.6	0	8.6
9	1	1, 3	1.6	11.1	1.6	13.4	1.6	13.5	1.6	13.5
10	1	9,11	2.25	11.2	2.25	11.7	2.25	11.4	2.25	11.4

〔例題 3. 2〕

次に枝特性が (3.2 7)式で表される非線形の場合を考えよう。各枝の特性を表 3. 4 に示す。計算は 5 回の繰返し計算で収束する。ステップ 5 以外に最短パスは存在しないのでこの解は厳密解である。枝の解の収束の様子を表 3. 5 に、パスの解を表 3. 6 に示す。

Table 3.4. Arc characteristics in Ex. 3.2.

arc	from node	to node	$q_{\ell C}$	$t_{\ell 0}$
1	1	2	2. 0	1. 0
2	2	1	1. 0	2. 5
3	2	3	1. 0	3. 0
4	3	2	1. 0	1. 0
5	4	5	1. 5	1. 5
6	5	4	2. 0	2. 0
7	5	6	2. 5	3. 0
8	6	5	2. 0	1. 0
9	7	8	1. 5	2. 0
10	8	7	1. 0	2. 5
11	8	9	1. 0	1. 0
12	9	8	0. 75	3. 0
13	1	4	3. 0	4. 0
14	4	1	0. 5	3. 5
15	4	7	1. 5	2. 0
16	7	4	1. 25	1. 0
17	2	5	1. 75	1. 5
18	5	2	2. 0	2. 0
19	5	8	2. 5	2. 5
20	8	5	1. 0	1. 0
21	3	6	1. 5	1. 5
22	6	3	0. 75	2. 0
23	6	9	1. 0	2. 5
24	9	6	1. 75	0. 5

Table 3.5. Solutions of arc flows in Ex. 3.2.

arc	q_ℓ	t_ℓ
1	3.82	3.01
2	3.33	48.86
3	2.89	34.24
4	2.50	6.86
5	3.96	12.45
6	4.40	9.03
7	4.81	9.17
8	6.85	21.69
9	3.06	7.23
10	2.37	14.25
11	3.15	15.83
12	2.15	33.15
13	0.78	4.00
14	1.67	68.15
15	3.27	8.31
16	1.66	1.47
17	4.72	13.45
18	6.12	28.32
19	2.79	3.08
20	2.48	6.69
21	0.00	1.50
22	2.71	53.40
23	2.10	9.75
24	6.85	18.15

Table 3.6. Solutions of path flows in Ex. 3.2.

OD	path	arc sequence	1		2		3		4		5	
			q_p	t_p	q_p	t_p	q_p	t_p	q_p	t_p	q_p	t_p
1	1	13, 5, 7, 23	3.0	176.3	1.72	35.9	0.785	68.9	0.037	36.6	0.298	35.4
	2	1, 17, 19, 11	—	—	1.29	35.9	—	—	—	—	0.426	35.4
	3	1, 17, 7, 23	—	—	—	—	2.215	68.9	2.161	36.6	1.798	35.4
	4	13, 15, 9, 11	—	—	—	—	—	—	0.803	36.6	0.478	35.4
2	1	24, 8, 18, 2	3.45	106.6	3.333	117.2	3.359	84.3	3.332	116.5	3.334	117.0
	2	12, 10, 16, 14	1.55	106.6	0.763	117.2	—	—	—	—	—	—
	3	24, 8, 6, 14			0.903	117.2	1.641	84.3	1.668	116.5	1.666	117.0
3	1	16, 5, 7, 22	2.0	394.3	0.722	81.5	1.168	130.6	0.709	76.2	0.713	76.5
	2	9, 20, 18, 3	—	—	1.278	81.5	0.832	130.6	0.145	76.2	0.336	76.5
	3	16, 5, 18, 3	—	—	—	—	—	—	1.146	76.2	0.950	76.5
4	1	4, 17, 6, 15	2.5	61.8	0.832	32.1	2.5	32.0	2.5	38.6	2.5	37.6
	2	4, 17, 19, 10	—	—	1.668	32.1	—	—	—	—	0	37.6
5	1	5, 7, 22	2.0	383.6	2.0	80.2	2.0	129.4	2.0	74.5	2.0	75.0
	2	5, 18, 3	—	—	—	—	—	—	0	74.5	0	75.0
6	1	18,	1.5	13.3	1.5	28.2	1.5	21.7	1.5	28.3	1.5	28.3
7	1	6, 15	2.6	56.8	2.6	18.8			0.148	18.9	0.234	17.3
	2	19, 10	—	—	0	18.8	2.6	22.6	2.452	18.9	2.366	17.3
8	1	24, 8	3.304	37.6	2.638	40.3	—	—	1.835	39.5	1.854	39.8
	2	12, 20	0.696	40.2	1.362	40.3	4.0	450.0	2.165	39.5	2.146	39.8
9	1	1, 3	1.6	7.0	1.6	35.5	1.6	21.7	1.6	37.3	1.6	37.2
10	1	9, 11	2.25	8.4	2.25	35.7	2.25	12.2	2.25	22.2	2.25	23.1

3.5　結　　言

本章では第1章で述べた交通流配分問題の解法を基に、より実際的な二つの問題点を加味して、効率的なアルゴリズムを作成する試みを述べた。すなわち、交通流網が大規模な場合の数値計算上の問題と、枝特性が非線形な場合の解法の問題について考察した。

まず、交通流網が大規模な場合でも、行列のスパース性及び要素の特殊性を利用すれば記憶量を十分小さくできること、代数方程式の直接解法であるCholeski分解法を用いて、高速計算が可能であること、その結果、効果のよいアルゴリズムを作り得ることが明らかとなった。

また枝特性が非線形な場合には、これを区間線形と一般的な非線形の二つに分け、いずれに対しても有用な計算法を示した。このうち、区間線形特性の場合にはアルゴリズムの有限回収束が保証される。一方、一般的な非線形特性の場合には有限回収束は保証されないが、ヤコビ行列がパスループ・インピーダンス行列の拡張した形で表されることが示され、計算が簡単となった。

以上述べた手法を盛り込んだ計算機プログラムを開発し、2.3の例題でその有用性を示した。これらの考察により、第2章で明確にしたアルゴリズムは、数学的な厳密性のみでなく、実用性をも具備したものになった。

第4章　交通の需要・供給の均衡問題に関する考察

4.1　緒　　言

交通の計画にあたっては、交通の発生、分布、機関別分担及び配分という連続した4つの推計過程が必要とされる。[107,130] しかし、交通の発生及び分布は、配分によって定まるOD間の旅行時間に依存するというフィードバック関係があることが指摘されており、これらの4つの推計過程を同時に行おうとする多くの試みがなされている。[3,26]

M.Wohl[129] やM.L.Manheim等[69,72] は、これらの過程を経済学における需要と供給の一般均衡理論に基づいて、統一的に取り扱った。すなわち、OD間の交通需要は旅行時間の減少関数で表され、一方旅行時間は供給されるOD交通量の増加関数で表される。これら2つの関数の交点が交通の需要と供給の均衡解を与える。

この均衡解を求める手法として、Martin と Manheim[70] による逐増配分法が広く利用されている。杉恵[115] は逐増配分法を修正したアルゴリズムを提案している。一方、D.F.Wilkie と R.G.Stefanek[128] 及びM.Florian と S.Nguyen[17,18] 等はこの問題を最小値問題として定式化し、極値探索アルゴリズムの適用を提案している。更にD.Ghahraman, A.K.C.Wong と T.Au[25] は状態の微小な変動に対する均衡解の変動を、摂動法によって求めることを提案している。しかし、これらの手法はモデルの簡潔性、計算量及び収束速度等に多くの問題点を残している。

本章では、交通の需要・供給の均衡解を与える簡潔な数学モデルを導き、これに基づく求解アルゴリズムを示す。[81] まずODの交通量一旅行時間特性を行列形式で表し、これに基づいて需要関数を導く。次に第2章で導いた交通流配分の基礎方程式を供給関数とみなし、これを上記の需要関数と組み合わせて、需要・供給の均衡解を得る基礎方程式を導く。この基礎方程式の解

の存在条件を明らかにすると共に、この基礎方程式に基づき、原問題の解を得るアルゴリズムを提示する。

更に、上記の基礎方程式に基づいて、交通需要の抑制、制御法について考察する。制御手段としては、流入制限法と通行料金法を検討する。交通流網の目的関数としては交通エネルギーを考え、上記基礎方程式を制限条件として、問題を定式化する。その結果、流入制限法と通行料金法のいずれによっても2次計画問題が得られる。道路の枝特性を区間線形とし、この問題を解く効率的なアルゴリズムを示す。

4.2 問題の記述

交通の発生及び分布の推計に現在広く用いられている重力モデルでは、ODSに対する交通需要量 q_s を旅行時間 t_s の関数として次のように定める。

$$q_s = q_s(q_{s0},\ t_s) \tag{4.1}$$

(4.1)式において q_{s0} はOD間において仮想された基準交通需要量を表す。(4.1)式の q_s は、図4.1に示すように、t_s の増加に伴い減少する。

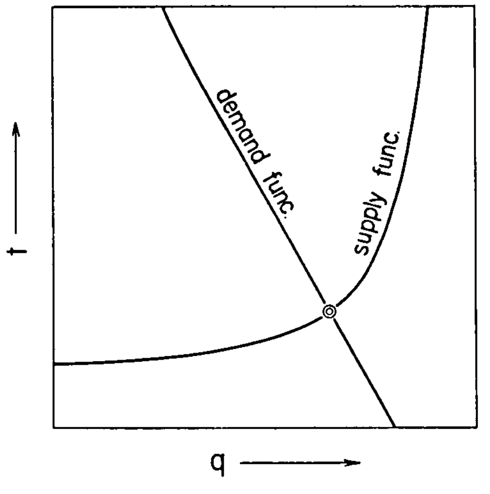

Fig. 4.1. An equilibrium of supply and demand.

経済理論の概念によれば、（4.1）式は交通の需要関数を表すと考えることができる。

一方、OD間の旅行時間は零交通量時の旅行時間 t_{s0} とOD交通量 q_s を用いて次のように書ける。

$$t_s = t_s(t_{s0}, q_s) \qquad (4.2)$$

ODが複数あれば（4.2）式の q_s はベクトルとなる。一般に（4.2）式の t_s は q_s の増加に伴い、図4.1に示すように増加する。（4.2）式は供給関数を表す。（4.1）式の需要関数と（4.2）式の供給関数の交点が、求める均衡解となる。

（4.1）式で表した交通需要の重力モデルはすでに幾つかの表式が提案されているが、そのうち最も代表的なものは次式である。

$$q_s = q_{s0} \exp(-a t_s) \qquad (4.3)$$

ここにaは正の定数である。（4.3）式で定まる q_s は図4.2に示すように、

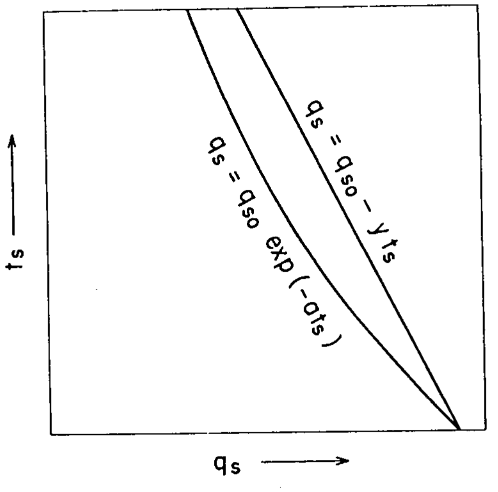

Fig.4.2. Two typical examples of demand function.

明らかに〔0,∞)で単調減少であり、かつ常に正である。

一方、Florian と Nguyen[17,18] は(4.3)式に代わって、次の線形式を提案している。

$$q_s = q_{s0} - y t_s \qquad (4.4)$$

ここにyは非負の係数である。ここで $y = q_{s0}\{1-\exp(-a t_s)\}/t_s$ とおけば(4.4)式は(4.3)式と等価になる。以下では表現を簡潔にするため(4.4)式を用い、yは一般に t_s の関数とする。

(4.4)式をすべてのODについて書けば、次式の行列表現となる。

$$Q_S = Q_{S0} - Y T_S \qquad (4.5)$$

ここにYをODアドミタンス行列、Q_{S0}を基準OD交通量と呼ぶ。Yは正値対角行列とし、Q_{S0} は正値ベクトルとする。

一方、交通需要 Q_S が定まれば、これは一般性を失うことなく与えられた交通流網に等時間配分されると考えてよいであろう。従って、各ODに対してパスが与えられたとすれば、第2章と同様交通量保存則、等時間則及び枝特性が次のように成立する。

$$Q_S = A_1 Q_P \qquad (4.6)$$

$$Q_L = A_2 Q_P \qquad (4.7)$$

$$T_P = A_1^t T_S = A_2^t T_L \qquad (4.8)$$

$$T_L = T_{L0} + Z Q_L \qquad (4.9)$$

なお(4.6)~(4.9)式は、第2章(2.11)~(2.14)式と同じであり、以下では記号も第2章と同じものを用いる。

すなわち、ここで扱う需要・供給の均衡問題は、(4.5)~(4.9)式を満たす、OD、枝及びパスの解を求めることである。この問題は、第2章の交通流配分問題で定数としたQ_S を変数とし、これを決定するため(4.5)

式を付加したものと考えることができる。

なお、交通機関の種類が複数の場合の機関別分担問題について若干ふれておこう。各機関の交通需要が、機関相互の旅行時間差の関数として図 4.3 の

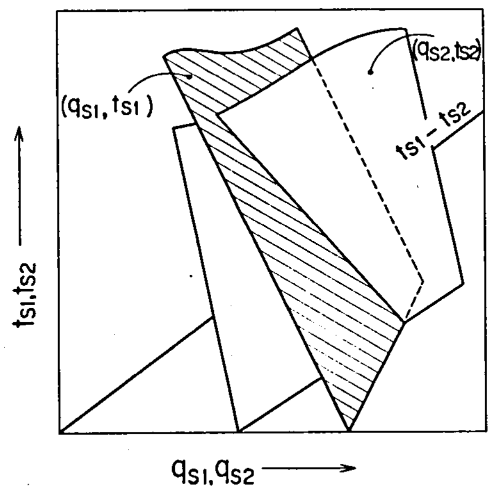

Fig. 4.3. A modal - split characteristic.

ように表せるとすれば、[25]（4.5）式は機関選択特性を表す次の形に変更される。

$$\begin{bmatrix} Q_S^{(1)} \\ \vdots \\ Q_S^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{S0}^{(1)} \\ \vdots \\ Q_{S0}^{(m)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ Y & & Y_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_S^{(1)} \\ \vdots \\ T_S^{(m)} \end{bmatrix} \qquad (4.10)$$

（4.10）式において m は交通機関の数を表す。また（4.9）式に対応する枝特性は図 4.4 のように各機関毎に異なる特性を持つことになる。[124] このような変更により、本章の議論を機関別分担を含む交通の需要・供給の均衡問題へ拡張することは容易である。

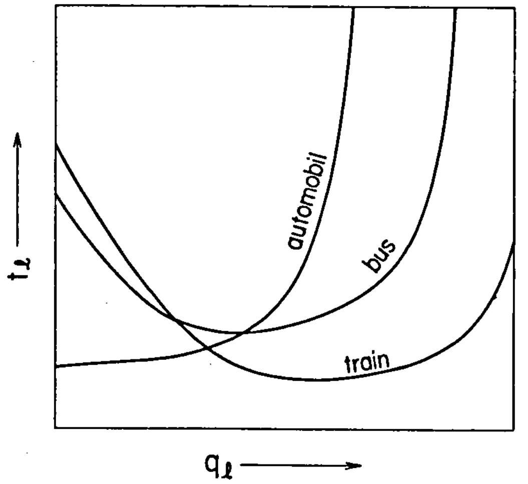

Fig. 4.4. (q_ℓ-t_ℓ) characteristics of various modes.

4.3　基礎方程式の誘導

本節では需要と供給の均衡解を与える基礎方程式を、（4.5）～（4.9）式から導こう。ここで（4.6）～（4.9）式は第２章の（2.11）～（2.14）式と同じである。従って第２章と同様、バス接続行列 A_1 及び A_2 を整理することによって、枝及びバスを分割し、（2.28）～（2.31）式と同じ式が得られる。これらの式のうち、需要関数を導くために必要な式を次に列挙する。

$$T_S = \begin{bmatrix} A_{21}^t & A_{31}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{L1} \\ T_{L2} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$\begin{bmatrix} T_{L1} \\ T_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{L1} \\ Q_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{L10} \\ T_{L20} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$\begin{bmatrix} -B_{21} B_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Q_{L1} \\ Q_{L2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} Q_S \right\} = 0 \tag{4.13}$$

（4.11）～（4.13）式には、等時間則は含まれていないことに注意しよう。

（4.5）式に（4.11）～（4.13）式を順次代入して、T_S，T_{L1}，T_{L2} 及び Q_{L2} を消去すれば、次式が得られる。

$$\left\{ Y^{-1} + \begin{bmatrix} A_{21}^t & A_{31}^t \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} \right\} Q_S + \begin{bmatrix} A_{21}^t & A_{31}^t \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} I \\ B_{21}B_{11}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{L1} - A_{21}Q_S \end{bmatrix}$$

$$= Y^{-1}Q_{S0} - \begin{bmatrix} A_{21}^t & A_{31}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{L10} \\ T_{L20} \end{bmatrix} \qquad (4.14)$$

(4.1 4) 式は、与えられた Q_{L1} に対して Q_S を定める関係式であり、整理された需要関数を表す。

一方、第2章で導いたパスループ方程式 (2.3 6) は、与えられた Q_S に対して Q_{L1} を定める関係式であり、整理された供給関数を表す。

需要・供給の均衡解とは需要関数と供給関数を同時に満たす Q_{L1} 及び Q_S である。従って、需要・供給の均衡解を与える基礎方程式は (2.3 6) 及び (4.1 4) 式を組み合わせた次式となる。

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{L1} - A_{21}Q_S \\ Q_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y^{-1} \end{bmatrix} Q_{S0} - \begin{bmatrix} I & B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^t \\ A_{21}^t & A_{31}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{L10} \\ T_{L20} \end{bmatrix}$$

(4.15)

ただし
$$F_{11} \triangleq D, \quad F_{12} = F_{21}^t \triangleq \begin{bmatrix} I & B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^t \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

$$F_{22} \triangleq Y^{-1} + \begin{bmatrix} A_{21} & A_{31} \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

(4.1 5) 式の次数は $n(L_1) + n(S)$ であり、(2.3 6) 式に比べて $n(S)$ だけ大きくなっている。(4.1 5) 式を解くのに必要な係数行列Fの正則性について次の定理が成立する。

〔定理 4.1〕 枝インピーダンス行列Z及びODアドミタンス行列Yが共に正値対称行列なら、行列Fは正則な対称行列である。

〔証　明〕 Fの対称性は明らかである。Fの正則性は Frobenius-Shur の公式[5)]より、次の2つの行列の正則性に帰着される。

$$F_{11} = D \tag{4.16}$$

$$\triangle F \triangleq F_{22} - F_{12}^{t} F_{11} F_{12}$$

$$= Y^{-1} + \left[A_{21}^{t}\ A_{31}^{t}\right]\left\{Z - Z\begin{bmatrix} I \\ B_{21}B_{11}^{-1}\end{bmatrix} D^{-1}\left[I \quad B_{11}^{t^{-1}}B_{21}^{t}\right]Z\right\}\begin{bmatrix}A_{21} \\ A_{31}\end{bmatrix} \tag{4.17}$$

ここに第2章より $D \triangleq Z_1 + B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} Z_2 B_{21} B_{11}^{-1}$ は正値対称行列であり、(4.16) 式の F_{11} は明らかに正則である。従って以下では (4.17) 式における$\triangle F$の正則性について調べよう。

(4.17) 式において、Y^{-1} は正値対称行列であるから、次の行列Gが非負対称行列になればよい。

$$G \triangleq Z - Z\begin{bmatrix} I \\ B_{21}B_{11}^{-1}\end{bmatrix} D^{-1}\left[I \quad B_{11}^{t^{-1}}B_{21}^{t}\right]Z$$

$$= \begin{bmatrix} Z_1 - Z_1 D^{-1} Z_1 & -Z_1 D^{-1} B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} Z_2 \\ -Z_2 B_{21} B_{11}^{-1} D^{-1} Z_1 & Z_2 - Z_2 B_{21} B_{11}^{-1} D^{-1} B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} Z_2 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

ここでD^{-1}はHousholder の公式[5] により次のようになる。

$$D^{-1} = \left[Z_1 + B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} Z_2 B_{21} B_{11}^{-1}\right]^{-1}$$

$$= Z_1^{-1} - Z_1^{-1} B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} D^{*^{-1}} B_{21} B_{11}^{-1} Z_1^{-1} \tag{4.19}$$

ただし　　$D^{*} \triangleq Z_2^{-1} + B_{21} B_{11}^{-1} Z_1^{-1} B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t}$

(4.18) 式に (4.19) 式を代入して、各部分小行列を以下に示す手順で整理する。

$$G_{11} \triangleq Z_1 - Z_1 D^{-1} Z_1$$

$$= Z_1 - Z_1\left[Z_1^{-1} - Z_1^{-1} B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^{t} D^{*^{-1}} B_{21} B_{11}^{-1} Z_1^{-1}\right] Z_1$$

$$= B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} D^{*-1} B_{21} B_{11}^{-1} \tag{4.20}$$

$$G_{12} = G_{21}^{t} \triangleq -Z_1 D^{-1} B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} Z_2$$

$$= -Z_1 \left[Z_1^{-1} - Z_1^{-1} B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} D^{*-1} B_{21} B_{11}^{-1} Z_1^{-1} \right] B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} Z_2$$

$$= -B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} \left[Z_2 - D^{*-1} B_{21} B_{11}^{-1} Z_1^{-1} B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} Z_2 \right]$$

$$= -B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} \left[Z_2 - D^{*-1} B_{21} B_{11}^{-1} Z_1^{-1} B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} Z_2 - D^{*-1} Z_2^{-1} Z_2 + D^{*-1} \right]$$

$$= -B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} D^{*-1} \tag{4.21}$$

$$G_{22} \triangleq Z_2 - Z_2 B_{21} B_{11}^{-1} D^{-1} B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} Z_2$$

$$= D^{*-1} \tag{4.22}$$

(4.20)～(4.22)式をまとめれば、行列Gは

$$G = \begin{bmatrix} B_{11}^{t\,-1} B_{21}^{t} \\ -I \end{bmatrix} D^{*-1} \begin{bmatrix} B_{21} B_{11}^{-1} & -I \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

となる。ここで D^* は正値対称行列であるから、Gは非負対称行列となる。

（証明終り）

定理4.1より、Z及びYが定数行列の場合には、(4.15)式は線形代数方程式となり、ガウス消去法により直接解くことができる。一方、Z及びYがそれぞれ Q_L 及び T_S の関数で表される非線形特性の場合には、3.3節で述べたNewton−Raphson 法を適用して(4.15)式を解くことができる。

以下では、Newton−Raphson 法の適用に必要な若干の式を導出しておく。(4.15)式において、Q_{L1} を消去し Q_S について解けば次式が得られる。

$$\triangle F Q_S = Y^{-1} Q_{S0} + \begin{bmatrix} A_{21}^{t} & A_{31}^{t} \end{bmatrix} G Z^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

(4.24)式より得られるQ_S により、Q_{L1} は (2.36) 式より定まり、Q_{L2} 及び T_S は次式より定まる。

$$Q_{L2} = B_{21} B_{11}^{-1} Q_{L1} + \left[-B_{21} B_{11}^{-1} A_{21} + A_{31} \right] Q_S \qquad (4.25)$$

$$T_S = \left[A_{21}^t \ \ A_{31}^t \right] G \left\{ \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} Q_S - Z^{-1} \begin{bmatrix} T_{L10} \\ T_{L20} \end{bmatrix} \right\} \qquad (4.26)$$

Newton－Raphson 法の繰返し計算の過程で、Q_S 及びQ_{L1}が定まれば、それに応じて (4.25) ，(4.26) 式よりQ_{L2}及び T_S が定まり、その結果Z及びYが決定される。

更に (4.15) 式のヤコビ行列$\widetilde{F}$は、3.3.4節と同様の手順により次のように得られる。

$$\widetilde{F} = \begin{bmatrix} \widetilde{F}_{11} & \widetilde{F}_{12} \\ \widetilde{F}_{21} & \widetilde{F}_{22} \end{bmatrix} \qquad (4.27)$$

ただし

$$\widetilde{F}_{11} \triangleq \widetilde{D} \quad , \quad \widetilde{F}_{12} = \widetilde{F}_{21}^t \triangleq \left[I \ \ B_{11}^{t^{-1}} B_{21} \right] \widetilde{Z} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{F}_{22} \triangleq \widetilde{Y}^{-1} + \left[A_{21}^t \ \ A_{31}^t \right] \widetilde{Z} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{Y}^{-1} \triangleq Y^{-1} + Y^* A_{31}^t \widetilde{Z}_2 \left[-B_{21} B_{11}^{-1} A_{21} + A_{31} \right]$$

ここで Y^* は対角行列であり、その要素 y_{ii}^*は

$$y_{ii}^* = \frac{dy_{ii}}{dt_{si}} \cdot q_{si}$$

となる。ここに$\widetilde{D}$，$\widetilde{Z}$は 3.3.4 節と同じである。なお、パス交通量は(2.39)式と同様、次のように定まる。

$$\begin{bmatrix} I & A_{12} & A_{13} \\ 0 & B_{11} & B_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{P1} \\ Q_{P2} \\ Q_{P3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -A_{21} \end{bmatrix} Q_S + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{L1} \end{bmatrix} \qquad (4.28)$$

4.4　求解アルゴリズムと数値計算例

原問題の解を与えるパスの組が正しく得られているとすれば、(4.15)式を解いて Q_S 及び Q_L を求めることができる。しかし一般に正しいパスの組を予め得ることは困難である。このため、第2章と同様、(4.15)式の求解をI．A．法またはWayne法を組み合わせたアルゴリズムを用いる必要がある。例として、枝特性及びOD特性がいずれも非線形の場合のWayne法を示す。

〔アルゴリズム4.1〕

(i)　各ODに対する最短パスを見出す。

(ii)　(i)で得られた最短パスが、それまでに得られていたパスの集合に含まれていれば終了。そうでなければ新しくパスの集合に加えて(4.15)式を変更し、Newton－Raphson 法を用いてこれを解く。

(iii)　(4.28)式よりパス交通量を求める。もし可能解が求まれば(i)へもどる。可能解がなければ、負のパス交通量を持つパスを削除して、(ii)へもどる。

ここで述べたアルゴリズムを用いて、交通の需要と供給の均衡解を求めた例を示そう。

〔例題 4.1〕

まず枝特性及びOD特性が線形の場合を考えよう。グラフは図4.5で表され、枝特性及びOD特性は表4.1及び表4.2で示されるものとする。このときの枝、パス及びOD交通量の均衡解は、表4.3及び表4.4に示すようになる。

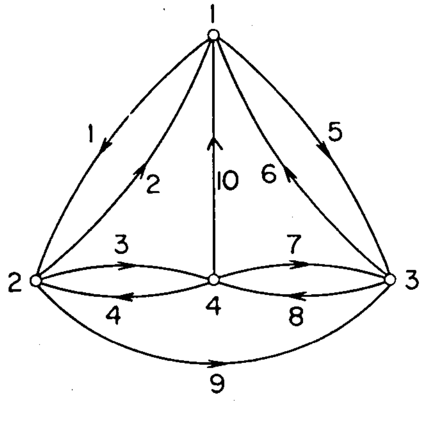

Fig. 4.5　Graph　4.

Table 4.1. Arc charactevistics in Ex.4.1.

arc	from node	to node	Z_ℓ	$t_{\ell 0}$
1	1	2	1.0	20
2	2	1	2.5	100
3	2	4	3.0	100
4	4	2	1.0	20
5	1	3	1.5	150
6	3	1	2.0	200
7	3	4	3.0	250
8	4	3	1.0	200
9	2	3	2.0	150
10	4	1	1.5	100

Table 4.2. OD characteristics in Ex. 4.1.

OD	from node	to node	y	q_{s0}
1	3	2	0.3	2000
2	2	3	0.35	2000
3	1	2	0.3	2600

Table 4.3. Solutions of arc flows in Ex. 4.1.

arc	q_ℓ	t_ℓ
1	2076.2	2096.2
2	360.0	999.9
3	243.8	831.5
4	1143.1	1163.1
5	387.3	731.0
6	105.0	410.0
7	216.5	899.4
8	1143.1	1343.1
9	790.4	1730.8
10	27.4	168.4

Table 4.4. Solutions of OD demands and path flows in Ex. 4.1.

OD	path	arc sepuence	q_p	t_p
1 (3, 2)	1	4, 8	1143.1	2506.2
	2	1, 6	105.0	2506.2
2 (2, 3)	1	9	790.4	1730.8
	2	2, 5	360.0	1730.8
	3	3, 7	216.5	1730.8
	4	3, 5, 10	27.4	1730.8
3 (1, 2)	1	1	1971.1	2096.2

〔例題 4. 2 〕

次に、枝特性及びOD特性が共に非線形の場合を考えよう。例題 3. 2 と同様、グラフは図 3. 1 1 で表され、各枝の特性は表 3. 4 で示されるものとする。このとき、OD特性が（4. 3）式で表されるとし、パラメータの値を表 4. 5 に示す。アルゴリズム 4. 1 により得られたパスの解を表 4. 6 に示す。

Table 4.5. OD characteristics in Ex. 4.2.

OD	from node	to node	a	q_{s0}
1	1	9	0. 1 7	3.0
2	9	1	0. 1 0	5.0
3	7	3	0. 2 0	2.0
4	3	7	0. 1 6	2.5
5	4	3	0. 1 7	2.0
6	5	2	0. 2 0	1.5
7	5	7	0. 1 2	2.6
8	9	5	0. 0 9	4.0
9	1	3	0. 2 0	1.6
1 0	7	9	0. 1 6	2.25

Table 4.6. Solutions of OD demands and path flows in Ex. 4.2.

OD	path	arc sequence	q_p	t_p
1	1	1, 17, 19, 11	0.797	7.944
2	1	24, 8, 18, 2	0.758	10.452
	2	24, 22, 4, 2	0.595	10.452
	3	24, 8, 6, 14	0.406	10.452
3	1	16, 5, 18, 3	0.360	8.569
	2	16, 5, 7, 22	0	8.569
4	1	4, 17, 6, 15	0.325	8.049
	2	4, 17, 19, 10	0.365	8.049
5	1	5, 18, 3	0.104	7.568
	2	5, 7, 22	0.428	7.568
6	1	18	0.928	2.400
7	1	6, 15	1.456	5.024
	2	19, 10	0	5.024
8	1	24, 8	2.088	4.296
	2	12, 20	0.659	4.296
9	1	1, 3	0.628	4.678
10	1	9, 11	1.057	4.845

4.5 道路交通流網における交通需要の抑制制御への応用

4.5.1 まえがき

都市内道路網においては自動車交通需要が道路網の容量を上まわる状態が日常的に発生し、渋滞、事故、各種公害が慢性化している。これらの問題を解決するには、自動車交通需要を何らかの方法で抑制せざるをえないといわれている。[15,32] しかし、交通需要の抑制は社会及び経済に重大な影響を与えるため、十分な議論が必要である。

自動車交通需要の抑制制御の手法として、ゲートや信号により流入交通量

を直接制御する流入制限法と、通行料金を賦課することにより、交通需要を間接制御する通行料金法とがある。現在これらは、高速道路においては一部実施されており、平面街路では二、三の机上検討が行われている。

米谷、佐佐木等[35,59]は阪神高速道路の流入制限法を、目的関数をトリップ数及び台キロ数とし、各枝の交通容量を制限条件として線形計画法を用いて定式化した。浜田[32]は目的関数を仕事量（以下では、交通エネルギーと呼ぶ）とし、道路特性を双曲線で近似して、非線形計画問題として定式化し、簡便なアルゴリズムを提案している。一方、通行料金法はM.Netter[85]やS.C. Dafermos[11]等により検討され、通行料金を課すことにより等時間配分の状態から最適配分の状態へ移行させうることが明らかにされた。

本4.5節では、交通需要の抑制制御法として、流入制限法と通行料金法との意義を明確にし、これらの制御法を非線形計画問題として定式化する。すなわち、道路交通流網の制限条件を、本章で導いた交通の需要・供給の均衡解を与える基礎方程式で表し、目的関数を交通エネルギーで表す。更に枝特性が区間線形で近似された場合の解の存在を目的関数の凹性より導き、求解アルゴリズムを示す。

4.5.2　流入制限法と通行料金法

交通需要が増加し、道路の容量に近づけば、旅行時間が急速に増加する。この関係を需要関数と供給関数で示せば図4.6のようになる。すなわち人口増加等により、需要関数が右へ移動すれば均衡点の旅行時間は、供給関数の非線形性により急激に増加する。旅行時間の増加につれ、図4.7に示すように速度が低下する。道路の有効利用の指標となる交通エネルギーは、次節で述べるように交通量と速度の積であるから、これは図4.8のようにある交通量q_{ℓ}^{*}で最大となり、交通量がこの値より大きくなれば減少する関数となる。従って、交通需要が過剰となれば道路の利用効率が減少することになる。

このため、道路網全体の有効活用を考える場合、過剰な交通需要を何らか

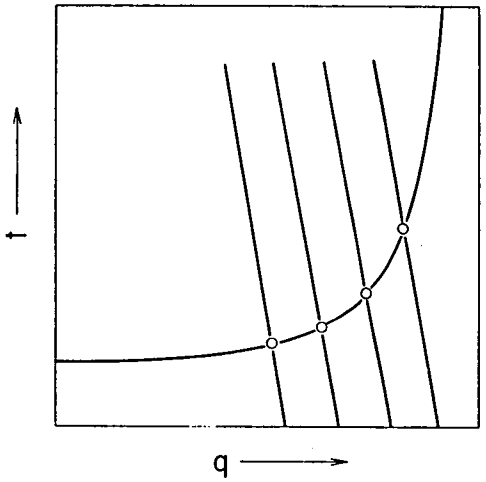

Fig. 4.6. Shift of equilibrium point as the demand increases.

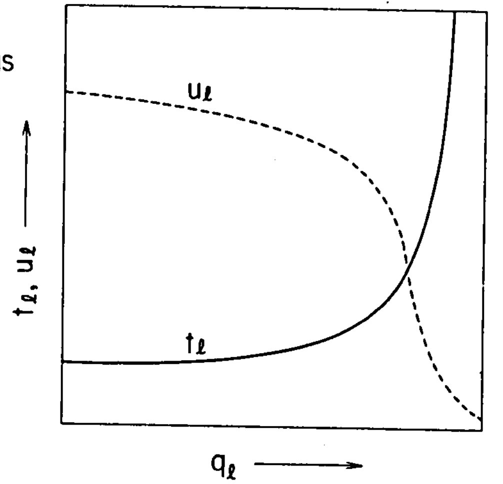

Fig. 4.7. (q_ℓ-t_ℓ) characteristic and the following (q_ℓ-u_ℓ) characteristic.

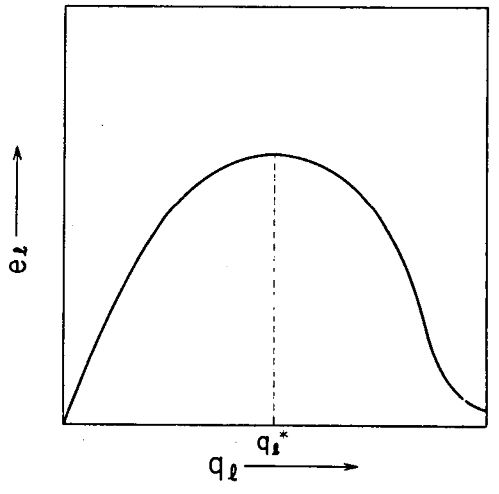

Fig. 4.8. (q_ℓ-e_ℓ) characteristic.

の方法で抑制制御することが必要となる。本節では道路網の交通需要を抑制制御する手段である、流入制限法と通行料金法の意義について考えよう。

流入制限法は、ゲートの通過交通量を制御することにより、道路網の利用者数を直接制限することができるので、現在高速道路の流入ランプにおいて採用されている。これを図4.9で説明しよう。需要関数と供給関数が図のように与えられると均衡点はαとなる。

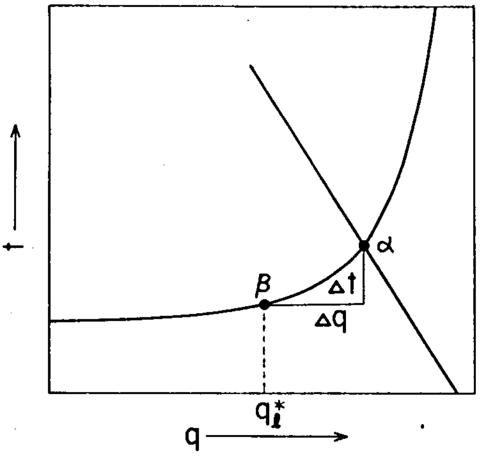

Fig. 4.9. Control of demand by entrance restraint.

うに与えられると均衡点はαとなる。この点は交通エネルギーが最大となる交通量q_{ℓ}^*を超過しているので、これをq_{ℓ}^*に制限しβ点で運用する。この場合Δqだけ交通量が流入を制限される事になり、通行を許可された利用者の旅行時間はΔtだけ改善される。

この方法の長所は、制御方法が簡単で制御効果が直接的なことであり、短所は、トリップの緊急性、重要性等に関係なく一率の制限がかかることと、交通需要が大巾に交通容量を超過する場合に、ゲートでの待時間の増加と代替機関へのしわ寄せが生ずることである。従って、この方法は短期的なピーク需要の調整に有効であり、長期的な過剰需要の抑制には効果はあまり期待できない。

通行料金法は、道路網の各枝に一定の通行料金を賦課することにより、交通需要を抑制する方法であり、不完全な形であるが高速道路で採用されている。これを図4.10を用いて説明しよう。需要関数と供給関数及び均衡点α

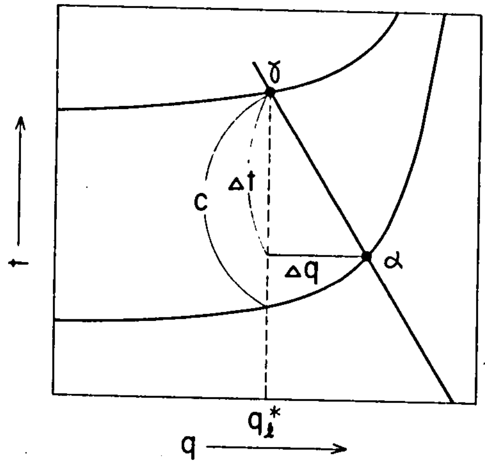

Fig. 4.10. Control of demand by road pricing.

が与えられた時、等価旅行時間がcである通行料金を賦課し供給関数を変更させれば、均衡点はγに移行する。この時の交通量は交通エネルギーを最大にするq_l^*となっている。

この方法の長所は、通行料金の賦課により緊急度の低い交通需要を順次抑制することができることであり、短所は時間的な需要の偏りに応答できないことである。従ってこの方法は流入制限法とは逆に長期的な交通需要の調整に有効であり、短期的な需要の調整には適していない。

すなわち、都市の道路網において需要を適正に制御しようとすれば、短期的な調整法としての流入制限法と長期的な調整法としての通行料金法を並用する必要がある。以下では、流入制限法及び通行料金法を採用する場合に必要な、最適OD交通量及び最適枝料金の算出法について考えよう。

4.5.3 問題の記述

OD交通需要を抑制制御した場合においても、走行を許可されたOD交通

量については、交通量保存則、等時間則等の（4.5）～（4.9）式が満たされるであろう。これらの関係式は、OD交通需要の抑制制御を非線形計画問題として定式化した場合の制限条件を与えることになる。

流入制限法では、この制限条件は次のように整理して書くことができる。

$$\triangle F Q_S \leqq Y^{-1} Q_{S0} + \begin{bmatrix} A_{21}^t & A_{31}^t \end{bmatrix} G Z^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{L1} \\ Q_{L2} \end{bmatrix} = Z^{-1} G \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} Q_S - \begin{bmatrix} I \\ B_{21} B_{11}^{-1} \end{bmatrix} D^{-1} \begin{bmatrix} I & B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{L01} \\ T_{L02} \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

(4.29) 式における不等号条件は、流入制限法で定まるQ_Sは需要・供給の均衡解より大きくないことを示している。

一方、通行料金法では、枝特性において零交通量時の旅行時間T_{L0}が、通行料金の等価旅行時間 C_L だけ増加するので、この制限条件は次のようになる。

$$\triangle F Q_S = Y^{-1} Q_{S0} + \begin{bmatrix} A_{21}^t & A_{31}^t \end{bmatrix} G Z^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{L1} \\ Q_{L2} \end{bmatrix} = Z^{-1} G \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} Q_S - \begin{bmatrix} I \\ B_{21} B_{11}^{-1} \end{bmatrix} D^{-1} \left(I \quad B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^t \right) \begin{bmatrix} T_{L01} + C_{L1} \\ T_{L02} + C_{L2} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

(4.31) 式より明らかなように、通行料金法ではQ_Sは需要・供給の均衡解である。

次に交通需要の抑制制御の目的関数について考えよう。越等[61)]は都市内高速道路の流入制限を行う場合の目的関数（評価関数）として、道路網の処理能力を表す次の諸量を与えている。

(a)　トリップ数　：　$\sum_{s \in S} q_s$ 　(4.33)

(b)　台・キロ数　：　$\sum_{\ell \in L} x_\ell q_\ell$ 　(4.34)

(c)　交通エネルギー　：　$\sum_{\ell \in L} x_\ell q_\ell u_\ell$ 　(4.35)

ここで x_ℓ 及び u_ℓ は枝 ℓ の距離及び空間平均速度を表す。

トリップ数及び台・キロ数はOD交通量の1次式で表すことができるので、枝特性を線形とし、枝の交通容量を有限とすれば、流入制限問題は典型的な線形計画問題となる。[59] 従って、数値計算上の容易さから、オンライン制御で実用化されその有効性が確かめられている。[35]

一方、交通エネルギーは、$q_\ell = \rho_\ell u_\ell$（ただし ρ_ℓ は枝の交通密度）の関係を用いれば $\sum_{\ell \in L} x_\ell \rho_\ell u_\ell^2$ の形となり、道路網上に存在する全車両の等価運動エネルギーに相当することがわかる。また、この量は単位時間における車両の総移動距離であり、経済活動の重要な指標となる。従って以下では目的関数を交通エネルギーとして話を進めよう。(4.35) 式を行列の形で表現すれば次式が得られる。

$$J = Q_L^t X_L U_L \qquad (4.36)$$

交通エネルギーの算出に必要な枝の空間平均速度 u_ℓ は、旅行時間 t_ℓ との間に $u_\ell = x_\ell / t_\ell$ の関係がある。従って u_ℓ の特性は図4.7の実線で示した t_ℓ の特性から、同図の点線のように単調減少とする。この特性は次式で表される。

$$u_\ell = u_{\ell 0} - h_\ell q_\ell \qquad (4.37)$$

(4.37)式において $u_{\ell 0}$ 及び h_ℓ は正のスカラー量である。(4.37) 式をすべての枝について書けば次の行列表現が得られる。

$$U_L = U_{L0} - H Q_L \qquad (4.38)$$

(4.3 8)式においてU_{L0}は正のベクトル、Hは正値対角行列である。

(4.3 8)式を (4.3 6) 式に代入すれば、目的関数である交通エネルギーは次式のように枝交通量の２次形式で表すことができる。

$$J = -Q_L^t X_L H Q_L + Q_L X_L U_{L0} \tag{4.39}$$

(4.3 9) 式で表される目的関数Jの値が大きい程、その道路交通流網は有効に利用されていると考えることができる。

(4.3 0) 式で表される枝交通量を (4.3 9) 式の目的関数に代入すれば、次式が得られる。

$$J^{(1)} = Q_S^t R_1^{(1)} Q_S + R_2^{(1)} Q_S + R_3^{(1)} \tag{4.40}$$

ただし

$$R_1^{(1)} = -\begin{bmatrix} A_{21}^t & A_{31}^t \end{bmatrix} G^t Z^{t^{-1}} X_L H Z^{-1} G \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

$$R_2^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{21}^t & A_{31}^t \end{bmatrix} G^t Z^{t^{-1}} X_L \{ U_{L0} + 2H \begin{bmatrix} I \\ B_{21} B_{11}^{-1} \end{bmatrix} D^{-1} (I \quad B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^t) \begin{bmatrix} T_{L01} \\ T_{L02} \end{bmatrix} \}$$

$$R_3^{(1)} = (T_{L01}^t \; T_{L02}^t) \left\{ \begin{bmatrix} I \\ B_{21} B_{11}^{-1} \end{bmatrix} D^{-1} (I \quad B_{11}^{t^{-1}} B_{21}^t) \right\}^2 \begin{bmatrix} T_{L01} \\ T_{L02} \end{bmatrix}$$

(4.4 0)式は流入制限法の場合の目的関数がOD交通量 Q_S の２次形式で表し得ることを示している。 (4.4 0) 式は $R_1^{(1)}$ の負値性より明らかに Q_S に関して凹となる。

一方、通行料金法の場合には、 (4.3 2) 式を (4.3 9) 式に代入して次式が得られる。

$$J^{(2)} = C_L^t R_1^{(2)} C_L + R_2^{(2)} C_L + R_3^{(2)} \tag{4.41}$$

ただし

$$R_1^{(2)} = Z^{t^{-1}} G^t \left[A_{21}^t \ \ A_{31}^t \right] Y^t \triangle F^{t^{-1}} R_1^{(1)} \triangle F^{-1} Y \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} G Z^{-1}$$

$$R_2^{(2)} = \{ R_2^{(1)} + 2 \left(Q_{S0}^t + \left[T_{L01}^t \ \ T_{L02}^t \right] Z^{t^{-1}} G^t \left[A_{21}^t \ \ A_{31}^t \right] Y^t \right) \triangle F^{-1} R_1^{(1)} \}$$

$$\times \triangle F^{-1} Y \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} G Z^{-1}$$

$$R_3^{(2)} = R_3^{(1)} + R_2^{(1)} \triangle F^{-1} \{ Q_{S0} + Y \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} G Z^{-1} \begin{bmatrix} T_{L01} \\ T_{L02} \end{bmatrix} \}$$

$$+ Q_{S0}^t \triangle F^{t^{-1}} R_1^{(1)} \triangle F^{-1} Q_{S0}$$

(4.4 1) 式より明らかなように通行料金法では目的関数が通行料金 C_L の 2 次式で表されることがわかる。(4.4 1) 式の $J^{(2)}$ も $J^{(1)}$ と同様 $R_1^{(2)}$ の負値性より C_L に関して凹となる。

以上の考察により、流入制限法と通過料金法による最適化問題は、次のように記述される。

〔問題 4.1〕

与えられた交通流網において、各OD毎に等時間則を満たす適切なパスの組を見つけ、制限条件

$$\triangle F Q_S \leqq Y^{-1} Q_{S0} + \left[A_{21}^t \ \ A_{31}^t \right] G Z^{-1} \begin{bmatrix} T_{L01} \\ T_{L02} \end{bmatrix} \qquad (4.42)$$

のもとで、次の目的関数

$$J^{(1)} = Q_S^t R_1^{(1)} Q_S + R_2^{(1)} Q_S + R_3^{(1)} \qquad (4.43)$$

を最大にするOD交通量 Q_S を求めよ。

〔問題 4.2〕

与えられた交通流網において、各OD毎に等時間則を満たす適切なパスの組を見つけ、制限条件

$$C_L \geqq 0 \tag{4.44}$$

のもとで、次の目的関数

$$J^{(2)} = C_L^t R_1^{(2)} C_L + R_2^{(2)} + R_3^{(2)} \tag{4.45}$$

を最大にする通行料金 C_L を求めよ。

4.5.4 求解アルゴリズムと数値計算例

前節で提示した問題 4.1 及び 4.2 は、枝特性が図 4.7 に示すような非線形関数で表される場合には、一般的な非線形計画問題に帰着される。ここでは簡略な近似解を求めるため、OD特性を線形とし、枝特性を図 4.1 1 に示すような区間線形とする。

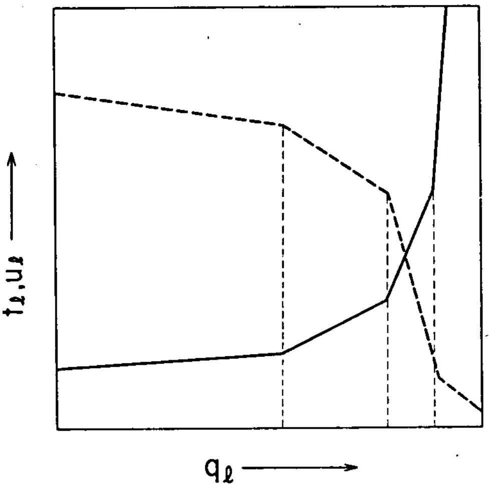

Fig. 4.11. A piecewise linear approximations of (q_ℓ-t_ℓ) and (q_ℓ-u_ℓ) characteristics of Fig. 4.7.

このとき、行列Yは定数行列となり、行列Z，H及びベクトル T_{L0}，U_{L0} はパスの組 Φ 及び枝交通量の領域 Ψ 毎に定数となる。従って（4.4 3）及び

(4.45) 式の係数行列 $R_i^{(j)}$, ($i=1,2,3,\quad j=1,2$)も (Φ , Ψ) が定まれば定数となる。従って、目的関数の勾配は次のようになる。

$$\nabla J^{(1)} = 2\,R_1^{(1)} Q_S + R_2^{(1)} \tag{4.46}$$

$$\nabla J^{(2)} = 2\,R_1^{(2)} C_L + R_2^{(2)} \tag{4.47}$$

さて、枝特性が区間線形で表される場合の問題 4.1 及び 4.2 の解の存在について次の定理が成り立つ。

〔定理 4.2〕

問題 4.1 を満たすOD交通量 Q_S は存在する。

〔証　明〕

パスの組及び交通量の領域の組合せは有限である。しかもそれらの組合せ毎に $J^{(1)}$ は Q_S に関する凹性より必ず最大値を持つ。従って $J^{(1)}$ は必ず最大値を持つ。　〔証明終り〕

〔定理 4.3〕

問題 4.2 を満たす通行料金 C_L は存在する。

〔証 明 略〕

問題 4.1 及び 4.2 を解くアルゴリズムとして、4.4 節の交通の需要・供給の均衡解を求めるアルゴリズム 4.1 と最急勾配法を組み合わせたアルゴリズムを考える。問題 4.1 のアルゴリズムを例として次に示す。

〔アルゴリズム 4.2〕

(i)　(4.29) 式の等号成立の場合の解 Q_S をアルゴリズム 4.1 を用いて求める。この解を Q_S^1 とし、そのときの (Φ , Ψ) を (Φ^1, Ψ^1) とする。

$i=1$ とする。

(ii)　$Q_S^i = \left[R_1^{(1)i}\right]^{-1}\left[R_2^{(1)i}\right]/2$ を求め、これが (Φ^i , Ψ^i) の内点にあれば終了。内点になければ、最急勾配法により (Φ^i , Ψ^i) における $J^{(1)}$ の最大値を与える Q_S^i ext. を求める。Q_S^i ext. は (Φ^i , Ψ^i) の境界上にある。

(iii) Q_S ext. における $\nabla J^{(1)}$ 方向の隣接領域 (Φ^{i+1}, Ψ^{i+1}) が (4.42) 式を満たし、かつ $(\Phi^1, \Psi^1), \cdots, (\Phi^i, \Psi^i)$ と異なれば、$i=i+1$ として(ii)ステップへもどる。その他は終了。

〔例題 4.3〕

図 2.4 に示す道路網における O D 交通量制御問題を本方法で解いた。枝特性は交通量 q_ℓ〔台／時間〕、旅行時間 t_ℓ〔分〕、速度 u_ℓ〔Km／時間〕として次式で与えた。ただし、枝 1 ～ 6 の距離 X_ℓ はいずれも 1 Km とした。

枝 1

$$\begin{cases} t_\ell = 0.002\, q_\ell + 2.9 \\ u_\ell = -0.014\, q_\ell + 20.7 \end{cases} \qquad (0 \leqq q_\ell \leqq 50)$$

$$\begin{cases} t_\ell = 0.023\, q_\ell + 1.9 \\ u_\ell = -0.060\, q_\ell - 23.0 \end{cases} \qquad (50 \leqq q_\ell \leqq 250)$$

$$\begin{cases} t_\ell = 0.188\, q_\ell - 39.4 \\ u_\ell = -0.200\, q_\ell + 58.0 \end{cases} \qquad (250 \leqq q_\ell)$$

枝 2, 3, 4, 5, 6

$$\begin{cases} t_\ell = 0.002\, q_\ell + 1.5 \\ u_\ell = -0.0027\, q_\ell + 40.0 \end{cases} \qquad (0 \leqq q_\ell \leqq 950)$$

$$\begin{cases} t_\ell = 0.023\, q_\ell - 13.9 \\ u_\ell = -0.060\, q_\ell + 65.0 \end{cases} \qquad (750 \leqq q_\ell \leqq 950)$$

$$\begin{cases} t_\ell = 0.188\, q_\ell - 170.6 \\ u_\ell = -0.200\, q_\ell + 198.0 \end{cases} \qquad (950 \leqq q_\ell)$$

各 O D ペアの交通需要は次の値とした。

$$q_{S01} = 1300$$

$$q_{S02} = 300$$

(3.29) 式を用いれば、与えられた交通需要に対する交通流配分問題は、8回のくり返しの後収束し表 4.7 の解が得られた。

Table 4.7. Solutions of path flows for given OD demands in Ex. 43.

OD	path	q_p	t_p
1 (1,2)	1 (1,3)	304.8	21.0
	2 (2,4)	840.2	
	3 (2,5,3)	155.0	
2 (4, 2)	1 (3)	300	3.22

このときのJは30620.1となる。次にアルゴリズム 4.2 により、最適OD交通量を求めれば4回の繰返しで次の値が得られた。

$$q_{S1} = 1065.6$$

$$q_{S2} = 300$$

このOD交通量に対するパス交通量とOD旅行時間は表 4.8 のようになる。このときのJは43282.3となり、Jは約 41%増加している。

Table 4.8. Optimum solutions of path flows in Ex. 4.3.

OD	path	q_p	t_p
1 (1,2)	1 (1,3)	218.1	9.41
	2 (2,4)	803.8	
	3 (2,5,3)	43.7	
2 (4,2)	1 (3)	300	2.63

この例ではOD_1の交通量を1300台／時間から1065台／時間に制限することによって目的関数である交通エネルギーが大巾に増加し、最大値をとることが示された。なおこの場合、台・キロ数は3055から2475へ約19％減少している。

4.5.5 むすび

本4.5節では、道路交通網の管制において今後重要な位置を占めると思われる交通需要の抑制制御の問題について考察した。ここでは、制御手段を流入制限法と通行料金法とに分けて、その意義を明確にすると共に、制限条件として交通の需要・供給の均衡解を与える基礎方程式を考え、目的関数を交通エネルギーとして本章の議論を応用して簡潔に定式化した。

その結果、目的関数である交通エネルギーが、OD交通量及び通行料金の2次形式に表された。更に道路の枝特性を区間線形として最適解の存在を明らかにし、求解アルゴリズムを示した。

ここに示した手法は、高速道路網[59]や都市内ゾーンシステム[15]におけるゲートにおいて流入調整または料金徴集の機能を付加することによって、実現が可能である。更に最近開発されつつあるERGS[114]やCVS[54]等OD情報を直接中央で把握できるシステムでは、個別通信手段を利用して、上記の機能を自動化することが可能となる。

4.6 結　言

本章では、交通計画の推計過程の統一化の一手法として知られている、交通の需要・供給の均衡問題について考察した。まず交通需要特性を用いて需要関数を簡潔にまとめ、これを供給関数である第2章で導いたパスループ方程式と組み合わせて、均衡解を与える基礎方程式を導いた。これに基づき、従来の逐増配分法や凸計画法に比べ数学的に明確な求解アルゴリズムを提示した。このアルゴリズムの有効性は例題によって確かめられた。

次にこの議論の応用として、道路交通流網における交通需要の抑制制御法について、流入制限法と通行料金法に分けて考察した。すなわち、制限条件を需要・供給の均衡解を与える基礎方程式とし、目的関数を交通エネルギーとしてこれらの問題を数学的に定式化した。道路特性が区間線形である場合には、これらの問題の解が存在することを導き、その解を得るためのアルゴリズムを示した。

第5章　道路交通流の状態モデルと状態推定

5.1　緒　　言

新設または既存の交通システムを有効に運用することは、第2～4章で述べた交通システムの計画と並んで、重要な問題である。交通システムの計画は、交通需要に対する施設の供給という立場から、静的な需要・供給モデルで議論され、第2～4章で述べたような大規模なネットワーク問題としてとらえられることが多い。それに対し、交通システムの運用問題は、施設の有効な運用という立場から、各交通システム毎に微分方程式、差分方程式等による動的な交通流モデルに基づいて、状態推定、予測及び制御の問題としてとらえられることが多い。

以下、本章及び次章では対象とする交通システムを道路交通システムに限定し、その運用問題を論ずる。まず本章では、交通流を物理的なモデルで表し、それに基づいて状態推定問題を議論し、次に次章では、交通流を統計的なモデルで表し、それに基づく予測問題を議論する。

従来、道路における交通流の物理モデルとして、車両を個別に扱うミクロモデルと、車両の集合を扱うマクロモデルがある。ミクロモデルでは、車両の追従理論により、個々の車両の動きを微分方程式で表す。一方、マクロモデルでは、交通流を圧縮性流体に模擬し波動理論により、車両の集合の動きを偏微分方程式で表す。しかし、これらのモデルはいずれも計算量が大きいという難点から、現実に道路交通システムの運用には利用され難い。

最近、L.S.Yuan と J.B.Kreer[131] 及び L.Isaksen と H.J.Payne[52] 等によって、マクロモデルである偏微分方程式を時間及び空間的に差分化し、現実の道路交通管制に適用する試みが行われている。しかし、これらのモデルも物理的にあいまいな点が残されている。

本章では、道路区間の空間的な変数（以下空間変数と呼ぶ）として、交通

密度と新しく定義する交通運動量及び交通エネルギーを用いることを提案する。これらの空間変数の期待値は、道路区間において計測される時間的な変数（以下時間変数と呼ぶ）、速度調和、交通量及び速度和のそれに等しいことを導く。これらの関係式と空間変数の保存則を組み合わせ、高速道路及び平面街路を模擬することのできる新しい差分方程式モデルを構成する。

更にこの差分方程式モデルを基に、高速道路及び平面街路の交通状態を推定する手法について考察する。すなわち、この差分方程式モデルにおいて、空間変数である交通密度、交通運動量及び交通エネルギーの保存則はシステム方程式となり、空間変数と時間変数とのそれぞれの期待値が等しいという関係式は観測方程式となる。これらのシステム方程式及び観測方程式はいずれも線形となるので、カルマン・フィルタを用いれば、空間変数を精度良く推定することができる。これらの手法について、高速道路及び平面街路における実測データを用いて、その有効性を明らかにする。

5.2　基本変数の導入

図 5.1 に示すような距離 Δx、車線数 ℓ の 1 方向道路区間を考える。この

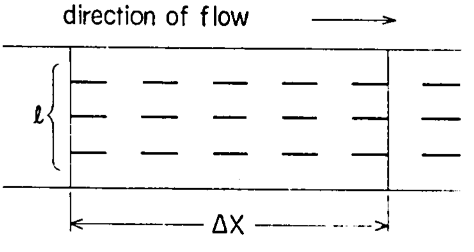

Fig.5.1.　Road section.

区間における時間間隔 Δt の交通現象を、時空間平面での走行軌跡で表せば、図 5.2 のようになる。本節では、この交通現象を時間を固定してとらえるための空間変数と、位置を固定してとらえるための時間変数とを明らかにする。

いま、この区間に n_x 台の車両が存在するとしよう。これらの車両の区間

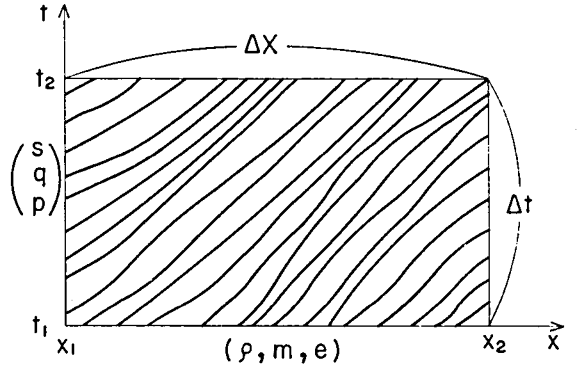

Fig.5.2. Variables and vehicles trajectories
in the space-time plane.

速度†(この区間を通過する平均速度)を$v_1 \sim v_{n_x}$とし、この道路区間の交通状態を表すマクロな空間変数として、次式で定める交通密度ρ、交通運動量m、及び交通エネルギーeを用いる。

$$\rho \triangleq n_x / (\ell \cdot \triangle x) \tag{5.1}$$

$$m \triangleq \sum_{j=1}^{n_x} v_j / (\ell \cdot \triangle x) \tag{5.2}$$

$$e \triangleq \sum_{j=1}^{n_x} v_j^2 / (\ell \cdot \triangle x) \tag{5.3}$$

これらの値は、単位距離に存在する車両の区間速度の i 乗和($i = 0, 1, 2$)、(以下では空間速度の i 乗和と呼ぶ)と考えることができる。

更に、従来区間内に存在する車両の瞬時速度の平均及び分散として定義されていた空間平均速度u、及び空間平均速度の分散Wを、区間速度を用いて次のように表す。

$$u \triangleq \sum_{j=1}^{n_x} v_j / n_x \tag{5.4}$$

---

† なお、高速道路のように一様な交通流では、区間速度を瞬時速度で近似することが可能である。

$$w \triangleq \sum_{j=1}^{n_x} v_j^2 / n_x \qquad (5.5)$$

（5.1）～（5.3）と（5.4）及び（5.5）式を組み合わせれば、次式が得られる。

$$m = \rho u \qquad (5.6)$$

$$e = \rho w \qquad (5.7)$$

すなわち、（5.6）、（5.7）式より道路区間の空間変数としては、（ρ, m, e）または（ρ, u, w）のいずれの組をとってもよいことがわかる。以下では主に（ρ, m, e）を空間変数として用い、適宜補助的に（u, w）を用いる。

次にマクロな時間変数を定めよう。図5.1に示される道路区間の1地点（通常この区間の下流端点）において、時間間隔$\triangle t$に通過する車両の台数をn_t台とし、それらの区間速度を$v_1, \cdots, v_{n_t}$とする。この地点におけるマクロな時間変数として、次式で定める速度調和s、交通量q、及び速度和pをとる。

$$s \triangleq \sum_{j=1}^{n_t} \frac{1}{v_j} / (\ell \cdot \triangle t) \qquad (5.8)$$

$$q \triangleq n_t / (\ell \cdot \triangle t) \qquad (5.9)$$

$$p \triangleq \sum_{j=1}^{n_t} v_j / (\ell \cdot \triangle t) \qquad (5.10)$$

これらの量は、（5.1）～（5.3）式で表される空間変数に対応する時間変数であり、それぞれ単位時間に通過する車両の区間速度の i 乗和（$i=-1, 0, 1$）、（以下では時間速度の i 乗和と呼ぶ）と考えることができる。時間変数として、従来地点通過速度の調和平均及び平均等が利用されることが多かったが、これらはs，q及びpで表せるので、ここでは用いない。

本節で導いた変数は区間速度v_jの代わりに旅行時間τ_jを用いて表すこ

ともできる。後に述べるように高速道路では v_j を、平面街路では τ_j を用いた表現を利用する。

5.3 基本関係式の導出

この節では、（5.1）～（5.3）式で定義される空間変数、すなわち空間速度の i 乗和と、（5.8）～（5.10）式で定義される時間変数、すなわち、時間速度の i 乗和の関係について調べよう。道路区間の交通密度 ρ が与えられたとし、そのときの車両の区間速度の分布を $f_x(v)$ とすれば、区間速度 v をもつ車両の交通密度 ρ_v は

$$\rho_v = \rho\ f_x(v) \tag{5.11}$$

となる。一方、この区間の下流端点を通過する区間速度 v の車両の交通量 q_v の期待値 $E(q_v)$ は、明らかに次の関係式

$$E(q_v) = \rho_v v \tag{5.12}$$

で表される。

いま（5.1）～（5.3）式で示した空間速度の i 乗和を $\sum_{j=1}^{n_x} v_j^i/(\ell\cdot\triangle x)$ と表せば、その期待値は次のようになる。

$$E\left(\sum_{j=1}^{n_x} v_j^i/(\ell\cdot\triangle x)\right) = E\left(\int_0^\infty v^i \rho_v dv\right) \tag{5.13}$$

（5.13）式に（5.11）式を代入すれば

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{j=1}^{n_x} v_j^i/(\ell\cdot\triangle x)\right) &= \rho\ E\left(\int_0^\infty v^i f_x(v)\, dv\right) \\ &= \rho \int_0^\infty v^i E(f_x(v))\, dv \end{aligned} \tag{5.14}$$

となる。（5.14）式において、$E(f_x(v))$ は平均的な区間速度の分布、す

なわち区間速度の分布関数を表す。

一方(5.8)〜(5.10)式で示した時間速度のi乗和を $\sum_{j=1}^{n_t} v_j{}^i / (\ell \cdot \triangle t)$ で表せば、その期待値は

$$E\left(\sum_{j=1}^{n_t} v_j{}^i / (\ell \cdot \triangle t)\right) = E\left(\int_0^\infty v^i q_v \, dv\right) \tag{5.15}$$

となる。(5.15)式に(5.11)及び(5.12)式を代入すれば

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{j=1}^{n_t} v_j{}^i / (\ell \cdot \triangle t)\right) &= \rho \ E\left(\int_0^\infty v^{i+1} f_X(v) \, dv\right) \\ &= \rho \int_0^\infty v^{i+1} E(f_X(v)) \, dv \end{aligned} \tag{5.16}$$

が得られる。

(5.14)式と(5.16)式より、次式が成立することが容易にわかる。

$$E\left(\sum_{j=1}^{n_x} v_j{}^i / (\ell \cdot \triangle x)\right) = E\left(\sum_{j=1}^{n_t} v_j{}^{i-1} / (\ell \cdot \triangle t)\right) \tag{5.17}$$

(5.17)式は、空間速度のi乗和の期待値が、時間速度のi−1乗和の期待値に等しいことを示している。これは道路区間における空間変数と時間変数とを結ぶ重要な関係式である。

(5.17)式において $i = 0, 1, 2$ とし、(5.1)〜(5.3)及び(5.8)〜(5.10)式を当てはめれば、次の3つの関係式が成立することがわかる。

$$\rho = E(s) \tag{5.18}$$

$$E(m) = E(q) \tag{5.19}$$

$$E(e) = E(p) \tag{5.20}$$

(5.18)式は、交通密度が時間速度の調和(速度調和)、言い換えれば、旅行時間の和の期待値に等しいことを示している。(5.19)式は交通運動量と交通量の期待値が、互いに等しいことを示している。更に(5.20)式は交通エネルギーと時間速度の和(速度和)の期待値が、互いに等しいことを示し

ている。

ここで(5.19)式を(5.6)式と組み合わせれば、よく知られた次の関係式[48,105]

$$E(q) = \rho E(u) \tag{5.21}$$

が得られる。更に(5.21)式で(5.17)式を割れば、F.A.Haight[30]が導いた空間平均速度と時間平均速度の積率の関係が得られる。

$$\frac{1}{E(u)} \cdot E\left[\frac{\sum_{j=1}^{nx} v_j^{\,i} \Big/ (\ell \cdot \triangle x)}{\rho}\right] = E\left[\frac{\sum_{j=1}^{nt} v_j^{\,i-1} \Big/ (\ell \cdot \triangle t)}{q}\right] \tag{5.22}$$

一方、(5.21),(5.22)式から逆に(5.18)〜(5.20)式を得ることも容易である。このように(5.22)式と(5.17)式とは等価であるが、このことはいままで明確に指摘されていなかった。(5.22)式の複雑な対応関係に比較し、(5.17)式は空間変数と時間変数の簡潔な1対1の対応関係を表す。この性質は、後に述べるように、空間変数の状態推定に有効に利用される。

次に空間変数相互に成立する関係について調べよう。車両のミクロな動きを表すため幾つかの車両追従モデルが提案されている。[7,14,27,120] このうち、代表的なものとして次式のようなモデルがある。[28,120]

$$\frac{d^2 x_2(t+t_d)}{dt^2} = -a \frac{\dfrac{dx_1(t)}{dt} - \dfrac{dx_2(t)}{dt}}{(x_1(t) - x_2(t))^2} \tag{5.23}$$

ここに x_1 は先行車、x_2 は後続車の位置を表し、t_d は運転者の反応時間を表す。(5.23)式は後続車の加速度が、先行車との速度差に比例し、車間距離の2乗に逆比例することを示している。aは負の値を持つ比例定数である。

(5.23)式を積分すれば

$$\frac{dx_2(t+t_d)}{dt} = \frac{a}{x_1(t) - x_2(t)} + b \tag{5.24}$$

となる。ここにbは積分定数であり、車間距離が十分大きい場合の後続車の走行速度を表している。いま車両が等速、等間隔で走行しているとすれば、

(5.24) 式より次式が得られる。

$$u = a\rho + b \tag{5.25}$$

実測によれば、高速道路及び平面街路のいずれにおいても、(5.25) 式はほぼ成立することが確かめられている。[29,83,89] 更に (5.25) 式を (5.6) 式に代入すれば

$$m = \rho(a\rho + b) \tag{5.26}$$

が得られる。車両が等速であれば、(5.3) 式の交通エネルギーは mu、すなわち

$$e = \rho(a\rho + b)^2 \tag{5.27}$$

で表される。(5.25)～(5.27) 式は、道路区間の特性を表す関係式であり、これを図示すれば図 5.3 のようになる。

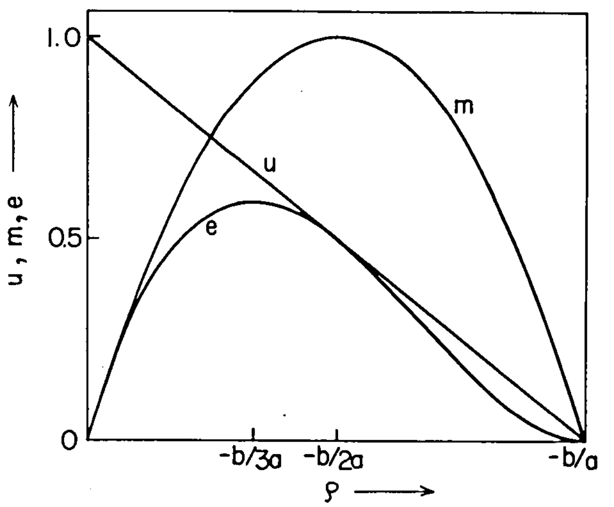

Fig. 5.3. Road characteristics derived from a typical car-following model.

5.4 交通流の差分方程式モデル

本節では、すでに L.S.Yuan と J.B.Kreer[131] 及び L.Isaksen と H.J.Payne[52] 等によって導かれた交通流の差分方程式モデルを、5.2 及び 5.3 節で示した変数を用いて書き直し、物理的意味を明確にすると共に、若干の修正を加える。

L.S.Yuan と J.B.Kreer[131]及び A.Kaya[57]は、 M.J.Lighthill と G.B.Whitham[68]及び P.I.Richards[98]等によって導かれた偏微分方程式モデルを空間及び時間に関して離散化することを試みた。図5.1の道路区間の交通状態は次のように表される。

$$\rho_i(k+1)=\rho_i(k)+\frac{\triangle t}{\ell_i \triangle x_i}(\ell_{i-1}\cdot q_i(k)-\ell_i\cdot q_{i+1}(k)) \tag{5.28}$$

$$q_{i+1}(k) = m_i(k) + \gamma_{2i}(k) \tag{5.29}$$

$$m_i(k)=m_i^*(k)=\rho_i(k)(a_i\rho_i(k)+b_i) \tag{5.30}$$

ここに q_i, q_{i+1} は、区間 i の上流及び下流端点の期間 k ($k\triangle t \leqq t \leqq (k+1)\triangle t$) における交通量である。(5.28) 式は車両保存則を表している。(5.29) 及び (5.30) 式はそれぞれ (5.19) 及び (5.26) 式から得られる。(5.29) 式における $\gamma_{2i}(k)$ は 期待値0の不規則変数である。(5.29) 及び (5.30) 式が無理なく成立するには、 $\triangle t$ と $\triangle x$ を適当に選ぶことが必要であることに注意しよう。

Yuan と Kreer[131]及び Kaya[57]は、(5.28)～(5.30) 式を基礎式として、高速道路における流入制御をレギュレータ問題として定式化した。筆者等[84]は、このモデルを用いて2分岐道路の動的な交通流配分が簡潔なフィードバック制御によって可能となる事を示し、その安定問題について論じている。(5.28)～(5.30) 式は最も簡単な差分方程式モデルであり、特に平面街路のマクロモデルとして有用と考えられる。

Isaksen と Payne[52]は、(5.30) 式をより詳細に記述するため空間平均速度に関する差分方程式を導いた。これは I.Prigogine[39,97]が導いた空間平均速度に関する偏微分方程式を離散化したものと解釈することもできる。この差分方程式を交通運動量に関して書き直し、若干の修正を加えれば次式

が得られる。

$$m_i(k+1)=m_i(k)+\frac{\triangle t}{\ell_i\cdot\triangle x_i}\left(\ell_{i-1}\cdot p_i(k)-\ell_i\cdot p_{i+1}(k)\right)$$

$$+\frac{\triangle t}{T_1}\left(m_i^*(\rho_i(k))-m_i(k)\right)$$

$$+\frac{\triangle t}{T_2}\left(m_{i+1}(k)\frac{\rho_i(k)}{\rho_{i+1}(k)}-m_i(k)\right) \tag{5.31}$$

$$p_{i+1}(k)=e_i^*(k)+\gamma_{3i}(k) \tag{5.32}$$

$$e_i^*(k)=\rho_i(k)(a_i\rho_i(k)+b_i)^2 \tag{5.33}$$

(5.31) 式において右辺第 2 項は、この区間の両端点において流入出する速度和の収支を表す。同式の右辺第 3 項は、この区間の空間平均速度が道路特性から定まるそれと相異した時に生ずる復元力[52] を表しており、T_1 はこの時定数である。

更に同式の右辺第 4 項は、この区間と 1 つ下流側の区間の空間平均速度の差により生ずる追従力を表しており、(5.23) 式をマクロ的に表現したものと解釈できる。従ってこの時定数 T_2 は、(5.23) 式との対応により

$$T_2=-\frac{(x_1-x_2)^2}{a}=-\frac{\triangle x^2}{4a} \tag{5.34}$$

と表すことができる。ここに $\triangle x/2$ は、この区間と下流区間との平均距離である。

一方、(5.32) 及び (5.33) 式はそれぞれ (5.20) 及び (5.27) 式から得られる。(5.32) 式において $\gamma_{3i}(k)$ は (5.29) 式の $\gamma_{2i}(k)$ と同様、期待値 0 の不規則変数である。

(5.28) , (5.29) 及び (5.31) ～ (5.33) 式で構成されるモデルは、(5.28) ～ (5.30) 式で構成されるモデルに比較して詳細であり、特に高速

道路のマクロモデルとして有用である。また、このモデルを Isaksen と Payne のそれと比較すれば、第2項及び第4項の物理的な意味が明確になっていることがわかる。なお、実際の交通データを基にこのモデルを Isaksen と Payneのそれと比較することは今後に残された重要な問題である。

さて、図5.1で示した道路区間が n_ℓ 個縦続した、高速道路の交通現象をこのモデルで模擬することを考えよう。この手順をアルゴリズムの形で示せば次のようになる。

〔シミュレーション・アルゴリズム〕

(i) 各区間 i ($i=1,2,\cdots,n_\ell$) の長さ、車線数、道路特性等を指定する。更に各区間の交通密度及び交通運動量の初期値 $\rho_i(1)$, $m_i(1)$, ($i=1,2,\cdots,n_\ell$) を与える。時刻 $k=2$ として(ii)へ進む。

(ii) 時刻 k における流入点の交通量 $q_1(k)$ と速度和 $p_1(k)$ を与える。

(iii) (5.29), (5.32) 及び (5.33) 式を用いて、$q_i(k)$ 及び $p_i(k)$, ($i=2,\cdots,n_\ell+1$)を計算する。

(iv) (5.28) 及び (5.31) 式を用いて $\rho_i(k+1)$ 及び $m_i(k+1)$, ($i=1,2,\cdots,n_\ell$) を計算する。時刻を $k=k+1$ として(ii)へもどる。

このアルゴリズムによりシミュレーションを正確に行うには、区間長 Δx、時間間隔 Δt、道路特性 $m_i^*(\rho_i)$、及びパラメータ T_1, T_2 等を適確に選ぶ必要がある。時間間隔は (5.29) 及び (5.32) 式の不規則変数 γ_{2i}, γ_{3i} がほぼ正規性白色雑音になるように、道路区間の旅行時間の ½ 程度に選ぶことが望ましい。また道路特性、パラメータ T_1, T_2 等は、実測データ等から同定することができる。[29)]

さて、このモデルに適当なパラメータをあてはめ、事故時の現象を模擬してみよう。

〔例題5.1〕

一方向2車線からなる5Kmの高速道路を考えよう。この道路を0.1Km間隔

の50区間に分割する。各区間の道路特性は、次の交通密度ー交通運動量特性で表されるとする。

$$m_i^* = \begin{cases} 70 \cdot \rho_i & 0 \leqq \rho_i \leqq 10 \\ \frac{7}{9} \rho_i (100 - \rho_i) & 10 \leqq \rho_i \leqq 100 \end{cases} \quad (5.35)$$

更に、(5.31)式のパラメータ T_1 は M.S.Grewal と H.J.Payne の得た値の8秒とし、[29] T_2 は(5.34)式において $\triangle x$ を 0.1 Km、 a を $-7/9$ として得られる12秒とした。

この道路の第25, 26区間において事故が発生したとし、1車線を同時に閉塞し事故発生後の現象をみてみよう。ここで、交通密度及び交通運動量の初期値は各区間で等しく、かつそれぞれ流入交通量及び流入速度和と均衡しているとして次のように与える。

$$\begin{cases} \rho_i(1) = 30 \text{〔台／Km〕} & (i=1,2,\cdots,50) \\ m_i(1) = 1.63 \times 10^3 \text{〔台／h〕} & (i=1,2,\cdots,50) \\ q_i(k) = 1.63 \times 10^3 \text{〔台／h〕} & (k=1,2,\cdots,600) \\ p_i(k) = 8.89 \times 10^4 \text{〔台／}h^2\text{〕} & (k=1,2,\cdots,600) \end{cases} \quad (5.36)$$

事故点での交通密度の上限を60〔台／Km〕、事故点以外の上限を86〔台／Km〕とする。このときの交通密度の時間変化を図5.4に示す。ここで単位時間 $\triangle t$ は1秒とした。

次に、事故発生後300秒した後に、事故点の25, 26区間を再び2車線に回復し、事故除去後の交通現象をみてみよう。このときの交通密度の時間変化を図5.5に示す。

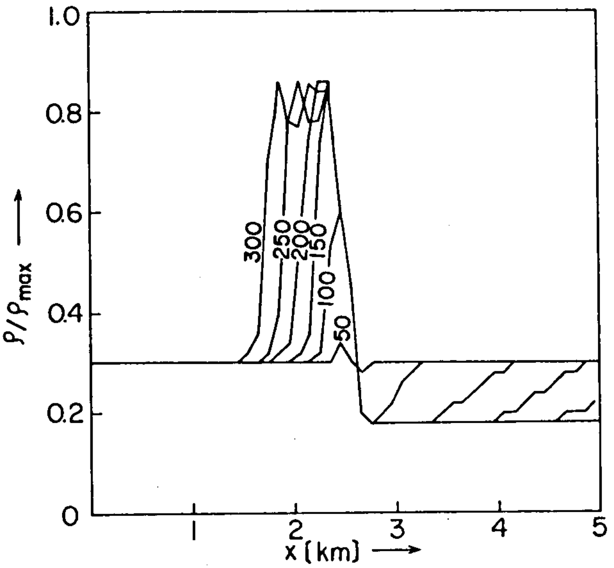

Fig. 5.4. Variation of the traffic density when incident appears.

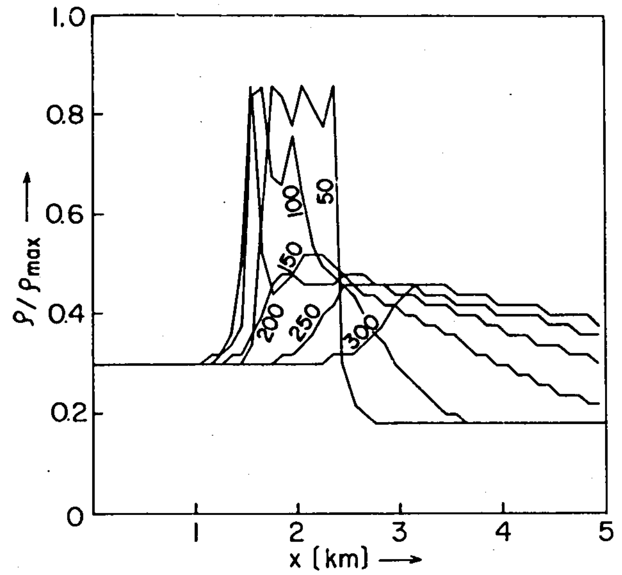

Fig. 5.5. Variation of the traffic density when incident disappears.

5.5 高速道路における状態推定

5.5.1 まえがき

道路交通流の状態を把握することは交通流監視と呼ばれ、道路管理の重要な項目であるばかりでなく、交通流制御の基本である。このため高速道路では特定地点毎に交通流検出器が設置され、交通量、速度、時間占有率(オキュパンシー)等が計測される。しかるにこれらの計測は設置地点での情報をもたらすにすぎず、設置地点から離れた場所における事故、渋滞等の交通状態を示すことはできない。

それに対し、2地点に交通流検出器を設置し、その内部の区間の交通状態を推定することにより、道路を連続的に監視しようとする考えが提案され始めた。D.C.Gazis と R.S.Foote[23)] は、ニューヨークのリンカーン・トンネルにおいて、車線変更のない交通流の車長と通過時刻を検出し、入口と出口の車列の一致性を確かめることにより、内部の区間密度を推定した。D.C.Gazis と C.H.Knapp[24,58)] は、更に入口と出口において交通量と速度を計測し、区間の旅行時間と交通密度を2段階の過程で推定した。一方、N.E.Nahi と A.N.Trivedi[75)] は、Gazis 等と同様に入口と出口における交通量と速度の計測に基づき、区間の交通密度と空間平均速度を同時に求める手法を提案した。Nahi 等の推定手法は、Gazis 等のそれに比較し幾分簡単ではあるが、システム方程式の非線形性のため交通密度が低くなると、交通密度の推定誤差が大きくなる欠点がある。

本節では、道路区間の内部状態を前節で定義した交通密度、交通運動量及び交通エネルギーで表現し、これらの内部状態を表すシステム方程式を、線形の差分方程式で近似する。更に前節で導いた空間変数と時間変数の関係式を、これらの内部状態の線形な観測方程式とする。これにより内部状態の推定に、線形カルマン・フィルタが適用でき、安定な推定器が構成できる。そしてこの推定器による推定値が、高速道路での実測結果に良く合うことを示す。この検

討の結果、ここで述べた手法は、Nahi 等の手法に比較し、安定性、精度及び計算量のいずれの点でも好ましいものであることがわかった。

5.5.2　高速道路における状態推定の基礎方程式

高速道路を図 5.1 のように長さ $\triangle x$ の区間に分割し、この区間の両端において時間間隔 $\triangle t$ 当たりに通過する車両の通過速度を計測するとしよう。道路が一様であるとして、ここで得られる地点速度を区間速度とみなし、速度調和、交通量、速度和、更に時間速度の2乗和 r を算出する。ここで得られる値 y_i は区間速度を地点速度で近似した誤差及び通過速度の計測誤差を含むもので、次のように表される。

$$\begin{cases} y_1(k) = s_1(k) + \xi_1(k) \\ y_2(k) = s_2(k) + \xi_2(k) \end{cases} \tag{5.37}$$

$$\begin{cases} y_3(k) = q_1(k) + \xi_3(k) \\ y_4(k) = q_2(k) + \xi_4(k) \end{cases} \tag{5.38}$$

$$\begin{cases} y_5(k) = p_1(k) + \xi_5(k) \\ y_6(k) = p_2(k) + \xi_6(k) \end{cases} \tag{5.39}$$

$$\begin{cases} y_7(k) = r_1(k) + \xi_7(k) \\ y_8(k) = r_2(k) + \xi_8(k) \end{cases} \tag{5.40}$$

(5.37)～(5.40) 式における誤差 $\xi_i(k), (i = 1, \cdots, 8)$ は、地点速度で区間速度を近似したために生ずる誤差、通過検出誤差、速度計測誤差及び演算誤差等からなる。通過検出誤差は車両が複数の車線の検出器に同時に補えられる場合、いずれの検出器にも補えられない場合及び1台の車両を複数台と見なす場合、複数台の車両を1台と見なす場合等に生ずる。速度計測誤差は計測器の精度によって左右される。また演算誤差は、計測された速度から速度調和、速度和及び速度の2乗和を得る場合の演算精度で定まる。

(5.37)～(5.40) 式において誤差 $\xi_i(k), (i = 1, \cdots, 8)$ の統計的性

質が既知であるとすれば、[75] 計測値から次に示すような最小2乗推定法により、真の値を推定することができる。

$$\begin{cases} \hat{s}_1(k)=c_1\,y_1(k)+(1-c_1)E(s_1) \\ \hat{s}_2(k)=c_2\,y_2(k)+(1-c_2)E(s_2) \end{cases} \tag{5.41}$$

$$\begin{cases} \hat{q}_1(k)=c_3\,y_3(k)+(1-c_3)E(q_1) \\ \hat{q}_2(k)=c_4\,y_4(k)+(1-c_4)E(q_2) \end{cases} \tag{5.42}$$

$$\begin{cases} \hat{p}_1(k)=c_5\,y_5(k)+(1-c_5)E(p_1) \\ \hat{p}_2(k)=c_6\,y_6(k)+(1-c_6)E(p_2) \end{cases} \tag{5.43}$$

$$\begin{cases} \hat{r}_1(k)=c_7\,y_7(k)+(1-c_7)E(r_1) \\ \hat{r}_2(k)=c_8\,y_8(k)+(1-c_8)E(r_2) \end{cases} \tag{5.44}$$

ここに　$$c_i=\frac{\sigma^2{}_{y_i}}{\sigma^2{}_{y_i}+\sigma^2{}_{\xi i}}$$

(5.41)〜(5.44)式においてEは期待値を表す。以下では s, p, q 及び r を(5.41)〜(5.44)式で得られる推定値 $\hat{s}$, $\hat{p}$, $\hat{q}$, 及び $\hat{r}$ であるとし、それらを改めて s, p, q 及び r と表す。

さて、道路区間の内部状態を示す交通密度ρ、交通運動量m及び交通エネルギーeに関するシステム方程式は次のようになる。

$$\rho(k+1)=\rho(k)+\frac{\triangle t}{\triangle x}(q_1(k)-q_2(k))+\varphi_1(k) \tag{5.45}$$

$$m(k+1)=m(k)+\frac{\triangle t}{\triangle x}(p_1(k)-p_2(k))+\varphi_2(k) \tag{5.46}$$

$$e(k+1)=e(k)+\frac{\triangle t}{\triangle x}(r_1(k)-r_2(k))+\varphi_3(k) \tag{5.47}$$

(5.45)式は、交通密度の変化が、出入りの交通量によって決まること、すなわち、車両保存則を表している。(5.45)式において、$\varphi_1(k)$は$q_1(k)$,

$q_2(k)$ の推定誤差から生ずる不規則変数である。(5.46) 及び (5.47) 式は、交通運動量及び交通エネルギーの変化が、それぞれ出入りの時間速度和及び時間速度の2乗和によって決まることを表している。現実には (5.31) 式の第3項及び第4項で示したように、区間内部での速度変化によってもこれらの量 m, e は変化するが、ここではこれらの変化が十分小さいとしてそれを不規則変数 φ_2, φ_3 に含めて考える。従って (5.46), (5.47) 式の不規則変数 φ_2, φ_3 は、p, r の推定誤差と区間内部での速度変化を表している。以下では簡単のため、不規則変数 φ_i ($i=1,2,3$) を期待値0、分散 $\sigma^2_{\varphi i}$ ($i=1,\cdots,3$) をもつ正規性白色雑音であると仮定しよう。

次に内部状態を観測する機構について考えよう。(5.18) ～ (5.20) 式より、観測方程式として次式が得られる。

$$s(k)=\rho(k)+\gamma_1(k) \tag{5.48}$$

$$q(k)=m(k)+\gamma_2(k) \tag{5.49}$$

$$p(k)=e(k)+\gamma_3(k) \tag{5.50}$$

ここで γ_i ($i=1,\cdots,3$) は、s, q, p と ρ, m, e のそれぞれの差である。以下では簡単のため γ_i ($i=1,\cdots,3$) は、期待値が0で分散が $\sigma^2\gamma_i$ ($i=1,\cdots,3$) の正規性白色雑音とする。

5.5.3 交通状態の推定

以上述べたようにシステム方程式は (5.45) ～ (5.47) 式で表され、観測方程式は (5.48) ～ (5.50) 式で表される。ここで次の変数を導入し、上記のシステム方程式と観測方程式を簡潔に表そう。

$$X(k)=\begin{bmatrix}\rho(k)\\ m(k)\\ e(k)\end{bmatrix},\ \Phi(k)=\begin{bmatrix}\varphi_1(k)\\ \varphi_2(k)\\ \varphi_3(k)\end{bmatrix},\ \triangle Y(k)=\frac{\triangle t}{\triangle x}\begin{bmatrix}q_1(k)-q_2(k)\\ p_1(k)-p_2(k)\\ r_1(k)-r_2(k)\end{bmatrix}$$

$$Z(k)=\begin{bmatrix} s_2(k) \\ q_2(k) \\ p_2(k) \end{bmatrix}, \quad \Gamma(k)=\begin{bmatrix} \gamma_1(k) \\ \gamma_2(k) \\ \gamma_3(k) \end{bmatrix}$$

このときシステム方程式及び観測方程式は次のように書ける。

$$X(k+1)=X(k)+\triangle Y(k)+\Phi(k) \tag{5.51}$$

$$Z(k)=X(k)+\Gamma(k) \tag{5.52}$$

(5.51)式は外力$\triangle Y(k)$をもつ線形差分方程式であり、一方(5.52)式も線形方程式である。従って、(5.51)及び(5.52)式をそれぞれシステム方程式及び観測方程式とするシステムにおいて、状態ベクトル$X(k)$を推定するには、カルマン・フィルタを使用することができる。[74)]

カルマン・フィルタを用いれば、$X(k+1)$の推定値$\hat{X}$は次式を満たす。

$$\hat{X}(k+1)=\hat{X}(k)+\triangle Y(k)+G(k)\left(Z(k)-\hat{X}(k)\right) \tag{5.53}$$

ここで $G(k)=H(k)\left(H(k)+M_1\right)^{-1}$ (5.54)

$$H(k+1)=H(k)-H^t(k)\left(H(k)+M_1\right)^{-1}H(k)+M_2 \tag{5.55}$$

$$M_1=\begin{bmatrix} \sigma^2\gamma_1 & & 0 \\ & \sigma^2\gamma_2 & \\ 0 & & \sigma^2\gamma_3 \end{bmatrix}, \quad M_2=\begin{bmatrix} \sigma^2\varphi_1 & & 0 \\ & \sigma^2\varphi_2 & \\ 0 & & \sigma^2\varphi_3 \end{bmatrix}$$

(5.55)式において、$H(k)$は推定値と真値の誤差分散を表す正値対称行列であり、次の定常値H^*をもつ。

$$H^*_{ij}=\begin{cases} \sigma^2\varphi_i\dfrac{1+\sqrt{1+4\,\sigma^2\gamma_i/\sigma^2\varphi_i}}{2} & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases} \tag{5.56}$$

また、 G(k)はカルマンゲインであり、次の定常値 G^* をもつ。

$$G^*_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+\sqrt{1+4\sigma^2\gamma_i/\sigma^2\varphi_i}} & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \qquad (5.57)$$

5.5.4　数値計算例

前節で述べたモデルの妥当性及び推定手法の有効性を確かめるため、名神高速道路における実測データについて、検討してみよう。実測は昭和49年3月7日、図5.6に示す桜井パーキングエリア京都側陸橋（鶏林橋）と、天

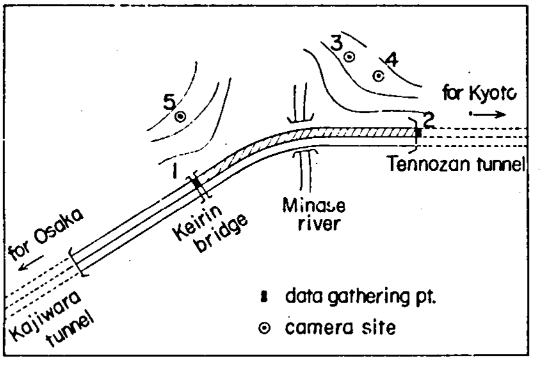

Fig.5.6. Experimentation site on the Meishin Expressway.

王山トンネル大阪側入口を両端とする、京都行き2車線からなる道路区間で行われた。[127)]

鶏林橋を流入地点1、天王山トンネル大阪側入口を流出地点2とする。この区間の長さは 1.48Kmであり、道路の勾配は鶏林橋まで 1.54%の上り、そこから水無瀬川付近まで 2.91%の下りで、そこから天王山トンネル入口まで 4.58%の上りとなっている。

実測時間は7時から9時、10時から12時及び13時から15時の計6時間である。地点1，2では走行車線と追越車線のそれぞれにおいて、車両

の通過時刻及び通過速度を計測した。

地点3，4，5では、この区間の部分写真を1分毎に撮影し、これら3箇所よりの写真をまとめた区間写真より、1分毎の交通密度を計測した。

車両の通過時刻は、ラジオの時報に同期させた4台のストップウォッチを用いて計測した。車両の通過速度はガンダイオード発振器を用いた、ポータブル型のレーダスピードメータを4台使用して計測した。写真撮影には200〜600mmの望遠レンズを装備したカメラを3台用いて行った。なお、3台のカメラの撮影時刻を同期させるため、水晶発振器を用いたタイマをラジオの時報に合わせ、カメラに装備した電磁シャッターを作動させた。

このデータを用いて前節の状態推定を行おう。このときのパラメータは次のように設定した。

$$\left\{\begin{aligned} \triangle t &= 60 \quad [\mathrm{sec}] \\ \triangle x &= 1.48 \quad [\mathrm{Km}] \\ \ell &= 2 \\ G_{11} &= 0.3 \\ G_{22} &= 0.5 \\ G_{33} &= 0.5 \end{aligned}\right. \tag{5.58}$$

ここでは、$G_{ij} = G^*_{ij}$ の如く、カルマン・ゲインを定常値に固定し、また(5.41)〜(5.44)式のようなデータの平滑化は行わなかった。

このデータを用いて推定した結果得られた $\hat{G}^*_{11}$，$\hat{G}^*_{22}$，$\hat{G}^*_{33}$ の値は、それぞれ次のようになった。

$$\left\{\begin{aligned} \hat{G}^*_{11} &= 0.26 \\ \hat{G}^*_{22} &= 0.40 \\ \hat{G}^*_{33} &= 0.42 \end{aligned}\right. \tag{5.59}$$

従って、(5.58)式の設定値は十分実用に耐えることがわかる。そのときの各雑音の分散は次の通りである。

$$\begin{cases} \sigma_{\hat{\varphi}_1}{}^2 = 1.27 & , \quad \sigma_{\hat{\gamma}_1}{}^2 = 14.0 \\ \sigma_{\hat{\varphi}_2}{}^2 = 2.2\times10^4 & , \quad \sigma_{\hat{\gamma}_2}{}^2 = 7.0\times10^4 \\ \sigma_{\hat{\varphi}_3}{}^2 = 4.1\times10^{11} & , \quad \sigma_{\hat{\gamma}_3}{}^2 = 1.6\times10^{12} \end{cases} \tag{5.60}$$

(5.58)式の値を用いて、(5.53)式より $\hat{x}(k)$を 求めた結果の例として、7時20分〜7時53分における交通密度を図5.7に示す。また同図において、

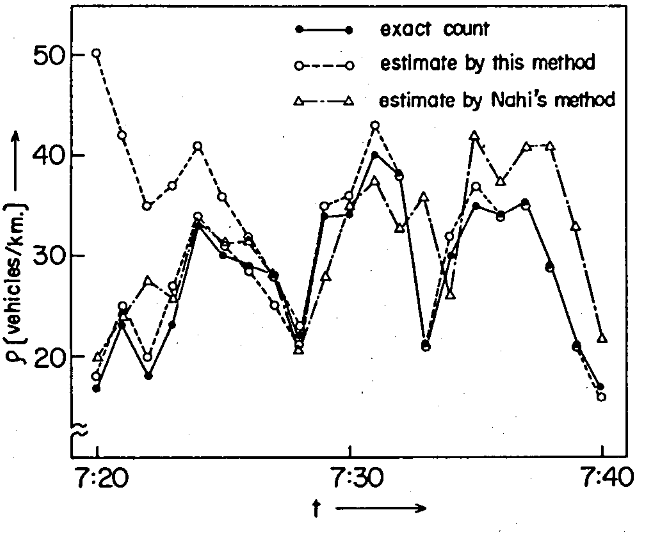

Fig. 5.7 The density and its estimate.

交通密度の初期値を変化させても、推定値はほぼ 10分程度で正確な値に落ち着くことを示している。

5.5.5 他の交通状態推定手法との比較

交通状態の推定については、Gazis と Footeが[23)] ニューヨークのリンカーン・トンネルにおいて区間密度推定を行ったのが最初であろう。これは車線変更の禁止されている特殊区間なので、流入出口の車列の一致性を確かめることにより、交通密度を推定している。

Gazis と Knapp は、[24,58] この方式を更に拡張した。すなわち、区間両端の交通量と速度の計測より、まず旅行時間を推定し、これを基に粗い密度推定を行い、更に車両保存則を考えて、カルマン・フィルタにより精密な密度推定を行う手法を提案している。この手法は密度をかなり正確に推定することができるが、計算量が多くなる欠点がある。

Nahi と Trivedi [75] は、文献(24)と同様、区間両端の交通量と速度の計測を前提として、区間密度と空間平均速度を同時に推定する簡便な手法を提案した。彼等の用いたシステム方程式及び観測方程式は、次のようなものである。

システム方程式

$$\rho(k+1)=\rho(k)+\frac{\triangle t}{\triangle x}\Big[q_1(k)-u(k)\rho(k)\Big]+\varphi'(k) \qquad (5.61)$$

$$u(k+1)=\kappa u(k)+\left[\frac{v_1(k)-\kappa u(k)-\xi_1'(k)}{\ell_1\cdot\triangle x p(k)+q_1(k)}\right]q_1(k) \qquad (5.62)$$

$$+\left[\frac{v_2(k)-\kappa u(k)-\xi_2'(k)}{\ell\cdot\triangle x p(k)+q_1(k)}\right]\cdot\left[\triangle t\cdot u(k)\rho(k)+\varphi'(k)\right]+\xi_2'(k)$$

観測方程式

$$q_2(k)=u(k)\rho(k)+\gamma(k) \qquad (5.63)$$

ここで

κ:定数 , u:空間平均速度 , φ', ξ_i':不規則変数

このモデルでは、(5.61)及び(5.62)式のシステム方程式が、状態変数 $\rho(k)$, $u(k)$ の複雑な非線形差分方程式であるばかりでなく、(5.63)式の観測方程式も非線形方程式となる。従って、(5.61),(5.62)及び(5.63)式にはカルマン・フィルタを適用することができないので、Nahi 等は複雑な拡張カルマン・フィルタを用いて、ρ 及び u の推定を行っている。そのためこの推定法は、本論文で述べた手法に比較して計算量が多い。また(5.61)

式の$\varphi'(k)$は、5.5.2節で述べた(5.45)式の$\varphi_1(k)$に比較しその分散が大きく、密度推定の精度が悪い。前節の例にNahi 等の推定器を適用した場合の推定値を、図5.7に併記する。

更にこの手法の大きな欠点は、(5.62)式の第2，第3項の分母が零になれば、推定値が発散することである。その例を、中央高速道路恵那山トンネルの700m区間における実測データで示したのが、図5.8である。本論文

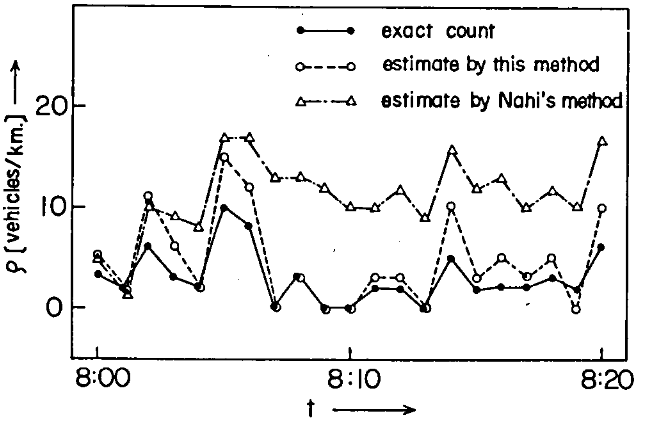

Fig. 5.8. The density and its estimate.

で述べた手法は同図に併記したように、極めて安定な動きをしている。

以上述べたように本論文で述べた状態推定法は、従来最も簡単といわれているNahi とTrivedi の状態推定法に比較しても、計算量、精度、安定性についてより好ましいものであることが明らかとなった。

5.5.6　交通状態の状態空間表示

道路区間の交通状態は、5.2節で述べたように交通密度、交通運動量及び交通エネルギー、すなわち(ρ, m, e)で表すことができる。いま(ρ, m, e)を一つの状態空間と考えれば、ある道路区間の任意の交通状態は、この空間の1点に対応する。この道路区間の各時刻の交通状態をこの空間上に表せば、これらの点の集合は、この道路区間の特性を表すことになる。

（ρ,m，e）空間における交通状態の集合を便宜上（ρ，m）及び（ρ，e）平面に写像し、これを道路区間の特性として用いることにしよう。ρとuの関係が（5.25）式のように線形で表されるなら、（ρ,m）及び（ρ，e）の特性は図5.3のように2次及び3次曲線となる。これらの特性は各時刻における（ρ,m，e）の推定値、（$\hat{\rho}$,$\hat{m}$，$\hat{e}$）を求めることにより、ほぼ実時間で得ることができる。[†]

名神高速道路の実測例より、これらの特性及び（ρ，u）特性を求めたものを図5.9～5.11に示す。この例では時間間隔 $\triangle$t を 60秒とした。例から

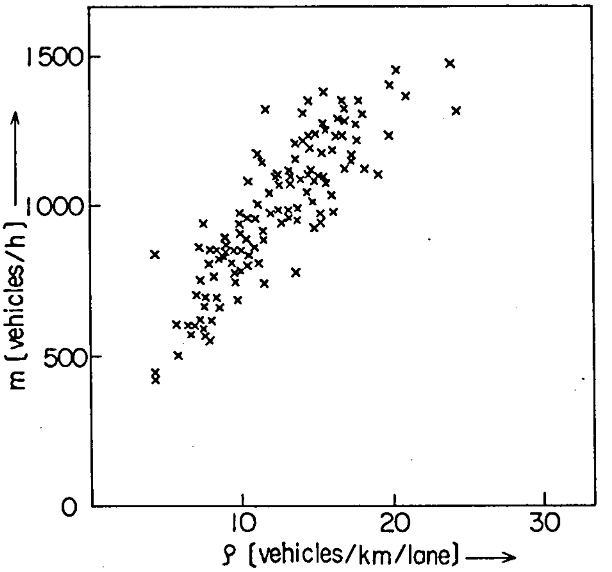

Fig.5.9. (ρ－m) characteristic observed on the Meishin Expressway.

† （ρ，m）特性の代わりに従来用いられてきた（ρ，q）特性は空間変数と時間変数の関係を表しており、これを得るためには$\triangle$xと$\triangle$tを適当に選ばなければならないことに注意する。

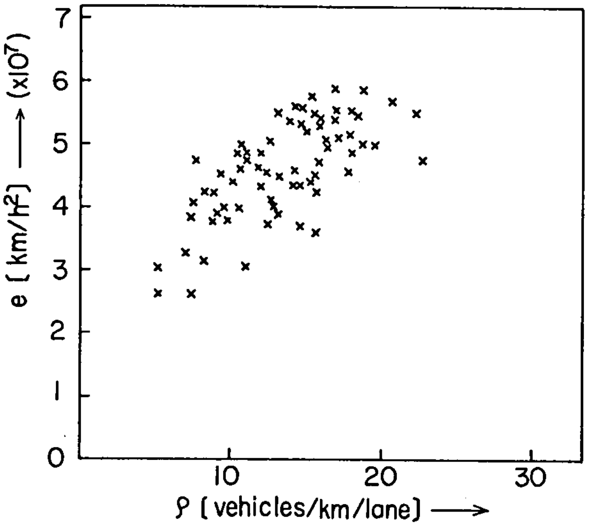

Fig. 5.10. (ρ−e) characteristic observed on the Meishin Expressway.

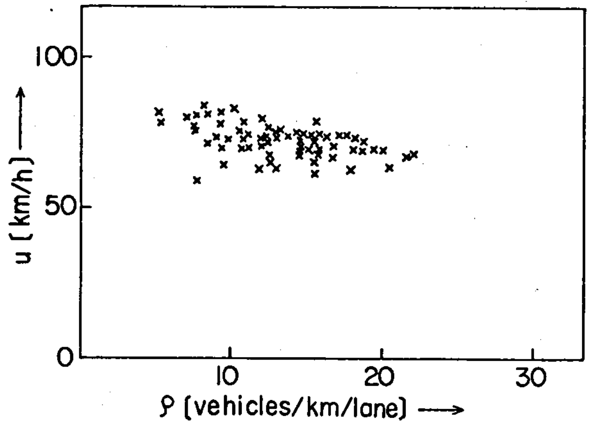

Fig. 5.11. (ρ−u) characteristic observed on the Meishin Expressway.

明らかなように、これらの量の間にはかなり明確な関係が存在する。もし、道路区間において事故等の異常状態が発生すれば、車線数の減少によるボトルネックが発生し、道路区間の特性が変化することになる。従って、(ρ, u), (ρ, m)及び(ρ, e)に変化が生じるであろう。これらの変化を検出することにより、事故の発見、事故の種類等の推定を行う可能性の検討は、今後に

残された大きな問題であろう。

一方、高速道路を有効に利用するためには、交通量またはそれと等価な交通運動量を大きくする必要がある。更に道路利用者の立場からすれば、交通エネルギーを大きくする必要がある。このような量をランプの流入交通量で制御する場合、交通運動量、交通エネルギーの監視またはそのフィードバックが必要となる。これらの量の推定値を制御に利用することも、今後に残された重要な問題である。

5.5.7 むすび

本節では、高速道路の区間における交通状態を、交通密度、交通運動量及び交通エネルギーで表現し、これらの状態変数を用いてシステム方程式と観測方程式を簡潔に表現した。その結果、状態変数の推定が、カルマン・フィルタを用いて容易に行えるようになった。この推定法は、従来提案されていた手法に比較し、計算量、精度及び安定性の面で、より有効なものであることを実測例を用いて示した。更に、これらの状態空間における軌跡が、道路の交通状態を表すことを明らかにし、その実例を示した。

5.6 平面街路における状態推定

5.6.1 まえがき

平面街路では、ループコイルまたは超音波を利用した車両感知器で直接計測できる、交通量及び時間占有率（オキュパンシー）が、自動車交通流を表す指標として広く用いられてきた。しかるに最近、交通流の予測や配分等を含む高度な交通管制が指向され、道路網における交通流の巨視的モデルの研究が進むにつれ、平面街路においても道路区間の空間変数である交通密度、空間平均速度等の重要性が、改めて認識されつつある。特に交通密度は、道路区間の交通状態を正常状態から渋滞状態まで、ほぼ一意的に表現する指標であり、これをできるだけ正確に検出することが望まれる。

交通密度を直接計測する手段として長大ループコイルがあるが、これは経済性や信頼性に問題があり、十分普及するに至っていない。一方、平面街路では信号による頻繁な発進、停止を伴うため、一地点での時間占有率又は速度が区間の代表値となり得ないので、高速道路で提案された推定手法を、そのまま適用することは出来ない。

定方[99]は、時間占有率を用いて交通密度の代替量である渋滞度を推定している。ここでは渋滞長が一定値を越えると、適当な地点における時間占有率が急激に増加するという性質を用いて、渋滞長を幾つかの段階に分類している。

砂原と中島は、[116] N.E.Nahi と A.N.Trivedi[75] 等の高速道路での交通密度推定モデルに、状態変数として待ち行列長を加えて定式化しているが、待ち行列長を観測する機構が示されていないように思える。

本節では、平面街路の道路区間として、その内部に幾つかの小交差点を含む大交差点の出口から次の大交差点の入口までの区間（以下では大区間と呼ぶ）を考え、この大区間における交通状態、特に交通密度の推定手法について述べる。交通状態推定に当たっては、大区間の両端点の交通量と内部の小交差点の流入出交通量の計測及び両端点における車番と通過時刻の検出により可能な、旅行時間及び区間速度の計測を、前提として考える。

まず、大区間における小交差点間の小区間（以下では小区間と呼ぶ）においては、5.3節で導いた空間的な旅行時間の i 乗和の期待値と、時間的な旅行時間の i＋1 乗和との期待値が等しい。この性質は更に大区間においても近似的に成立することがいえる。この性質を用いれば、前提とした計測量から、直ちに大区間における交通密度、交通運動量及び交通エネルギー等の粗い推定ができる。更にこの性質を観測方程式として用い、車両保存則を表すシステム方程式と組み合わせれば、より正確な交通密度推定が可能となる。この推定手法は、典形的な平面街路の実測データにより、その実用性を確か

める。

5.6.2　平面街路における状態推定の基礎方程式

平面街路における道路区間の単位として、図5.12に示すような内部に

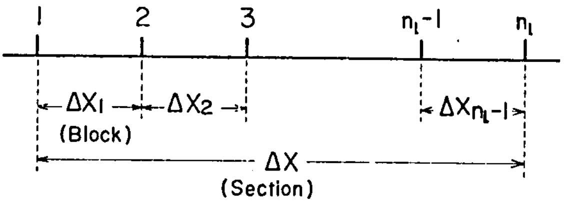

Fig.5.12. Road section of an urban road.

$n_\ell-1$個の小区間を含む長さ$\triangle x$の大区間を考える。このような大区間での交通流は信号による発進・停止を含むため、大区間の下流端点の速度を区間速度とみなすことはできない。更に大区間の内部においても、小交差点での右左折により、交通流の流入出が発生する。以上の理由から、平面街路の交通状態の推定に、5.5節で述べた高速道路の交通状態推定手法をそのまま適用することはできない。

従って、以下では平面街路における大区間の交通状態推定の前提として、高速道路の場合と異なる次の2つの計測を考える。

(i)　大区間の上流端点、各交差点及び下流端点における、流入出交通量q'_1，q'_2，…，q'_{n_ℓ}の計測。

(ii)　大区間の両端点（1，n_ℓ）における通過車のうちの一部の車番j及び通過時刻t_{1j}，$t_{n_\ell j}$の計測。

計測(i)は現用のループコイル、超音波等の車両感知器を用いて行うことができる。一方、計測(ii)は特定の車両に車番登録機能を持つ送信機を取り付け、地上に中央計算機と直結した受信機を置くことによって可能となる。

期間k（$k\triangle t\leqq t\leqq(1+k)\triangle t$）における流入台数を$q'_i(k)$，（i＝1，2，…，$n_\ell$）としよう。ただし、流出台数は負数で表す。一方、同じ期間kに大区間の下流端点n_ℓを通過する車番登録機能を持つ車両数をn_kとし、そ

の単位距離（通常 1 Km）当たりの旅行時間の平均と旅行時間の調和平均をそれぞれ

$$s'(k) \triangleq \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} (\tau_j) \tag{5.64}$$

$$p'(k) \triangleq \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} (1/\tau_j) \tag{5.65}$$

ただし　$\tau_j \triangleq (t_{n_\ell j} - t_{1j}) / \triangle x$

としよう。

計測(i)，(ii)で求まる $q'_i(k)$，$(i = 1, 2, \cdots, n_\ell)$，$s'(k)$ 及び $p'(k)$ の計測値をそれぞれ $y_i(k)$，$(i = 1, 2, \cdots, n_\ell)$，$z_1(k)$ 及び $z_2(k)$ とすれば次式が得られる。

$$y_i(k) = q'_i(k) + \xi_i(k) \qquad (i = 1, \cdots, n_\ell) \tag{5.66}$$

$$z_1(k) = s'(k) + \eta_1(k) \tag{5.67}$$

$$z_2(k) = p'(k) + \eta_2(k) \tag{5.68}$$

(5.66)～(5.68) 式において、$\xi_i(k)$，$(i = 1, \cdots, n_\ell)$，$\eta_1(k)$ 及び $\eta_2(k)$ は 計測誤差を表す。このうち $\xi_i(k)$ は 車両感知器の誤動作に起因し、$\eta_j(k)$ は 車番及び通過時刻の計測誤差に起因する。これらの誤差の統計的性質が既知であれば、計測値から最小 2 乗推定法等により真の値を推定できる。[75] 以下ではこの推定値を改めて $q'_i(k)$，$s'(k)$ 及び $p'(k)$ と書く。

さて、小区間 i における交通状態を表す空間変数として、5.2 節で導いた交通密度 ρ_i 、交通運動量 m_i 及び交通エネルギー e_i を考えよう。これらと、その小区間における旅行時間和 s_i 、交通量 q_i 及び旅行時間調和 p_i の間には (5.18)～(5.20) 式より、次の関係がある。

$$\rho_i = E(s_i) = q_i\, E(s'_i) \tag{5.69}$$

$$E(m_i) = E(q_i) \tag{5.70}$$

$$E(e_i) = E(p_i) = q_i\, E(p'_i) \tag{5.71}$$

(5.69)～(5.71)式は大区間内の各小区間 i（ $i = 1, \cdots, n_\ell - 1$ ）で成立する。これを用いて大区間の空間変数と時間変数の関係式を導こう。小区間 i の長さを $\triangle x_i$ とする。(5.69)～(5.71)式に $\triangle x_i$ を乗じてこれを 1 から $n_\ell - 1$ まで加え、更に大区間長 $\triangle x$ で割れば

$$E(\rho) = \frac{1}{\triangle x} \sum_{i=1}^{n_\ell - 1} \triangle x_i\, q_i\, E(s'_i) \tag{5.72}$$

$$E(m) = \frac{1}{\triangle x} \sum_{i=1}^{n_\ell - 1} \triangle x_i\, q_i \tag{5.73}$$

$$E(e) = \frac{1}{\triangle x} \sum_{i=1}^{n_\ell - 1} \triangle x_i\, q_i\, E(p'_i) \tag{5.74}$$

が得られる。以下では添字のない ρ, m, e 及び s, q, p 等は、大区間の変数を表すものとする。(5.72)～(5.74)式は大区間の空間変数 ρ, m, 及び e の期待値が、小区間の時間変数で表せることを示している。

各小区間の交通量の割合は、時間帯によってかなり変動する。例えば、都心の大区間では、出勤時は上流端交通量は下流端交通量より大きく、その差は小交差点に吸収される。一方帰宅時にはこの逆となり、昼間の業務交通時は上流端交通量と下流端交通量がほぼ等しい。このように考えれば、各小区間の交通量を大区間の両端点の交通量 q'_1 及び q'_{n_ℓ} の平均値 q を基準にして次のように書くことができる。

$$q_i = q + \triangle q_i \tag{5.75}$$

ただし　　$q \triangleq \dfrac{q'_1 - q'_{n_\ell}}{2}$

なお、q'_{n_ℓ} は流出交通量のため負の値をとることに注意する。

(5.75) 式を (5.72) ～ (5.74) 式に代入すれば、

$$E(\rho) = qE(s') + \gamma_1 \tag{5.76}$$

$$E(m) = q + \gamma_2 \tag{5.77}$$

$$E(e) = qE(p') + \gamma_3 \tag{5.78}$$

ただし、$$\gamma_1 = \frac{1}{\triangle X} \sum_{i=1}^{n_l-1} \triangle x_i \, \triangle q_i \, E(s') \tag{5.79}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\triangle X} \sum_{i=1}^{n_l-1} \triangle x_i \, \triangle q_i \tag{5.80}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\triangle X} \sum_{i=1}^{n_l-1} \triangle x_i \, \triangle q_i \, E(p') \tag{5.81}$$

が得られる。(5.76) ～ (5.78) 式において、右辺第2項は第1項に比較して十分小さいと考えられる。従って以下では、(5.79) ～ (5.81) 式で定まる γ_i ($i = 1, 2, 3$) を、平均値0、分散 $\sigma^2_{\gamma_i}$ を持つ正規性白色雑音とする。

(5.76) ～ (5.78) 式より、大区間の空間変数 ρ, m, eは、大区間の両端点の交通量及び旅行時間、区間速度の計測より、粗く求められることがわかった。(5.76) ～ (5.78) 式で得られる ρ, m, eは時空間的な期待値であり、各時刻の値を正確に表すものでないことに注意しよう。

5.6.3 交通密度の推定

時刻 $k\triangle t$ 及び $(k+1)\triangle t$ における大区間の交通密度を、それぞれ $\rho(k)$ 及び $\rho(k+1)$ と表せば、その差は期間k ($k\triangle t \leqq t \leqq (k+1)\triangle t$) において、この大区間に流入出する交通量の代数和に等しい。従って次式が成立する。

$$\rho(k+1) = \rho(k) + \frac{\triangle t}{\triangle X} \sum_{i=1}^{n_l} q'_i(k) + \varphi(k) \tag{5.82}$$

(5.82) 式は平面街路の大区間における車両保存則であり、$\varphi(k)$ は $q'_i(k)$ の推定誤差より生ずる不規則変数である。以下では簡単のため、$\varphi(k)$ を平均値0、分散 σ^2_φ の正規性白色雑音であるとしよう。

高速道路のような一様流では、交通運動量及び交通エネルギーに関しても、(5.82) 式に相当する動的な方程式が得られるが、平面街路のように大区間内部で信号による発進停止等がある場合は、これらの方程式は簡単には得られない。従って以下では、(5.82) 式を用いて交通密度だけを精密に推定することを考えよう。

交通密度の観測方程式として (5.76) 式、すなわち

$$\rho(k)=\frac{q'_1(k)-q'_{n_\ell}(k)}{2}\,s'(k)+\gamma(k) \tag{5.83}$$

を用いる。ここに $\gamma(k)$ は、(5.76) 式の $\gamma_1(k)$ に $q(k)$ 及び $s'(k)$ の推定誤差を加えたものである。ここでは $\gamma(k)$ も簡単のため平均値0、分散 σ^2_γ の正規性白色雑音であるとする。

(5.82) 式をシステム方程式、(5.83) 式を観測方程式とすれば、1次元の線形カルマン・フィルタを用いて、交通密度の推定値 $\hat{\rho}$ は次の式から求められる。

$$\hat{\rho}(k+1)=\hat{\rho}(k)+\frac{\triangle t}{\triangle X}\sum_{i=1}^{n_\ell} q'_i(k)$$

$$+G(k)\left\{\frac{q'_1(k)-q'_{n_\ell}(k)}{2}\,s'(k)-\hat{\rho}(k)\right\} \tag{5.84}$$

(5.84) 式において $G(k)$ はカルマン・ゲインである。推定誤差及びカルマン・ゲインの定常値は (5.56), (5.57) 式と同様次のようになる。

$$H^*=\sigma^2_\varphi\,\frac{1+\sqrt{1+4\,\sigma^2_\gamma/\sigma^2_\varphi}}{2} \tag{5.85}$$

$$G^* = \frac{2}{1+\sqrt{1+4\sigma^2{}_{\gamma}/\sigma^2{}_{\varphi}}} \qquad (5.86)$$

5. 6. 4　数値計算例

現実の平面街路における実測データ[89]を用いて、本手法による交通状態推定の有効性について検討する。対象とした大区間は京都市四条通り、烏丸一河原町間の東行 ８２０ｍの２車線道路区間である。この大区間は図5.１３の

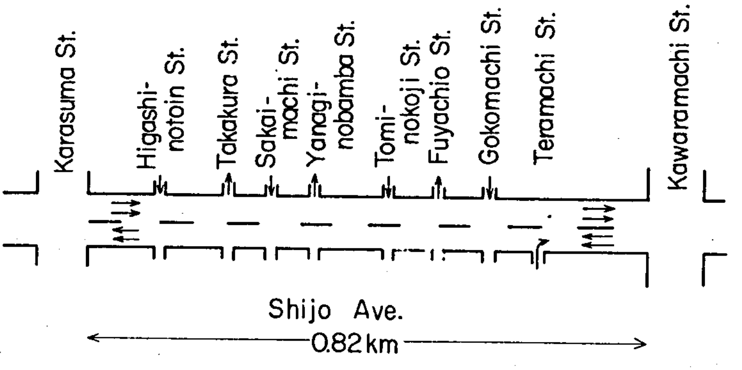

Fig. 5.13. Shijo Avenue, Kyoto.

形状をしており、その内部に小交差点、信号、横断歩道、バス停をそれぞれ 8, 5, 6, 4 個所含んでいる。

この大区間において交通量、旅行時間、区間速度及び交通密度を、次の方法で計測した。

(i)　交通量：図5.１３に示す大区間の両端点（横断歩道ライン）及び小交差点の出入地点における、５分間交通量を計測。

(ii)　旅行時間及び区間速度：車番の下１桁が０の乗用車について、大区間の両端点を通過する時刻と車番を計測し、これを基に旅行時間と区間速度を算出。

(iii)　交通密度：図5.１３の大区間を一定時間（２分）毎に４個所のビ

ルの屋上より写真にとり、これより道路上の車の台数を計測。

この大区間では、バス以外の大型車の通行は禁止されている。バスとその他の車両では走行特性が異なるので、ここではバス及び長時間駐停車した車両を除いて考えよう。図5.14に、バスを除く車両の旅行時間分布を示す。

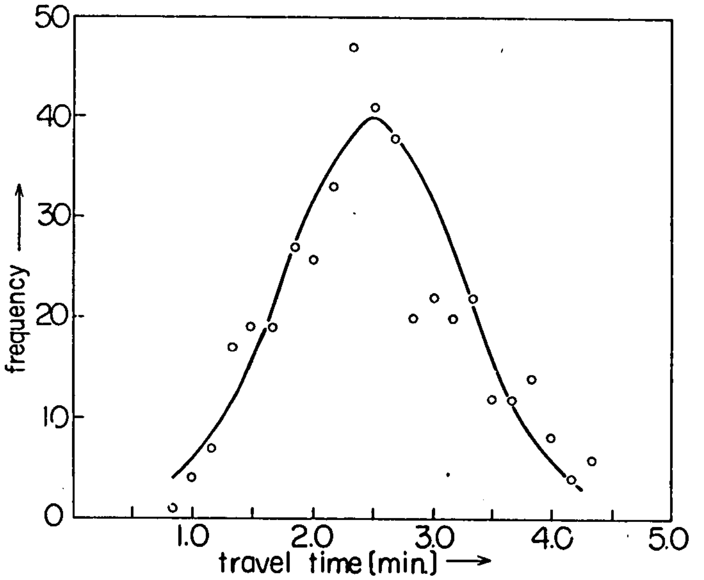

Fig. 5.14. Travel time distribution.

同図より4.5分以上の旅行時間を持つものを駐停車した車両とみなし、旅行時間及び区間速度算出の対象から除外する。一方、2分間を隔てた写真で同一地点に駐停車している車両を、実交通密度の計測から除外する。なお、交通量に関しては駐停車した車両を分離できないが、これの交通量に占める比率が小さいので無視する。

まず、(5.76)式で表される交通密度と旅行時間和の関係を実測データから調べよう。$\triangle t$を10分及び30分とし、この関係を図5.15に示す。交通密度は2分間隔で撮影した写真より求めたので、かなり誤差が大きい。従って、10分のデータでは明確な対応は現れないが、30分のデータではかなり明確な対応がみられる。なお $\rho = \alpha q s'$ の α が1より少し大きいのは、

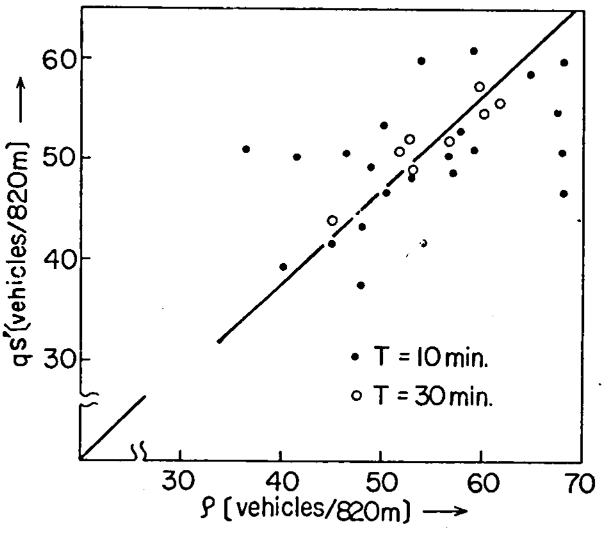

Fig.5.15. (ρ−qs') characteristics.

ここで計測していない大区間直進車両以外の旅行時間が、大区間直進車に比較し、若干大きくなるためと考えられる。

次に、図5.13に示した大区間の特性を調べよう。従来からよく用いられている交通量一旅行時間特性を、図5.16に示す。図5.16では△tを30

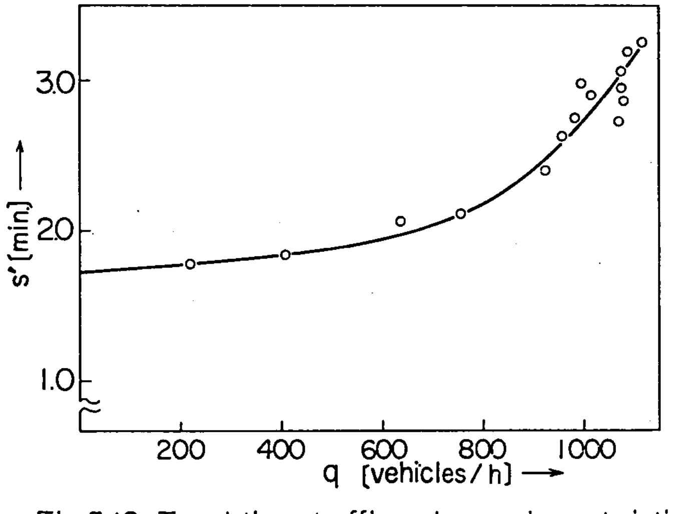

Fig.5.16. Travel time-traffic volume characteristic.

分とし、交通量を大区間両端点における平均 ($q'_1 - q'_{n_\ell}$)/2 とした。

(5.76)～(5.78)式を用いて大区間の (ρ , m, e) の期待値を算出し、これより交通密度に対する空間平均速度、交通運動量及び交通エネルギーの特性を求め図5.17に示す。図5.17では図5.16と同様△tを30分とし、

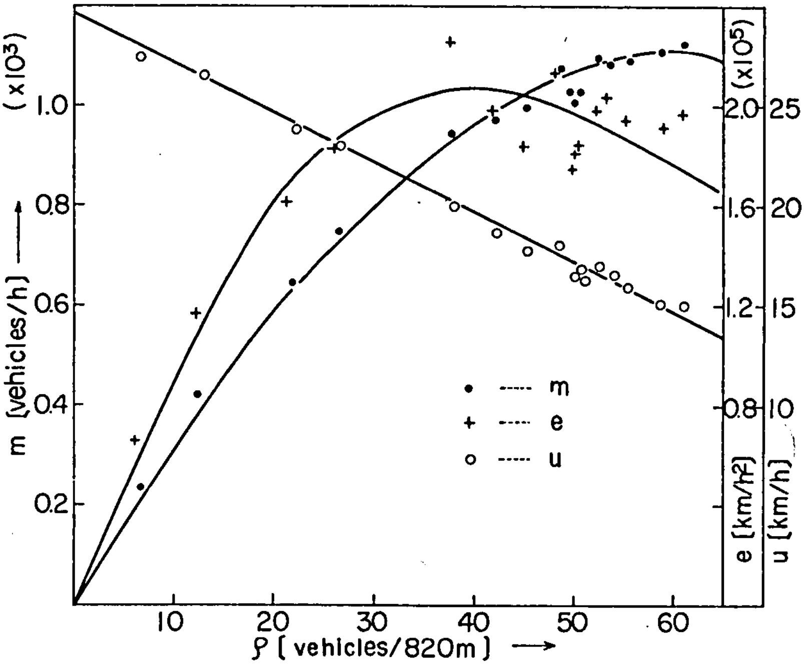

Fig. 5.17. Roughly estimated road characteristics.

交通密度は大区間長 820m 当たりの台数に換算して示した。図5.17では、交通密度－空間平均速度特性は、平面街路のように複雑な交通流においても Greenshields の式が極めて良く適合することが示されている。図5.16と図5.17を比較すれば、交通量又は交通密度の大きい状態では、交通量－旅行時間特性のような時間変数よりも、交通密度－空間平均速度または、交通密度－交通運動量特性のような空間変数の方が、大区間特性を明確に表しうることがわかる。

最後に△tを5分とし、(5.84)式を用いて交通密度の推定を行う。

（5.82）及び（5.83）式におけるシステム雑音及び観測雑音の分散は、データより次のように求められる。

$\sigma^2_\varphi \doteqdot 70 \qquad \sigma^2_\gamma \doteqdot 140$

従って（5.85），（5..86）式より、推定値の誤差分散H* 及びカルマン・ゲインG* の定常値は、次のようになる。

$H^* \doteqdot 100 \qquad G^* \doteqdot 0.5$

この G* を用いて（5.84）式より5分毎の交通密度を推定し、結果を図5.18の点線で示す。この例では交通密度を820m当たりの台数に換算し

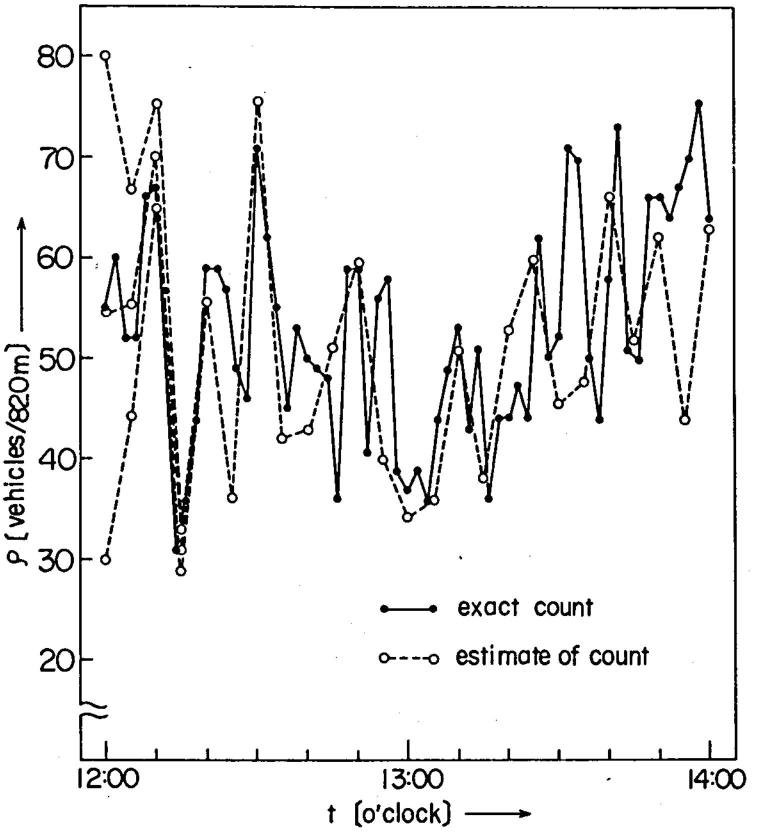

Fig.5.18. The density and its estimate.

て示し、その初期値を30，55，80（台／820m）とした。一方、2分間隔で撮影された写真より計測した交通密度を図5.18の実線で示す。これらを比較すれば、交通密度の初期値推定誤差の影響は15～20分で消滅し、実

際の交通密度に近い値が得られていることがわかる。

5.6.5　むすび

本節では、平面街路における交通状態、特に交通密度の推定について論じた。まず平面街路の道路区間として小区間及び大区間を定義し、これらの区間において、空間変数と時間変数の間に成立する関係式を導いた。これは実測データによっても確かめられた。この関係を用いれば、時間的なデータより空間的な交通状態の粗い推定ができる。更にこの関係と車両保存則を組み合わせ、カルマン・フィルタにより交通密度を推定する手順を示した。

この手法を実際に利用するには、従来の交通量計測に加えて一部の車両の車番検出が必要であるが、これはカーロケーション・システム、ロードプライシング・システム及び径路誘導システム等が、基本機能として持っているものである。従って今後上記システムの発展に伴い、実用化が可能となろう。

5.7　結　言

本章では、道路における交通流の状態を記述する新しいモデルを導き、これに基づいて高速道路及び平面街路における交通状態の推定について述べた。

有限長の道路区間における交通流を表す変数として、車両の区間速度に基づいた空間変数及び時間変数を定め、これらの間に成立する簡潔な関係式を導いた。これらの関係式と空間変数の保存則を組み合わせ、交通流モデルを差分方程式で記述した。

次に、高速道路及び平面街路の交通流の状態推定法として、上記の関係式に基づいて構成したシステム方程式及び観測方程式にカルマン・フィルタを適用する手法を提案し、実測データによりその有効性を確かめた。

ここで述べた状態推定手法を現実の道路交通流の監視に適用するには、高速道路では地点速度、平面街路では地点通過時刻の計測が必要となる。従って、今後計測機器を含めたシステムの開発、更に交通管制への応用が望まれる。

第6章　道路交通流の統計モデルと予測

6.1　緒　　言

交通流理論の分野で得られた種々の関係式を用いて、交通流を物理的に記述する試みの成果として、幾つかのミクロモデル及びマクロモデルが提案されてきた。ミクロモデルは車両個別の動きを位置、速度及び加速度で記述するものであり、[120] 運転者、車両の特性及び各種走行モードにより異る、各種のパラメータを含む。一方マクロモデルは、車群の動きを交通密度、空間平均速度等で記述するものであり [52] 道路特性、交通流の粗密等に関する、各種のパラメータを含む。従って、いずれの物理モデルでも、パラメータの推定すなわち、システムの同定にはかなりの困難が生ずる。

一方、交通流を統計的に記述し、これを交通流予測に応用することも広く試みられている。米谷，明神 [60] は、高速道路における区間交通量を、先験量と時系列データの組合せにより予測する簡潔な手法を導いている。J.B.Kreer [63] は、平面街路における幾つかの交通量予測手法を比較し、先験量に基づく簡単な手法を改めて評価した。H.Nicholson と C.D.Swann [87] は、交通量時系列がほぼ一定のパターンを持つとして、これを Karhunen Loeve 展開し、これにより得られる特徴関数に基づいて交通量の予測を行っている。しかし、これらの手法はいずれも統計学的に十分検討されているとはいえず、短期（１０秒～１０分程度）の予測法として、精度及び計算量等に問題点が残されている。

最近、定常確率過程の入出力時系列データから統計的にシステムを同定する手法が研究され、[1,2,113] 種々の分野に応用されている。本章では、この手法を道路交通流特に高速道路交通流に適用することを試み、２，３の応用例を示す。

交通流が上流から下流へ一方向に流れることを利用し、上流地点と下流地

点の各種時間量を入出力変数として、これらの間に成立する統計的モデルを導こう。ここで変数としては、速度調和、交通量及び速度和をとる。

まず実測で得られたデータより、これらの変量の相関分析及びスペクトル分析を行う。更にこれらの解析に基づき、入出力データ間にＡＲＭＡモデルをあてはめ、システムを同定する。これを用いれば、短期的な交通流の予測が可能である事を示し、高速道路における事故検出及びトンネル換気制御への応用例について述べる。

6.2 準　　備

交通現象は長い期間、すなわち数時間〜1日を対象とすれば、一般に非定常確率過程であるが、数時間以下の比較的短い期間を対象とすれば、定常確率過程と考えることができる。以下では簡単のため、対象とする交通現象が定常確率過程とみなしうるとして考察を進めよう。

等時間間隔に測定された入力及び出力時系列を表す不規則なスカラー量を、それぞれ $\{x(k), k=1,2,\cdots,n_d\}$ 及び $\{y(k), k=1,2,\cdots,n_d\}$ とする。このとき自己及び相互相関関数は次のように定められる。[1)]

$$R_{xx}(\ell) \triangleq \lim_{n_d\to\infty} \frac{1}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} (x(k+\ell)-E(x))(x(k)-E(x)) \tag{6.1}$$

$$R_{yy}(\ell) \triangleq \lim_{n_d\to\infty} \frac{1}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} (y(k+\ell)-E(y))(y(k)-E(y)) \tag{6.2}$$

$$R_{yx}(\ell) \triangleq \lim_{n_d\to\infty} \frac{1}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} (y(k+\ell)-E(y))(x(k)-E(x)) \tag{6.3}$$

$$(\ell=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots)$$

ただし、$E(x)$ は x の期待値、すなわち時間的平均値を表す。

(6.1)〜(6.3) 式で表される自己及び相互相関関数は、各変数自身及び変

数間の動的依存関係を表すものであり、以下の議論の基礎となる。

時間領域で定義される(6.1)〜(6.3)式をフーリエ変換すれば、周波数領域で定義されるパワースペクトル密度及びクロススペクトル密度関数（以下では単にパワースペクトル、クロススペクトルと呼ぶ）が、次のように得られる。

$$P_{xx}(f) \triangleq \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \exp(-i\,2\pi f \ell)\, R_{xx}(\ell) \qquad (6.4)$$

$$P_{yy}(f) \triangleq \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \exp(-i\,2\pi f \ell)\, R_{yy}(\ell) \qquad (6.5)$$

$$P_{yx}(f) \triangleq \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \exp(-i\,2\pi f \ell)\, R_{yx}(\ell) \qquad (6.6)$$

ただし　$-1/2 \leq f \leq 1/2$,　$i^2 = -1$

(6.4)〜(6.6)式は統計データの性質を周波数領域で直接示すもので、現象を理解する上で有効なものである。

入力と出力の間にインパルス応答関数 $\{\, a(m),\ m = 0, \pm 1, \cdots \}$ を介して次の関係があるとしよう。

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)\, x(k-m) \qquad (6.7)$$

このとき周波数領域では次の関係がある。

$$P_{yy}(f) = |\, A(f)\,|^2 P_{xx}(f) \qquad (6.8)$$

$$P_{yx}(f) = A(f)\ P_{xx}(f) \qquad (6.9)$$

ただし　$A(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-i\,2\pi f m)\, a(m)$

入力と出力の時系列 $\{x(k),\ y(k),\ k = 1, \cdots, n_d\}$ が与えられた場合、一般にこれらの間には(6.7)式のような完全な線形関係はない。通常 y は

(6.7)式のようにxと線形に対応する部分（これを y' と記す）と、xに線形な関係を全く持たない部分 ε との和として、

$$y(k) = y'(k) + \varepsilon(k) \tag{6.10}$$

のように書ける。このとき自己相関関数については

$$R_{yy}(\ell) = R_{y'y'}(\ell) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\ell) \tag{6.11}$$

が成立し、対応するパワースペクトルについては、

$$P_{yy}(f) = P_{y'y'}(f) + P_{\varepsilon\varepsilon}(f) \tag{6.12}$$

が成立する。そこで、yの中で入力xと線形な関係にある部分の占める割合を、各周波数毎に考えて

$$\gamma^2(f) = \frac{P_{y'y'}(f)}{P_{yy}(f)} \tag{6.13}$$

を y' とxとのfにおけるコヒーレンシー関数と呼ぶ。

尚、以上の議論は、x，y' 及びyがベクトル量の場合にも、容易に拡張することができる。

6.3 交通流データの統計解析

図5.1に示すような高速道路の1区間における交通流について考えよう。上流側の地点を1とし、下流側の地点を2として、それぞれの時間量として速度調和s†、交通量q及び速度和pを考えよう。これらの量は前章で述べたように、その地点近傍の交通密度 ρ、交通運動量m及び交通エネルギーeに対応している。地点1において交通運動量 m_1、交通エネルギー e_1 を持つ交通密度 ρ_1 の集合は、適当な時間の後、ある程度拡散して地点2に現れるであろう。従って、入力ベクトル $x = (s_1, q_1, p_1)$ と出力ベクトル $y = (s_2, q_2, p_2)$ の統計解析をすれば、これらの関係が明確になるであ

† 速度調和は近似的に時間占有率(オキュパンシー)で代替することもできる。

ろう。

ここで、当該道路区間長$\triangle x$、サンプリング時間$\triangle t$及びデータ数n_dの間の関係について考える。サンプリング時間$\triangle t$が定まると$1/2\triangle t$以上の周波数の現象は、取り扱えない。従って、着目する最大周波数をf_{max}とすれば

$$\triangle t = \frac{1}{2 f_{max}} \tag{6.14}$$

となる。通常、対象とする最大周波数は$1/10 \sim 1/30$ Hzであるから、サンプリング周期は5〜15秒程度とすればよいことになる。

一方、着目する最小周波数をf_{min}とすれば

$$h = \frac{1}{\triangle t \cdot f_{min}} \tag{6.15}$$

で定まる時間差までの相関を扱えばよい。[1] このhは後に述べるARMAモデルの次数に相当することに注意しよう。通常、対象とする最小周波数は$1/500 \sim 1/1000$ Hzであるから、hは50〜100となる。

統計解析に必要なデータ数n_dは、少なくとも

$$n_d \geqq 5\,h \tag{6.16}$$

であることが望ましいといわれている。[1] 従って$\triangle t$を10秒、hを50とすれば、データ数n_dは250、すなわち2500秒間のデータが必要となる。データ数n_dをあまり大きくとると、定常過程の仮定が満たされなくなることに注意しよう。

次に道路区間長$\triangle x$の平均旅行時間をτとすれば、地点1から2への影響を見るためには少なくとも$\tau > \triangle t$が必要である。区間長$\triangle x$が短くτが小さい場合には、後に述べるARMAモデルの適合性が悪くなり、逆に区間長$\triangle x$が長くτが大きい場合には、ARMAモデルの次数が大きくなる。我々の経験によれば、τとして

$$\tau \cong 5\triangle t \sim 10\triangle t \qquad (6.17)$$

をとるのが良いようである。従って△tを10秒とすれば、平均旅行時間が50〜100秒程度の区間長、すなわち1〜2Kmをとればよい。

以下では前章で述べた、名神高速道路の鶏林橋と天王山トンネル間の1.48Km 2車線区間の実測データ[127)]を用いて、統計解析を行った結果について示す。今、定常過程とみなせるデータとして、3月7日、10時〜12時の2時間データを用いよう。サンプリング時間を12秒とし、相関のステップ数hを

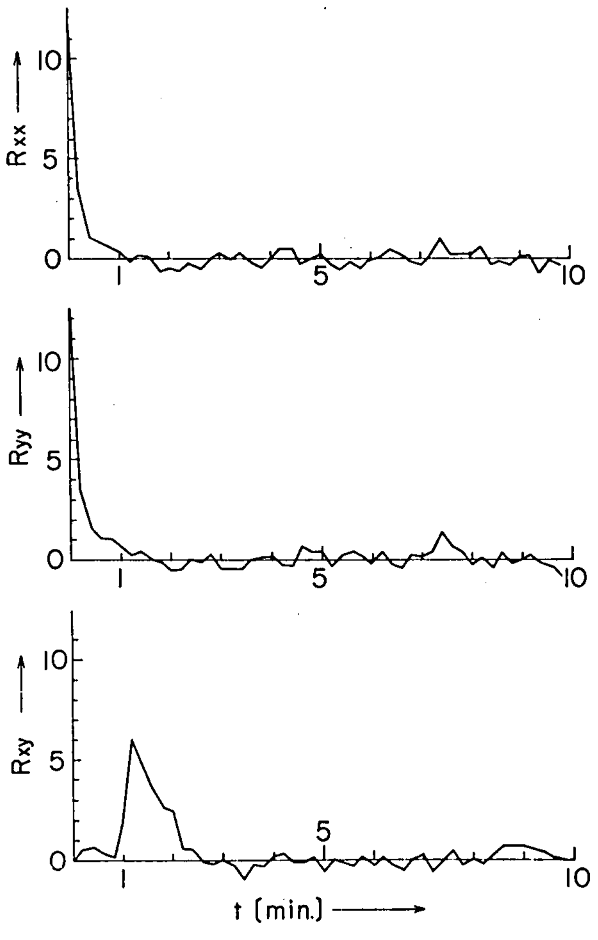

Fig.6.1. Auto- and cross-correlation function of the flow volume.

５０とする。このとき、データ数 n_d は ６００ であり、（6.16）式を満たしていることがわかる。一方、この区間の旅行時間は、６０～１２０秒であり、（6.17）式も満たしていることがわかる。

この例における交通量の自己及び相互相関関数を、図 6.1 に示す。これらの図より、自己相関は 4～5 ステップ後までであることがわかる。地点 1 に比べ地点 2 における交通量の自己相関が大きいのは、地点 2 がトンネル入口で登り坂になっているため、いわゆるダンゴ現象が多少現われているものと考えられる。一方地点 1 及び 2 間の相互相関関数を見れば、5 ステップ目、す

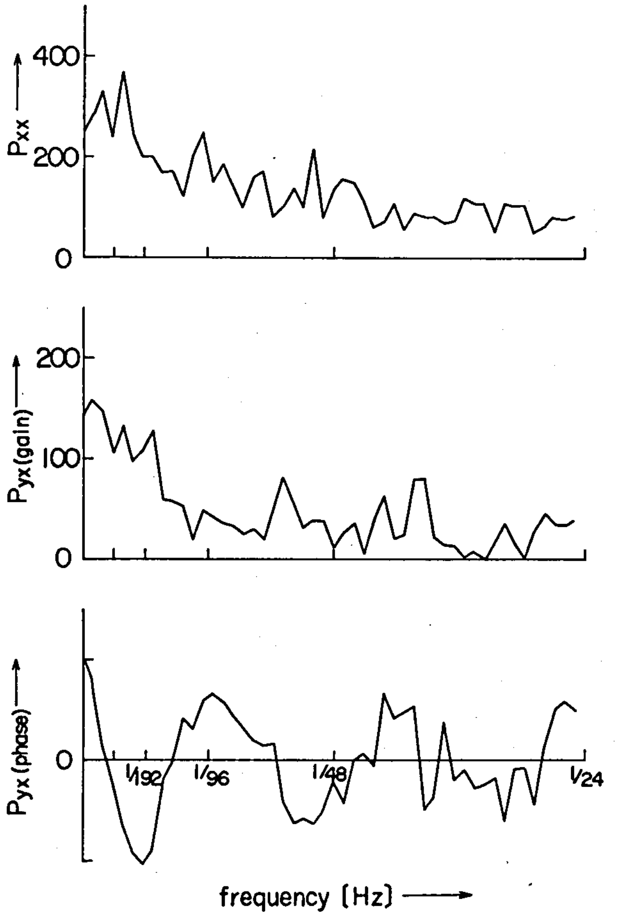

Fig. 6.2. Power and cross-power spectrum of the flow volume.

なわち48秒〜60秒から相関が現われ、12〜13ステップ目、すなわち132〜156秒で相関がほとんど零となっている。これは当該区間の旅行時間の分布に相当するものである。また、6ステップ目及び10ステップ目にそれぞれ相関のピークがあるが、これは小型車（高速車）と大型車（低速車）の旅行時間の代表値に相当するものと考えられる。

次に、これらの変量のパワースペクトル及びクロススペクトルを図6.2に示す。パワースペクトルを見れば、直流〜$\frac{1}{24}$ Hz 成分までかなり一様な成分が存在することがわかる。一方クロススペクトルを見れば、これはむだ時間要素に近い形であることがわかる。

6.4　ARMAモデルのあてはめ

交通流の基本関係式から得られる交通流モデルを用いれば、地点の時間量である速度調和s、交通量q及び速度和p等の入出力の関係式が得られるが、これは一般に第5章で述べたように複雑な非線形式となる。従って以下では、このような物理モデルを扱うことをさけ、入出力の関係が次の簡単な形に表されると仮定して話を進めよう。

$$y(k)=\sum_{m=1}^{n_a} a(m)x(k-m)+\sum_{m=1}^{n_b} b(m)y(k-m)+\varepsilon(k) \tag{6.18}$$

以下では簡単のため、(6.18)式のx，yをいずれもスカラー量とする。ε は第1項及び第2項で表現できない部分を表す不規則変数(スカラー)である。†

(6.18)式はARMA（自己回帰移動平均）モデルと呼ばれる。(6.18)式において $a(m)\equiv 0$ ($m=1,\cdots,n_a$)ならばAR（自己回帰）モデル、$b(m)\equiv 0$ ($m=1,\cdots,n_b$) ならばMA（移動平均）モデルと呼ばれる。(6.18)

---

† (6.18)式において、第1項はIsaksenとPayneモデル[52]のPrediction項、第2項はConvection 項に相当する。

式における a(m) 及び b(m) が既知であるとすれば、y(k) の予測値 $\tilde{y}(k)$ は、x 及び y の過去の値より次式で予測できる。

$$\tilde{y}(k) = \sum_{m=1}^{n_a} a(m)\,x(k-m) + \sum_{m=1}^{n_b} b(m)\,y(k-m) \qquad (6.19)$$

(6.18) 及び (6.19) 式における a(m) 及び b(m) を求めよう。以下では一般性を失うことなく、x(k) 及び y(k) の直流分、すなわち平均値を零であるとしよう。無限に長い期間のデータが得られるとすれば、$\varepsilon^2(k)$ の推定値 $\overline{\varepsilon^2(k)}$ は (6.1)〜(6.3) 及び (6.18) 式より次式で表される。

$$\begin{aligned}
\overline{\varepsilon^2(k)} &= \lim_{n_d\to\infty} \frac{1}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} \varepsilon^2(k) \\
&= R_{xx}(o) - 2\sum_{m=1}^{n_a} a(m)\,R_{xx}(m) - 2\sum_{m=1}^{n_b} b(m)\,R_{xy}(m) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{n_a}\sum_{m=1}^{n_a} a(\ell)\,a(m)\,R_{xx}(m-\ell) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{n_b}\sum_{m=1}^{n_b} b(\ell)\,b(m)\,R_{yy}(m-\ell) \\
&\quad + 2\sum_{m=1}^{n_a}\sum_{l=1}^{n_b} a(m)\,b(\ell)\,R_{xy}(\ell-m) \qquad (6.20)
\end{aligned}$$

(6.20) 式で定まる $\overline{\varepsilon^2(k)}$ を最小にする a(m), b(m) は、次の 2 式で定めることができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\varepsilon^2(k)}}{\partial a(i)} &= -2R_{xx}(i) + \sum_{m=1}^{n_a} a(m)\,R_{xx}(m-i) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{n_a} a(\ell)\,R_{xx}(i-\ell) + 2\sum_{m=1}^{n_b} b(m)\,R_{xy}(m-i) = 0
\end{aligned}$$

(6.21)

$$\frac{\partial\,\overline{\varepsilon^2(k)}}{\partial\, b(i)} = -2R_{xy}(i) + \sum_{m=1}^{n_b} b(m)R_{yy}(m-i)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n_b} b(\ell)R_{yy}(i-\ell) + 2\sum_{m=1}^{n_a} a(m)R_{xy}(i-m) = 0$$

(6.22)

すなわち(6.21)及び(6.22)式で求まる$a(m)$及び$b(m)$は$\varepsilon(k)$の平均2乗誤差を最小にする線形予測係数であることがわかる。

(6.21)及び(6.22)式を行列の形にまとめれば、次式となる。

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}
R_{xx}(0) & R_{xx}(1)\cdots & R_{xx}(n_a-1) & R_{xy}(0) & \cdots & R_{xy}(n_b-1) \\
\vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\
R_{xx}(n_a-1) & & R_{xx}(0) & R_{xy}(1-n_b) & & R_{xy}(n_b-n_a) \\
\hdashline
R_{xy}(0) & \cdots & R_{xy}(1-n_a) & R_{yy}(0) & \cdots & R_{yy}(n_b-1) \\
\vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\
R_{xy}(n_a-1) & & R_{xy}(n_b-n_a) & R_{yy}(1-n_b) & & R_{yy}(0)
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
a(1) \\ \vdots \\ a(n_a) \\ \hdashline b(1) \\ \vdots \\ b(n_b)
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
R_{xx}(1) \\ \vdots \\ R_{xx}(n_a) \\ \hdashline R_{xy}(1) \\ \vdots \\ R_{xy}(n_b)
\end{array}\right]$$

(6.23)

(6.23)式においてR_{xx}, R_{xy},及びR_{yy}は、いずれもスカラーであること†に注意しておく。(6.23)式における係数行列は対称である。次数n_a及びn_bを適当に定めればこの係数行列は正則となり、$a(m)$及び$b(m)$は(6.23)式より一意に求まる。次元数n_a及びn_bを必要以上に大きくとると係数行列の行列式が小さくなり、数値計算上の誤差が大きくなる。従ってn_a及びn_bは、$y(k)$を説明するのに必要十分な値に留めなければならない。赤池は最小次元を定める指標として、FPE及びAICを提案している。[1,2]

(6.23)式で定まる$a(m)$及び$b(m)$を用いれば、$\varepsilon(k)$は次の自己相関関数及びパワースペクトルを持つ白色雑音となる。

---

† もしXをベクトルとすればR_{yy}はスカラー、R_{yx}はベクトル、R_{xx}は行列となる。

$$R\varepsilon\varepsilon(i) = \delta_{i,0}\,\sigma^2 \qquad (\sigma^2 > 0) \tag{6.24}$$

ここで
$$\delta_{i,0} = \begin{cases} 1: & i=0\text{のとき} \\ 0: & i\neq 0\text{のとき} \end{cases}$$

$$P\varepsilon\varepsilon(f) = \sigma^2 \qquad \left(-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}\right) \tag{6.25}$$

yをxで表すためには、xとして上記εの分散σ^2を小さくする変数を選ぶ必要がある。以下ではx，yとして速度調和、交通量及び速度和等同種の変数をとることにしよう。

6.5 交通流予測への応用

データのサンプリング時間を$\triangle t$とし、期間$n_c \times \triangle t$の交通流予測を行おう。期間$n_c \times \triangle t$は、明らかに当該道路区間の旅行時間τを越えることは出来ない。ここで上流点及び下流点で得られるデータx，yより、次のデータを作成する。

$$x^*(k) = x(k) + x(k-1) + \cdots + x(k-n_c+1) \tag{6.26}$$

$$y^*(k) = y(k) + y(k-1) + \cdots + y(k-n_c+1) \tag{6.27}$$

ただし　$1 \leqq n_c \leqq \tau/\triangle t$

(6.26)及び(6.27)式で得られるデータを改めて入出力時系列データと考えれば、(6.18)式に相当するARMAモデル、すなわち

$$y^*(k) = \sum_{m=1}^{n_a} a^*(m)\,x^*(k-m) + \sum_{m=1}^{n_b} b^*(m)y^*(k-m) + \varepsilon^*(k) \tag{6.28}$$

を作成することができる。(6.28)式の$a^*(m)$ $(m=1,\cdots,n_a)$及び$b^*(m)$ $(m=1,\cdots,n_b)$は(6.23)式より求めることができる。従ってこれらの係数を用いれば、下流側の期間kの予測値$\widetilde{y}^*(k)$は、次式より得ることができる。

$$\tilde{y}^*(k)=\sum_{m=1}^{n_a}a^*(m)x^*(k-m)+\sum_{m=1}^{n_b}b^*(m)y^*(k-m) \qquad (6.29)$$

以下では２，３の例により、(6.29)式による予測の実例について示そう。ここに示す例はすべて前節と同様のデータによる。

〔例題 6.1〕($n_c=1$ の場合の速度調和、交通量及び速度和の予測)

サンプリング時間 $\triangle t$ を１２秒とし、(6.26)，(6.27)式の n_c を１とする。このときの上流地点１の速度調和（又は交通量、速度和）を $x^*(k)$，

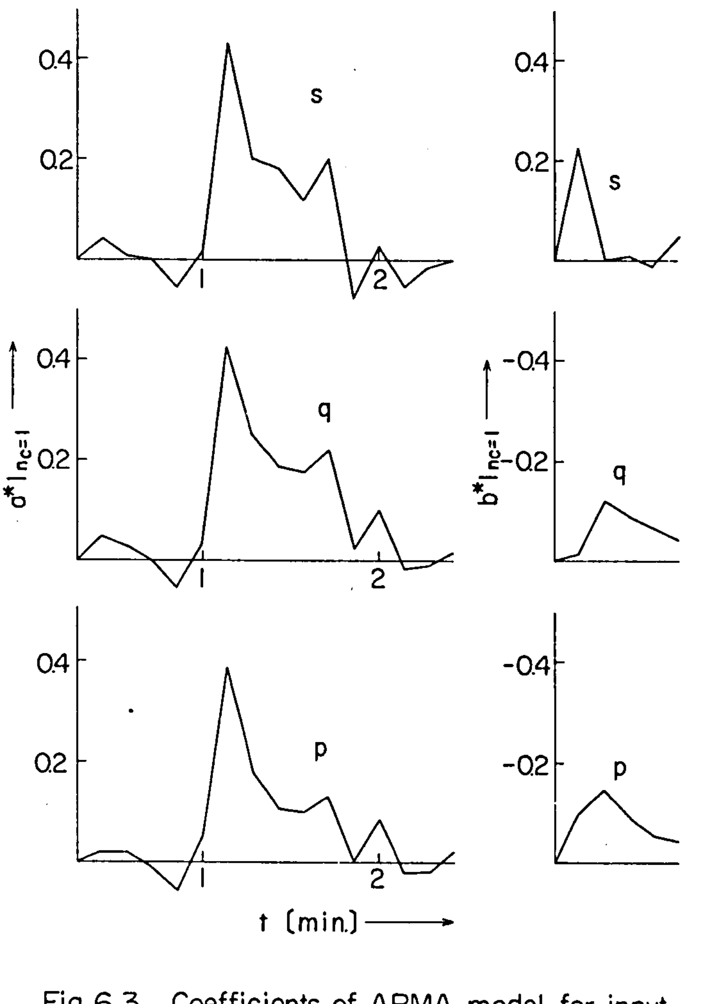

Fig. 6.3. Coefficients of ARMA model for input-output traffic data.

(k＝1,…, 600)とし、下流地点2の速度調和（又は交通量、速度和）を $y^*(k)$, (k＝1,…, 600)とする。+ (6.28)式のARMAモデルにおいてMA過程の次数 n_a を 15、AR過程の次数 n_b を5とし、係数 $a^*(m)$ 及び $b^*(m)$ を求めれば図6.3が得られる。

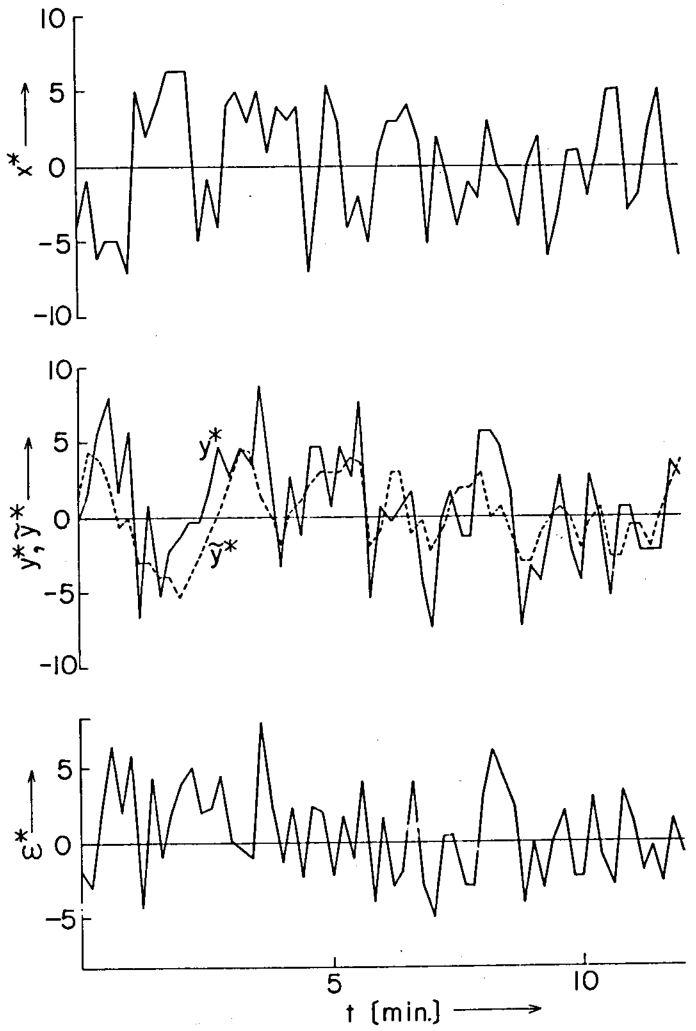

Fig.6.4. Prediction and its error of the flow volume by ARMA model (n_c=1).

+ ここでは $x^*(k)$, $y^*(k)$ としてそれぞれの平均値からの残差をとる。
また速度調和及び速度和は 60Km／h を基準として規準化した。

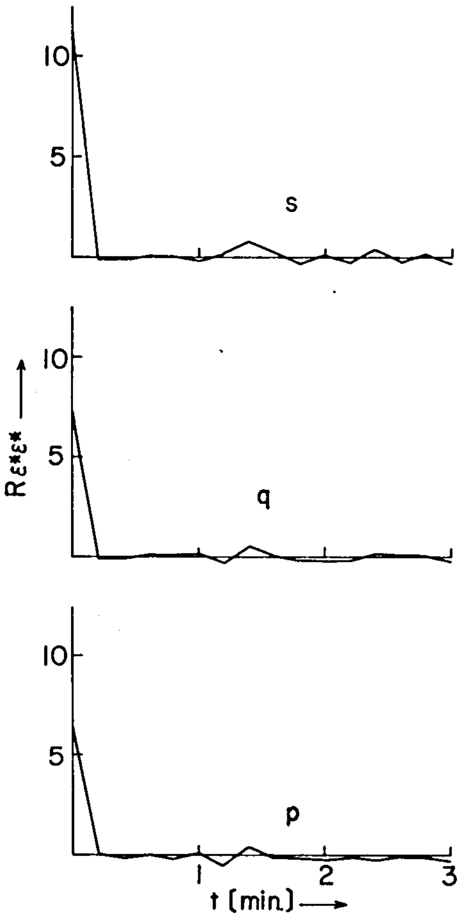

Fig.6.5. Auto correlation of the prediction error by ARMA model.

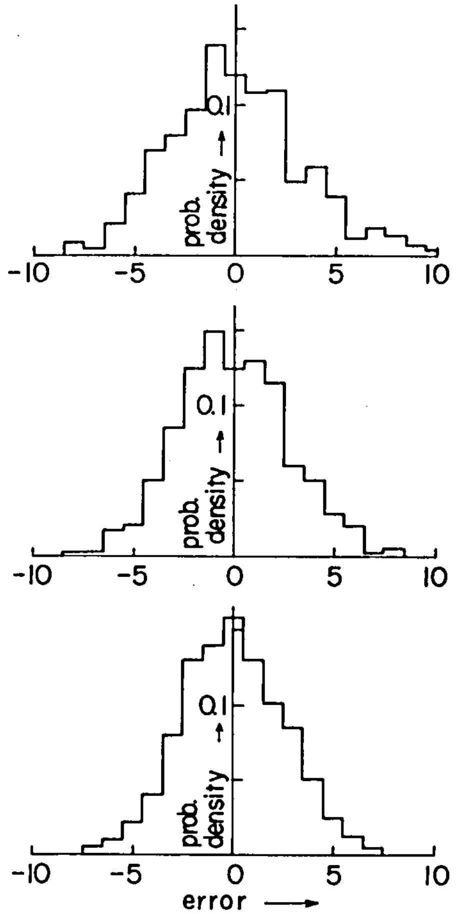

Fig.6.6. Distribution of the prediction error.

図 6.3 で得られた $a^*(m)$ 及び $b^*(m)$ を用いて、(6.29)式により予測を行った場合の予測値と予測誤差を、図 6.4 に示す。この場合の予測誤差 $\varepsilon^*(k)$ の自己相関は、図 6.5 に示すようになり、$\varepsilon^*(k)$ はほぼ白色であることがわかる。更に $\varepsilon^*(k)$ の度数分布は図 6.6 に示すように、正規分布に近いことがわかる。速度調和、交通量及び速度和の予測誤差が正規分布であるという仮説は、χ^2 検定によりそれぞれ 20%, 40% 及び 98% の危険率で棄てることはできない。以上に述べた予測誤差の持つ特長は、次節で事故検出に利用される。

〔例題 6.2〕（期間長と予測誤差の関係）

サンプリング時間 Δt を 12秒とし、予測時間を 12～120 秒とした場合の予測精度について考えよう。すなわち、(6.26) 及び (6.27) 式の n_c を 1～10 として ARMAモデルを求め、更にそれを用いて予測を行う。

$n_c = 5$ の場合のARMAモデルの係数を、速度調和、交通量及び速度和それぞれについて、図 6.7 に示す。図 6.8 には、$n_c = 5$ の場合の交通量の予測の結果を x^*_5, y^*_5 $\tilde{y}^*_5$ 及び ε^*_5 について示す。

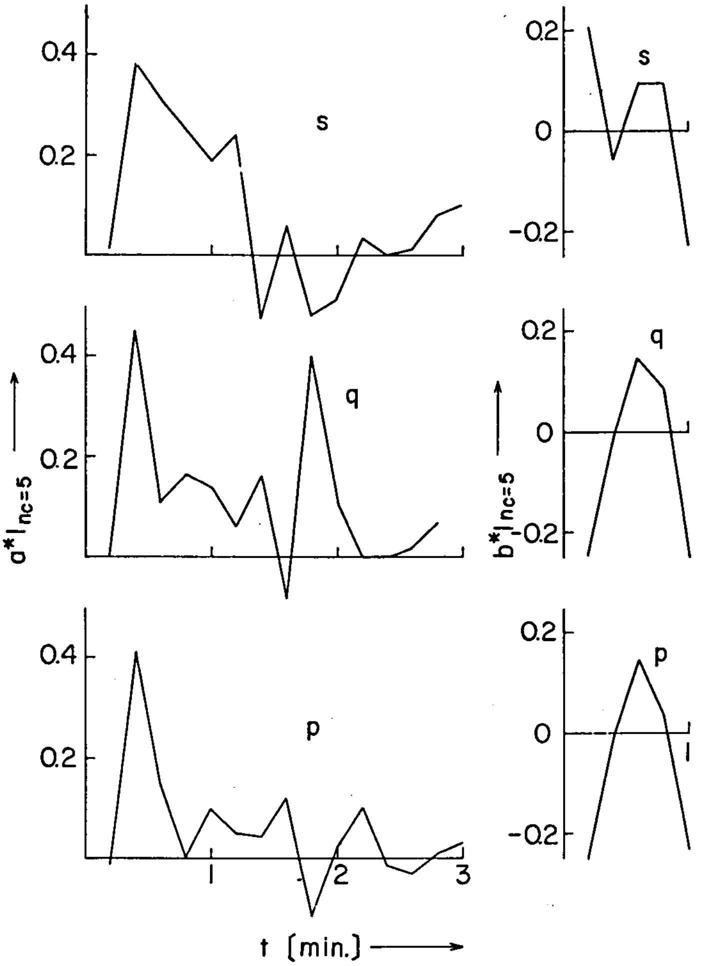

Fig. 6.7. Coefficients of ARMA model for input-output traffic data (n_c= 5).

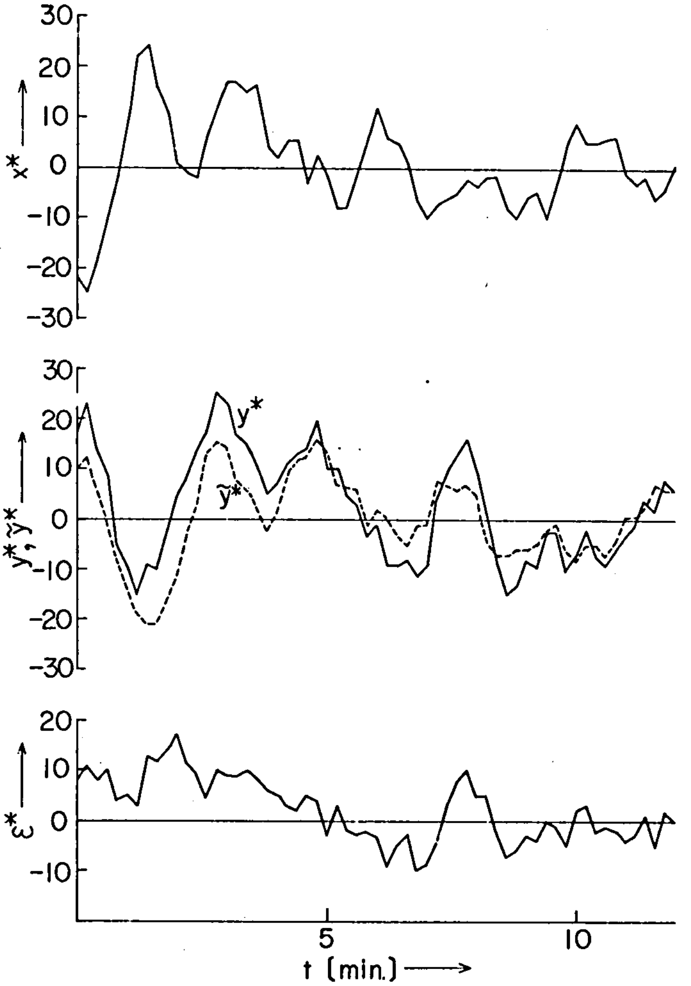

Fig. 6.8. Prediction and its error of the flow volume by ARMA model ($n_c = 5$).

この場合のARMAモデルの不適合の度合を次式のパーセントエラー

$$P_e = \frac{100}{E(y^*)} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} \{y^*(k) - \sum_{m=1}^{n_a} a^*(m) x^*(k-m) - \sum_{m=1}^{n_b} b^*(m) y^*(k-m)\}^2} \tag{6.30}$$

で表せば図6.9のようになる。図6.9よりARMAモデルの不適合性が最小となる予測期間は $n_c = 6 \sim 7$ すなわち72～84秒となる。この時間間隔はこの区間の平均旅行時間にほぼ相当している。

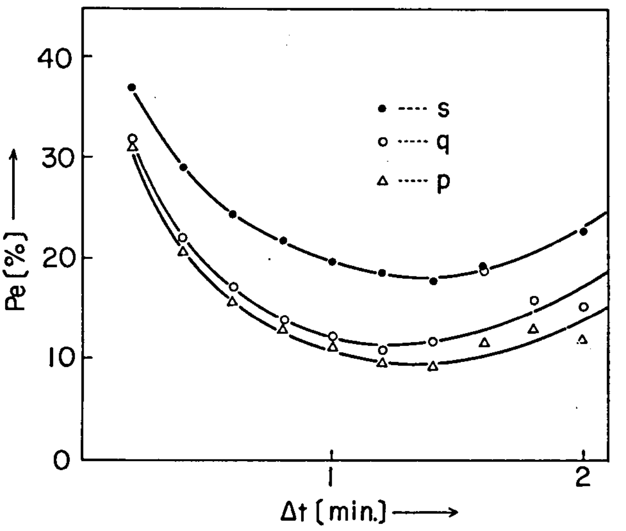

Fig.6.9. Variation of the prediction error with the prediction period.

6.6 事故検出への応用

高速道路において事故が発生した場合の渋滞時間は、事故検出後流入制限が行われるとすれば、事故検出遅れ時間のほぼ２乗に比例すると言われており、事故の早期検出は非常に重要である。従来事故検出には、時間占有率、交通量又は、速度等の異常を調べるか、或いはそれら各変量の時空間的差分を調べることが行われてきた。[55,94] このためイタリアのナポリ高速道路では、存在感知器を２００ｍ間隔に設置している。[94] このような検出器の稠密な設置はコストの大巾な増加をもたらすため、より粗い設置による事故検出の手法が望まれる。

本節では、ＡＲＭＡモデルにより可能となった、短期予測手法を利用した効果的な事故検出法を提案する。（6.29）式を（6.28）式に代入して整理すれば

$$\varepsilon^*(k) = y^*(k) - \tilde{y}^*(k) \tag{6.31}$$

ただし　$\tilde{y}^*(k) = \sum_{m=1}^{n_a} a^*(m)\, x^*(k-m) + \sum_{m=1}^{n_b} b^*(m)\, y^*(k-m)$

が得られる。(6.31)式は期間kにおける下流地点の計測量$y^*(k)$と予測量$\tilde{y}^*(k)$の差が、$\varepsilon^*(k)$であることを示している。速度調和、交通量及び速度和に関する$\varepsilon^*(k)$の一例を、図6.10に示す。例題6.1で示したよう

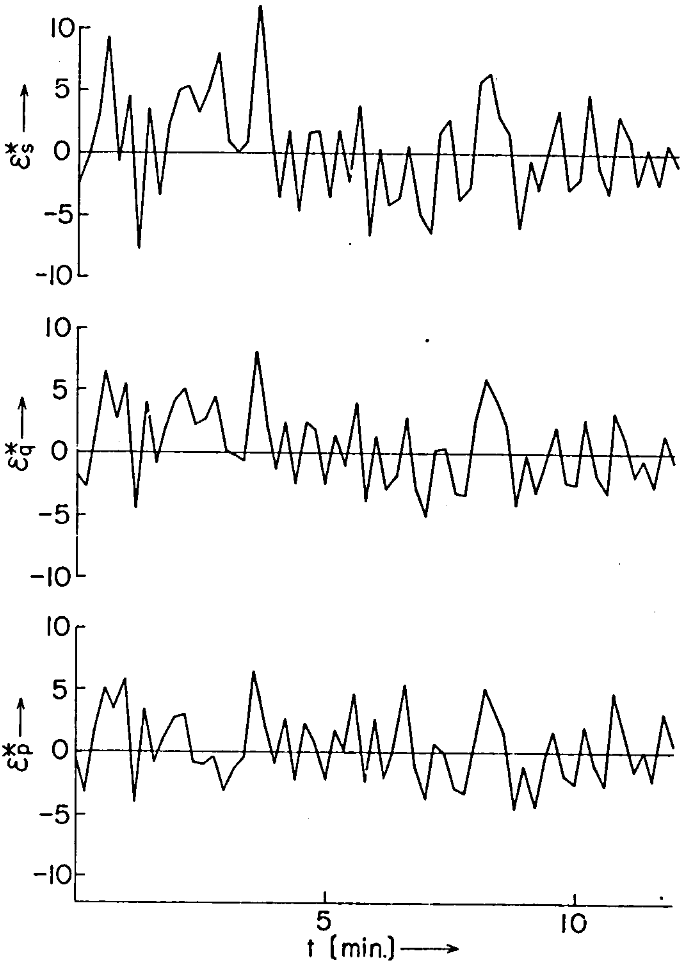

Fig.6.10. Time series of the prediction error by ARMA model.

に、$\varepsilon^*(k)$は速度調和、交通量及び速度和共に平均値零で、或る分散を持つ正規性白色雑音と考えてよい。$\varepsilon^*(k)$に関する上記の性質は、対象とする道路区間の交通状態が正常である限り保存される。しかし、交通事故等の異常

現象が発生すれば、正常状態で当てはめたARMAモデルは適合せず、このため $\bar{\varepsilon}^*(k)$ の性質に変化が生ずるであろう。

従って、当該道路区間に発生する事故の検出は、$\varepsilon^*(k)$ に関するこれらの統計量、すなわち正規白色性及びそれぞれの平均値及び分散等の逐次検定により行うことができる。事故の種類は井上[50)]が衝撃波理論を用いて詳しく分類したように、全閉塞から部分閉塞まで各種のものがあるので、この仮説検定は複合仮説の検定となる。[118)]

ここで正常状態において成立する仮説Hとして

〔仮設H〕 速度調和、交通量及び速度和の予測誤差は、いずれもそれぞれ或る分散 $\sigma^2_{\varepsilon^*}$ を持つ正規性雑音であり、その平均値は零である。

を考えよう。このとき仮説Hを危険率 α で棄てる、すなわち交通状態が異常であると判断するのは、次のようにすればよい。

〔仮説Hの検定〕

時間的に連続した n_c 個の標本を $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \cdots, \varepsilon_{n_c}^*$ とし、

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{1}{n_c}(\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \cdots + \varepsilon_{n_c}^*) \tag{6.32}$$

を計算する。このとき

$$|\bar{\varepsilon}^*| > \varepsilon^{**} \triangleq Z_\alpha \cdot \frac{\sigma_{\varepsilon^*}}{\sqrt{n_c}} \tag{6.33}$$

が成立すれば仮説Hを棄て、異常が発生したと判断する。ここに Z_α は次式で定まる。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Z_\alpha}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^{*2}}{2}\right\} d\varepsilon^* \triangleq \alpha/2 \tag{6.34}$$

例えば Z_α の値は、$Z_{0.01} = 2.576$, $Z_{0.02} = 2.326$ となる。

上記の仮説Hの検定により、異常発生と判断する機構の一例を図6.11に流れ図で示す。図6.11では、第1種の誤り[118)]をさけるための保護機構とし

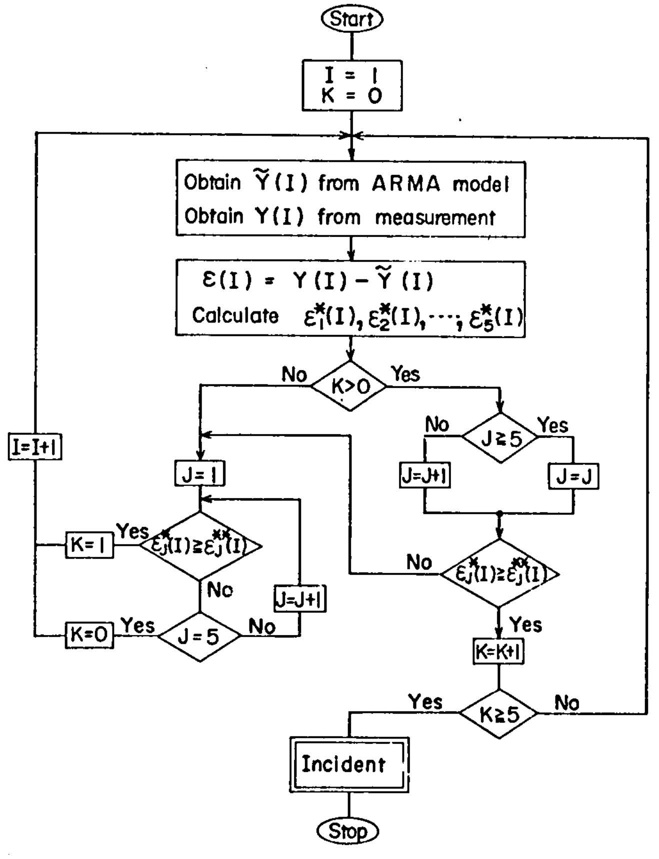

Fig. 6.11. Flow chart of the incident-detection program.

て（6.32）式の n_c を 1, 2, …，5 まで考え、これが連続して 5 回仮説Hを棄却した時に、初めて事故と判断することにしている。正常時における標本 ε_1^*，ε_2^*，…，ε_5^* を、交通量を例として図 6.12 に示す。図 6.12 において、一点鎖線は仮説Hの棄却域を表している。

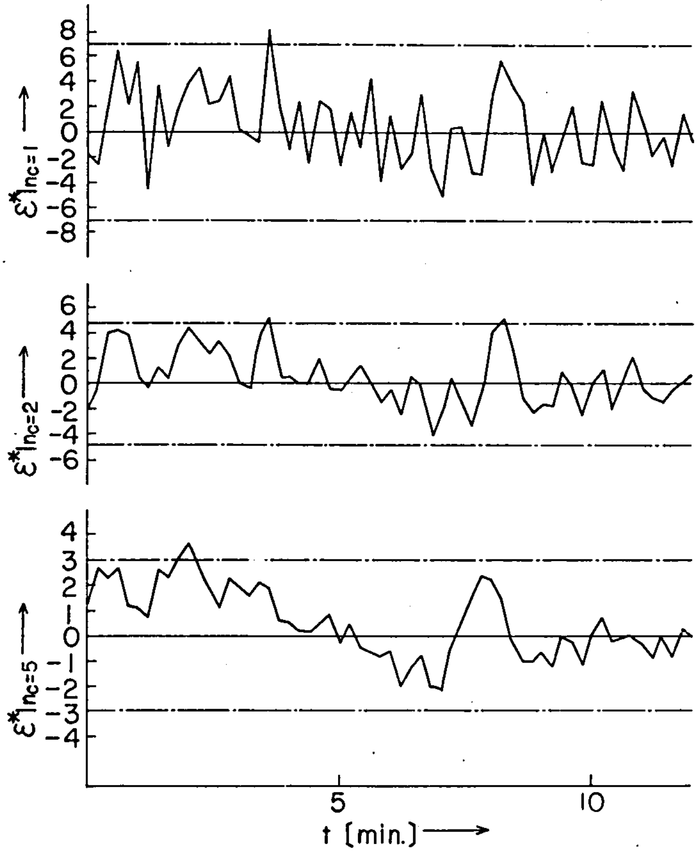

Fig.6.12. Time series of the prediction error for the flow volume by ARMA model in a normal traffic condition.

〔例題 6. 3〕 事故検出の例

例題 6. 1 ， 6. 2 と同じ名神高速道路の 7 時〜 9 時のデータにおいて、機器の故障により、約 3 分間走行車線の交通量を得ることができなかった。この期間を事故に模擬し、ここで提案した事故検出法の有効性を調べよう。

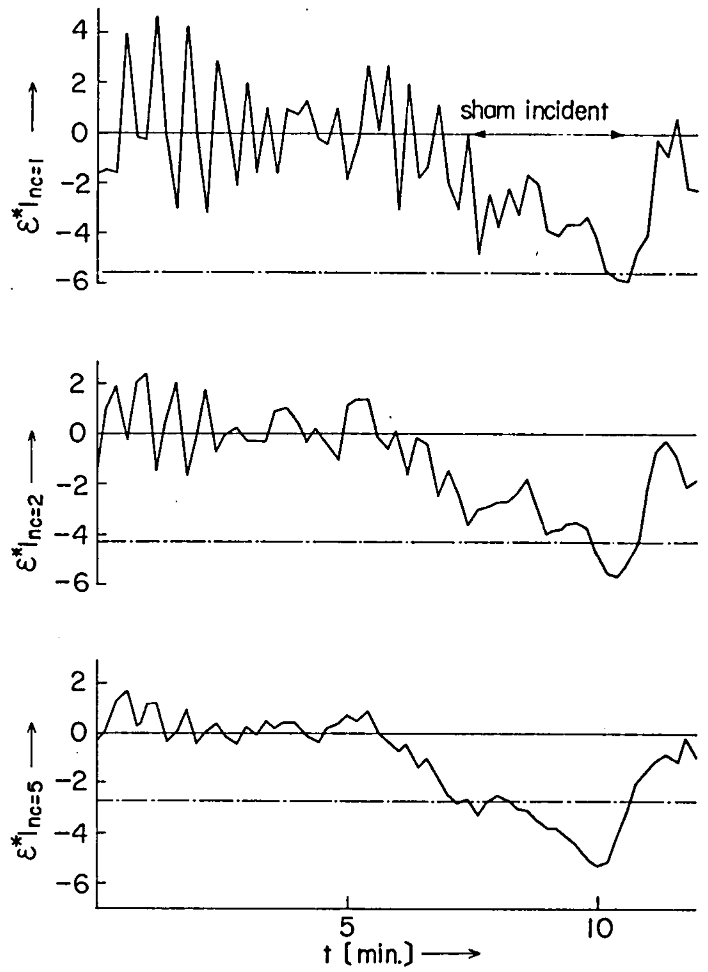

Fig.6.13. Time series of the prediction error for the flow volume by ARMA model in an abnormal traffic condition.

(6.32)式における n_c を 1, 2, ⋯ , 5として $\overline{\varepsilon^*}$ の値を図6.13に示す。図6.13によれば、$n_c \geq 2$ の時かなり明確に事故が判定できることがわかる。図6.11の流れ図で示すアルゴリズムによれば、事故発生後11ステップ、すなわち144秒で事故と判定できる。

ここで述べた事故検出法は予測型であり、検出速度が早い。また、従来の差分法に比較し、理論的に簡潔であり、統計処理と明確な対応を持つものである。しかし、この手法では、事故の内容を明確に推定することは難しい。従って、この手法を前章で述べた、区間の交通状態推定法と組み合わせた事故検出法が、望ましいと考えられる。

6.7　道路トンネル換気制御法への応用

6.7.1　まえがき

道路網の発達に伴い、我国においても関門、恵那山を初めとする幾つかの長大トンネルが供用されつつある。[42,73] 今後更に最短ルートの開拓、用地取得難及び土木技術の向上等により、長大道路トンネルは増加すると思われる。

これらの道路トンネルを運用するには、自動車の排出ガスから運転者及び保守要員の安全を守るため、換気設備が必要となる。2Km以上の長大トンネルでは、通常、トンネル断面の車道空間以外の部分を換気ダクトとして利用する、横流換気方式が用いられることが多い。[13,42,62] 送気及び排気用に設置される換気ファンを駆動する電動機の電力量は小さくないので、有効な運転を行う必要がある。

従来の換気設備では、換気ファンを駆動する電動機として、極数切換型誘導電動機が多く利用されてきた。しかし、この電動機は風量段階が少ない上、風量切換え時間間隔に制限があるので、時間帯ごとの平均交通量に応じて換気風量を定めるプログラム制御以外に、良い方法がなかった。[19,126] しかし、この制御法は短期的な交通量の変動に対して応答することができず、換気風

量の過不足を生ずる欠点がある。

しかるに最近、無段変速のサイリスタ電動機の大容量化が進み、換気ファンの駆動用電動機として利用され始めた。[121] 本節では、このサイリスタ電動機を用いた新しい換気設備の制御法として、予測レギュレータ法を提案する。[122] この方法で必要な交通量予測には、6.4節で述べたARMAモデルが利用される。この制御法の有効性は、中央高速道路恵那山トンネルを対象として、シミュレーション及び実地試験で確かめられる。

6.7.2　トンネル換気モデル

長大トンネルで用いられる横流換気方式では、送気及び排気が車の流れと直角の方向で行われる。この方式では自然風や自動車のピストン作用等によるトンネル内の縦方向（車の流れと同一方向）の空気の流れは、横方向の空気の流れに比較し、ほとんど無視できるといわれている。以下では横流方式を前提として議論を進めるので、縦方向の空気の流れを無視する。

長大トンネルは、通常図6.14に模式的に示されるような、幾つかの独立な換気区間に分割される。図6.14における変数は次のようになる。

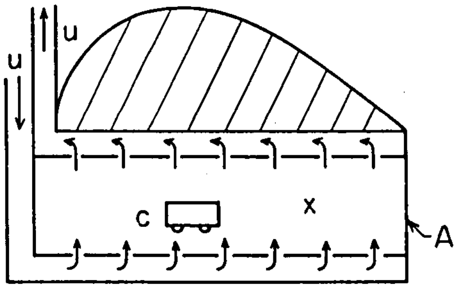

Fig.6.14. Schematic diagram of the tunnel ventilation system.

x：　換気区間の汚染濃度

A：　換気区間の容積

u'： 単位時間当りの換気風量

c'： 単位時間当りの発生汚染量

換気風量u'及び発生汚染量c'が時間間隔$\triangle t$（以下では換気周期と呼ぶ）において一定とし、時刻$k(t=t_k)$におけるx、期間k（$t_k \leqq t \leqq t_k + \triangle t$）におけるc及びuを、次のように表す。

$$x(k) \triangleq x(t_k)$$
$$c(k) \triangleq c'\triangle t / A \quad , \quad u(k) \triangleq u'\triangle t / A \tag{6.35}$$

上記の変数を用いれば、横流換気方式の離散型モデルは次式で表される。[121,122]

$$x(k+1)=\exp(-u(k))x(k)+(1-\exp(-u(k)))\,c(k)/u(k) \tag{6.36}$$

(6.36) 式より、換気周期$\triangle t$が小さいときには第1項、すなわち時刻kの汚染濃度 $x(k)$が時刻 $k+1$の汚染濃度 $x(k+1)$をほぼ決定するが、$\triangle t$が大きくなるにつれて第1項の影響は小さくなり、それに代って第2項、すなわち期間kの発生汚染量$c(k)$及び換気風量$u(k)$が $x(k+1)$ を決定するようになる。

さて、交通量の時間変化特性は、日を週日と休日に分類すれば、それぞれに特有のパターンを示すことが知られている。従って、30分～1時間における交通量及びそれに基づく発生汚染量は、予め粗い精度で得ることができる。これを基準発生汚染量 c^*とし、このc^*に対し基準汚染濃度x^*を保つ基準換気風量を u^*とする。(6.36)式を用いれば、これらの量の間に次の関係があることがわかる。

$$u^* = c^* / x^* \tag{6.37}$$

ここで、現実の汚染濃度$x(k)$、発生汚染量$c(k)$及び換気風量$u(k)$とこれら基準値との変分を次のように定める。

$$\triangle x(k) \triangleq (x(k) - x^*)/x^*$$
$$\triangle c(k) \triangleq (c(k) - c^*)/c^* \qquad (6.38)$$
$$\triangle u(k) \triangleq (u(k) - u^*)/u^*$$

(6.38) 式を (6.36) 式に代入して変分の2次以上の項を無視すれば、基準量のまわりで線形化された次のシステム方程式を得る。

$$\triangle x(k+1) = \exp(-u^*)\triangle x(k) + (1 - \exp(-u^*))(\triangle c(k) - \triangle u(k)) \qquad (6.39)$$

(6.39) 式において $\triangle x(k)$ は状態変数、$\triangle u(k)$ は制御変数、$\triangle c(k)$ は入力変数と考えることができる。

ここで、期間 k における発生汚染量 $\triangle c(k)$ が 0 の場合、時刻 k の基準汚染濃度からの変分 $\triangle x(k)$ を時刻 k+1 で 0 にするのに必要な換気風量の変分 $\triangle u(k)$ は

$$\triangle u(k) = \frac{\exp(-u^*)}{1 - \exp(-u^*)}\triangle x(k) \qquad (6.40)$$

となる。

また、時刻 k における $\triangle x(k)$ が 0 の場合、期間 k における発生汚染量 $\triangle c(k)$ にかかわらず、時刻 k+1 での $\triangle x(k+1)$ を 0 にするのに必要な換気風量の変分 $\triangle u(k)$ は

$$\triangle u(k) = \triangle c(k) \qquad (6.41)$$

となる。

6.7.3 トンネル換気制御法

従来、道路トンネルの換気ファンの駆動には、極数変換型の誘導電動機が広く用いられてきた。この種の電動機は、風量の切換えを頻繁に行うことができなく、通常1〜数時間風量を一定として運転される。このためトンネル

内の汚染濃度は、その時間内の発生汚染量の変動に応答することができず、かなり変動が大きかった。このような換気方式は、利用者に対するサービスに不公平を生ずるばかりでなく、最も発生汚染量の大きい場合に汚染濃度の基準を満たさねばならないため、平均的に換気風量が過剰となる欠点があった。

これに対し、最近、換気ファンの駆動に使用され始めた無段変速のサイリスタ電動機は、風量の切換えを自由に行うことができる。このため、発生汚染量に応じて換気風量を変化させ、汚染濃度の一定保持の可能性がでてきた。しかるに、発生汚染量の正確な予測は、現在不可能であること及び電力量が換気風量の3乗にほぼ比例するため、あまり頻繁な換気風量の変化は電力量の増加をもたらすこと等の理由から、必ずしも汚染濃度を一定に保つ換気制御が望ましいとはいえない。

ここでは、実用的な換気制御法として、汚染濃度を一定に保ちつつ、極端な換気風量の変化をさけることを考えよう。このような制御を行うため(6.39)式のシステムの $\triangle u(k)$ を決定する目的関数として、換気風量及び汚染濃度の基準値との残差の2乗和

$$J = \sum_{k=1}^{n_s-1} \left(F_x \triangle x^2(k+1) + F_u \triangle u^2(k) \right) \qquad (6.42)$$

を考えよう。(6.42)式において n_s はステップ数、F_x, F_u は荷重係数である。ここで荷重係数 F_u を0とすれば、トンネル内汚染濃度一定の制御となり、逆に F_x を0とすれば換気風量一定の制御となる。

さて、(6.39)式をシステム方程式とし、(6.42)式で表される目的関数を最小にする換気風量を、最適換気風量 $\triangle u^0(k)$ と呼び、これを求めることを考える。(6.39)式が線形システムであり、(6.42)式の目的関数Jが2次形式であるから、この問題は、最適レギュレータ問題となり、[117] 最適換気風量変分 $\triangle u^0(k)$ は、汚染濃度変分 $\triangle x(k)$ 及び発生汚染量変分 $\triangle c(k)$ の

線形関数として、

$$\triangle u^0(k)=G_X(k)\triangle x(k)+G_c(k)\triangle C(k) \tag{6.43}$$

ただし

$$G_X(k)\triangleq \exp(-u^*)(1-\exp(-u^*))H(k+1)/\{F_u+(1-\exp(-u^*))^2 H(k+1)\}$$

$$G_c(k)\triangleq (1-\exp(-u^*))^2 H(k+1)/\{F_u+(1-\exp(-u^*))^2 H(k+1)\} \tag{6.44}$$

となる。なお、(6.44)式における $H(k)$ は、次の Ricatti 方程式を逆時間で解くことにより得ることができる。

$$H(k)=F_X+(\exp(-u^*))^2 H(k+1)\left[1-(1-\exp(-u^*))^2 H(k+1)\Big/\left\{F_u+(1-\exp(-u^*))^2 H(R+1)\right\}\right] \tag{6.45}$$

ただし　　$H(n_S)=F_X$

(6.43)式で定まる $\triangle u^0(k)$ と基準換気風量 u^* の和として、換気風量 $u(k)$ が求められる。すなわち、この制御法は基準換気風量を基盤にして、汚染濃度 $x(k)$ 及び発生汚染量 $c(k)$ に基づく修正換気風量 $\triangle u^0(k)$ を付加したものと考えることができる。この制御システムのブロック図を図6.15に示す。

(6.43)式のフィードバック・ゲイン $G_X(k)$, $G_c(k)$ は F_X 及び F_u が定まれば、(6.44)及び(6.45)式より求めることができる。以下では、これらのフィードバック・ゲインの実用的な算出法について述べる。(6.45)式において右辺第2項が右辺第1項に比較し十分小さいとすれば、$H(k)\cong F_X$ ($k=1,2,\cdots,n_S$) と近似できる。このとき(6.44)式の $G_X(k)$ 及び $G_c(k)$

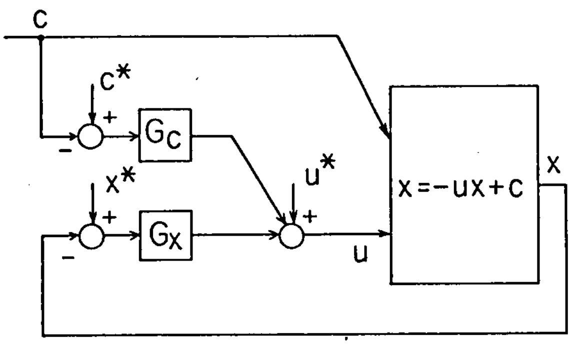

Fig. 6.15. Block diagram of the ventilation control system.

はkにかかわらない定数となり次式で表される。

$$G_X(k) \cong G_X \triangleq \exp(-u^*)(1-\exp(-u^*)) / \{\chi+(1-\exp(-u^*))^2\}$$

$$G_C(k) \cong G_C \triangleq (1-\exp(-u^*))^2 / \{\chi+(1-\exp(-u^*))^2\} \qquad (6.46)$$

(6.46)式において $\chi \triangleq F_u / F_X$ は荷重比を表すパラメータである。すなわち、χが0に近いときは基準汚染濃度の保持に重点があり、χが大きいときは基準換気風量の保持に重点がある。ここで荷重比χとu^* の関係について調べよう。

いま、χをu^* の関数として

$$\chi = \alpha\,(1-\exp(-u^*))^2 \qquad (6.47)$$

と置く。ここにαは〔0，∞）の値をとる係数とする。通常αは1以下の十分小さい値をとるので、(6.45)式の右辺第2項は第1項に比較して十分小さくなる。(6.47)式を(6.46)式に代入すれば、

$$G_X = \frac{1}{1+\alpha} \times \frac{\exp(-u^*)}{1-\exp(-u^*)}, \quad G_C = \frac{1}{1+\alpha} \qquad (6.48)$$

となる。

(6.48)式を(6.43)式に代入すれば、準最適換気風量変分$\triangle\tilde{u}^0(k)$は次のようになる。

$$\triangle\tilde{u}^0(k)=\frac{1}{1+\alpha}\left\{\frac{\exp(-u^*)}{1-\exp(-u^*)}\triangle x(k)+\triangle c(k)\right\} \tag{6.49}$$

(6.49)式を(6.40)及び(6.41)式と比較すれば、$\alpha=0$のときに(6.49)式は(6.40)及び(6.41)式の和と等しくなり、基準汚染濃度一定制御となること、$\alpha=\infty$のときに$\triangle u^0(k)=0$となり、換気風量一定制御となることがわかる。以上の説明よりχを(6.47)式のように選ぶことは妥当であることがわかる。

なお(6.47)式のαは、安全性と経済性の観点より適正に定める必要がある。いま、αを1とし、(6.47)及び(6.48)式より定まるχ, G_x及びG_cをu^*の関数として示せば図6.16のようになる。

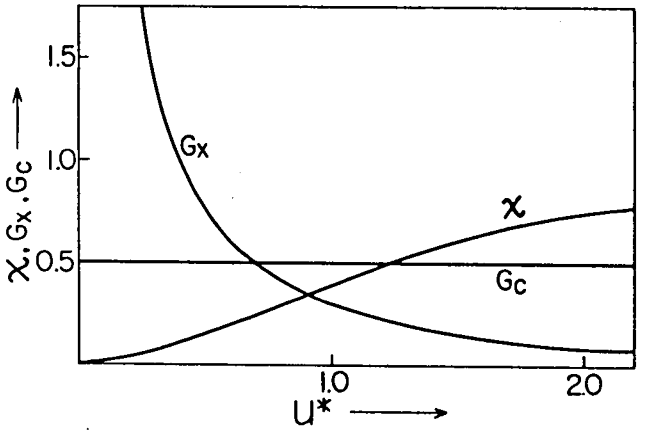

Fig.6.16.Variation of χ, Gx and Gc with u*.

6.7.4　発生汚染量の予測

自動車の排出ガス中には、CO、煤煙、NOx、SO_2等の有害物質が含まれる。このうちトンネルでは、COと煤煙が問題になるといわれている。[13,42,62]
以下では簡単のためCOを例として考えよう。

COは人体に有害であり、その濃度xを基準値（通常50〜150 ppmといわれる）以下に保たねばならない。COは主にガソリン車から排出され、その排出量は通常速度（40 Km／h以上）ではほとんど車速に無関係であるといわれている。[91] 従って、全車種の交通量をq、ディーゼル車の混入率をζとすれば、COの発生量の期待値E（c′）は道路の標高及び勾配により補正され、次式で表される。

$$E(c') = a_h \cdot a_g \cdot c^+ \cdot \triangle x \cdot (1-\zeta) \cdot q \qquad (6.50)$$

ただし　a_h ：標高補正係数

a_g ：勾配補正係数

c^+ ：1台当りの平均発生汚染量

$\triangle x$ ：換気区間長

（6.50）式より明らかなように、発生汚染量の予測は交通量の予測に帰着された。交通量の予測手法として、6.4節で述べたARMAモデルまたは、より簡単なMAモデルを利用することができる。MAモデルを用いれば、下流地点の交通量$q_2^*(k)$は、上流地点の交通量$q_1^*(k)$及びインパルス応答関数$a^*(m)$を用いて、（6.28）式より次のように書ける。

$$q_2^*(k) = \sum_{m=1}^{n_a} a^*(m)\, q_1^*(k-m) + \varepsilon^*(k) \qquad (6.51)$$

予測時間が10秒〜1分の場合におけるこの予測手法の有効性は、例題6.2で確かめられている。更に、予測時間を10分程度とする場合の有効性の確認をするため、中央高速道路下り車線、八王子インターチェンジと小仏トンネル入口の12.6 Km区間で実測を行った。

（6.26）及び（6.27）式において、$\triangle t$を30秒、n_cを1〜20とする。$n_c=20$、すなわち10分間交通量のインパルス応答関数$a^*(m)$を図6.17に示す。図6.17より、この区間の旅行時間は7.5〜14分であり、その平

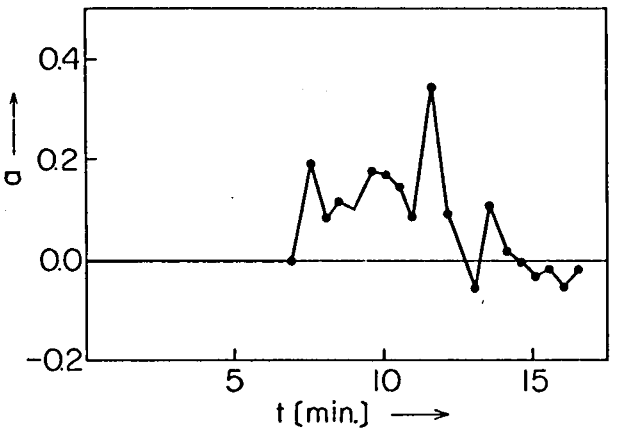

Fig.6.17. Response of the flow volume at the tunnel entrance for impulsive input at a point of the upper stream.

均は約10分であることがわかる。

さて、予測の精度を(6.30)式で定まるパーセントエラーP_eを用いて表し、n_cを1～20と変化させてこれを求めれば、図6.18のようになる。

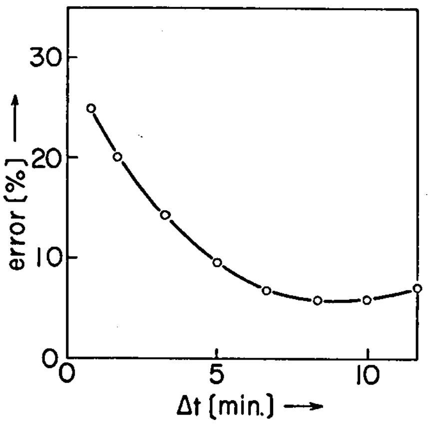

Fig.6.18. Variation of the prediction error with the prediction period.

すなわち、この区間では約10分程度の予測が最も精度が良く、パーセントエラーが5%以下になることがわかる。

6. 7. 5　シミュレーション及び実地試験による検討

6. 7. 3 節で述べた予測レギュレータ制御方式の機能を確認するため、中央高速道路の恵那山トンネル（全長約 8. 5 Km）の一つの換気区間（1 Km）を、例として考察しよう。この例の諸条件を表 6. 1 に示す。このとき与えられた

Table 6. 1.　Conditions of simulation

length of tunnel	1000	〔m〕
gradient	1.65	〔%〕
altitude	657	〔m〕
section area	43.4	〔m²〕
lane of road	2	
traffic direction	2	
flow volume on up lane	618	〔veh.／h〕
flow volume on down lane	360	〔veh.／h〕
mixed rate of diesel engine	22.1	〔%〕
average speed	70.0	〔Km／h〕
exhausted gas		
CO, average	33.4	〔ℓ／Km〕
standard deviation	0.0	〔ℓ／Km〕
Smoke, average	3.3	〔m³／Km〕
standard deviation	2.8	〔m³／Km〕

交通量に対し、汚染指標 x を一定に保つのに必要な換気風量 u′ は、表 6. 1 と (6.37) 及び (6.50) 式より図 6. 1 9 のように得られる。

まず、この制御法の有効性をシミュレーションで確かめよう。ここで用いるシミュレータは、次に示すような交通シミュレータと換気シミュレータより構成されている。

交通シミュレータは、自動車を個別に動かすミクロシミュレータである。これは道路上への自動車の初期配置、上流点での自動車発生、自動車の走行

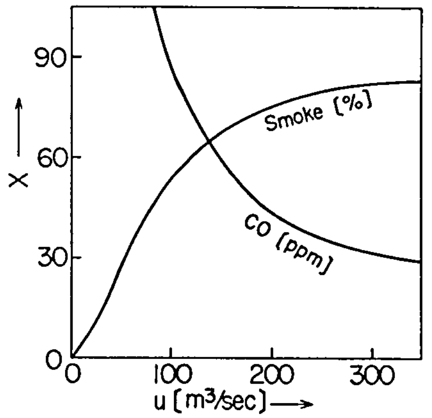

Fig.6.19. Variation of the pollution concentration and the ventilation volume.

及び排出ガス発生の各サブプログラムから成る。自動車の発生は、車頭時間間隔を指数乱数で与えて行う。自動車の走行は簡単のため(5.23)式に示したGreenshields の追従モデルを利用した。排出ガス発生は表6.1に示す平均値と分散を持つ正規乱数で与える。このシミュレータは時間間隔を0.2秒として動かす。

換気シミュレータは、対象とする換気区間を更に100m間隔のブロックに細分割し、各ブロックごとに(6.36)式の換気モデルを作成した。交通シミュレータから得られる発生汚染量c(k)と、予測レギュレータ制御で得らる換気風量u(k)を用いれば、(6.36)式より各ブロックごとに逐次汚染濃度x(k+1)が求まる。このシミュレータは時間間隔を10秒として動かす。

このシミュレータを使って予測レギュレータ制御の運転を試みよう。ここで用いた予測レギュレータの設定条件は、表6.1による。ここで、予測レギュレータのゲインを決定する荷重比χを(6.47)式とし、パラメータαを1とする。

交通シミュレータで発生した1時間交通量は978台/hであり、ディーゼル車混入率は22.1%である。基準汚染濃度をCOで75ppmとし、換気周期

△t を60，10及び1分としたときのシミュレーション結果を図6.20に示す。図6.20より△tを1分とすれば汚染濃度はほぼ一定となるが、換気風

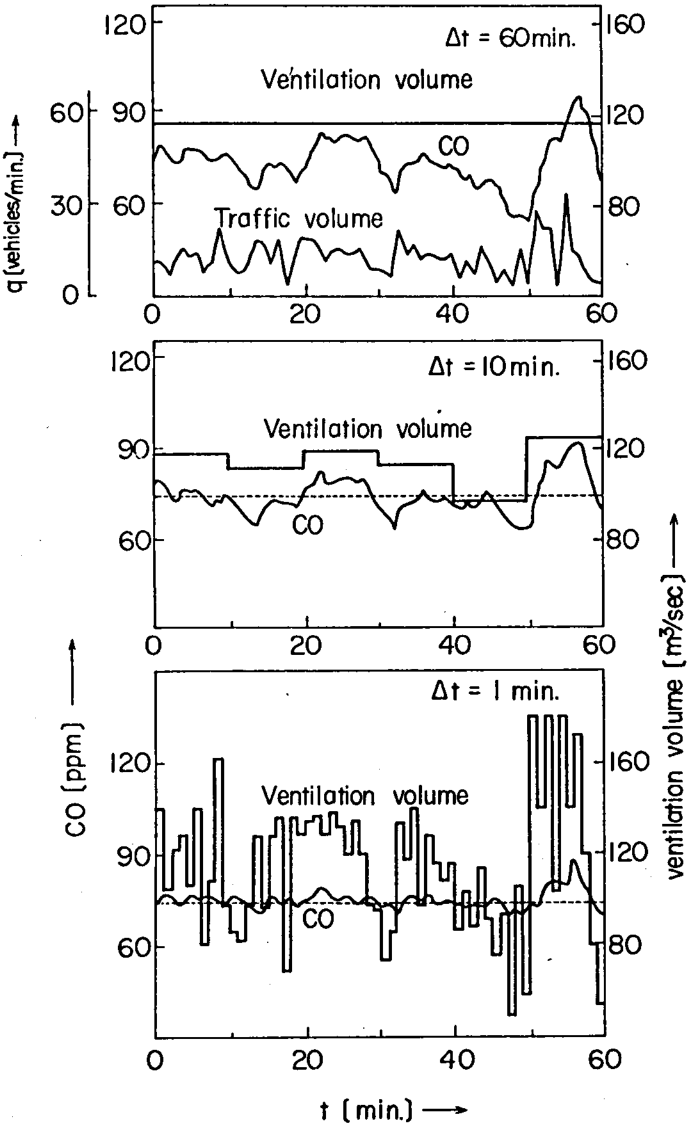

Fig. 6.20. Simulation results of tunnel ventilation by the proposed method.

量は大きく変化する。一方、△tを60分とすれば、汚染濃度がかなり変化することがわかる。

この関係を環境の質と電力量の点より見よう。△tを短くすれば汚染濃度の分散は減少するが、逆に換気風量が発生汚染量すなわち交通量に応じて変化することになり、換気風量－電力量の非線形特性（通常２～３乗に比例）により電力量は大きくなる。一方、換気周期△tを長くすれば汚染濃度は発生汚染量に応じて変化し、その分散が大きくなる。シミュレーションによりこの関係の一例を求めれば、図6.２１のようになる。図6.２１の例では換気

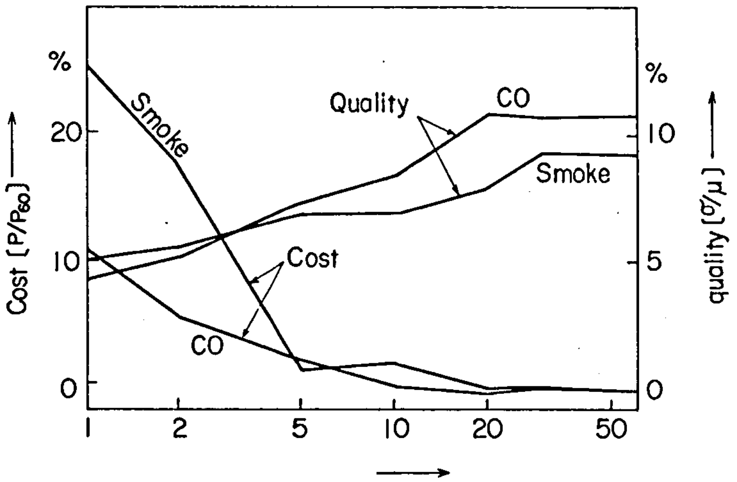

Fig.6.21. Variation of ventilation cost and air quality with the ventilation period.

周期△tが５～１０分以上では６０分の場合と電力量はほぼ等しく、汚染濃度の分散は６０分の場合に比べ ⅔ 程度に減少する。更に△tを短くすると汚染濃度の分散は更に減少するが電力量が増加することがわかる。

次に、ここで述べた手法を恵那山トンネルの実際の換気制御システムに適用し、その有効性を確かめる。その一例を図6.２２に示す。この例では基準CO 濃度を４５ppm 、換気周期を１０分、αを 1.0とした。このαは、若干の実験の結果得られた現時点での暫定的な値であり、今後更に十分な検討が必要である。一方同時刻に別の換気区間において、一定換気風量運転を行った

結果を図6.2 3に示す。図6.2 2と図6.2 3を比較すれば、ここで述べた手法は交通量の変動にかかわらず、汚染濃度を一定に保ちうることが確認された。

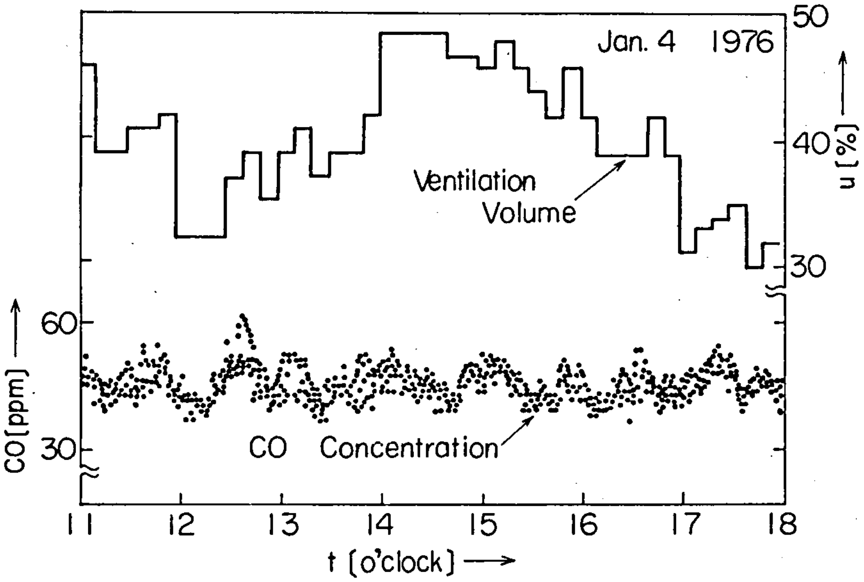

Fig.6.22. Field experiment by the proposed method.

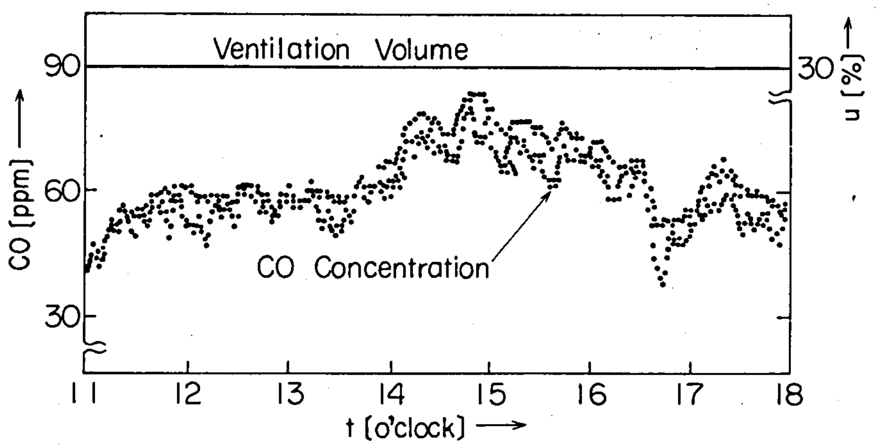

Fig.6.23. Field experiment by constant ventilation method.

6.7.6 むすび

本節では、長大道路トンネルにおける換気制御方式について考察した。まず、長大トンネルにおいて用いられる、横流換気方式の換気モデルを確立した。次に換気ファンの駆動に無段変速サイリスタ電動機を利用した場合の新しい換気制御方式として、予測レギュレータ制御方式を提案した。この制御方式に必要な交通量の予測法としては、MAモデルを利用した。この換気制御方式については、中央高速道路恵那山トンネルの1換気区間を対象として、シミュレーション並びに実地試験を行った結果、良好な制御性能が示された。

6.8 結　　言

本章では、高速道路交通流のデータを解析することにより、交通流をARMAモデルで表すことを試みた。ここで扱ったデータは速度調和、交通量及び速度和であるが、これらはいずれもよくARMAモデルにあてはまることが明らかとなった。更に、ARMAモデルで説明できない部分は、ほぼ正規性白色雑音とみなすことができることを実測データより確かめた。

ARMAモデルを用いれば、下流点での交通流の予則が可能であることを示した。この予測手法を応用した高速道路における事故検出法及びトンネル換気制御法を新しく提案し、その有効性を、実際のデータを用いて示した。

第7章　結　　　論

以上本論文は、交通流の配分及び制御に関する幾つかの考察をまとめたものである。得られた主な結論を章ごとにまとめれば、次のようになる。

第2章では、交通流配分問題についてグラフ理論的に考察し、それに基づいて基礎方程式を簡潔な行列形式で表現した。この方程式の次数は、新しく定義した多種流網の木枝又は補木枝の数に等しく、従来のものに比較して著しく減少した。この基礎方程式求解とI.A.法及びWayne法を組み合わせた新しいアルゴリズムを提案し、その有効性を確かめた。更に、交通流が多階層となった場合についても考察し、枝特性を適当な形に表現することにより一階層に変換できることを示した。

第3章では、交通流配分問題の実用化に関する考察を行った。交通流網が大規模になった場合には、行列のスパース性を利用した記憶領域の縮小、Choleski 法を用いた代数方程式の高速求解及び繰返し計算の簡略化等が可能になる事を示した。また、枝特性が非線形の場合には、基礎方程式の求解に区間線形写像法及びNewton–Raphson法を用いることを提案した。これらの方法でヤコビ行列は簡潔に表され、計算が著しく簡単となった。更にこれらの手法をプログラム化し、一般的な交通流配分問題を解いて、その有効性を示した。

第4章では、交通流配分理論を交通計画及び制御に応用することを考えた。簡潔に表された需要特性を交通流配分の基礎方程式と組み合わせ、交通分布及び交通流配分の2つの段階を統一した需要・供給の基礎方程式を導き、この求解アルゴリズムを提示した。更に交通需要の抑制法として、流入制限法と通行料金法を区別して示し、目的関数を仕事量として数学的に定式化して、求解アルゴリズムを示した。

第5章では、道路交通流の状態モデルと状態推定への応用について考察し

た。そして、交通密度と新しく定義された交通運動量及び交通エネルギーを状態変数とすることを提案した。これらの量と一定地点で計測される速度調和、交通量及び速度和は、互いにその期待値が等しいことを示した。新しい状態変数を用いた状態モデルは、高速道路及び平面街路の状態推定に利用できることを、実データで示した。これらの推定手法は従来の手法に比較し、精度、安全性及び計算量の点で優れたものである。

第6章では、道路交通流の統計モデルとその予測への応用について考察した。すなわち、高速道路区間の両端点における速度調和、交通量及び速度和の時系列データを解析し、これをARMAモデルで表すことを試みた。このモデルを用いれば短期間の予測が可能であることを実測データにより示し、更にこの予測法を用いて事故検出及びトンネル換気制御へ応用した。

今後に残された問題(特に本研究に関連したもの)としては、多種流網のグラフ理論体系の確立、交通流配分問題の動的理論への拡張、道路交通流モデルの同定問題及び道路交通流モデルの交通管制への応用等がある。

参　考　文　献

1. 赤池弘次，中川東一郎："ダイナミックシステムの統計的解析と制御"，
サイエンス社，　pp.36–40　(1972).
2. H.Akaike："A new look at the statistical model identification",
IEEE Trans., AC19, pp.716–723 (1974).
3. M.J.Beckman, C.B.McGuire and C.B.Winsten："Studies in the economics of transportation",
Yale Univ. Press, New Haven, pp.59–79 (1956).
4. J.M.Bennet："Triangular factors of modified matrices",
Numerishe Mathematik, 7, pp.217–221 (1965).
5. E.Bodewig："Matrix calculus",
North-Holland Pub. Com., Amsterdam, pp.215–222 (1959).
6. F.H.Branin,Jr. and H.H.Wang："A fast reliable iteration method for dc analysis of nonlinear networks",
Proceedings of the IEEE, 55–11, pp.1819–1826 (1967).
7. R.E.Chandler, R.Herman and E.W.Montroll："Traffic dynamics; studies in car following",
Ops. Res., 6, pp.165–184 (1958).
8. S.C.Dafermos and F.T.Sparrow："The traffic assignment problem for a general network",
J. of Res. of NBS, 73B, pp.91–118 (1969).
9. S.C.Dafermos："An extended traffic assignment model with applications to two-way traffic",
Trans. Sci., 5–4, pp.366–389 (1971).

10. S.C.Dafermos : "The traffic assignment problem for multiclass-user transportation networks",
Trans. Sci., 6-1, pp.73-87 (1972).

11. S.C.Dafermos : "Toll patterns for multiclass-user transportation networks",
Trans. Sci., 8-4, pp.321-332 (1974).

12. E.W.Dijkstra : "A note on two problems in connection with graphs",
Numerishe Mathematik, 1, pp.269-271 (1959).

13. 土木学会編 : "土木工学ハンドブック",
技報堂, pp.1382-1384 (1974).

14. L.C.Edie : "Car following and steady state theory for noncongested traffic",
Ops. Res., 9, pp.66-76 (1961).

15. C.M.Elmberg : "The Gotheburg traffic restraint scheme",
Transportation, 1-1, pp.1-27 (1971).

16. S.P.Evans : "Derivation and analysis of some models for combining trip distribution and assignment",
Transpn. Res., 10, pp.37-57 (1976).

17. M.Florian and S.Nguyen : "A method for computing network equilibrium with elastic demands",
Trans. Sci., 8-4, pp.321-332 (1974).

18. M.Florian, S.Nguyen and J.Ferland : "On the combined distribution-assignment of traffic",
Trans. Sci., 9-1, pp.43-53 (1975).

19. R.S.Foote : "Research for optimal ventilation at the

Holland and Lincoln tunnel",
International Symp. on the AVVT, B3, pp. 33–54 (1973).

20. T.Fujisawa and E.S.Kuh : "Piecewise linear theory of nonlinear networks",
S IAM.J.Appl. Math., 22, pp. 307–328 (1972).

21. T.Fujisawa, E.S.Kuh and T.Ohtsuki : "A sparse matrix method for analysis of piecewise-linear resistive networks",
IEEE Trans., CT–19–6, pp. 571–584 (1972).

22. D.C.Gazis : "Traffic Science",
Wiley-Interscience, pp. 86–103 (1974).

23. D.C.Gazis and R.S.Foote : "Surveillance and control of tunnel traffic by an on-line digital computer",
Trans. Sci., 3–3, pp. 255–275 (1969).

24. D.C.Gazis and C.H.Knapp : "On-line estimation of traffic densities from time-series of flow and speed data",
Trans. Sci., 5–3, pp. 283–301 (1971).

25. D.Ghahraman, A.K.C.Wong and T.Au : "Perturbation of a multimodal network model for urban transportation planning",
IEEE Trans., SMC–4–3, pp. 241–248 (1974).

26. T.F.Golob and M.J.Beckman : "A utility model for travel forcasting",
Trans. Sci., 5–1, pp. 79–90 (1971).

27. H.Greenberg : "An analysis of traffic flow", Ops. Res., 7, pp. 79–85 (1959).

28. B.D.Greenshields : "A study of traffic capacity", Highway Res. Proc., 14, pp. 448–474 (1934).

29. M.S.Grewal and H.J.Payne : "Identification of parameters in a freeway traffic model", IEEE Trans., SMC–6–3, pp. 176–185 (1976).

30. F.A.Haight : "Mathematical theories of traffic flow", Academic Press, pp. 114–117 (1963).

31. 浜田喬："道路網における交通流の最適配分", 東大生研電気談話会報告, 20–8 (1970).

32. 浜田喬，藤田一彦："道路網における交通流流入制限の一方式", 東大生研電気談話会報告, 22–15 (1972).

33. 半田哲，中堀一郎："等時間原則による多車種径路配分", 交通工学, 9–3, pp. 23–29 (1974).

34. 長谷川利治："道路交通制御機器の現状と将来", 制御工学, 14–2, pp. 71–82 (1970).

35. T.Hasegawa : "Traffic control system on the Hanshin expressway", Computer, 5–6, pp. 21–26 (1972).

36. 服部嘉雄，小澤孝夫："グラフ理論解説", 昭晃堂, pp. 109–174 (1974).

37. R.Herman and T.Lam : On the mean speed in the Boltzmann-like traffic theory; Analytical derivation", Trans. Sci., 5–3, pp. 314–327 (1971).

38. R.Herman and T.Lam : "On the mean speed in the

Boltzmann-like traffic theory ; A numerical method",
Trans. Sci., 5−4, pp. 418–429 (1971).
39. 肥田金三："自動車の流れ",
日本物理学会誌， 23−11, pp. 868–873 (1968).
40. F.B.Hildebrand："Introduction to numerical analysis",
McGraw-Hill, pp. 424–477 (1956).
41. I.B.M："IBM application programm ; Science subroutine package",
I.B.M., pp. 121–124 (1966).
42. 伊吹山四郎："道路トンネルの換気",
理工図書， pp. 45–57 (1962).
43. 伊吹山四郎編著："道路交通工学",
金原出版， pp. 54–59 (1964).
44. 市江孝道：分割法による連立代数方程式の解法",
京都大学工学部電気工学科 特別研究報告書， (1973).
45. 飯田恭敬："パスフローを用いた等時間原則による交通量配分",
土木学会論文報告集， 168, pp. 45–57 (1969).
46. 飯田恭敬，井上博司，魚住隆彰："カット法による交通量配分",
土木学会論文報告集， 196, pp. 95–103 (1971).
47. 飯田恭敬："道路網交通流に関する基礎的研究",
京都大学博士論文， (1972).
48. 猪瀬博，浜田喬："道路交通管制",
産業図書， pp. 10–12 (1972).
49. 井上博司："非線形走行時間関数を用いた交通量配分",
昭和46年度土木学会関西支部年次学術講演概要 (1971).
50. 井上矩之："都市間高速道路の交通制御に関する基礎的研究",

京都大学博士論文， (1973).

51. 伊理正夫，他：“新手法による高速道路交通量の推計”，
日本オペレーションズ リサーチ学会，**T-73**-2, pp. 14-52 (1973).

52. L.Isaksen and H.J.Payne : "Freeway traffic surveillance and control",
Proceedings of the IEEE, **61**-5, pp. 526-536 (1973).

53. L.Isaksen and H.J.Payne : "Suboptimal control of linear systems by augmentation with application to freeway traffic regulation",
IEEE. Trans., **AC-18**-3, pp. 210-219 (1973).

54. 石井威望，井口雅一，越正毅：“新しい都市内交通システム；CVS計画について”，
電気学会雑誌， **91**, pp. 2211-2214 (1971).

55. R.Kahn : "Interim report on incident detection logics for the Los Angeles freeway surveillance and control project",
Cal. Trans. Agency, Sept, (1972).

56. J.Katzenelson : "An algorithm for solving nonlinear resistor networks",
B.S.T.J., **44**, pp. 1605-1620 (1965).

57. A.Kaya : "Computer and optimization techniques for efficient utilization of urban freeway systems",
IFAC Conference, Paris, 12.1, pp. 1-8 (1971).

58. C.H.Knapp : "Traffic density estimation for single and multilane traffic",
Trans. Sci., **7**-1, pp. 75-84 (1973).

59. 米谷栄二，佐佐木綱，他：“大阪都心部広域交通制御調査報告書”，
都心部広域制御システム委員会， pp. 74–79 (1972).

60. 米谷栄二，明神証：“都市高速道路における短時間交通量の予測”，
交通工学， 8–5， pp. 3–13 (1974).

61. 越正毅，他：“交通管制システムの設計条件検討及びプログラム開発研究”，
交通工学研究会， pp. 13–18 (1972).

62. 交通工学研究会編：“交通工学ハンドブック”，
技報堂， pp. 539–553 (1973).

63. J.B.Kreer : “A comparison of predictor algorithms for computerized traffic control systems”,
Traffic Erg., 45–4, pp. 51–56 (1975).

64. L.S.Lasdon : “Optimization theory for large systems”,
The Macmillan Company, pp. 20–40 (1970).

65. L.J.LeBlanc, E.K.Morlok and W.P.Pierskalla : “An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem”,
Transpn. Res., 9, pp. 309–318 (1975).

66. T.Leventhal, G.Nemhauser and L.Trotter, Jr.: “Traffic assignment computer program II”,
DT–FHA Report, 25 (1971).

67. T.Leventhal, G.Nemhauser and L.Trotter, Jr. : “A column generation algorithm for optimal traffic assignment”,
Trans. Sci., 7–2, pp. 168–176 (1973).

68. M.J.Lighthill and G.B.Whitham : “A theory of traffic flow on long crowded roads”,

Proc. Roy. Soc., A229, pp. 317–345 (1955).

69. M.L.Manheim : "Search and choice in transport analysis",
H.R.B. Record, 293, pp. 54–82 (1969).

70. B.V.Martin and M.L.Manheim : "A research program for comparison of traffic assignment technique",
H.R.B.Record, 88, pp. 54–82 (1965).

71. M.D.Mesarovic, D.Macko and Y.Takahara : "Theory of hierarchical, multilevel, systems",
Academic Press, pp. 34–65 (1970).

72. J.D.Murchland : "Road network traffic distribution in equilibrium",
Conf. on Mathematical Method in the Economic Sciences, Mathematishes Forschungsinstitut, Oberwolfach, (1969)

73. 長友成樹，小林一夫，矢野俊明，西川清："恵那山トンネルの掘削を終えて",
土木学会誌， 60−3, pp. 9–17 (1975).

74. N.E.Nahi : "Estimation theory and applications",
Wiley, pp. 108–143 (1969).

75. N.E.Nahi and A.N.Trivedi : "Recursive estimation of traffic variables ; section density and average speed",
Trans. Sci., 7−4, pp. 269–286 (1973).

76. 中堀一郎，半田哲，斉藤美邦：" 等時間原則による交通量配分の簡易計算手法",
電子通信学会，回路とシステム理論研究会資料，CT72−79 (1973).

77. I.Nakahori and S.Handa : "Traffic assignment with a

piecewise linear road characteristic",
Proceedings 1974 IEEE, ISCAS, pp. 51–54 (1974).

78. 中堀一郎，西川禕一："交通流配分問題の均衡解を求める新しいアルゴリズム",
電子通信学会論文誌， J59−A−3, pp. 192–199 (1976).

79. 中堀一郎，西川禕一，中崎勝一："多種流配分問題についてのグラフ的考察とアルゴリズム",
電子通信学会論文誌， 掲載予定

80. 中堀一郎，半田哲："OD交通量制御に関する一手法について",
交通工学， 9−5, pp.21–26 (1975).

81. 中堀一郎，中崎勝一："輸送網の需要・供給の均衡解に関する考察",
第13回鉄道サイバネシンポジウム，(発表予定)， (1976).

82. 中堀一郎："都市平面街路における自動車密度推定の一手法",
第17回自動制御連合講演会， pp. 111–112 (1974).

83. 中堀一郎，中崎勝一，植木源治："高速道路における交通状態の推定",
第3回交通工学研究発表会，(発表予定)， (1976).

84. 中崎勝一，中堀一郎："動的交通流配分",
交通工学， 11−2, pp.25–31 (1976).

85. M.Netter："Equilibrium and marginal cost pricing on a road network with several traffic flow types",
Traffic Flow and Transportation, American Elsevier, New York, pp.155–163 (1972).

86. S.Nguyen："An algorithm for the traffic assignment problem",
Trans. Sci., 8−3, pp.203–216 (1974).

87. H.Nicholson and C.D.Swann："The prediction of traffic

flow volumes based on spectral analysis",
Transpn. Res., 8, pp.533–538 (1974).

88. 西川禕一，三宮信夫，小鹿丈夫："線形システムの多重レベル制御による干渉ベクトル調整法",
システムと制御， pp.55–58 (1972).

89. 西川禕一，中堀一郎，他："都市街路に於けるバス交通特性の調査",
第2回交通工学研究発表会， pp.83–86 (1974).

90. I.Okutani and N.Inoue : "Estimation of traveling time between ramps and discharge control on expressway",
Proc.of JSCE, 211, pp.99–107 (1973).

91. 忍見明男・山田隆司："自動車の排気ガス量に関する実験とその解析",
高速道路と自動車， 14–8, pp.55–63 (1971).

92. H.J.Payne, W.A.Thompson and L.Isaksen : "Design of a traffic-responsive control system for a Los Angeles freeway",
IEEE Trans., SMC–3–3, pp.213–224 (1973).

93. H.J.Payne and W.A.Thompson : "Allocation of freeway ramp metering volumes to optimize corridor performance",
IEEE Trans., AC–19–3, pp.177–185 (1976).

94. R.E.Pera and R.Nenzi : "TANA–An operating surveillance system for highway traffic control",
Proceedings of the IEEE, 61–5, pp.542–556 (1973).

95. L.A.Pipes : "Car following models and the fundamental diagram of road traffic",
Transpn.Res., 1, pp.21–29 (1967).

96. R.B.Potts and R.M.Oliver : "Flows in transportation

networks",

Academic Press, pp.49–114 (1972).

97. I.Prigogine : "A Boltzmann-like approach to the statistical theory of traffic flow",
Proc.Symp. on Theory of Traffic Flow, pp.158–164 (1961).

98. P.I.Richards : "Shock waves on the highway",
Ops.Res., **4**, pp.42–51 (1956).

99. 定方希夫："道路交通における渋滞度の計測",
計測自動制御学会論文集， **11−1**, pp.13–19 (1975).

100 最首和雄，森脇義雄："最適な交通流配分について",
電気学会論文誌， **92−C−3**, pp.148–156 (1972).

101. 最首和雄："交通流配分の解法",
電気学会論文誌， **94−C−9**, pp.181–187 (1974).

102. 佐佐木綱："道路網における交通量の配分方法",
日本地域学会年報， **2**, pp.19–34 (1963).

103. 佐佐木綱，井上博司："等時間原則による交通量配分の繰返し計算法",
土木学会論文報告集， **215**, pp.43–47 (1973).

104. T.Sasaki and H.Inoue : "Traffic assignment by analogy to electric circuit",
Proceedings of the 6 th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, pp.495–518 (1974).

105. 佐佐木綱："交通流理論",
技術書院， pp.29–40 (1965).

106. 佐佐木綱，井上矩之："高速道路の事故発生の区間密度による検出法について",

第９回日本道路学会論文集， pp.511–512 (1969).

107. 佐佐木綱："都市交通計画",
国民科学社， (1974).

108. 佐藤弘之，小山茂夫："一般 Sparse 行列の計算と適用例",
電気試験所彙報， 33–8， pp.872–885 (1969).

109. N.Sato and W.F.Tinney : "Techniques for exploiting the sparsity of the network admittance matrix",
IEEE Trans., PAS–82, pp.944–950 (1963).

110. 新谷尚義："数値計算Ｉ",
朝倉書店， pp.65–87 (1967).

111. R.B.Smock : "A comparative discription of a capacity-restrained traffic assignment",
H.R.B.Record, 6; pp.12–40 (1963).

112. R.R.Snell, M.L.Funk, L.T.Fan, F.A.Tillman and J.J.Wang : "Travel assignment with a nonlihear travel-time function",
Trans.Sci., 2–2, pp.146–159 (1968).

113. 添田喬，中溝高好，他："データ取得から制御まで",
計測と制御， 14–1， pp.104–157 (1975).

114. B.W.Stephans, D.A.Rosen, F.J.Mammano and W.L.Gibbs : "Third generation destination signing ; An electronic route guidance system",
H.R.B.Record, 265, pp.1–18 (1968).

115. 杉恵頼寧：交通量需要推計における一般的衡理論のモデル化",
交通工学， 7–6， pp.17–25, (1972).

116. 砂原善文，中島不二雄："交通流に関する推定問題",

第5回統計的制御理論シンポジウム， pp.33-36 (1973).

117. Y.Takahashi, M.J.Rabins and D.M.Auslender："Control and dynamic systems",
Addison-Wesley, pp.666-690 (1970).

118. 龍保夫編："確率統計現象Ⅱ",
岩波講座，基礎工学3， pp.124-136 (1967).

119. W.F.Tinney and J.W.Walker："Direct solutions of sparce network equations by optimally ordered triangular factorization",
Proceedings of the IEEE, 55-1, pp.1801-1809 (1967).

120. J.E.Tolle："Composite car following models",
Transpn.Res., 8, pp.91-96 (1974).

121. 植木源治，栗田静夫，片岡正博，中堀一郎，小林憲明："高速道路トンネル換気設備用電動機と制御方式",
三菱電機技報， 44-12, pp.767-772 (1975).

122. 植木源治，花田虎雄，小滝喜久二，前田和男，中堀一郎："長大道路トンネルにおける換気制御方式に関する考察",
土木学会論文報告集， 投稿中

123. U.S.Dep. of Commerce, Bureau of Public Roads,
"Traffic assignment manual" Washington D.C (1964).

124. R.J.Vaughan："The economic applications of the distribution of traffic volumes",
Trans.Sci., 4-4, pp.365-383 (1970).

125. J.G.Wardrop："Some theoretical aspects of road traffic research",
Proc.Inst of Civil Eng., PartⅡ, 1, pp.325-378 (1952).

126. 渡辺幸太郎，草野英彦："高速道路における電気設備"，
電気学会雑誌， 94−4， pp.38−41 (1974).

127. 渡辺幸太郎，中堀一郎，他："高速道路における自動車密度推定手法の実験的検討"，
三菱電機技報， 49−3， pp.254−258 (1975).

128. D.F.Wilkie and R.G.Stefanek："Precise determination of equilibrium in travel forcasting problems using numerical optimization technique"，
H.R.B.Record， 369， pp.239−252 (1971).

129. M.Wohl："Demand, cost, price and capacity relationships applied to travel forecasting"，
H.R.B. Record， 38， pp.40−54 (1963).

130. 八十島義之助，花岡利章："交通計画"，
技報堂， pp.173−190 (1971).

131. L.S.Yuan and J.B.Kreer："Adjustment of freeway ramp metering to balance entrance ramp queues"，
Transpn. Res.， 5， pp. 127 − 133 (1971).