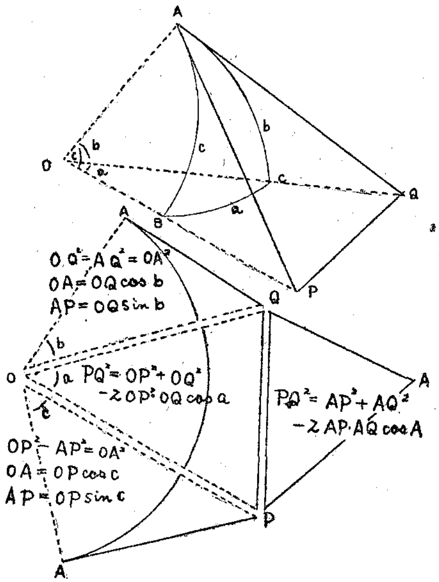
月蝕の豫報計算 (2)

Predictions of Lunar Eclipse.

熊切一男 *K. Kumakiri.*

扨て，第5圖は球面上の三角形を拔き出して，中心と結んだものである．各頂點上に，相隣る二つの弧に依つて出來る角を，球面三角形の“角”と云ひ，つぎの頂點と中心とを結んで出來る角を“邊”と云ふ．圖の様に A, B, C で角を，a, b, c で邊を表すものと定める事にしよう．平面三角形の餘弦法則とは，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ である事は，御承知であらう．此れを利用して，球面上の餘弦法則は，次の如く導き得る．今は判り良い様に，球面三角形を切り開いて考へる事にしよう．



第　5　圖

ΔOPQ に於て

$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cos a\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 ΔAPQ に於て

$$PQ^2=AP^2+AQ^2-2AP\cdot AQ\cos A\ \cdots\cdots\ (2)$$

(1)−(2)

$$(OP^2-AP^2)+(OQ^2-AQ^2)-2OP\cdot AQ\cos a+2AP\cdot AQ\cos A=O\ \cdots(3)$$

然るに，圖にも記した如く

$$OP^2-AP^2=OQ^2-AQ^2=AO^2$$

$$OA=OP\cos c=OQ\cos b,$$

$$OA^2=OP\cos c\cdot OQ\cos b$$

$$AP=OP\sin c,\ \ AQ=OQ\sin b$$

なる事に注意して變形すれば

$$2OP\cdot OQ\cos b\cos c-2OP\cdot OQ\cos a+2OP\cdot OQ\sin b\sin c\sin A=O\ \cdots(4)$$

兩邊を $2OP\cdot OQ$ で除して，整頓すれば，次の如くなる．

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此の式は，球面三角法の公式中，最も重要なものであつて，此れ一つ覺へてゐるだけでも，非常に便利である．

§6. 月蝕方程式　餘弦法則が理解出來れば，此れから月蝕の計算に必要な基本方程式を求める事は容易である．

月と陰影の中心との會合，即ち月が太陽の赤經對衡に極めて接近した時刻Tに於て，

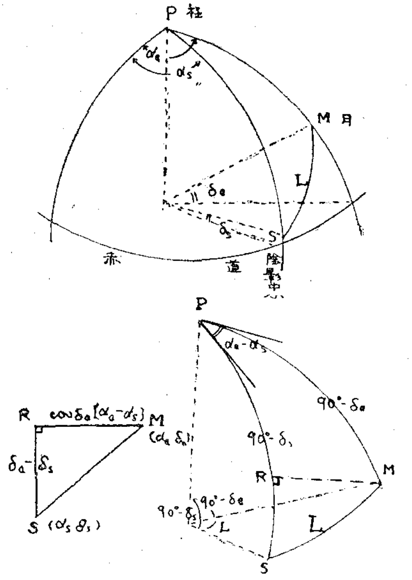
$\alpha_{(}$, $\delta_{(}$：月の中心の赤經，赤緯

α_s, δ_s：陰影中心の赤經，赤緯

L：月と陰影中心との間の距離

と置く．

Lに就いては，後言しなければならないが，勿論，角度で計られた値であつて球面三角形の邊に當るものである．今，此れ等の關係を良く判らせる爲に，第6圖を書いてみた．第6圖から球面三角形 PMS を抜き出すと，その下の圖の如くなる譯である．併し對衡に非常に近い時刻故，$\alpha_{(}-\alpha_s$ は非常に小さく，極めて零に近いのであるが，理解を助ける爲に擴大して書いてある．此の圖と前節の第5圖と比較する事に依つて，容易に餘弦法則を應用して，cos L を求める事が出來よう．



第　6　圖

即ち，球面三角形 PMS に於て

$$\cos L=\cos(90^\circ-\delta_{(})\cos(90^\circ-\delta_s)+\sin(90^\circ-\delta_{(})\sin(90^\circ-\delta_s)\cos(\alpha_{(}-\alpha_s)$$
$$=\sin\delta_{(}\sin\delta_s+\cos\delta_{(}\cos\delta_s\cos(\alpha_{(}-\alpha_s)\cdots(1)$$

となる．然るに，前述した通り，$\alpha_{(}-\alpha_s$ は非常に小い角故，球面三角形 PMS は極めて平面三角形に近い形狀をしてゐると云ひ得る．故に，平面三角法の二倍角の公式を利用すれば

$$\cos L=\cos 2\left(\frac{L}{2}\right)=1-2\sin^2\frac{L}{2}$$

$$\cos(\alpha_{(}-\alpha_s)=\cos 2\frac{(\alpha_{(}-\alpha_s)}{2}=1-2\sin^2\frac{\alpha_{(}-\alpha_s}{2}$$

$$\cos(\delta_{(}-\delta_s)=\cos 2\frac{\delta_{(}-\delta_s}{2}=1-2\sin^2\frac{\delta_{(}-\delta_s}{2}$$

となり，(1)式に代入して行けば

$$1-2\sin^2\frac{L}{2}=\sin\delta_{\text{☾}}\sin\delta_s+\cos\delta_{\text{☾}}\cos\delta_s\left(1-2\sin^2\frac{\alpha_{\text{☾}}-\alpha_s}{2}\right)$$

$$=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sin\delta_{\text{☾}}\sin\delta_s+\cos\delta_{\text{☾}}\cos\delta_s}-2\cos\delta_{\text{☾}}\cos\delta_s\sin^2\frac{\alpha_{\text{☾}}-\alpha_s}{2}$$

$$=\cos(\delta_{\text{☾}}-\delta_s)-2\cos\delta_{\text{☾}}\cos\delta_s\sin^2\frac{\alpha_{\text{☾}}-\alpha_s}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{\delta_{\text{☾}}-\delta_s}{2}-2\cos\delta_{\text{☾}}\cos\delta_s\sin^2\frac{\alpha_{\text{☾}}-\alpha_s}{2}$$

故に，$$\sin^2\frac{L}{2}=\sin^2\frac{\delta_{\text{☾}}-\delta_s}{2}-\cos\delta_{\text{☾}}\cos\delta_s\sin^2\frac{\alpha_{\text{☾}}-\alpha_s}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

と變形される．尙，平面三角法の公式に依れば

$$\cos\delta_{\text{☾}}\cos\delta_s=\frac{1}{2}\cos(\delta_{\text{☾}}+\delta_s)+\frac{1}{2}\cos(\delta_{\text{☾}}-\delta_s)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

である．此の式に於て，$\delta_{\text{☾}}-\delta_s$ は極めて零に近い角故，$\cos(\delta_{\text{☾}}-\delta_s)\fallingdotseq\cos 0°=1$ なる事に注意すれば，(3)式は

$$\cos\delta_{\text{☾}}\cos\delta_s\fallingdotseq\frac{1}{2}\cos(\delta_{\text{☾}}+\delta_s)+\frac{1}{2}$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{2}\cos 2\frac{(\delta_{\text{☾}}+\delta_s)}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{2}\left\{2\cos^2\frac{\delta_{\text{☾}}+\delta_s}{2}-1\right\}+\frac{1}{2}$$

$$\fallingdotseq\cos^2\frac{\delta_{\text{☾}}+\delta_s}{2}$$

となり，此の關係を，(2)式に代入すれば

$$\sin^2\frac{L}{2}=\sin^2\frac{\delta_{\text{☾}}-\delta_s}{2}+\cos^2\frac{\delta_{\text{☾}}+\delta_s}{2}\sin^2\frac{\alpha_{\text{☾}}-\alpha_s}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

然るに，$\frac{L}{2}$，$[\delta_{\text{☾}}-\delta_s]$ 及び $[\alpha_{\text{☾}}-\alpha_s]$ は非常に小さい角故，(4)式は次の如く變形される．但し $\delta'=\frac{\delta_{\text{☾}}+\delta_s}{2}$ である．

$$L^2=[\delta_{\text{☾}}-\delta_s]^2+\cos^2\delta'[\alpha_{\text{☾}}-\alpha_s]^2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

併し，此の式は，決して此んなに苦勞する迄もなく，實は容易に幾何學的に求め得るのであつて，本來の目的——全べての人に樂に判つて頂く爲には，その方法を取る方が賢明だつたかも知れない．卽ち，第6圖の M から PS に垂線 MR を下せば，三角形 MRS は極めて小いから，平面の直角三角形と考へ得る．故に，ピタゴラスの定理に依り，次式が得られる譯である．

$$L^2=RS^2+RM^2=[\delta_{\text{☾}}-\delta_s]^2+\left\{\cos\delta_{\text{☾}}[\alpha_{\text{☾}}-\alpha_s]\right\}^2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

但し，注意すべきは，赤緯の差は，1° は 1° として，何れの部分も等しいが，

赤經の 1° 或は 1^h は，赤緯の餘弦に比例して變化する事である．今，(6)式を(5)式に比べると，$[\alpha_(- \alpha_s]^2$ の項に，前の理に依つて，夫々赤緯の餘弦が乘ぜられてゐるが，一方は $\cos\frac{\delta_(+ \delta_s}{2}$ であり，片方には $\cos\delta_($ が掛けられてゐるので，實際の計算に當つて，何れを採用すべきか，問題と成る譯である．勿論理論上は前者が正しいのであらうが，二者の差は微々たるものでもあらうし，後者の方が便利でもあるから，月そのものゝ赤緯を今後の計算には用ひることとする．

扨て，今，方程式の中に用ひられてゐる量は對衝の時刻に近い時刻 T に於ける狀態の値を示すものを考へてゐるのであるが，併し，Tから微小時間 t だけ變化しても，上の關係式は成立すると考へても，(t が小なる間は) 一向に差支へない譯である．扨て，

$\mu_($，μ_s：月及び陰影の一時間に就いての赤經に於ける運動．

$\nu_($，ν_s：月及び陰影の一時間に就いての赤緯に於ける運動．

と定めると，時刻が T から T+t に變化するに對して，月及陰影の座標は次の位置に移る事に成る．

$\delta_(+ \mu_(\cdot t$，$\alpha_(+ \nu_(\cdot t$　　t 時間後の月の座標．

$\delta_s + \mu_s\cdot t$，$\alpha_s + \nu_s\cdot t$　　t 時間後の陰影座標．

故に，T から t だけ相違した時刻 T+t に於ける關係式は次の如くなる．

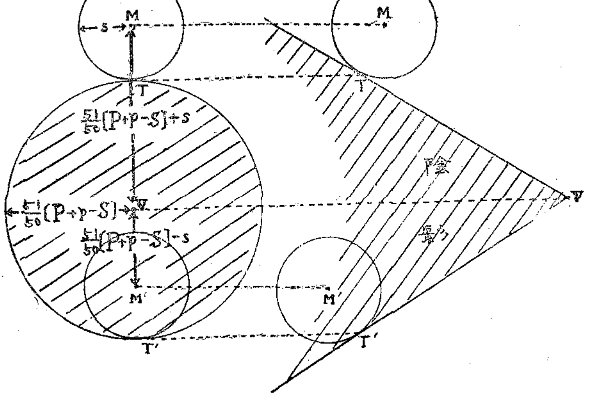
$$L^2 = [(\delta_(+ \delta_(\cdot t) - (\delta_s + \mu_s\cdot t)]^2 + \cos^2\delta_([(\alpha_(+ \nu_(\cdot t) - (\alpha_s + \nu_s\cdot t)]^2$$
$$= [\delta_(- \delta_s + (\mu_(- \mu_s)t] + \cos^2\delta_([\alpha_(- \alpha_s + (\nu_(- \nu_s)t]^2 \quad \cdots\cdots(7)$$

此處で，式を簡單にする爲に，$\mu_(- \mu_s = \mu$，$\nu_(- \nu_s = \nu$ と置けば，μ，ν は月の陰影中心に對する相對運動の，一時間に就いての量を表す．即ち，(7) 式は

$$L^2 = [\delta_(- \delta_s + \mu\cdot t]^2 + \cos^2\delta_([\alpha_(- \alpha_s + \nu\cdot t]^2 \quad \cdots\cdots(8)$$

となる．此の方程式を“月蝕方程式”と呼ぶ事にしよう．扨て，計算に依つて求め樣としてゐるのは，各位相の時刻故，t を求めんとする時刻に關係附ける事が出來るとすれば，月蝕方程式を解いて求めた根は，T に加減すべき値と成る譯である．月蝕方程式中，t と L 以外は皆，既知の量であるから，L が判れば，t は唯一の未知數となる．故に，方程式は解き得る．次節では，t を考へてみる事としよう．

§7. 月と陰影中心間の距離　前述した如く，月蝕方程式を t に就いて解く爲には，L が既知量となれば，充分である．併し，都合の良い事には，或る特別な場合，L は容易に求め得られるのである．即ち，第7圖に見られる樣に，初虧或は復圓の場合には，月と陰影中心との間の距離 L は，陰影の視半徑に月の視半徑を加へた値と成る事は，容易に判る．又，蝕既或は生光の場合は，



第 7 圖

陰影の視半徑から月の視半徑を引き去つた値と成る．此の陰影の視半徑は，§4 月蝕の起る條件のii)で求めた ∠CEV に當る譯であるが，實際は空氣に依つて擴大されるので，幾何學的に求めた値より幾分大きくしなければならない．此の加算量として，人に依つては $\frac{1}{50}$，$\frac{1}{60}$ 又は $\frac{1}{75}$ を採用して，一定してゐないが，今は $\frac{1}{50}$ を加算する事としよう．卽ち，實際計算には L として，次の値を使用する．

$$\text{初虧，復圓：} L_1 = VM = VT + TM = \frac{51}{50}(P+p-S) + s$$

$$\text{蝕既，生光：} L_2 = VM' = VT' - T'M' = \frac{51}{50}(P+p-S) - s$$

III. 月蝕方程式の解法

§8. 方程式の解法　前節の考察で，L の値も求められた譯であるから，月蝕方程式は，t を唯一の未知數とする二次方程式となる．今，若し此の式を解く事が出來るとすれば，此の根は各位相の時刻を求める爲に，對衝の時刻に加減すべき時間を示す値と考へ得る．

扨て，月蝕方程式を解く手段として，少し工夫をする事にし樣．各位相の場合でも同樣であるが，今は初虧の場合に就いて考へてみる．第8圖は，此れから述べんとする諸量の關係圖である．陰影の中心 V を通る子午線 VO を，假に"陰影子午線"と呼ぶ事にしよう．IN は月の天球上に於ける運動徑路を，大圓は陰影，小圓は月を表すものとする．次に，補助量 m, M, n, N, Q を，下の如く定める．

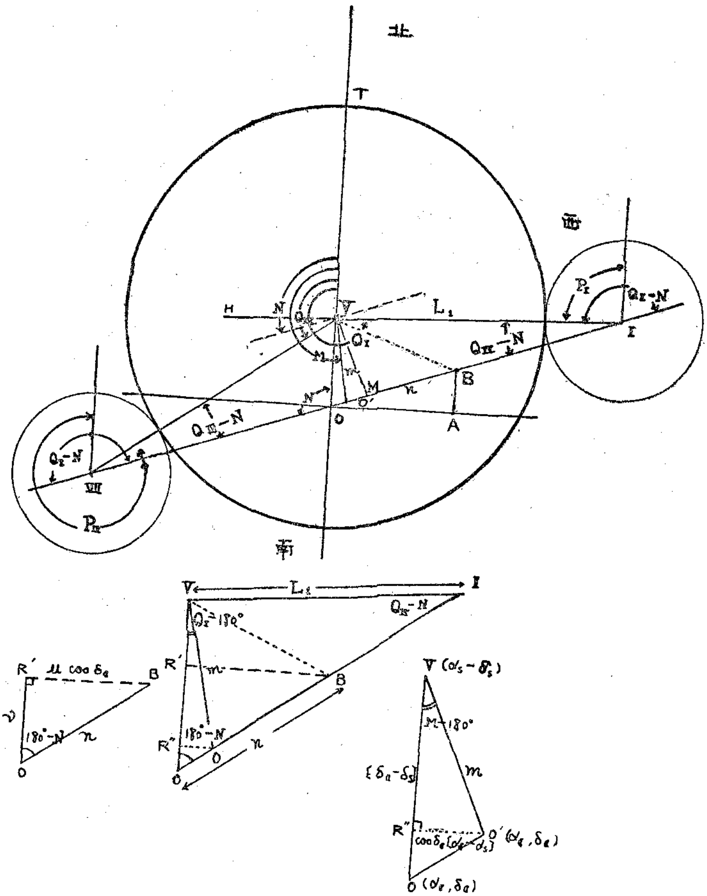
m：時刻 T に於ける月と陰影中心間の距離 (VO).

M：m と陰影子午線となす角 (∠TVO).

n：陰影中心を原點とする月一時間の相對的運動 (BO).

N：陰影子午線と月の徑路とのなす角 (∠TON).

Q：月が陰影に外切或は內切した時，陰影子午線と月及陰影の各中心を結ぶ線分のなす角．各位相に依つて異るから夫々 Q_{I}, Q_{II}, Q_{III}, Q_{IV} の別を規定する．



第　8　圖

扨て，月蝕方程式解法の準備として，上の諸量を使つて，次の如く置いてみる．

$m \sin M = [\alpha_{(} - \alpha_{s}] \cos \delta_{(}$ …………(1)　　$n \sin N = \mu \cos \delta_{(}$ …………(2)

$m \cos M = \delta_{(} - \delta_{s}$ …………………(3)　　$n \cos N = \nu$ …………………(4)

此れ等の式の幾何學的な意味は，第8圖の分解圖から容易に判ると思ふ．尤も對衝の時刻には，m は VO に重つて了ふのであるが，圖は理解し易い樣に，故意に誇張したものである．即ち，對衝に極めて近い時刻 T では，VO と m とは殆んど一致してゐるのであるから，Mは 180° か，又は 0° に定つてゐるのである．此の際，全べて，角度は陰影子午線の北から東に正として計るものとする．今迄の注意から，O 點と O′ 點とは殆んど一致してゐるのであるが，理

解を助ける爲に，圖の如く書くと，(1) (2) の式は △VO′R″ から，(3) (4) の式は △BR′O から容易に求められる譯であるが，圖から求めた場合は，M −180°，180°−N の正弦も餘弦も，正負を考へない鋭角內の話であるが，勿論 180° を加へたり，減じたりする事に依り，一般の角の上の關係式を得る事が出來る．

扨て，上の四式を月蝕方程式に代入すると，方程式は次の如く分解される．

$$L_2=[\delta_☾-\delta_s+\nu t]^2+\left\{\cos\delta_☾[a_☾-a_s+\mu t]\right\}^2$$

$$L^2[\cos^2Q+\sin^2Q=[m\cos M+n\cos N\cdot t]^2+[m\sin M+n\sin N\cdot t]^2$$

卽ち $L\sin Q=m\sin M+n\sin N\cdot t$ ……………………………………(5)

$L\cos Q=m\cos M+n\cos N\cdot t$ ……………………………………(6)

扨て (5)×cos N は $L\sin Q\cos N=m\sin M\cos N+n\sin N\cos N\cdot t$

−) (6)×sin N は $L\cos Q\sin N=m\cos M\sin N+n\cos N\sin N\cdot t$

$L\sin(Q-N)=m\sin(M-N)$ ……………………………(7)

次に (5)×sin N は $L\sin Q\sin N=m\sin M\sin N+n\sin^2N\cdot t$

+) (6)×cos N は $L\cos Q\cos N=m\cos M\cos N+n\cos^2N\cdot t$

$L\cos(Q-N)=m\cos(M-N)+nt$ ……………………(8)

此れで方程式は解けたのであるから，次に此れ等の式から得られる所期の量を求める．但し數値を求める場合は，常に m，n は正とする，(つゞく)

田上天文臺通信

七月中旬には第2ドーム內に Faure-Brandt の振子時計を裝置した．これは標準としてのみならず，一種の裝飾としても，室內を賑はしてゐる．點鐘の音が餘りに大きいので，深夜の近隣を驚かしはせぬかと心がゝりである．地下室に又水が漏り出したので目下修理中．七月下旬には，三伏の炎天下，第1ドーム內のエリソン機を取り去つて，そこへ15センチのアストログラフを裝置した．室が小さいので，非常な無理である．しかし，屋根の一部を切り取つたりして，とにかく，15センチ筒と，13センチ・カメラと，露帽と，全部を附けたまゝ，屋根の開閉が出來るやうになつた．實に不思議である．あたかも，最初から此の第1ドームを此の器械の裝置のために設計したのかと思はれるほど，精密に据え付けが完了した．その代りに，地平に近い星や，天頂の星を見るためには，大變な勞苦である．何れ大東亞の新世界が開かれる時期には，これは第3ドームに收めなければならないものである．(1943—8—10)